

# Информационно-аналитические системы/технологии

Лектор: Фролькис Виктор Абрамович

16 июня 2017 г.

## 08.02.17 лекция

**Идеология:** в современной информатике, вычислительной математике, проблеме информации уделяется много внимания. Одно из ответвлений, которое замыкается на теорию динамических систем (теория энтропии, теория устойчивых решений, теория бифуркаций) - **Синергетика** - наука, находящаяся на грани теории информации и теории систем.

Поведение открытых систем, к чему открытые системы будут стремиться. Все это берет свое начало из термодинамики, физики. Термодинамический подход: большая комната, мы дышим воздухом. Как ведут себя молекулы воздуха в этой комнате. Можно ли описать поведение воздуха в комнате. В одном кубическом литре - число Авогадро -  $23 \cdot 10^{23}$  степень. У нас есть окно, стенка, люди, мы не можем описать движение воздуха. Это называется **большой системой**, в ней работает (число в  $30$ -й степени) связей.

Демонстрация: **аттрактор Лоренца**. Лоренц - метеоролог, решал задачу: поверхность снизу нагревается, поверхность сверху - нет. В середине - жидкость, возникала некоторая структура. Получили дифференциальные уравнения (сильно упрощенные), в итоге он выписал систему из трех обыкновенных дифференциальных уравнений с квадратичной нелинейностью и стал считать эту систему. При одном наборе параметров, решение ведет себя одним способом, потом переходит в другую область. Переход из одной области предсказать невозможно.

Эта система описывается ОДУ. До сих пор считалось, что если задача описывается ОДУ, то ее поведение можно предсказать в будущем и прошлом, на этом базируется вся классическая механика.

Советские химики открыли реакцию Белоусова-Животинского. Эта реакция ведет себя аналогично аттрактору Лоренца, которая описывается уравнениями такого же типа.

Потом появилась квантовая механика. Когда масса частиц становится очень маленькой, то все идет совсем по другому, и частица может одновременно быть в нескольких местах. В микромире детерминизм теряется.

Иваново-Вознесенские стачки также описывались этими уравнениями.

В попытке это объяснить, были созданы несколько новых научных направлений.

Если в некоем состоянии появляется новая структура, появляется новая информация.

За нашу координацию отвечает некая структура. Мало того, что у нас есть голосовые связки, они должны что-то произносить.

Для аттрактора Лоренца есть набор параметров, когда ничего не происходит. Но бывает, что изменение на миллионную долю числа вся меняет. **Детерминированный хаос**.

Нас будут интересовать открытые системы.

Принципиальное **отличие** замкнутой и открытой системы: система стремится к максимуму энтропии (минимуму информации). Когда мы вошли в помещение, температура была

разная в разных частях комнаты. С течением времени, все выравнилась, информация пропала.

В основе всех этих рассуждений лежит II закон термодинамики: если система изолирована (не обменивается ничем с окружающим миром), то в этой системе энтропия стремится к своему пределу. ТЕПЛОВАЯ СМЕРТЬ ВСЕЛЕННОЙ.

## 1 Сложные системы, что это такое и как исследовать

**Сложная система** - система, состоящая из очень большого числа частей, элементов, компонентов, которые могут быть идентичными, могут быть различными, и которые могут соединяться между собой.

Сложные системы - системы обладающие большим числом частиц или сложным поведением. Могут появиться естественным (эволюция, развитие) путем, а могут быть созданы человеком.

**Примеры:** экономика, наша цивилизация, любой биологический объект, сообщество любого (животного) вида.

Как сравнить сложность систем?

**Сложность системы** пытаются оценить с помощью **алгебраической сложности** (ввел Колмогоров).

Систему можно описать как строку или последовательность данных. По этой исходной строке данных можно составить программу, которая, вместе с начальным условием, позволит вычислить строку данных. Программа, которая позволяет описать исходные данные используется для определения сложности системы.

**Мерой алгебраической сложности системы** является минимальная длина программы с минимальным объемом начальных данных, описывающих систему.

Если для одной системы программа содержит две строки, то это одна сложность. Если для другой - на несколько тысяч строк кода и ей нужно больше данных, то это - другая система.

Но нельзя создать оптимальную программу для системы - разброс в минимальной длине кода.

**Основная тема курса** - можно ли сформулировать единый подход к изучению сложных систем?

Необходимо понимать - на каком уровне необходимо описать систему, **микроскопическом, мезоскопическом, макроскопическом**. На **макроскопическом** - температура. На **микроскопическом** - координаты и импульсы всех молекул, применить к ним II закон Ньютона.

Мы не сможем описать движение каждой молекулы, но можем получить векторное поле скорости. Могут возникать вихри, которые мы не чувствуем, но если поставить анемометр, то мы увидим, что он будет крутиться по разному. Можно написать уравнения гидродинамики и описать мезоскопически.

Волна в океане, волна на нити. На макроскопическом уровне, для описания понадобится длина волны и амплитуда. На микроскопическом уровне, веревка состоит из молекул, когда молекула поднимается, она тянет за собой другую.

Нужно понимать, что микроскопическое поведение системы определяет поведение макроскопической системы, и наоборот.

Приминяются различные модели, которые имитируют свойства систем.

Система называется **самоорганизующейся**, если она (система) без специфического внешнего воздействия приобретает какую-то пространственную, временную или функциональную структуру.

**Специфическое внешнее воздействие** - это воздействие, которое навязывает системе структуру или функционирование.

Система называется **открытой**, если она обменивается с окружающим ее пространством энергией и веществом.

Система называется **закрытой (замкнутой)**, если она обменивается только энергией, но не обменивается веществом.

Система называется **изолированной**, если она не обменивается ни энергией ни веществом с окружающим миром.

15.02.17

## 2 Методы исследования сложных систем

**Термодинамический подход:** Описать сложную систему найдя (или придумав) малое число макроскопических переменных. Эти макроскопические переменные позволяют в глобальном смысле (как единое целое) описать поведение системы. Эти переменные не описывают отдельные части, они описывают систему в целом.

**Пример:** свойства газа. Температура, давление, объем (возможно). Температура и давление ничего не говорят о поведении отдельных молекул газа. Свойства системы изменяются при изменении ее температуры. Если температура газа начнет уменьшаться, то он может сконденсироваться и перейти в жидкость.

Мы можем говорить о переменной как о параметре только в одном случае - если во всей системе параметр одинаков в пределах всей системы. Когда мы говорим о температуре газа, то предполагается, что температура одна и та же - система находится в **состоянии равновесия** (термодинамического, температурного). Это возможно, когда система не взаимодействует с окружающей средой. Время релаксации (время выхода на состояние равновесия) для каждого параметра разное. Давление выравнивается со скоростью звука, температура - значительно медленнее.

При определенной температуре может быть камень, газ, автомобиль, человек. У всех может быть одинаковая температура, но системы обладают разными свойствами. В зависимости от того, как меняется температура, системы изменяются по разному.

**Энтропия системы**, находящейся в состоянии теплового равновесия с температурой  $T$ :  $\frac{dS}{dt} = \frac{dQ_{обр}}{T}$  (1) - Изменение количества тепла, которое подводится в система в рамках обратимого процесса. Под температурой имеется в виду абсолютная температура.

**Первое начало термодинамики:** изменение внутренней энергии определяется количеством подводимого тепла минус количество работы, которую совершила система:  $dU = dQ - \delta A$

Разница между  $d$  и  $\delta$ :  $dU$ ,  $dQ$  - полные дифференциалы, т.е. изменение не зависит от того, по какому пути пойдет система.

**Второе начало термодинамики** (принцип максимума энтропии): в изолированной системе энтропия не может убывать, а только возрастает, пока не достигнет максимума (достигнув максимума, процесс останавливается).

Термодинамический подход хорошо работает, когда система - изолированная. Не слишком ли это жесткое требование?

Земля: мы не можем рассматривать эту систему как изолированную. Но система “Земля + Солнце” может быть рассмотрена как изолированная.

Законы термодинамики хорошо работают в случае изолированной системы. В некоторых случаях, можно получить микроскопические законы из макроскопических данных.

Термодинамика - Феноменологическая наука (базируется на наблюдениях).

Другой подход: **Статистическая физика**

Статистическая физика опирается на поведение отдельных частей системы. Опирается на элементарные законы, которые управляют микросостоянием. Обобщая, интегрируя, усредняя получаем результат.

В рамках статистического подхода, **энтропия**:  $S = k \ln W$  (2), где  $k$  - постоянная Больцмана,  $W$  - число микросостояний, приводящих к одному и тому же макросостоянию.

Допустим, что у нас 3 молекулы. Нам неважно, что они летают с разными скоростями т.к. в интегральном смысле, скорость одинаковая. Это и называется числом микросостояний. Макроскопическое состояние определяется числом микросостояний, которые могут привести к данному исходу. Разные способы полета молекул определяют число макросостояний.

Фундаментальные законы обратимы: закон Гука, Ньютона, и т.д.

При помощи данного подхода, макроскопические законы оказываются необратимыми, эта проблема до сих пор не решена. Холодное тело не может отдать тепло теплоту (Второе начало термодинамики в школьной форме).

В рамках статистической физики, рассматриваются системы, в которых системы не находятся в равновесии. Мы не требуем, чтобы система находилась в равновесии (не очень далеко от состояния равновесия)

**Синергетический подход**: позволяет изучать системы, которые в результате самоорганизации ([само]эволюции) образуют пространственные, временные или функциональные структуры. При синергетическом подходе, изучаются качественные макроскопические изменения, которые сопровождаются появлением новых структур или новых функций.

При реализации синергетического подхода, можно изучать системы далекие от состояния равновесия.

Если применить синергетику к физике, то синергетика начинается с микроскопической формулировки. В биологии или химии - с исследования мезоскопического подхода (элементарные составляющие не рассматриваются).

К системе (в рамках синергетики) может подводиться какая-либо энергия (информация) и при ее изменении может возникнуть неустойчивость, которая в результате приведет к переходу в новое состояние (вода=>пар). Та энергия (информация) которая подводится к системе может быть рассмотрена как управляющий параметр.

Если система становится неустойчивой, то это макроскопическое поведение системы может быть описано малым числом коллективных мод (колебаний). Это малое число мод называются **параметрами порядка**. Параметры порядка определяют поведение микроскопических частей системы. Возникновение параметров порядка позволяют системе выйти на новую структуру. Система может проходить через целую иерархию структур. Универсальность заключается в том, что эти параметры порядка есть. Это может быть сложно.

**Информационный подход**: в данный момент понимаем меру информации как количество информации. Суть достаточно неопределена и разнообразна. Мы не говорим - из чего состоит информация, мы говорим о том, как ее можно измерить. Информация может измеряться в битах, байтах, понял/не понял, мало/много.

Мера количества информации: имеется монета, получаем либо орла, либо решку. Игральная кость - 6 значений (картинок). Задавая вопросы мы можем получать ответы: да/нет.

**Информация** определяется через число возможных исходов (ответов). Если общаемся на языке морзе, то информация передается разными комбинациями точек и тире. Можно при помощи азбуки морзе передать любую информацию. Любая последовательность символов несет в себе какую-либо информацию. Получить из теории информации формулу (2). Допустим, есть  $Z$  априоре равновероятных возможных исходов (вариантов ответа). При подбрасывании монеты  $Z=2$ , при подбрасывании кости  $Z=6$ . Чем больше  $Z$ , тем больше неопределенности. Монета -  $1/2$ , игральная кость -  $1/6$ . Неопределенность перед получением информации. Когда монета выпала, то информацию уже получили. До того, как мы провели эксперимент, информации нет вообще,  $I = 0$  ( $I$  - некая мера количества информации). Монетка упала, игральная кость упала. Мы не обладаем нулевой информацией.  $I \neq 0$ ,  $Z=1$

Мера количества информации должна быть связана с  $Z$ . Разумно потребовать, чтобы для независимых событий величина  $I$  была величиной аддитивной (информация складывалась). Общее число исходов  $Z = Z_1 \cdot Z_2$ , а мы хотим, чтобы мера информации была аддитивной. Мы хотим, чтобы  $I(Z_1 \cdot Z_2) = I(Z_1) + I(Z_2)$ . Если  $I = k \ln Z$  (3), то это выполняется. Эта формула очень похожа на формулу (2).

### 01.03.17 лекция

Теоретически,  $k$  из (3) может быть любой положительной постоянной.  $k$  определяется в зависимости от контекста.

