Численное моделирование случайных процессов

Лектор: Ромаданова Мария Михайловна, конспект студента ПМИ-3 Згода Ю.

13 июня 2017 г.

Содержание

1 По заданному ряду распределения, функции распределения или плотности смоделировать случайные величины. Построить ряд распределения и функцию распределения, либо плотность и функцию распределения. Отобразить полученные случайные величины на графике и построить гистограмму распределения. Вычислить числовые характеристики: математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение по формулам. Получить те же числовые характеристики, используя стандартные встроенные функции MATLAB.

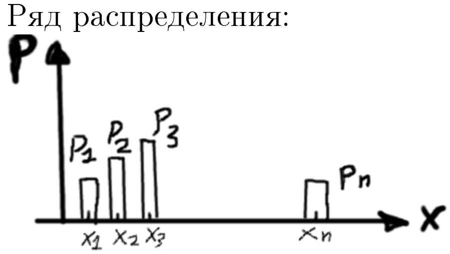
2 Вторая Часть

2.1 Числовые характеристики дискретных случайных величин и их свойства.

Законом распределения случайной величины называется любое соотношение, устанавливающее связь между возможными значениями случайной величины и вероятностями, соответствующими этим значениям.

Рядом распределения дискретной СВ называется совокупность всех ее возможных значений $x_1, x_2, ..., x_n$ и вероятностями $p_1, p_2, ...p_n$ появления каждого из этих событий.

Ряд распределения:



x	x_1	x_2	...	x_n
p	p_1	p_2	...	p_n

Математическое ожидание $M(X) = x_1p_1 + ... + x_np_n = \sum_{i=1}^{n} x_kp_k$ (может быть $n = \infty$)

Свойства математического ожидания:

1. $M(C) = C$,с - константа
2. $M(CX) = CM(X)$
3. $M(XY) = M(X)M(Y)$, X,Y - независимые СВ
4. $M(X+Y) = M(X) + M(Y)$- в данном случае X,Y могут быть не независимыми

Рассмотрим новую случайную величину $X - M(X)$- отклонение случайной величины от ее МО. Это распределение будет принимать значения $x_1 - M(X), x_2 - M(X), ...x_n - M(X)$ с вероятностями $p_1, p_2, ..., p_n$ соответственно.

$M(X - M(X)) = 0$, т.к. $M(X - M(X)) = M(X) - M(M(X)) = M(X) - M(X) = 0$

Дисперсией дискретной СВ называют МО квадрата отклонения СВ от ее МО: $D(X) = M[X - M(X)]^2$

$D(X) = M\left[X^2 - 2X \cdot M(X) + (M(X))^2\right] = M(X)^2 - (M(X))^2$

Свойства дисперсии:

1. $D(C) = 0$,C-const, $D(C) = M[C - M(C)]^2 = 0$
2. $D(CX) = C^2 D(X)$
3. $D(X + Y) = D(X) + D(Y)$, X, Y - независимые
4. $D(X - Y) = D(X) + D(-Y) = D(X) + D(Y)$

Средним квадратическим отклонением СВ называется отклонение квадратный корень из дисперсии: $\sigma(X) = \sqrt{D(X)}$ - данное понятие нужно для совпадения размерностей.

В Matlab есть встроенные функции: mean (МО), var (varience), std (среднее квадратическое отклонение)

Введем m=1000, u=rand(1,m), тогда мы можем применить эти функции: man(u),var(u), std(u). Полученные результаты будут сходиться с формулами.

Пусть $X_1, X_2, ..., X_n$- независимые случайные величины, то $X = X_1 + X_2 + ... + X_n$

$D(X) = D(X_1) + D(X_2) + ... + D(X_n)$

$\sqrt{D(X)} = \sqrt{D(X_1) + D(X_2) + ... + D(X_n)}$

$\sigma(X) = \sqrt{\sigma^2(X_1) + ... + \sigma^2(X_n)}$

2.2 Функция распределения и её свойства. Плотность вероятности и её свойства.

Рассмотрим СВ X. Ее **функцией распределения** называется функция $F_X(x) = P(X \leq x)$

Свойства:

1. $0 \leq F(x) \leq 1$
2. $F(x)$- неубывающая, $F(x_2) > F(x_1), x_2 > x_1$??? Здесь ведь $\geq$ должно быть (по крайней мере, первый знак неравенства)
3. $P(a < X < b) = F(b) - F(a)$??? В силу того, что ФР непрерывна справа, здесь должно быть ... $\leq X <$ ... в противном случае нужно рассматривать в выражении пределы. Т.е. это выполняется только в том случае, если СВ непрерывна.
4. $P(x_1 < X < x_1 + \Delta x) = F(x_1 + \Delta x) - F(x_1)$ Вероятность того, что непрерывная СВ примет одно конкретное значение, равняется нулю.
5. $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$, $\lim_{x \to +\infty} F(x) = 1$

Плотность - производная от функции распределения, $f(x) = F'(x)$

Свойства:

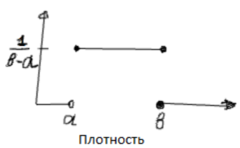
1. $P(a < x < b) = \int_a^b f(x)\,dx$
2. $F(x) = \int_{-\infty}^x f(t)\,dt = P(-\infty < X < x)$, т.ек. $F(x) = P(X \leq x) = P(-\infty < X \leq x)$
3. $f(x) \geq 0$
4. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$

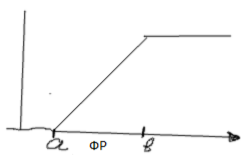
2.3 Равномерное распределение на отрезке [a, b]. Плотность и функция распределения равномерного распределения. Моделирование случайных величин, равномерно распределённых на отрезке [a, b] в MATLAB, и построение гистограммы распределения. Вычисление числовых характеристик: математического ожидания, дисперсии, среднего квадратического отклонения.

Случайная величина имеет **непрерывное равномерное распределение** на отрезке от a до b, где $a, b \in R$,

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & x \in [a,b] \\ 0 & x \notin [a,b] \end{cases}, \ X \sim U[a,b]$$

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \int_{a}^{x} \frac{1}{b-a}dt = \frac{x-a}{b-a} \ a \le x < b, \text{ т.е. } F(x) = \begin{cases} 0 & x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & a \le x < b \\ 1 & x \ge b \end{cases}$$





Математическое ожидание $E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} x \frac{1}{b-a} dx = \frac{1}{b-a} \int_{a}^{b} x dx = \frac{1}{b-a} \frac{x^2}{2}\Big|_a^b = \frac{b^2-a^2}{2(b-a)} = \frac{a+b}{2}$

$D(X) = E\left((X - E(X))^2\right) = E(X^2) - (E(X))^2$

$E(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{b-a} dx = \frac{1}{b-a} \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 dx = \frac{1}{b-a} \frac{x^3}{3}\Big|_a^b = \frac{b^3-a^3}{3(b-a)} = \frac{(b-a)\left(b^2+ba+a^2\right)}{3(b-a)} = \frac{b^2+ba+a^2}{3}$

$D(X) = \frac{b^2+ba+a^2}{3} - \frac{(a+b)^2}{4} = \frac{4b^2+4ba+4a^2-3a^2-6ab-3b^2}{12} = \frac{(a-b)^2}{12}$

Если $X \tilde{} U[0,1]$, то $Y = a + (b-a) \cdot X \Rightarrow Y \sim U[a,b]$

Дискретный случай

$p(x) = \frac{1}{n}$, $x = a, a+1, a+2, a+n-1$

n - параметр масштаба

a - параметр положения, число возможных значений $n \ge 2$

Таблица:

x	a+1	...	a+n-1
p	$\frac{1}{n}$	...	$\frac{1}{n}$

Функция распределения: $F(x) = \begin{cases} 0 & x \le a \\ \frac{k+1}{n} & a+k < x < a+k+1 \\ 1 & x > a+n-1 \end{cases}$

$M(X) = a + \frac{n-1}{2}$, $D(X) = \frac{n^2-1}{12}$, $\sigma(X) = \sqrt{D(X)}$

$X_i = [n \cdot r_i] + a$, где r_i имеют равномерное распределеелние на отрезке $(0,1)$, $r_i \sim U(0,1)$

2.4 Нормальное распределение N(μ,σ2). Плотность и функция распределения нормального распределения. Функция Лапласа. Свойства плотности нормального распределения. Построение плотности и функции распределения в MATLAB, моделирование случайных величин и построение гистограммы распределения. Вычисление числовых характеристик: математического ожидания, дисперсии, среднего квадратического отклонения.

