Численное моделирование случайных процессов

Лектор: Романданова Мария Михайловна, конспект студента ПМИ-3 Згода Ю.

13 июня 2017 г.

Содержание

1 По заданному ряду распределения, функции распределения или плотности смоделировать случайные величины. Построить ряд распределения и функцию распределения, либо плотность и функцию распределения. Отобразить полученные случайные величины на графике и построить гистограмму распределения. Вычислить числовые характеристики: математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение по формулам. Получить те же числовые характеристики, используя стандартные встроенные функции MATLAB.

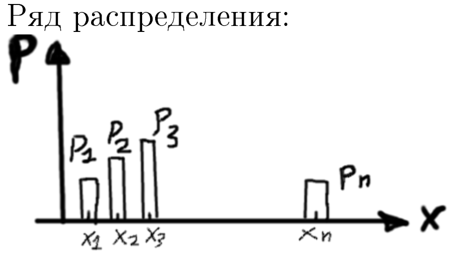
2 Вторая Часть

2.1 Числовые характеристики дискретных случайных величин и их свойства.

Законом распределения случайной величины называется любое соотношение, устанавливающее связь между возможными значениями случайной величины и вероятностями, соответствующими этим значениям.

Рядом распределения дискретной СВ называется совокупность всех ее возможных значений $x_1, x_2, ..., x_n$ и вероятностями $p_1, p_2, ...p_n$ появления каждого из этих событий.

Ряд распределения:



x	x_1	x_2	...	x_n
p	p_1	p_2	...	p_n

Математическое ожидание $M(X) = x_1p_1 + ... + x_np_n = \sum_{i=1}^{n} x_kp_k$ (может быть $n = \infty$)

Свойства математического ожидания:

1. $M(C) = C$,с - константа
2. $M(CX) = CM(X)$
3. $M(XY) = M(X)M(Y)$, X,Y - независимые СВ
4. $M(X+Y) = M(X) + M(Y)$- в данном случае X,Y могут быть не независимыми

Рассмотрим новую случайную величину $X - M(X)$- отклонение случайной величины от ее МО. Это распределение будет принимать значения $x_1 - M(X), x_2 - M(X), ...x_n - M(X)$ с вероятностями $p_1, p_2, ..., p_n$ соответственно.

$M(X - M(X)) = 0$, т.к. $M(X - M(X)) = M(X) - M(M(X)) = M(X) - M(X) = 0$

Дисперсией дискретной СВ называют МО квадрата отклонения СВ от ее МО: $D(X) = M[X - M(X)]^2$

$D(X) = M\left[X^2 - 2X \cdot M(X) + (M(X))^2\right] = M(X)^2 - (M(X))^2$

Свойства дисперсии:

1. $D(C) = 0$,C-const, $D(C) = M[C - M(C)]^2 = 0$
2. $D(CX) = C^2 D(X)$
3. $D(X+Y) = D(X) + D(Y)$, X, Y - независимые
4. $D(X-Y) = D(X) + D(-Y) = D(X) + D(Y)$

Средним квадратическим отклонением СВ называется отклонение квадратный корень из дисперсии: $\sigma(X) = \sqrt{D(X)}$ - данное понятие нужно для совпадения размерностей.

В Matlab есть встроенные функции: mean (МО), var (varience), std (среднее квадратическое отклонение)

Введем m=1000, u=rand(1,m), тогда мы можем применить эти функции: mean(u),var(u), std(u). Полученные результаты будут сходиться с формулами.

Пусть $X_1, X_2, ..., X_n$- независимые случайные величины, то $X = X_1 + X_2 + ... + X_n$

$D(X) = D(X_1) + D(X_2) + ... + D(X_n)$

$\sqrt{D(X)} = \sqrt{D(X_1) + D(X_2) + ... + D(X_n)}$

$\sigma(X) = \sqrt{\sigma^2(X_1) + ... + \sigma^2(X_n)}$

2.2 Функция распределения и её свойства. Плотность вероятности и её свойства.

Рассмотрим СВ X. Ее **функцией распределения** называется функция $F_X(x) = P(X \le x)$

Свойства:

1. $0 \le F(x) \le 1$
2. $F(x)$- неубывающая, $F(x_2) > F(x_1), x_2 > x_1$??? Здесь ведь $\ge$ должно быть (по крайней мере, первый знак неравенства)
3. $P(a < X < b) = F(b) - F(a)$??? В силу того, что ФР непрерывна справа, здесь должно быть $... \le X < ...$ в противном случае нужно рассматривать в выражении пределы. Т.е. это выполняется только в том случае, если СВ непрерывна.
4. $P(x_1 < X < x_1 + \Delta x) = F(x_1 + \Delta x) - F(x_1)$ Вероятность того, что непрерывная СВ примет одно конкретное значение, равняется нулю.
5. $\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$, $\lim_{x\to+\infty} F(x) = 1$

Плотность - производная от функции распределения, $f(x) = F'(x)$. Ее свойства:

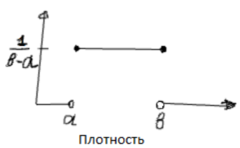
1. $f(x) \ge 0$
2. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$
3. $P(a < x < b) = \int_a^b f(x)\,dx$
4. $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = P(-\infty < X < x)$, т.к. $F(x) = P(X \le x) = P(-\infty < X \le x)$

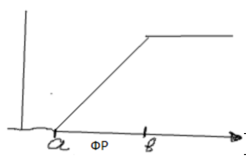
2.3 Равномерное распределение на отрезке [a, b]. Плотность и функция распределения равномерного распределения. Моделирование случайных величин, равномерно распределённых на отрезке [a, b] в MATLAB, и построение гистограммы распределения. Вычисление числовых характеристик: математического ожидания, дисперсии, среднего квадратического отклонения.

Случайная величина имеет **непрерывное равномерное распределение** на отрезке от a до b, где $a, b \in R$,

$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & x \in [a, b] \\ 0 & x \notin [a, b] \end{cases}$, $X \sim U[a, b]$??? Какая из точек у плотности будет выколота?

$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \int_{a}^{x} \frac{1}{b-a} dt = \frac{x-a}{b-a}$ $a \le x < b$, т.е. $F(x) = \begin{cases} 0 & x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & a \le x < b \\ 1 & x \ge b \end{cases}$





Если $X \sim$Если $X \sim$

Математическое ожидание $E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} x \frac{1}{b-a} dx = \frac{1}{b-a} \int_{a}^{b} x dx = \frac{1}{b-a} \frac{x^2}{2} \Big|_a^b = \frac{b^2-a^2}{2(b-a)} = \frac{a+b}{2}$

$D(X) = E\left((X - E(X))^2\right) = E(X^2) - (E(X))^2$

$E(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{b-a} dx = \frac{1}{b-a} \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 dx = \frac{1}{b-a} \frac{x^3}{3} \Big|_a^b = \frac{b^3-a^3}{3(b-a)} = \frac{(b-a)\left(b^2+ba+a^2\right)}{3(b-a)} = \frac{b^2+ba+a^2}{3}$

$D(X) = \frac{b^2+ba+a^2}{3} - \frac{(a+b)^2}{4} = \frac{4b^2+4ba+4a^2-3a^2-6ab-3b^2}{12} = \frac{(a-b)^2}{12}$

Если $X\tilde{}U[0,1]$, то $Y = a + (b-a) \cdot X \Rightarrow Y \sim U[a, b]$

2.4 Нормальное распределение N(μ,σ2). Плотность и функция распределения нормального распределения. Функция Лапласа. Свойства плотности нормального распределения. Построение плотности и функции распределения в MATLAB, моделирование случайных величин и построение гистограммы распределения. Вычисление числовых характеристик: математического ожидания, дисперсии, среднего квадратического отклонения.

Плотность функции распределения имеет вид:

$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$, функция распределения $N(\mu, \sigma^2) = F(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}} dt$

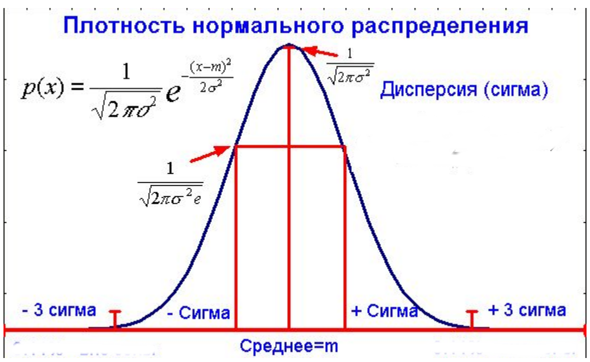
Когда $\mu = 0, \sigma = 1$, $F_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{0} e^{-\frac{t^2}{2}} dt + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = 0,5 + \Phi(x)$, где $\Phi(x)$ - **функция Лапласа**, $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$

$F(x) = F_0\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) = 0,5 + \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$

Иногда вместо этой функции используют интеграл ошибок, error function: $erf(x) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt = 2\Phi\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)$.

