

# Информационно-аналитические системы/технологии

Лектор: Фролькис Виктор Абрамович

27 июня 2017 г.

## Содержание

<b>1 Информатика и синергетика</b>	<b>2</b>
1.1 Понятие - сложные системы . . . . .	3
1.2 Алгебраическая сложность . . . . .	3
1.3 Самоорганизующаяся система. Открытая и закрытая (замкнутая) система . . .	4
1.4 Методы исследования сложных систем (термодинамический, статистический, синергетический, информационный) . . . . .	4
1.5 Мера информации . . . . .	6
1.6 Средняя информация по Шеннону (информационная энтропия) . . . . .	6
1.7 Относительная значимость информации. Недостаточность входящей информации. Уничтожение, сохранение и рождение информации. . . . .	7
1.8 Появление информации. Синергетическая информация. . . . .	10
1.9 Второе начало синергетики . . . . .	12
1.10 Уровни описания сложных систем. . . . .	13
1.11 Уравнение Ланжевена. Интерпретация Ито. Интерпретация Стратановича. . . .	13
1.12 Уравнения Фоккера-Планка. Стационарное решение. Уравнение Фоккера-Планка в интерпретациях Ито и Стратановича. . . . .	16
1.13 Точное решение уравнения Фоккера-Планка для систем в детальном равновесии. Принцип детального равновесия . . . . .	17
1.14 Структура уравнения Фоккера-Планка в случае стационарного решения . . . .	19
1.15 Интегралы по траекториям уравнения Фоккера-Планка. . . . .	21
1.16 Уменьшение сложности, параметры порядка и принцип подчинения. . . . .	22
1.16.1 Анализ устойчивости по линейному приближению. . . . .	22
1.16.2 Преобразования эволюционных уравнений . . . . .	24
1.16.3 Принцип подчинения . . . . .	25
1.16.4 Неравномерный фазовый переход . . . . .	26
1.16.5 Образование структур . . . . .	27
<b>2 Максимум информации, сброс нумерации</b>	<b>27</b>
2.1 Принцип максимума информации . . . . .	27
2.2 Приращение информации . . . . .	30
2.3 Информационная энтропия и ограничения, накладываемые на систему . . . .	31
2.4 Непрерывные переменные при описании сложных систем . . . . .	35
2.5 Не вошел в вопросы: физический пример. . . . .	36

<b>3</b>	<b>Фракталы</b>	<b>36</b>
3.1	Понятие - фрактал. . . . .	36
3.2	Длина береговой линии. Фрактальная размерность береговой линии. . . . .	37
3.3	Фрактальные размерности множеств . . . . .	38
3.3.1	Топологическая рзамерность множества. . . . .	38
3.3.2	Размерность Хаусдорфа-Бизикевича. . . . .	40
3.3.3	Емкость множества. . . . .	41
3.4	Регулярный самоподобный фрактал . . . . .	42
3.4.1	Множество Кантора. Обобщенное множествао Кантора. . . . .	42
3.4.2	Снежинка Коха . . . . .	44
3.4.3	Салфетка Серпинского . . . . .	44
3.4.4	Губка Менгера. . . . .	46
3.5	Определение фрактала через размерность. . . . .	46
3.6	Кривые Пеано. . . . .	46
3.7	Функция Вейерштрасса . . . . .	47
3.8	Итерация линейных систем . . . . .	47
3.8.1	Детерминированный алгорим . . . . .	48
3.8.2	Метод случайных итераций . . . . .	48
3.9	Неподвижные точки. Цикл. Аттрактор. . . . .	50

# 1 Информатика и синергетика

## 08.02.17 лекция

**Идеология:** в современной информатике, вычислительной математике, проблеме информации уделяется много внимания. Одно из ответвлений, которое замыкается на теорию динамических систем (теория энтропии, теория устойчивых решений, теория бифуркаций) - **Синергетика** - наука, находящаяся на грани теории информации и теории систем.

Поведение открытых систем, к чему открытые системы будут стремиться. Все это берет свое начало из термодинамики, физики. Термодинамический подход: большая комната, мы дышим воздухом. Как ведут себя молекулы воздуха в этой комнате. Можно ли описать поведение воздуха в комнате. В одном кубическом литре - число Авогадро -  $23 \cdot 10^{26}$  степень. У нас есть окно, стенка, люди, мы не можем описать движение воздуха. Это называется **большой системой**, в ней работает (число в 30-й степени) связей.

Демонстрация: **аттрактор Лоренца**. Лоренц - метеоролог, решал задачу: поверхность снизу нагревается, поверхность сверху - нет. В середине - жидкость, возникала некоторая структура. Получили дифференциальные уравнения (сильно упрощенные), в итоге он выписал систему из трех обыкновенных дифференциальных уравнений с квадратичной нелинейностью и стал считать эту систему. При одном наборе параметров, решение ведет себя одним способом, потом переходит в другую область. Переход из одной области предсказать невозможно.

Эта система описывается ОДУ. До сих пор считалось, что если задача описывается ОДУ, то ее поведение можно предсказать в будущем и прошлом, на этом базируется вся классическая механика.

Советские химики открыли реакцию Белоусова-Животинского. Эта реакция ведет себя аналогично аттрактору Лоренца, которая описывается уравнениями такого же типа.

Потом появилась квантовая механика. Когда масса частиц становится очень маленькой, то все идет совсем по другому, и частица может одновременно быть в нескольких местах. В микромире детерминизм теряется.

Иваново-Вознесенские стачки также описывались этими уравнениями.

В попытке это объяснить, были созданы несколько новых научных направлений.

Если в некоем состоянии появляется новая структура, появляется новая информация.

За нашу координацию отвечает некая структура. Мало того, что у нас есть голосовые связки, они должны что-то произносить.

Для аттрактора Лоренца есть набор параметров, когда ничего не происходит. Но бывает, что изменение на миллионную долю числа вся меняет. **Детерминированный хаос.**

Нас будут интересовать открытые системы.

Принципиальное **отличие** замкнутой и открытой системы: система стремится к максимуму энтропии (минимуму информации). Когда мы вошли в помещение, температура была разная в разных частях комнаты. С течением времени, все выравнилась, информация пропала.

В основе всех этих рассуждений лежит II закон термодинамики: если система изолирована (не обменивается ничем с окружающим миром), то в этой системе энтропия стремится к своему пределу. **ТЕПЛОВАЯ СМЕРТЬ ВСЕЛЕННОЙ.**

**Основная тема курса** - можно ли сформулировать единый подход к изучению сложных систем?

## 1.1 Понятие - сложные системы

**Сложная система** - система, состоящая из очень большого числа частей, элементов, компонентов, которые могут быть идентичными, могут быть различными, и которые могут соединяться между собой, могут обладать сложным поведением. Могут появиться естественным (эволюция, развитие) путем, а могут быть созданы человеком.

**Примеры:** экономика, наша цивилизация, любой биологический объект, сообщество любого (животного) вида.

## 1.2 Алгебраическая сложность

Возможна оценка **сложности системы** с помощью **алгебраической сложности** (ввел Колмогоров).

Систему можно описать как строку или последовательность данных. По этой исходной строке данных можно составить программу, которая, вместе с начальным условием, позволит вычислить строку данных.

**Мерой алгебраической сложности системы** является минимальная длина программы с минимальным объемом начальных данных, описывающих систему.

Если для одной системы программа содержит две строки, то это одна сложность. Если для другой - на несколько тысяч строк кода и ей нужно больше данных, то это - другая система. Но нельзя создать оптимальную программу для системы - т.е. есть разброс в минимальной длине кода.

### 1.3 Самоорганизующаяся система. Открытая и закрытая (замкнутая) система

Система называется **самоорганизующейся**, если она (система) без специфического внешнего воздействия приобретает какую-то пространственную, временную или функциональную структуру.

**Специфическое внешнее воздействие** - это воздействие, которое навязывает системе структуру или функционирование.

Система называется **открытой**, если она обменивается с окружающим ее пространством энергией и веществом.

Система называется **закрытой (замкнутой)**, если она обменивается только энергией, но не обменивается веществом.

Система называется **изолированной**, если она не обменивается ни энергией ни веществом с окружающим миром.

### 1.4 Методы исследования сложных систем (термодинамический, статистический, синергетический, информационный)

#### 15.02.17

**Термодинамический подход:** Описать сложную систему найдя (или придумав) малое число макроскопических переменных. Эти макроскопические переменные позволяют в глобальном смысле (т.е. как единое целое) описать поведение системы. Эти переменные не описывают отдельные части, они описывают систему в целом. Термодинамика - феноменологическая наука, т.е. базируется на наблюдениях.

Мы можем говорить о переменной как о параметре только в одном случае - если во всей системе параметр одинаков. Когда мы говорим о температуре газа, то предполагается, что температура одинакова, т.е. система находится в **состоянии** (термодинамического, температурного) **равновесия**. Это возможно, когда система не взаимодействует с окружающей средой. **Время релаксации** (время выхода на состояние равновесия) для каждого параметра разное. Давление выравнивается со скоростью звука, температура - значительно медленнее.

У различных систем может быть одинаковая температура, но системы обладают разными свойствами. В зависимости от того, как меняется температура, системы изменяются по разному.

**Энтропия** - мера неопределенности. Это понятие относится к системам, находящимся в тепловом равновесии, которое можно охарактеризовать температурой  $T$ . Изменение энтропии  $\frac{dS}{dt} = \frac{dQ_{\text{обр}}}{T}$  (1) -  $dQ_{\text{обр}}$  - количество тепла, обратимо подведенное к системе или отведенное от нее,  $T$  - абсолютная температура.

**Первое начало термодинамики:** изменение внутренней энергии  $dU = dQ - \delta A$ , где  $dQ$  - количество подводимого тепла,  $\delta A$  - количество работы, которую совершила система. Разница между  $d$  и  $\delta$ :  $dU$ ,  $dQ$  - полные дифференциалы, т.е. изменение не зависит от того, по какому пути пойдет система.

**Второе начало термодинамики** (принцип максимума энтропии) утверждает, что в изолированной системе энтропия не может убывать, а только возрастает, пока не достигнет максимума (достигнув максимума, процесс останавливается).

Термодинамический подход хорошо работает, когда система - изолированная. Пример: мы не можем рассматривать систему «Земля» как изолированную. Но система «Земля +

Солнце” может быть рассмотрена как изолированная. В некоторых случаях, можно получить микроскопические законы из макроскопических данных.

**Пример:** свойства газа. Температура, давление, объем (возможно). Температура и давление ничего не говорят о поведении отдельных молекул газа. Свойства системы изменяются при изменении ее температуры. Если температура газа начнет уменьшаться, то он может сконденсироваться и перейти в жидкость.

**Статистический подход (статистическая физика):** статистическая физика опирается на поведение отдельных частей системы и опирается на элементарные законы, которые управляют микросостоянием. Обобщая, интегрируя, усредняя получаем результат.

В рамках статистического подхода, **энтропия:**  $S = k \ln W$  (2), где  $k$  - постоянная Больцмана,  $W$  - число микросостояний, приводящих к одному и тому же макросостоянию.

Рассмотрим 3 молекулы. Нам неважно, что они летают с разными скоростями т.к. в интегральном смысле, скорость одинаковая. Это и называется числом микросостояний. ??? (может быть стоит описать подробнее, если у кого-нибудь есть возможность, скиньте эту часть из своего конспекта) Макроскопическое состояние определяется числом микросостояний, которые могут привести к данному исходу. Разные способы полета молекул определяют число макросостояний.

Фундаментальные законы обратимы: закон Гука, Ньютона, и т.д.

При помощи данного подхода, макроскопические законы оказываются необратимыми, эта проблема до сих пор не решена. Холодное тело не может отдать тепло тепловому (Второе начало термодинамики в школьной форме).

В рамках статистической физики, рассматриваются системы, в которых системы не находятся в равновесии (не очень далеко от состояния равновесия) ??? (комментарий в скобке - имеется ввиду, что система может быть далека от равновесия, или что должна быть недалеко от равновесия)

**Синергетический подход** позволяет изучать системы, которые в результате самоорганизации (эволюции, самозволюции) образуют пространственные, временные или функциональные структуры. При синергетическом подходе, изучаются качественные макроскопические изменения, которые сопровождаются появлением новых структур или новых функций. При реализации синергетического подхода, можно изучать системы далекие от состояния равновесия.

Если применить синергетику к физике, то синергетика начинается с микроскопической формулировки. В биологии или химии - с исследования мезоскопического подхода (элементарные составляющие не рассматриваются).

В рамках синергетики, к системе может подводиться какая-либо энергия (информация) и при ее изменении может возникнуть неустойчивость, которая в результате приведет к переходу в новое состояние (вода  $\Rightarrow$  пар). Та энергия (информация) которая подводится к системе может быть рассмотрена как управляющий параметр.

Если система становится неустойчивой, то это макроскопическое поведение системы может быть описано малым числом коллективных мод (колебаний). Это малое число мод называются **параметрами порядка**. В то же время, параметры порядка определяют поведение микроскопических частей системы. Возникновение параметров порядка позволяют системе выйти на новую структуру. При изменении управляющих параметров в широком диапазоне системы могут проходить через иерархию неустойчивостей и сопровождающих их структур. Универсальность заключается в том, что эти параметры порядка есть. Это может быть сложно.

**Информационный подход:** ??? это разве не входит в вопрос 1.5?

## 1.5 Мера информации

В данный момент понимаем меру информации как количество информации. Смысл информации достаточно неопределен и разнообразен, его пока опускаем. Информация может измеряться в битах, байтах, понял/не понял, мало/много.

Определим меру количества информации. Имеется монета, получаем либо орла, либо решку. Задавая вопросы мы можем получать ответы: да/нет. Игральная кость - 6 исходов (картинок).

**Информация** определяется через число возможных исходов (ответов). При использовании языка Морзе, информация передается разными комбинациями точек и тире. Можно при помощи азбуки морзе передать любую информацию. Любая последовательность символов несет в себе какую-либо информацию.

Получим из теории информации формулу (2). Допустим, есть  $Z$  априоре равновероятных возможных исходов. При подбрасывании монеты  $Z = 2$ , при подбрасывании кости  $Z = 6$ . Чем больше  $Z$ , тем больше неопределенности. Неопределенность существует перед получением информации. До того, как мы провели эксперимент, информации нет вообще,  $I = 0$  ( $I$  - некая мера количества информации). Когда монета выпала, информация уже получена:  $I \neq 0$ ,  $Z = 1$

Мера количества информации должна быть связана с  $Z$ . Разумно потребовать, чтобы для независимых событий величина  $I$  была аддитивной (информация складывалась). Общее число исходов  $Z = Z_1 \cdot Z_2$ . Мы хотим, чтобы  $I(Z_1 \cdot Z_2) = I(Z_1) + I(Z_2)$ . Если  $I = k \ln Z$  (3), то это выполняется. Эта формула очень похожа на формулу (2).

### 01.03.17 лекция

Теоретически,  $k$  из (3) может быть любой положительной постоянной.  $k$  определяется в зависимости от контекста.

Допустим, у нас есть двоичная система из 0,1. Мы образуем из нее последовательность длиной  $n$ , следовательно можно составить комбинацию  $2^n$  разными способами -  $2^n$  возможных исходов. Мы можем написать, что  $I = n$ , откуда  $I = k \ln Z = kn \ln 2 = n \Rightarrow k = \frac{1}{\ln 2} = \log_2 e \Rightarrow I = \log_2 Z$ .

**Мерой информации (информацией)** является величина, равная  $I = \log_2 Z$  (4).

## 1.6 Средняя информация по Шеннону (информационная энтропия)

Рассмотрим слово из  $n$  символов ( $n$  нулей или единиц). Это слово может содержать  $n_1$  нулей и  $n_2$  единиц. Необходимо понять - сколько может быть составлено слов из символов. Через закон сочетания,  $z = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2!}$ .

Если на слово приходится информация  $I$ , то на один символ  $i = \frac{I}{n}$  откуда  $I = k \ln z = k [\ln n! - \ln n_1! - \ln n_2!]$

Формула Стирлинга позволяет выразить факториал через экспоненту:  $n! = \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n} e^{\omega(n)}$ , где  $\omega$  - некоторая функция  $\frac{1}{12(n+\frac{1}{2})} \omega_n < \frac{1}{12n}$

$\ln n! = n (\ln n - 1)$  приближенно.

$I \approx k [n (\ln n - 1) - n_1 (\ln n_1 - 1) - n_2 (\ln n_2 - 1)]$ ,  $i = \frac{I}{n} \approx -k \left[ \frac{n_1}{n} \ln \frac{n_1}{n} + \frac{n_2}{n} \ln \frac{n_2}{n} \right]$ . Введем обозначения  $\frac{n_1}{n} = p_1$ ,  $\frac{n_2}{n} = p_2$ . Тогда  $i \approx -k [p_1 \ln p_1 + p_2 \ln p_2]$   $p_1, p_2$  - вероятности.

Эта формула элементарно обобщается на тот случай, когда  $n$  символов:  $p_k = \frac{n_k}{n}$ ,  $n = \sum n_k$ ,  $i = -k \sum_j p_j \ln p_j$

С учетом (4), можем записать  $i = -\sum_j p_j \log_2 p_j$  (5)

**Средняя информация по Шеннону (информационная энтропия)**, соответствующая одной букве в книге определяется **формулой Шеннона** (5), где  $p_j = \frac{n_j}{n}$

Формула появилась из пропускной способности каналов связи. Информация по Шеннону никак не связана со смыслом передаваемого сигнала. Т.к. задан конечный объем слов, то мы имеем изолированную систему.

## 1.7 Относительная значимость информации. Недостаточность входящей информации. Уничтожение, сохранение и рождение информации.

Осмысленность информации может определяться реакцией. Если система реагирует на информацию, то это означает, что она имеет некий смысл. Используем аппарат теории динамических систем.

Рассмотрим некую систему, которая может быть описана на микро-, мезо-, или макро-скопическом уровне. Допустим, что система характеризуется **вектором состояний**. Воздух характеризуется вектором  $t, p$  (температура, давление). Можем описать воздух в комнате с помощью среднеквадратичной скорости молекул. Можем описать, задав координаты и скорости всех молекул. Все эти описания дают свой вектор состояний.

Приемник характеризуется вектором состояния  $\vec{q}(t) = (q_1(t), q_2(t), \dots, q_n(t))$ , этот вектор моделирует состояние приемной системы.

В самом общем виде,  $\frac{d\vec{q}}{dt} = \vec{N}(\vec{q}, \alpha) + \vec{F}(t)$ , где  $N$  - **детерминированная часть** уравнения, зависящая от  $\alpha$ ,  $F$  - **флуктуирующая сила**.

**Пример:** Уравнение Ньютона:  $\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{1}{m}f(\vec{v})$ . Дует сильный ветер, летят осколки крыш и т.д. Появится случайная часть  $+\vec{\xi}(t)$ .

