Численное моделирование случайных процессов

Лектор: Ромаданова Мария Михайловна, конспект студента ПМИ-3 Згода Ю.

12 июня 2017 г.

Содержание

1 По заданному ряду распределения, функции распределения или плотности смоделировать случайные величины. Построить ряд распределения и функцию распределения, либо плотность и функцию распределения. Отобразить полученные случайные величины на графике и построить гистограмму распределения. Вычислить числовые характеристики: математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение по формулам. Получить те же числовые характеристики, используя стандартные встроенные функции MATLAB.

2 Вторая Часть

2.1 Числовые характеристики и их свойства дискретных случайных величин.

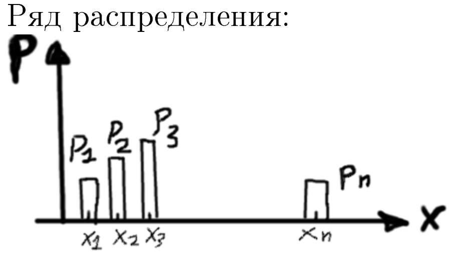
Законом распределения случайной величины называется любое соотношение, устанавливающее связь между возможными значениями случайной величины и вероятностями, соответствующими этим значениям.

Рядом распределения дискретной СВ называется совокупность всех ее возможных значений $x_1, x_2, ..., x_n$ и вероятностями $p_1, p_2, ...p_n$ появления каждого из этих событий.

В Matlab будем рисовать ряд распределения.

Функция распределения $F_X(x) = P(X < x)$.

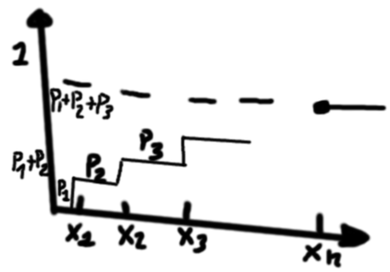
Ряд распределения:



Функция распределения для дискретной целочисленной случайной величины:

x	x_1	x_2	...	x_n
p	p_1	p_2	...	p_n

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \le x_1 \\ \sum_{i=0}^{k} p_i & k = 1, 2, ..., n \\ 1 & x \ge x_n \end{cases}$$



Математическое ожидание $M(X) = x_1p_1 + ...x_np_n = \sum_{i=1}^{n} x_kp_k$ (может быть $n = \infty$)

Свойства математического ожидания:

1. $M(C) = C$,с - константа
2. $M(CX) = CM(X)$
3. $M(XY) = M(X)M(Y)$, X,Y - независимые СВ
4. $M(X+Y) = M(X) + M(Y)$- в данном случае X,Y могут быть не независимыми

Рассмотрим новую случайную величину $X - M(X)$- отклонение случайной величины от ее МО. Это распределение будет принимать значения $x_1 - M(X), x_2 - M(X), ...x_n - M(X)$ с вероятностями $p_1, p_2, ..., p_n$ соответственно.

$M(X - M(X)) = 0$, т.к. $M(X - M(X)) = M(X) - M(M(X)) = M(X) - M(X) = 0$

Дисперсией дискретной СВ называют МО квадрата отклонения СВ от ее МО: $D(X) = M[X - M(X)]^2$

$D(X) = M\left[X^2 - 2X \cdot M(X) + (M(X))^2\right] = M(X)^2 - (M(X))^2$

Свойства дисперсии:

1. $D(C) = 0$,C-const, $D(C) = M[C - M(C)]^2 = M(C^2) - (M(C))^2 = 0$
2. $D(CX) = C^2D(X)$
3. $D(X+Y) = D(X) + D(Y)$, X, Y - независимые
4. $D(X-Y) = D(X) + D(-Y) = D(X) + D(Y)$

Средним квадратическим отклонением СВ называется отклонение квадратный корень из дисперсии: $\sigma(X) = \sqrt{D(X)}$ - данное понятие нужно для совпадения размерностей.

В Matlab есть встроенные функции: mean (МО), var (varience), std (среднее квадратическое отклонение)

Введем m=1000, u=rand(1,m), тогда мы можем применить эти функции: man(u),var(u), std(u). Это сходится с формулами.

Пусть $X_1, X_2, ..., X_n$- независимые случайные величины, то $X = X_1 + X_2 + ... + X_n$

$D(X) = D(X_1) + D(X_2) + ... + D(X_n)$

$\sqrt{D(X)} = \sqrt{D(X_1) + D(X_2) + ... + D(X_n)}$

$\sigma(X) = \sqrt{\sigma^2(X_1) + ... + \sigma^2(X_n)}$

2.2 Функция распределения и её свойства. Плотность вероятности и её свойства.

$F_X(x) = P(X < x)$

Свойства:

1. $0 \leq F(x) \leq 1$
2. $F(x)$- неубывающая, $F(x_2) > F(x_1), x_2 > x_1$
3. $P(a < X < b) = F(b) - F(a)$
4. $P(x_1 < X < x_1 + \Delta x) = F(x_1 + \Delta x) - F(x_1)$ Вероятность того, что непрерывная СВ примет одно конкретное значение, равняется нулю.
5. $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$, $\lim_{x \to +\infty} = 1$

Плотность - производная от функции распределения, $f(x) = F'(x)$

Свойства:

$P(a < x < b) = \int_a^b f(x)\,dx$, т.к. $P(a < X < b) = F(b) - F(a) = \int_a^b F'(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$

$F(x) = \int_{-\infty}^{\text{x}} f(t)\,dt = P(X - x)$ $P(-\infty < X < x)$, $\int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$

$f(x) \geq 0$

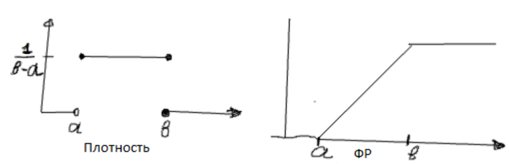
$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$

2.3 Равномерное распределение на отрезке [a, b]. Плотность и функция распределения равномерного распределения. Моделирование случайных величин, равномерно распределённых на отрезке [a, b] в MATLAB, и построение гистограммы распределения. Вычисление числовых характеристик: математического ожидания, дисперсии, среднего квадратического отклонения.

Случайная величина имеет **непрерывное равномерное распределение** на отрезке от a до b, где $a, b \in R$,

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & x \in [a,b] \\ 0 & x \notin [a,b] \end{cases}, \; X \sim U[a,b]$$

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \int_a^x \frac{1}{b-a}dt = \frac{x-a}{b-a} \;\; a \leq x < b, \text{ т.е. } F(x) = \begin{cases} 0 & x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & a \leq x < b \\ 1 & x \geq b \end{cases}$$



Математическое ожидание $E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} x \frac{1}{b-a}dx = \frac{1}{b-a}\int_a^b x dx = \frac{1}{b-a}\frac{x^2}{2}|_a^b = \frac{b^2-a^2}{2(b-a)} = \frac{a+b}{2}$

$D(X) = E\left((X - E(X))^2\right) = E(X^2) - (E(X))^2$

$E(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{b-a}dx = \frac{1}{b-a}\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 dx = \frac{1}{b-a}\frac{x^3}{3}|_a^b = \frac{b^3-a^3}{3(b-a)} = \frac{(b-a)\left(b^2+ba+a^2\right)}{3(b-a)} = \frac{b^2+ba+a^2}{3}$

$D(X) = \frac{b^2+ba+a^2}{3} - \frac{(a+b)^2}{4} = \frac{4b^2+4ba+4a^2-3a^2-6ab-3b^2}{12} = \frac{(a-b)^2}{12}$
Если $X \tilde{} U[0,1]$, то $Y = a + (b-a) \cdot X \Rightarrow Y \sim U[a,b]$
Дискретный случай
$p(x) = \frac{1}{n}$, $x = a, a+1, a+2, a+n-1$
n - параметр масштаба
a - параметр положения, число возможных значений $n \geq 2$