Свойства плотности:

1. Функция плотности определена на всей оси
2. $f(x) > 0 \forall x \in \mathcal{R}$
3. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0, \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$
4. $\max f(x) = f(\mu) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$
5. График функции плотности симметричен относительно прямой $x = \mu$
6. График функции $f(x)$ имеет 2 точки перегиба, симметричные относительно точки $x = \mu$ и эти точки перегиба имеют координаты $x_{1,2} = \mu \pm \sigma,\ f(x_{1,2}) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi e}}$



Если $X \sim N(0,1)$ то $Y = \mu + \sigma X \sim N(\mu, \sigma^2)$

2.5 Вероятность попадания нормально распределенной случайной величины в заданный интервал. Правило 3 сигм. Моделирование случайных величин с нормальным распределением N(μ,σ2) в MATLAB.

Рассмотрим интервал (α, β)

$P(\alpha < x < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha-\mu}{\sigma}\right)$, где $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ - функция Лапласа

$|x - \mu| < \delta \to \mu - \delta < x < \mu + \delta$

$P(|x-\mu| < \delta) = P(\mu - \delta < x < \mu + \delta) = \Phi\left(\frac{\mu+\delta-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\mu-\delta-\mu}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right) - \Phi\left(-\frac{\delta}{\sigma}\right) = 2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right)$.

Если

$\delta = 1\sigma : P(|x-\mu| < 1\sigma) = 2\Phi(1) = 0,6827$

$\delta = 2\sigma : P(|x-\mu| < 2\sigma) = 2\Phi(2) = 0,9545$

$\delta = 3\sigma : P(|x-\mu| < 3\sigma) = 2\Phi(3) = 0,9973$

Больше чем 3σ можно принебречь.

Правило: с вероятностью 0,9973 значение нормального распределения СВ лежит в интервале $[\mu - 3\sigma; \mu + 3\sigma]$

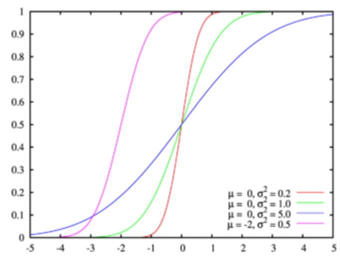
$X \sim N(0,1), Y = \mu + \sigma X \sim N(\mu, \sigma^2)$

$E(X) = 0, D(X) = 1$

$E(Y) = E(\mu) + \sigma E(x) = \mu$

$D(Y) = D(\mu) + \sigma^2 D(x) = \sigma^2$

Функция распределения

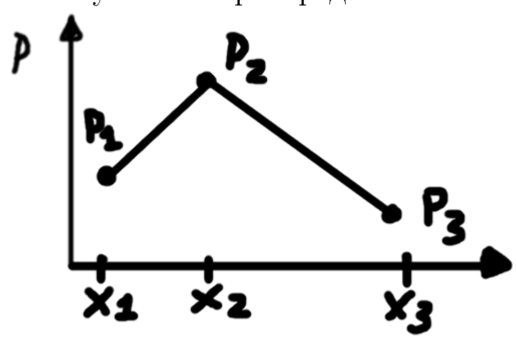


2.6 Моделирование дискретных случайных величин. Общий метод: моделирование а) по заданному закону распределения; б) по заданной функции распределения. Вычисление числовых характеристик.

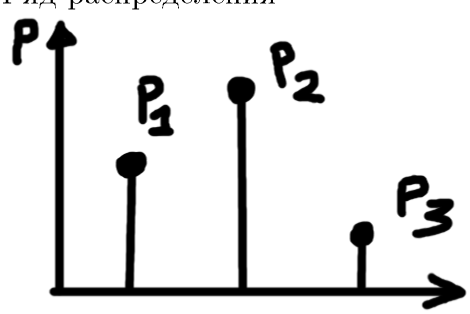
x	x_1	x_2	...	x_n
p	p_1	p_2	...	p_n

, $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$

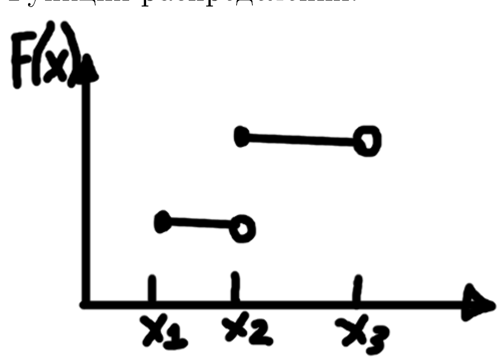
Многоугольник распределения



Ряд распределения



Функция распределения.



Функция распределения для дискретной целочисленной случайной величины:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \le x_1 \\ \sum_{i=0}^{k} p_i & k = 1, 2, ..., n \\ 1 & x \ge x_n \end{cases}$$

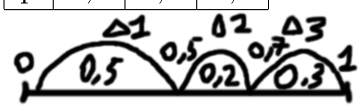
Общий метод моделирования дискретной СВ.
$X \in \{x_1, ..., x_n\}$

1. Отрезок $[0, 1]$ разбивается на n непересекающихся участков, длины которых равны $p(x_i)$ или p_i . Устанавливается взаимно однозначное соответствие между множеством указанных участков и множество генерируемых ДСВ. При этом, участку длины p_i соответствует значение x_i.

2. Моделируется непрерывная СВ $Y \sim U[0, 1]$. Она попадает на один из указанных участков. Значение X_i , соответствующее этому участку, принимается за реализацию X.

Пример:

x	x_1	x_2	x_3
p	0,5	0,2	0,3



$M(X) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$,$DX = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - (M(X))^2$, $\sigma(X) = \sqrt{D(X)}$, где X_i- реализации случайных величин. В Matlab для этого встроены mean, var, std.

2.7 Моделирование дискретных случайных величин. Частный метод: моделирование дискретного равномерного распределения. Вычисление числовых характеристик.

Функции округления: round - до ближайшего целого, fix - усечение дробной части числа, floor - возвращает значения, округленные до ближайшего целого $\le X$, ceil - возвращает значения, округленные до ближайшего целого $\ge X$

Дискретный случай
$p(x) = \frac{1}{n}$, $x = a, a + 1, a + 2, a + n - 1$
n - **параметр масштаба**, число возможных значений $n \ge 2$
a - **параметр положения**

Таблица:

x	a+1	...	a+n-1
p	$\frac{1}{n}$	...	$\frac{1}{n}$

Функция распределения: $F(x) = \begin{cases} 0 & x \le a \\ \frac{k+1}{n} & a + k < x < a + k + 1 \\ 1 & x > a + n - 1 \end{cases}$

$M(X) = a + \frac{n-1}{2}$, $D(X) = \frac{n^2-1}{12}$, $\sigma(X) = \sqrt{D(X)}$
$X_i = [n \cdot r_i] + a$, где $r_i \sim U(0, 1)$

2.8 Моделирование непрерывных случайных величин. Общие методы. Метод обратной функции. Моделирование случайных величин экспоненциально распределенных с параметром λ .

Метод обратной функции

Пусть ξ задана в $a < x < b$. $p(x) > 0$ при $a < x < b$. Обозначим $F(x)$ - функцию распределения ξ, которая определена на $a < x < b$: $F(x) = \int_a^x p(u)\,du$

Теорема: (метод обратной функции)

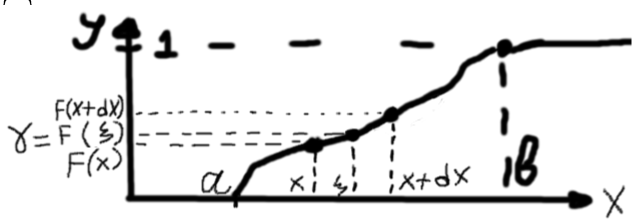
СВ ξ удовлетворяющая уравнению $F(\xi) = \gamma$ **(*)** , $\gamma \in U(0,1)$, имеет плотность распределения $p(x)$.

Доказательство:

Т.к. $F(x)$ строго возрастает на (a,b) от $F(a) = 0$ до $F(b) = 1$, то (*) имеет единственный корень при каждом γ.