Если в начальный момент времени вектор состояния задан, значения управляющих параметров заданы, т.е.  $t = t_0$ ,  $\vec{q}(t_0) = \vec{q}_0$ ,  $\alpha = \alpha(t_0)$ ,  $\vec{F}(t_0) = 0$ .  $q$  будет стремиться выйти на аттрактор (стремиться к равновесию). **Аттрактор** - некоторое притягивающее множество. Примеры аттракторов:

1. Точка может остановиться
2. Система может выйти на циркуляцию
3. Маятник Фуко
4. В технических устройствах, бывают колебания с вынуждающей силой.

В общем случае, **аттрактор** - либо состояние потока, либо цикл, либо тор либо странное хаотическое движение. **Странный аттрактор** - в точке нет, но в окрестности обязательно есть. Аттрактор может быть циклическим движением или спокойным движением.

Шарик скатывается под действием гравитации. Вектор шарика определяется его координатами. Управляющие параметры - особенности рельефа холма. Шарик будет скатываться с холма и остановится в какой-то лунке. Если он не остановится, то он выпрыгнет и пойдет дальше. Но когда-нибудь он остановится в самой глубокой лунке на его пути. Эта лунка будет аттрактором. Если начал катиться с другой стороны, то другой аттрактор. Разные аттракторы для разных начальных положений.

Будем предполагать, что наша система (приемник) однозначно определяется вектором состояния  $\vec{q}$  и управляющими параметрами  $\alpha$ . Мы определяем значимость сигнала через реакцию системы на этот сигнал.

Мы не будем рассматривать флуктуации, нас интересует реакция на сигнал.

До получения информации наш приемник находится в некотором нетральном состоянии (система находится в аттракторе сколь угодно).

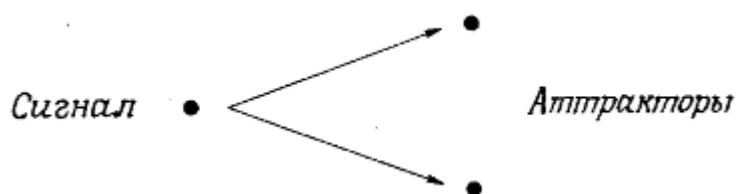
Этого у меня не было, видимо это и есть **15.03.17 лекция**

Возможны следующие варианты:

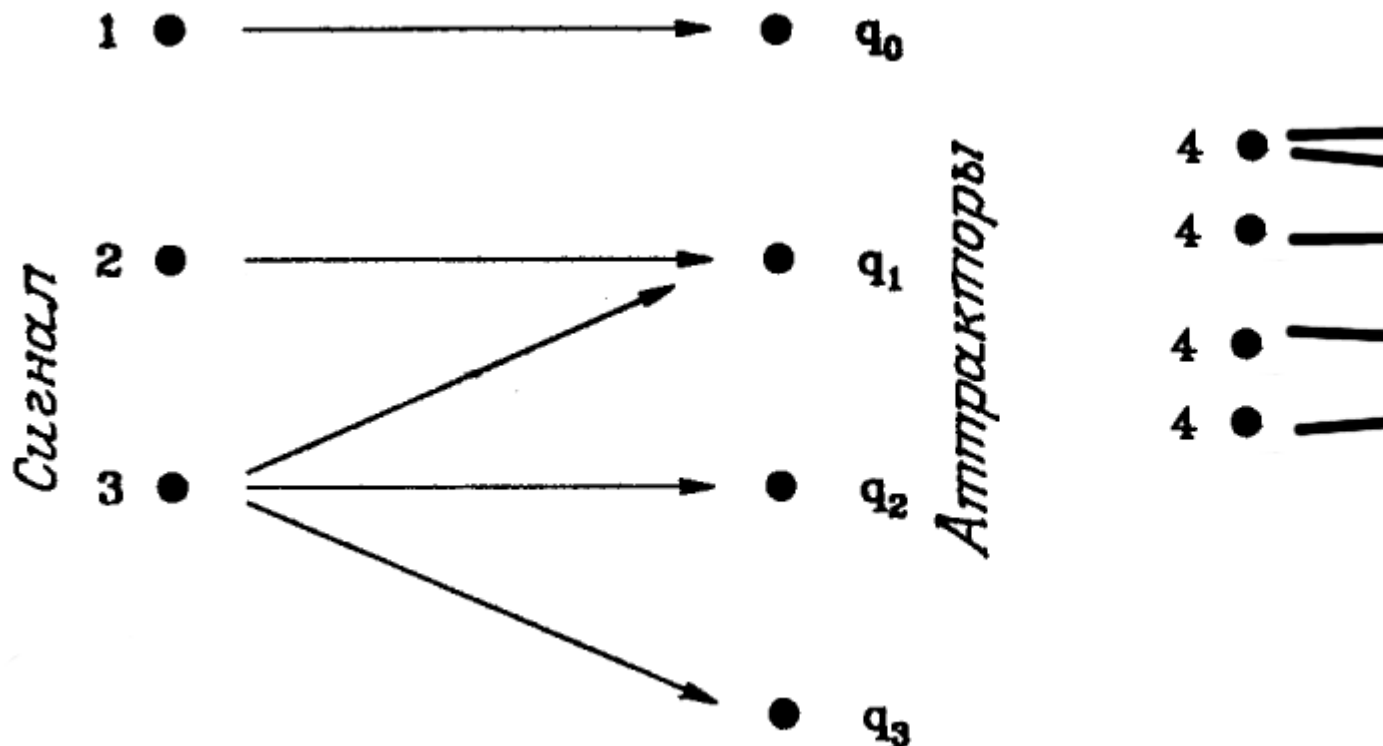
- Система остается в том состоянии, в котором была до получения информации; таким образом, информация бессмысленна
- Система переходит в новое состояние и перейдя в него рано или поздно окажется в каком-то аттракторе

Тот аттрактор, куда пришла система, однозначно определяет поступившую информацию (информация = сигнал). Если в приемник пришел другой сигнал, то система переходит на другой аттрактор. Если разные сигналы переводят систему в один и тот же аттрактор, то поступающая информация (сигнал) является избыточной.

Возможна ситуация, когда информация рождается, например сигнал может переводить систему в одно из двух состояний (в зависимости от флуктуации, т.е. от случайных событий), происходящих внутри системы.



Получается, что приходящий сигнал неоднозначен. Эта неоднозначность снимается флуктуациями системы. Происходит удвоение информации.





Т.к.. сигналы могут передавать???

Рассмотрим, как определить **относительную значимость сигналов** (того или иного аттрактора). Для этого мы сначала введем **относительную значимость отдельных аттракторов**

Рассмотрим схему. Пусть до получения, получаемая система неоднозначная.

Информационная система находится в нулевом начальном состоянии, которое обозначили  $q_0$ . Этому состоянию соответствует аттрактор.  $p'_0 = 0$  - имеет нулевую относительную значимость, т.е. система ничего не получила.

После получения информации, система может перейти на другой аттрактор. Если система перейдет на другой аттрактор, то его ценность ... ???

А если не перейдет то  $\sum_j p'_j = 1$ ,  $0 \leq p'_j \leq 1$ . Относительная значимость аттрактора зависит от самого применения, а так же от тех задач, которые должна решать система.

Рассмотрим связь между поступающей информацией и аттрактором, в который вынуждена перейти динамическая система по получении информации. Пусть система находилась в состоянии  $j$  и она переходит на аттрактор  $k$ , тогда такому переходу будет соответствовать матричный элемент  $M_{jk} = 1$  (в противном случае  $M_{jk} = 0$ ), т.е.  $j \rightarrow k : M_{jk} = 1$ ,  $j \nrightarrow k : M_{jk} = 0$ .

Флуктуации внутри приемника могут перевести приемник на одно из возможных состояний. Выбор состояний характеризуется матрицей  $M_{jk}$ .

Введем **относительную значимость сигнала**:  $p_j = \sum_k L_{jk} p'_k = \sum_k \frac{M_{jk}}{\sum_{j'} M_{j'k} + \epsilon} p'_k$  (6),  $p'$  - относительная значимость аттрактора, на который может перейти система.

Относительная значимость при условии  $\epsilon \rightarrow 0$  (чтобы выражение имело смысл при обращении числителя и знаменателя в нуль).

Система может перейти в одно из  $k$ , из возможных состояний.

Предположим сначала, что при любом  $p'_k \neq 0$  по крайней мере один коэффициент ветвления  $M_{jk} \neq 0$ . Тогда относительные значимости  $p_j$  оказываются нормированными.

$$\sum_j p_j = \sum_k \frac{M_{jk}}{\sum_{j'} M_{j'k} + \epsilon} \cdot p'_k = \sum_k \left[ \sum_j \frac{M_{jk}}{\sum_{j'} M_{j'k} + \epsilon} \right] p'_k = \sum_k p'_k = 1$$

Рассмотрим теперь случай, когда при какихто значениях  $k$ , для которых  $p'_k \neq 0$ , все  $M_{jk} = 0$ . В этом случае суммы выше содержат коэффициенты при  $p'_k \neq 0$ , равные нулю, а т.к.  $\sum_k p'_k = 1$ , мы приходим к неравенству  $\sum_j p_j < 1$ , это означает **недостаточность** или **неплототу входящей информации**.

Более абстрактный подход: примем левую часть (6) за основу определения, предположив, что  $\sum_j L_{jk} \leq 1$ , где равенство выполняется только в том случае, если нет недостаточности информации.

Вместо требования  $M_{jk} = 1$ , как в случае одного конечного аттрактора для приходящего сигнала, можно считать, что коэффициенты  $M_{jk}$  удовлетворяют обобщенному требованию:  $0 < M_{jk} < 1$ .

Формула (6) позволяет написать формулу для нескольких систем, соединенных последовательно.

**Пример:** Пусть сеть из двух систем, соединенных последовательно  $\Rightarrow$  значимость поступившего сигнала  $p_j = \sum_k L_{jk}^{(1)} p'_k = \sum_{k,k'} L_{jk}^{(1)} L_{kk'}^{(2)} p''_k$

$$\text{Пусть } \sum_k p'_k = 1, \sum_j L_{jk} = 1, \text{ тогда } \sum_j p_j = \sum_j \sum_{k,k'} L_{jk}^{(1)} L_{kk'}^{(2)} = \sum_{k,k'} \left( \sum_j L_{jk}^{(1)} \right) L_{kk'}^{(2)} p''_k = 1$$

Т.к. в условиях недостаточной информации, условия нормирования выполняется, то мы можем записать следующее соотношение: введя обозначение:  $L_{jk'} = \sum_k L_{jk}^{(1)} L_{kk'}^{(2)} \Rightarrow L'_{j,k'} > 0$ .  $\sum_j L'_{j,k'} = \sum_k \sum_j L_{jk}^{(1)} L_{kk'}^{(2)} = 1 \Rightarrow L'_{jk} \leq 1$ . Таким образом,  $0 \leq L'_{jk} \leq 1$  - **придаточный**

**коэффициент.**

Можем использовать это для введения понятия **относительной значимости информации**.

Полученный алгоритм позволяет выбросить тот сигнал, который надлежит отправить ??? (правильно записал)

Сигнал должен быть с тем значением  $p$  (??? тех). именно его нам надо отправить.

Что делает приемник с поступающей информацией? уничтожает, сохраняет, порождает?

Будем определять **ценность информации** на основе формулы (6).

Введем величины  $S^{(0)}$  - отвечает за поступающую информацию.  $S^{(1)}$  - относительная значимость аттрактора, который переходит в приемник после получения сигнала

$$S^{(0)} = - \sum_j p_j \ln p_j$$

$$S^{(1)} = - \sum_j p'_k \ln p'_k$$

$p_j, p_k$  - относительная значимость приемника.

Стандартное условие нормировки:  $\sum_k p'_k = 1$

Если сумма по входящей информации  $\sum_j p_j < 1$ , то мы имеем **недостаточность информации**.

Если  $\sum_j p_j = 1$ , и

- $S^{(1)} < S^{(0)}$  - **уничтожение информации**
- $S^{(1)} = S^{(0)}$  - **сохранение информации**
- $S^{(1)} > S^{(0)}$  - **рождение информации**

**Пример:**

**№1.** Пусть к аттрактору приводят 2 сигнала  $p'_1$  и  $p'_2$ .  $p_1 + p_2 = 1$  ??? (сумма без штрихов). Сколько информации содержится в исходном сигнале?

$$S^{(0)} = - [p_1 \ln p_1 + p_2 \ln p_2]$$

Какой сигнал (сигналы) должен быть отправлен, чтобы им соответствовала максимальная относительная значимость приходящей информации? Приравнять к нулю производную:

$$\frac{\partial S^{(0)}}{\partial p'_1} = 0 \Rightarrow p_1 = p_2 = \frac{1}{2}$$

$$\text{Тогда } S^{(0)} = - \left[ \frac{1}{2} \ln \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \ln \frac{1}{2} \right] = \ln 2$$

$$S^{(1)} = -1 \ln 1 = 0$$

В такой системе  $S^{(1)} < S^{(0)}$  - информация теряется.

**№2.** Пусть существует взаимнообратное отображение  $p \rightarrow p'$ . В этом случае  $S^{(1)} = S^{(0)}$ ,  $\{P_j\} \leftrightarrow \{p'_k\} : S^{(1)} = S^{(0)}$  - информация сохраняется.

**№3.** Пусть существует множество приходящих сигналов  $\{p_j\}$  и хотя бы один сигнал  $= 1$ , а относительная значимость остальных сигналов  $= 0$ , т.е.  $\{p_j\} : \exists p_{j^*} = 1, p_{j \neq j^*} = 0$  ??? (может быть,  $j \neq J^*$ )

Пусть этот набор отображается на множестве  $p'_k$ , т.е.  $\{p_j\} \rightarrow \{p'_k\}$

$$\{p''_k\} : \exists p'_k = p'_{k2} = \frac{1}{2}, p_{k \neq k_1 \neq k_2} = 0$$

$$S^{(0)} = -1 \ln 1 = 0, S^{(1)} = \ln 2$$

$S^{(1)} > S^{(0)}$  - информация рождается.

## 1.8 Появление информации. Синергетическая информация.

22.03.17

Рассмотрим кристалл, на который падает ЭМ-волна, атомы в узлах кристаллической решетки переходят в возбужденное состояние и излучают обратно, излучение ловится зеркалами и направляется. Каждый атом излучает и поглощает независимо друг от друга.

Атом, переизлучив энергию, может перевозбудить другой атом. Эти волны не образуют лазер, это просто набор случайных ЭМ колебаний.

Уровень падающего возбуждающего сигнала начинает расти. Вдруг выясняется, что при большой интенсивности падающей волны, все атомы начинают излучать одновременно (когерентно), и на выходе возникает мощный монохроматический источник излучения (мощнее, чем то, что пришло на лазер).

С точки зрения информации происходит самоорганизация. Появилось множество излучателей, которые, начиная с некоторого момента времени, группируются в единое. Синусоида выдает лазерный поток. Рубиновый кристалл, при падении на него энергии, самоорганизуется и выдает одну волну. Эта одна волна является параметром порядка. Такой процесс можно описать как некоторое специфическое согласование действий отдельных частей (атомов, клеток), приводящее к появлению нового качества (самоорганизации). Происходит очень сильное сжатие информации. На входе: на кристалл падает разнообразное излучение, а на выходе - монохроматическая волна. Количество информации на выходе - один синус (косинус). Лазер сжимает информацию. Во многих случаях увеличивается эффективность системы.

Пример из биологии: миксомицет *Dictiostelium discoideum*. Бактерии живут на питательной среде. По мере того, как питательная среда заканчивается, они начинают собираться в одну общую точку. Это происходит следующим образом:

Отдельные клетки испускают особое вещество цАМФ. В каком-то смысле они передают информацию. Когда это вещество достигает другие клетки, эти клетки также начинают усиленно производить цАМФ. Эти клетки не осознают смысл полученной информации, но по увеличении концентрации этого вещества, клетки начинают перемещаться к точке, где концентрация этого вещества больше. Кооперативное действие клеток приводит к появлению новой сущности. Это можно назвать **синергетической информацией**.

Как двигается животное? У них есть мозг и мышцы, все это должно быть очень хорошо скоординировано. Кооперативное действие. Должна происходить передача информации. Речь является результатом кооперативного действия, связанного с созданием, передачей и усвоением информации. Химическая реакция - в результате химической реакции возникают новые структуры.

Все это связано с **обменом информации**. Хотя во всех таких случаях обмен информацией первоначально может происходить случайно, со временем между различного рода сигналами возникает конкуренция или кооперация, и в конце концов устанавливается новое коллективное состояние, которое качественно отличается от неупорядоченного, или некоррелированного, состояния, существовавшего прежде. Это новое состояние можно описать с помощью одного или нескольких **параметров порядка**, или, что эквивалентно, одним или несколькими информаторами. Для лазера - это длина волны.

Если имеется сложная система, то в общем случае, состояние отдельных частей сложной системы может описываться (определяться) с помощью **принципа подчинения**: глобальная система влияет на поведение отдельных частей, отдельные части влияют на отдельные подчасти и т.д.

## 1.9 Второе начало синергетики

Существуют различные подходы к исследованию больших систем: макроскопический, мезоскопический, микроскопический уровень и т.д. Мезоскопических может быть много.

Когда выбирается микро(меза)скопический уровень, то мы формулируем уравнения. Рассматривая понятия неустойчивости, подчинения и т.д. (им можно придать математическую форму), мы показываем, что возникают какие-то структуры, и, следовательно, новые качества на макроскопическом уровне. Этот подход аналогичен подходу в статистической механике.

Подойдем к анализу систем с точки зрения термодинамики - термодинамический подход. Начнем с некоторых макронаблюдаемых переменных, которые описываются своими средними значениями, они могут флуктуировать (колебания относительно среднего значения), например температура, давление. Будем различать макроскопические переменные, присваивая им некоторый индекс.

Будем говорить, что переменная имеет номер  $k$ , ее среднее значение  $f_k$ . Система находится в состоянии  $j$  и это состояние характеризуется вероятностью  $p_j$ . Нас интересует закон распределения вероятностей  $p_j$ .

Можем попытаться найти максимум информации, т.е. величину  $i$ . Если система может находиться в разных состояниях, то информация описывается по известной формуле  $i = -\sum_j p_j \ln p_j$  при ограничении  $f_k = \sum_j p_j f_j^{(k)}$ , где  $f_j^{(k)}$  вклад  $j$ -го состояния в  $k$ -ю переменную. Кроме того,  $\sum_j p_j = 1$

Газ. Состоит из большого числа молекул. Группы молекул обладают разными скоростями. Мы не знаем температуры групп молекул, но мы знаем температуру газа. Она складывается из вероятностей того, что разные группы с разными температурами, каждая группа вкладывается, получаем температуру. Поэтому ищем максимум информации при условии, что. ???