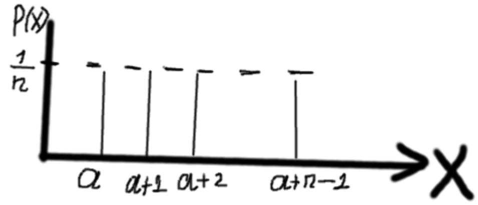


Таблица:

x	a+1	...	a+n-1
p	$\frac{1}{n}$	...	$\frac{1}{n}$

Функция распределения: $F(x) = \begin{cases} 0 & x \leq a \\ \frac{k+1}{n} & a+k < x < a+k+1 \\ 1 & x > a+n-1 \end{cases}$

$M(X) = a + \frac{n-1}{2}$, $D(X) = \frac{n^2-1}{12}$, $\sigma(X) = \sqrt{D(X)}$
$X_i = [n \cdot r_i] + a$, где r_i имеют равномерное распредеелние на отрезке $(0,1)$, $r_i \sim U(0,1)$

2.4 Нормальное распределение N(μ,σ2). Плотность и функция распределения нормального распределения. Функция Лапласа. Свойства плотности нормального распределения. Построение плотности и функции распределения в MATLAB, моделирование случайных величин и построение гистограммы распределения. Вычисление числовых характеристик: математического ожидания, дисперсии, среднего квадратического отклонения.

Плотность функции распределения имеет вид:

$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$

Функция распределения $N(\mu, \sigma^2) = F(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}} dt$

Когда $\mu = 0, \sigma = 1$, $F_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$

$F_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{0} e^{-\frac{t^2}{2}} dt + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = 0,5 + \Phi(x)$, где $\Phi(x)$ - функция Лапласа, $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$

$F(x) = F_0\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) = 0,5 + \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$

Иногда вместо этой функции используют вид: $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt \Rightarrow \overline{\Phi}(x) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ (или же интеграл ошибок, error function): $erf(x) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt = 2\Phi\left(x\sqrt{2}\right)$.

Свойства нормального распределения:

1. Функция плотности определена на всей оси

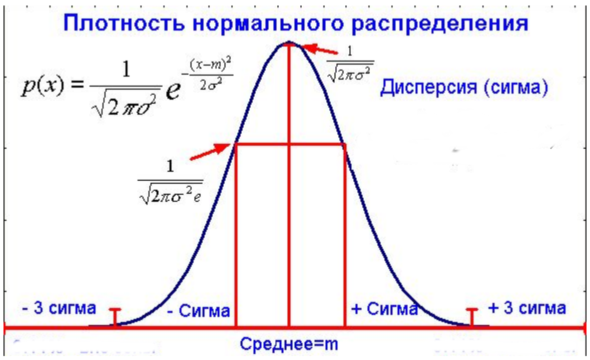
2. $f(x) > 0 \forall x \in \mathcal{R}$

3. $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0, \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$

4. $\max f(x) = f(\mu) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$

5. График функции плотности симметричен относительно прямой $x = \mu$

6. График функции $f(x)$ имеет 2 точки перегба, симметричные относительно точки $x = \mu$ и эти точки перегиба имеют координаты $x_{1,2} = \mu \pm \delta$, $f(x_{1,2}) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi e}}$



2.5 Вероятность попадания нормально распределенной случайной величины в заданный интервал. Правило 3 сигм. Моделирование случайных величин с нормальным распределением N(μ,σ2) в MATLAB.

(α, β)

$P(\alpha < x < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha-\mu}{\sigma}\right)$, где $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{t}{2}}dt$ - функция Лапласа

$|x-\mu| < \delta \to \mu - \delta < x < \mu + \delta$

$P(|x-\mu| < \delta) = P(\mu - \delta < x < \mu + \delta) = \Phi\left(\frac{\mu+\delta-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\mu-\delta-\mu}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right) - \Phi\left(-\frac{\delta}{\sigma}\right) = 2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right)$.

Если

$\delta = \sigma : P(|x-\mu| < \sigma) = 2\Phi(1) = 0,6827$

$\delta = 2\sigma : P(|x-\mu| < 2\sigma) = 2\phi(2) = 0,9545$

$\delta = 3\sigma : P(|x-\mu| < 3\sigma) = \Phi(3) = 0,9973$

Больше чем 3σ можно принебречь.

Правило: с вероятностью 0,9973 значение нормального распределения СВ лежит в интервале $[\mu - 3\sigma; \mu + 3\sigma]$

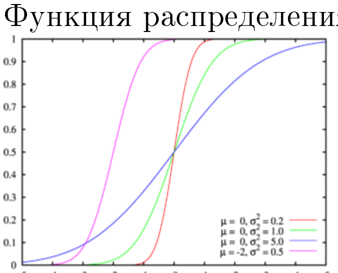
$X \sim N(0,1), Y = \mu + \sigma X \sim N(\mu, \sigma^2)$

$E(X) = 0, D(X) = 1$

$E(Y) = E(\mu) + \sigma E(x) = \mu$

$D(Y) = D(\mu) + \sigma^2 D(x) = \sigma^2$

Функция распределения

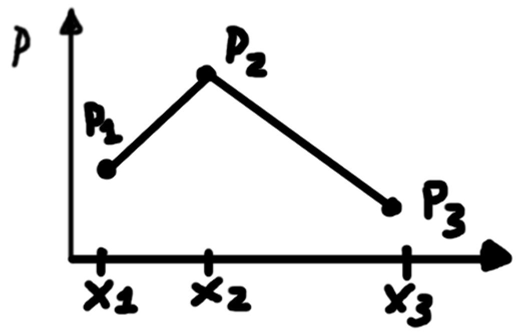


2.6 Моделирование дискретных случайных величин. Общий метод: моделирование а) по заданному закону распределения; б) по заданной функции распределения. Вычисление числовых характеристик.

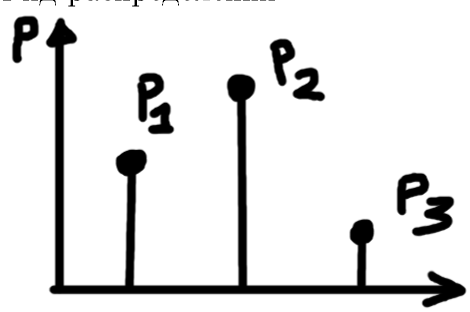
x	x_1	x_2	...	x_n
p	p_1	p_2	...	p_n

, $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$

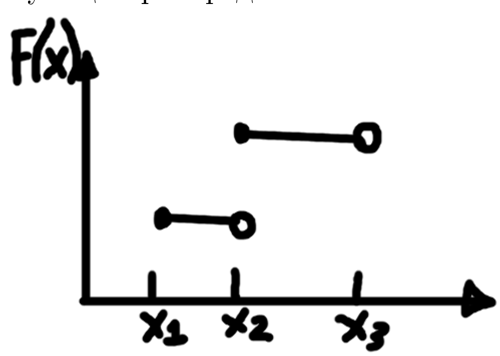
Многоугольник распределения



Ряд распределения



Функция распределения.



Общий метод моделирования дискретной СВ.

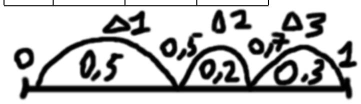
$X \in \{x_1, ..., x_n\}$

№1. Отрезок $[0, 1]$ разбивается на n непересекающихся участков, длины которых равны $p(x_i)$ или p_i . Устанавливается взаимно однозначное соответствие в множество указанных участков и множество генерируемых ДСВ. При этом, участку длины p_i соответствует значение x_i.

№2. Моделируется непрерывная СВ Y с равномерным распределением на отрезке аи $[0, 1]$. Она попадает на один из указанных участков. Значение X_i , соответствующее этому участку, принимается за реализацию X.

Пример:

x	x_1	x_2	x_3
p	0,5	0,2	0,3



??? Надо будет доответить

2.7 Моделирование дискретных случайных величин. Частный метод: моделирование дискретного равномерного распределения. Вычисление числовых характеристик.