Допустим, у нас есть двоичная система из 0,1. Мы образуем из нее последовательность длиной  $n$ , следовательно можно составить комбинацию  $2^n$  разными способами -  $2^n$  возможных исходов. Мы можем написать, что  $I = n$ , откуда  $I = k \ln Z = kn \ln 2 = n \Rightarrow k = \frac{1}{\ln 2} = \log_2 e \Rightarrow I = \log_2 Z$ .

**Мерой информации (информацией)** является величина, равная  $I = \log_2 Z$  (4).

Рассмотрим слово из  $n$  символов ( $n$  нулей или единиц). Это слово может содержать  $n_1$  нулей и  $n_2$  единиц. Необходимо понять - сколько может быть составлено слов из символов. Через закон сочетания,  $z = C_n^{n_1} = \frac{n!}{n_1!n_2!}$ . ??? Правильная ли формула

Если на слово приходится информация  $I$ , то на один символ  $i = \frac{I}{n}$  откуда  $I = k \ln z = k [\ln n! - \ln n_1! - \ln n_2!]$

Формула Стирлинга позволяет выразить факториал через экспоненту:  $n! = \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n} e^{\omega(n)}$ , где  $\omega$  - некоторая функция  $\frac{1}{12(n+\frac{1}{2})} \omega_n < \frac{1}{12n}$

$\ln n! = n (\ln n - 1)$  приближенно.

$I \approx k [n (\ln n - 1) - n_1 (\ln n_1 - 1) - n_2 (\ln n_2 - 1)]$ ,  $i = \frac{I}{n} \approx -k \left[ \frac{n_1}{n} \ln \frac{n_1}{n} + \frac{n_2}{n} \ln \frac{n_2}{n} \right]$

$\frac{n_1}{n} = p_1, \frac{n_2}{n} = p_2$

$i \cong -k [p_1 \ln p_1 + p_2 \ln p_2]$   $p_1, p_2$  - вероятности. ??? какое тут было равенство?

Эта формула элементарно обобщается на тот случай, когда  $n$  символов:

$p_k = \frac{n_k}{n}, n = \sum n_k, i = -k \sum_j p_j \ln p_j$

С учетом (4), можем записать  $i = -\sum_j p_j \log_2 p_j$  (5)

**Средняя информация по Шеннону (информационная энтропия)**, соответствующая одной букве в книге определяется **формулой Шеннона** (5), где  $p_j = \frac{n_j}{n}$

Формула появилась из пропускной способности каналов связи.

Информация по Шеннону никак не связана со смыслом передаваемого сигнала

Т.к. задан конечный объем слов, то это изолированная система.

### 3 Осмысленность информации

**Осмысленность информации** - учитываем реакцию того, кому эта информация предназначена. Если информацию не понять (абракадабра), то реакции не будет. Осмысленность информации может определяться реакцией. Если система реагирует на информацию, то это означает, что она имеет некий смысл.

**Относительная значимость информации** - допустим, имеется множество сигналов (каждый сигнал - слово длины  $n$ ). Реакция на эту информацию зависит от приемника. Используется аппарат теории динамических систем.

Рассмотрим некую систему, которая может быть описана на микро, мезо, или макроскопическом уровне. Допустим, что система характеризуется **вектором состояний**. Воздух характеризуется вектором  $t, p$  (температура, давление). Можем описать воздух в комнате с помощью среднеквадратичной скорости молекул. Можем описать, задав координаты и скорости всех молекул. Все эти описания дают свой вектор состояний.

Приемник характеризуется вектором состояния  $\vec{q}(t) = (q_1(t), q_2(t), \dots, q_n(t))$ , этот вектор моделирует состояние приемной системы.

В самом общем виде,  $\frac{d\vec{q}}{dt} = \vec{N}(\vec{q}, \alpha) + \vec{F}(t)$ , где  $N$  - **детерминированная часть** уравнения, зависящая от  $\alpha$ ,  $F$  - **флуктуирующая сила**.

Уравнение Ньютона:  $\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{1}{m}f(\vec{v})$ . Дует сильный ветер, летят осколки крыш и т.д. Появится случайная часть  $+\vec{\xi}(t)$ .

Если в начальный момент времени вектор состояния задан, значения управляющих параметров заданы, т.е.  $t = t_0 : \vec{q}_0; \alpha = \alpha(t_0) \vec{F}(t) = 0$ .  $q$  будет стремиться выйти на аттрактор (стремиться к равновесию). **Аттрактор** - некоторое притягивающее множество. Примеры аттракторов:

1. Точка может остановиться - это аттрактор
2. Система может выйти на циркуляцию - аттрактор.
3. Маятник Фуко.
4. В технических устройствах, бывают колебания с вынуждающей силой.

В общем случае, **аттрактор** - либо состояние потока, либо цикл, либо тор либо странное хаотическое движение. Странный аттрактор - в точке нет, но в окрестности обязательно прошла.

Шарик скатывается под действием гравитации. Вектор шарика определяется его координатами. Управляющие параметры - особенности рельефа холма. В результате, шарик будет скатываться с холма и остановиться в какой-то лунке. Если он не остановится, то он выпрыгнет и пойдет дальше. Но когда-нибудь он остановится в самой глубокой лунке на его пути. Эта лунка будет аттрактором. Если начал катиться с другой стороны, то другой аттрактор. Разные аттракторы для разных начальных положений.

Будем предполагать, что наша система (приемник) однозначно определяется вектором состояния  $\vec{q}$  и управляющими параметрами  $\alpha$ . Мы определяем значимость сигнала по этим параметрам.

Мы не будем рассматривать флуктуации, нас интересует реакция на сигнал.

???15.03.17 лекция

22.03.17

Есть некий кристалл, на него падает ЭМ-волна, в узлах кристаллической решетки атомы, они переходят в возбужденное состояние и излучают обратно, излучение ловится зеркалами и направляется. Каждый атом излучает и поглощает независимо друг от друга.

Какой-то атом переизлучив энергию, может перевозбудить другой атом. Эти волны не образуют лазер, это просто набор случайных ЭМ колебаний.

Уровень падающего возбуждающего сигнала начинает расти. Вдруг выясняется, что при большой интенсивности падающей волны, все атомы начинают излучать одновременно (когерентно), тогда на выходе получаем мощный монохроматический источник излучения (мощнее, чем то, что пришло на лазер).

Что происходит с точки зрения информации? Происходит самоорганизация. Появилось множество излучателей, начиная с какого-то момента времени, они группируются в единое. Синусоида выдает лазерный поток. Рубиновый кристалл, при падении на него энергии, самоорганизуется и выдает одну волну. Эта одна волна является параметром порядка.

Пример из биологии: Миксомицед, ... и еще бактерии.

Бактерии живут на питательной среде. По мере того, как питательная среда заканчивается, они начинают собираться в одну общую точку. Отдельные клетки испускают особое вещество ЦАМФ. В каком-то смысле они передают информацию. Когда это вещество достигает другие клетки, эти клетки также начинают усиленно производить это вещество. Эти клетки не осознают смысл полученной информации, но по увеличении концентрации этого вещества, клетки начинают перемещаться к точке, где концентрация этого вещества больше. Кооперативное действие клеток приводят к появлению новой сущности. Это можно назвать **синергетической информацией**.

Как двигается животное? У него есть мозг и мышцы, все это должно быть очень хорошо скоординировано. Кооперативное действие. Должна происходить передача информации.

Речь является результатом кооперативного действия, связанного с созданием, передачей и усвоением информации.

Химическая реакция - у химии нет мозга, но в результате химической реакции возникают новые структуры.

Все это связано с **обменом информации**. Может возникать некоторая конкуренция между потоками информации. Это новое состояние можно описать с помощью одного или нескольких **параметров порядка**. Для лазера - длина волны. Эквивалентно тому, что есть один или несколько информаторов.

Если имеется сложная система, то в общем случае, состояние отдельных частей сложной системы может описываться (определяться) с помощью **принципа подчинения**: глобальная система влияет на поведение отдельных частей, отдельные части влияют на отдельные подчасти и т.д.

Такой процесс можно описать как некоторое специфическое согласование действий отдельных частей (атомов, клеток), приводящее к появлению нового качества (самоорганизации). Происходит очень сильное сжатие информации. На входе: на кристалл падает разнородное излучение, а на выходе - монохроматическая волна. Количество информации на выходе - один синус (косинус). Лазер сжимает информацию. Во многих случаях увеличивается эффективность системы.

## 4 Второе начало синергетики

Как мы исследуем большую систему? Есть разные подходы. Макроскопический, мезоскопический, микроскопический уровень и т.д. Мезоскопических может быть много.

Когда выбирается микро(меза)скопический уровень, то мы формулируем уравнения. Рассматривая понятия неустойчивости, подчинения и т.д. (им можно придать математическую форму), мы показываем, что возникают какие-то структуры. Появляются новые качественные состояния на макроскопическом уровне. Это - **стандартный подход**. Этот подход аналогичен подходу в статистической механике.

Подойдем к анализу систем с точки зрения термодинамики - Термодинамический подход.

Начнем с некоторых макронаблюдаемых переменных - эти макроскопические переменные описываются своими средними значениями, они могут флуктуировать (колебания относительно среднего значения), например температура, давление, цвет стены. Будем различать макроскопические переменные, присваивая им некоторый индекс.

Будем говорить, что переменная имеет номер  $k$ , ее среднее значение -  $f_k$ . Система находится в состоянии  $j$  и это состояние характеризуется вероятностью  $p_j$ . Нас интересует закон распределения вероятностей  $p_j$ . Если система может находиться в разных состояниях, то информация описывается по известной формуле  $i = -\sum_j p_j \ln p_j$ . Можем попытаться найти максимум информации, т.е. величину  $i$ . Но у нас условный экстремум:  $f_k = \sum_j p_j f_j^{(k)}$ , где  $f_j^{(k)}$  вклад  $j$ -го состояния в  $k$ -ю переменную.

Газ. Состоит из большого числа молекул. Группы молекул обладают разными скоростями. Мы не знаем температуры групп молекул, но мы знаем температуру газа. Она складывается из вероятностей того, что разные группы с разными температурами, каждая группа вкладывается, получаем температуру. Поэтому ищем максимум информации при условии, что. ???

Еще одно ограничение: сумма вероятностей  $\sum_j p_j = 1$

**Принцип максимума информационной энтропии:** максимизация величины  $i$  при наличии этих ограничений. Лежит в основе второго закона синергетики. Как бы ни вела себя сложная система, она должна описываться принципом максимума энтропии. Все это справедливо в том случае, когда система замкнута (по энергии и по массе).

В этом принципе есть один недостаток: в случае, если система находится в состоянии равновесия, этот принцип работает прекрасно. Возникает сложность, когда система оказывается далеко от равновесия, то возникает вопрос - как выбрать ограничения.

Допустим, работает реактивный двигатель: в центре одна температура, на расстоянии 1 метр от сопла температура другая.

Атмосферная температура зависит от положения в пространстве. Метеорологи говорят о средней температуре.

В состоянии равновесия, макроскопические параметры имеют смысл. Иначе, они теряют смысл.

Если система находится далеко от состояния равновесия, то довольно сложно выбрать ограничения.

Однако, считается что принцип максимума энтропии можно использовать. Его нужно применять к определенному классу систем. Разные типы систем образуют разные классы систем, в каждом классе рассматриваем свои дополнительные ограничения, требуя принцип максимума энтропии. В случае равномерных систем, мы используем ограничения выше, значения величин  $f^{(k)}$  нам известны.



В качестве первого шага, мы можем считать (высказать предположение), что адекватные ограничения должны включать макроскопические переменные (параметры порядка).

Если система не находится в состоянии равновесия, то происходят большие флуктуации параметров переменных. Эти флуктуации могут быть такими большими, что флуктуации сами превращаются в параметры порядка. Мы должны учитывать не только макроскопические переменные, но и их флуктуации.

В рамках классической теории, можем не использовать на первом шаге параметры порядка, а определить корреляционные зависимости, т.е. посчитать моменты наблюдаемых переменных и восстановить по ним параметры порядка и подчиненные моды, которые могут появиться.

Вычисляя моменты наблюдаемых величин, мы пытаемся найти параметры порядка. Но мы не можем говорить о макроскопических переменных, потому что они не существуют.

## 5 Уровни описания сложных систем.

Как можно описать жидкость? Можно описать отдельные ее молекулы. Можно описать жидкость как делает гидромеханика - вводится понятие элементарного объема, который всегда содержит большое число молекул. Элементарный объем - малый объем жидкости или газа, который на самом деле обладает свойствами жидкости или газа. Можно описывать жидкость на уровне макродинамики, задав температуру и давление. Это - микроскопический, мезаскопический и макроскопический подход.