Плотность функции распределения имеет вид:

$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$

Функция распределения $N(\mu, \sigma^2) = F(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}} dt$

Когда $\mu = 0, \sigma = 1,\ F_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$

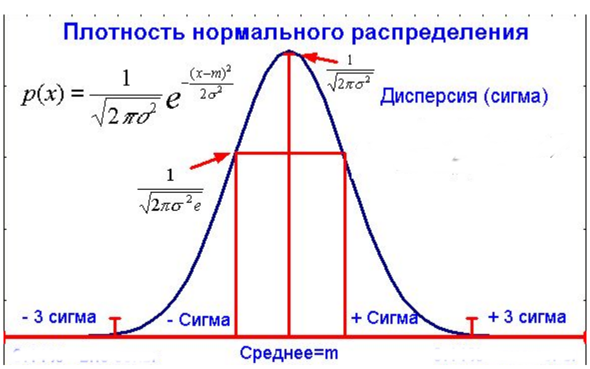
$F_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{0} e^{-\frac{t^2}{2}} dt + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = 0,5 + \Phi(x)$, где $\Phi(x)$ - функция Лапласа, $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{x} e^{-t^2} dt$

$F(x) = F_0\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) = 0,5 + \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$

Иногда вместо этой функции используют вид: $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \Rightarrow \overline{\Phi}(x) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ (или же интеграл ошибок, error function): $erf(x) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{x} e^{-t^2} dt = 2\Phi\left(x\sqrt{2}\right)$.

Свойства нормального распределения:

1. Функция плотности определена на всей оси
2. $f(x) > 0 \forall x \in \mathcal{R}$
3. $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0,\ \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$
4. $\max f(x) = f(\mu) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$
5. График функции плотности симметричен относительно прямой $x = \mu$
6. График функции $f(x)$ имеет 2 точки перегба, симметричные относительно точки $x = \mu$ и эти точки перегиба имеют координаты $x_{1,2} = \mu \pm \delta,\ f(x_{1,2}) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi e}}$



2.5 Вероятность попадания нормально распределенной случайной величины в заданный интервал. Правило 3 сигм. Моделирование случайных величин с нормальным распределением N(μ,σ2) в MATLAB.

(α, β)

$P(\alpha < x < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha-\mu}{\sigma}\right)$, где $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t}{2}} dt$ - функция Лапласа

$|x-\mu| < \delta \to \mu - \delta < x < \mu + \delta$

$P(|x-\mu| < \delta) = P(\mu - \delta < x < \mu + \delta) = \Phi\left(\frac{\mu+\delta-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\mu-\delta-\mu}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right) - \Phi\left(-\frac{\delta}{\sigma}\right) = 2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right).$

Если

$\delta = \sigma : P(|x-\mu| < \sigma) = 2\Phi(1) = 0,6827$

$\delta = 2\sigma : P(|x-\mu| < 2\sigma) = 2\phi(2) = 0,9545$

$\delta = 3\sigma : P(|x-\mu| < 3\sigma) = \Phi(3) = 0,9973$

Больше чем 3σ можно принебречь.

Правило: с вероятностью 0,9973 значение нормального распределения СВ лежит в интервале $[\mu - 3\sigma; \mu + 3\sigma]$

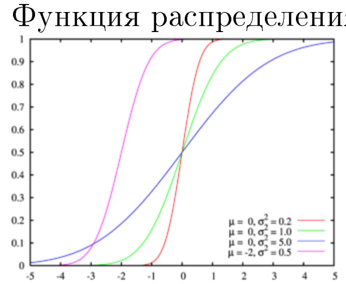
$X \sim N(0,1), Y = \mu + \sigma X \sim N(\mu, \sigma^2)$

$E(X) = 0, D(X) = 1$

$E(Y) = E(\mu) + \sigma E(x) = \mu$

$D(Y) = D(\mu) + \sigma^2 D(x) = \sigma^2$

Функция распределения

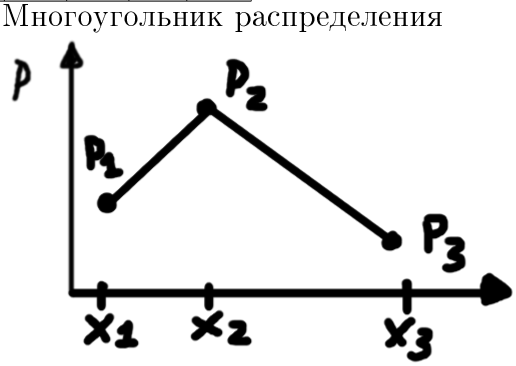


2.6 Моделирование дискретных случайных величин. Общий метод: моделирование а) по заданному закону распределения; б) по заданной функции распределения. Вычисление числовых характеристик.

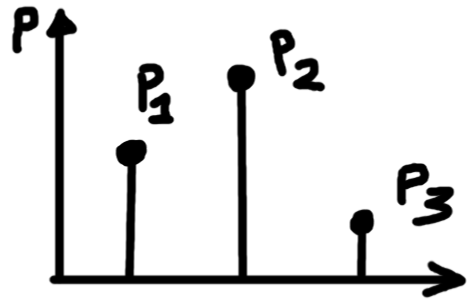
x	x_1	x_2	...	x_n
p	p_1	p_2	...	p_n

, $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$

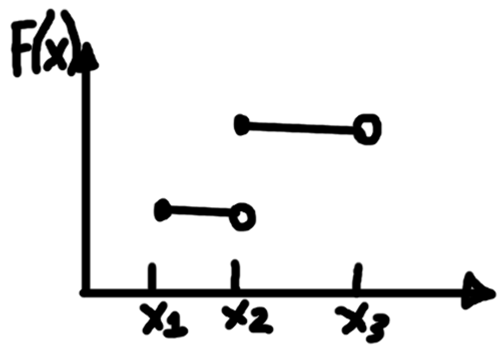
Многоугольник распределения



Ряд распределения



Функция распределения.



Функция распределения для дискретной целочисленной случайной величины:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \leq x_1 \\ \sum_{i=0}^{k} p_i & k = 1, 2, ..., n \\ 1 & x \geq x_n \end{cases}$$

Общий метод моделирования дискретной СВ.

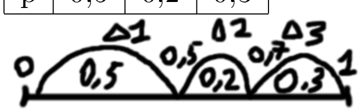
$X \in \{x_1, ..., x_n\}$

№1. Отрезок $[0, 1]$ разбивается на n непересекающихся участков, длины которых равны $p(x_i)$ или p_i . Устанавливается взаимно однозначное соответствие в множество указанных участков и множество генерируемых ДСВ. При этом, участку длины p_i соответствует значение x_i.

№2. Моделируется непрерывная СВ Y с равномерным распределением на отрезке аи $[0, 1]$. Она попадает на один из указанных участков. Значение X_i , соответствующее этому участку, принимается за реализацию X.

Пример:

x	x_1	x_2	x_3
p	0,5	0,2	0,3



??? Надо будет доответить

2.7 Моделирование дискретных случайных величин. Частный метод: моделирование дискретного равномерного распределения. Вычисление числовых характеристик.

Функции округления:

round - до ближайшего целого, floor - возвращает значения, округленные до ближайшего целого $\leq X$, fix - усечение дробной части числа, ceil - возвращает значения, округленные до ближайшего целого $\geq X$

См. 2.3.