При этом равны вероятности $P(x < \xi < x + dx) = P(F(x) < \gamma < F(x + dx))$. Т.к. γ- равномерно распределенный на $(0,1)$, то $P(x < \xi < x + dx) = F(x + dx) - F(x) = p(x)\,dx$

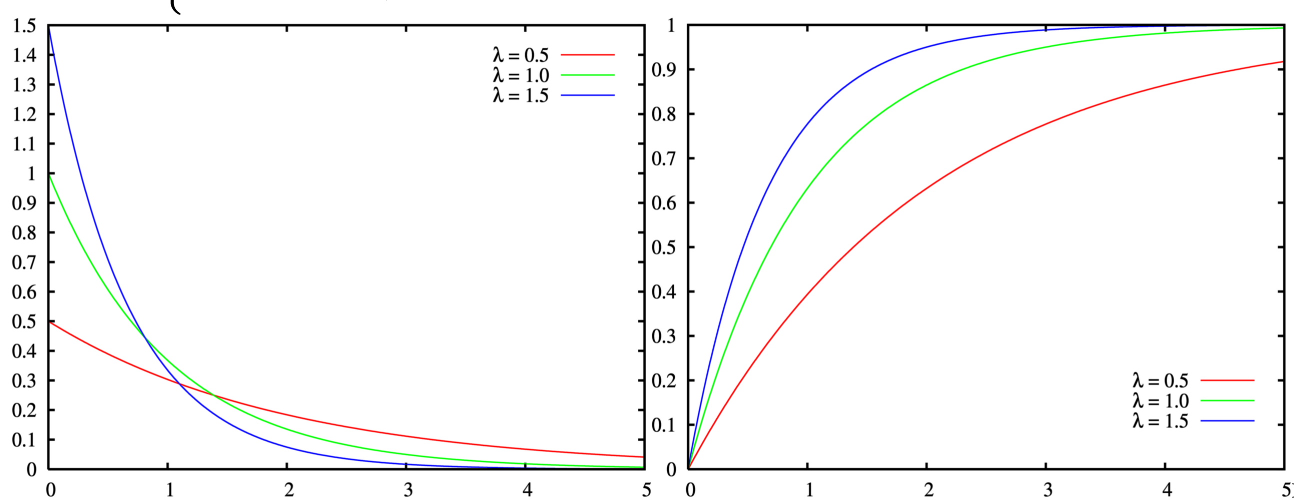
Доказано



Моделирование случайных величин экспоненциально распределенных с параметром λ.

СВ X имеет экспоненциальное распределение, если плотность $f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$,

ФР: $F_X(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$



где

$F(\xi) = \gamma \Rightarrow 1 - e^{-\lambda\xi} = \gamma \Rightarrow e^{-\lambda\xi} = 1 - \gamma \Rightarrow -\lambda\xi = \ln(1-\gamma) \Rightarrow \xi = -\frac{1}{\lambda}\ln(1-\gamma)$

$\gamma \in U(0,1)$, $1 - \gamma \in (0,1)$, $\xi = -\frac{1}{\lambda}\ln(\gamma)$

$M(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\,dx$, $D(x) = M(X^2) - (M(X))^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\,dx - (M(X))^2$, $\sigma(x) = \sqrt{D(X)}$

Если случайная величина $X \sim U[0,1]$, то $Y = -\frac{1}{\lambda}\ln(X) \sim Exp(\lambda)$.

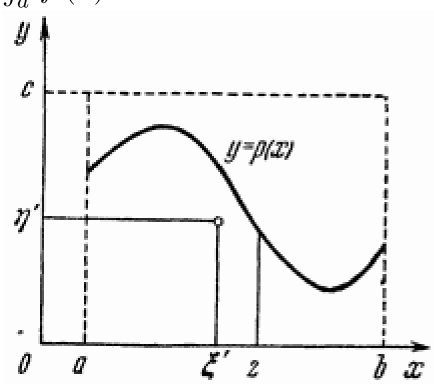
МО: $E(Y) = \frac{1}{\lambda}$, $D(Y) = \frac{1}{\lambda^2}$, $\sigma(Y) = \frac{1}{\lambda}$

2.9 Моделирование непрерывных случайных величин. Общие методы. Метод Неймана.

Случайная величина ξ определена на $a < x < b$, $p(x) \le 1$

Теорема: пусть γ_1 и γ_2 - независимые СВ, $\gamma_1 \in U[0,1], \gamma_2 \in U[0,1]$, и $\xi' = a + \gamma_1(b-a)$, $\eta' = C\gamma_2$. Случайная величина ξ, определяемая условием $\xi = \xi'$, если $\eta' < p(\xi')$, имеет плотность равную $p(x)$

$\int_a^b f(x)\,dx = 1 \Rightarrow C$



2.10 Приближенное моделирование нормальной случайной величины на основе центральной предельной теоремы.

Пусть $R \in U[0,1]$, $M(R) = \frac{1}{2}$, $D(R) = \frac{1}{12}$.

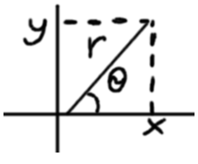
Тогда $M\left(\sum_{j=1}^{n} R_j\right) = \frac{n}{2}$, $D\left(\sum_{j=1}^{n} R_j\right) = \frac{n}{12}$, $std\left(\sum_{j=1}^{n} R_j\right) = \sqrt{\frac{n}{12}}$

Нормируем:

$\frac{\sum_{j=1}^{n} R_j - \frac{n}{2}}{\sqrt{\frac{n}{12}}}$ - в силу центральной предельной теоремы, при $n \to \infty$ распределение этой нормированной случайной величины стремится к $\sim N(0,1)$. При конечном n распределение приближенно нормальное. В частности, при $n = 12 : \sum_{j=1}^{n} R_j - 6 \sim N(0,1)$

2.11 Метод Бокса-Мюллера.

$X \sim N(0,1), Y \sim N(0,1)$. Выполним переход к полярным координатам: $X = r \cdot cos(\vartheta), Y = r \cdot sin(\vartheta)$, $X^2 + Y^2 = r^2 \in Exp\left(\frac{1}{2}\right)$ (один из частных случаев, см. Википедия - Распределение Хи-Квадрат)



$\vartheta \sim U[0, 2\pi]$

Применим метод обратной функции - экспоненциальное распределение, откуда $f(x) = -\frac{\ln x}{\lambda}$

Генерируем 2 СВ: с равномерным и экспоненциальным распределением.$u \in U[0,1], v \in U[0,1]$.

№1. $\vartheta = 2\pi u \sim U[0, 2\pi]$
№2. $r^2 = -2\ln(v) \Rightarrow r = \sqrt{-2\ln(v)}$
$X = \sqrt{-2\ln(v)} cos(2\pi u), Y = \sqrt{-2\ln(v)}\sin(2\pi u)$.
Формулы можно упростить: из полярных координат переходим обратно в декартовы
$s = X^2 + Y^2$, если $0 < s < 1$, $\cos(\vartheta) = \frac{x}{\sqrt{s}}, \sin(\vartheta) = \frac{y}{\sqrt{s}}$
Таким образом, необходимы СВ $X \in U[-1;1], Y \in U[-1,1], s = X^2 + Y^2 : 0 < s < 1$
$z_1 = \frac{X}{\sqrt{s}} \cdot \sqrt{-2\ln(s)} = X\sqrt{\frac{-2\ln(s)}{s}}$
$z_2 = \frac{Y}{\sqrt{s}}\sqrt{-2\ln(s)} = Y\sqrt{\frac{-2\ln(s)}{s}}$
Тогда $z_1 \sim N(0,1), z_2 \sim N(0,1)$.

2.12 Моделирование многомерного гауссовского распределения

$\xi = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n)$- случайный вектор, имеющий многомерное нормальное распределение с вектором математических ожиданий $\mu = (\mu_1\mu_2, ...\mu_n)$ и ковариационной матрицей $\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \dots & \sigma_{1n} \\ \vdots & & & \\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & \dots & \sigma_{nn} \end{pmatrix}$
$\sigma_{ij} = M[(\xi_i - \mu_i)(\xi_j - \mu_j)]$ симметричная положительно определенная матрица.

Тогда $\xi = A\eta + \mu$, где η - вектор, каждая компонента которого имеет рапределение $N(0,1)$, A - нижняя треугольная матрица, полученная из матрицы Σ разложением Холецкого $\sum = A \cdot A^T$

3 Третья Часть

3.1 Вероятностные пространства, случайные величины и случайные процессы.