**Принцип максимума информационной энтропии:** максимизация величины  $i$  при наличии вышеописанных ограничений. Лежит в основе второго закона синергетики. Как бы ни вела себя сложная система, она должна описываться принципом максимума энтропии. Все это справедливо в том случае, когда система замкнута (по энергии и по массе).

При использовании данного принципа, возникает сложность, когда система оказывается далека от равновесия, в этом случае возникает вопрос - как выбрать ограничения? Если система находится далеко от состояния равновесия, то довольно сложно выбрать ограничения.

Допустим, работает реактивный двигатель: в центре одна температура, на расстоянии 1 метр от сопла температура другая.

Атмосферная температура зависит от положения в пространстве. Метеорологи говорят о средней температуре.

В состоянии равновесия, макроскопические параметры имеют смысл. Иначе, они теряют смысл.

Однако, считается что принцип максимума энтропии можно использовать. Его нужно применять к определенному классу систем. Разные типы систем образуют разные классы систем, в каждом классе рассматриваем свои дополнительные ограничения, требуя принцип максимума энтропии. В случае равномерных систем, мы используем ограничения выше, значения величин  $f^{(k)}$  нам известны.

В качестве первого шага, мы можем считать (высказать предположение), что адекватные ограничения должны включать макроскопические переменные (параметры порядка).

Если система не находится в состоянии равновесия, то происходят большие флуктуации

параметров переменных ??? (может быть, здесь «параметры порядка» а не переменных). Эти флуктуации могут быть такими большими, что флуктуации сами превращаются в параметры порядка. Мы должны учитывать не только макроскопические переменные, но и их флуктуации.

В рамках классической теории, можем не использовать на первом шаге параметры порядка, а определить корреляционные зависимости, т.е. посчитать моменты наблюдаемых переменных и восстановить по ним параметры порядка и подчиненные моды, которые могут появиться.

Вычисляя моменты наблюдаемых величин, мы пытаемся реконструировать параметры порядка. Но мы не можем говорить о макроскопических переменных, потому что они не существуют. ??? (у Хакена написано: мы можем также восстанавливать макроскопические структуры).

??? Что из этого вышенаписанного называется вторым началом синергетики?

## 1.10 Уровни описания сложных систем.

Необходимо понимать - на каком уровне необходимо описать систему, **микроскопическом, мезоскопическом, макроскопическом.**

1. На **макроскопическом** - температура.
2. На **микроскопическом** - координаты и импульсы всех молекул, применить к ним II закон Ньютона.

Мы не сможем описать движение каждой молекулы, но можем получить векторное поле скорости. Могут возникать вихри, которые мы не чувствуем, но, перемещая анимометр, мы увидим, что он будет крутиться по разному в разных точках. Можно написать уравнения гидродинамики и описать **мезоскопически**.

Волна в океане, волна на нити. На макроскопическом уровне, для описания понадобится длина волны и амплитуда. На микроскопическом уровне, веревка состоит из молекул, когда молекула поднимается, она тянет за собой другую.

Нужно понимать, что микроскопическое поведение системы определяет поведение макроскопической системы, и наоборот. ??? Где-то дальше было опровержение этого

Приминяются различные модели, которые имитируют свойства систем. Как можно описать жидкость? Можно описать отдельные ее молекулы. Можно описать жидкость как делает гидромеханика - вводится понятие элементарного объема, который всегда содержит большое число молекул. Элементарный объем - малый объем жидкости или газа, который на самом деле обладает свойствами жидкости или газа. Можно описывать жидкость на уровне макродинамики, задав температуру и давление. Это - микроскопический, мезаскопический и макроскопический подход.

## 1.11 Уравнение Ланжевена. Интерпретация Ито. Интерпретация Стратановича.

**Корреляция** - зависимость между первой и второй величиной. **Автокорреляция** - если величина  $x$  меняется с течением времени, то нужно посчитать корреляцию в разные моменты времени и вычесть из среднего значения. Это называется автокорреляция (кросскорреляция). Введем это более формально: Процесс  $x$ , его значения  $x_1, \dots, x_N$ . Этот процесс записывается в

виде двух процессов. Один процесс начинаем в момент  $x_1, \dots, x_{N-1}$ , второй -  $x_2, \dots, x_N$ . Можем посчитать корреляцию между этими двумя процессами. Затем разбиваем на три части. Получаем автокорреляционную функцию с **лагом**, равным 2. Если данные состоят из 10 точек, то процедура будет не очень хороша. Таким образом, мы можем посчитать автокорреляцию для случайной величины.

Попытка объяснить броуновское движение: Ботаник смотрел на пыльцу в жидкости и обнаружил, что пыльца совершает хаотическое движение. Он знал, что пыльца - не живая субстанция. Он написал на эту тему статью. Движение очень мелких взвешенных частиц - **броуновское движение**.

За счет чего они двигаются? О них ударяются молекулы, их средняя оказалась не равна нулю. Из-за того, что средняя составляющая оказалась неравна нулю, эти частицы приходили в движение в разные стороны.

Одна из попыток описать это явление бал связана с **уравнением Ланжевена (уравнением Эволюции)**.

$\frac{dq}{dt} = N(q, \alpha) + F(t)$ , показывает как система, находясь в состоянии  $q$  будет развиваться с течением времени.  $F(t)$  - это случайная флуктуация.

Первооснова такого уравнения - механика Ньютона, т.к. это аналог уравнения Ньютона. Если  $q$  - скорость частицы,  $\frac{dq}{dt}$  ускорение частицы. По сути это второй закон Ньютона - слева ускорение, справа  $N$  - вынуждающая сила, а  $F$  - флуктуирующая часть вынуждающей силы. Если  $F(t)$  уходит, то получаем в чистом виде II закон Ньютона.

$$\dot{q} = k(q) + F(t) \quad (1.1)$$

$q$  - скорость броуновской частицы.

Что действует? Частицы со всех сторон что-то толкает. Это случайная величина. Также действует трение. Тогда  $k(q)$  обусловлена трением. При малых скоростях сила трения пропорциональна скорости. Трение действует в противоположную сторону, следовательно, можем применить две формулы

$$k(q) = -\gamma q \quad (1.2)$$

$$k(q) = \alpha q - \beta q^3 \quad (1.3)$$

Какими свойствами обладает  $F(t)$ ? Предположим, что среднее значение силы равно нулю. Частица с равной вероятностью может пойти в любую сторону.

$$\langle F(t) \rangle = 0 \quad (1.4)$$

где угловые скобки - осреднение.

Нам нужна автокорреляция. Запишем эту корреляцию, используя дельта-функцию Дирака

$$\langle F(t) F(t') \rangle = Q \delta(t - t') \quad (1.5)$$

а дисперсия не равна нулю. ??? Что такое  $Q$

Стандартная запись (подход).

Среднее от  $F$  равно нулю, корреляционная функция зависит от времени.

Мы записали уравнение Ланжевена (1), коэффициент  $k$  может выглядеть (2) или (скорее всего) (3), величина  $F$  должна удовлетворять (5), (6).

Вместо (1) запишем:

$$\dot{\vec{q}} = \vec{k}(\vec{q}) + \vec{F}(t) \quad (1.6)$$

$$\langle F_j(t) \rangle = 0 \quad (1.7)$$

$$\langle F_j(t) F_{j'}(t') \rangle = Q \delta(t - t') \delta_{jj'} \quad (1.8)$$

Мы сказали, что  $F$  зависит только от времени. На самом деле, оно может зависеть еще и от  $q$ . Тогда ситуация усложняется. Подобные задачи решаются с помощью исчисления Ито или исчисления Стратоновича.

В скалярном случае:

$$dq(t) = k(q(t)) dt + g(q(t)) dW(t) \quad (1.9)$$

$k, g$  - нелинейная детерминированная функция. Раньше  $F$  была случайной, теперь же здесь  $g$  становится детерменированной функцией, но  $W(t)$  случайный (стохастический) процесс. Этот стохастический процесс должен удовлетворять тем же свойствам, что и раньше:

$$\langle dW(t) \rangle = 0 \quad (1.10)$$

$$\langle dW(t) dW(t') \rangle = Q \delta(t - t') dt \quad (1.11)$$

Мы предполагаем, что это так. Если, анализируя экспериментальные данные мы видим, что это не так, то вся наша теория не годится.

В рамках подхода Ито предполагается, что процессы  $q$  и  $dW$  не коррелированы.

Если записать систему в предположении, что  $q$  - многомерное,  $\vec{q} = (q_1, \dots, q_m)$ , то

$$dq_l(t) = k_l(\vec{q}(t)) dt + \sum_m g_{lm}(\vec{q}(t)) dW_m(t) \quad (1.12)$$

$$\langle dW_m(t) \rangle = 0 \quad (1.13)$$

$$\langle dW_m(t) dW_l(t') \rangle = \delta(t - t') \delta_{lm} dt \quad (1.14)$$

Это и есть **подход Ито**. Не для каждого процесса существует производная. А приращение функции существует всегда. Поэтому мы от производных переходим к дифференциалу.

Рассмотрим произвольную функцию

$$\vec{u} = \vec{u}(\vec{q}) \quad (1.15)$$

Найдем дифференциал функции.

$$du_j = \sum_k \frac{\partial u_j}{\partial q_k} dq_k + \frac{1}{2} \sum_{k,l} \frac{\partial^2 u_j}{\partial q_k \partial q_l} dq_k dq_l \quad (1.16)$$

Первое слагаемое вопросов не вызывает, откуда появилось второе слагаемое? При вычислении производной мы должны указать связь между производными.

Пример:  $u(q) = aq^2 + b \sin(q)$  - дифференциал  $du = 2aq dq + b \cos q dq$ . В нашем случае, координата  $k$  коррелирует с  $l$  и высказывает слагаемое.

Правую часть соотношения (12) подставляем в (16).

$$du_j = \sum_k \frac{\partial u_j}{\partial q_k} \left[ k_k(\vec{q}) dt + \sum_m g_{km} dW_m(t) \right] + \frac{1}{2} \sum_{k,l} \frac{\partial^2 u_j}{\partial q_k \partial q_l} \left[ \sum_{m,n} g_{km} g_{ln} dW_m dW_n \right] \quad (1.17)$$

Сохранили все члены первого порядка и пренебрегли всеми членами по  $dt$ .

Как решать эту проблему в случае интегрирования по Стратановичу?

Стохастическое уравнение для одной переменной имеет вид (9), продублируем его

$$dq(t) = k(q(t)) dt + g(q(t)) dW(t) \quad (1.18)$$

а для компонент вектора состояния

$$dq_l = k_l(\vec{q}) dt + \sum_m g_{lm}(\vec{q}) dW_m(t) \quad (1.19)$$

При гипотетическом интегрировании, переходя к дискретной сетке по времени, мы будем вычислять последнее слагаемое в центре интервала. Каждый атом последнего слагаемого записывается в виде:

$$g \left[ q \left( \frac{t_i + t_{i-1}}{2} \right) \right] dW(t_i) \quad (1.20)$$

При таком подходе между  $q$  и  $dW$  возникает статистическая зависимость.

**Не входит в вопрос:**  $\int (x - \bar{x})(y - \bar{y}) f(x, y) dx dy$  считаем корреляцию по таким формулам.  $E\{xy\} = \int \int xy f(x, y) dx dy = \int x f_1(x) dx \int y f_2(y) dy$  - формула вычисления математического ожидания. В силу статистической независимости  $f(x, y) = f_1(x) f_2(y)$ . Статистическая независимость лучше чем зависимость.

## 1.12 Уравнения Фоккера-Планка. Стационарное решение. Уравнение Фоккера-Планка в интерпретациях Ито и Стратановича.

### 29.03.17 лекция

Уравнение Ланжевена:  $\dot{q} = k(q) + F(t)$ . В тех случаях, когда первое слагаемое нелинейно зависит от  $q$ , удобно перейти к **уравнению Фоккера-Планка**.

Уравнение записывается для плотности вероятности  $q$ , другими словами, от  $q$  переходим  $q \rightarrow f(q, t)$ , где  $f$  - описывает вероятность найти переменную  $q$  в интервале  $q \rightarrow q + dq$  в момент времени  $t$ . Тогда уравнение записывается в виде:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial q} [k(q) f] + \frac{Q}{2} \frac{\partial^2}{\partial q^2} f \quad (1.21)$$

Первый член справа называется **дрейфовым**, второй - **диффузионным** (названия из движения жидкости). Дрейфовая - отвечает за наличие потока. Диффузионная - наличие "движка".

Если считать, что мы высыпали порошок или каплю чернил в воду, то это пятно будет двигаться вместе с течением (дрейфовая составляющая), но помимо всего прочего, это пятно будет расширяться за счет диффузии.

Диффузия по закону градиента - из стороны где больше к стороне где меньше, поэтому первое слагаемое с минусом. Во втором слагаемом берем дивергенцию, поэтому плюс.



Мы можем найти стационарное решение, где производная по времени равна нулю.

$$\frac{\partial f}{\partial t} = 0 \quad (1.22)$$

Имеем уравнение первого порядка. Для него необходимо иметь граничное условие. Как сформулировать граничное условие для плотности вероятности?

Координата имеет значение  $q$  в интервале  $\pm\Delta q$ .

Возможны два варианта:

Первое: граничное условие равно нулю на бесконечности.

$$\frac{\partial f}{\partial t} = 0, q \rightarrow \pm\infty \quad (1.23)$$

Это стационарное решение определяется выражением:

$$f = N \exp \left[ - \int_{q_0}^q \frac{2k(q')}{Q} dq' \right] \quad (1.24)$$

$N$  - **нормировочная постоянная**, такая, что  $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$

В общем случае, это уравнение может быть записано в векторной форме.

$$f(\vec{q}, t) \quad (1.25)$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} = - \sum_j \frac{\partial}{\partial q_j} [k_j(\vec{q}) f] + \frac{1}{2} \sum_{j,k} Q_{j,k} \frac{\partial^2}{\partial q_j \partial q_k} f \quad (1.26)$$

Решить аналитически в большинстве случаев невозможно.

Используя подход Ито, приходим к уравнению Фоккера Планка (путем подстановки в формулу (12)):

$$\frac{\partial f}{\partial t} = - \sum_k \frac{\partial}{\partial q_k} [k_k(\vec{q}) f] + \frac{1}{2} \sum_{k,l} \frac{\partial^2}{\partial q_k \partial q_l} \left[ \sum_m q_{km} q_{lm} f \right] \quad (1.27)$$

Интерпретация Стратановича:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = - \sum_l \frac{\partial}{\partial q_l} \left( k_l(\vec{q}) + \frac{1}{2} \sum_{k,j} \frac{\partial g_{lj}}{\partial q_k} g_{kj} \right) + \frac{1}{2} \sum_{l,m} \frac{\partial^2}{\partial q_l \partial q_m} \left( \sum_i g_{li} g_{mi} f \right) \quad (1.28)$$

### 1.13 Точное решение уравнения Фоккера-Планка для систем в детальном равновесии. Принцип детального равновесия

Мы говорим, что система находится в **детальном равновесии** если она находится в состоянии теплового равновесия. Если система далека от детального равновесия, то в ней принцип детального равновесия не работает.

Допустим, что имеется вектор состояния  $\vec{q}$ , он определяется  $N$  переменными,  $\vec{q} = (q_1, q_2, \dots, q_N)$ .

Рассмотрим систему, которую можно повернуть вспять во времени. Эта процедура называется **обращением времени**. На уровне микроописания (в механике Ньютона, например),

можно повернуть время вспять, т.е. заменить  $t$  на  $-t$ . В термодинамике это не возможно, второй закон запрещает это.

Набор переменных при обращении времени будем обозначать следующим образом.

При обращении времени, вектор переменных состояния будем описывать как

$$\overleftarrow{\vec{q}} = (\epsilon_1 q_1, \dots, \epsilon_N q_N) \quad (1.29)$$

Если координата  $q_i$  при обращении не меняет знак, то  $\epsilon_i = +1$ , если меняет, то  $\epsilon_i = -1$   
 $\overrightarrow{\vec{\lambda}}$  - набор параметров, воздействие внешней среды.  $\overrightarrow{\vec{\lambda}} = (\lambda_1, \dots, \lambda_N)$ .

$$\overleftarrow{\vec{\lambda}} = (v_1 \lambda_1, \dots, v_M \lambda_M) \quad (1.30)$$

$v_j = \pm 1$  в зависимости от инверсионной симметрии внешних параметров при обращении времени,

Введем совместную вероятность найти систему в момент времени  $t_1$  в точке с координатами  $\overrightarrow{\vec{q}}$ , а в момент времени  $t_2$  - в точке с координатами  $\overrightarrow{\vec{q}}'$  через

$$P(\overrightarrow{\vec{q}}', \overrightarrow{\vec{q}}; t_2, t_1) \quad (1.31)$$

Система эволюционирует во времени, но стационарна. Следовательно, вероятность  $p$  зависит от разности  $t_2 - t_1$ . Введем  $\tau = t_2 - t_1$ , тогда

$$P(\overrightarrow{\vec{q}}', \overrightarrow{\vec{q}}; t_2, t_1) = W(\overrightarrow{\vec{q}}', \overrightarrow{\vec{q}}; \tau) \quad (1.32)$$

Сформулируем **принцип детального равновесия**.

Возможны два определения:

Первый вариант:

$$W(\overrightarrow{\vec{q}}', \overrightarrow{\vec{q}}; \tau, \overrightarrow{\vec{\lambda}}) = W(\overleftarrow{\vec{q}}, \overleftarrow{\vec{q}}'; \tau, \overleftarrow{\vec{\lambda}}) \quad (1.33)$$

Тогда, совместная вероятность записывается следующим образом (вертикальная черта - условная вероятность):

$$P = P(\overrightarrow{\vec{q}}' | \overrightarrow{\vec{q}}; \tau, \overrightarrow{\vec{\lambda}}) \quad (1.34)$$

$$P = P(\overrightarrow{\vec{q}}' | \overrightarrow{\vec{q}}; \tau, \overrightarrow{\vec{\lambda}}) f(\overrightarrow{\vec{q}}; \overrightarrow{\vec{\lambda}}) = P(\overleftarrow{\vec{q}} | \overleftarrow{\vec{q}}'; \tau, \overleftarrow{\vec{\lambda}}) f(\overleftarrow{\vec{q}}'; \overleftarrow{\vec{\lambda}}) \quad (1.35)$$

Если уравнение Фокера-Планка имеет единственное решение, то из принципа детального равновесия следует, что

$$f(\overrightarrow{\vec{q}}, \overrightarrow{\vec{\lambda}}) = f(\overleftarrow{\vec{q}}, \overleftarrow{\vec{\lambda}}) \quad (1.36)$$

т.е. можно показать, что вероятности двух состояний одинаковы.