Попытка объяснить броуновское движение: Ботаник смотрел на пыльцу в жидкости и обнаружил, что пыльца совершает хаотическое движение. Он знал, что пыльца - не живая субстанция. Он написал на эту тему статью. Движение очень мелких взвешенных частиц - **броуновское движение**. Потом поняли, что это может быть связано с движением атомов и молекул.

За счет чего они двигаются? О них ударяются молекулы, их средняя оказалась не равна нулю. Из-за того, что средняя составляющая оказалась неравна нулю, эти частицы приходили в движение в разные стороны.

Одна из попыток описать это явление бал связана с **уравнением Ланжевена**.

$\frac{dq}{dt} = N(q, \alpha) + F(t)$  - **уравнение Эволюции**, показывает как система, находясь в состоянии  $q$  будет развиваться с течением времени.  $F(t)$  - это случайная флуктуация.

Первооснова такого уравнения - механика Ньютона, т.к. это аналог уравнения Ньютона. Если  $q$  - скорость частицы,  $\frac{dq}{dt}$  ускорение частицы. По сути это второй закон Ньютона - слева ускорение, справа  $N$  - вынуждающая сила, а  $F$  - флуктуирующая часть вынуждающей силы. Если  $F(t)$  уходит, то получаем в чистом виде II закон Ньютона.

$$\dot{q} = \kappa(q) + F(t) \quad (1)$$

$q$  - скорость броуновской частицы.

Что действует? Частицы со всех сторон что-то толкает. Это случайная величина. Также действует трение. Тогда  $\kappa(q)$  обусловлена трением. При малых скоростях сила трения пропорциональна скорости. Трение действует в противоположную сторону, следовательно,

$$\kappa(q) = -\gamma q \quad (2)$$

$$\kappa(q) = \alpha q - \beta q^3 \quad (3)$$

Какими свойствами обладает  $F(t)$ ? Предположим, что среднее значение силы равно нулю. Частица с равной вероятностью может пойти в любую сторону.

$$\langle F(t) \rangle = 0 \quad (4)$$

где угловые скобки - осреднение.

Нам нужна автокорреляция.

**Корреляция** - смотрим зависимость между первой и второй величиной. **Автокорреляция** - если величина  $x$  меняется с течением времени, то нужно посчитать корреляцию в разные моменты времени и вычесть из среднего значения. Это называется автокорреляция (кросскорреляция).

Как это ввести формально? Процесс  $x$ , его значения  $x_1, \dots, x_n$ . Этот процесс записывается в виде двух процессов. Один процесс начинаем в момент  $x_1, \dots, x_{N-1}$ , второй -  $x_2, \dots, x_N$ . Можем посчитать корреляцию между этими двумя процессами. Затем разбиваем на три части. Получаем автокорреляционную функцию с **лагом**, равным 2. Если данные состоят из 10 точек, то процедура будет не очень хороша.

Можем посчитать автокорреляцию для случайной величины.

Запишем эту корреляцию

$$\langle F(t) F(t') \rangle = Q \delta(t - t') \quad (5)$$

а дисперсия не равна нулю. ??? Что такое  $Q$

Стандартная запись (подход).

Среднее от  $F$  равно нулю, корреляционная функция зависит от времени.

Мы записали уравнение Ланжевена (1), коэффициент  $\kappa$  может выглядеть (2) или (скорее всего) (3), величина  $F$  должна удовлетворять (5), (6).

Вместо (1) запишем:

$$\dot{\vec{q}} = \vec{\kappa}(\vec{q}) + \vec{F}(t) \quad (6)$$

$$\langle F_j(t) \rangle = 0 \quad (7)$$

$$\langle F_j(t) F_{j'}(t') \rangle = Q \delta(t - t') \delta_{jj'} \quad (8)$$

Мы сказали, что  $F$  зависит только от времени. На самом деле, оно может зависеть еще и от  $q$ . Тогда ситуация в корне усложняется. Подобные задачи решаются с помощью исчисления Ито или исчисления Стратоновича.

В скалярном случае:

$$dq = \kappa(q(t)) dt + g(q(t)) dt dW(t) \quad (9)$$

??? Здесь нет опечатки

$\kappa, g$  - нелинейная детерминированная функция. Раньше  $F$  была случайной, теперь же здесь  $g$  становится детерменированной функцией, но  $W(t)$  случайный (стохастический) процесс.

Этот стохастический процесс должен удовлетворять тем же свойствам, что и раньше:

$$\langle dW(t) \rangle = 0 \quad (10)$$

$$\langle dW(t) dW(t') \rangle = Q \delta(t - t') dt \quad (11)$$

Мы предполагаем, что это так. Если, анализируя экспериментальные данные мы видим, что это не так, то вся наша теория не годится.

В рамках подхода Ито предполагается, что процессы  $q$  и  $dW$  не коррелированы. Если они не коррелированы, то (9), сама величина  $q$  и случайные факторы  $dW(t)$  не коррелированы.

Если записать систему в предположении, что  $q$  - многомерное,  $\vec{q} = (q_1, \dots, q_m)$ , то

$$dq_l(t) = \kappa_l(\vec{q}(t)) dt + \sum_m g_{lm}(\vec{q}(t)) dW_m(t) \quad (12)$$

$$\langle dW_m(t) \rangle = 0 \quad (13)$$

$$\langle dW(t) dW(t') \rangle = \delta(t - t') \delta_{mn} dt \quad (14)$$

Это и есть **подход Ито**.

Не для каждого процесса существует производная. А приращение функции существует всегда. Поэтому мы от производных переходим к дифференциалу.

Рассмотрим произвольную функцию

$$\vec{u} = \vec{u}(\vec{q}) \quad (15)$$

Найдем дифференциал функции.

$$du_j = \sum_k \frac{\partial u_j}{\partial q_k} dq_k + \frac{1}{2} \sum_{k,l} \frac{\partial^2 u}{\partial q_k \partial q_l} dq_k dq_l \quad (16)$$

Первое слагаемое вопросов не вызывает, откуда появилось второе слагаемое? При вычислении производной мы должны указать связь между производными.

Пример:  $u(q) = aq^2 + b \sin(q)$  - дифференциал  $du = 2aqdq + b \cos q dq$ . В нашем случае, координата  $k$  коррелирует с  $l$  и высказывает слагаемое.

Смотрим на соотношение (12), и правую часть соотношения (12) подставляем в (16).

$$du_j = \sum_k \frac{\partial u_j}{\partial q_k} \left[ \kappa_k(\vec{q}) dt + \sum_m g_{km} dW_m(t) \right] + \frac{1}{2} \sum_{k,l} \frac{\partial^2 u}{\partial q_k \partial q_l} \left[ \sum_{m,n} g_{km} g_{ln} dW_m dW_n \right] \quad (17)$$

Сохранили все члены первого порядка и пренебрегли всеми членами по  $dt$ .

Как решать эту проблему в случае интегрирования по Стратановичу?

(9) = (18)

$$dq_l = \kappa_l(\vec{q}) + \sum_m g_{lm}(\vec{q}) dW(t) \quad (18)$$

При гипотетическом интегрировании, мы будем вычислять последнее слагаемое в центре интервала. Каждый атом последнего слагаемого записывается в виде:  $g\left[q\left(\frac{t_i + t_{i-1}}{2}\right)\right] dW(t_i)$

Переходя к дискретной сетке по времени, вычисляем по такому правилу. При таком подходе возникает статистическая зависимость. Т.е.  $q(t_i \dots)$  и  $dW(t_i)$  есть в формуле.

В дальнейшем мы не будем использовать подход Стратановича.

$\int (x - \bar{x})(y - \bar{y}) f(x, y) dx dy$  считаем корреляцию по таким формулам.

$E\{xy\} = \int \int xy f(x, y) dx dy = \int x f_1(x) dx \int y f_2(y) dy$  - формула вычисления математического ожидания. В силу статистической независимости  $f(x, y) = f_1(x) f_2(y)$ . Статистическая независимость лучше чем зависимость.

**29.03.17 лекция**

## 6 Уравнения Фокера-Планка

Уравнение Ланжевена:  $\dot{q} = \kappa(q) + F(t)$  (на самом деле это  $k$ , а не капша, но оно кривоватое, поэтому пишу так).

В тех случаях, когда первое слагаемое нелинейно зависит от  $q$ , удобно перейти к уравнению Фокера-Планка.

Уравнение записывается для плотности вероятности  $q$ , т.е., другими словами, от  $q$  переходим  $q \rightarrow f(q, t)$ , где  $f$  - вероятность того, что у нас значение  $q$ . Тогда уравнение записывается в виде: (где-то здесь сбилась нумерация, поэтому вставил два лишних уравнения)

$$a \quad (19)$$

$$a \quad (20)$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial q} [\kappa(q) f] + \frac{Q}{2} \frac{\partial^2}{\partial q^2} f \quad (21)$$

Первый член справа называется **дрейфовым**, второй - **диффузионным** (названия из движения жидкости). Дрейфовая - отвечает за наличие потока. Диффузионная - наличие "движка".

Если считать, что мы высыпали порошок или каплю чернил в воду, то это пятно будет двигаться вместе с течением (дрейфовая составляющая), но помимо всего прочего, это пятно будет расширяться за счет диффузии.

Диффузия по закону градиента - из стороны где больше к стороне где меньше. Поэтому с минусом. И плюс берем дивергенцию. С этим связано второе слагаемое.

Мы можем найти стационарное решение, где производная по времени равна нулю.

$$\frac{\partial f}{\partial t} = 0 \quad (22)$$

Имеем уравнение первого порядка. Для него необходимо иметь граничное условие. Есть неявная зависимость от  $t$ .

Как сформулировать граничное условие для плотности вероятности?

Координата имеет значение  $q$  в интервале  $\pm \Delta q$ .

Возможны два варианта:

Первое: граничное условие равно нулю на бесконечности.

$$\frac{\partial f}{\partial t} = 0, q \rightarrow \pm \infty \quad (23)$$

(все-таки заменим капша на  $k$ ). Берем уравнение в квадратурах: в стационарном случае решение

$$f = N \exp \left[ - \int_{q_0}^q \frac{2k(q')}{Q} dq' \right] \quad (24)$$

$N$  - произвольная константа. Интеграл  $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$  должен быть равен 1, поэтому мы добавляем коэффициент  $N$ .  $N$  - **нормировочная постоянная**.

В общем случае, это уравнение может быть записано в векторной форме.

$$f(\vec{q}, t) \quad (25)$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} = - \sum_j \frac{\partial}{\partial q_j} [k(\vec{q}) f] + \frac{1}{2} \sum_{j,k} Q_{j,k} \frac{\partial^2}{\partial q_j \partial q_k} f \quad (26)$$

Решить аналитически в большинстве случаев невозможно.

Воспользуемся подходом Ито.

$$\frac{\partial f}{\partial t} = - \sum_k \frac{\partial}{\partial q_k} [k_k(\vec{q}) f] + \frac{1}{2} \sum_{k,l} \frac{\partial^2}{\partial q_k \partial q_l} \left[ \sum_m q_{km} q_{lm} f \right] \quad (27)$$

Получено путем подстановки в формулу (12).

## 7 Общие подходы нахождения общего решения уравнения Фокера-Планка для систем, находящихся в детальном равновесии.

Мы говорим, что система находится в **детальном равновесии** если она находится в состоянии теплового равновесия. Если система далека от детального равновесия, то в ней принцип детального равновесия не работает.

Допустим, что имеется вектор состояния  $\vec{q}$ , он определяется  $N$  переменными

$$\vec{q} = (q_1, q_2, \dots, q_N) \quad (28)$$

Рассмотрим систему, которую можно повернуть вспять во времени. На уровне микроописания, в механике Ньютона, можно повернуть время вспять. В термодинамике, второй закон это запрещает. Можем заменить  $t$  на  $-t$ . Эта процедура называется **обращением времени**. Уравнения Ньютона инвариантны относительно обращения времени.

Набор переменных при обращении времени будем обозначать следующим образом.

При обращении времени, вектор переменных состояния будем описывать как

$$\overleftarrow{q} = (\epsilon_1 q_1, \dots, \epsilon_N q_N) \quad (29)$$

Если координата  $q$  при обращении знак не меняет, то пишем  $+1$ , если меняет - то  $\epsilon_k$  равно  $-1$ .

$$\overrightarrow{\lambda} = (\lambda_1, \dots, \lambda_N) \quad (30)$$

$$\overleftrightarrow{\lambda} = (v_1 \lambda_1, \dots, v_M \lambda_M) \quad (31)$$

$v_j = \pm 1$ ,  $\overrightarrow{\lambda}$  - воздействие внешней среды.