2.8 Моделирование непрерывных случайных величин. Общие методы. Метод обратной функции. Моделирование случайных величин экспоненциально распределенных с параметром λ .

Метод обратной функции

Моделирование случайных величин экспоненциально распределенных с параметром λ.

Плотность $f_Y(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$, ФР: $F_Y(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$

Если случайная величина $X \sim U[0,1]$, то $Y = -\frac{1}{\lambda} \ln(X) \sim Exp(\lambda)$.

МО: $E(Y) = \frac{1}{\lambda}$, $D(Y) = \frac{1}{\lambda^2}$, $\sigma(Y) = \frac{1}{\lambda}$

2.9 Моделирование непрерывных случайных величин. Общие методы. Метод Неймана.

???

2.10 Приближенное моделирование нормальной случайной величины на основе центральной предельной теоремы.

Пусть $R \in U[0,1]$, $M(R) = \frac{1}{2}$, $D(R) = \frac{1}{12}$.

Тогда $M\left(\sum_{j=1}^{n} R_j\right) = \frac{n}{2}$, $D\left(\sum_{j=1}^{n} R_j\right) = \frac{n}{12}$

$std\left(\sum_{j=1}^{n} R_j\right) = \sqrt{\frac{n}{12}}$

Нормируем:

$\frac{\sum_{j=1}^{n} R_j - \frac{n}{2}}{\sqrt{\frac{n}{12}}}$ - в силу центральной предельной теоремы, при $n \to \infty$ распределение этой нормированной случайной величины стремится к $\sim N(0,1)$. При конечном n распределение приближенно нормальное. В частности, при $n = 12 : \sum_{j=1}^{n} R_j - 6 \sim N(0,1)$

2.11 Метод Бокса-Мюллера.

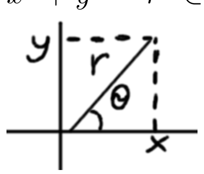
Стандартные величины $z_1, ..., z_n \sim N(0,1)$ то СВ $X = z_1^2 + ... + z_n^2$.

$k = 2$, то $X \in Exp\left(\frac{1}{2}\right)$

$X \sim N(0,1), Y \sim N(0,1)$

$X = r \cdot cos(\vartheta), Y = rsin(\vartheta)$,

$x^2 + y^2 = r^2 \in Exp\left(\frac{1}{2}\right)$



$\vartheta \pm U\left[0, 2\pi\right]$
Метод обратной функции - экспоненциоп. распределение.
1. Генерируем 2 СВ
от 0 до 2π,
другая с эк. распред.
$u \in U\left[0,1\right], v \in U\left[0,1\right]$.
$\vartheta = 2\pi u \sim U\left[0, 2\pi\right]$
$f\left(x\right) = -\frac{lnx}{\lambda}$
$r^2 = -2ln\left(v\right) \Rightarrow r = \sqrt{-2ln\left(v\right)}$
$X = \sqrt{-2ln\left(v\right)}cos\left(2\pi u\right), Y = \sqrt{-2ln\left(v\right)}\sin\left(2\pi u\right)$
Из полярных координат переходим обратно в декартовы
$s = X^2 + Y^2$, если $0 < s < 1$
$cos\left(\vartheta\right) = \frac{x}{\sqrt{s}}, sin\left(\vartheta\right) = \frac{y}{\sqrt{s}}$
$X \in U\left[-1;1\right], Y \in U\left[-1,1\right], 0 < s < 1$
$x = \frac{x}{\sqrt{s}} \cdot \sqrt{-2ln\left(s\right)} = x\sqrt{\frac{-2ln(s)}{s}}$
$y = \frac{y}{\sqrt{s}}\sqrt{-2ln\left(s\right)} = y\sqrt{\frac{-2ln(s)}{s}}$
$z = \left[xy\right]$
$z1 = \mu + \sigma z$

2.12 Моделирование многомерного гауссовского распределения

$\xi = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n)$- случайный вектор, имеющий многомерное нормальное распределение с вектором математических ожиданий $\mu = (\mu_1 \mu_2, ...\mu_n)$ и ковариационной матрицей $\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \dots & \sigma_{1n} \\ \vdots & & & \\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & \dots & \sigma_{nn} \end{pmatrix}$
$\sigma_{ij} = M\left[\left(\xi_i - \mu_i\right)\left(\xi_j - \mu_j\right)\right]$ симметричная положительно определенная матрица.

Тогда $\xi = A\eta + \mu$, где η - вектор, каждая компонента которого имеет рапределение $N\left(0,1\right)$

где A - нижняя треугольная матрица, полученная из матрицы Σ разложением Холецкого $\sum = A \cdot A^T$

3 Третья Часть

3.1 Вероятностные пространства, случайные величины и случайные процессы.

Определение: Пусть Ω- заданное множество, тогда σ - алгебра на Ω есть семейство $\mathcal{F}$ - подмножеств со следующими со следующими свойствами

1. $\phi \in \mathcal{F}$
2. $F \in F \Rightarrow F^C \in F$ где $F^C = \Omega / F$ дополнение множества F в Ω
3. $A_1, A_2 \in \mathcal{F} \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$

Пара $(\Omega, \mathcal{F})$называется измеримым прсотранством.

Вероятностной мерой на измеримом пространстве $(\Omega, \mathcal{F})$ называется функция $P : F \to [0, 1]$ такая что

1. $P(0) = 0, P(\Omega) = 1$
2. Если $A_1, A_2, ... \in \mathcal{F}$ и $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ - непересекающаяся система ($A_i \bigcap A_j = \emptyset$ при$i \neq j$), то $P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$

Тройка (Ω, F, P) называется **вероятностным пространством**.

Вероятностное пространство называется **полным**, если $\mathcal{F}$ содержит все подмножества G множества Ω с P - внешней мерой ноль, т.е. такие подмножества, что

$P^*(G) = inf(P(F); F \in \mathcal{F}, G \in \mathcal{F}) = 0$

Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ - заданное вероятностное пространство. Тогда функция $Y : \Omega \to \mathcal{R}^N$ называется **$\mathcal{F}$-измеримой**, если $Y^{-1}(U) := \{\omega \in \Omega, Y(\omega) \in U\} \in \mathcal{F}$ для всех открытых множеств $U \in \mathcal{R}^n$

Если $X : \Omega \to \mathcal{R}^N$- произвольная функция, то σ -алгебра $\mathcal{H}_X$порожденная X есть наименьшая σ - алгебра на Ω, содержащая все множества $U \in \mathcal{R}^n$ открыты. ???

Случайная величина X есть $\mathcal{F}$-измеримая функция $X : \Omega \to \mathcal{R}^n$. Каждая случайная величина порождает вероятностную меру μ_X на $\mathcal{R}^n$, определеяемую равенством $\mu_X(B) = P(X^{-1}(B))$. Мера μ_X называется **распределением величины** X. Если $\int_{\Omega} |X(\omega)| dP(\omega) < \infty$, то число $E[X] = \int_{\Omega} X(\omega) dP(\omega) = \int_{\mathcal{R}^n} x d\mu_X(x)$ называется **математическим ожиданием** величины X (относительно меры P)

Случайный процесс - это параметризованный набор случайных величин $\{X_t\}_{t\in T}$определенных на вероятностном пространстве пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ и принимающих значения в $\mathcal{R}^n$. Множеством параметров T обычно является полупрямая $[0, \infty)$, однако это может быть и отрезок $[a, b]$.

Другое определение: Случайным процессом на интервале $T \subset \mathcal{R}$ называется семейство СВ $X = (X_t)_{t\in T}$ (относительно базиса $(\Omega, \mathcal{F}, P)$) - это функция от двух аргументов $X_t(\omega), \omega \in \mathcal{R}$

Для каждого фиксирвоанного $t \in T$ мы получаем случайную величину $\omega \mapsto X_t(\omega), \omega \in \Omega$

С другой стороны, фиксируя $\omega \in \Omega$, мы можем рассмотреть функцию $t \mapsto X_\tau(\omega), t \in T$ которая называется **траекторией процесса** X_t

3.2 Условное математическое ожидание и его свойства.

Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ - вероятностное пространство, $X \to \mathcal{R}^n$ - СВ; $E(|X|) < \infty$. Если $\mathcal{H} \in \mathcal{F}$ есть σ -алгебра, то **условное математическое ожидание случайной величины** X **относительно** $\mathcal{H}$ $E[X|\mathcal{H}]$ - функция, действующая из Ω в $\mathcal{R}^n$ и удовлетворяющая условиям:

1. $E[X|\mathcal{H}]$ является $\mathcal{H}$- измеримой функцией
2. $\int_H E[X|\mathcal{H}] = \int_H X dP$ для всех $H \in \mathcal{H}$

Свойства условного МО:

Пусть $Y : \Omega \to \mathcal{R}^n$ - другая случайная величина с математическим ожиданием $E[|Y|] < \infty$ и пусть a и $b \in \mathcal{R}^n$. тогда:

1. $E[aX + bY|\mathcal{H}] = aE[X|\mathcal{H}] + bE[Y|\mathcal{H}]$

2. $E\left[E\left[X|\mathcal{H}\right]\right]=E\left[X\right]$
3. $E\left[X|\mathcal{H}\right]=X$, если X - $\mathcal{H}$- измеримая функция.
4. $E\left[X|\mathcal{H}\right]=E\left[X\right]$, если X не зависит от $\mathcal{H}$
5. $E\left[Y\cdot X|\mathcal{H}\right]=Y\cdot E\left[X|\mathcal{H}\right]$, если Y - $\mathcal{H}$-измеримая случайная величина. $\cdot$ означает скалярное произведение в $\mathcal{R}^n$.

Доказательство:

№4. Если X не зависит от $\mathcal{H}$, то для $H\in\mathcal{H}$ мы получаем $\int_H XdP=\int_\Omega X\cdot I_HdP=\int_\Omega XdP\cdot\int_\Omega I_HdP=E\left(X\right)P\left(H\right)$

Следовательно, постоянное значение $E\left[X\right]$ удовлетворяет условиям (1) и (2) из определения.

№5. Сначала докажем результат для случая, когда $Y=I_H$ для некоторого $H\in\mathcal{H}$. Тогда для всех $G\in\mathcal{H}$ мы имеем $\int_G Y\cdot E\left[X|\mathcal{H}\right]dP=\int_{G\bigcap H}E\left[X|\mathcal{H}\right]dP=\int_{G\bigcap H}XdP=\int_G Y\cdot XdP$

Следовательно, $Y\cdot E\left[X|\mathcal{H}\right]$удовлетворяет условиям (1) и (2).

Аналогично доказывается, что утверждение справедливо если Y - простая функция: $Y=\sum_{j=1}^m c_jI_{H_j}$ где $H_j\in\mathcal{H}$. В общем случае утверждение следует из аппроксимации величины Y такими простыми функциями.

Теорема 1: Пусть $G,\mathcal{H}$- σ - алгебры такие, что $G\subset\mathcal{H}$, тогда $E\left[X|G\right]=E\left[E\left[X|\mathcal{H}\right]|G\right]$

Теорема 2 (Неравенство Йенсена): если $\Phi:\mathcal{R}\to R$ - выпуклая функция и $E\left[|\Phi\left(X\right)\right]<\infty$, то $\Phi\left(E\left[X|\mathcal{H}\right]\right)\le E\left[\Phi\left(X\right)|\mathcal{H}\right]$

Следствия:

1. $E\left[X|\mathcal{H}\right]\le E\left[|X|\,|\mathcal{H}\right]$
2. $\left(E\left[X|\mathcal{H}\right]\right)^2\le E\left[|X|^2\,|\mathcal{H}\right]$

Если $X_n\to X$ в то $E\left[X_n|\mathcal{H}\right]\to E\left[X|\mathcal{H}\right]$ в L^2.

3.3 Мартингалы, субмартингалы и супермартингалы. Привести примеры.

Адаптированный СП $\left(X_t\right)_{t\ge0}$ называется **мартингалом** если $\forall t\ge0$ $E\left|X_t\right|<\infty$, $E\left(X_{t+s}|\mathcal{F}_t\right)=X_t$(P - почти наверное) $s,t\ge0$

(предыдущие два условия - *)

Адаптированный СП $\left(X_t\right)_{t\ge0}$ называется **субмартингалом**, если он удовлетвоярет условию (*) и $E\left(X_{t+s}|\mathcal{F}_t\right)\ge X_t$

Адаптированный СП $\left(X_t\right)_{t\ge0}$ называется **супермартингалом**, если он удовлетворяет условию (*) и $E\left[X_{t+s}|\mathcal{F}_t\right]\le X_t$

Если $X_t\left(t\ge0\right)$- субмартингал, то процесс $\left(-X_t\right)$- супермартингал.

$\left(X_t\right)_{t\ge0}$ называется **мартингал-разностью** если он удовлетворяет условию (*) и выполянется $E\left[X_{t+s}|\mathcal{F}_t\right]=0$

Пусть задана некоторая фильтрация $\{\mathcal{F}_t,t\in T\subset\mathcal{R}\}$, т.е. неубывающее семейство σ - алгебры $\mathcal{F}_t\in\mathcal{F},t\in T(\mathcal{F}_s\in\mathcal{F}_t$ при $s\le t,t\in T$).

Последовательность СВ $\left(X_t\right)\left(t\ge0\right)$ называется **адаптированной относительно фильтрации** F_t, если $\forall t\ge0$ СВ X измерима относительно σ - алгебры F_t.

Адаптированный случайный процесс $X_t\left(t\ge0\right)$ наызывается **мартингалом**, если для всех $t\ge0$

1. $E(X_t) < \infty$

2. $E(X_{t+s}|\mathcal{F}_t) = X_t$

Мартингал является одновременно и субмартингалом и супермартингалом.

№1. $X_t = \sum_{k=1}^{t} \xi_k (t \geq 0$ целое$)$, $(\xi_t)_1^{\infty}$ - последовательности независимых СВ, для которых $E\xi_t = 0$

$E(X_{t+1}|\mathcal{F}_t) = E\left(\sum_{k=1}^{t+1} \xi_k|\mathcal{F}_t\right) = E\left(\sum_{k=1}^{t+1} \xi_k|\xi_1, \xi_2, ..., \xi_t\right) = \sum_{k=1}^{t} \xi_k + E(\xi_{t+1}|\xi_1, \xi_2, ..., \xi_t) = \sum_{k=1}^{t} \xi_k = X_t + E(\xi_{t+1}) = X_t$

№2. $X_t = \sum_{k=1}^{t} \xi_k$, $(\xi_t)_1^{\infty}$ - мартингал-разность.

$E\left(\sum_{k=1}^{t+1} \xi_k|\xi_1, \xi_2, ..., \xi_k\right) = \sum_{k=1}^{t} \xi_k + E(\xi_{t+1}|\xi_1, ..., \xi_k) = X_t$

№3. $X_t = \bigcap \xi_k$, $(\xi_t)_1^{\infty}$,$(\xi_t)_1^{\infty}$ - разность независимых СВ, $E\xi_k = \alpha$

$E\left(\prod_{k=1}^{t} \xi_k|\xi_1, ..., \xi_t\right) = \prod_{k=1}^{t} \xi_k \cdot E(\xi_{t+1}|\xi_1, ..., \xi_t) = X_t$

№4. $X_t = E(\xi|F_t)$,где ξ - СВ с конечным МО

$E(X_{t+1}|F_t) = E(E(\xi|F_{t+1})|F_t) = E(\xi|F_t) = X_t$

Примеры субмартингалов

№1. $X_t = \sum_{k=1}^{t} \xi_t, (t \geq 0)$, ξ_k - последовательность неотрицательных интегрируемых СВ

$E\left(\sum_{k=1}^{t+1} \xi_k|\xi_1, ..., \xi_t\right) = \sum_{k=1}^{t} \xi_k + E(\xi_{t+1}|\xi_1, ...\xi_t) \geq X_t$

№2. $X_t = g(\xi_t)$, где ξ_t - мартингал, g - выпуклая вниз функция, $E|g(\xi_t)| < \infty$, $t \geq 0$

Неравенство Йенсена: $\phi(E[x|\mathcal{H}]) \leq E[\phi(x)|\mathcal{H}]$

$E(X_{t+1}|F_t) = E(g(\xi_{t+1})|F_t) \geq g(E(\xi_{t+1}|F_t)) = g(\xi_t) = X_t$

№3. $X_t = Y_t^+$, где $Y^+ = max(0, Y)$, где $(Y_t, \mathcal{F}_t)$ - субмартингал.