Есть состояние  $\overrightarrow{\vec{q}}$  и мы переходим в  $\overrightarrow{\vec{q}}'$ . Какова вероятность перехода в секунду?

$$w(\overrightarrow{\vec{q}}', \overrightarrow{\vec{q}}; \overrightarrow{\vec{\lambda}}) = \frac{d}{d\tau} P(\overrightarrow{\vec{q}}' | \overrightarrow{\vec{q}}; \tau, \overrightarrow{\vec{\lambda}}) |_{\tau=0} \quad (1.37)$$

- вероятность перехода в единицу времени.

Если от уравнения (37) взять производную по  $\tau$  и положить  $\tau = 0$ , но при этом  $\overrightarrow{\vec{q}} \neq \overrightarrow{\vec{q}}'$ , то получаем

$$w(\vec{q}', q; \lambda) f(\vec{q}, \lambda) = w\left(\widetilde{\vec{q}}, \widetilde{\vec{q}}, \widetilde{\vec{\lambda}}\right) f\left(\widetilde{\vec{q}}, \widetilde{\vec{\lambda}}\right) \quad (1.38)$$

- принцип детального равновесия (второй вариант)

Описывает скорость перехода из состояния  $\vec{q}$  в состояние  $\vec{q}'$ .

Соотношение (38) означает, что для любых пар, прямой переход и обратный должны быть с одинаковой скоростью.

## 1.14 Структура уравнения Фоккера-Планка в случае стационарного решения

### 05.04.17 лекция

В уравнении (26),  $f$  - плотность вероятности нахождения системы в состоянии  $q$ .

Мы можем перейти к условной вероятности. Тогда уравнение можно записать в следующем виде

$$\frac{d}{d\tau} P(\vec{q}'|q; \tau, \lambda) = L(\vec{q}, \lambda) P(\vec{q}'|\vec{q}; \tau; \lambda) \quad (1.39)$$

$\tau$  - время перехода из состояния  $q$  в состояние  $q'$ .

$$L(\vec{q}) = - \sum_i \frac{\partial}{\partial q_i} k_i(\vec{q}, \lambda) + \frac{1}{2} \sum_{i,k} \frac{\partial^2}{\partial q_i \partial q_k} Q_{ik}(\vec{q}, \lambda) \quad (1.40)$$

Смысл плотности вероятности:  $f(x) dx$  - вероятность попасть в точку. Интегрируем от  $q$  до  $q'$  и из (26) получаем (39). Плотность - масса единичного объема, в физическом смысле. Плотность вероятности - вероятность попадания в единичный интервал. С точки зрения математики - плотность, мера - одно и то же. Они обладают одинаковыми свойствами: положительны, аддитивны, и то и другое описывается интегралом.

$Q$  - коэффициенты диффузии.

Предполагаем, что коэффициенты диффузии симметричны, т.е.

$$Q_{ik} = Q_{ki} \quad (1.41)$$

Определим новые коэффициенты по следующей формуле

$$D_i(\vec{q}, \lambda) = \frac{1}{2} \left[ k_i(\vec{q}, \lambda) + \epsilon_i k_i\left(\widetilde{\vec{q}}, \widetilde{\vec{\lambda}}\right) \right] = D_i^{\text{необр}} \quad (1.42)$$

$$J_i(\vec{q}, \lambda) = \frac{1}{2} \left[ k_i(\vec{q}, \lambda) - \epsilon_i k_i\left(\widetilde{\vec{q}}, \widetilde{\vec{\lambda}}\right) \right] = D_i^{\text{обр}} \quad (1.43)$$

$D_i^{\text{необр}}$  - коэффициенты необратимого дрейфа

$D_i^{\text{обр}}$  - коэффициенты обратимого дрейфа

При обращении времени,  $J_i$  преобразуется также, как и  $Q_i$ .

Запишем стационарное решение уравнения Фоккера-Планка в виде

$$f(\vec{q}, \lambda) = \mathcal{N} e^{-\Phi(\vec{q}, \lambda)} \quad (1.44)$$

$\Phi$  - можно интерпретировать как обобщенный термодинамический потенциал,  $\mathcal{N}$  - нормировочная константа.

Кинетическая энергия зависит от движения. Потенциальная - зависит от положения тела в силовом поле. Если нет силового поля, то нет и потенциальной энергии. Однако, если тела в силовом поле нет, то силовое поле есть все равно. Силовое поле прикладывает силу к телу, находящемуся в этом поле. Чтобы оценить силовое поле, нужно нечто поместить в силовое поле. Тогда появляется сила. Пример - гравитационное поле Земли.

Термодинамический потенциал - внутренняя энергия тела. Чтобы ее изменить, необходимо провести работу. Работа - путь на силу. Нагревание - подвод тепла. Это не работа.

В термодинамике, термодинамический потенциал, свободная энергия (энтропия), энтропия - внутренняя энергия. Все эти параметры крутятся вокруг уравнения термодинамики. Мы не говорим о термодинамике. ??? Слегка хаотично, может быть, у кого-нибудь есть более четкая формулировка

Принцип детального равновесия - чтобы он не нарушался, необходимое и достаточное условие сводится к следующему:

$$Q_{ik}(\vec{q}, \lambda) = \epsilon_i \epsilon_k Q_{ik}(\vec{\tilde{q}}, \tilde{\lambda}) \quad (1.45)$$

где  $\epsilon_i \epsilon_k$  - параметры, отвечающие за обращение времени.

$$D_i - \frac{1}{2} \sum_k \frac{\partial Q_{ik}}{\partial q_k} = -\frac{1}{2} \sum_k K_{ik} \frac{\partial \Phi}{\partial q_k} \quad (1.46)$$

$$\sum_i \left( \frac{\partial J_i}{\partial q_i} - J_i \frac{\partial \Phi}{\partial q_i} \right) = 0 \quad (1.47)$$

Для выполнения принципа детального равновесия, необходимо выполнение (45-47).

$K$  - имеет смысл матрицы диффузии. Если  $K$  - невырожденная матрица, т.е. существует обратная, то из уравнения (46) можно получить выражение для градиента потенциала (т.е. для силы)

$$\frac{\partial \Phi}{\partial q_i} = \sum_k (Q^{-1})_{ik} \left( \sum_l \frac{\partial Q_{kl}}{\partial q_l} - 2D_k \right) \equiv A_i \quad (1.48)$$

Из (48) следует условие интегрируемости

$$\frac{\partial}{\partial q_i} A_j = \frac{\partial}{\partial q_j} A_i \quad (1.49)$$

(49) также является условием на коэффициенты дрейфа и диффузии.

$$\sum_i \left[ \frac{\partial J_i}{\partial q_i} - J_i \sum_k (Q^{-1})_{ik} \left( \sum_l \frac{\partial Q_{kl}}{\partial q_l} - 2D_k \right) \right] = 0 \quad (1.50)$$

**Вывод:** условие детального равновесия определяется в конце концов выражениями (45), (49) и (50).

Уравнение (46) или эквивалентное ему уравнение (48) позволяет определить  $\Phi$  с помощью квадратуры, т.е. в результате однократного интегрирования и тем самым найти уравнение Фокера-Планка в явном виде.

**12.04.17 лекция**

## 1.15 Интегралы по траекториям уравнения Фоккера-Планка.

Нестационарные решения уравнения Фоккера-Планка могут быть представлены в виде интегралов по траекториям. Для простоты,  $q$  - const,  $Q$  не зависит от  $q$ . Рассмотрим одномерный случай.

Система эволюционирует во времени. Можем разбить на равные интервалы, т.е. сказать, что есть

$$t_0, t_1 = t_0 + \Delta t, t_2 = t_0 + 2\Delta t, \dots, t_N = t_0 + N\Delta t \quad (1.51)$$

Функцию распределения  $f$  в момент времени  $t$  можно представить в виде  $N$  - кратного интеграла по всем промежуточным положениям  $q_0, q_1, \dots$  (в  $t_0$  система находилась в состоянии  $q_0$ ,  $t_i$  - находилась в состоянии  $q_i$ ).

$$f(q, t) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N}{N\Delta t = t} \int \dots \int Dq e^{-G/2} f(q', t_0) \quad (1.52)$$

$$Dq = (2Q\Delta t\pi)^{-N/2} dq_0 dq_1 \dots dq_{N-1} \quad (1.53)$$

$$G = \sum_v \frac{\Delta t \left[ \frac{q_v - q_{v-1}}{\Delta t} - k(q_{v-1}) \right]^2}{Q} \quad (1.54)$$

$$a \quad (1.55)$$

$$a \quad (1.56)$$

$$a \quad (1.57)$$

$$a \quad (1.58)$$

$$a \quad (1.59)$$

Другими словами, плотность вероятности перехода из одного состояния в другое может быть оценена данной формулой.

Множество  $a$  здесь появилось из-за того, что у Хакена был вывод для многомерного случая. Чтобы не нарушать нумерацию, пришлось их вставить.

В рамках этого же подхода вспомним основное кинетическое уравнение. Рассмотрим некоторое пространство дискретных состояний, рассмотрим вектор  $\vec{m}$  из пространства состояний (имеется набор дискретных состояний). Нас интересует распределение вероятности вектора  $\vec{m}$  в момент  $t$ .

Предположим, что имеем дело с Марковским процессом, тогда эта вероятность удовлетворяет основному кинетическому уравнению.

$$\frac{dP(\vec{m}, t)}{dt} = \sum_n w(\vec{m}, \vec{n}) P(\vec{n}) - \sum_n w(\vec{n}, \vec{m}) P(\vec{m}) \quad (1.60)$$

(60) описывает вероятность вектора  $M$  в момент  $t$  в случае, если процесс Марковский. Явное решение, как правило, найти не удастся, однако в частном случае, когда наблюдается

детальное равновесие, стационарное распределение вероятности может быть написано явно. Когда устанавливается детальное равновесие,  $P$  удовлетворяет соотношению

$$w(\vec{n}, \vec{n}) P(\vec{n}) = w(\vec{n}, \vec{n}) P(\vec{n}) \quad (1.61)$$

Когда пишутся уравнения притока, всегда есть источник и сток, т.е. одна часть приводит к появлению, а вторая - к удалению. В данном случае, первое слагаемое - увеличение вероятности, второе - уменьшение вероятности. ???

$$\Phi(\vec{n}) = \Phi(\vec{n}_0) + \sum_{j=0}^{N-1} \left[ \ln \frac{w(n_{j+1}, n_j)}{w(n_j, n_{j+1})} \right] \quad (1.62)$$

$$a \quad (1.63)$$

$$a \quad (1.64)$$

$\vec{n} = \vec{n}_N$ . Очень многие ситуации в природе, технике, обществе могут быть описаны данным уравнением. ??? что это за формула, что такое  $\vec{n}_N$

## 1.16 Уменьшение сложности, параметры порядка и принцип подчинения.

### 1.16.1 Анализ устойчивости по линейному приближению.

Качественное изменение - при охлаждении, водяной пар превращается в воду.  $H_2O$  как было, так и остается, но фазовое состояние вещества изменилось. Далее, при охлаждении вода превратится в лед. Такое же изменение возникает в металлах при очень низких температурах - свойство сверхпроводимости. Начиная с каких-то низких температур (порядка 1 градуса Кельвина) возникает сверхпроводимость. Если охладить гелий, то выяснится, что у него появляется свойство сверхтекучести. Через некоторое время гелий выползет из банки - проникает между молекулами вещества.

Аттрактор Лоренца - течение жидкости. 2 качественных состояния, между ними возможен переход.

Земля - современный климат может быть описан кривой ???КАРТИНКА.

Предположим, что солнечная постоянная меняется (хотя мы менять ее не можем), но мы можем загрязнять атмосферу, а это эквивалентно тому, что меняется солнечная постоянная, т.к. солнечная энергия поглощается.

Часть солнечной энергии поглощается атмосферой - часть переизлучается вверх. В зависимости от поглощающего газа - солнечная постоянная падает, на земле становится холоднее. Ядерная зима - поднявшаяся сажа перекрывает доступ солнечной энергии. Это наблюдалось после извержения вулканов. Через сажу солнечное излучение не проходит! Углекислый газ - дополнительная подушка, не позволяющая уходить излучению в космос. Возникает эффект увеличения солнечной постоянной.

По горизонтали - 0 экватор, 1 - синус широты  $x_i = \sin \phi_i$ .

В какой-то момент ледяной покров может растаять.

Можем получить решение уравнения, но за ним может не быть физического смысла. Это решение оказывается неустойчивым, его не существует в природе, т.к. любое минимальное

его возмущение приведет к разрушению. В итоге мы прыгнем - скачок в ноль и земля покрывается льдом. Это было - палеоклиматология. На карельском перешейке огромные волуны - их волок за собой лед.

**Начинается вопрос:** Нас интересует система, состоящая из большого числа частей. Нас интересуют качественные изменения поведения системы.

Будем считать, что наша система описывается некоторым вектором состояния. Этот вектор описывает всю систему на микроскопическом или мезоскопическом уровне.

$$\vec{q} = \vec{q}(\vec{x}, t) \quad (1.65)$$

- где  $x, q$  в общем случае могут быть векторами. Пространственная координата - обязательно координата, это может быть и температура и какой-то параметр и многое другое.

Скорость изменения состояния

$$\frac{d\vec{q}}{dt} = \dot{\vec{q}} = \vec{N}(\vec{q}, \alpha) + \vec{F}(t) \quad (1.66)$$

$\vec{N}$  - детерминированная, нелинейная функция от  $q$ ,  $F$  - это флуктуация, случайная составляющая.

Проанализируем устойчивость поведения этой системы по линейному приближению.

Допустим, что при некотором управляющем параметре  $\alpha = \alpha_0$  нам известно решение уравнения (66).

$$\vec{q} = N(\vec{q}_0; \alpha_0) \quad (1.67)$$

Как будет вести себя модель при варьировании  $\alpha$ ? Величина  $\vec{q}$  также будет варьироваться. Предположим, что

$$\alpha : \vec{q} = \vec{q}_0 + \vec{w} \quad (1.68)$$

Будем считать, что  $q_0$  гладко зависит от  $\alpha$ , т.е.

$$\vec{q}_0 = \vec{q}_0(\alpha) \quad (1.69)$$

Нас интересует вопрос устойчивости  $q_0$ . Подставим (68) в (66), где отброшен  $\vec{F}(t)$

$$\dot{\vec{q}} = \dot{\vec{q}}_0 + \dot{\vec{w}} = \vec{N}(\vec{q} + \vec{w}; \alpha) \quad (1.70)$$

Необходимо предположить, что величина малая. Когда мы говорим о линейном приближении, отклонения должны быть малыми. Малые дают возможность пренебречь слагаемыми в ряде Тейлора. Поэтому можем переписать правую часть в следующем виде:

$$\dot{\vec{q}} + \dot{\vec{w}} = \vec{N}(\vec{q}_0; \alpha) + \vec{L}(\vec{q}_0) \vec{w} + \dots \quad (1.71)$$

Сократим:

$$\dot{\vec{w}} = L(\vec{q}_0) \vec{w} \quad (1.72)$$

$L$  - некий оператор, который действует на  $q_0$ . Важно то, что мы легко можем написать решение уравнения:

$$\vec{w} = e^{\vec{L}t} \vec{v} \quad (1.73)$$

- это формальное решение уравнения  $\dot{x} = ax$

То, в каком случае произойдет качественное изменение, а в каком - нет, заложено в  $\lambda$ . Если  $\lambda$  отрицательна, то с течением времени уйдем. ??? Куда уйдем

Если положительна, то решение уйдет на бесконечность.

Если равна нулю... ???

Анализ устойчивости в линейном приближении. Он работает всегда. Но он не всегда приводит к хорошим результатам, т.к. не справедливо предположение о малости. Но если оно работает, то мы пользуемся анализом устойчивости в линейном приближении.

Устойчивое решение

$$(\lambda < 0) \quad (1.74)$$

$$\lambda_s, v_s \quad (1.75)$$

Неустойчивое решение

$$(\lambda > 0) \quad (1.76)$$

$$\lambda_u, v_u \quad (1.77)$$

Зачем это? Мы что-то моделируем, получилось решение, ответ. Нужно понять - является ли решение устойчивым? И зачем нужно варьировать?

Используются некоторые исходные данные, все они берутся с ошибкой, всегда, точных данных не бывает. Надо эти данные чуть-чуть пошевелить.

Мало построить математическую модель. Необходимо убедиться, что эта модель устойчива. Решение плавно меняется при варьировании всех входных данных.

Простейший способ проверить это - проанализировать линейное поведение. Это делается так, как показано выше. Подставляем правую часть. Предполагаем, что оно возмущается. Получаем квазилинейное уравнение. Оцениваем решение. Ляпунов. Теория устойчивости.

По линейному приближению:  $w$  невелико, в каком-то смысле оно мало. Поэтому термин устойчивый/неустойчивый относится только к линейному приближению.

## 1.16.2 Преобразования эволюционных уравнений

### 19.04.17 Лекция

Уравнение (66) - вариант эволюционного уравнения. Посмотрим - как его можно преобразовать. Попробуем решить (66) в нелинейном и стохастическом случае.

Допустим, что есть случайная составляющая, тогда уравнение нелинейное и стохастическое. Предположим, что вектор  $q$  может быть записан в следующем виде.

$$\vec{q} = \vec{q}_0 + \sum_u \xi_u(t) \vec{v}_u + \sum_s \xi_s(t) \vec{v}_s \quad (1.78)$$

Первая сумма - нестабильное ( $u$  - unstable) слагаемое, вторая - стабильное ( $s$  - stable) слагаемое.

Если  $L$  в (72) содержит дифференциальные операторы, то  $v$  зависит от  $x$ , т.е.

$$\vec{v} = \vec{v}(x) \quad (1.79)$$

Подставляя в (66) и разделяя после подстановки  $v_s, v_u$ , получаем

$$\dot{\xi}_u = \lambda_u \xi_u + N_u(\xi_u, \xi_s) + F_u(t) \quad (1.80)$$



$$\dot{\xi}_s = \lambda_s \xi_s + N_s (\xi_u, \xi_s) + F_s (t) \quad (1.81)$$

$$u = 1, \dots, M, s = M + 1, \dots,$$

### 1.16.3 Принцип подчинения

Воспользуемся синергетическим принципом подчинения

Рассмотрим уравнение (66). Это уравнение можно преобразовать: исключим амплитуды подчиненных мод из уравнений (попытаемся таким способом выразить  $\xi_s$  через  $\xi_u$ )

$$\vec{\xi}_s = f_s \left[ \vec{\xi}_u (t), t \right] \quad (1.82)$$

Рассмотрим пример:

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_u &= \lambda_u \xi_u + h_u (\xi_u, \xi_s) + F_u (t) \\ \dot{\xi}_s &= \lambda_s \xi_s + g_s (\xi_u) + q_s k_s (\xi_u) + F_s (\xi) \end{aligned} \quad (1.83)$$

Предположим, что  $h_u$  - нелинейная функция, разложение которой в ряд Тейлора начинается с членов по  $\xi_u$  не ниже второго порядка. Аналогично, функция  $g_s$  начинается с той же степени по  $\xi_s$ , что и разложение  $h_u$ . Тогда в принципе можно показать, что разложение  $g_s$  по  $\xi_u$  начинается так же с членов не ниже второго порядка.