Введем вероятность  $P(\overrightarrow{q}', \overrightarrow{q}; t_2, t_1)$  нахождения системы в момент времени  $t_1$  в состоянии  $q$  и в момент времени  $t_2$  в состоянии  $q'$ .

Система эволюционирует во времени, но стационарна. Следовательно, вероятность  $p$  зависит от разности  $t_2 - t_1$ .

$$P(\overrightarrow{q}', \overrightarrow{q}; t_2, t_1) = W(\overrightarrow{q}', \overrightarrow{q}; t_2 - t_1) \quad (32)$$

Введем  $\tau = t_2 - t_1$

**Принцип детального равновесия.**

Возможны два определения:

№1:

$$W(\overrightarrow{q}', \overrightarrow{q}, \tau, \overrightarrow{\lambda}) = W(\overleftrightarrow{q}, \overleftrightarrow{q}'; \tau, \overleftrightarrow{\lambda}) \quad (33)$$

Тогда, совместная вероятность записывается следующим образом (вертикальная черта - условная вероятность):

$$P = P(\overrightarrow{q}' | \overrightarrow{q}; \tau, \overrightarrow{\lambda}) \quad (34)$$

$$P = P(\overrightarrow{q}' | \overrightarrow{q}; \tau, \overrightarrow{\lambda}) f(\overrightarrow{q}; \overrightarrow{\lambda}) = P(\overleftrightarrow{q} | \overleftrightarrow{q}'; \tau, \overleftrightarrow{\lambda}) f(\overleftrightarrow{q}'; \overleftrightarrow{\lambda}) \quad (35)$$

Если уравнение Фока-Планка имеет единственное решение, то из принципа детального равновесия следует, что

$$f(\overrightarrow{q}, \overrightarrow{\lambda}) = f(\overleftrightarrow{q}, \overleftrightarrow{\lambda}) \quad (36)$$

т.е. можно показать, что вероятности двух состояний одинаковы.

Есть состояние  $\overrightarrow{q}$  и мы переходим в  $\overrightarrow{q}'$ . Какова вероятность перехода?

$$w(\overrightarrow{q}', \overrightarrow{q}; \overrightarrow{\lambda}) = \frac{d}{d\tau} P(\overrightarrow{q}', \overrightarrow{q}; \tau; \overrightarrow{\lambda}) |_{\tau=0} \quad (37)$$

- вероятность перехода в единицу времени.

Если от уравнения (37) взять производную по  $\tau$  и полагая  $\tau = 0$ ,  $\overrightarrow{q} \neq \overrightarrow{q}'$ , то получаем

$$w(\overrightarrow{q}', q; \lambda) f(\overrightarrow{q}, \lambda) = w(\overleftrightarrow{q}, \overleftrightarrow{q}, \overleftrightarrow{\lambda}) f(\overleftrightarrow{q}, \overleftrightarrow{\lambda}) \quad (38)$$

- **второй принцип детального равновесия.**

Описывает скорость перехода из состояния  $\overrightarrow{q}$  в состояние  $\overrightarrow{q}'$ .

Соотношение (38) означает, что для любых пар, прямой переход и обратный должны быть с одинаковой скоростью.

**05.04.17 лекция**

## 8 Условия получения стационарного решение уравнения Фокера-Планка

В уравнении (26),  $F$  - плотность вероятности нахождения системы в состоянии  $q$ .

Мы можем перейти к условной вероятности. Тогда уравнение можно записать в следующем виде

$$\frac{d}{d\tau} P(\vec{q}'|q; \tau, \lambda) = L(\vec{q}, \lambda) P(\vec{q}'|\vec{q}; \tau; \lambda) \quad (39)$$

$\tau$  - время, переход из состояния  $q$  в состояние  $q'$ .

$$L(\vec{q}) = - \sum_i \frac{\partial}{\partial q_i} k_i(\vec{q}, \lambda) + \frac{1}{2} \sum_{i,k} \frac{\partial^2}{\partial q_i \partial q_k} Q_{ik}(\vec{q}, \lambda) \quad (40)$$

Смысл плотности вероятности:  $f(x) dx$  - вероятность попасть в точку. Интегрируем от  $q$  до  $q'$  и из (26) получаем (39). Плотность - масса единичного объема, в физическом смысле. Плотность вероятности - вероятность попадания в единичный интервал. С точки зрения математики - плотность, вероятность, мера - одно и то же. Они обладают одинаковыми свойствами: положительны, аддитивны. И то и другое описывается интегралом.

$Q$  - коэффициенты диффузии.

Предполагаем, что коэффициенты диффузии симметричны, т.е.

$$Q_{ik} = Q_{ki} \quad (41)$$

Определим новые коэффициенты по следующей формуле (**формула необратимого дрейфа**):

$$D_i(\vec{q}, \lambda) = \frac{1}{2} \left[ k_i(\vec{q}, \lambda) + \epsilon_i k_i(\vec{\tilde{q}}, \vec{\tilde{\lambda}}) \right] = D_i^{\text{необр}} \quad (42)$$

$$J_i(\vec{q}, \lambda) = \frac{1}{2} \left[ k_i(\vec{q}, \lambda) - \epsilon_i k_i(\vec{\tilde{q}}, \vec{\tilde{\lambda}}) \right] = D_i^{\text{обр}} \quad (43)$$

**(43) - коэффициент обратимого дрейфа.**

При обращении времени,  $J_i$  преобразуется также, как и  $Q_i$ .

Стационарное решение уравнения Фокера-Планка у нас есть выше. Запишем в виде

$$f(\vec{q}, \lambda) = \mathcal{N} e^{-\Phi(\vec{q}, \lambda)} \quad (44)$$

$\Phi$  - можно интерпретировать как обобщенный термодинамический потенциал.

Кинетическая энергия зависит от движения. Потенциальная - зависит от положения тела в силовом поле. Если нет силового поля, то нет и потенциальной энергии. Однако, если тела нет, то силовое поле есть все равно. Силовое поле прикладывает силу к телу, находящемуся в этом поле. Чтобы оценить силовое поле, нужно нечто поместить в силовое поле. Тогда появляется сила. Поэтому, фактически, если нет пробного тела, то нет и силы. Но поле все равно существует. Пример - гравитационное поле Земли. Оно есть в любом случае. Т.е. силовое поле, или потенциал, способен порождать силу.

Термодинамический потенциал - внутренняя энергия тела. Чтобы ее изменить, необходимо провести работу. Работа - путь на силу. Нагревание - подвод тепла. Это не работа.

В термодинамике, термодинамический потенциал, свободная энергия (энтропия), энтропия - внутренняя энергия. Все эти параметры крутятся вокруг уравнения термодинамики. Мы не говорим о термодинамике.

Стационарная плотность вероятности может описываться (44).  $\Phi$  играет роль термодинамического потенциала.

Принцип детального равновесия - чтобы он не нарушался, необходимое и достаточное условие сводится к следующему:

$$Q_{ik}(\vec{q}, \lambda) = \epsilon_i \epsilon_k Q_{ik}(\vec{\tilde{q}}, \tilde{\lambda}) \quad (45)$$

где  $\epsilon_i \epsilon_k$ - параметры, отвечающие за обращение времени.

$$D_i - \frac{1}{2} \sum_k \frac{\partial Q_{ik}}{\partial q_k} = -\frac{1}{2} \sum_k K_{ik} \frac{\partial \Phi}{\partial q_i} \quad (46)$$

$$\sum_i \left( \frac{\partial J_i}{\partial q_i} - J_i \frac{\partial \Phi}{\partial q_i} \right) = 0 \quad (47)$$

Для выполнения принципа детального равновесия, необходимо выполнение (45-47).

$K$  - имеет смысл матрицы диффузии. Если она невырожденная, т.е. существует обратная, то из уравнения (46) можно получить выражение для градиента потенциала (т.е. для силы)

$$\frac{\partial \Phi}{\partial q_i} = \sum_k (Q^{-1})_{ik} \left( \sum_l \frac{\partial Q_{kl}}{\partial q_l} - 2D_k \right) \equiv A_i \quad (48)$$

(48) - соотношение интегрируемости

$$\frac{\partial}{\partial q_i} A_j = \frac{\partial}{\partial q_j} A_i \quad (49)$$

(49) - соотношение интегрируемости

(49) - дает условие дрейфа и диффузии.

$$\sum_i \left[ \frac{\partial J_i}{\partial q_i} - J_i \sum_k (Q^{-1})_{ik} \left( \sum_l \frac{\partial Q_{kl}}{\partial q_l} - 2D_k \right) \right] = 0 \quad (50)$$

**Вывод:** условие детального равновесия определяется в конце концов выражениями (45), (49) и (50).

Уравнение (46) или эквивалентное ему уравнение (48) позволяет определить  $\Phi$  с помощью квадратуры, т.е. в результате однократного интегрирования и тем самым найти уравнение Фокера-Планка в явном виде.

### 15.08.17 лекция

Интегралы по траектории, попытаемся нарисовать решение основываясь на этом понятии. Для простоты,  $q$  - const,  $Q$  не зависит от  $q$ . Рассмотрим одномерный случай.

Система эволюционирует во времени. Можем разбить на равные интервалы, т.е. сказать, что есть

$$t_0; t_1 = t_0 + \Delta t; t_2 = t_0 + 2\Delta t, \dots, t_N = t_0 + N\Delta t \quad (51)$$



Функцию распределения  $F$  в момент времени  $t$  можно представить в виде  $N$  - кратного интеграла по всем промежуточным положениям  $q_0, q_1, \dots$  (в  $t_0$  система находилась в состоянии  $q_0$ ,  $t_i$  - находилась в  $q_i$ ).

$$(q, t) = \lim_{N \rightarrow \infty, N\Delta t = t} \int \dots \int Dq e^{-G/2} f(q', t_0) \quad (52)$$

$$Dq = (2Q\Delta t\pi)^{-N/2} dq_0 dq_1 \dots dq_{N-1} \quad (53)$$

$$G = \sum_v \frac{\Delta t \left[ \frac{q_v - q_{v-1}}{\Delta t} - k(q_{v-1}) \right]^2}{Q} \quad (54)$$

$$a \quad (55)$$

$$a \quad (56)$$

$$a \quad (57)$$

$$a \quad (58)$$

$$a \quad (59)$$

Другими словами, плотность вероятности, переходя из одного состояния в другое, может быть оценена данной формулой.

В рамках этого же подхода вспомним основное кинетическое уравнение.

Рассмотрим некоторое пространство дискретных состояний, рассмотрим вектор  $\vec{m}$  из пространства состояний (имеется набор дискретных состояний). Нас интересует распределение вероятности вектора  $\vec{m}$  в момент  $t$ .

Предположим, что имеем дело с Марковским процессом, тогда эта вероятность удовлетворяет основному кинетическому уравнению.

??? Откуда появилось (60), где 55-59?

$$\frac{dP(\vec{m}, t)}{dt} = \sum_n w(\vec{m}, \vec{n}) P(\vec{n}) - \sum_n w(\vec{n}, \vec{m}) P(\vec{m}) \quad (60)$$

(60) описывает вероятность вектора  $M$  в момент  $t$  в случае, если процесс Марковский. Явное решение, как правило найти не удастся, однако в частном случае, когда наблюдается детальное равновесие, стационарное распределение вероятности может быть написано явно.

Величины в первом и втором слагаемом совпадают

$$w(\vec{m}, \vec{n}) P(\vec{n}) = w(\vec{n}, \vec{m}) P(\vec{m}) \quad (61)$$

Когда пишутся уравнения притока, всегда есть источник и сток, т.е. одна часть приводит к появлению, а вторая - к удалению. В данном случае, первое слагаемое - увеличение вероятности, второе - уменьшение вероятности.

$$\Phi(\vec{m}) = \Phi(\vec{n}_0) + \sum_{j=0}^{N-1} \left[ \ln \frac{w(n_{j+1}, n_j)}{w(n_j, n_{j+1})} \right] \quad (62)$$

$\vec{m} = \vec{n}_N$ . Очень многие ситуации в природе, технике, обществе могут быть описаны данным уравнением.

## 9 Уменьшение сложности, параметры порядка и принцип подчинения.

Нас интересует система, состоящая из большого числа частей. Нас интересуют качественные изменения поведения системы.

Качественное изменение - при охлаждении, водяной пар превращается в воду.  $H_2O$  как было, так и остается, но фазовое состояние вещества изменилось. Далее, при охлаждении вода превратится в лед. Такое же изменение возникает в металлах при очень низких температурах - свойство сверхпроводимости. Начиная с каких-то низких температур (порядка 1 градуса Кельвина) возникает сверхпроводимость. Если охладить гелий, то выяснится, что у него появляется свойство сверхтекучести. Через некоторое время гелий выползет из банки - проникает между молекулами вещества.