Определение: Пусть Ω- заданное множество, тогда σ - алгебра на Ω есть семейство $\mathcal{F}$ - подмножеств со следующими со следующими свойствами

1. $\phi \in \mathcal{F}$
2. $F \in F \Rightarrow F^C \in F$ где $F^C = \Omega/F$ дополнение множества F в Ω
3. $A_1, A_2 \in \mathcal{F} \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$

Пара $(\Omega, \mathcal{F})$называется измеримым прсотранством.

Вероятностной мерой на измеримом пространстве $(\Omega, \mathcal{F})$ называется функция $P : F \to [0,1]$ такая что

1. $P(0) = 0, P(\Omega) = 1$
2. Если $A_1, A_2, ... \in \mathcal{F}$ и $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ - непересекающаяся система ($A_i \bigcap A_j = \emptyset$ при$i \neq j$), то $P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$

Тройка (Ω, F, P) называется **вероятностным пространством**.

Вероятностное пространство называется **полным**, если $\mathcal{F}$ содержит все подмножества G множества Ω с P - внешней мерой ноль, т.е. такие подмножества, что

$P^*(G) = inf\,(P(F); F \in \mathcal{F}, G \in \mathcal{F}) = 0$

Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ - заданное вероятностное пространство. Тогда функция $Y : \Omega \to \mathcal{R}^N$ называется **$\mathcal{F}$-измеримой**, если $Y^{-1}(U) := \{\omega \in \Omega, Y(\omega) \in U\} \in \mathcal{F}$ для всех открытых множеств $U \in \mathcal{R}^n$

Если $X : \Omega \to \mathcal{R}^N$- произвольная функция, то σ -алгебра $\mathcal{H}_X$порожденная X есть наименьшая σ - алгебра на Ω, содержащая все множества $U \in \mathcal{R}^n$ открыты. ???

Случайная величина X есть $\mathcal{F}$-измеримая функция $X : \Omega \to \mathcal{R}^n$. Каждая случайная величина порождает вероятностную меру μ_X на $\mathcal{R}^n$, определеяемую равенством $\mu_X(B) = P(X^{-1}(B))$. Мера μ_X называется **распределением величины** X. Если $\int_\Omega |X(\omega)|\,dP(\omega) < \infty$, то число $E[X] = \int_\Omega X(\omega)\,dP(\omega) = \int_{\mathcal{R}^n} x d\mu_X(x)$ называется **математическим ожиданием** величины X (относительно меры P)

Случайный процесс - это параметризованный набор случайных величин $\{X_t\}_{t\in T}$определенных на вероятностном пространстве пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ и принимающих значения в $\mathcal{R}^n$. Множеством параметров T обычно является полупрямая $[0, \infty)$, однако это может быть и отрезок $[a, b]$.

Другое определение: Случайным процессом на интервале $T \subset \mathcal{R}$ называется семейство СВ $X = (X_t)_{t\in T}$ (относительно базиса $(\Omega, \mathcal{F}, P)$) - это функция от двух аргументов $X_t(\omega), \omega \in \mathcal{R}$

Для каждого фиксирвоанного $t \in T$ мы получаем случайную величину $\omega \mapsto X_t(\omega), \omega \in \Omega$

С другой стороны, фиксируя $\omega \in \Omega$, мы можем рассмотреть функцию $t \mapsto X_\tau(\omega), t \in T$ которая называется **траекторией процесса** X_t

3.2 Условное математическое ожидание и его свойства.

Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ - вероятностное пространство, $X \to \mathcal{R}^n$ - СВ; $E(|X|) < \infty$. Если $\mathcal{H} \in \mathcal{F}$ есть σ -алгебра, то **условное математическое ожидание случайной величины** X **относительно** $\mathcal{H}$ $E[X|\mathcal{H}]$ - функция, действующая из Ω в $\mathcal{R}^n$ и удовлетворяющая условиям:

1. $E[X|\mathcal{H}]$ является $\mathcal{H}$- измеримой функцией
2. $\int_H E[X|\mathcal{H}] = \int_H XdP$ для всех $H \in \mathcal{H}$

Свойства условного МО:

Пусть $Y : \Omega \to \mathcal{R}^n$ - другая случайная величина с математическим ожиданием $E[|Y|] < \infty$ и пусть a и $b \in \mathcal{R}^n$. тогда:

1. $E[aX + bY|\mathcal{H}] = aE[X|\mathcal{H}] + bE[Y|\mathcal{H}]$
2. $E[E[X|\mathcal{H}]] = E[X]$
3. $E[X|\mathcal{H}] = X$, если X - $\mathcal{H}$- измеримая функция.
4. $E[X|\mathcal{H}] = E[X]$, если X не зависит от $\mathcal{H}$
5. $E[Y \cdot X|\mathcal{H}] = Y \cdot E[X|\mathcal{H}]$, если Y - $\mathcal{H}$-измеримая случайная величина. $\cdot$ означает скалярное произведение в $\mathcal{R}^n$.

Доказательство:

№4. Если X не зависит от $\mathcal{H}$, то для $H \in \mathcal{H}$ мы получаем $\int_H XdP = \int_\Omega X \cdot I_H dP = \int_\Omega XdP \cdot \int_\Omega I_H dP = E(X)\,P(H)$

Следовательно, постоянное значение $E[X]$ удовлетворяет условиям (1) и (2) из определения.

№5. Сначала докажем результат для случая, когда $Y = I_H$ для некоторого $H \in \mathcal{H}$. Тогда для всех $G \in \mathcal{H}$ мы имеем $\int_G Y \cdot E[X|\mathcal{H}]\, dP = \int_{G \bigcap H} E[X|\mathcal{H}]\, dP = \int_{G \bigcap H} X dP = \int_G Y \cdot X dP$

Следовательно, $Y \cdot E[X|\mathcal{H}]$удовлетворяет условиям (1) и (2).

Аналогично доказывается, что утверждение справедливо если Y - простая функция: $Y = \sum_{j=1}^{m} c_j I_{H_j}$ где $H_j \in \mathcal{H}$. В общем случае утверждение следует из аппроксимации величины Y такими простыми функциями.

Теорема 1: Пусть $G, \mathcal{H}$- σ - алгебры такие, что $G \subset \mathcal{H}$, тогда $E[X|G] = E[E[X|\mathcal{H}]|G]$

Теорема 2 (Неравенство Йенсена): если $\Phi : \mathcal{R} \to R$ - выпуклая функция и $E[|\Phi(X)] < \infty$, то $\Phi(E[X|\mathcal{H}]) \leq E[\Phi(X)|\mathcal{H}]$

Следствия:

1. $E[X|\mathcal{H}] \leq E[|X||\mathcal{H}]$
2. $(E[X|\mathcal{H}])^2 \leq E\left[|X|^2 |\mathcal{H}\right]$

Если $X_n \to X$ в то $E[X_n|\mathcal{H}] \to E[X|\mathcal{H}]$ в L^2.

3.3 Мартингалы, субмартингалы и супермартингалы. Привести примеры.

Адаптированный СП $(X_t)_{t\geq 0}$ называется **мартингалом** если $\forall t \geq 0$ $E|X_t| < \infty$, $E(X_{t+s}|\mathcal{F}_t) = X_t$(P - почти наверное) $s, t \geq 0$

(предыдущие два условия - *)

Адаптированный СП $(X_t)_{t\geq 0}$ называется **субмартингалом**, если он удовлетвоярет условию (*) и $E(X_{t+s}|\mathcal{F}_t) \geq X_t$

Адаптированный СП $(X_t)_{t\geq 0}$ называется **супермартингалом**, если он удовлетворяет условию (*) и $E[X_{t+s}|\mathcal{F}_t] \leq X_t$

Если $X_t\,(t \geq 0)$- субмартингал, то процесс $(-X_t)$- супермартингал.

$(X_t)_{t\geq 0}$ называется **мартингал-разностью** если он удовлетворяет условию (*) и выполянется $E[X_{t+s}|\mathcal{F}_t] = 0$

Пусть задана некоторая фильтрация $\{\mathcal{F}_t, t \in T \subset \mathcal{R}\}$, т.е. неубывающее семейство σ - алгебры $\mathcal{F}_t \in \mathcal{F}, t \in T(\mathcal{F}_s \in \mathcal{F}_t$ при $s \leq t, t \in T$).

Последовательность СВ $(X_t)\,(t \geq 0)$ называется **адаптированной относительно фильтрации** F_t, если $\forall t \geq 0$ СВ X измерима относительно σ - алгебры F_t.