Тогда принцип подчинения в простейшем виде может быть записан так:  $\dot{\xi}_s = 0$

Сохраняя только главные члены, мы получаем:

$$\xi_s = -\frac{1}{\lambda_s} g_s (\xi_u) - \frac{1}{\lambda_s} F_s (t) \quad (1.84)$$

Посмотрим, что нам это дает в случае уравнения Фокера Планка.

Мы от  $\vec{q}$  переходим к переменным

$$\vec{q} \rightarrow (\xi_u, \xi_s) \quad (1.85)$$

Тогда уравнение Фокера-Планка примет вид:

$$\dot{P} (\xi_u, \xi_s, t) = L (\xi_u, \xi_s) P (\xi_u, \xi_s, t) \quad (1.86)$$

$L$  - некоторый линейный оператор.

Рассмотрим стационарное решение уравнения (86).

Чтобы найти это стационарное решение мы можем представить, что у нас нет зависимости от  $t$  (справка:  $P$  - совместная вероятность,  $P(|)$  - условная вероятность,  $f$  - функция распределения)

$$P (\xi_u, \xi_s) = P (\xi_s | \xi_u) f (\xi_u) \quad (1.87)$$

Принцип подчинения означает, что условную вероятность  $P$  в правой части уравнения (87) можно представить как

$$P (\xi_s | \xi_u) = \prod_s P_s (\xi_s | \xi_u) \quad (1.88)$$

Рассмотрим формулу (84), используя ее можно показать как будет выглядеть (88) для принципа подчинения.

Будем предполагать, что флуктуирующие силы распределены по закону Гаусса, т.е.

$$P(F \leq F_s \leq F + dF) = N' \exp \left[ -\frac{F_s^2}{Q'} \right] dF \quad (1.89)$$

Разрешим (84) относительно  $F_s$ :

$$F_s = -\lambda_s \left[ \xi_s + \frac{1}{\lambda_s} g_s(\xi_u) \right] \quad (1.90)$$

Это позволяет нам определить вероятность с помощью формулы (89). В результате получаем

$$P(\xi_s | \xi_u) = N_{\text{exp}} \left\{ - \left[ \xi_s + \frac{1}{\lambda_s} g_s(\xi_u) \right]^2 \frac{1}{Q} \right\} d\xi_s \quad (1.91)$$

$$Q^{-1} = Q'^{-1} \lambda_s^2 \quad (1.92)$$

$$N = N' \cdot \lambda_s \quad (1.93)$$

#### 1.16.4 Неравномерный фазовый переход

Число параметров порядка может быть малым или даже равным единице. В то же время число подчиненных мод может быть большим.

Рассмотрим случай одного параметра порядка.

$$\xi_u \rightarrow \xi, F_u \rightarrow F, \lambda_u \rightarrow \lambda \quad (1.94)$$

$$\dot{\xi} = \lambda \xi - \beta \xi^3 + F(t) \quad (1.95)$$

$$\langle F(t) F(t') \rangle = Q \delta(t - t') \quad (1.96)$$

и распределена по закону Гаусса.

Тогда уравнение Фокера-Планка соответствующее (95) записывается:

$$\dot{f}(\xi, t) = -\frac{\delta}{\delta \xi} ([\lambda \xi - \beta \xi^3] f) + \frac{Q}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2} \quad (1.97)$$

Рассмотрим стационарное уравнение,

$$\dot{f} = 0 \quad (1.98)$$

При этом условии уравнение (97) легко интегрируется

$$f = N \exp \left[ Q^{-1} \left( \lambda \xi^2 - \frac{1}{2} \beta \xi^4 \right) \right] \quad (1.99)$$

(99) - пример функции распределения, удовлетворяющей уравнению (88), показывает нам распределение параметра порядка  $\xi_u$ .

### 1.16.5 Образование структур

Рассмотрим непрерывно распределенную среду, характеризуемую пространственной координатой  $x$ . В этом случае, оператор  $L$  (возник в линеаризации (72)) в общем случае может содержать производные по пространственной координате. В этом случае,  $w$ , входящее в уравнение (73) становится функцией координаты  $x$ .

В совершенно общем случае, решение  $\vec{q}$  уравнения (66) может быть записано в виде:

$$a \tag{1.100}$$

$$a \tag{1.101}$$

$$a \tag{1.102}$$

$$a \tag{1.103}$$

$$a \tag{1.104}$$

$$a \tag{1.105}$$

$$q = q_0 + \sum_u \xi_u(t) v_u(x) + \sum_s \xi_s(t) v_s(x) \tag{1.106}$$

Оказывается, что величина  $\xi_u$  в общем случае на порядок больше чем  $\xi_s$  (нестабильная компонента).

Это означает, что в процессе эволюции, со временем решение определено главным образом суммой по  $u$ ,  $u$  это решение будем называть остовом моды. Если имеется только один параметр порядка, т.е.  $u = 1$ , тогда можем записать

$$v_u = L^{-1/2} \sin kx \tag{1.107}$$

$$q = q_0 + \xi_u(t) L^{-1/2} \sin kx \tag{1.108}$$

У нас получается, что эволюция  $\xi_u$  от начальной флуктуации до конечных значений описывается уравнением (95).

В конечном счете возникло некоторое поле (с течением времени у нас в системе возникло некоторое устойчивое с течением времени колебание  $\Rightarrow$  образовалась структура)

**26.04.17 Лекция**

## 2 Максимум информации, сброс нумерации

### 2.1 Принцип максимума информации

Пусть заданы макроскопические величины рассматриваемой нами системы. Требуется разработать процедуру, которая позволила бы нам вывести распределение вероятности для макроскопических или даже микроскопических переменных.

Рассмотрим подбрасывание монеты. Возможны два исхода. Азбука морзе - точка и тире. Идет передача информации.

Последовательность символов является носителем информации. Цель: найти меру количества информации.

Пусть имеется  $R_0$  **возможных событий**. Предположим, что эти события равновероятны, например при подбрасывании монеты  $R_0 = 2$ , игральной кости  $R_0 = 6$

Чем больше  $R_0$ , тем больше неопределенность до получения информации, тем больше информации мы получим.

Введем схему: в начале не было информации, т.е.  $I_0 = 0$ .

Получили информацию (один из исходов имел место быть)  $\Rightarrow I_1 \neq 0$ ,  $R_1 = 1$  (произошел какой-то исход).

Хотим ввести **меру количества информации**, которая будет связана с числом возможных исходов.

Чтобы определить связь между мерой информации и числом исходов, потребуем аддитивности меры  $I$  для независимых событий. Таким образом, если мы имеем два независимых множества с  $R_{01}$  или  $R_{02}$ , то общее число исходов равно

$$R_0 = R_{01} R_{02} \quad (2.1)$$

и мы требуем, чтобы

$$I(R_{01} R_{02}) = I(R_{01}) + I(R_{02}) \quad (2.2)$$

Этому требованию можно удовлетворить, если выбрать

$$I = K \ln R_0 \quad (2.3)$$

Это - единственное решение уравнение (2).

Если дополнительного требования нет, то определить константу  $K$  нельзя.

Пусть существует двоичная система (0,1) (a,b) (есть 2 символа).

Построив все возможные «слова» (или последовательности) длины  $n$  мы получим  $R = 2^n$  реализаций. Мы хотим идентифицировать количество информации  $I$  с числом  $n$  в такой системе. Это означает, что мы требуем выполнения равенства

$$I = K \ln R \equiv K \ln 2 = n \quad (2.4)$$

которому соответствует выбор

$$k = \frac{n}{\ln 2} \Rightarrow k = \log_2 e$$

$$I = \log_2 R \quad (2.5)$$

Одна позиция в последовательности символов (знаков) двоичной системы называется битом, информация при таком определении измеряется прямо в битах. Например  $R = 8 = 2^3 \Rightarrow I = 3$  бита.

Пусть мы имеем вначале  $R_0$  равновероятных исходов и в конце  $R_1$  равновероятных исходов,

$$I = K \ln R_0 - K \ln R_1 \quad (2.6)$$

Пусть азбука морзе состоит из двух символов - точки и тире. Пусть слово длины  $G$  содержит  $N_1$  тире и  $N_2$  точек, где

$$N_1 + N_2 = N \Rightarrow \quad (2.7)$$

$$R = \frac{N!}{N_1!N_2!} \quad (2.8)$$

$$I = K \ln R = K [\ln N! - \ln N_1! - \ln N_2!] \quad (2.9)$$

Применим формулу Стирлинга:

$$\ln N! \approx N (\ln N - 1) \quad (2.10)$$

Тогда:

$$I \approx K [N (\ln N - 1) - N_1 (\ln N_1 - 1) - N_2 (\ln N_2 - 1)] \quad (2.11)$$

$$i \equiv \frac{I}{N} \approx -K \left[ \frac{N_1}{N} \ln \frac{N_1}{N} + \frac{N_2}{N} \ln \frac{N_2}{N} \right] \quad (2.12)$$

Введем величину

$$p_j = \frac{N_j}{N}, j = 1, 2. \quad (2.13)$$

Окончательная формулировка

$$i = \frac{I}{N} = -K (p_1 \ln p_1 + p_2 \ln p_2) \quad (2.14)$$

или

$$i = -K \sum_j p_j \ln p_j \quad (2.15)$$

Полученное нами выражение для информации можно рассматривать с двух совершенно различных точек зрения. С одной стороны, мы можем предположить, что вероятности  $p_i$  заданы своими численными значениями, и по формуле (3) получить соответствующее этим значениям число для  $I$ . Однако  $I$  можно рассмотреть как функцию от  $p_i$ , т.е. если значения вероятностей  $p_i$  изменяются, то значение  $I$  изменяется в соответствии с ними.

Предположим, что имеется газ, состоящий из атомов, которые свободно движутся в сосуде. Разделим сосуд на  $M$  ячеек одинаковой величины и обозначим через  $N_k$  число частиц в  $k$ -й ячейке. Общее число частиц равно  $N$ . Относительная частота обнаружения частиц в  $k$ -й ячейке равна отношению

$$\frac{N_k}{N} = p_k, k = 1, 2, \dots, M \quad (2.16)$$

Величину  $p_k$  можно рассматривать как функцию распределения частиц по ячейкам  $k$ .

Мы ожидаем, что частицы с равной вероятностью будут находиться в любой ячейке, т.е. что

$$p_k = \frac{1}{M} \quad (2.17)$$

Пусть есть ансамбль состояний из  $C$  сосудов и каждый сосуд содержит  $N$  частиц. В каждом сосуде частицы распределены по разным законам:

$$p_k^{(1)}, p_k^{(2)}, p_k^{(3)}, \dots, p_k^{(C)}$$

Получаем различное число реализаций, т.е. различную информацию.

Пусть в первом сосудае  $N_1 = N$ , тогда во всех остальных  $N_2 = N_3 = \dots = 0$ ,  $p_1^{(1)} = 1, p_2^{(1)} = \dots = 0$ , поэтому  $I^{(1)} = 0$ . С другой стороны, если  $N_1 = N_2 = N_3 = \dots = N/M$ , то  $p_1^{(2)} = 1/M, p_2^{(2)} = 1/M, \dots$ , и тогда  $I^{(2)} = -M \log_2 (1/M) = M \log_2 M$ . Если число сосудов велико, то  $I^{(2)}$  - очень большое число.

Из нашего ансамбля сосудов, какой бы мы сосуд не взяли, вероятность того, что попадетсся сосуд из первого ансамбля с первой функцией распределения, существенно меньше, чем вероятность со второй функцией распределения. С наибольшей вероятностью реализуется та функция распределения, которая соответствует наибольшему числу возможностей  $R$  и тем самым система несет наибольшую информацию. Следовательно, мы должны потребовать, чтобы условие

$$-\sum p_i \ln p_i = Extr \quad (2.18)$$

выполнялось при ограничении

$$\sum_{i=1}^M p_i = 1 \quad (2.19)$$

$$a \quad (2.20)$$

$$a \quad (2.21)$$

$$a \quad (2.22)$$

$$a \quad (2.23)$$

## 2.2 Приращение информации

### 26.04.17 Лекция

$$i = -k \sum p_i \ln p_i \quad (2.24)$$

$$i = \sum p_i f_i \quad (2.25)$$

где

$$f_i = -k \ln p_i, p_i \neq 0 \quad (2.26)$$

Среднее взвешанное значение,

Наводит на мысль о том, что  $f_j$ , задаваемое (26), можно интерпретировать как **информационное содержание** символа с индексом  $j$  и величиной  $p_j$ , интерпретируемой как вероятность (или относительная частота).

Провели множество измерений, обнаружили, что символ с индексом  $i$  появляется с относительной частотой  $p$ . Провели вторую серию измерений  $\Rightarrow$  тот же самый символ появляется с частотой  $p'$ . Чему равно изменение информации?

$$\Delta_i = k \ln p'_i - k \ln p_i \quad (2.27)$$

Чему равняется среднее изменение информации по всему множеству символов при переходе от  $p$  к  $p'$ .

$$K(p', p) = \sum_i p'_i \Delta_i = \sum_i p'_i \cdot k (\ln p'_i - \ln p_i) = k \sum_i p_i \ln \frac{p'_i}{p_i} \quad (2.28)$$

Где выполняются условия

$$\sum p_i = 1 \quad (2.29)$$

$$\sum p'_i = 1 \quad (2.30)$$

Изменения информации обладает важным свойством - происходит процесс увеличения информации. (т.е. информация растёт)

$$K(p', p) \geq 0 \quad (2.31)$$

Знак равенства имеет место в том и только в том случае, если  $p' \equiv p$ , т.е.  $p'_k = p_k$  при всех  $k$ .

## 2.3 Информационная энтропия и ограничения, накладываемые на систему

$$S = k_B \sum_j p_j \ln p_j \quad (2.32)$$

$k_B$ - постоянная Больцмана.

Будем считать, что индекс  $j$  - описывает индивидуальные особенности элементов системы (дискретный индекс). Задача: Найти способы, позволяющие определять  $p_i$ .

Рассмотрим идеальный одномерный газ. Мы можем измерить центр масс молекул.  $q$  - положение молекулы.  $p$  - частота, с которой встречается молекула.  $M$  - фиксированное,  $M = \frac{Q}{N}$ ,  $N$  - число частиц,  $Q$  - координаты центра масс.

$$\sum p_j q_j = M \quad (2.33)$$

Существует много разных наборов величин  $p_i$ , приводящих к одному и тому же центру масс, это означает что набор  $p$  может быть выбран произвольно.

Свобода выбора  $p$  приводит к появлению смещенных оценок. Оценка называется **несмещенной**, если при увеличении объема выборки оценка стремится к своему математическому ожиданию. Дисперсия является несмещенной оценкой.

На сколько смещены оценки мы точно сказать не можем. Можем предположить, что в результате измерений будут реализовываться такие значения  $p$ , для которых величина  $S$  достигает максимума.

Если есть несколько ограничений, как (33), мы должны также ограничения  $p_j$  которые удовлетворяют нашим:

Например, пусть переменная  $i$  характеризует различные скорости. Тогда в качестве ограничения мы можем принять условие постоянства полной кинетической энергии  $E_{\text{кин}}^{\text{полн}}$  частиц. Если кинетическую энергию частицы с массой  $m$  и скоростью  $v_i$  обозначить через  $f_i$  ( $f_i = (m/2)v_i^2$ ), то средняя кинетическая энергия, приходящаяся на одну частицу, определяется соотношением

$$\sum_j p_j f_j = E_{\text{кин}}$$

Если есть частица с массой  $m$  и скоростью  $v$  то кинетическую энергию обозначим  $f_j$

$$m_j \frac{v_j^2}{2} = f_j \quad (33, a)$$

В общем случае,

$$\sum_j p_j f_j^{(k)} = f_k \quad (2.34)$$

Необходимо добавить обычное ограничение нормировки распределения вероятности

$$\sum_j p_j = 1 \quad (2.35)$$

Рассмотрим на (32)

$S$  - неотрицательное; необходимо найти экстремум (32) при ограничении (34) и (35).

Будем использовать метод Лагранжа.

Нас интересует такая вариация:

$$\delta \left[ \frac{1}{k_B} S - (\lambda - 1) \sum_j p_j - \sum_k \lambda_k \cdot \sum_j p_j f_j^{(k)} \right] = 0 \quad (2.36)$$

(говорим об экстремуме суммы (32))

Нас интересуют производные по  $p$ ,

$$-\ln p_j - 1 - (\lambda - 1) - \sum_k \lambda_k f_j^{(k)} = 0 \quad (2.37)$$

Отсюда можно найти  $p_j$

$$p_j = \exp \left[ -\lambda - \sum_k \lambda_k f_j^{(k)} \right] \quad (2.38)$$

Подставляем (38) в (35), получаем:

$$e^{-\lambda} \sum_j \exp \left[ -\sum_k \lambda_k f_j^{(k)} \right] = 1 \quad (2.39)$$

$$\sum_j \exp \left[ -\sum_k \lambda_k f_j^{(k)} \right] = Z(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k) \quad (2.40)$$



$$e^\lambda = Z \Rightarrow \quad (2.41)$$

$$\lambda = \ln Z \quad (2.42)$$

Запишем чему равняется среднее значение  $f$  (посмотрим на выражение (34))

$$\langle f_j^{(k)} \rangle = \sum_j p_j f_j^{(k)} = e^{-\lambda} \sum_j \exp \left[ - \sum_k \lambda_k f_j^{(k)} \right] \cdot f_j^{(k)} \quad (2.43)$$

$$\langle f_j^{(k)} \rangle = \frac{1}{z} \left( - \frac{\partial}{\partial \lambda_k} \right) \cdot \sum_j \exp \left( - \sum_k \lambda_k f_j^{(k)} \right) \quad (2.44)$$

$$f_k = \langle f_j^{(k)} \rangle = - \frac{\partial \ln z}{\partial \lambda_k} \quad (2.45)$$

Величины, входящие в левую часть заданы, определяются соотношением (34).

$z$  - зависит от параметров Лагранжа  $\lambda$ , тогда последнее уравнение можно рассмотреть как уравнение, определяющее  $\lambda$ .

Теперь подставим все в формулу (32),

$$\frac{1}{k_b} S_{max} = \lambda \sum_j p_j - \sum_k \lambda_k \sum_j p_j f_j^{(k)} \quad (2.46)$$

Окончательно мы можем записать

$$\frac{1}{k_b} S_{max} = \lambda + \sum_k \lambda_k + f_k \quad (2.47)$$

Таким образом, максимум информационной энтропии может быть выражен через среднее значение  $f$  и множители Лагранжа.