Функции округления:

round - до ближайшего целого, floor - возвращает значения, округленные до ближайшего целого $\leq X$, fix - усечение дробной части числа, ceil - возвращает значения, округленные до ближайшего целого $\geq X$

См. 2.3.

2.8 Моделирование непрерывных случайных величин. Общие методы. Метод обратной функции. Моделирование случайных величин экспоненциально распределенных с параметром λ .

Метод обратной функции

Моделирование случайных величин экспоненциально распределенных с параметром λ.

Плотность $f_Y(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$, ФР: $F_Y(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$

Если случайная величина $X \sim U[0,1]$, то $Y = -\frac{1}{\lambda}\ln(X) \sim Exp(\lambda)$.

МО: $E(Y) = \frac{1}{\lambda}$, $D(Y) = \frac{1}{\lambda^2}$, $\sigma(Y) = \frac{1}{\lambda}$

2.9 Моделирование непрерывных случайных величин. Общие методы. Метод Неймана.

???

2.10 Приближенное моделирование нормальной случайной величины на основе центральной предельной теоремы.

Пусть $R \in U[0,1]$, $M(R) = \frac{1}{2}$, $D(R) = \frac{1}{12}$.

Тогда $M\left(\sum_{j=1}^{n} R_j\right) = \frac{n}{2}$, $D\left(\sum_{j=1}^{n} R_j\right) = \frac{n}{12}$

$std\left(\sum_{j=1}^{n} R_j\right) = \sqrt{\frac{n}{12}}$

Нормируем:

$\frac{\sum_{j=1}^{n} R_j - \frac{n}{2}}{\sqrt{\frac{n}{12}}}$ - в силу центральной предельной теоремы, при $n \to \infty$ распределение этой нормированной случайной величины стремится к $\sim N(0,1)$. При конечном n распределение приближенно нормальное. В частности, при $n = 12 : \sum_{j=1}^{n} R_j - 6 \sim N(0,1)$

2.11 Метод Бокса-Мюллера.

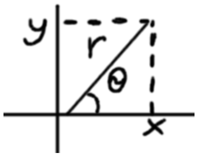
Стандартные величины $z_1, ..., z_n \sim N(0,1)$ то СВ $X = z_1^2 + ... + z_n^2$.

$k = 2$, то $X \in Exp\left(\frac{1}{2}\right)$

$X \sim N(0,1), Y \sim N(0,1)$

$X = r \cdot cos(\vartheta), Y = rsin(\vartheta)$,

$x^2 + y^2 = r^2 \in Exp\left(\frac{1}{2}\right)$



$\vartheta \pm U[0, 2\pi]$

Метод обратной функции - экспоненциоп. распределение.

1. Генерируем 2 СВ

от 0 до 2π,

другая с эк. распред.

$u \in U[0,1], v \in U[0,1]$.

$\vartheta = 2\pi u \sim U[0, 2\pi]$

$f(x) = -\frac{lnx}{\lambda}$

$r^2 = -2ln(v) \Rightarrow r = \sqrt{-2ln(v)}$

$X = \sqrt{-2ln(v)} cos(2\pi u), Y = \sqrt{-2ln(v)} \sin(2\pi u)$

Из полярных координат переходим обратно в декартовы

$s = X^2 + Y^2$, если $0 < s < 1$

$cos(\vartheta) = \frac{x}{\sqrt{s}}, sin(\vartheta) = \frac{y}{\sqrt{s}}$

$X \in U[-1;1], Y \in U[-1,1], 0 < s < 1$

$x = \frac{x}{\sqrt{s}} \cdot \sqrt{-2ln(s)} = x\sqrt{\frac{-2ln(s)}{s}}$

$y = \frac{y}{\sqrt{s}} \sqrt{-2ln(s)} = y\sqrt{\frac{-2ln(s)}{s}}$

$z = [xy]$

$z1 = \mu + \sigma z$

2.12 Моделирование многомерного гауссовского распределения

$\xi = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n)$- случайный вектор, имеющий многомерное нормальное распределение с вектором математических ожиданий $\mu = (\mu_1 \mu_2, ...\mu_n)$ и ковариационной матрицей $\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & ... & \sigma_{1n} \\ \vdots & & & \\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & ... & \sigma_{nn} \end{pmatrix}$

$\sigma_{ij} = M[(\xi_i - \mu_i)(\xi_j - \mu_j)]$ симметричная положительно определенная матрица.

Тогда $\xi = A\eta + \mu$, где η - вектор, каждая компонента которого имеет рапределение $N(0,1)$ где A - нижняя треугольная матрица, полученная из матрицы Σ разложением Холецкого $\sum = A \cdot A^T$

3 Третья Часть

3.1 Вероятностные пространства, случайные величины и случайные процессы.

Определение: Пусть Ω- заданное множество, тогда σ - алгебра на Ω есть семейство $\mathcal{F}$ - подмножеств со следующими со следующими свойствами

1. $\phi \in \mathcal{F}$
2. $F \in F \Rightarrow F^C \in F$ где $F^C = \Omega / F$ дополнение множества F в Ω
3. $A_1, A_2 \in \mathcal{F} \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$

Пара $(\Omega, \mathcal{F})$называется измеримым прсотранством.

Вероятностной мерой на измеримом пространстве $(\Omega, \mathcal{F})$ называется функция $P : F \to [0, 1]$ такая что

1. $P(0) = 0, P(\Omega) = 1$
2. Если $A_1, A_2, ... \in \mathcal{F}$ и $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ - непересекающаяся система ($A_i \bigcap A_j = \emptyset$ при$i \neq j$), то $P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$

Тройка (Ω, F, P) называется **вероятностным пространством**.

Вероятностное пространство называется **полным**, если $\mathcal{F}$ содержит все подмножества G множества Ω с P - внешней мерой ноль, т.е. такие подмножества, что

$P^*(G) = inf(P(F); F \in \mathcal{F}, G \in \mathcal{F}) = 0$

Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ - заданное вероятностное пространство. Тогда функция $Y : \Omega \to \mathcal{R}^N$ называется **$\mathcal{F}$-измеримой**, если $Y^{-1}(U) := \{\omega \in \Omega, Y(\omega) \in U\} \in \mathcal{F}$ для всех открытых множеств $U \in \mathcal{R}^n$

Если $X : \Omega \to \mathcal{R}^N$- произвольная функция, то σ -алгебра $\mathcal{H}_X$порожденная X есть наименьшая σ - алгебра на Ω, содержащая все множества $U \in \mathcal{R}^n$ открыты. ???

Случайная величина X есть $\mathcal{F}$-измеримая функция $X : \Omega \to \mathcal{R}^n$. Каждая случайная величина порождает вероятностную меру μ_X на $\mathcal{R}^n$, определеяемую равенством $\mu_X(B) = P(X^{-1}(B))$. Мера μ_X называется **распределением величины** X. Если $\int_\Omega |X(\omega)| \, dP(\omega) < \infty$, то число $E[X] = \int_\Omega X(\omega) \, dP(\omega) = \int_{\mathcal{R}^n} x d\mu_X(x)$ называется **математическим ожиданием** величины X (относительно меры P)

Случайный процесс - это параметризованный набор случайных величин $\{X_t\}_{t \in T}$определенных на вероятностном пространстве пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ и принимающих значения в $\mathcal{R}^n$. Множеством параметров T обычно является полупрямая $[0, \infty)$, однако это может быть и отрезок $[a, b]$.

Другое определение: Случайным процессом на интервале $T \subset \mathcal{R}$ называется семейство СВ $X = (X_t)_{t \in T}$ (относительно базиса $(\Omega, \mathcal{F}, P)$) - это функция от двух аргументов $X_t(\omega), \omega \in \mathcal{R}$

Для каждого фиксирвоанного $t \in T$ мы получаем случайную величину $\omega \mapsto X_t(\omega), \omega \in \Omega$

С другой стороны, фиксируя $\omega \in \Omega$, мы можем рассмотреть функцию $t \mapsto X_\tau(\omega), t \in T$ которая называется **траекторией процесса** X_t

3.2 Условное математическое ожидание и его свойства.

Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ - вероятностное пространство, $X \to \mathcal{R}^n$ - СВ; $E(|X|) < \infty$. Если $\mathcal{H} \in \mathcal{F}$ есть σ -алгебра, то **условное математическое ожидание случайной величины** X **относительно** $\mathcal{H}$ $E[X|\mathcal{H}]$ - функция, действующая из Ω в $\mathcal{R}^n$ и удовлетворяющая условиям:

1. $E[X|\mathcal{H}]$ является $\mathcal{H}$- измеримой функцией
2. $\int_H E[X|\mathcal{H}] = \int_H XdP$ для всех $H \in \mathcal{H}$

Свойства условного МО:

Пусть $Y : \Omega \to \mathcal{R}^n$ - другая случайная величина с математическим ожиданием $E[|Y|] < \infty$ и пусть a и $b \in \mathcal{R}^n$. тогда:

1. $E[aX + bY|\mathcal{H}] = aE[X|\mathcal{H}] + bE[Y|\mathcal{H}]$
2. $E[E[X|\mathcal{H}]] = E[X]$
3. $E[X|\mathcal{H}] = X$, если X - $\mathcal{H}$- измеримая функция.
4. $E[X|\mathcal{H}] = E[X]$, если X не зависит от $\mathcal{H}$
5. $E[Y \cdot X|\mathcal{H}] = Y \cdot E[X|\mathcal{H}]$, если Y - $\mathcal{H}$-измеримая случайная величина. $\cdot$ означает скалярное произведение в $\mathcal{R}^n$.

Доказательство:

№4. Если X не зависит от $\mathcal{H}$, то для $H \in \mathcal{H}$ мы получаем $\int_H XdP = \int_\Omega X \cdot I_H dP = \int_\Omega XdP \cdot \int_\Omega I_H dP = E(X) P(H)$

Следовательно, постоянное значение $E[X]$ удовлетворяет условиям (1) и (2) из определения.

№5. Сначала докажем результат для случая, когда $Y = I_H$ для некоторого $H \in \mathcal{H}$. Тогда для всех $G \in \mathcal{H}$ мы имеем $\int_G Y \cdot E[X|\mathcal{H}] dP = \int_{G \bigcap H} E[X|\mathcal{H}] dP = \int_{G \bigcap H} XdP = \int_G Y \cdot XdP$

Следовательно, $Y \cdot E[X|\mathcal{H}]$удовлетворяет условиям (1) и (2).

Аналогично доказывается, что утверждение справедливо если Y - простая функция: $Y = \sum_{j=1}^m c_j I_{H_j}$ где $H_j \in \mathcal{H}$. В общем случае утверждение следует из аппроксимации величины Y такими простыми функциями.

Теорема 1: Пусть $G, \mathcal{H}$- σ - алгебры такие, что $G \subset \mathcal{H}$, тогда $E[X|G] = E[E[X|\mathcal{H}]|G]$

Теорема 2 (Неравенство Йенсена): если $\Phi : \mathcal{R} \to R$ - выпуклая функция и $E[|\Phi(X)] < \infty$, то $\Phi(E[X|\mathcal{H}]) \leq E[\Phi(X)|\mathcal{H}]$

Следствия:

1. $E[X|\mathcal{H}] \leq E[|X||\mathcal{H}]$
2. $(E[X|\mathcal{H}])^2 \leq E\left[|X|^2|\mathcal{H}\right]$

Если $X_n \to X$ в то $E[X_n|\mathcal{H}] \to E[X|\mathcal{H}]$ в L^2.

3.3 Мартингалы, субмартингалы и супермартингалы. Привести примеры.

Адаптированный СП $(X_t)_{t\geq 0}$ называется **мартингалом** если $\forall t \geq 0$ $E\,|X_t| < \infty$, $E\,(X_{t+s}|\mathcal{F}_t) = X_t$(P - почти наверное) $s, t \geq 0$

(предыдущие два условия - *)

Адаптированный СП $(X_t)_{t\geq 0}$ называется **субмартингалом**, если он удовлетвоярет условию (*) и $E\,(X_{t+s}|\mathcal{F}_t) \geq X_t$

Адаптированный СП $(X_t)_{t\geq 0}$ называется **супермартингалом**, если он удовлетворяет условию (*) и $E\,[X_{t+s}|\mathcal{F}_t] \leq X_t$

Если $X_t\,(t \geq 0)$- субмартингал, то процесс $(-X_t)$- супермартингал.

$(X_t)_{t\geq 0}$ называется **мартингал-разностью** если он удовлетворяет условию (*) и выполянется $E\,[X_{t+s}|\mathcal{F}_t] = 0$

Пусть задана некоторая фильтрация $\{\mathcal{F}_t, t \in T \subset \mathcal{R}\}$, т.е. неубывающее семейство σ - алгебры $\mathcal{F}_t \in \mathcal{F}, t \in T(\mathcal{F}_s \in \mathcal{F}_t$ при $s \leq t, t \in T$).

Последовательность СВ $(X_t)\,(t \geq 0)$ называется **адаптированной относительно фильтрации** F_t, если $\forall t \geq 0$ СВ X измерима относительно σ - алгебры F_t.

Адаптированный случайный процесс $X_t\,(t \geq 0)$ наызывается **мартингалом**, если для всех $t \geq 0$

1. $E\,(X_t) < \infty$
2. $E\,(X_{t+s}|\mathcal{F}_t) = X_t$

Мартингал является одновременно и субмартингалом и супермартингалом.

№1. $X_t = \sum_{k=1}^{t} \xi_k (t \geq 0$ целое$)$, $(\xi_t)_1^\infty$ - последовательности независимых СВ, для которых $E\xi_t = 0$

$E\,(X_{t+1}|\mathcal{F}_t) = E\left(\sum_{k=1}^{t+1} \xi_k|\mathcal{F}_t\right) = E\left(\sum_{k=1}^{t+1} \xi_k|\xi_1, \xi_2, ..., \xi_t\right) = \sum_{k=1}^{t} \xi_k + E\,(\xi_{t+1}|\xi_1, \xi_2, ..., \xi_t) = \sum_{k=1}^{t} \xi_k = X_t + E\,(\xi_{t+1}) = X_t$

№2. $X_t = \sum_{k=1}^{t} \xi_k$, $(\xi_t)_1^\infty$ - мартингал-разность.

$E\left(\sum_{k=1}^{t+1} \xi_k|\xi_1, \xi_2, ..., \xi_k\right) = \sum_{k=1}^{t} \xi_k + E\,(\xi_{t+1}|\xi_1, ..., \xi_k) = X_t$

№3. $X_t = \bigcap \xi_k$, $(\xi_t)_1^\infty$,$(\xi_t)_1^\infty$ - разность независимых СВ, $E\xi_k = \alpha$

$E\left(\prod_{k=1}^{t} \xi_k|\xi_1, ..., \xi_t\right) = \prod_{k=1}^{t} \xi_k \cdot E\,(\xi_{t+1}|\xi_1, ..., \xi_t) = X_t$

№4. $X_t = E\,(\xi|F_t)$,где ξ - СВ с конечным МО

$E\,(X_{t+1}|F_t) = E\,(E\,(\xi|F_{t+1})\,|F_t) = E\,(\xi|F_t) = X_t$

Примеры субмартингалов

№1. $X_t = \sum_{k=1}^{t} \xi_t, (t \geq 0)$, ξ_k - последовательность неотрицательных интегрируемых СВ

$E\left(\sum_{k=1}^{t+1} \xi_k|\xi_1, ..., \xi_t\right) = \sum_{k=1}^{t} \xi_k + E\,(\xi_{t+1}|\xi_1, ...\xi_t) \geq X_t$

№2. $X_t = g\,(\xi_t)$, где ξ_t - мартингал, g - выпуклая вниз функция, $E\,|g\,(\xi_t)| < \infty$, $t \geq 0$

Неравенство Йенсена: $\phi\,(E\,[x|\mathcal{H}]) \leq E\,[\phi\,(x)\,|\mathcal{H}]$

$E\,(X_{t+1}|F_t) = E\,(g\,(\xi_{t+1})\,|F_t) \geq g\,(E\,(\xi_{t+1}|F_t)) = g\,(\xi_t) = X_t$

№3. $X_t = Y_t^+$, где $Y^+ = max\,(0, Y)$, где $(Y_t, \mathcal{F}_t)$ - субмартингал.