Адаптированный случайный процесс $X_t\,(t \geq 0)$ наызывается **мартингалом**, если для всех $t \geq 0$

1. $E(X_t) < \infty$
2. $E(X_{t+s}|\mathcal{F}_t) = X_t$

Мартингал является одновременно и субмартингалом и супермартингалом.

№1. $X_t = \sum_{k=1}^{t} \xi_k (t \geq 0$ целое), $(\xi_t)_1^\infty$ - последовательности независимых СВ, для которых $E\xi_t = 0$

$E(X_{t+1}|\mathcal{F}_t) = E\left(\sum_{k=1}^{t+1} \xi_k|\mathcal{F}_t\right) = E\left(\sum_{k=1}^{t+1} \xi_k|\xi_1, \xi_2, ..., \xi_t\right) = \sum_{k=1}^{t} \xi_k + E(\xi_{t+1}|\xi_1, \xi_2, ..., \xi_t) = \sum_{k=1}^{t} \xi_k = X_t + E(\xi_{t+1}) = X_t$

№2. $X_t = \sum_{k=1}^{t} \xi_k$, $(\xi_t)_1^\infty$ - мартингал-разность.
$E\left(\sum_{k=1}^{t+1} \xi_k | \xi_1, \xi_2, ..., \xi_k\right) = \sum_{k=1}^{t} \xi_k + E\left(\xi_{t+1} | \xi_1, ..., \xi_k\right) = X_t$
№3. $X_t = \bigcap \xi_k, (\xi_t)_1^\infty, (\xi_t)_1^\infty$ - разность независимых СВ, $E\xi_k = \alpha$
$E\left(\prod_{k=1}^{t} \xi_k | \xi_1, ..., \xi_t\right) = \prod_{k=1}^{t} \xi_k \cdot E\left(\xi_{t+1} | \xi_1, ..., \xi_t\right) = X_t$
№4. $X_t = E\left(\xi | F_t\right)$,где ξ - СВ с конечным МО
$E\left(X_{t+1} | F_t\right) = E\left(E\left(\xi | F_{t+1}\right) | F_t\right) = E\left(\xi | F_t\right) = X_t$
Примеры субмартингалов
№1. $X_t = \sum_{k=1}^{t} \xi_t, (t \geq 0)$, ξ_k - последовательность неотрицательных интегрируемых СВ
$E\left(\sum_{k=1}^{t+1} \xi_k | \xi_1, ..., \xi_t\right) = \sum_{k=1}^{t} \xi_k + E\left(\xi_{t+1} | \xi_1, ...\xi_t\right) \geq X_t$
№2. $X_t = g\left(\xi_t\right)$, где ξ_t - мартингал, g - выпуклая вниз функция, $E\left|g\left(\xi_t\right)\right| < \infty$, $t \geq 0$
Неравенство Йенсена: $\phi\left(E\left[x | \mathcal{H}\right]\right) \leq E\left[\phi\left(x\right) | \mathcal{H}\right]$
$E\left(X_{t+1} | F_t\right) = E\left(g\left(\xi_{t+1}\right) | F_t\right) \geq g\left(E\left(\xi_{t+1} | F_t\right)\right) = g\left(\xi_t\right) = X_t$
№3. $X_t = Y_t^+$, где $Y^+ = max\left(0, Y\right)$, где $\left(Y_t, \mathcal{F}_t\right)$ - субмартингал.
$E\left(X_{t+1} | F_t\right) = E\left(Y_{t+1}^+ | F_t\right) = E\left(max\left(0, Y_{t+1}\right) | F_t\right) \geq max\left(0, E\left(Y_{t+1} | \mathcal{F}_t\right)\right) \geq max\left(0, Y_t\right) = Y_t^+ = X_t$

3.4 Предельные теоремы для мартингалов.

Предельные теоремы для мартингалов

Пусть $\left(X_n, F_n\right)_{n \in \mathcal{N}}$- субмартингал и (a, b) - непустой интервал.
Определим марковские моменты
$\tau_1 = min\left(t \geq 0 : X_t \leq a\right)$
$\tau_2 = min\left(t \geq \tau_1, X_t \geq b\right)$
...
$\tau_{2,m-1} = min\left(t \geq \tau_{2m-2} : X_t \leq a\right)$
$\tau_{2m} = min\left(t \geq \tau_{2m-1} : X_t \geq b\right)$
...

Введем СВ $\beta_N\left(a, b\right) = \begin{cases} 0 & \tau_2 > N \\ max\left\{m : \tau_{2m} \leq N\right\} & \tau_2 \leq N \end{cases}$

$\beta_N\left(a, b\right)$ - число пересечений снизу вверх интервала $[a, b]$ последовательностью $X_1...X_t$

Лемма (о числе пересечений; Дуб)

Для описанных выше величин справедливо неравенство $E\beta_N\left(a, b\right) \leq \frac{E(X_N - a)^+}{b-a} \leq \frac{EX_N^+ + (a)}{b-a}$ где $X^+ = \max\left(0, X\right)$

Доказательство:

Т.к. $\beta_N\left(a, b\right)$ для последовательности $\left(X_n, F_n\right)_{n \in N}$ совпадает с $\beta_N\left(0, b-a\right)$ для последовательности $\left(\left(X_N - a\right)^+, F_n\right)_{n \in N}$ мы будем считать, что $a = 0$ и $X_n \geq 0, n \in N$.
Положим $X_0 = 0, F_0 = \{\emptyset, \Omega\}$
Пусть для $i \in N, \phi_i = 1\left\{\tau_m < \tau \leq \tau_{m+1} \text{ для нечетного} m\right\}$
Тогда в $\beta_N\left(0, b\right) \leq \sum_{i=1}^{N} \left(X_i - X_{i-1}\right) \phi_i$
Заметим, что $\{\phi_i = 1\} = U_m \left\{\left\{\tau_m < i\right\} \left\{\tau_{m+1} < 1\right\}\right\} \subset F_{i+1}, i \in \mathcal{N}$???
Поэтому в $E\beta_N\left(a, b\right) \leq \sum_{i=1}^{N} E\left[\left(X_i - X_{i-1}\right) \phi_i\right] = \sum_{i=1}^{N} E\left[\phi_i \left(E\left(X_i | F_{i-1}\right) - X_{i-1}\right)\right] \leq$
$\leq \sum_{i=1}^{N} E\left[E\left(X_i | F_{i-1}\right) - X_{i+1}\right] = \sum_{i=1}^{N} \left(EX_i - EX_{i-1}\right) = EX_N$

Теорема: пусть $(X_n, F_n)_{n\in N}$ - субмартингал такой, что $sup_n E|X_n| < \infty$. Тогда с вероятностью 1 существует $X_\infty = \lim\limits_{n\to\infty} X_n$ причем $E|X_\infty| < \infty$

Доказательство:

Пусть $\underline{X} = \lim\limits_{n\to\infty} \inf X_n, \overline{X} = \lim\limits_{n\to\infty} supX_n$

Допустим, что $P\left(\underline{X} < \overline{X}\right) > 0$. Т.к. $\left\{\underline{X} < \overline{X}\right\} = \bigcup\limits_{a,b\in Q, a<b} \left\{\underline{X} < a < b < \overline{X}\right\}$???

$E\beta_N(a,b) \leq \frac{EX_N^+ + (a)}{b-a}$

Обозначим $\beta_\infty(a,b) = \lim\limits_{N\to\infty} \beta(a,b)$

$E\beta_\infty(a,b) \leq \frac{\sup\limits_n EX_N^+ + |a|}{b-a}$

Заметим, что для субмартингалов $(X_n, F_n)_n \in N$

$\sup\limits_n EX_n^+ < \infty \Leftrightarrow supE|X_n| < \infty$

Т.к. $EX_n^+ \leq E|X_n| = 2EX_n^+ - EX_n \leq 2EX_n^+ - EX_1$

Следовательно, $E\beta_\infty(a,b) < \infty$ почти наверное, что противоречит предположению, что $P\left(\underline{X} < a < b < \overline{X}\right) > 0$.

Таким образом, $P\left\{\underline{X} < \overline{X}\right\} = 0$. По лемме Фату $E|X_\infty| \leq \sup\limits_n E|X_n| < \infty$. **Доказано**

3.5 Многомерное гауссовское распределение.

Если X - СВ, имеет **нормальное** или **гауссовское распределение** с плотностью $f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right)$, $m = EX, \sigma^2 = E(X - m^2)$.