$E(X_{t+1}|F_t) = E\left(Y_{t+1}^+|F_t\right) = E(max(0, Y_{t+1})|F_t) \geq max(0, E(Y_{t+1}|\mathcal{F}_t)) \geq max(0, Y_t) = Y_t^+ = X_t$

3.4 Предельные теоремы для мартингалов.

Предельные теоремы для мартингалов

Пусть $(X_n, F_n)_{n\in\mathcal{N}}$- субмартингал и (a, b) - непустой интервал.

Определим марковские моменты

$\tau_1 = min(t \geq 0 : X_t \leq a)$

$\tau_2 = min(t \geq \tau_1, X_t \geq b)$

...

$\tau_{2,m-1} = min(t \geq \tau_{2m-2} : X_t \leq a)$

$\tau_{2m} = min(t \geq \tau_{2m-1} : X_t \geq b)$

...

Введем СВ $\beta_N(a, b) = \begin{cases} 0 & \tau_2 > N \\ max\{m : \tau_{2m} \leq N\} & \tau_2 \leq N \end{cases}$???

$\beta_N(a, b)$ - число пересечений снизу вверх интервала $[a, b]$ последовательностью $X_1...X_t$

Лемма (о числе пересечений; Дуб)

Для описанных выше величин справедливо неравенство $E\beta_N(a, b) \leq \frac{E(X_N - a)^+}{b-a} \leq \frac{EX_N^+ + (a)}{b-a}$ где $X^+ = \max(0, X)$

Доказательство:

Т.к. $\beta_N(a,b)$ для последовательности $(X_n, F_n)_{n\in N}$ совпадает с $\beta_N(0, b-a)$ для последовательности $\left((X_N - a)^+, F_n\right)_{n\in N}$ мы будем считать, что $a = 0$ и $X_n \geq 0, n \in N$.

Положим $X_0 = 0, F_0 = \{\emptyset, \Omega\}$

Пусть для $i \in N, \phi_i = 1\{\tau_m < \tau \leq \tau_{m+1}$ для нечетного$m\}$

Тогда в $\beta_N(0,b) \leq \sum_{i=1}^N (X_i - X_{i-1})\phi_i$

Заметим, что $\{\phi_i = 1\} = U_m\{\{\tau_m < i\}\{\tau_{m+1} < 1\}\} \subset F_{i+1}, i \in \mathcal{N}$???

Поэтому в $E\beta_N(a,b) \leq \sum_{i=1}^N E[(X_i - X_{i-1})\phi_i] = \sum_{i=1}^N E[\phi_i(E(X_i|F_{i-1}) - X_{i-1})] \leq$

$\leq \sum_{i=1}^N E[E(X_i|F_{i-1}) - X_{i+1}] = \sum_{i=1}^N (EX_i - EX_{i-1}) = EX_N$

Теорема: пусть $(X_n, F_n)_{n\in N}$ - субмартингал такой, что $sup_n E|X_n| < \infty$. Тогда с вероятностью 1 существует $X_\infty = \lim\limits_{n\to\infty} X_n$ причем $E|X_\infty| < \infty$

Доказательство:

Пусть $\underline{X} = \lim\limits_{n\to\infty} \inf X_n, \overline{X} = \lim\limits_{n\to\infty} sup X_n$

Допустим, что $P\left(\underline{X} < \overline{X}\right) > 0$. Т.к. $\left\{\underline{X} < \overline{X}\right\} = \bigcup\limits_{a,b\in Q, a<b} \left\{\underline{X} < a < b < \overline{X}\right\}$???

$E\beta_N(a,b) \leq \frac{EX_N^+ + (a)}{b-a}$

Обозначим $\beta_\infty(a,b) = \lim\limits_{N\to\infty} \beta(a,b)$

$E\beta_\infty(a,b) \leq \frac{\sup\limits_n EX_N^+ + |a|}{b-a}$

Заметим, что для субмартингалов $(X_n, F_n)_n \in N$

$\sup\limits_n EX_n^+ < \infty \Leftrightarrow sup E|X_n| < \infty$

Т.к. $EX_n^+ \leq E|X_n| = 2EX_n^+ - EX_n \leq 2EX_n^+ - EX_1$

Следовательно, $E\beta_\infty(a,b) < \infty$ почти наверное, что противоречит предположению, что $P\left(\underline{X} < a < b < \overline{X}\right) > 0$.

Таким образом, $P\left\{\underline{X} < \overline{X}\right\} = 0$. По лемме Фату $E|X_\infty| \leq \sup\limits_n E|X_n| < \infty$. **Доказано**

3.5 Многомерное гауссовское распределение.

Если X - СВ, имеет **нормальное** или **гауссовское распределение** с плотностью $f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right)$, $m = EX, \sigma^2 = E(X - m^2)$.

Характеристическая функция $\phi_X(\alpha) = E[e^{i\alpha x}]$, $\phi_x(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\alpha x} f_X(x)\,dx$. Для гауссовского распределения $\phi_X(\alpha) = E\left[e^{i\alpha X}\right] = exp\left(i\alpha m - \frac{\alpha^2\sigma^2}{2}\right)$

Рассмотрим **многомерную гауссовскую СВ** $X = (X_1, X_2, ..., X_n)^T, m = (m_1, m_2, ..., m_n)^T$? $B = (b_{kl})_{n\times n}$- **матрица ковариаций**, $b_{kl} = E[(X_k - m_k)(x_l - m_l)]$

Характеристическая функция

$\phi_X(\alpha) = \exp\left(i\alpha^T m - \frac{\alpha^T B\alpha}{2}\right)$ =exp $\left(i\sum_{k=1}^n \alpha_k m_k - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n b_{kl}\alpha_k\alpha_l\right)$

Выведем плотность невырожденного распределения многомерной гауссовской СВ общего вида.

Предположим, что $EX = m = 0$. - нулевой вектор. B - симметричная неотрицательно определенная матрица с действительными элементами $B = B^T$, т.е. для любого небора чисел $z_1, ..., z_n$, $\sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n b_{kl} z_k z_l \geq 0$.

Из линейной алгебры для любого симметричного и неотрицательного определения матрицы $M(n\times n)$ существует матрица $N(n\times n)$ ортогонального преобразования, переводящая M в диагональную матрицу: $M \mapsto N^T M N$.

Ортогональная матрица N $N \cdot N^T = N^T N = E \Rightarrow N^{-1} = N^T, \det(N) = 1$

Пусть C матрица ортогонального преобразования и $D = C^T BC$, D- диагональная матрица с диагональю $\sigma_1^2, ..., \sigma_n^2$.

Для случайного вектору Y, имеющего независимые гауссовские координаты с дисперсиями σ_k^2 , плотность распределений равна произведению частных плотностей

$f_Y(x) = \prod_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_k^2}} \exp\left(-\frac{x_k^2}{2\sigma_k^2}\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^n (\sigma_1\sigma_2...\sigma_n)^{-1} \exp\left(-\frac{x^T D^{-1} x}{2}\right)$ где $x = (x_1, ..., x_n)^T$; D^{-1}- диагональная матрица, имеющая своей диагональю $\left(\sigma_1^{-2}, ..., \sigma_n^{-2}\right)$.