$E\,(X_{t+1}|F_t) = E\left(Y_{t+1}^+|F_t\right) = E\,(max\,(0, Y_{t+1})\,|F_t) \geq max\,(0, E\,(Y_{t+1}|\mathcal{F}_t)) \geq max\,(0, Y_t) = Y_t^+ = X_t$

3.4 Предельные теоремы для мартингалов.

Предельные теоремы для мартингалов

Пусть $(X_n, F_n)_{n\in\mathcal{N}}$- субмартингал и (a,b) - непустой интервал.
Определим марковские моменты
$\tau_1 = min\,(t \geq 0 : X_t \leq a)$
$\tau_2 = min\,(t \geq \tau_1, X_t \geq b)$
...
$\tau_{2,m-1} = min\,(t \geq \tau_{2m-2} : X_t \leq a)$
$\tau_{2m} = min\,(t \geq \tau_{2m-1} : X_t \geq b)$
...

Введем СВ $\beta_N\,(a,b) = \begin{cases} 0 & \tau_2 > N \\ max\,\{m : \tau_{2m} \leq N\} & \tau_2 \leq N \end{cases}$???

$\beta_N\,(a,b)$ - число пересечений снизу вверх интервала $[a,b]$ последовательностью $X_1...X_t$

Лемма (о числе пересечений; Дуб)

Для описанных выше величин справедливо неравенство $E\beta_N\,(a,b) \leq \frac{E(X_N-a)^+}{b-a} \leq \frac{EX_N^+ + (a)}{b-a}$ где $X^+ = \max\,(0,X)$

Доказательство:

Т.к. $\beta_N\,(a,b)$ для последовательности $(X_n, F_n)_{n\in N}$ совпадает с $\beta_N\,(0, b-a)$ для последовательности $\left((X_N - a)^+, F_n\right)_{n\in N}$ мы будем считать, что $a = 0$ и $X_n \geq 0, n \in N$.

Положим $X_0 = 0, F_0 = \{\emptyset, \Omega\}$

Пусть для $i \in N, \phi_i = 1\,\{\tau_m < \tau \leq \tau_{m+1}$ для нечетного$m\}$

Тогда в $\beta_N\,(0,b) \leq \sum_{i=1}^N (X_i - X_{i-1})\,\phi_i$

Заметим, что $\{\phi_i = 1\} = U_m\,\{\{\tau_m < i\}\,\{\tau_{m+1} < 1\}\} \subset F_{i+1}, i \in \mathcal{N}$???

Поэтому в $E\beta_N\,(a,b) \leq \sum_{i=1}^N E\,[(X_i - X_{i-1})\,\phi_i] = \sum_{i=1}^N E\,[\phi_i\,(E\,(X_i|F_{i-1}) - X_{i-1})] \leq$
$\leq \sum_{i=1}^N E\,[E\,(X_i|F_{i-1}) - X_{i+1}] = \sum_{i=1}^N (EX_i - EX_{i-1}) = EX_N$

Теорема: пусть $(X_n, F_n)_{n\in N}$ - субмартингал такой, что $sup_n E\,|X_n| < \infty$. Тогда с вероятностью 1 существует $X_\infty = \lim\limits_{n\to\infty} X_n$ причем $E\,|X_\infty| < \infty$

Доказательство:

Пусть $\underline{X} = \lim\limits_{n\to\infty}\inf X_n, \overline{X} = \lim\limits_{n\to\infty} supX_n$

Допустим, что $P\left(\underline{X} < \overline{X}\right) > 0$. Т.к. $\left\{\underline{X} < \overline{X}\right\} = \bigcup\limits_{a,b\in Q, a<b} \left\{\underline{X} < a < b < \overline{X}\right\}$???

$E\beta_N\,(a,b) \leq \frac{EX_N^+ + (a)}{b-a}$

Обозначим $\beta_\infty\,(a,b) = \lim\limits_{N\to\infty} \beta\,(a,b)$

$E\beta_\infty\,(a,b) \leq \frac{\sup\limits_n EX_N^+ + |a|}{b-a}$

Заметим, что для субмартингалов $(X_n, F_n)_n \in N$

$\sup\limits_n EX_n^+ < \infty \Leftrightarrow supE\,|X_n| < \infty$

Т.к. $EX_n^+ \leq E\,|X_n| = 2EX_n^+ - EX_n \leq 2EX_n^+ - EX_1$

Следовательно, $E\beta_\infty\,(a,b) < \infty$ почти наверное, что противоречит предположению, что $P\left(\underline{X} < a < b < \overline{X}\right) > 0$.

Таким образом, $P\left\{\underline{X} < \overline{X}\right\} = 0$. По лемме Фату $E\,|X_\infty| \leq \sup\limits_n E\,|X_n| < \infty$. **Доказано**

3.5 Многомерное гауссовское распределение.

Если X - СВ, имеет **нормальное** или **гауссовское распределение** с плотностью $f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right)$, $m = EX, \sigma^2 = E(X - m^2)$.

Характеристическая функция $\phi_X(\alpha) = E[e^{i\alpha x}]$, $\phi_x(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\alpha x} f_X(x)\,dx$. Для гауссовского распределения $\phi_X(\alpha) = E\left[e^{i\alpha X}\right] = exp\left(i\alpha m - \frac{\alpha^2\sigma^2}{2}\right)$

Рассмотрим **многомерную гауссовскую СВ** $X = (X_1, X_2, ..., X_n)^T, m = (m_1, m_2, ..., m_n)^T$? $B = (b_{kl})_{n\times n}$- **матрица ковариаций**, $b_{kl} = E[(X_k - m_k)(x_l - m_l)]$

Характеристическая функция

$\phi_X(\alpha) = \exp\left(i\alpha^T m - \frac{\alpha^T B\alpha}{2}\right)$ =exp $\left(i\sum_{k=1}^n \alpha_k m_k - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n b_{kl}\alpha_k\alpha_l\right)$

Выведем плотность невырожденного распределения многомерной гауссовской СВ общего вида.

Предположим, что $EX = m = 0.$ - нулевой вектор. B - симметричная неотрицательно определенная матрица с действительными элементами $B = B^T$, т.е. для любого небора чисел $z_1, ..., z_n$, $\sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n b_{kl} z_k z_l \geq 0$.

Из линейной алгебры для любого симметричного и неотрицательного определения матрицы $M\,(n\times n)$ существует матрица $N\,(n\times n)$ ортогонального преобразования, переводящая M в диагональную матрицу: $M \mapsto N^T M N$.

Ортогональная матрица N $N\cdot N^T = N^T N = E \Rightarrow N^{-1} = N^T, \det(N) = 1$

Пусть C матрица ортогонального преобразования и $D = C^T BC$, D- диагональная матрица с диагональю $\sigma_1^2, ..., \sigma_n^2$.

Для случайного вектору Y, имеющего независимые гауссовские координаты с дисперсиями σ_k^2 , плотность распределений равна произведению частных плотностей

$f_Y(x) = \prod_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_k^2}} \exp\left(-\frac{x_k^2}{2\sigma_k^2}\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^n (\sigma_1\sigma_2...\sigma_n)^{-1} \exp\left(-\frac{x^T D^{-1} x}{2}\right)$ где $x = (x_1, ..., x_n)^T$; D^{-1}- диагональная матрица, имеющая своей диагональю $\left(\sigma_1^{-2}, ..., \sigma_n^{-2}\right)$.