Характеристическая функция $\phi_X(\alpha) = E\left[e^{i\alpha x}\right]$, $\phi_x(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\alpha x} f_X(x)\,dx$. Для гауссовского распределения $\phi_X(\alpha) = E\left[e^{i\alpha X}\right] = exp\left(i\alpha m - \frac{\alpha^2\sigma^2}{2}\right)$

Рассмотрим **многомерную гауссовскую СВ** $X = (X_1, X_2, ..., X_n)^T$, $m = (m_1, m_2, ..., m_n)^T$? $B = (b_{kl})_{n\times n}$- **матрица ковариаций**, $b_{kl} = E\left[(X_k - m_k)(x_l - m_l)\right]$

Характеристическая функция

$\phi_X(\alpha) = \exp\left(i\alpha^T m - \frac{\alpha^T B\alpha}{2}\right)$ =exp $\left(i\sum_{k=1}^n \alpha_k m_k - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^n\sum_{l=1}^n b_{kl}\alpha_k\alpha_l\right)$

Выведем плотность невырожденного распределения многомерной гауссовской СВ общего вида.

Предположим, что $EX = m = 0$. - нулевой вектор. B - симметричная неотрицательно определенная матрица с действительными элементами $B = B^T$, т.е. для любого небора чисел $z_1, ..., z_n$, $\sum_{k=1}^n\sum_{l=1}^n b_{kl}z_k z_l \geq 0$.

Из линейной алгебры для любого симметричного и неотрицательного определения матрицы $M(n\times n)$ существует матрица $N(n\times n)$ ортогонального преобразования, переводящая M в диагональную матрицу: $M \mapsto N^T MN$.

Ортогональная матрица N $N\cdot N^T = N^T N = E \Rightarrow N^{-1} = N^T, \det(N) = 1$

Пусть C матрица ортогонального преобразования и $D = C^T BC$, D- диагональная матрица с диагональю $\sigma_1^2, ..., \sigma_n^2$.

Для случайного вектору Y, имеющего независимые гауссовские координаты с дисперсиями σ_k^2 , плотность распределений равна произведению частных плотностей

$f_Y(x) = \prod_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_k^2}} \exp\left(-\frac{x_k^2}{2\sigma_k^2}\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^n (\sigma_1\sigma_2...\sigma_n)^{-1} \exp\left(-\frac{x^T D^{-1} x}{2}\right)$ где $x = (x_1, ..., x_n)^T$; D^{-1}-диагональная матрица, имеющая своей диагональю $\left(\sigma_1^{-2}, ..., \sigma_n^{-2}\right)$.

$f_Y(x) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^n (\det D)^{-1/2} \exp\left(\frac{-x^T\left(C^TBC\right)^{-1}x}{2}\right) =$
№1 $\det(D) = \det\left(C^TBC\right) = \det\left(C^T\right)\det(B)\det(C) = \det B$
№2 $(AM)^{-1} = M^{-1}A^{-1}$
№3 $(C_x)^T = x^TC^T$
$= \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^n (\det B)^{-1/2} \cdot \exp\left(\frac{-(Cx)^TB^{-1}Cx}{2}\right)$
Обозначим $y = Cx \Rightarrow x = C^{-1}Y$
$f_Y(C^{-1}Y) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^n (\det B)^{-1/2} \exp\left(\frac{-Y^TB^{-1}Y}{2}\right)$
С другой стороны
$\phi_x(\alpha) = \exp\left(-\alpha^TB\alpha\right) = \exp\left(-\alpha^TCDC^T\alpha\right) = \exp\left(-\left(C^{-1}\alpha\right)^T \cdot \left(C^{-1}\alpha\right)\right).$

Обозначим $\beta = C^{-1}\alpha$ и учитывая, что $\phi_X(C\beta) = E\exp\left(i(C\beta)^TX\right) = E\exp\left(i\beta^TC^TX\right) = \phi_{C^TX}(\beta)$ получаем $\phi_X(C\beta) = \exp\left(-\beta^TD\beta\right) = \phi_{C^{-1}x}(\beta)$

Отсюда следует, что вектор, обозначенный Y равен $C^{-1}X$. Нам известно значение плотности распеределения вектора $C^{-1}x$ в т. $C^{-1}Y$. Можно показать, что $f_{CX}(Cx) = f_X(x)$ т.к. C^{-1} - матрица, ортогональная преобразвоанию.

Получим искомую формулу $f_X(X) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^n (\det(B))^{-1/2} \exp\left(\frac{-x^TB^{-1}x}{2}\right)$ (если $m = Ex = 0$)

Если $m \neq 0$, то $f_{X+m}(x) = f_{X+m}(y+m) = f_X(y) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^n (\det B)^{-1/2} \exp\left(\frac{-y^TB^{-1}y}{2}\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^n (\det B)^{-1/2} \exp\left(-\frac{(x-m)^TB^{-1}(x-m)}{2}\right)$

3.6 Процессы с независимыми приращениями.

Действительный случайный процесс называется **процессом с независимым приращением**, если для $\forall n \in N$ и всех $t_0, ..., t_k : 0 = t_0 < t_1 ... < t_n$ величины $X_{t_0}, X_{t_1} - X_{t_0}, ..., X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$ независимы в совокупности.

3.7 Распределение Пуассона. Процесс Пуассона. Неоднородный процесс Пуассона. Сложный процесс Пуассона.

Распределением Пуассона называется распределение на множестве $\mathcal{Z}_+$, неотрцитальеных целых чисел, задаваемое формулой $p_n = P(x=n) = \frac{\mu^k}{n!}e^{-\mu}\,(n \in Z_+)$, $\mu > 0$ - параметр распределения.

Пуассоновкая СВ X - это целочисленная СВ, имеющая распределение Пуассона. $E(X) = \mu, D(X) = \mu$.

Свойство: Пусть X_1 и X_2 - две независимых СВ с параметрами μ_1 и μ_2 , тогда их сумма тоже будет пуассоновской СВ с параметром $\mu_1 + \mu_2$.

Это свойство доказывается с помощью производящей функции
$M_X(t) = E\left[e^{tx}\right]$
$M_X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tX}p^x(dx)$
$M_x(t) = \sum_{i=1}^{\infty} e^{tX_ip_i}$ - производящая функция.
$Ee^{\alpha X} = \sum_{n=0}^{\infty} e^{\alpha n(X_1+X_2)} = Ee^{\alpha X_1}Ee^{\alpha X_2} = \exp\left(-(\mu_1+\mu_2)(1-e^{\alpha})\right)$, тогда $Ee^{\alpha(X_1+X_2)} = Ee^{\alpha X_1}Ee^{\alpha X_2} = \exp\left(-(\mu_1+\mu_2)(1-e^{\alpha})\right)$, что по теореме о единственности для производящей функции может быть только у Пуассоновского распределения.

Предложение: если (τ_i) для $i \geq 1$ независимые экспоненциально распределенные СВ с параметром λ , тогда для него $\forall t > 0$ СВ $N_t = \inf\{n \geq 1, \sum_{i=1}^{n} \tau_i > t\}$ имеет пуассоновское распределение λt, такое что $\forall n \in N$ $P(Nt = n) = e^{-\lambda t}\left(\frac{\lambda t}{n!}\right)^n$

Случайный процесс $X = X(t), t \geq 0$ наызвается **процессом Пуассона**, если $X(0) = 0$ и существует некоторая величина $\lambda > 0$ (параметр процесса) и:

1. X - неубывающий, непрерывный справа процесс
2. X - процесс с незваисимыми приращениями
3. X - процесс с целочисленными значениями, где случайное приращение на любом интервале длины t имеет распределение Пуассона с параметром λt

Пусть $\sigma_1, \sigma_2, ...$ - это последовательные моменты скачков процесса X. Распределение 1-го скачка $P(\sigma_1 > t) = P(x(t) = 0) = e^{-\lambda t}$.

Можно доказать, что остальные интервалы меджу соседними скчаками распределены экспоненциально и независимо, построив по этим условиям новый процесс и показав эквивалентностть (по условиям Колмогрова) вновь построенного процесса с исходным. Другой способ доказательства связан с независимостью и однородностью приращений процесса $X(t)$.

Пусть (τ_i) где $i \geq 0$, последовательность независимых экспоненциально распределенных СВ с параметром λ и $\tau_n = \sum_1^n \tau_i$, тогда процесс определенный с помощью $N_t = \sum_{n=1} I_t \geq \tau_k$, называется **процессом Пуассона** с интенсивностью λ .

Неоднородный процесс Пуассона.

Пусть $\lambda(t)$ - это произвольная интегрируемая функция на $S = [0, \infty]$.