$f_Y(x) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^n (\det D)^{-1/2} \exp\left(\frac{-x^T\left(C^T BC\right)^{-1} x}{2}\right) =$

№1 $\det(D) = \det\left(C^T BC\right) = \det\left(C^T\right) \det(B) \det(C) = \det B$

№2 $(AM)^{-1} = M^{-1}A^{-1}$

№3 $(C_x)^T = x^T C^T$

$= \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^n (\det B)^{-1/2} \cdot \exp\left(\frac{-(Cx)^T B^{-1} Cx}{2}\right)$

Обозначим $y = Cx \Rightarrow x = C^{-1}Y$

$f_Y\left(C^{-1}Y\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^n (\det B)^{-1/2} \exp\left(\frac{-Y^T B^{-1} Y}{2}\right)$

С другой стороны

$\phi_x(\alpha) = \exp\left(-\alpha^T B\alpha\right) = \exp\left(-\alpha^T CDC^T\alpha\right) = \exp\left(-\left(C^{-1}\alpha\right)^T \cdot \left(C^{-1}\alpha\right)\right)$.

Обозначим $\beta = C^{-1}\alpha$ и учитывая, что $\phi_X(C\beta) = E\exp\left(i(C\beta)^T X\right) = E\exp\left(i\beta^T C^T X\right) = \phi_{C^T X}(\beta)$ получаем $\phi_X(C\beta) = \exp\left(-\beta^T D\beta\right) = \phi_{C^{-1}x}(\beta)$

Отсюда следует, что вектор, обозначенный Y равен $C^{-1}X$. Нам известно значение плотности распередеения вектора $C^{-1}x$ в т. $C^{-1}Y$. Можно показать, что $f_{CX}(Cx) = f_X(x)$ т.к. C^{-1} - матрица, ортогональная преобразвоанию.

Получим искомую формулу $f_X(X) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^n (\det(B))^{-1/2} \exp\left(\frac{-x^T B^{-1} x}{2}\right)$ (если $m = Ex = 0$)

Если $m \neq 0$, то $f_{X+m}(x) = f_{X+m}(y+m) = f_X(y) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^n (\det B)^{-1/2} \exp\left(\frac{-y^T B^{-1} y}{2}\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^n (\det B)^{-1/2} \exp\left(-\frac{(x-m)^T B^{-1}(x-m)}{2}\right)$

3.6 Процессы с независимыми приращениями.

Действительный случайный процесс называется **процессом с независимым приращением**, если для $\forall n \in N$ и всех $t_0, ..., t_k : 0 = t_0 < t_1 ... < t_n$ величины $X_{t_0}, X_{t_1} - X_{t_0}, ..., X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$ независимы в совокупности.

3.7 Распределение Пуассона. Процесс Пуассона. Неоднородный процесс Пуассона. Сложный процесс Пуассона.

Распределением Пуассона называется распределение на множестве $\mathcal{Z}_+$, неотрцитальеных целых чисел, задаваемое формулой $p_n = P(x = n) = \frac{\mu^k}{n!} e^{-\mu} (n \in Z_+)$, $\mu > 0$ - параметр распределения.

Пуассоновкая СВ X - это целочисленная СВ, имеющая распределение Пуассона. $E(X) = \mu, D(X) = \mu$.

Свойство: Пусть X_1 и X_2 - две независимых СВ с параметрами μ_1 и μ_2 , тогда их сумма тоже будет пуассоновской СВ с параметром $\mu_1 + \mu_2$.

Это свойство доказывается с помощью производящей функции

$M_X(t) = E\left[e^{tx}\right]$

$M_X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tX} p^x(dx)$

$M_x(t) = \sum_{i=1}^{\infty} e^{tX_i p_i}$ - производящая функция.

$Ee^{\alpha X} = \sum_{n=0}^{\infty} e^{\alpha n(X_1+X_2)} = Ee^{\alpha X_1} Ee^{\alpha X_2} = \exp\left(-\left(\mu_1+\mu_2\right)\left(1-e^{\alpha}\right)\right)$, тогда $Ee^{\alpha(X_1+X_2)} = Ee^{\alpha X_1} Ee^{\alpha X_2} = \exp\left(-\left(\mu_1+\mu_2\right)\left(1-e^{\alpha}\right)\right)$, что по теореме о единственности для производящей функции может быть только у Пуассоновского распределения.

Предложение: если (τ_i) для $i \geq 1$ независимые экспоненциально распределенные СВ с параметром λ , тогда для него $\forall t > 0$ СВ $N_t = \inf\left\{n \geq 1, \sum_{i=1}^{n} \tau_i > t\right\}$ имеет пуассоновское распределение λt, такое что $\forall n \in N$ $P(Nt = n) = e^{-\lambda t}\left(\frac{\lambda t}{n!}\right)^n$

Случайный процесс $X = X(t), t \geq 0$ наызвается **процессом Пуассона**, если $X(0) = 0$ и существует некоторая величина $\lambda > 0$ (параметр процесса) и:

1. X - неубывающий, непрерывный справа процесс
2. X - процесс с незваисимыми приращениями
3. X - процесс с целочисленными значениями, где случайное приращение на любом интервале длины t имеет распределение Пуассона с параметром λt

Пусть $\sigma_1, \sigma_2, ...$ - это последовательные моменты скачков процесса X. Распределение 1-го скачка $P(\sigma_1 > t) = P(x(t) = 0) = e^{-\lambda t}$.

Можно доказать, что остальные интервалы меджу соседними скчаками распределены экспоненциально и независимо, построив по этим условиям новый процесс и показав эквивалентностть (по условиям Колмогрова) вновь построенного процесса с исходным. Другой способ доказательства связан с независимостью и однородностью приращений процесса $X(t)$.

Пусть (τ_i) где $i \geq 0$, последовательность независимых экспоненциально распределенных СВ с параметром λ и $\tau_n = \sum_1^n \tau_i$, тогда процесс определенный с помощью $N_t = \sum_{n=1} I_t \geq \tau_k$, называется **процессом Пуассона** с интенсивностью λ .

Неоднородный процесс Пуассона.

Пусть $\lambda(t)$ - это произвольная интегрируемая функция на $S = [0, \infty]$.

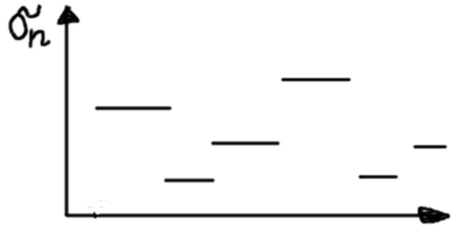
Процесс X **называется процессом Пуассона** с интенсивностью $\lambda(t)$ если $X(0) = 0$ и:

1. X - неубывающая непрерывный справа процесс
2. X - процесс с независимыми приращениями
3. X - процесс с целоисленными значениями, где СВ приращения на интервале $[a, b)$ имеет распределение Пуассона с параметрами $\mu(a, b) = \int_a^b \lambda(t)\,dt$.

Сложный процесс Пуассона

Пусть $N(t)$ - однородный процесс Пуассона с параметром β и $(U(n))$, где $(n = 1, 2, ...)$-последователность незвисимых случайно распределенных НОР величин. Причем Пуассоновский процесс и последовательность независимы между собой. **Сложным процессом Пуассона** называется процесс $X(t), t \geq 0$ вида $X(t) = \sum_{k=1}^{N(t)} U_k$.

В отличие от одногродного Пуассона, этот процесс в момент времени σ_n разделен независимыми промежутками, имеет скачки случайные по величине и необязательно положительные.



3.8 Винеровский процесс.

Однородным стационарным винеровским процессом называется процесс $w(t), t > 0$ обладающий следующими свойствами

1. Процесс $w(t)$ непрерывен с вероятностью 1 в любой точке $t > 0$
2. Процесс является однородным процессом с независимыми приращениями
3. $w(0) = 0$ с вероятностью 1 и приращение $w(t_2) - w(t_1)$ при $t_2 > t_1$ имеет гауссовское распределение с нулевым средним и дисперсией $t_2 - t_1$.