$f_Y(x) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^n (\det D)^{-1/2} \exp\left(\frac{-x^T\left(C^T BC\right)^{-1} x}{2}\right) =$

№1 $\det(D) = \det\left(C^T BC\right) = \det\left(C^T\right)\det(B)\det(C) = \det B$

№2 $(AM)^{-1} = M^{-1}A^{-1}$

№3 $(C_x)^T = x^T C^T$

$= \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^n (\det B)^{-1/2} \cdot \exp\left(\frac{-(Cx)^T B^{-1} Cx}{2}\right)$

Обозначим $y = Cx \Rightarrow x = C^{-1}Y$

$f_Y(C^{-1}Y) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^n (\det B)^{-1/2} \exp\left(\frac{-Y^T B^{-1} Y}{2}\right)$

С другой стороны

$\phi_x(\alpha) = \exp\left(-\alpha^T B\alpha\right) = \exp\left(-\alpha^T CDC^T\alpha\right) = \exp\left(-\left(C^{-1}\alpha\right)^T \cdot \left(C^{-1}\alpha\right)\right)$.

Обозначим $\beta = C^{-1}\alpha$ и учитывая, что $\phi_X(C\beta) = E\exp\left(i(C\beta)^T X\right) = E\exp\left(i\beta^T C^T X\right) = \phi_{C^T X}(\beta)$ получаем $\phi_X(C\beta) = \exp\left(-\beta^T D\beta\right) = \phi_{C^{-1}x}(\beta)$

Отсюда следует, что вектор, обозначенный Y равен $C^{-1}X$. Нам известно значение плотности распеределения вектора $C^{-1}x$ в т. $C^{-1}Y$. Можно показать, что $f_{CX}(Cx) = f_X(x)$ т.к. C^{-1} - матрица, ортогональная преобразвоанию.

Получим искомую формулу $f_X(X) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^n (\det(B))^{-1/2} \exp\left(\frac{-x^T B^{-1} x}{2}\right)$ (если $m = Ex = 0$)

Если $m \neq 0$, то $f_{X+m}(x) = f_{X+m}(y+m) = f_X(y) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^n (\det B)^{-1/2} \exp\left(\frac{-y^T B^{-1} y}{2}\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^n (\det B)^{-1/2} \exp\left(-\frac{(x-m)^T B^{-1}(x-m)}{2}\right)$

3.6 Процессы с независимыми приращениями.

Действительный случайный процесс называется **процессом с независимым приращением**, если для $\forall n \in N$ и всех $t_0, ..., t_k : 0 = t_0 < t_1... < t_n$ величины $X_{t_0}, X_{t_1} - X_{t_0}, ..., X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$ независимы в совокупности.

3.7 Распределение Пуассона. Процесс Пуассона. Неоднородный процесс Пуассона. Сложный процесс Пуассона.

Распределением Пуассона называется распределение на множестве $\mathcal{Z}_+$, неотрцитальеных целых чисел, задаваемое формулой $p_n = P(x=n) = \frac{\mu^k}{n!} e^{-\mu} (n \in Z_+)$, $\mu > 0$ - параметр распределения.

Пуассоновкая СВ X - это целочисленная СВ, имеющая распределение Пуассона. $E(X) = \mu, D(X) = \mu$.

Свойство: Пусть X_1 и X_2 - две независимых СВ с параметрами μ_1 и μ_2 , тогда их сумма тоже будет пуассоновской СВ с параметром $\mu_1 + \mu_2$.

Это свойство доказывается с помощью производящей функции

$M_X(t) = E[e^{tx}]$

$M_X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tX} p^x (dx)$

$M_x(t) = \sum_{i=1}^{\infty} e^{tX_i p_i}$ - производящая функция.

$Ee^{\alpha X} = \sum_{n=0}^{\infty} e^{\alpha n(X_1+X_2)} = Ee^{\alpha X_1} Ee^{\alpha X_2} = \exp(-(\mu_1+\mu_2)(1-e^{\alpha}))$, тогда $Ee^{\alpha(X_1+X_2)} = Ee^{\alpha X_1} Ee^{\alpha X_2} = \exp(-(\mu_1+\mu_2)(1-e^{\alpha}))$, что по теореме о единственности для производящей функции может быть только у Пуассоновского распределения.

Предложение: если (τ_i) для $i \geq 1$ независимые экспоненциально распределенные СВ с параметром λ , тогда для него $\forall t > 0$ СВ $N_t = \inf\{n \geq 1, \sum_{i=1}^{n} \tau_i > t\}$ имеет пуассоновское распределение λt, такое что $\forall n \in N$ $P(Nt = n) = e^{-\lambda t} \left(\frac{\lambda t}{n!}\right)^n$

Случайный процесс $X = X(t), t \geq 0$ наызвается **процессом Пуассона**, если $X(0) = 0$ и существует некоторая величина $\lambda > 0$ (параметр процесса) и:

1. X - неубывающий, непрерывный справа процесс
2. X - процесс с незваисимыми приращениями
3. X - процесс с целочисленными значениями, где случайное приращение на любом интервале длины t имеет распределение Пуассона с параметром λt

Пусть $\sigma_1, \sigma_2, ...$ - это последовательные моменты скачков процесса X. Распределение 1-го скачка $P(\sigma_1 > t) = P(x(t) = 0) = e^{-\lambda t}$.

Можно доказать, что остальные интервалы меджу соседними скчаками распределены экспоненциально и независимо, построив по этим условиям новый процесс и показав эквивалентностть (по условиям Колмогрова) вновь построенного процесса с исходным. Другой способ доказательства связан с независимостью и однородностью приращений процесса $X(t)$.

Пусть (τ_i) где $i \geq 0$, последовательность независимых экспоненциально распределенных СВ с параметром λ и $\tau_n = \sum_1^n \tau_i$, тогда процесс определенный с помощью $N_t = \sum_{n=1} I_t \geq \tau_k$, называется **процессом Пуассона** с интенсивностью λ .

Неоднородный процесс Пуассона.

Пусть $\lambda(t)$ - это произвольная интегрируемая функция на $S = [0, \infty]$.

Процесс X **называется процессом Пуассона** с интенсивностью $\lambda(t)$ если $X(0) = 0$ и:

1. X - неубывающая непрерывный справа процесс

2. X - процесс с независимыми приращениями

3. X - процесс с целоисленными значениями, где СВ приращения на интервале $[a, b)$ имеет распределение Пуассона с параметрами $\mu(a, b) = \int_a^b \lambda(t)\, dt$.

Сложный процесс Пуассона

Пусть $N(t)$ - однородный процесс Пуассона с параметром β и $(U(n))$, где $(n = 1, 2, ...)$-последоветелность незвисимых случайно распределенных НОР величин. Причем Пуассоновский процесс и последовательность независимы между собой. **Сложным процессом Пуассона** называется процесс $X(t), t \geq 0$ вида $X(t) = \sum_{k=1}^{N(t)} U_k$.

В отличие от одногродного Пуассона, этот процесс в момент времени σ_n разделен независимыми промежутками, имеет скачки случайные по величине и необязательно положительные.

3.8 Винеровский процесс.

Однородным стационарным винеровским процессом называется процесс $w(t), t > 0$ обладающий следующими свойствами

1. Процесс $w(t)$ непрерывен с вероятностью 1 в любой точке $t > 0$

2. Процесс является однородным процессом с независимыми приращениями

3. $w(0) = 0$ с вероятностью 1 и приращение $w(t_2) - w(t_1)$ при $t_2 > t_1$ имеет гауссовское распределение с нулевым средним и дисперсией $t_2 - t_1$.

С помощью 3) свойства как раз и моделируется винеровский процесс.