Параметры Лагранжа мы можем интерпретировать по разному (в механике, как сила). Сила - некое вынуждающее возбуждение.

Итог: (32)(38) (42) (45) (47) позволяют найти распределение  $p$  и максимум энтропии.

Как изменится информация  $S_{max}$ , если мы в условии (34) изменяем функции  $f$ ?

$S$  зависит от  $f$ , но также от параметров  $\lambda$ , которые зависят от  $f$ . Вычислим изменение параметров  $\lambda$ .

$$\delta \lambda = \delta \ln Z = \frac{1}{Z} \delta Z \Rightarrow \delta \lambda = e^{-\lambda} \sum_j \sum_k \left[ -\delta \lambda_k f_j^{(k)} - \lambda_k \delta f_j^{(k)} \right] \cdot \exp \left[ - \sum_l \lambda_l f_j^{(l)} \right]$$

Используя (38)

$$\delta \lambda = - \sum_k \left[ \delta \lambda_k \sum_j p_j f_j^{(k)} + \lambda_k \sum_j p_j \delta f_j^{(k)} \right]$$

Правую часть последней формулы мы можем записать, как

$$- \sum_k \delta \lambda_k \langle f_j^{(k)} \rangle + \lambda_k \langle \delta f_j^{(k)} \rangle \quad (2.48)$$

Подставляя выражение (48) в формулу (47) для  $\delta S_{max}$ , мы замечаем, что вариации величин  $\lambda_k$  выпадают и остается соотношение

$$\delta S_{max} = k_B \sum_k \lambda_k \left[ \delta \langle f_j^{(k)} \rangle - \langle \delta f_j^{(k)} \rangle \right] \quad (2.49)$$

Запишем его в виде

$$\delta S_{max} = k_B \sum_k \lambda_k \delta Q_k \quad (2.50)$$

Где «обобщенное тепло» определяется как

$$\delta Q_k = \delta \langle f_j^{(k)} \rangle - \langle \delta f_j^{(k)} \rangle \quad (2.51)$$

Угловые скобки - усреднение.  $\delta Q$  - обобщенное тепло.

### 03.05.17 Лекция

Была (45), где указывали среднее значение  $F_{kl}$ . По аналогии с этой формулой,

$$f_l^{(k)} : \langle f_l^{(k)2} \rangle - \langle f_l^{(k)} \rangle^2 = \frac{\partial^2 \ln Z}{\partial \lambda_k^2} \quad (2.52)$$

Во многих случаях,  $f_i^{(k)}$  может зависеть от параметра или от набора параметров  $\alpha$ . Как изменится среднее значение при изменении  $\alpha$ ?

Среднее значение давалось формулой (34):  $\sum p_k f_l^{(k)} = f_k$

Чтобы ответить на вопрос, необходимо вычислить производную по  $\alpha$  и осреднить.

$$\left\langle \frac{\partial f_{i,\alpha}^{(k)}}{\partial \alpha} \right\rangle = \sum_i p_k \frac{\partial f_{i,\alpha}^{(k)}}{\partial \alpha} \quad (2.53)$$

Подставляя вместо  $p$  (38) и используя (41), окончательно получаем.

$$\frac{1}{Z} \sum_i \frac{\partial f_{i,\alpha}^{(k)}}{\partial \alpha} \exp \left[ - \sum_j \lambda_j f_{i,\alpha}^{(j)} \right] \quad (2.54)$$

$$= - \frac{1}{z} \frac{1}{\lambda_k} \frac{\partial Z}{\partial \alpha} \quad (2.55)$$

$$- \frac{1}{\lambda_k} \frac{\partial \ln Z}{\partial \alpha} = \left\langle \frac{\partial f_{i,\alpha}^{(k)}}{\partial \alpha} \right\rangle \quad (2.56)$$

$$a \quad (2.57)$$

$$a \quad (2.58)$$

## 2.4 Непрерывные переменные при описании сложных систем

Когда мы рассматриваем различные приложения, мы предполагаем, что переменные непрерывны.

Если  $\xi$  - дискретная переменная, то информация конечна. Непрерывная - бесконечное количество информации. Множество непрерывных переменных образует континуум, он содержит бесконечное множество точек. Как можно ввести понятие информации в случае непрерывной переменной?

Единственный способ решить эту проблему - оттолкнуться от плотности вероятности, т.к. если величина дискретна, то мы можем посчитать - сколько раз она приняла то или иное значение, т.е. появляется понятие частоты. Потом можно ввести относительную частоту.

В силу того, что величина непрерывна, мы не можем ввести относительную частоту, т.к. вероятность принятия конкретного значения равна нулю.

Плотность вероятности - вероятность того, что значение величины попадает в некоторый интервал.

Если есть некая переменная  $\xi$ , то вероятность попадания  $\xi$  в интервал

$$Prob(\chi < \xi < \chi + \Delta\xi) = P(\xi) \Delta\xi \quad (2.59)$$

Измерения всегда с некоторой погрешностью. Они проводятся с некоторой точностью.

Попытаемся ввести погрешность измерения в распределение вероятности.

Допустим, мы делаем некоторое  $j$ -е измерение величины  $\xi$ .

$$P_\epsilon(j) = \int_{\xi_j - \epsilon/2}^{\xi_j + \epsilon/2} P(\xi) d\xi \quad (2.60)$$

Ошибка  $\epsilon$ , величина  $\xi$ .

Предположим,  $P$  - величина непрерывная, а  $\epsilon$  - малая.

$$P_\epsilon(j) = P(\xi) \epsilon \quad (2.61)$$

Определим информацию при заданной погрешности.

$$I_\epsilon = - \sum_j P_\epsilon(j) \ln P_\epsilon(j) \quad (2.62)$$

Подставляем (61) в (62)

$$I_\epsilon = - \sum_j \epsilon P(\xi_j) \ln P(\xi_j) - \sum_j \epsilon P(\xi_j) \ln \epsilon \quad (2.63)$$

Вторая сумма равна 1.

$$I_\epsilon = - \int d\xi P(\xi) \ln P(\xi) \quad (2.64)$$

Уменьшаемое можно отбросить, т.к. это константа.

Если есть некоторая непрерывная переменная, то количество информации может быть записано в таком виде.

Аналог меры шенноновской информации.

Применяя данный прием, мы возвращаем все старые формулы. Берется интеграл по всем возможным состояниям.

## 2.5 Не вошел в вопросы: физический пример.

Система, состоящая из большого числа частиц. Индекс  $i$  соответствует определенной частице.  $\alpha$  - объем, в котором находится частица.  $i$  - относится к скорости частицы.  $v$  - вероятность того, что частица характеризуется скоростью  $i$ .  $f_{i,\alpha}^{(k)} = E_i(v)$ ,  $k = 1$  - энергия.

Будем считать, что  $f_1$ - усреднение  $f_k$  (это была формула (34)). Мы полагаем  $k = 1$ ,  $f_1 \longleftrightarrow U = \langle E_1 \rangle$  - некая средняя энергия.  $\alpha \longleftrightarrow V$ ,  $\lambda_1 = \beta$

$$p_i = \exp[-\lambda - \beta E_i(v)]$$

$$\frac{1}{k_B} S_{max} = \ln z + \beta U$$

$U - \frac{1}{k_B} S_{max} = \frac{1}{\beta} \ln z$  - результат формулы (47). Можем интерпретировать  $U$  как внутреннюю энергию.  $\frac{1}{\beta}$  - абсолютная температура, умноженная на постоянную Больцмана.  $S_{max}$ -энтропия.

Получаем следующее соотношение:  $U - TS = \mathcal{F}$ .  $\mathcal{F}$  - свободная энергия. Свободная энергия может быть записана как  $\mathcal{F} = -k_B T \ln z$ ,  $S = S_{max}$ .

$Z = \sum_i \exp[-\beta E_i]$  - обычная функция распределения.

Получили известную физическую закономерность, не применяя физических соображений.

**10.05.17 Лекция**

## 3 Фракталы

### 3.1 Понятие - фрактал.

Фрактал. Мандельброт. Fractalus - изрезанный.

Общепринятого определения слова фрактал не существует.

**Фракталом** называется структура, состоящая из частей, которые в каком-то смысле, подобны целому. Это - **характерная черта фрактала**.

Попробуем построить фрактал.

Мысленно нарисуем равносторонний треугольник. Из каждой стороны треугольника попытаемся удалить треть и заменим удаленную треть двумя отрезками такой же длины. Получилась звездочка.

Повторяем процедуру еще раз. **Снежинка Коха**.

**1-е свойство**, которое мы можем увидеть, заключается в том, что даже на самом малом масштабе мы можем продолжать эту процедуру бесконечно долго. Фрактальная кривая не является прямой даже на самых малых масштабах, т.е. является геометрически нерегулярной. Характерна извилистость, изломанность, изрезанность. К ней **не существует касательной**.

Представим мысленный эксперимент. Имеется график дифференцируемой функции (гладких кривых), он может быть нарисован сколь угодно точно. Мы понимаем, что этот график при достаточном увеличении может быть заменен отрезком прямой. Классический объект упрощается при увеличении изображения. В малом, является линейным объектом.

Фрактал не является линейным объектом. **Фракталами являются** геометрические объекты (например линии, поверхности, пространственные тела - все многообразие геометрических объектов), имеющие изрезанную форму и обладающую свойством самоподобия.

В этом смысле, снежинка Коха - строго самоподобная. Малые фрагменты полностью повторяют крупные фрагменты. Это свойство характерно только для **регулярных фракталов**. Те, которые не строятся как снежинка Коха, являются нерегулярными фракталами (если бы мы вырезали отрезки разной длины, то мы бы получили нерегулярный фрактал). Если при построении фрактала включить некоторую случайность, то получим **случайный**

**фрактал.** Основное отличие: свойство самоподобия справедливо только после усреднения по всем статистически независимым реализациям объекта.

Снежинка Коха показывала - сколь сложными могут быть функции и кривые. Со временем, в природе стали находить объекты, которые обладали свойством самоподобия. Облака, например.

**В природе**, продолжать процесс до **бесконечности нельзя**. Фрактальное построение до бесконечности в природе невозможно. За этим пределом, понятие самоподобия теряет смысл.

В природе, есть некоторый минимальный масштаб длины.  $l_{min}$  - **минимальный масштаб**. На нем теряется смысл. В природе также есть **максимальный масштаб**  $l_{max}$ , на нем идея самоподобия также теряет смысл.  $l_{min} \ll l \ll l_{max}$ .

Примером фрактала является Броуновское движение.

Частица двигалась не по прямой на этих промежутках, что было в середине промежутка - неизвестно. Если движение Броуновской частицы подвергнуть 10х-100х увеличению, то картинка станет самоподобной. Это - статистический фрактал. Если осреднить траекторию, то увидим самоподобие.

### 3.2 Длина береговой линии. Фрактальная размерность береговой линии.

Береговая линия - граница между сушей и морем. По сути - то же самое. Фиксируем траекторию в моменты времени, что и Броуновское движение. Измерим ее длину.

Берем циркуль, на береговой линии наносим точки. Количество шагов циркуля позволяло определить длину береговой линии. Например - шаг циркуля 10 км. Потом 5 км. И т.д. И т.д.

Раствор циркуля  $\delta$ . Норвежский физик Федер проводил подобные измерения, примерно 100 лет назад. Оказалось, что гулять с циркулем не очень удобно. Очертаная береговой линии аккуратно нарисованы. Тогда число шагов циркуля должно быть конечным.

Если раствор циркуля  $\delta$ , то  $L(\delta) = N(\delta)\delta$ ,  $\delta$  - раствор циркуля,  $N(\delta)$  - число шагов, сделанных с этим раствором. При уменьшении  $\delta$ ,  $\lim_{\delta \rightarrow 0} L(\delta) = L_0$ . В какой-то момент Федер перестал измерять циркулем. Он просто нанес сетку на карту и стал брать квадратики разной длины. Формула аналогичная. Сколько квадратиков лежит на линии умножить на шаг квадратика. Сейчас - это распространенный способ. Как бы там ни было, выяснилось, что это не так, предел не работает.

Федерсон - статья, посвященная измерению длины береговой линии. Если линия сильно изрезанная, то длина аппроксимирующей береговой линии растет неограниченно, т.е.  $L_0 \rightarrow \infty$ .

Однако оказалось, что постоянной остается величина  $a = N(\delta)\delta^d = const \neq f(\delta)$  - число растворов циркуля, где  $d = const$ , не является функцией от  $\delta$ .

Для побережья Англии, эта величина оказалась равной  $d = 1,24$  - это имперически установленный факт. Величина длины побережья меняется таким образом, что  $N(\delta) \sim \frac{1}{\delta^d}$ .

$$L(\delta) = a \cdot \delta^{1-d} \quad (3.1)$$

(1).

Получаем, что с помощью жесткого масштаба

$$N(\delta) = \frac{L(\delta)}{\delta} \quad (3.2)$$

для другой береговой линии будут другие значения  $d, a$ . Константа  $d$  - **фрактальная размерность** береговой линии.

Если гладкая линия (эллипс, окружность), можно ожидать, что  $d = a = 1$ . Такое определение приводит нас к классическому понятию размерности. Число шагов пропорционально единице на масштаб. Для гладкой линии  $d = 1$ .

Если рассмотреть два участка береговой линии, для первого  $L_1$ , для второго  $L_2$ .

$L_1(\delta) = a_1 \delta^{1-d}; L_2(\delta) = a_2 \delta^{1-d}, \frac{L_1(\delta)}{L_2(\delta)} = \frac{a_1}{a_2}$  - можно сравнить длины различных участков береговой линии.

Найдем соотношение, которое позволит вычислить фрактальную размерность.

Логарифмируем (1)

$$\log L(\delta) = \log a + (1 - d) \log \delta \quad (3.3)$$

Эта формула устанавливает линейную зависимость между логарифмом  $L$  и логарифмом  $\delta$ . Угловым коэффициентом этой прямой (в логарифмических терминах) определяется  $1 - d$ .

На одной оси откладываем  $\log \delta$ , на другой -  $\log L(\delta)$ . Получится линейная зависимость. ??? Картинка.

Было проведено исследование с различными сетками. Картинка взята оттуда. Для норвежского побережья -  $d=1,52$ . Размерность гладкой поверхности - 2. Размерность объекта на линии - 1. Получилось почти по середине.

Побережье Африки - порядка 1. Для окружности - ровно 1.

В литературе приводится хороший пример. Испанский и Португальский справочники. Португалия граничит только с Испанией. Если посмотреть в справочниках, то выясняется, что длина границы различается на 20%. Это связано с фрактальностью границы.

### 3.3 Фрактальные размерности множеств

#### 3.3.1 Топологическая размерность множества.

При уменьшении масштаба меняется длина. Но в школе всех учили, что это не так. Оно сильно меняет наше представление о геометрии (когда была нелинейная геометрия, геометрия Лобачевского, потом Римана). Геометрия стала совсем другой (параллельные прямые могут пересечься, это не вызывает сомнения).

Расстояние между двумя точками зависит от масштаба. Процедура измерения длины не столь проста. Пуанкаре - почему пространство имеет три измерения. Эйнштейн сказал, что пространство имеет 4 измерения. На самом деле, это придумал Минковский. 4-е измерение - время. Время и пространственные координаты входят с разными знаками. Формула расстояния определяется с разными знаками. Если опираться на эту статью/рассуждение, то можно сказать, что все объекты, которые мы рассматриваем, являются объектами некоторого евклидова пространства - состоят из множества точек некоторого евклидова пространства. Для любого такого множества может быть введена его топологическая размерность. Топологическая размерность строится по индукции. Размерность понимаем по нашим ощущениям. Мы чувствуем 3 пространства. Если абстрагироваться, то это набор чисел, определяющих положение точки. Время меняется, поэтому если нарисовать фазовое пространство, то точка каждого из нас перемещается. С течением времени, наши координаты меняются. Число чисел, с помощью которого мы можем выразить положение объекта. Координаты твердого тела определяются 6 параметрами - 3 для центра масс, 3 для углов Эйлера. Мы не в состоянии его представить, но мы его понимаем.

Но сейчас мы говорим о топологической размерности. Для квадратной матрицы, например, размерность равна  $N^2$ . Размерность можно определить не через число чисел в матрице, а через число базисных векторов.

Число базисных векторов счетно, но бесконечно.

Мы смотрим на размерность под определенным углом. Сколько нужно параметров, чтобы описать положение.

Топологическая размерность - совсем другая. Она строится по индукции.

Пустому множеству - топологическая размерность  $d_T = -1$ .

Обычно, размерность точки 0, линии 1, квадрата 2, куба 3.

Размерность любого непустого множества отличается от -1.

Если некоторое множество можно разделить на несвязанные друг с другом части с помощью множества размерности  $d_T$  то топологическая размерность множества будет равняться  $d_T + 1$ .

Например, точка имеет размерность 0. Если есть две точки, то они разделены между собой пустым множеством.  $-1 + 1 = 0$ . Под этот 0 индукция и подстраивалась. Прямая имеет размерность 1. Два любых непересекающихся отрезка с несовпадающими концами можно разделить точкой. Размерность точки 0.

Счетное множество точек. имеет размерность 0.3.

Размерность сферы - 2. Шара - 3. Топологическая размерность должна быть целым числом. По индукции, она увеличивается на 1.

Разрезанная поверхность сферы может быть отображена в плоскость, плоскость двумерна. Но заполненный шар не отобразится.

Когда задаем точку на линии - 1 число, на поверхности - 2 числа, на сфере - 3 числа. Точка в пространстве - 3 числа.

Основная идея Мондельброта - он обратил внимание, что размерность объекта зависит от наблюдателя (от связи наблюдателя с внешним миром).

Появляется мост в квантовую механику. Измерения не зависят от объекта измерения. От того, что линейкой измеряем карандаш, с ним ничего не случится. В квантовой механике, мы поменяем объект, если начнем измерять его. Когда я измерил длину карандаша, то она была одной. Сейчас она стала другой. Т.к. своим измерением мы поменяли свойство карандаша. В результате измерения скорости элементарной частицы. она изменит скорость.

Измерение влияет на измеряемый объект. Размерность объекта зависит от наблюдателя.

Рассмотрим клубок ниток. Если расстояние до клубка достаточно велико, то мы считаем, что это точка. Если я вижу точку, то размерность равна нулю. Если будем подходить к клубку, то мы увидим, что это диск, значит его размерность равна 2. Если мы подойдем еще ближе, то мы увидим, что он состоит из ниток. Размерность ниток равна 1. От того, что она сложно скручена, ее размерность не меняется. Клубок сделан из ниток, если его распрямить то получим линию, у нее размерность 1. Если начать многократно увеличить линию, то мы увидим, что она состоит из атомов, тогда получается, что линия состоит из нулей. Размерность зависит от многих факторов.