Процесс X **называется процессом Пуассона** с интенсивностью $\lambda(t)$ если $X(0) = 0$ и:

1. X - неубывающая непрерывный справа процесс
2. X - процесс с независимыми приращениями
3. X - процесс с целоисленными значениями, где СВ приращения на интервале $[a, b)$ имеет распределение Пуассона с параметрами $\mu(a, b) = \int_a^b \lambda(t)\, dt$.

Сложный процесс Пуассона

Пусть $N(t)$ - однородный процесс Пуассона с параметром β и $(U(n))$, где $(n = 1, 2, ...)$- последователность незвисимых случайно распределенных НОР величин. Причем Пуассоновский процесс и последовательность независимы между собой. **Сложным процессом Пуассона** называется процесс $X(t), t \geq 0$ вида $X(t) = \sum_{k=1}^{N(t)} U_k$.

В отличие от одногродного Пуассона, этот процесс в момент времени σ_n разделен независимыми промежутками, имеет скачки случайные по величине и необязательно положительные.

3.8 Винеровский процесс.

Однородным стационарным винеровским процессом называется процесс $w(t), t > 0$ обладающий следующими свойствами

1. Процесс $w(t)$ непрерывен с вероятностью 1 в любой точке $t > 0$
2. Процесс является однородным процессом с независимыми приращениями
3. $w(0) = 0$ с вероятностью 1 и приращение $w(t_2) - w(t_1)$ при $t_2 > t_1$ имеет гауссовское распределение с нулевым средним и дисперсией $t_2 - t_1$.

С помощью 3) свойства как раз и моделируется винеровский процесс.

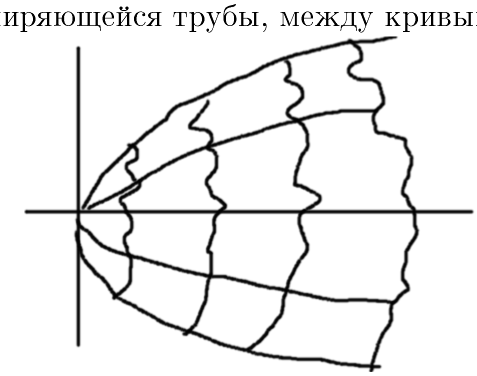
Из однородности процесса следует значение одномерной плотности процесса $f_t(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}}$
Свойства винеровского процесса:

1. Винеровский процесс с вероятностью 1 траектории этого процесса непрерны, и не дифференцируемы ни в одной точке $t \geq 0$;
2. С вероятностью 1 траектории процесса выходят из любого конечного интервала, но в то же время для траекторий выполнился закон повторного логарифма

Закон повторного логарифма

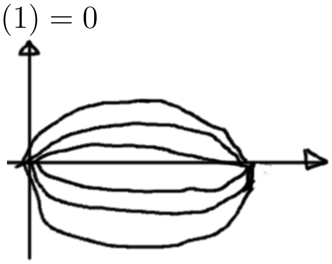
$\limsup\limits_{t\to} \frac{w(t)}{\sqrt{2t\ln\ln t}} = 1$и $\liminf\limits_{t\to\infty} \frac{w(t)}{\sqrt{2t\ln\ln t}} = -1.$

Это показывает, что почти все траектории винеровского процесса остаются внутри расширяющейся трубы, между кривыми $\pm(1+\epsilon)\sqrt{2t\ln\ln t}$ $(\forall\epsilon > t)$



Винеровский процесс (нестандартным) называют также результат линейного линейного преобразовани $X(t) = x + at + bw(t)$, где $x, a, b \in R$

Брауновским мостом называется процесс $w_0(t) = w(t) - tw(t)$ $t \in [0,1]$, $w_0(0) = w_0(1) = 0$



3.9 Марковские цепи.

Марковской цепью называется случайная последовательность $X(t)$, $t = 0, 1, 2...$ с конечным множеством значений $x(t) \in \{x_1, x_2, ...x_n\}, x_i \neq x_j$ где N - целое положительное.

Все конечномерные распределения последовательности $X(t)$ вычисляются по формуле:

$P(x(0) = x_{k0}, x(1) = x_{k1}, ..., x(t) = x_{kt}) =$

$= p_{k_0}(0)\, p(0, (k_0), (1, k_1))\, p((1, k_1), (2, k_2)) ... p((t-1, k_{t-1}), (t, k_t))$, где $p_i(0) = P(X(0) = X_i)$ и вектор $(p_1(0), p_2(0), ..., p_n(0))^T$ - **начальное распределение;** $p((t, i), (t+1, j))$ - **переходные вероятности.**

Обозначим $P((t, i)(t+m, j)) = \frac{P(x(t)=i, x(t+m, j)=j)}{P(X(t)=i)}$ - **переходная вероятность за** m **шагов**.

Пусть $p_i(t) = P(X(t) = x_i)$ и вектор $p(t) = (p_1(t), p_2(t), ...p_n(t))^T$ - **распределение цепи в момент времени** t.

Тогда согласно марковскому свойству $p_j(t+m) = \sum_{k=1}^{N} p_k(t)\, p((t, k), (t+m, j))$

Однородная марковская цепь.

Однородной марковской цепью называется марковская цепь, для которой переходная вероятность (на один шаг) не зависит от "времени" (от номера в последовательности), т.е. $\forall i, j, t, m, p((t, i), (t+m, j)) = p_{ij}(m)$

В этом случае распределение последовательности задается с помощью начального распределения - вектора $p(0)$ и переходной матрицы $Q = (p_{ij}) \sim N \times N$, где $p_{ij} \equiv p_{ij}(1) \geq 0, \forall i : \sum_{j=1}^{N} p_{ij} = 1$

Матрица переходных вероятностей на m шагов совпадает с m-ой степенью Q . Распределение цепи с номером $t+1$ задается равенствами $p_j(t+1) = \sum_{i=1}^{N} p_{ij} p_i(t)$ $(1 \leq j \leq N)$ или $p(t+1) = Q^T p(t)$ откуда $p^T(t+1) = p^T(t)\, Q$ а также представление распределения на шаге $t \geq 1$ через начальное распределение: $p^T(t) = p^T(0)\, [Q]^t$, t - степень.

Эргодическая теорема (совпадение временного и пространственного среднего).

для любой измеримой и ограниченной функции f равны следующие величины:

1. среднее по времени $\lim\limits_{t\to\infty} \dfrac{1}{t} \displaystyle\int_0^t f(X(s))\, ds$ - предел имеет одно и то же значение почти для всех траектрий процесса

2. пространственна среднее $E(f(x(t)))$, которое имеет одно и то же значение для всех $t \geq 0$.

Однородная марковская цепь называеся эргодическая тогда и только тогда, когда для любой пары точек i, j существует $\lim\limits_{t\to\infty} p_{ij}(t)$ и этот предел имеет одно и тоже значение для всех $i \in \{1, N\}$

Теорема: Для того, чтобы однородная МЦ была эргодической достаточно, чтобы при некотором $m \geq 1$ все элементы матрицы $[Q]^m$ были положительны $[Q]^m > 0$

Доказательство:

Благодаря конечности числа элементов матрицы существует положительная величина δ такая, что $\forall i, j,\ p_{ij}(m) \geq \delta$. Обозначим $M_j(n) = max\{p_{ij}(n) : 1 \leq i \leq N\}$ и $m_j(n) = min\{p_{ij}(n) : 1 \leq i \leq n\}$.

$p_{ij}(m+n) = \sum_{k=1}^{N} p_{ik}(m)\, p_{kj}(n) = \sum_{k=1}^{N} \left(p_{ik}(m) - \frac{\delta}{N}\right) p_{kj}(n) + \frac{\delta}{N} \sum_{k=1}^{N} p_{kj}(n) \leq$

$\leq M_j(n) \sum_{k=1}^{N} \left(p_{ik}(m) - \frac{\delta}{N}\right) + \frac{\delta}{N} \sum_{k=1}^{N} p_{kj}(n) = M_j(n) \cdot (1-\delta) + \frac{\delta}{N} \sum p_{kj}(n)$

Откуда $\Rightarrow M_j(m+n) \leq M_j(n)(1-\delta) + \frac{\delta}{N} \sum p_{kj}(n)$ и, аналогично $m_j(m+n) \geq m_j(n)(1-\delta) + \frac{\delta}{N} \sum p_{kj}(n)$. Из них следует

$M_j(m+n) - m_j(m+n) \le (M_j(n) - m_j(n))(1-\delta)$

Повторяем это неравенство k раз:

$M_j(km+n) - m_j(km+n) \le (M_j(n) - m_j(n))(1-\delta)^k \Rightarrow$ разность $M_j(n) - m_j(n)$ убывает экспоненциально быстро при $n \to \infty$, значит при любом k существует предел

$\lim\limits_{n\to\infty} m_j(n) = \lim\limits_{n\to\infty} M_j(n) = \lim\limits_{n\to\infty} p_{ij}(n)$ не зависит от k ??? в методичке $\lim\limits_{n\to\infty} m_j(n) = \lim\limits_{n\to\infty} M_j(n) = \lim\limits_{n\to\infty} p_{kj}(n)$который не зависит от k, который мы обозначим $\tilde{p}_j$. ???$\sum \widetilde{p}_i = 1$ как и сумма всех элементов в строке матрицы $[Q]^n$ **Доказано**

$p^T(t) = p^T(0)[Q]^t$. Распределение значения цепи в момент t стремится к $\tilde{p}$. Это предельное распределение является стационарным (инвариантным) распределением эргодической МЦ, т.е. удовлетворяет уравнению $\tilde{p} = Q^T\tilde{p}$ позволяющеу вычислить вектор стационарного распредееления.