Из однородности процесса следует значение одномерной плотности процесса $f_t(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}}$

Свойства винеровского процесса:

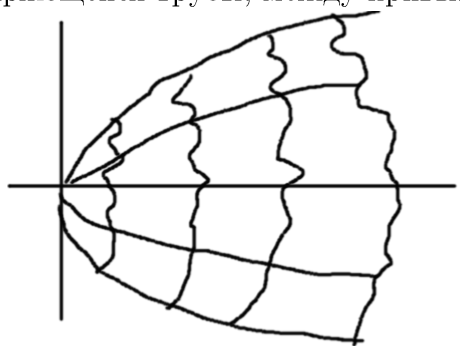
1. Винеровский процесс с вероятностью 1 траектории этого процесса непрерны, и не дифференцируемы ни в одной точке $t \geq 0$;

2. С вероятностью 1 траектории процесса выходят из любого конечного интервала, но в то же время для траекторий выполнился закон повторного логарифма

Закон повторного логарифма

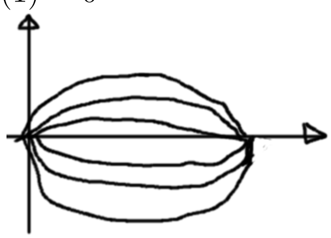
$$\limsup_{t\to} \frac{w(t)}{\sqrt{2t \ln\ln t}} = 1 \text{и} \liminf_{t\to\infty} \frac{w(t)}{\sqrt{2t \ln\ln t}} = -1.$$

Это показывает, что почти все траектории винеровского процесса атасапся??? внутри расширяющейся трубы, между кривыми $\pm(1+\epsilon)\sqrt{2t\ln\ln t}$ $(\forall\epsilon > t)$



Винеровский процесс (нестандартным) называют также результат линейного линейного преобразовани $X(t) = x + at + bw(t)$, где $x, a, b \in R$

Брауновским мостом называется процесс $w_0(t) = w(t) - tw(t)$ $t \in [0,1]$, $w_0(0) = w_0(1) = 0$



3.9 Марковские цепи.

Марковской цепью называется случайная последовательность $X(t)$, $t = 0, 1, 2...$ с конечным множеством значений $x(t) \in \{x_1, x_2, ...x_n\}, x_i \neq x_j$ где N - целое положительное.

Все конечномерные распределения последовательности $X(t)$ вычисляются по формуле:

$P(x(0) = x_{k0}, x(1) = x_{k1}, ..., x(t) = x_{kt}) =$

$= p_{k_0}(0)\,p(0,(k_0),(1,k_1))\,p((1,k_1),(2,k_2))\,...p((t-1,k_{t-1}),(t,k_t))$, где $p_i(0) = P(X(0) = X_i)$ и вектор $(p_1(0), p_2(0), ..., p_n(0))^T$ - **начальное распределение;** $p((t,i),(t+1,j))$ - **переходные вероятности.**

Обозначим $P((t,i)(t+m,j)) = \frac{P(x(t)=i, x(t+m,j)=j)}{P(X(t)=i)}$ - **переходная вероятность за** m **шагов**.

Пусть $p_i(t) = P(X(t) = x_i)$ и вектор $p(t) = (p_1(t), p_2(t), ...p_n(t))^T$ - **распределение цепи в момент времени** t.

Тогда согласно марковскому свойству $p_j(t+m) = \sum_{k=1}^{N} p_k(t)\,p((t,k),(t+m,j))$

Однородная марковская цепь.

Однородной марковской цепью называется марковская цепь, для которой переходная вероятность (на один шаг) не зависит от “времени” (от номера в последовательности), т.е. $\forall i, j, t, m, p((t,i),(t+m,j)) = p_{ij}(m)$

В этом случае распределение последовательности задается с помощью начального распределения - вектора $p(0)$ и переходной матрицы $Q = (p_{ij}) \sim N \times N$, где $p_{ij} \equiv p_{ij}(1) \geq 0, \forall i : \sum_{j=1}^{N} p_{ij} = 1$

Матрица переходных вероятностей на m шагов совпадает с m-ой степенью Q . Распределение цепи с номером $t+1$ задается равенствами $p_j(t+1) = \sum_{i=1}^{N} p_{ij}p_i(t)$ $(1 \leq j \leq N)$ или $p(t+1) = Q^T p(t)$ откуда $p^T(t+1) = p^T(t)\,Q$ а также представление распределения на шаге $t \geq 1$ через начальное распределение: $p^T(t) = p^T(0)\,[Q]^t$, t - степень.

Эргодическая теорема (совпадение временного и пространственного среднего).
для любой измеримой и ограниченной функции f равны следующие величины:

1. среднее по времени $\lim\limits_{t\to\infty}\dfrac{1}{t}\displaystyle\int_0^t f\left(X\left(s\right)\right)ds$ - предел имеет одно и то же значение почти для всех траектрий процесса

2. пространственна среднее $E\left(f\left(x\left(t\right)\right)\right)$, которое имеет одно и то же значение для всех $t\geq 0$.

Однородная марковская цепь называеся эргодическая тогда и только тогда, когда для любой пары точек i,j существует $\lim\limits_{t\to\infty}p_{ij}\left(t\right)$ и этот предел имеет одно и тоже значение для всех $i\in\{1,N\}$

Теорема: Для того, чтобы однородная МЦ была эргодической достаточно, чтобы при некотором $m\geq 1$ все элементы матрицы $\left[Q\right]^m$ были положительны $\left[Q\right]^m>0$

Доказательство:

Благодаря конечности числа элементов матрицы существует положительная величина δ такая, что $\forall i,j,\ p_{ij}\left(m\right)\geq\delta$. Обозначим $M_j\left(n\right)=max\left\{p_{ij}\left(n\right):1\leq i\leq N\right\}$ и $m_j\left(n\right)=min\left\{p_{ij}\left(n\right):1\leq i\leq n\right\}$.

$p_{ij}\left(m+n\right)=\sum_{k=1}^N p_{ik}\left(m\right)p_{kj}\left(n\right)=\sum_{k=1}^N\left(p_{ik}\left(m\right)-\frac{\delta}{N}\right)p_{kj}\left(n\right)+\frac{\delta}{N}\sum_{k=1}^N p_{kj}\left(n\right)\leq$
$\leq M_j\left(n\right)\sum_{k=1}^N\left(p_{ik}\left(m\right)-\frac{\delta}{N}\right)+\frac{\delta}{N}\sum_{k=1}^N p_{kj}\left(n\right)=M_j\left(n\right)\cdot\left(1-\delta\right)+\frac{\delta}{N}\sum p_{kj}\left(n\right)$

Откуда $\Rightarrow M_j\left(m+n\right)\leq M_j\left(n\right)\left(1-\delta\right)+\frac{\delta}{N}\sum p_{kj}\left(n\right)$ и, аналогично $m_j\left(m+n\right)\geq m_j\left(n\right)\left(1-\delta\right)+\frac{\delta}{N}\sum p_{kj}\left(n\right)$. Из них следует

$M_j\left(m+n\right)-m_j\left(m+n\right)\leq\left(M_j\left(n\right)-m_j\left(n\right)\right)\left(1-\delta\right)$

Повторяем это неравенство k раз:

$M_j\left(km+n\right)-m_j\left(km+n\right)\leq\left(M_j\left(n\right)-m_j\left(n\right)\right)\left(1-\delta\right)^k\Rightarrow$ разность $M_j\left(n\right)-m_j\left(n\right)$ убывает экспоненциально быстро при $n\to\infty$, значит при любом k существует предел

$\lim\limits_{n\to\infty}m_j\left(n\right)=\lim\limits_{n\to\infty}M_j\left(n\right)=\lim\limits_{n\to\infty}p_{ij}\left(n\right)$ не зависит от k ??? в методичке $\lim\limits_{n\to\infty}m_j\left(n\right)=\lim\limits_{n\to\infty}M_j\left(n\right)=\lim\limits_{n\to\infty}p_{kj}\left(n\right)$который не зависит от k, который мы обозначим $\tilde{p}_j$. ???$\sum\widetilde{p}_i=1$ как и сумма всех элементов в строке матрицы $\left[Q\right]^n$ **Доказано**

$p^T\left(t\right)=p^T\left(0\right)\left[Q\right]^t$. Распределение значения цепи в момент t стремится к $\tilde{p}$. Это предельное распределение является стационарным (инвариантным) распределением эргодической МЦ, т.е. удовлетворяет уравнению $\tilde{p}=Q^T\tilde{p}$ позволяющеу вычислить вектор стационарного распредеелния.