Аттрактор Лоренца - течение жидкости. 2 качественных состояния, между ними возможен переход.

Земля - современный климат может быть описан кривой ???КАРТИНКА.

Предположим, что солнечная постоянная меняется (хотя мы менять ее не можем), но мы можем загрязнять атмосферу, а это эквивалентно тому, что меняется солнечная постоянная, т.к. солнечная энергия поглощается.

Часть солнечной энергии поглощается атмосферой - часть переизлучается наверх. В зависимости от поглощающего газа - солнечная постоянная падает, на земле становится холоднее. Ядерная зима - поднявшаяся сажа перекрывает доступ солнечной энергии. Это наблюдалось после извержения вулканов. Через сажу солнечное излучение не проходит! Углекислый газ - дополнительная подушка, не позволяющая уходить излучению в космос. Возникает эффект увеличения солнечной постоянной.

По горизонтале - 0 экватор, 1 - синус широты  $x_i = \sin \phi_i$ .

В какой-то момент ледяной покров может растаять.

Можем получить решение уравнения, но за ним может не быть физического смысла. Это решение оказывается неустойчивым, его не существует в природе, т.к. любое минимальное его возмущение приведет к разрушению. В итоге мы прыгнем - скачок в ноль и земля покрывается льдом. Это было - палеоклиматология. На карельском перешейке огромные волуны - их волок за собой лед.

Наша цель - понять: как можно качественно описать скачки.

Будем считать, что наша система описывается некоторым вектором состояния. Этот вектор описывает на микроскопическом или мезоскопическом уровне.

$\vec{q} = \vec{q}(\vec{x}, t)$  - где  $x, q$  в общем случае может быть вектором. Пространственная координата - необязательно координата, это может быть и температура и какой-то параметр и многое другое.

Скорость изменения состояния

$$a \quad (63)$$

$$a \quad (64)$$

$$a \quad (65)$$

$$\frac{d\vec{q}}{dt} = \dot{\vec{q}} = \vec{N}(\vec{q}, \alpha) + \vec{F}(t) \quad (66)$$

$\vec{N}$  - детерменированная, нелинейная функция от  $q$ , - это флуктуация, случайная составляющая.

Проанализируем устойчивость поведения этой системы по линейному приближению.

Допустим, что при некотором параметре  $\alpha = \alpha_0$  нам известно решение уравнения (66).

$$\vec{q} = N(\vec{q}_0; \alpha_0) \quad (67)$$

Как будет вести себя модель при варьировании параметра  $\alpha$ ? Величина  $\vec{q}$  также будет варьироваться. Для

$$\alpha : \vec{q} = \vec{q}_0 + \vec{w} \quad (68)$$

Будем считать, что  $q_0$  гладко зависит от  $\alpha$ , т.е.

$$\vec{q}_0 = \vec{q}_0(\alpha) \quad (69)$$

Нас интересует вопрос устойчивости  $q_0$ .

Подставим (68) в (66).

$$\dot{\vec{q}} = \dot{\vec{q}}_0 + \dot{\vec{w}} = \vec{N}(\vec{q} + \vec{w}; \alpha) \quad (70)$$

Необходимо предположить, что величина малая. Когда мы говорим о линейном приближении, отклонения должны быть малыми. Малые дают возможность пренебречь слагаемыми в ряде Тейлора. Поэтому можем переписать правую часть в следующем виде:

$$\dot{\vec{q}} + \dot{\vec{w}} = \vec{N}(\vec{q}_0; \alpha) + \vec{L}(\vec{q}_0) \vec{w} + \dots \quad (71)$$

Сократим:

$$\dot{\vec{w}} = L(\vec{q}_0) \vec{w} \quad (72)$$

$L$  - некий оператор, который действует на  $q_0$ . Важно то, что мы легко можем написать решение уравнения:

$$\vec{w} = e^{\lambda t} v \quad (73)$$

- это формальное решение уравнения  $\dot{x} = ax$

То, в каком случае произойдет качественное изменение, а в каком - нет, заложен в  $\lambda$ . Если  $\lambda$  отрицательна, то с течением времени уйдем.

Если положительна, то решение побежит на бесконечность.

Если равна нулю...

Анализ устойчивости в линейном приближении. Он работает ВСЕГДА. Но он не всегда приводит к хорошим результатам, т.к. не справедливо предположение о малости. Но если оно работает, то мы пользуемся анализом устойчивости в линейном приближении. Эта технология справедлива для всех систем.

Устойчивое решение ( $\lambda < 0$ ) :  $\lambda_s, v_s$

Неустойчивое ( $\lambda > 0$ ) :  $\lambda_u, v_u$ .

Зачем это? Мы что-то моделируем, получилось решение, ответ. Нужно понять - является ли решение устойчивым? И зачем нужно варьировать?

Используются некоторые исходные данные, все они берутся с ошибкой, всегда, точных данных не бывает. Если эти данные чуть-чуть пошевелить.

Мало построить математическую модель. Необходимо убедиться, что эта модель устойчива. Решение плавно меняется при варьировании всех входных данных.

Простейший способ проверить это - проанализировать линейное поведение. Это делается так, как показано выше. Подставляем правую часть. Предполагаем, что оно возмущается. Получаем квазилинейное уравнение. Оцениваем решение. Ляпунов. Теория устойчивости.

ПО ЛИНЕЙНОМУ ПРИБЛИЖЕНИЮ.  $w$  невелико, в каком-то смысле оно мало. Поэтому термин устойчивый/неустойчивый относится только к линейному приближению.

Уравнение (66) - вариант эволюционного уравнения. Посмотрим - как его можно преобразовать. Попытаемся решить (66) в нелинейном и стохастическом случае.

Нет случайности. Отбросим случайную составляющую.

Допустим, что есть случайная составляющая. нелинейное и стохастическое. Предположим, что вектор  $q$  может быть записан в следующем виде.

$$a \tag{74}$$

$$a \tag{75}$$

$$a \tag{76}$$

$$a \tag{77}$$

$$\vec{q} = \vec{q}_0 + \sum_u \xi_u(t) \vec{v}_u + \sum_s \xi_s(t) \vec{v}_s \tag{78}$$

Если  $L$  в (72) содержит дифференциальные операторы, то  $v$  зависит от  $x$ , т.е.

$$\vec{v} = \vec{v}(x) \tag{79}$$

$u, s$  имеет смысл, описанный выше.

Подставляя в (66) и разделяя после подстановки  $v_s, v_u$ , получаем

$$\dot{\xi}_u = \lambda_u \xi_u + N_u(\xi_u, \xi_s) + F_u(t) \tag{80}$$

$$\dot{\xi}_s = \lambda_s \xi_s + N_s(\xi_u, \xi_s) + F_s(t) \tag{81}$$

$u = 1, \dots, M, s = M + 1, \dots,$

Принцип подчинения - с этого начнем в следующий раз

??? Пропуски

### 03.05.17 Лекция

??? Что случилось с нумерацией

Была (45), где указывали среднее значение  $F_{kl}$ . По аналогии с этой формулой,

$$f_l^{(k)} : \langle f_l^{(k)2} \rangle - \langle f_l^{(k)} \rangle^2 = \frac{\partial^2 \ln z}{\partial \lambda_k^2} \quad (82)$$

Во многих случаях, эта величина может зависеть от параметра или от набора параметров  $\alpha$ . Как изменится среднее значение при изменении  $\alpha$

Среднее значение давалось формулой (34). У меня ее почему то нет...  $\sum p_k f_l^{(k)} = f_k$  (34)

Чтобы ответить на вопрос, необходимо вычислить производную по  $\alpha$  и осреднить.

$$\left\langle \frac{\partial f_{i,\alpha}^{(k)}}{\partial \alpha} \right\rangle = \sum_i p_k \frac{\partial f_{i,\alpha}^{(k)}}{\partial \alpha} \quad (83)$$

Подставляя вместо  $p$  (38) и используя (41), окончательно получаем.

$$\frac{1}{z} \sum_i \frac{\partial f_{i,\alpha}^{(k)}}{\partial \alpha} \exp \left[ - \sum_j \lambda_j f_{i,\alpha}^{(j)} \right] \quad (84)$$

$$= - \frac{1}{z} \frac{1}{\lambda_k} \frac{\partial z}{\partial \alpha} \quad (85)$$

$$- \frac{1}{\lambda_k} \frac{\partial \ln z}{\partial \alpha} = \left\langle \frac{\partial f_{i,\alpha}^{(k)}}{\partial \alpha} \right\rangle \quad (86)$$

Это - формулы для одного параметра

## 10 Непрерывные переменные

Когда мы рассматриваем различные приложения, мы предполагаем, что переменные непрерывны.

Если  $\xi$  - дискретная переменная, то информация конечна. Непрерывная - бесконечное количество информации. Множество непрерывных переменных образует континуум, он содержит бесконечное множество точек. Как можно ввести понятие информации в случае непрерывной переменной.

Единственный способ решить эту проблему - оттолкнуться от плотности вероятности, т.к. если величина дискретна, то можем посчитать - сколько раз она приняла то или иное значение, т.е. появляется понятие частоты. Потом можно ввести относительную частоту.

В силу того, что величина непрерывна, мы не можем ввести относительную частоту, т.к. вероятность принятия конкретного значения равна нулю.

Плотность вероятности - вероятность того, что значение величины попадает в некоторый интервал.

Если есть некая переменная  $\xi$ , то вероятность попадания  $\xi$  в интервал  $Prob(\chi < \xi < \xi + \Delta\xi) = P(\xi) \Delta\xi$ .

Измерения всегда с некоторой погрешностью. Они проводятся с некоторой точностью.

Попытаемся ввести погрешность измерения в распределение вероятности.

Допустим, мы делаем некоторое  $j$ -е измерение величины  $\xi$ .

$$P_\epsilon(j) = \int_{\xi_j - \epsilon/2}^{\xi_j + \epsilon/2} P(\xi) d\xi \quad (87)$$

Ошибка  $\epsilon$ , величина  $\xi$ . Предполагаем, что определяется некоторой  $P(\xi)$ .  $\xi$  находится в интервале. Мы получаем некоторое значение. Какова вероятность получения некоторого значения?

Есть некоторый уровень неопределенности. Берем интеграл по интервалу уровня неопределенности, получаем некое значение. Получаем вероятность получения результата после  $j$ -ого измерения.

Предположим,  $P$  - величина непрерывная, а  $\epsilon$  - малая.

$$P_\epsilon(j) = P(\xi) \epsilon \quad (88)$$

Определим информацию при заданной погрешности.

$$I_\epsilon = - \sum_j P_\epsilon(j) \ln P_\epsilon(j) \quad (89)$$

$$I_\epsilon = - \sum_j \epsilon P(\xi_j) \ln P(\xi_j) - \sum_j \epsilon P(\xi_j) \ln \epsilon \quad (90)$$

Вычитаемое равно единице, т.к. в результате наших вычислений что-то получается. Устреляем  $\epsilon$

$$I_\epsilon = - \int d\xi P(\xi) \ln P(\xi) \quad (91)$$

Уменьшаемое можно отбросить, т.к. это константа.

Если есть некоторая непрерывная переменная, то количество информации может быть записано в виде. ???

Аналог меры шенноновской информации.

Применяя данный прием, мы возвращаем все старые формулы. Берется интеграл по всем возможным состояниям.

Физический пример.

Система, состоящая из большого числа частиц. Индекс  $i$  соответствует определенной частице.  $\alpha$  - объем, в котором находится частица.  $i$  - относится к скорости частицы.  $v$  - вероятность того, что частица характеризуется скоростью  $i$ .  $f_{i,\alpha}^{(k)} = E_i(v)$ ,  $k = 1$  - энергия.

Будем считать, что  $f_1$ - усреднение  $f_k$  (это была формула (34)). Мы полагаем  $k = 1$ ,  $f_1 \longleftrightarrow U = \langle E_1 \rangle$  - некая средняя энергия.  $\alpha \longleftrightarrow V$ ,  $\lambda_1 = \beta$

$$P_i = \exp[-\lambda - \beta E_i(v)]$$

$$\frac{1}{k_B} S_{max} = \ln z + \beta U$$

$U - \frac{1}{k_B} S_{max} = \frac{1}{\beta} \ln z$  - результат формулы (47). (нумерация сбилась, скорее всего 87) Можем интерпретировать  $U$  как внутреннюю энергию.  $\frac{1}{\beta}$  - абсолютная температура, умноженная на постоянную Больцмана.  $S_{max}$  - энтропия.