Счетное множество состояний.

Однородная МЦ со счетным множеством состояний также может быть определена с помощью заданной системы из начального распределения и переходной функцией на один шаг $\sum_{k=1}^{\infty} p_k(0) = 1$, $p_{ij} \ge 0$, $\sum_{j=1}^{\infty} p_{ij} = 1$, $i = 1, 2, ...$

Таким образом, распределение цепи определяется с помощью матрицы Q бесконечного размера.

В этом случае достаточое условие эргодичности цепи можно задать с помощью коэффициента эргодичности

$k(n) = 1 - \frac{1}{2}\sup\limits_{i,j}\sum_{k=1}^{\infty} |p_{ik}(n) - p_{jk}(n)|$ где $p_{ik}(n)$ переходная функция на n шагов

$p_{ij}(n+1) = \sum_{k=1}^{\infty} p_{ik}(n) p_{kj}$ $(n \ge 1, p_{ij}(1) \equiv p_{ij})$

Теорема: Для того, чтобы однородная марковская цепь была эргодической, достаточно, чтобы при некотором n_0 коэффициент $k(n_0)$ был положительным и при любом начальном распределении $p_i(0)$ $(i \ge 0)$ переходная вероятность $p_{ij}(n)$ сходится при $n \to \infty$ к стационарной вероятности $\tilde{p}_j$ причем $\sup\limits_{p_i(0)} |p_{ij}(n) - \tilde{p}_0| \le (1 - k(n_0))^{\frac{n}{n_0} - 1}$

4 Лишнее

Марковские цепи с дискретным временем и конечным числом состояний

$\{s_1, ..., s_n\}$

$s_i \to s_j$. В фиксированный момент времени $\{t_1, t_2, ..., t_n\}$.

При известном состоянии системы в данный момент времени, прогноз о ее будущем состоянии не зависит от состояний в котрых находилась система в прошлом.

Пусть система может находиться в s_1, s_2, s_3. $p_{ij}, i, j = 1, 2, 3$ - вероятности перехода системы из i в j за 1 шаг.

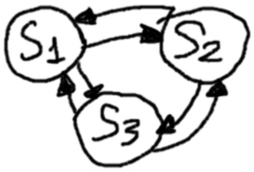
$p = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{pmatrix}$- матрица вероятностей перехода.

Если p_{ij} не зависит от номера шага, на котором осуществляется переход из s_i в s_j , то такая цепь называется однородной.

Свойства:

1. $0 \le p_{ij} \le 1$

2. $\sum_{j=1}^{3} p_{ij} = 1, i = 1, 2, 3$



Обозначим $Q(k) = (p_1(k), p_2(k), p_3(k))$, k - вероятность того, что после k - го шага система находится в состоянии s_i .$\sum_{i=1}^{3} p_i = 1$

$k = 0 : Q(0) = (p_1(0), p_2(0), p_3(0))$- начальное распределение вероятностей состояний.

М. Р. $Q(k), Q(0)$ удовлетворяет $Q(k) = Q(k-1) \cdot P, Q(k) = Q(0) \cdot P^k$

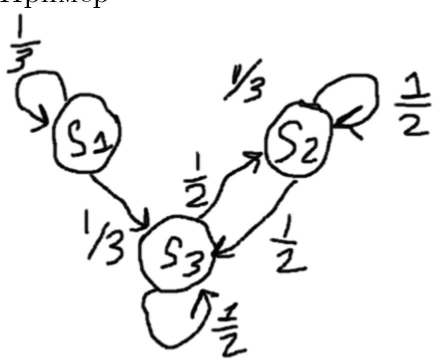
Это уравнение позволяет определить вероятность состояния после каждого шага по известному начальному распределению и заданной матрице P вероятностей перехода за 1 шаг.

Состояние S_i называется **существенным**, если выйдя из этого состояния система может в него вернуться за один или несколько шагов.

$p_{ij}(n) > 0$ и существует k такое, что $p_{ij}(k) > 0$.

Состояние S_i называется несущественным, если выйдя из S_i система не может в него вернуться. $p_{ij}(k) > 0, p_{ji}(k) = 0 \forall k$

Пример



$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

1 - несущественное состояние, система из него вышла, но войти не может.

Распределение вероятностей состояний Марковской цепи называется стационарным, если он не изменятся во времени. СТационраное распределение Q удовлетворяет матричнму уравнению: $Q = Q \cdot P$

$$\begin{cases} p_1 = & p_1 p_{11} + p_2 p_{21} + p_3 p_{31} \\ p_2 = & p_1 p_{12} + p_2 p_{22} + p_3 p_{32} \\ p_3 = & p_1 p_{13} + p_2 p_{23} + p_3 p_{33} \\ 1 = & p_1 + p_2 + p_3 \end{cases}$$

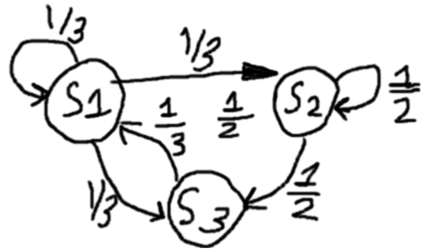
Марковская цепь называется регулярной, если из любого существенного состояния можно попсть в любое другое существенное состояние за конечное число шагов.

Вероятности $\tilde{p}_i = \lim\limits_{n \to \infty} p_i(n)$называются предельными или финальными вероятностями состояний системы.

Если марковская цепь регулярно, то предельные вероятности состояний системы совпадают со стационарными вероятностиями.

Пример:

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$



Найти матрицу $p(2) = p(1) \cdot p(1)$

Определить распределение вероятностей состояний системы за 1,2,3 шага, считая начальным состояние s_1

$Q(0) = (1,0,0)$, $Q(1) = Q(0) \cdot P = (1,0,0) \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$

$Q(k) = Q(k-1)P = Q(0)P^k$

$Q(3) = Q(2)P = Q(0)P^3$

Найти стационарное распределение вероятности системы $Q = QP$

$$\begin{cases} p_1 = & \frac{1}{3}p_1 + 0 \cdot p_2 + \frac{1}{2}p_3 \\ p_2 = & \frac{1}{3}p_1 + \frac{1}{2}p_2 + \frac{1}{2}p_3 \\ p_3 = & \frac{1}{3}p_1 + \frac{1}{2}p_2 + 0 \cdot p_3 \\ 1 = & p_1 + p_2 + p_3 \end{cases}$$

Т.к. система регулярна, то предельные вероятности совпадают со стационарными

15.02.17 лекция

4.1 Дискретные случайные величины

4.2 Основные понятия

4.3 Независимые одинаково-распределенные случайные величины НОР СВ.

Пусть $X_1, X_2, ..., X_n$- НОР СВ

Обозначим $\bar{X} = \frac{X_1+...+X_n}{n}$, тогда $M\left(\bar{X}\right) = \frac{M(X_1)+...+M(X_n)}{n} = \frac{n \cdot a}{n} = a$

где $M(X_i) = a, i = 1,2,...,n$

$D\left(\bar{X}\right) = D\left(\frac{X_1+X_2+...+X_n}{n}\right) = \frac{D(X_1)+D(X_2)+...+D(X_n)}{n^2} = \frac{n \cdot D}{n^2} = \frac{D}{n}$

$\sigma\left(\bar{X}\right) = \sqrt{D\left(\bar{X}\right)} = \sqrt{\frac{D}{n}} = \frac{\sqrt{D}}{\sqrt{n}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$, где $\sigma = \sigma(X_i)$