С помощью 3) свойства как раз и моделируется винеровский процесс.

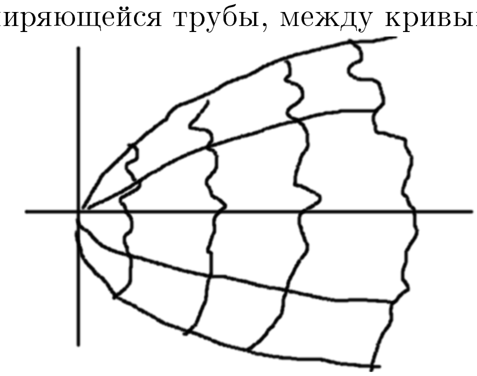
Из однородности процесса следует значение одномерной плотности процесса $f_t(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}}$
Свойства винеровского процесса:

1. Винеровский процесс с вероятностью 1 траектории этого процесса непрерны, и не дифференцируемы ни в одной точке $t \geq 0$;
2. С вероятностью 1 траектории процесса выходят из любого конечного интервала, но в то же время для траекторий выполнился закон повторного логарифма

Закон повторного логарифма

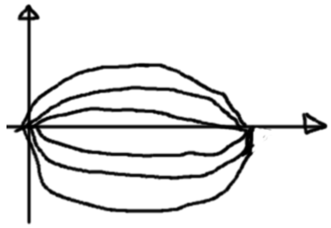
$\lim\limits_{t\to} \sup \frac{w(t)}{\sqrt{2t\ln\ln t}} = 1$и $\lim\limits_{t\to\infty} \inf \frac{w(t)}{\sqrt{2t\ln\ln t}} = -1.$

Это показывает, что почти все траектории винеровского процесса атасапся??? внутри расширяющейся трубы, между кривыми $\pm(1+\epsilon)\sqrt{2t\ln\ln t}$ $(\forall\epsilon > t)$



Винеровский процесс (нестандартным) называют также результат линейного линейного преобразовани $X(t) = x + at + bw(t)$, где $x, a, b \in R$

Брауновским мостом называется процесс $w_0(t) = w(t) - tw(t)$ $t \in [0, 1]$, $w_0(0) = w_0(1) = 0$



3.9 Марковские цепи.

Марковской цепью называется случайная последовательность $X(t)$, $t = 0, 1, 2...$ с конечным множеством значений $x(t) \in \{x_1, x_2, ...x_n\}, x_i \neq x_j$ где N - целое положительное.

Все конечномерные распределения последовательности $X(t)$ вычисляются по формуле:

$P(x(0) = x_{k0}, x(1) = x_{k1}, ..., x(t) = x_{kt}) =$

$= p_{k_0}(0)\, p(0, (k_0), (1, k_1))\, p((1, k_1), (2, k_2)) ... p((t-1, k_{t-1}), (t, k_t))$, где $p_i(0) = P(X(0) = X_i)$ и вектор $(p_1(0), p_2(0), ..., p_n(0))^T$ - **начальное распределение;** $p((t, i), (t+1, j))$ - **переходные вероятности.**

Обозначим $P((t, i)(t+m, j)) = \frac{P(x(t)=i, x(t+m,j)=j)}{P(X(t)=i)}$ - **переходная вероятность за** m **шагов**.

Пусть $p_i(t) = P(X(t) = x_i)$ и вектор $p(t) = (p_1(t), p_2(t), ...p_n(t))^T$ - **распределение цепи в момент времени** t.

Тогда согласно марковскому свойству $p_j(t+m) = \sum_{k=1}^{N} p_k(t)\, p((t, k), (t+m, j))$

Однородная марковская цепь.

Однородной марковской цепью называется марковская цепь, для которой переходная вероятность (на один шаг) не зависит от "времени" (от номера в последовательности), т.е. $\forall i, j, t, m, p((t, i), (t+m, j)) = p_{ij}(m)$

В этом случае распределение последовательности задается с помощью начального распределения - вектора $p(0)$ и переходной матрицы $Q = (p_{ij}) \sim N \times N$, где $p_{ij} \equiv p_{ij}(1) \geq 0, \forall i : \sum_{j=1}^{N} p_{ij} = 1$

Матрица переходных вероятностей на m шагов совпадает с m-ой степенью Q . Распределение цепи с номером $t+1$ задается равенствами $p_j(t+1) = \sum_{i=1}^{N} p_{ij} p_i(t)$ $(1 \leq j \leq N)$ или $p(t+1) = Q^T p(t)$ откуда $p^T(t+1) = p^T(t)\, Q$ а также представление распределения на шаге $t \geq 1$ через начальное распределение: $p^T(t) = p^T(0)[Q]^t$, t - степень.

Эргодическая теорема (совпадение временного и пространственного среднего).

для любой измеримой и ограниченной функции f равны следующие величины:

1. среднее по времени $\lim\limits_{t\to\infty} \frac{1}{t} \int_0^t f(X(s))\, ds$ - предел имеет одно и то же значение почти для всех траектрий процесса

2. пространственна среднее $E(f(x(t)))$, которое имеет одно и то же значение для всех $t \geq 0$.

Однородная марковская цепь называеся эргодическая тогда и только тогда, когда для любой пары точек i, j существует $\lim\limits_{t\to\infty} p_{ij}(t)$ и этот предел имеет одно и тоже значение для всех $i \in \{1, N\}$

Теорема: Для того, чтобы однородная МЦ была эргодической достаточно, чтобы при некотором $m \geq 1$ все элементы матрицы $[Q]^m$ были положительны $[Q]^m > 0$

Доказательство:

Благодаря конечности числа элементов матрицы существует положительная величина δ такая, что $\forall i,j,\ p_{ij}(m) \geq \delta$. Обозначим $M_j(n) = max\{p_{ij}(n) : 1 \leq i \leq N\}$ и $m_j(n) = min\{p_{ij}(n) : 1 \leq i \leq n\}$.

$p_{ij}(m+n) = \sum_{k=1}^{N} p_{ik}(m)\,p_{kj}(n) = \sum_{k=1}^{N}\left(p_{ik}(m) - \frac{\delta}{N}\right)p_{kj}(n) + \frac{\delta}{N}\sum_{k=1}^{N} p_{kj}(n) \leq$
$\leq M_j(n)\sum_{k=1}^{N}\left(p_{ik}(m) - \frac{\delta}{N}\right) + \frac{\delta}{N}\sum_{k=1}^{N} p_{kj}(n) = M_j(n)\cdot(1-\delta) + \frac{\delta}{N}\sum p_{kj}(n)$

Откуда $\Rightarrow M_j(m+n) \leq M_j(n)(1-\delta) + \frac{\delta}{N}\sum p_{kj}(n)$ и, аналогично $m_j(m+n) \geq m_j(n)(1-\delta) + \frac{\delta}{N}\sum p_{kj}(n)$. Из них следует

$M_j(m+n) - m_j(m+n) \leq (M_j(n) - m_j(n))(1-\delta)$

Повторяем это неравенство k раз:

$M_j(km+n) - m_j(km+n) \leq (M_j(n) - m_j(n))(1-\delta)^k \Rightarrow$ разность $M_j(n) - m_j(n)$ убывает экспоненциально быстро при $n \to \infty$, значит при любом k существует предел

$\lim\limits_{n\to\infty} m_j(n) = \lim\limits_{n\to\infty} M_j(n) = \lim\limits_{n\to\infty} p_{ij}(n)$ не зависит от k ??? в методичке $\lim\limits_{n\to\infty} m_j(n) = \lim\limits_{n\to\infty} M_j(n) = \lim\limits_{n\to\infty} p_{kj}(n)$который не зависит от k, который мы обозначим $\tilde{p}_j$. ???$\sum \widetilde{p}_i = 1$ как и сумма всех элементов в строке матрицы $[Q]^n$ **Доказано**

$p^T(t) = p^T(0)[Q]^t$. Распределение значения цепи в момент t стремится к $\tilde{p}$. Это предельное распределение является стационарным (инвариантным) распределением эргодической МЦ, т.е. удовлетворяет уравнению $\tilde{p} = Q^T\tilde{p}$ позволяющеу вычислить вектор стационарного распредеелния.