Получаем следующее соотношение:  $U - TS = \mathcal{F}$ .  $\mathcal{F}$  - свободная энергия. Свободная энергия может быть записана как  $\mathcal{F} = -k_B T \ln z$ ,  $S = S_{max}$ .

$$Z = \sum_i \exp[-\beta E_i] - \text{обычная функция распределения.}$$

Получили известную физическую закономерность, не применяя физических соображений.

### 10.05.17 Лекция

## 11 Фракталы, введение

Фрактал. Мандельброт. Fractalus - изрезанный.

Общепринятого определения слова фрактал не существует.

**Фракталом** называется структура, состоящая из частей, которые в каком-то смысле, подобны целому. Это - **характерная черта фрактала**.

Попробуем построить фрактал.

Мысленно нарисуем равносторонний треугольник. Из каждой стороны треугольника попытаемся удалить треть и заменим удаленную треть двумя отрезками такой же длины. Получилась звездочка.

Повторяем процедуру еще раз. **Снежинка Коха**.

**1-е свойство**, которое мы можем увидеть, заключается в том, что даже на самом малом масштабе мы можем продолжать эту процедуру бесконечно долго. Фрактальная кривая не является прямой даже на самых малых масштабах, т.е. является геометрически нерегулярной. Характерна извилистость, изломанность, изрезанность. К ней **не существует касательной**.

Представим мысленный эксперимент. Имеется график дифференцируемой функции (гладких кривых), он может быть нарисован сколь угодно точно. Мы понимаем, что этот график при достаточном увеличении может быть заменен отрезком прямой. Классический объект упрощается при увеличении изображения. В малом, является линейным объектом.

Фрактал не является линейным объектом. **Фракталами являются** геометрические объекты (например линии, поверхности, пространственные тела - все многообразие геометрических объектов), имеющие изрезанную форму и обладающую свойством самоподобия.

В этом смысле, снежинка Коха - строго самоподобная. Малые фрагменты полностью повторяют крупные фрагменты. Это свойство характерно только для **регулярных фракталов**. Те, которые не строятся как снежинка Коха, являются нерегулярными фракталами (если бы мы вырезали отрезки разной длины, то мы бы получили нерегулярный фрактал). Если при построении фрактала включить некоторую случайность, то получим **случайный фрактал**. Основное отличие: свойство самоподобия справедливо только после усреднения по всем статистически независимым реализациям объекта.

Снежинка Коха показывала - сколь сложными могут быть функции и кривые. Со временем, в природе стали находить объекты, которые обладали свойством самоподобия. Облака, например.

**В природе**, продолжать процесс до **бесконечности нельзя**. Фрактальное построение до бесконечности в природе невозможно. За этим пределом, понятие самоподобия теряет смысл.

В природе, есть некоторый минимальный масштаб длины.  $l_{min}$  - **минимальный масштаб**. На нем теряется смысл. В природе также есть **максимальный масштаб**  $l_{max}$ , на нем идея самоподобия также теряет смысл.  $l_{min} \ll l \ll l_{max}$ .

Примером фрактала является Броуновское движение.

Частица двигалась не по прямой на этих промежутках, что было в середине промежутка - неизвестно. Если движение Броуновской частицы подвергнуть  $10 \times 100 \times$  увеличению, то картинка станет самоподобной. Это - статистический фрактал. Если осреднить траекторию, то увидим самоподобие.

Береговая линия - граница между сушей и морем. По сути - то же самое. Фиксируем траекторию в моменты времени, что и Броуновское движение. Измерим ее длину.

Берем циркуль, на береговой линии наносим точки. Количество шагов циркуля позволяло определить длину береговой линии. Например - шаг циркуля 10 км. Потом 5 км. И т.д. И т.д.

Раствор циркуля  $\delta$ . Норвежский физик Федер проводил подобные измерения, примерно 100 лет назад. Оказалось, что гулять с циркулем не очень удобно. Очертаная береговой линии аккуратно нарисованы. Тогда число шагов циркуля должно быть конечным.

Если раствор циркуля  $\delta$ , то  $L(\delta) = N(\delta)\delta$ ,  $\delta$  - раствор циркуля,  $N(\delta)$  - число шагов, сделанных с этим раствором. При уменьшении  $\delta$ ,  $\lim_{\delta \rightarrow 0} L(\delta) = L_0$ . В какой-то момент Федер перестал измерять циркулем. Он просто нанес сетку на карту и стал брать квадратики разной длины. Формула аналогичная. Сколько квадратиков лежит на линии умножить на шаг квадрата. Сейчас - это распространенный способ. Как бы там ни было, выяснилось, что это не так, предел не работает.

Федерсон - статья, посвященная измерению длины береговой линии. Если линия сильно изрезанная, то длина аппроксимирующей береговой линии растет неограниченно, т.е.  $L_0 \rightarrow \infty$ .

Однако оказалось, что постоянной остается величина  $a = N(\delta)\delta^d = \text{const} \neq f(\delta)$  - число растворов циркуля, где  $d = \text{const}$ , не является функцией от  $\delta$ .

Для побережья Англии, эта величина оказалась равной  $d = 1,24$  - это имперически установленный факт. Величина длины побережья меняется таким образом, что  $N(\delta) \sim \frac{1}{\delta^d}$ .

$$L(\delta) = a \cdot \delta^{1-d} \quad (92)$$

(1).

Получаем, что с помощью жесткого масштаба  $N(\delta) = \frac{L(\delta)}{\delta}$  (2), для другой береговой линии будут другие значения  $d, a$ . Константа  $d$  - **фрактальная размерность** береговой линии.

Если гладкая линия (эллипс, окружность), можно ожидать, что  $d = a = 1$ . Такое определение приводит нас к классическому понятию размерности. Число шагов пропорционально единице на масштаб. Для гладкой линии  $d = 1$ .

Если рассмотреть два участка береговой линии, для первого  $L_1$ , для второго  $L_2$ .

$L_1(\delta) = a_1\delta^{1-d}$ ;  $L_2(\delta) = a_2\delta^{1-d}$ ,  $\frac{L_1(\delta)}{L_2(\delta)} = \frac{a_1}{a_2}$  - можно сравнить длины различных участков береговой линии.

Найдем соотношение, которое позволит вычислить фрактальную размерность.

Логарифмируем (1)  $\log L(\delta) = \log a + (1-d)\log \delta$  (3) Эта формула устанавливает линейную зависимость между логарифмом  $L$  и логарифмом  $\delta$ . Угловым коэффициентом этой прямой (в логарифмических терминах) определяется  $1-d$ .

На одной оси откладываем  $\log \delta$ , на другой -  $\log L(\delta)$ . Получится линейная зависимость. ??? Картинка.

Было проведено исследование с различными сетками. Картинка взята оттуда. Для норвежского побережья -  $d=1,52$ . Размерность гладкой поверхности - 2. Размерность объекта на линии - 1. Получилось почти по середине.

Побережье Африки - порядка 1. Для окружности - ровно 1.

В литературе приводится хороший пример. Испанский и Португальский справочники. Португалия граничит только с Испанией. Если посмотреть в справочниках, то выясняется, что длина границы различается на 20%. Это связано с фрактальностью границы.

## 12 Фрактальная размерность множества

При уменьшении масштаба меняется длина. Но в школе всех учили, что это не так. Оно сильно меняет наше представление о геометрии (когда была нелинейная геометрия, геометрия



Лобачевского, потом Римана). Геометрия стала совсем другой (параллельные прямые могут пересечься, это не вызывает сомнения).

Расстояние между двумя точками зависит от масштаба. Процедура измерения длины не столь проста. Пуанкаре - почему пространство имеет три измерения. Эйнштейн сказал, что пространство имеет 4 измерения. На самом деле, это придумал Минковский. 4-е измерение - время. Время и пространственные координаты входят с разными знаками. Формула расстояния определяется с разными знаками. Если опираться на эту статью/рассуждение, то можно сказать, что все объекты, которые мы рассматриваем, являются объектами некоторого евклидова пространства - состоят из множества точек некоторого евклидова пространства. Для любого такого множества может быть введена его топологическая размерность. Топологическая размерность строится по индукции. Размерность понимаем по нашим ощущениям. Мы чувствуем 3 пространства. Если абстрагироваться, то это набор чисел, определяющих положение точки. Время меняется, поэтому если нарисовать фазовое пространство, то точка каждого из нас перемещается. С течением времени, наши координаты меняются. Число чисел, с помощью которого мы можем выразить положение объекта. Координаты твердого тела определяются 6ю параметрами - 3 для центра масс, 3 для углов Эйлера. Мы не в состоянии его представить, но мы его понимаем.

Но сейчас мы говорим о топологической размерности. Для квадратной матрицы, например, размерность равна  $N^2$ . Размерность можно определить не через число чисел в матрице, а через число базисных векторов.

Число базисных векторов счетно, но бесконечно.

Мы смотрим на размерность под определенным углом. Сколько нужно параметров, чтобы описать положение.

Топологическая размерность - совсем другая. Она строится по индукции.

Пустому множеству - топологическая размерность  $d_T = -1$ .

Обычно, размерность точки 0, линии 1, квадрата 2, куба 3.

Размерность любого непустого множества отличается от -1.

Если некоторое множество можно разделить на несвязанные друг с другом части с помощью множества размерности  $d_T$  то топологическая размерность множества будет равняться  $d_T + 1$ .

Например, точка имеет размерность 0. Если есть две точки, то они разделены между собой пустым множеством.  $-1 + 1 = 0$ . Под этот 0 индукция и подстраивалась. Прямая имеет размерность 1. Два любых непересекающихся отрезка с несовпадающими концами можно разделить точкой. Размерность точки 0.

Счетное множество точек, имеет размерность 0.3.

Размерность сферы - 2. Шара - 3. Топологическая размерность должна быть целым числом. По индукции, она увеличивается на 1.

Разрезанная поверхность сферы может быть отображена в плоскость, плоскость двумерна. Но заполненный шар не отобразится.

Когда задаем точку на линии - 1 число, на поверхности - 2 числа, на сфере - 3 числа. Точка в пространстве - 3 числа.

Основная идея Мондельброта - он обратил внимание, что размерность объекта зависит от наблюдателя (от связи наблюдателя с внешним миром).

Появляется мост в квантовую механику. Измерения не зависят от объекта измерения. От того, что линейкой измеряем карандаш, с ним ничего не случится. В квантовой механике, мы поменяем объект, если начнем измерять его. Когда я измерил длину карандаша, то она была

одной. Сейчас она стала другой. Т.к. своим измерением мы поменяли свойство карандаша. В результате измерения скорости элементарной частицы. она изменит скорость.

Измерение влияет на измеряемый объект. Размерность объекта зависит от наблюдателя.

Рассмотрим клубок ниток. Если расстояние до клубка достаточно велико, то мы считаем, что это точка. Если я вижу точку, то размерность равна нулю. Если будем подходить к клубку, то мы увидим, что это диск, значит его размерность равна 2. Если мы подойдем еще ближе, то мы увидим, что он состоит из ниток. Размерность ниток равна 1. От того, что она сложно скручена, ее размерность не меняется. Клубок сделан из ниток, если его распрямить то получим линию, у нее размерность 1. Если начать многократно увеличить линию, то мы увидим, что она состоит из атомов, тогда получается, что линия состоит из нулей. Размерность зависит от многих факторов.

### 17.05.17 лекция

Когда нужно определить реальную размерность объекта, то самый простой способ - прологарифмировать и построить уравнение линейной регрессии. Два неизвестных параметра, один -  $\log(a)$ , второй -  $d$ . Тем самым мы сможем найти фрактальную размерность.

Если размерность зависит от внешних условий, то ее можно определять по разному.

Например, размер геометрических объектов. 10 миллиметров дают сантиметр. 100 квадратных миллиметров дают квадратный сантиметр. 1000 кубов ... Размерность сидит в степени десятки

Геометрический объект характеризуется минимальным числом клеток, необходимых для его покрытия. Число  $d$ , которое мы называем размерностью, появляется как показатель степени, в соотношении, связывающем число клеток с шагом.

$$N = \frac{1}{\delta^d} \text{ (где } \delta - \text{ шаг клетки, а } d - \text{ топологическая размерность).}$$

В современной математике множество определений размерности. Во многом это зависит от того, для чего мы ее вводим. Например, на руке  $3+7 = 10$  пальцев, однако на руках не 3 и 7 пальцев. Однако, когда берем перчатки, то  $5+5$ .