Счетное множество состояний.

Однородная МЦ со счетным множеством состояний также может быть определена с помощью заданной системы из начального распределения и переходной функцией на один шаг $\sum_{k=1}^\infty p_k\left(0\right)=1,\ p_{ij}\geq 0$, $\sum_{j=1}^\infty p_{ij}=1,\ i=1,2,...$

Таким образом, распределение цепи определяется с помощью матрицы Q бесконечного размера.

В этом случае достаточое условие эргодичности цепи можно задать с помощью коэффициента эргодичности

$k\left(n\right)=1-\frac{1}{2}\sup\limits_{i,j}\sum_{k=1}^\infty\left|p_{ik}\left(n\right)-p_{jk}\left(n\right)\right|$ где $p_{ik}\left(n\right)$ переходная функция на n шагов

$p_{ij}\left(n+1\right)=\sum_{k=1}^\infty p_{ik}\left(n\right)p_{kj}\ \left(n\geq 1,p_{ij}\left(1\right)\equiv p_{ij}\right)$

Теорема: Для того, чтобы однородная марковская цепь была эргодической, достаточно, чтобы при некотором n_0 коэффициент $k\left(n_0\right)$ был положительным и при любом начальном распределении $p_i(0)$ $(i \geq 0)$ переходная вероятность $p_{ij}(n)$ сходится при $n \to \infty$ к стационарной вероятности $\tilde{p}_j$ причем $\sup\limits_{p_i(0)} |p_{ij}(n) - \tilde{p_0}| \leq (1 - k(n_0))^{\frac{n}{n_0}-1}$

4 Лишнее

Марковские цепи с дискретным временем и конечным числом состояний

$\{s_1, ..., s_n\}$

$s_i \to s_j$. В фиксированный момент времени $\{t_1, t_2, ..., t_n\}$.

При известном состоянии системы в данный момент времени, прогноз о ее будущем состоянии не зависит от состояний в котрых находилась система в прошлом.

Пусть система может находиться в s_1, s_2, s_3. $p_{ij}, i, j = 1, 2, 3$ - вероятности перехода системы из i в j за 1 шаг.

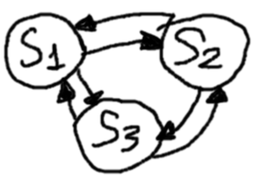
$p = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{pmatrix}$- матрица вероятностей перехода.

Если p_{ij} не зависит от номера шага, на котором осуществляется переход из s_i в s_j , то такая цепь называется однородной.

Свойства:

1. $0 \leq p_{ij} \leq 1$

2. $\sum_{j=1}^{3} p_{ij} = 1, i = 1, 2, 3$



Обозначим $Q(k) = (p_1(k), p_2(k), p_3(k))$, k - вероятность того, что после k - го шага система находится в состоянии s_i .$\sum_{i=1}^{3} p_i = 1$

$k = 0 : Q(0) = (p_1(0), p_2(0), p_3(0))$- начальное распределение вероятностей состояний.

М. Р. $Q(k), Q(0)$ удовлетворяет $Q(k) = Q(k-1) \cdot P, Q(k) = Q(0) \cdot P^k$

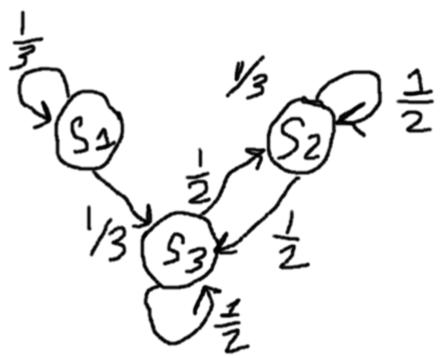
Это уравнение позволяет определить вероятность состояния после каждого шага по известному начальному распределению и заданной матрице P вероятностей перехода за 1 шаг.

Состояние S_i называется **существенным**, если выйдя из этого состояния система может в него вернуться за один или несколько шагов.

$p_{ij}(n) > 0$ и существует k такое, что $p_{ij}(k) > 0$.

Состояние S_i называется несущественным, если выйдя из S_i система не может в него вернуться. $p_{ij}(k) > 0, p_{ji}(k) = 0 \forall k$

Пример



$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$

1 - несущественное состояние, система из него вышла, но войти не может.

Распределение вероятностей состояний Марковской цепи называется стационарным, если он не изменятся во времени. СТационраное распределение Q удовлетворяет матричнму уравнению: $Q = Q \cdot P$

$$\begin{cases} p_1 = & p_1 p_{11} + p_2 p_{21} + p_3 p_{31} \\ p_2 = & p_1 p_{12} + p_2 p_{22} + p_3 p_{32} \\ p_3 = & p_1 p_{13} + p_2 p_{23} + p_3 p_{33} \\ 1 = & p_1 + p_2 + p_3 \end{cases}$$

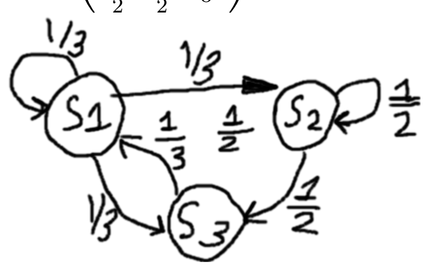
Марковская цепь называется регулярной, если из любого существенного состояния можно попсть в любое другое существенное состояние за конечное число шагов.

Вероятности $\tilde{p}_i = \lim\limits_{n\to\infty} p_i\left(n\right)$называются предельными или финальными вероятностями состояний системы.

Если марковская цепь регулярно, то предельные вероятности состояний системы совпадают со стационарными вероятностиями.

Пример:

$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}.$



Найти матрицу $p\left(2\right) = p\left(1\right) \cdot p\left(1\right)$

Определить распределение вероятностей состояний системы за 1,2,3 шага, считая начальным состояние s_1

$Q\left(0\right) = \left(1,0,0\right)$, $Q\left(1\right) = Q\left(0\right) \cdot P = \left(1,0,0\right) \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} = \left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$

$Q\left(k\right) = Q\left(k-1\right)P = Q\left(0\right)P^k$

$Q\left(3\right) = Q\left(2\right)P = Q\left(0\right)P^3$

Найти стационарное распределение вероятности системы $Q = QP$

$$\begin{cases} p_1 = & \frac{1}{3}p_1 + 0 \cdot p_2 + \frac{1}{2}p_3 \\ p_2 = & \frac{1}{3}p_1 + \frac{1}{2}p_2 + \frac{1}{2}p_3 \\ p_3 = & \frac{1}{3}p_1 + \frac{1}{2}p_2 + 0 \cdot p_3 \\ 1 = & p_1 + p_2 + p_3 \end{cases}$$

Т.к. система регулярна, то предельные вероятности совпадают со стационарными
15.02.17 лекция

4.1 Дискретные случайные величины

4.2 Основные понятия

Законом распределения случайной величины называется любое соотношение, устанавливающее связь между возможными значениями случайной величины и вероятностями, соответствующими этим значениям.

4.3 Независимые одинаково-распределенные случайные величины НОР СВ.

Пусть $X_1, X_2, ..., X_n$- НОР СВ

Обозначим $\bar{X} = \frac{X_1+...+X_n}{n}$, тогда $M\left(\bar{X}\right) = \frac{M(X_1)+...+M(X_n)}{n} = \frac{n \cdot a}{n} = a$

где $M\left(X_i\right) = a, i = 1, 2, ..., n$

$D\left(\bar{X}\right) = D\left(\frac{X_1+X_2+...+X_n}{n}\right) = \frac{D(X_1)+D(X_2)+...+D(X_n)}{n^2} = \frac{n \cdot D}{n^2} = \frac{D}{n}$

$\sigma\left(\bar{X}\right) = \sqrt{D\left(\bar{X}\right)} = \sqrt{\frac{D}{n}} = \frac{\sqrt{D}}{\sqrt{n}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$, где $\sigma = \sigma\left(X_i\right)$