#### 17.05.17 лекция

Когда нужно определить реальную размерность объекта, то самый простой способ - прологарифмировать и построить уравнение линейной регрессии. Два неизвестных параметра, один -  $\log(a)$ , второй -  $d$ . Тем самым мы сможем найти фрактальную размерность.

Если размерность зависит от внешних условий, то ее можно определять по разному.

Например, размер геометрических объектов. 10 миллиметров дают сантиметр. 100 квадратных миллиметров дают квадратный сантиметр. 1000 кубов ... Размерность сидит в степени

десятки

Геометрический объект характеризуется минимальным числом клеток, необходимых для его покрытия. Число  $d$ , которое мы называем размерностью, появляется как показатель степени, в соотношении, связывающем число клеток с шагом.

$N = \frac{1}{\delta^d}$  (где  $\delta$  - шаг клетки, а  $d$  - топологическая размерность).

В современной математике множество определений размерности. Во многом это зависит от того, для чего мы ее вводим. Например, на руке  $3+7 = 10$  пальцев, однако на руках не 3 и 7 пальцев. Однако, когда берем перчатки, то  $5+5$ .

Основной чертой фракталов является изрезанность, извилистость, изогнутость геометрических объектов. При анализе топологической размерности фрактального объекта, его фрактальные свойства (изрезанность) теряются.

### 3.3.2 Размерность Хаусдорфа-Безикевича.

Мондельброт предложил использовать характеристику, предложенную Хаусдорфом (его идеи продолжил Безикевича).

Пусть исследуемый объект лежит в Евклидовом пространстве с размерностью  $d$ . Будем покрывать это множество  $d$ -мерными кубиками, причем величина ребра не превышает некоторое значение  $\delta_i > 0$ ,  $\delta_i < \delta$ .

Введем сумму

$$l_d(\delta_i) = \sum \delta_i^d \quad (3.4)$$

и определим нижнюю грань суммы по всем элементам покрытия.

Введем нижнюю грань

$$L_d(\delta) = \inf \sum \delta_i^d \quad (3.5)$$

Устремим  $\delta$  к нулю. Возможны два варианта.

$$\begin{cases} L_d(\delta) \rightarrow 0_{\delta \rightarrow 0} & d >> 1 \\ L_d(\delta) \rightarrow \infty_{\delta \rightarrow 0} & d << 1 \end{cases} \quad (3.6)$$

Отсюда следует, что может существовать такое критическое значение  $d_x$ , что  $\lim_{\delta \rightarrow 0} L_d(\delta) = \begin{cases} 0 & d > d_x \\ \infty & d < d_x \end{cases}$ .

Число  $d_x$  называется размерностью Хаусдорфа-Безикевича.

Для отрезка,  $d_x = 1$ , для квадрата  $d_x = 2$ , для куба  $d_x = 3$ .

Возьмем квадрат на плоскости со стороной  $a$  в двухмерном пространстве и покроем кубиками со стороной  $\delta$ .  $N = \frac{a^2}{\delta^2}$  - сколько квадратиков, чтобы покрыть.

Применим формулу (4) к нашему квадрату.

$L_d(\delta) = \sum \delta_i^d = N(\delta) \delta^d \approx a^2 \delta^{d-2}$ . Сумма определяется числом квадратов, размером и размерностью. Если  $d < 2$ , то сумма будет неограниченно расти, а если  $d > 2$ , то эта сумма будет стремиться к нулю.  $d = 2$  - тогда выполняется формула (6). Размерность Безикевича для квадрата, совпадает с топологической размерностью. Это - не доказательство, это иллюстрация определения. Доказательства значительно более сложные. К сожалению, компьютер до сих пор не может посчитать такую размерность. Минимизировать сумму по всем возможным разбиениям. Поэтому измеряется не размерность, а емкость. Емкость обозначается через  $d_c$ . Не путать с емкостью конденсатора.



### 3.3.3 Емкость множества.

Пусть  $N(\delta)$  - минимальное число кубиков со стороной  $\delta$ , необходимое для покрытия объекта. Если это число увеличивается с убыванием  $\delta$  как  $N(\delta) \sim \delta^{-d_c}$ , то это и есть **емкость множества**.

Заводим структуру, состоящую из элементов. Если каждая точка множества принадлежит хотя бы одной из структур, то это называется покрытием. В общем случае, элементы покрытия могут пересекаться. Наша площадь  $L_d(\delta) = N(\delta)\delta^d$ ,  $L_d(\delta) > 0$

$$N(\delta) \simeq \frac{1}{\delta^d} \quad (3.7)$$

где

$$N(\delta) \quad (3.8)$$

играет роль  $a$  в формуле  $L(\delta) = a\delta^{1-d}$ . Если прологорифмировать (7).

$$\log N(\delta) \simeq \log L - d \log \delta \quad (3.9)$$

$$d = -\frac{\log N(\delta)}{\log \delta} + \frac{\log L}{\log \delta}$$

Тогда **емкостью множества** называется следующий предел (если существует).

$$d_c = -\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log N(\delta)}{\log \delta} \quad (3.10)$$

Поскольку при определении по Хаусдорфу используются различные определения покрытия, а мы использовали кубики одного и того же размера, то выполняется соотношение

$$d_x \leq d_c \quad (3.11)$$

Допустим, есть множество из  $n$  изолированных точек. Его можно покрыть  $n$  кубиками минимального размера. Число кубиков равно  $n$  и не зависит от  $\delta$  - размера грани. Тогда, из (9) получаем  $d_c = 0$  - эта величина совпадает с топологической размерностью точек. Конечная сумма тел с массой, равной нулю, равна нулю. Масса и мера - одно и то же в некотором смысле. Для конечного числа точек понятие емкости дает правильный результат.

Рассмотрим прямую линию с длиной  $l$  минимальное число кубиков равно  $N(\delta) = l/\delta$ . Если бы число было не минимальным, то кубики могли бы пересекаться. Формула (9) дает единицу.

Аналогично будет получаться с квадратом и кубом. Мы увидели, что понятие емкости не противоречит естественным понятиям (которые мы ощущаем органами чувств).

Важно, что для физических применений, определение (9) не подходит. В физике, реальными объектами, мы не можем  $\delta \rightarrow 0$ , мы перейдем к атомам. Емкость множества - математическое понятие, в физическом смысле оно не работает. Типичный физический подход - формула (8). Логарифм числа кубиков и логарифм шага кубика. В физике, отказываемся от (9) и заменяем на (8). Угол наклона этой прямой дает емкость  $d_c$ . Мы пришли к тому, что коэффициент  $d$  в (8) дает емкость.

Для реальных объектов, определять фрактальную размерность довольно сложно. Ситуация меняется в корне, когда мы говорим о регулярных фракталах. В природе их нет, но сами мы их построить можем. Мы приходим к упрощению формулы (9).

Число кубиков  $N(\delta) \sim \frac{1}{\delta^d}$ . Если  $\delta'$  - длина кубика, то  $N(\delta') \sim \frac{1}{\delta'^d}$ . Можем написать

$$\frac{N(\delta)}{N(\delta')} = \left(\frac{\delta'}{\delta}\right)^d \quad (3.12)$$

Отсюда мы можем определить - чему равна емкость. Мы можем ввести емкость как

$$d_c = -\frac{\ln \frac{N(\delta)}{N(\delta')}}{\ln \left(\frac{\delta'}{\delta}\right)} \quad (3.13)$$

На самом деле, иногда пишут уравнение регрессии, а иногда используют формулу (12). Берем маленькие размеры ячейки и вычисляем размеры.

Если фигура обладает идеальным самоподобием, то можно рассуждать следующим образом: пусть на  $N$ -ом шаге построения фрактала, у нас есть параметр покрытия - число кубиков, и длина ребра. А на  $N+1$ -м шаге тоже есть число кубиков и длина ребра, т.е.  $N(\delta)$ ,  $\delta$  и  $N(\delta')$ ,  $m(\delta')$ . Тогда  $\frac{N(\delta)}{N(\delta')} = \frac{1}{p}$   $p$  - показывает, каким числом элементов на шаге  $N(\delta')$  мы заменяем число  $\delta$ , т.е.  $\frac{\delta}{\delta'} = q > 1$ .  $\Gamma = \frac{1}{q}$ .

$$d_c = \frac{\ln p}{\ln q} = \frac{\ln P}{\ln 1/\Gamma} = -\frac{\ln p}{\ln \Gamma} \quad (3.14)$$

Формула для определения емкости фрактала. Для регулярных самоподобных фракталов, емкость и размерность Хаусдорфа-Безикевича совпадают. Для фракталов, которые обычно встречаются в нелинейной динамике, размерность Хаусдорфа-Безикевича и емкость совпадают. Другие способы определения размерности также совпадают (это происходит в случае регулярных систем или задач нелинейной динамики). Обычно говорят просто о фрактальной размерности (общий термин). Учитывая, что для регулярных или самоподобных фракталов, размерности совпадают, следующая тема - регулярный самоподобный фрактал.

#### 24.05.17 лекция

### 3.4 Регулярный самоподобный фрактал

#### 3.4.1 Множество Кантора. Обобщенное множество Кантора.

Множество Кантера (классическая пыль Кантера)

Берем единичный интервал. Делим на три равные части. Центральную удаляем. Получаем две части длиной  $1/3$ . После этого, процедуру повторяем еще раз для каждого из интервалов. Длина полученных частей -  $1/9$ . И т.д. до тех пор, пока не надоест.

Продолжаем до бесконечности, в результате получаем предельное множество точек, называемое канторовой пылью или множеством Кантера.

Чему равна суммарная длина удаенных интервалов в пределе. По картинке понятно, что 1.

$$\frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{2^2}{3^3} + \frac{2^3}{3^4} + \dots + \frac{2^{n-1}}{3^n} = \frac{1}{3} \left(1 + \frac{2}{3} + \frac{2^2}{3^2} + \dots + \frac{2^{n-1}}{3^{n-1}}\right) = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{1-\frac{2}{3}}\right) = 1$$

Из единицы удалили единицу. Остается что-то. Можно предположить, что в пределе остаются точки. Точки не имеют длины. В общем виде - точки с длиной 0. Однако, если рассмотреть оставшуюся канторову пыль и сравним с единичным замкнутым отрезком, то мы обнаружим, что мощности этих множеств совпадают, т.е. канторова пыль, которая остается после удаления, и отрезок  $(0,1)$  (длина которого равна 1) - их мощности совпадают. Между точками

канторовой пыли и точками отрезка можно провести взаимно-однозначное соответствие, т.е. они эквивалентны.

Одно множество содержит  $n$  точек, другое - также  $n$  точек. В этом случае эквивалентность тривиальна.

В данном случае - нетривиальная ситуация, т.к. отрезок содержит бесконечное множество точек. Но мы можем построить взаимно-однозначное соответствие, а это доказывает, что они имеют одинаковую мощность.

Множества, содержащие бесконечное множество точек, можно различать по мощности. Даже если они содержат бесконечное число точек, одно из них может быть мощнее.

Пример:  $(0,1)$  и  $(0,\infty)$  имеют одинаковую мощность, т.к. можем использовать преобразование  $y = \frac{1}{x}$ . Это доказывается в теории множеств.

Множество рациональных чисел всюду плотно во множестве иррациональных чисел (т.е. во множестве рациональных чисел всегда можно между ними найти иррациональные числа).

Вывод: на единичном отрезке содержится столько же точек, сколько на отрезке, имеющем нулевую длину (не занимающем места).

Можно ввести аналогичным образом канторово отображение единичного квадрата. Это отображение строится следующим образом: точка квадрата с прямоугольными координатами  $x = 0.123, y = 0.456$ . Можем эту точку отобразить на единичный отрезок. Эта точка отображения на единичный отрезок может быть отображены при помощи правила  $t = 0,123456$ .

Вычислим фрактальную размерность канторовой пыли (емкость канторова множества)

$$d_c = - \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log N(\delta)}{\log \delta}, \quad 2^n, \frac{1}{3^n}, \text{ тогда}$$

$$d_c = - \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log 2^n}{\log \left(\frac{1}{3^n}\right)} = \frac{\log 2}{\log 3} \simeq 0,6309 \quad (3.15)$$

Использовали понятие емкости, емкость оказалась ненулевая.

Топологическая размерность канторовой пыли равна  $d_T = 0$ .

Сделаем то же самое с квадратом.

Разделим квадрат на 4 части. Каждую часть делим на 4 части. Оставляем в каждом квадрате только элементы справа сверху и снизу слева, во внутренних квадратах только левый верхний и нижний правый. Разбиваем выделенные квадраты еще на 4 квадрата. штрихуем зеркально полученные внутренние квадраты и продолжаем на бесконечности. Попытаемся найти размерность этого множества. Это - обобщенное множество кантера.

Допустим, есть число  $r : 0 < r < 1/2$ .

Если удалить из единицы отрезок длиной  $1 - 2r$  с центром в точке  $1/2$  то получаем замкнутое множество, состоящее из двух отрезков длиной  $r$ . Длина каждого отрезка -  $r$ .

К этому отрезку применяем процедуру еще раз и выбрасываем средний интервал. Он будет иметь длину  $r(1 - 2r)$ . И повторять эту процедуру до бесконечности.

Получим набор из  $N = 2^n$  отрезков, шаг будет равняться  $\delta = r^n$ .  $d_c = - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log 2^n}{\log r^n} = \frac{\log 2}{\log r}$ .

Мощность множеств будет разная: от  $d_c \in (0,1)$  в зависимости от  $r$ . Фрактал с произвольной размерностью - от 0 до 1. Размерность будет определяться  $r$ .

Любое несвязанное фрактальное множество точек называют **множеством кантера**.

Вернемся к квадратикам. На каждом шаге квадрат заменяется четырьмя меньшими. Полученное множество также будет обладать свойством самоподобия.

$4^n$ - число квадратиков.

$\delta = \frac{1}{4^n}$  длина.

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log 4^n}{\log 4^n} = 1$  - ничего нет, а мощность равна 1. Если бы это было множество, состоящее из конечного числа элементов, то мы бы сказали, что точка. Понятно, что это фрактал. Требование нецелой размерности не является универсальным. В данном случае мы получили, что размерность множества равна 1, хотя понятно, что это множество нецелое, ведь оно располагается на плоскости. Множества, обладающие фрактальной размерностью имеют нецелые размерности.

Расчитаем фрактальную размерность снежинки Коха.

Пусть длина исходного треугольника равна 1. В качестве “кубиков”, которыми будем покрывать наше “тело” будем использовать отрезки прямой. На 0м шаге - сколькими кубиками мы можем покрыть равносторонний треугольник. 3 отрезка - каждый на ребро.  $\delta = 1$ ,  $N(\delta) = 3$ . Еще один шаг,  $N(\delta) = 12$ ,  $\delta = \frac{1}{3}$ .

Посмотрим, чему равна  $d_c = -\frac{\log(\frac{3}{12})}{\log(\frac{1}{3})} = \frac{\log 4}{\log 3} \simeq 1,2618$

Получилось, что это значение больше 1. Емкость этого множества оказалась больше 1. 1 - топологическая размерность, у нас получилось больше. Линия расположена на плоскости.  $n, n+m$ ,

Один элемент заменяется четырьмя. Длина увеличивается в  $4/3$  раза.

$L = 3 \cdot (\frac{4}{3})^n$ . Подобные кривые при любом конечном  $N$ , Мандельброт назвал **предфракталами**.

**31.05.17 Лекция**

### 3.4.2 Снежинка Коха

Снежинка Коха обладает следующим свойством - в идеале, она имеет линию бесконечной длины. Снежинка Коха - линия бесконечной длины, которая ограничивает конечную площадь.

Можем рассмотреть какой-нибудь остров с береговой линией. Можно рассматривать снежинку как некоторый остров, тогда береговая линия нашего острова бесконечно длинная.

Запишем выражение для длины береговой линии:  $L = 3 \cdot (\frac{4}{3})^n = a\delta^{1-d}$ .  $\delta$  - масштаб измерения длины береговой линии.  $\delta = (\frac{1}{3})^n$ . Допустим,  $a = 3$ . Если  $a = 3$ , то чему равна  $d$ .  $\delta = \frac{\ln 4}{\ln 3}$ .

Реально строим береговую линию с помощью карандаша и бумаги. Допустим, изначально треугольник имеет сторону 1 метр. На этом листе бумаги рисуем длину треугольника 1 метр карандашом, ширина карандашной линии -  $10^{-4}$  м. С математической точки зрения - можем рисовать бесконечно долго. С физической - есть ширина пера. Как только дойдем до стороны, длиной меньше ширины пера, то все. Сколько мы будем делить снежинку? Получается  $4/\ln(3) = 8$ ,  $\delta = (\frac{1}{3})^8 = 10^{-4}$ .

$n = \frac{4}{\lg 3} = 8$ . Длина береговой линии такого острова будет равна  $L = 3 \cdot (\frac{4}{3})^8 \simeq 30$ . Длина линии будет равна 30 м.

Реальная самоподобная фигура имеет конечную огибающую, математическая - бесконечную огибающую.

### 3.4.3 Салфетка Серпинского



$$d_c = -\frac{\ln p}{\ln \Gamma}, p = 3, \Gamma = \frac{1}{2} \Rightarrow d_c = -\frac{\ln 3}{\ln 2} = -1.5849 < 2.$$

Посчитаем суммарную площадь исключенных частей.

$$\frac{1}{4} + 3 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 + 3^2 \left(\frac{1}{4}\right)^3 + \dots + 3^{n-1} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^n = \frac{1}{4} \left[ 1 + 3 \cdot \frac{1}{4} + 3^2 \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \dots + 3^{n-1} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} \right] = \frac{1}{4} \left[ \frac{1}{1-3/4} \right] =$$

1

Площадь салфетки Серпинского равна нулю. Это означает, что  $\forall \epsilon > 0$  есть треугольник такой, что все площади не превосходят  $\epsilon$ , а с другой стороны.