Основной чертой фракталов является изрезанность, извилистость, изогнутость геометрических объектов. При анализе топологической размерности фрактального объекта, его фрактальные свойства (изрезанность) теряются.

Мондельброт предложил использовать характеристику, предложенную Хаусдорфом (его идеи продолжил Безикевича).

Пусть исследуемый объект лежит в Эвклидовом пространстве с размерностью  $d$ . Будем покрывать это множество  $d$ -мерными кубиками, причем величина ребра не превышает некоторое значение  $\delta_i > 0$ ,  $\delta_i < \delta$ .

Введем сумму  $l_d(\delta_i) = \sum \delta_i^d$  (4) и определим нижнюю грань суммы по всем элементам покрытия.

$$\text{Введем нижнюю грань } L_d(\delta) = \inf \sum \delta_i^d \text{ (5)}$$

Устремим  $\delta$  к нулю. Возможны два варианта.

№1.  $d$  велико. Тогда  $L_d(\delta) \rightarrow 0_{\delta \rightarrow 0}, d \gg 1$

№2.  $L_d(\delta) \rightarrow \infty_{\delta \rightarrow 0}, d < 1$

№1, №2 - формула (6).

Отсюда следует, что может существовать такое критическое значение  $d_x$ , что  $\lim_{\delta \rightarrow 0} L_d(\delta) = \begin{cases} 0 & d > d_x \\ \infty & d < d_x \end{cases}$ .

Число  $d_x$  называется размерностью Хаусдорфа-Безикевича.

Для отрезка,  $d_x = 1$ , для квадрата  $d_x = 2$ , для куба  $d_x = 3$ .

Возьмем квадрат на плоскости со стороной  $a$  в двухмерном пространстве и покроем кубиками со стороной  $\delta$ .  $N = \frac{a^2}{\delta^2}$  - сколько квадратов, чтобы покрыть.

Применим формулу (4) к нашему квадрату.

$L_d(\delta) = \sum \delta_i^d = N(\delta) \delta^d \simeq a^2 \delta^{d-2}$ . Сумма определяется числом квадратов, размером и размерностью. Если  $d < 2$ , то сумма будет неограниченно расти, а если  $d > 2$ , то эта сумма будет стремиться к нулю.  $d = 2$  - тогда выполняется формула (6). Размерность Безикевича для квадрата, совпадает с топологической размерностью. Это - не доказательство, это иллюстрация определения. Доказательства значительно более сложные. К сожалению, компьютер до сих пор не может посчитать такую размерность. Минимизировать сумму по всем возможным разбиениям. Поэтому измеряется не размерность, а емкость. Емкость обозначается через  $d_c$ . Не путать с емкостью конденсатора.

Пусть  $N(\delta)$  - минимальное число кубиков со стороной  $\delta$ , необходимое для покрытия объекта. Если это число увеличивается с убыванием  $\delta$  как  $N(\delta) \sim \delta^{-d_c}$ , то это и есть **емкость множества**.

Заводим структуру, состоящую из элементов. Если каждая точка множества принадлежит хотя бы одной из структур, то это называется покрытием. В общем случае, элементы покрытия могут пересекаться. Наша площадь  $L_d(\delta) = N(\delta) \delta^d$

$L_d(\delta) > 0$ .  $N(\delta) \simeq \frac{1}{\delta^d}$ .  $N(\delta)$  (7) играет роль  $a$  в формуле  $L(\delta) = a \delta^{1-d}$ . Если прологорифмировать (7).  $\log N(\delta) \simeq \log L - d \log \delta$  (8).

$$d = -\frac{\log N(\delta)}{\log \delta} + \frac{\log L}{\log \delta}$$

Тогда **емкостью множества** называется следующий предел  $d_c = -\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log N(\delta)}{\log \delta}$  (9) (если она существует).

Поскольку при определении по Хаусдорфу используются различные определения покрытия, а мы использовали кубики одного и того же размера, то выполняется соотношение  $d_x \leq d_c$  (10)

Допустим, есть множество из  $n$  изолированных точек. Его можно покрыть  $n$  кубиками минимального размера. Число кубиков равно  $n$  и не зависит от  $\delta$  - размера грани. Тогда, из (9) получаем  $d_c = 0$  - эта величина совпадает с топологической размерностью точек. Конечная сумма тел с массой, равной нулю, равна нулю. Масса и мера - одно и то же в некотором смысле. Для конечного числа точек понятие емкости дает правильный результат.

Рассмотрим прямую линию с длиной  $l$  минимальное число кубиков равно  $N(\delta) = l/\delta$ . Если бы число было не минимальным, то кубики могли бы пересекаться. Формула (9) дает единицу.

Аналогично будет получаться с квадратом и кубом. Мы увидели, что понятие емкости не противоречит естественным понятиям (которые мы ощущаем органами чувств).

Важно, что для физических применений, определение (9) не подходит. В физике, реальными объектами, мы не можем  $\delta \rightarrow 0$ , мы перейдем к атомам. Емкость множества - математическое понятие, в физическом смысле оно не работает. Типичный физический подход - формула (8). Логарифм числа кубиков и логарифм шага кубика. В физике, отказываемся от (9) и заменяем на (8). Угол наклона этой прямой дает емкость  $d_c$ . Мы пришли к тому, что коэффициент  $d$  в (8) дает емкость.

Для реальных объектов, определять фрактальную размерность довольно сложно. Ситуация меняется в корне, когда мы говорим о регулярных фракталах. В природе их нет, но сами мы их построить можем. Мы приходим к упрощению формулы (9).

Число кубиков  $N(\delta) \sim \frac{1}{\delta^d}$ . Если  $\delta'$  - длина кубика, то  $N(\delta') \sim \frac{1}{\delta'^d}$ . Можем написать  $\frac{N(\delta)}{N(\delta')} = \left(\frac{\delta'}{\delta}\right)^d$  (11). Отсюда мы можем определить - чему равна емкость. Мы можем ввести

емкость как  $d_c = -\frac{\ln \frac{N(\delta)}{N(\delta')}}{\ln \left(\frac{\delta}{\delta'}\right)}$  (12). На самом деле, иногда пишут уравнение регрессии, а иногда используют формулу (12). Берем маленькие размеры ячейки и вычисляем размеры.

Если фигура обладает идеальным самоподобием, то можно рассуждать следующим образом: пусть на N-ом шаге построения фрактала, у нас есть параметр покрытия - число кубиков, и длина ребра. А на N+1-м шаге тоже есть число кубиков и длина ребра, т.е.  $N(\delta)$ ,  $\delta$  и  $N(\delta')$ ,  $m(\delta')$ . Тогда  $\frac{N(\delta)}{N(\delta')} = \frac{1}{p}$  p - показывает, каким числом элементов на шаге  $N(\delta')$  мы заменяем число  $\delta$ , т.е.  $\frac{\delta}{\delta'} = q > 1$ .  $\Gamma = \frac{1}{q}$ .  $d_c = \frac{\ln p}{\ln q} = \frac{\ln P}{\ln 1/\Gamma} = -\frac{\ln p}{\ln \Gamma}$  (13). Формула для определения емкости фрактала. Для регулярных самоподобных фракталов, емкость и размерность Хаусдорфа-Безикевича совпадают. Для фракталов, которые обычно встречаются в нелинейной динамике, размерность Хаусдорфа-Безикевича и емкость совпадают. Другие способы определения размерности также совпадают (это происходит в случае регулярных систем или задач нелинейной динамики). Обычно говорят просто о фрактальной размерности (общий термин). Учитывая, что для регулярных или самоподобных фракталов, размерности совпадают, следующая тема - регулярный самоподобный фрактал.

#### 24.05.17 лекция

## 13 Регулярный самоподобный фрактал

Множество Кантера (классическая пыль Кантера)

Берем единичный интервал. Делим на три равные части. Центральную удаляем. Получаем две части длиной 1/3. После этого, процедуру повторяем еще раз для каждого из интервалов. Длина полученных частей - 1/9. И т.д. до тех пор, пока не надоест.

Продолжаем до бесконечности, в результате получаем предельное множество точек, называемое канторовой пылью или множеством Кантера.

Чему равна суммарная длина удаенных интервалов в пределе. По картинке понятно, что

$$1. \quad \frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{2^2}{3^3} + \frac{2^3}{3^4} + \dots + \frac{2^{n-1}}{3^n} = \frac{1}{3} \left( 1 + \frac{2}{3} + \frac{2^2}{3^2} + \dots + \frac{2^{n-1}}{3^{n-1}} \right) = \frac{1}{3} \left( \frac{1}{1-\frac{2}{3}} \right) = 1$$

Из единицы удалили единицу. Остается что-то. Можно предположить, что в пределе остаются точки. Точки не имеют длины. В общем виде - точки с длиной 0. Однако, если рассмотреть оставшуюся канторову пыль и сравним с единичным замкнутым отрезком, то мы обнаружим, что мощности этих множеств совпадают, т.е. канторова пыль, которая остается после удаления, и отрезок (0,1) (длина которого равна 1) - их мощности совпадают. Между точками канторовой пыли и точками отрезка можно провести взаимно-однозначное соответствие, т.е. они эквивалентны.

Одно множество содержит n точек, другое - также n точек. В этом случае эквивалентность тривиальна.

В данном случае - нетривиальная ситуация, т.к. отрезок содержит бесконечное множество точек. Но мы можем построить взаимно-однозначное соответствие, а это доказывает, что они имеют одинаковую мощность.

Множества, содержащие бесконечное множество точек, можно различать по мощности. Даже если они содержат бесконечное число точек, одно из них может быть мощнее.

Пример: (0,1) и (0,∞) имеют одинаковую мощность, т.к. можем использовать преобразование  $y = \frac{1}{x}$ . Это доказывается в теории множеств.

Множество рациональных чисел всюду плотно во множестве иррациональных чисел (т.е. во множестве рациональных чисел всегда можно между ними найти иррациональные числа).

Вывод: на единичном отрезке содержится столько же точек, сколько на отрезке, имеющем нулевую длину (не занимающем места).

Можно ввести аналогичным образом канторово отображение единичного квадрата. Это отображение строится следующим образом: точка квадрата с прямоугольными координатами  $x = 0.123, y = 0.456$ . Можем эту точку отобразить на единичный отрезок. Эта точка отображения на единичный отрезок может быть отображены при помощи правила  $t = 0,123456$ .

Вычислим фрактальную размерность канторовой пыли (емкость канторова множества)

$$d_c = - \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log N(\delta)}{\log \delta}$$

$$2^n, \frac{1}{3^n}, \text{ тогда } d_c = - \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log 2^n}{\log(\frac{1}{3^n})} = \frac{\log 2}{\log 3} \simeq 0,6309 \quad (14)$$

Использовали понятие емкости, емкость оказалась ненулевая.

Топологическая размерность канторовой пыли равна  $d_\tau = 0$ .

Сделаем то же самое с квадратом.

Разделим квадрат на 4 части. Каждую часть делим на 4 части. Оставляем в каждом квадрате только элементы справа сверху и снизу слева, во внутренних квадратах только левый верхний и нижний правый. Разбиваем выделенные квадраты еще на 4 квадрата. штрихуем зеркально полученные внутренние квадраты и продолжаем на бесконечности. Попытаемся найти размерность этого множества. Это - обобщенное множество кантера.

Допустим, есть число  $r : 0 < r < 1/2$ .

Если удалить из единицы отрезок длиной  $1 - 2r$  с центром в точке  $1/2$  то получаем замкнутое множество, состоящее из двух отрезков длиной  $r$ . Длина каждого отрезка -  $r$ .

К этому отрезку применяем процедуру еще раз и выбрасываем средний интервал. Он будет иметь длину  $r(1 - 2r)$ . И повторять эту процедуру до бесконечности.

Получим набор из  $N = 2^n$  отрезков, шаг будет равняться  $\delta = r^n$ .  $d_c = - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log 2^n}{\log r^n} = \frac{\log 2}{\log r}$ .

Мощность множеств будет разная: от  $d_c \in (0, 1)$  в зависимости от  $r$ . Фрактал с произвольной размерностью - от 0 до 1. Размерность будет определяться  $r$ .

Любое несвязанное фрактальное множество точек называют **множеством кантера**.

Вернемся к квадратам. На каждом шаге квадрат заменяется четырьмя меньшими. Полученное множество также будет обладать свойством самоподобия.

$4^n$ - число квадратиков.

$\delta = \frac{1}{4^n}$  длина.