Счетное множество состояний.

Однородная МЦ со счетным множеством состояний также может быть определена с помощью заданной системы из начального распределения и переходной функцией на один шаг

$\sum_{k=1}^{\infty} p_k(0) = 1,\ p_{ij} \geq 0$, $\sum_{j=1}^{\infty} p_{ij} = 1,\ i = 1,2,...$

Таким образом, распределение цепи определяется с помощью матрицы Q бесконечного размера.

В этом случае достаточое условие эргодичности цепи можно задать с помощью коэффициента эргодичности

$k(n) = 1 - \frac{1}{2}\sup\limits_{i,j}\sum_{k=1}^{\infty}|p_{ik}(n) - p_{jk}(n)|$ где $p_{ik}(n)$ переходная функция на n шагов

$p_{ij}(n+1) = \sum_{k=1}^{\infty} p_{ik}(n)\,p_{kj}\ \ (n \geq 1, p_{ij}(1) \equiv p_{ij})$

Теорема: Для того, чтобы однородная марковская цепь была эргодической, достаточно, чтобы при некотором n_0 коэффициент $k(n_0)$ был положительным и при любом начальном распределении $p_i(0)$ $(i \geq 0)$ переходная вероятность $p_{ij}(n)$ сходится при $n \to \infty$ к стационарной вероятности $\tilde{p}_j$ причем $\sup\limits_{p_i(0)}|p_{ij}(n) - \tilde{p_0}| \leq (1 - k(n_0))^{\frac{n}{n_0}-1}$

4 Лишнее

Марковские цепи с дискретным временем и конечным числом состояний

$\{s_1, ..., s_n\}$

$s_i \to s_j$. В фиксированный момент времени $\{t_1, t_2, ..., t_n\}$.

При известном состоянии системы в данный момент времени, прогноз о ее будущем состоянии не зависит от состояний в котрых находилась система в прошлом.

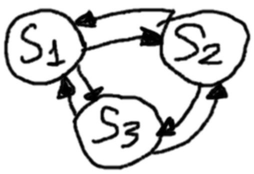
Пусть система может находиться в s_1, s_2, s_3. $p_{ij}, i,j = 1,2,3$ - вероятности перехода системы из i в j за 1 шаг.

$p = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{pmatrix}$- матрица вероятностей перехода.

Если p_{ij} не зависит от номера шага, на котором осуществляется переход из s_i в s_j , то такая цепь называется однородной.

Свойства:

1. $0 \leq p_{ij} \leq 1$
2. $\sum_{j=1}^{3} p_{ij} = 1, i = 1, 2, 3$



Обозначим $Q(k) = (p_1(k), p_2(k), p_3(k))$, k - вероятность того, что после k - го шага система находится в состоянии s_i .$\sum_{i=1}^{3} p_i = 1$

$k = 0 : Q(0) = (p_1(0), p_2(0), p_3(0))$- начальное распределение вероятностей состояний.

М. Р. $Q(k), Q(0)$ удовлетворяет $Q(k) = Q(k-1) \cdot P, Q(k) = Q(0) \cdot P^k$

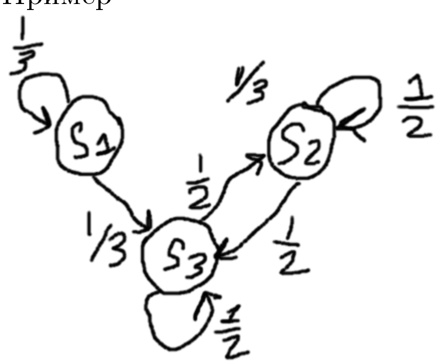
Это уравнение позволяет определить вероятность состояния после каждого шага по известному начальному распределению и заданной матрице P вероятностей перехода за 1 шаг.

Состояние S_i называется **существенным**, если выйдя из этого состояния система может в него вернуться за один или несколько шагов.

$p_{ij}(n) > 0$ и существует k такое, что $p_{ij}(k) > 0$.

Состояние S_i называется несущественным, если выйдя из S_i система не может в него вернуться. $p_{ij}(k) > 0, p_{ji}(k) = 0 \forall k$

Пример



$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

1 - несущественное состояние, система из него вышла, но войти не может.

Распределение вероятностей состояний Марковской цепи называется стационарным, если он не изменятся во времени. СТационраное распределение Q удовлетворяет матричнму уравнению: $Q = Q \cdot P$

$$\begin{cases} p_1 = & p_1 p_{11} + p_2 p_{21} + p_3 p_{31} \\ p_2 = & p_1 p_{12} + p_2 p_{22} + p_3 p_{32} \\ p_3 = & p_1 p_{13} + p_2 p_{23} + p_3 p_{33} \\ 1 = & p_1 + p_2 + p_3 \end{cases}$$

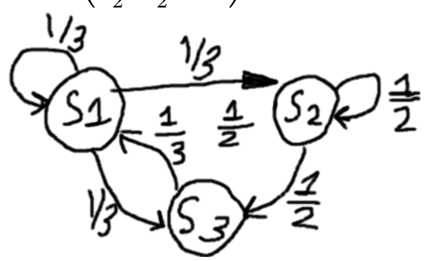
Марковская цепь называется регулярной, если из любого существенного состояния можно попсть в любое другое существенное состояние за конечное число шагов.

Вероятности $\tilde{p}_i = \lim\limits_{n\to\infty} p_i(n)$называются предельными или финальными вероятностями состояний системы.

Если марковская цепь регулярно, то предельные вероятности состояний системы совпадают со стационарными вероятностиями.

Пример:

$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}.$



Найти матрицу $p(2) = p(1)\cdot p(1)$

Определить распределение вероятностей состояний системы за 1,2,3 шага, считая начальным состояние s_1

$Q(0) = (1,0,0)$, $Q(1) = Q(0)\cdot P = (1,0,0)\cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$

$Q(k) = Q(k-1)\,P = Q(0)\,P^k$

$Q(3) = Q(2)\,P = Q(0)\,P^3$

Найти стационарное распределение вероятности системы $Q = QP$

$\begin{cases} p_1 = & \frac{1}{3}p_1 + 0\cdot p_2 + \frac{1}{2}p_3 \\ p_2 = & \frac{1}{3}p_1 + \frac{1}{2}p_2 + \frac{1}{2}p_3 \\ p_3 = & \frac{1}{3}p_1 + \frac{1}{2}p_2 + 0\cdot p_3 \\ 1 = & p_1 + p_2 + p_3 \end{cases}$

Т.к. система регулярна, то предельные вероятности совпадают со стационарными

15.02.17 лекция

4.1 Дискретные случайные величины

4.2 Основные понятия

4.3 Независимые одинаково-распределенные случайные величины НОР СВ.

Пусть $X_1, X_2, ..., X_n$- НОР СВ

Обозначим $\bar{X} = \frac{X_1+...+X_n}{n}$, тогда $M\left(\bar{X}\right) = \frac{M(X_1)+...+M(X_n)}{n} = \frac{n\cdot a}{n} = a$

где $M(X_i) = a, i = 1,2,...,n$

$D\left(\bar{X}\right) = D\left(\frac{X_1+X_2+...+X_n}{n}\right) = \frac{D(X_1)+D(X_2)+...+D(X_n)}{n^2} = \frac{n\cdot D}{n^2} = \frac{D}{n}$

$\sigma\left(\bar{X}\right) = \sqrt{D\left(\bar{X}\right)} = \sqrt{\frac{D}{n}} = \frac{\sqrt{D}}{\sqrt{n}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$, где $\sigma = \sigma(X_i)$