Периметр **искма** треугольников:

на первом шаге периметр центрального треугольника =  $\frac{3}{2}$  (сторона большего треугольника = 1)

На втором шаге периметр =  $\left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$

На  $n$ -м шаге периметр периметр =  $\left(\frac{3}{2}\right)^n$

$$a \quad (3.16)$$

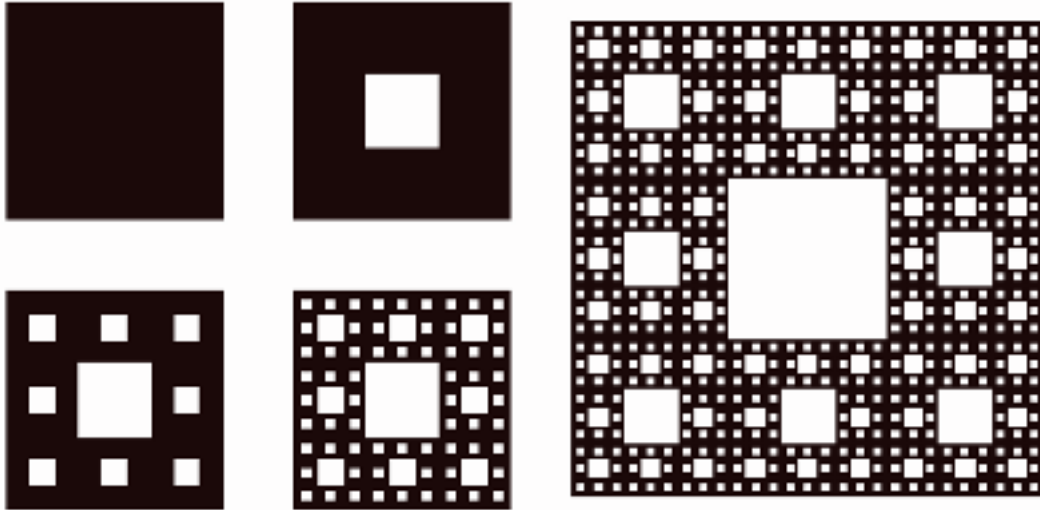
$$a \quad (3.17)$$

$$a \quad (3.18)$$

$$p^{(n)} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{3}{2}\right)^k = \frac{3}{2} \cdot \frac{1 - (3/2)^n}{1 - 3/2} = 3 \left[ \left(\frac{3}{2}\right)^n - 1 \right] \approx 3 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^n \quad (3.19)$$

$$p^{(n)} \equiv 3 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^n = a \delta^{1-d}, a = 3, d \text{ из (17)} \quad (3.20)$$

По аналогии с салфеткой Серпинского можно построить ковер Серпинского.

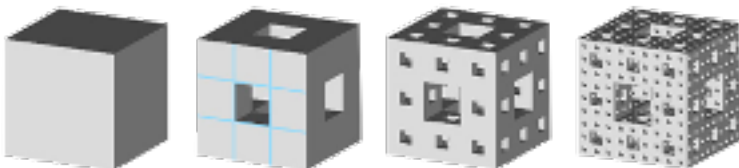


$$d_c = -\frac{\ln 8}{\ln 3} = 1.8928 < 2$$

Ковер Серпинского менее ферлевый, чем салфетка.

### 3.4.4 Губка Менгера.

Губка Менгера - похож на ковер Серпинского, но основан на кубах.



$$d_c = \frac{\ln 20}{\ln 3} = 2.7268 < 3$$

Сосуды человека, клетки - это все фракталы.

Фрактал выглядит одинаково в любом размере.

### 3.5 Определение фрактала через размерность.

Фракталом называется множество, размерность Хаусдорфа-Безикевича, которого строго больше его топологической размерности:

$$a \tag{3.21}$$

$$a \tag{3.22}$$

$$d_x > d_\tau \tag{3.23}$$

$d_x = 1,26 > 1$  - для снежинки Коха.

Для всех объектов фрактальная размерность меньше, чем топологическая размерность пространства, в котором они строятся.???

### 3.6 Кривые Пеано.

Существуют фракталы, которые плотно заполняют пространство, в котором они находятся, так что их фрактальная размерность  $d_c = d$ .

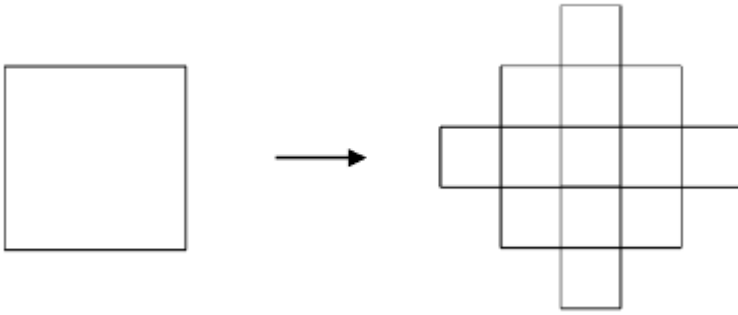
Пеано дал ответ на этот вопрос

**Кривые Пеано** - такие кривые, которые максимально плотно заполняют плоскость.

Начальным (инициирующим) элементом здесь можно выбрать единичный квадрат, каждая из сторон которого на следующем шаге заменяется генератором, показанным на картинке. Он состоит из 9 отрезков длины  $1/3$ , соединенных под прямым углом друг к другу. Цифры показывают способ обхода данной кривой.



Неизбежны две точки самоконтакта 2-6 и 5-9. В результате исходный квадрат преобразуется



Затем каждый из отрезков образовавшейся фигуры длиной в  $1/3$  преобразуется подобным же образом, и так до бесконечности.

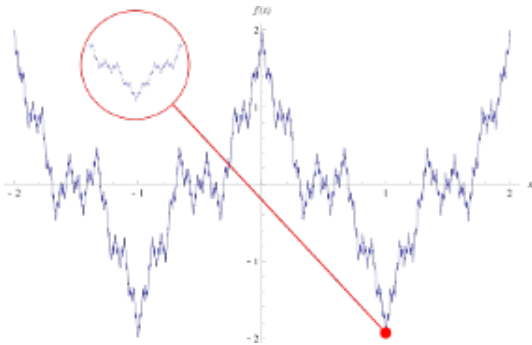
В результате возникает самоподобная непрерывная кривая, полно заполняющая квадратную область с площадью, равной 2.

$$d_c = -\frac{\ln 9}{\ln(\frac{1}{3})} = \frac{(\ln 3)^2}{\ln 3} = 2$$

Примером кривой без точек самоконтакта:

1. кривая Госпера
2. Дракон Хартера-Хейтуэя

### 3.7 Функция Вейерштрасса



Эта функция всюду непрерывна и всюду недифференцируема:  $w(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a^n \cos(b^n \pi x)$

Эта функция не имеет производных, если  $a \in (0, 1)$  и  $ab > 1 + \frac{3\pi}{2}$ .

Харди доказал, что эта функция недифференцируема при  $a < 1, b > 1, ab > 1$ .

Возьмем функцию  $w_1 = a \cdot \cos(b\pi x)$ , затем на эту функцию наложим рябь:  $w_2 = a^2 \cdot \cos(b^2\pi x)$ .

### 3.8 Итерация линейных систем

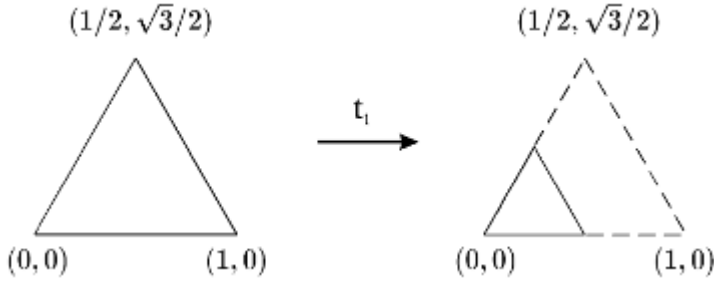
Все самоподобные фракталы получаются в результате итераций.

Существуют две основные группы фракталов: линейные и нелинейные.

Метод систем итерируемых функций (СИФ) (Барнсли) - результат применения называют аттрактором (коима устойчива составление процесса или хода эволюции системы). Метод СИФ реализуют 2 способами: Детерминированный, Метод случайных итераций (игра хаоса)

### 3.8.1 Детерминированный алгоритм

Рассмотрим салфетку Серпинского.



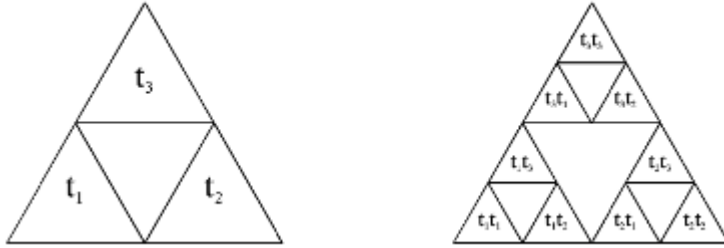
Поместим исходный равносторонний треугольник с длиной стороны, равной единице, на комплексную плоскость  $[z]$  так, как на рисунке. Как он переводится в равносторонний треугольник в два раза меньшего размера (справа на картинке)?

$t_1 : f_1(z) = \frac{1}{2}z$  - функция преобразования.

$t_2 : f_2(z) = \frac{1}{2}z + \frac{1}{2}$  - сместили маленький треугольник по горизонтали вправо на  $1/2$ .

$t_3 : f_3(z) = \frac{1}{2}z + \frac{1}{4} + i\frac{\sqrt{3}}{4}$  - верхний треугольник.

Таким образом,  $f_1, f_2, f_3$  переводят исходный треугольник в три треугольника.



$E_0$ - исходное треугольное множество

$$E_1 = t_1(E_0) \cup t_2(E_0) \cup t_3(E_0)$$

$$E_2 = t_1(E_1) \cup t_2(E_1) \cup t_3(E_1)$$

$$E_3 = t_1(E_2) \cup t_2(E_2) \cup t_3(E_2)$$

...

$$E_n = t_1(E_{n-1}) \cup t_2(E_{n-1}) \cup t_3(E_{n-1})$$

$E = \lim_{n \rightarrow \infty} E_n$  - аттрактор - салфетка Серпинского.  $E$  - не зависит от  $E_0$ .

Алгоритм  $t_1, t_2, t_3$  может применять к любой другой фигуре, но все равно мы получим салфетку Серпинского.

### 3.8.2 Метод случайных итераций

07.06.17

1. Берем начальную точку  $z_0$  (произвольно).

2. Выполняем преобразование:  $z_1 = \begin{cases} t_1(z_0) \\ t_2(z_0) \\ t_3(z_0) \end{cases}$  причем преобразование выбирается случайным способом.



$$3. z_2 = \begin{cases} t_1(z_1) \\ t_2(z_1) \\ t_3(z_1) \end{cases}$$

4. И т.д.

В отличие от детерминированного случая, на каждом шаге мы выполняем только одно преобразование. При этом, в качестве  $t_1, t_2, t_3$  можно использовать те же преобразования, что и во время построения салфетки Серпинского. В итоге, все равно будет получен объект, который будет очень похож на салфетку Серпинского..

Возьмем равносторонний треугольник с координатами  $A(0, 0), C(1, 0), B\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ . Выберем внутри этого треугольника произвольную точку.

Возьмем игральную кость с 6ю гранями. Противоположные грани обозначим одинаковыми цифрами, таким образом игральная кость дает датчик случайных чисел принимающий значения  $[a, b, c]$ . Получаем число и в соответствии с числом выбираем соответствующее преобразование. Например, если выпала 1, то мысленно соединим произвольную точку линией с точкой А, посередине отрезка отмечаем точку. Если выпала  $b$  - то соединяем с В и отмечаем точку посередине. аналогично для С.

Таким образом получаем последовательность точек. Эта последовательность оказывается на пол-пути до нашей случайно выбранной точки  $z_0$ . Чтобы не нарушалась случайность, первые точки отбрасываем. Эта процедура повторяется многократно. Это число должно быть очень велико. Первые 100 точек, допустим, отбрасываем, т.к. самоподобие проявляется в малой степени. В результате выяснилось, что полученная структура полностью совпадает с салфеткой Серпинского. Этот алгоритм значительно проще предыдущего. Почему

А: Наше преобразование  $f_1(z) = \frac{z+A}{2} = \frac{z}{2}$ .

В:  $f_2(z) = \frac{z+B}{2} = \frac{1}{2}z + \frac{1}{2}$

С:  $f_3(z) = \frac{z+C}{2} = \frac{1}{2}z + \frac{1}{2}$

Каждый раз случайным образом выбираем преобразование. Если провести несколько серий экспериментов и сравнить полученные результаты, то мы получим фактически одинаковые изображения разных объектов. Некоторая случайность порождает строгий порядок, присущий салфеткой Серпинского. Как это объяснить?

Имеется движущаяся точка. В результате последовательности этих шагов, получаем некоторую орбиту (траекторию). При достаточно большом числе итераций, наша траектория подойдет к каждой точке салфетки Серпинского сколь угодно близко, при этом в принципе орбита может не совпадать ни с одной точкой салфетки Серпинского.

Другими словами, если точка  $z_0$  принадлежит удаляемому центральному треугольнику, то орбита, которая имеет начало в точке  $z_0$  не имеет с салфеткой Серпинского ни одной общей точки, но при этом имитирует салфетку Серпинского, причем до такой степени, что визуально их отличить невозможно. Фактически получается, что салфетка стремится к аттрактору, а аттрактор - это салфетка Серпинского. Решение дифференциального уравнения стремится к аттрактору, а у нас нет дифференциального уравнения.

Салфетка Серпинского представляет собой странный аттрактор для нашей системы итерируемых функций при случайном выборе функций.

Также, если выбрать какую-то другую начальную точку, то получим другую орбиту. Таким образом, у нас есть две степени свободы. Что все это означает?

Через некоторое количество шагов, итерационный процесс “забывает” откуда он произошел (забывает о  $z_0$ ). ДУ бывают консервативные и диссипативные. Консервативные в любом

моменте времени помнит, из какой точки вышло. Пример - уравнение Ньютона. Если знаем положение точки в начальный момент времени, то мы можем предсказать состояние в любой момент в будущем (т.е. сохраняет свою энергию).

Бывают диссипативные системы, обладающие свойствами нашей системы функции. Система “забывает” о своем начальном состоянии, из разных начальных состояний приходим к одному и тому же решению, т.е. не сохраняет информацию. Пример: любые ДУ, описываемые в термодинамике - любые системы, в которых есть трение, вязкость, потеря электричества на тепло. С течением времени, точка остановится. Мы выйдем на стационарный режим. В этом смысле, решение системы не является обратимым. Функция, которая описывает это решение, не может быть обращена, нельзя получить обратную функцию. Например, все такие вещи стали развиваться при анализе ДУ. вспоминаем Аттрактор Лоренца. Аналогично вело себя стачечное движение 1905 стачей. Когда составили мат. модель, выяснили, что при определенном наборе параметров, оно ведет себя точно также.

Может быть нелинейное комплексное отображение (обычно, это степенной закон).

### 3.9 Неподвижные точки. Цикл. Аттрактор.

Если есть отображение, и это отображение записывается в форме итераций  $z_{n+1} = f(z_n)$ , то говорим, что такой итерационный процесс имеет неподвижную точку  $\tilde{z} : f(\tilde{z}) = \tilde{z}$ . Аналогичный принцип был когда мы искали корни методом итераций. Т.е. это точка, инвариантная к преобразованиям. Как и в собственных числах.

Чтобы определить характер неподвижной точки, нужно посчитать производную. Производная функции в точке меньше 1 - **притягивающая** точка. Если больше 1, то точка называется **отталкивающей**.

$|f'(z)| < 1, > 1, = 1$ , когда  $=1$  - то **нейтральная** точка. Эти определения становятся очевидными, если разложить функцию в окрестности точки в ряд Тейлора. Тогда, если производная меньше 1 то приходим в точку, если больше 1 - то уходим от точки. Это можно продемонстрировать на методе Ньютона-Рафсона.

В принципе, для притягивающей неподвижной точки можно ввести **область притяжения**: сказать, что  $A(z)$  - область притяжения для итерационного процесса, если она обладает следующими свойствами:  $A(\tilde{z}) = \{z : f(z) \rightarrow \tilde{z}, n \rightarrow \infty\}$ .

Существуют **периодические точки** и **циклы**, состоящие из периодических точек. В принципе, неподвижная точка образует цикл с периодом 1  $f(\xi) = \xi$ . Цикл с периодом 2 будет состоять из двух точек, таких что  $f(\xi_1) = \xi_2, f(\xi_2) = \xi_1$ . Либо, наша итерационная траектория всегда будет находиться в  $\xi_1$ , либо в  $\xi_2$ , либо прыгать из одной в другую.

Аналогично определяются точки с периодом  $n$  (целым числом), это означает, что  $z_{n+1} = f(f(z_n)) = f^{(2)}(z_n)$ . Например  $f(\xi_1) = f(\xi_2) = \xi_1$  или  $f(\xi_1) = f(\xi_2) = \xi_2$ . Если имеется точка с периодом 2, то мы можем вернуться в исходную точку.  $\xi = f^{(n)}(\xi)$ . Если производная в случае 2 меньше единицы - притягивающее, если больше - отталкивающие периодические точки.

**Аттрактором** на комплексной плоскости является точка или точки, в которых сходится итерационный процесс при числе итераций, стремящемся к бесконечности. В принципе, их может быть несколько. Он может состоять из бесконечного числа точек, может представлять прямую линию или какое-либо другое сложное множество (например, канторову пыль). Если в процессе итераций, изображающая точка уходит на бесконечность, то аттрактором считается бесконечно удаленная точка.

В случае детерминированного хаоса, случайности нет вообще. Когда наблюдаем за детерминированным хаосом, будет казаться, что флуктуации случайны, но это не так. Вспоминаем аттрактор Лоренца. Случайность может быть связана только с машинным округлением. Траектория всегда описывается числами. Траектория на одном и том же компьютере и одной и той же программе будет совпадать. Но процессы округления вносят случайность.

Считается, что удовлетворительного определения детерминированного хаоса нет, однако основной его характеристикой является его непредсказуемость. Это свойство называют существенной зависимостью от начальных условий. В каком-то смысле, итерацию Ньютона являются иллюстрацией этого.  $y = f'(x_1)(x - x_1) + f(x_1) = 0$ .

Для комплексной плоскости получим  $z_{n+1} = z_n - \frac{f(z_n)}{f'(z_n)}$ .

К чему приведет метод итераций Ньютона, если ??? не успел записать

Допустим  $f(z) = z^2 - 1$ . Здесь процесс Ньютона дает следующее:  $z_{n+1} = z_n - \frac{z_n^2 - 1}{2z_n} = \frac{1}{2} \left( z + \frac{1}{z_n} \right)$ . Выясняется, что если начальная точка лежит в правой полуплоскости, то в процессе итераций получим  $z_n$  стремится к +1, в левой полуплоскости - к -1. Если исключить начальные точки, которые равноудалены от корней, то итерации будут сходиться к ближайшему корню. Если же  $z_0$  лежит на мнимой оси, то итерации не сходятся вообще, а размещаются хаотически вдоль мнимой оси. Такая ситуация называется динамическим хаосом. Динамический хаос - в принципе имеем возможно повторить. Если кто-то из нас в будущем столкнется с моделированием Монте-Карло, то должны четко представлять, что датчик случайных чисел - детерминированный хаос. Если датчик случайных чисел имеет период  $t$ , то мы его использовать при работе с периодом  $2t, 3t, 4t$  и т.д. Он должен быть принципиально много меньше. Если же соизмеримо или много меньше, то выкидываем ДПСЧ в корзину и ищем новый. Это важно при моделировании Монте-Карло. Рассеяние света, например.