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log 4^n}{\log 4^n} = 1$  - ничего нет, а мощность равна 1. Если бы это было множество, состоящее из конечного числа элементов, то мы бы сказали, что точка. Понятно, что это фрктал. Требование нецелой размерности не является универсальным. В данном случае мы получили, что размерность множества равна 1, хотя понятно, что это множество нецелое, ведь оно располагается на плоскости. Множества, обладающие фрактальной размерностью имеют нецелые размерности.

Расчитаем фрактальную размерность снежинки Коха.

Пусть длина исходного треугольника равна 1. В качестве “кубиков”, которыми будем покрывать наше “тело” будем использовать отрезки прямой. На 0м шаге - сколькими кубиками мы можем покрыть равносторонний треугольник. 3 отрезка - каждый на ребро.  $\delta = 1$ ,  $N(\delta) = 3$ . Еще один шаг,  $N(\delta) = 12$ ,  $\delta = \frac{1}{3}$ .

Посмотрим, чему равна  $d_c = - \frac{\log(\frac{3}{12})}{\log(\frac{1}{3})} = \frac{\log 4}{\log 3} \simeq 1,2618$

Получилось, что это значение больше 1. Емкость этого множества оказалась больше 1. 1 - топологическая размерность, у нас получилось больше. Линия расположена на плоскости.  $n, n+m$ ,

Один элемент заменятся четырьмя. Длина увеличивается в  $4/3$  раза.

$L = 3 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^n$ . Подобные кривые при любом конечном  $N$ , Мандельброт назвал **предфракталами**. Снежинка Коха обладает следующим свойством - в идеале, она имеет линию бесконечной длины. Снежинка Коха - линия бесконечной длины, которая ограничивает конечную площадь.

Можем рассмотреть какой-нибудь остров с береговой линией. Можно рассматривать снежинку как некоторый остров, тогда береговая линия нашего острова бесконечно длинная.

Запишем выражение для длины береговой линии:  $L = 3 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^n = a\delta^{1-d}$ .  $\delta$  - масштаб измерения длины береговой линии.  $\delta = \left(\frac{1}{3}\right)^n$ . Допустим,  $a = 3$ . Если  $a = 3$ , то чему равна  $d$ .  $\delta = \frac{\ln 4}{\ln 3}$ .

Реально строим береговую линию с помощью карандаша и бумаги. Допустим, изначально треугольник имеет сторону 1 метр. На этом листе бумаги рисуем длину треугольника 1 метр карандашом, ширина карандашной линии -  $10^{-4}$  м. С математической точки зрения - можем рисовать бесконечно долго. С физической - есть ширина пера. Как только дойдем до стороны, длиной меньше ширины пера, то все. Сколько мы будем делить снежинку? Получается  $4/\ln(3) = 8$ ,  $\delta = \left(\frac{1}{3}\right)^8 = 10^{-4}$ .

$n = \frac{4}{\lg 3} = 8$ . Длина береговой линии такого острова будет равна  $L = 3 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^8 \simeq 30$ . Длина линии будет равна 30 м.

Реальная самоподобная фигура имеет конечную огибающую, математическая - бесконечную огибающую.

Рассмотрим салфетку Серпинского.

**Пропущена предыдущая пара ???**

**07.06.17**

Были рассмотрены детерминированные итерации при построении фракталов. Сейчас будет рассмотрен метод случайных итераций.

## 14 Метод случайных итераций

1. Берем начальную точку  $z_0$  (произвольно).

2. Выполняем преобразование:  $z_1 = \begin{cases} t_1(z_0) \\ t_2(z_0) \\ t_3(z_0) \end{cases}$  причем преобразование выбирается случайным способом.

3.  $z_2 = \begin{cases} t_1(z_1) \\ t_2(z_1) \\ t_3(z_1) \end{cases}$

4. И т.д.

В отличие от детерминированного случая, на каждом шаге мы выполняем только одно преобразование. При этом, в качестве  $t_1, t_2, t_3$  можно использовать те же преобразования, что и во время построения салфетки Серпинского. В итоге, все равно будет получен объект, который будет очень похож на салфетку Серпинского..

Возьмем равносторонний треугольник с координатами  $A(0,0)$ ,  $C(1,0)$ ,  $B\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ . Выберем внутри этого треугольника произвольную точку.

Возьмем игральную кость с 6ю гранями. Противоположные грани обозначим одинаковыми цифрами, таким образом игральная кость дает датчик случайных чисел принимающий значения  $[a, b, c]$ . Получаем число и в соответствии с числом выбираем соответствующее преобразование. Например, если выпала 1, то мысленно соединим произвольную точку линией с точкой А, посередине отрезка отмечаем точку. Если выпала  $b$  - то соединяем с В и отмечаем точку посередине. аналогично для С.

Таким образом получаем последовательность точек. Эта последовательность оказывается на пол-пути до нашей случайно выбранной точки  $z_0$ . Чтобы не нарушалась случайность, первые точки отбрасываем. Эта процедура повторяется многократно. Это число должно быть очень велико. Первые 100 точек, допустим, отбрасываем, т.к. самоподобие проявляется в малой степени. В результате выяснилось, что полученная структура полностью совпадает с салфеткой Серпинского. Этот алгоритм значительно проще предыдущего. Почему

А: Наше преобразование  $f_1(z) = \frac{z+A}{2} = \frac{z}{2}$ .

В:  $f_2(z) = \frac{z+B}{2} = \frac{1}{2}z + \frac{1}{2}$

С:  $f_3(z) = \frac{z+C}{2} = \frac{1}{2}z + \frac{1}{2}$

Каждый раз случайным образом выбираем преобразование. Если провести несколько серий экспериментов и сравнить полученные результаты, то мы получим фактически одинаковые изображения разных объектов. Некоторая случайность порождает строгий порядок, присущий салфеткой Серпинского. Как это объяснить?

Имеется движущаяся точка. В результате последовательности этих шагов, получаем некоторую орбиту (траекторию). При достаточно большом числе итераций, наша траектория подойдет к каждой точке салфетки Серпинского сколь угодно близко, при этом впринципе орбита может не совпадать ни с одной точкой салфетки Серпинского.

Другими словами, если точка  $z_0$  принадлежит удаляемому центральному треугольнику, то орбита, которая имеет начало в точке  $z_0$  не имеет с салфеткой Серпинского ни одной общей точки, но при этом имитирует салфетку Серпинского, причем до такой степени, что визуально их отличить невозможно. Фактически получается, что салфетка стремится к аттрактору, а аттрактор - это салфетка Серпинского. Решение дифференциального уравнения стремится к аттрактору, а у нас нет дифференциального уравнения.

Салфетка Серпинского представляет собой странный аттрактор для нашей системы итерируемых функций при случайном выборе функций.

Также, если выбрать какую-то другую начальную точку, то получим другую орбиту. Таким образом, у нас есть две степени свободы. Что все это означает?

Через некоторое количество шагов, итерационный процесс “забывает” откуда он произошел (забывает о  $z_0$ ). ДУ бывают консервативные и диссипативные. Консервативные в любое время помнит, из какой точки вышло. Пример - уравнение Ньютона. Если знаем положение точки в начальный момент времени, то мы можем предсказать состояние в любой момент в будущем (т.е. сохраняет свою энергию).

Бывают диссипативные системы, обладающие свойствами нашей системы функции. Система “забывает” о своем начальном состоянии, из разных начальных состояний приходим к одному и тому же решению, т.е. не сохраняет информацию. Пример: любые ДУ, описываемые в термодинамике - любые системы, в которых есть трение, вязкость, потеря электричества на тепло. С течением времени, точка остановится. Мы выйдем на стационарный режим. В этом смысле, решение системы не является обратимым. Функция, которая описывает это решение, не может быть обращена, нельзя получить обратную функцию. Например, все такие

вещи стали развиваться при анализе ДУ. вспоминаем Аттрактор Лоренца. Аналогично вело себя стачечное движение 1905 стачей. Когда составили мат. модель, выяснили, что при определенном наборе параметров, оно ведет себя точно также.

Может быть нелинейное комплексное отображение (обычно, это степенной закон).

Если есть отображение, и это отображение записывается в форме итераций  $z_{n+1} = f(z_n)$ , то говорим, что такой итерационный процесс имеет неподвижную точку  $\tilde{z} : f(z) = z$ . Аналогичный принцип был когда мы искали корни методом итераций. Т.е. это точка, инвариантная к преобразованиям. Как и в собственных числах.

Чтобы определить характер неподвижной точки, нужно посчитать производную. Производная функции в точке меньше 1 - **притягивающая** точка. Если больше 1, то точка называется **отталкивающей**.

$|f'(z)| < 1, > 1, = 1$ , когда  $= 1$  - то **нейтральная** точка. Эти определения становятся очевидными, если разложить функцию в окрестности точки в ряд Тейлора. Тогда, если производная меньше 1 то приходим в точку, если больше 1 - то уходим от точки. Это можно продемонстрировать на методе Ньютона-Рафсона.

Впринципе, для притягивающей неподвижной точки можно ввести **область притяжения**: сказать, что  $A(z)$  - область притяжения для итерационного процесса, если она обладает следующими свойствами:  $A(\tilde{z}) = \{z : f(z) \rightarrow \tilde{z}, n \rightarrow \infty\}$ .

Существуют периодические точки и циклы, состоящие из периодических точек. Впринципе, неподвижная точка образует цикл с периодом 1  $f(\xi) = \xi$ . Цикл с периодом 2 будет состоять из двух точек, таких что  $f(\xi_1) = \xi_2, f(\xi_2) = \xi_1$ . Либо, наша итерационная траектория всегда будет находиться в  $\xi_1$ , либо в  $\xi_2$ , либо прыгать из одной в другую.

Аналогично определяются точки с периодом  $n$  (целым числом), это означает, что  $z_{n+1} = f(f(z_n)) = f^{(2)}(z_n)$ . Например  $f(\xi_1) = f(\xi_2) = \xi_1$  или  $f(\xi_1) = f(\xi_2) = \xi_2$ . Если имеется точка с периодом 2, то мы можем вернуться в исходную точку.  $\xi = f^{(n)}(\xi)$ . Если производная в случае 2 меньше единицы - притягивающее, если больше - отталкивающие периодические точки.

**Аттрактором** на комплексной плоскости является точка или точки, в которых сходятся итерационный процесс при числе итераций, стремящемся к бесконечности. Впринципе, их может быть несколько. Он может состоять из бесконечного числа точек, может представлять прямую линию или какое-либо другое сложное множество (например, канторову пыль). Если в процессе итераций, изображающая точка уходит на бесконечность, то аттрактором считается бесконечно удаленная точка.

Что такое хаос? ???

В случае детерминированного хаоса, случайности нет вообще. Когда наблюдаем за детерминированным хаосом, будет казаться, что флуктуации случайны, но это не так. Вспоминаем аттрактор Лоренца. Случайность может быть связана только с машинным округлением. Траектория всегда описывается числами. Траектория на одном и том же компьютере и одной и той же программе будет совпадать. Но процессы округления вносят случайность.

Считается, что удовлетворительного определения детерминированного хаоса нет, однако основной его характеристикой является его непредсказуемость. Это свойство называют существенной зависимостью от начальных условий. В каком-то смысле, итерацию Ньютона являются иллюстрацией этого.  $y = f'(x_1)(x - x_1) + f(x_1) = 0$ .

Для комплексной плоскости получим  $z_{n+1} = z_n - \frac{f(z_n)}{f'(z_n)}$ .

К чему приведет метод итераций Ньютона, если ??? не успел записать

Допустим  $f(z) = z^2 - 1$ . Здесь процесс Ньютона дает следующее:  $z_{n+1} = z_n - \frac{z_n^2 - 1}{2z} =$



$\frac{1}{2} \left( z + \frac{1}{z_n} \right)$ . Выясняется, что если начальная точка лежит в правой полуплоскости, то в процессе итераций получим  $z_n$  стремится к  $+1$ , в левой полуплоскости - к  $-1$ . Если исключить начальные точки, которые равноудалены от корней, то итерации будут сходиться к ближайшему корню. Если же  $z_0$  лежит на мнимой оси, то итерации не сходятся вообще, а размещаются хаотически вдоль мнимой оси. Такая ситуация называется динамическим хаосом. Динамический хаос - впринципе имеем возможно повторить. Если кто-то из нас в будущем столкнется с моделированием Монте-Карло, то должны четко представлять, что датчик случайных чисел - детерминированный хаос. Если датчик случайных чисел имеет период  $t$ , то мы его использовать при работе с периодом  $2t, 3t, 4t$  и т.д. Он должен быть принципиально много меньше. Если же соизмеримо или много меньше, то выкидываем ДПСЧ в корзину и ищем новый. Это важно при моделировании Монте-Карло. Рассеяние света, например.