Теория СДУ

ПМИ-4

December 4, 2017

Contents

1 Стохастический интеграл, формула Ито

1.1 Винеровский процесс.

Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ - заданное вероятностное пространство.

Случайная величина - это измеримое отображение $\Omega \to \mathcal{R}$, $\{\omega : \xi(\omega) \le x\} \in \mathcal{F}$.

Винеровский процесс $w(t)$ - это случайный процесс, обладающий следующими свойствами:

1. $w(0) = 0$

2. Приращение $\Delta_t w = w(t+\Delta t) - w(t)$ - гауссовская СВ с распределением $\mathcal{N}(0, \Delta t)$, т.е.

   (a) $E\Delta_t w = 0$

   (b) $E\left|\Delta_t w\right|^2 = \Delta t$

3. Приращение $\Delta_t w$ и $\Delta_S w$, где $0 \leq s < t$ на непересекающихся интервалах независимы: $E\Delta_t w \Delta_s w = 0$.

Пусть $(\Omega, \mathcal{F})$ - измеримое пространство и μ, ν - вероятностные меры, заданные на нем. Рассмотрим σ - подалгебру $\mathcal{H}$ σ - алгебры $\mathcal{F}$ (сигма-подалгебра: каждое множество из $\mathcal{H}$ лежит в $\mathcal{F}$, т.е. из того, что мы попадаем в $\mathcal{H}$ мы попадаем в $\mathcal{F}$, но не наоборот).

Тогда **условное математическое ожидание** случайной величины ξ относительно $\mathcal{H}$ обозначим $E[\xi|\mathcal{H}]$. Условное математическое ожидание - это $\mathcal{H}$- измеримая случайная величина, определяемая соотношением

$$\int_H E[\xi|\mathcal{H}]\, P(d\omega) = \int_H \xi(\omega)\, P(d\omega), \forall H \in \mathcal{H}$$

Пусть μ и ν - две вероятностные меры, определенные на $(\Omega, \mathcal{F})$ и пусть ν **абсолютно непрерывна относительно** μ (это значит: если $\mu(A) = 0, A \in \mathcal{F}$, то $\nu(A) = 0$. Обозначают это $\nu << \mu$.

Если при этом $\mu << \nu$, то меры называются **эквивалентыми:** $\mu \sim \nu$**.**

Теорема Радона-Никодима (Р-Н): Если μ, ν - вероятностные меры на $(\Omega, \mathcal{F})$ и $\nu << \mu$, то существует единственная положительная измеримая функция

$$\rho(\omega) : \nu(H) = \int_H \rho(\omega)\, \mu(d\omega), \forall H \in \mathcal{F}$$

Функция $\rho(\omega) = \frac{\nu(d\omega)}{\mu(d\omega)}$(не деление, это такое же деление, как когда пишем производную) называется **производной Радона-Никодима (Р-Н).**

Возвращаясь к определению условного среднего, рассмотрим меру $\mu(H) = \int_H \xi(\omega)\, P(d\omega), H \in \mathcal{H}$. Эта мера $\mu(H)$ абсолютно непрерывна относительно $P(d\omega)|_H$ и ее производная Р-Н - это $E[\xi|\mathcal{H}]$.

1.2 Свойства условного среднего

1. $E[\alpha\xi + \beta\eta/\mathcal{H}] = \alpha E[\xi|\mathcal{H}] + \beta E[\xi|\mathcal{H}]$, где $\alpha, \beta \in \mathcal{R}$.

2. $E[\xi|\mathcal{H}] = \xi$ если ξ - $\mathcal{H}$- измеримо.

3. $E[\xi|\mathcal{H}] = E\xi$

4. $E[E[\xi|\mathcal{H}]] = E\xi$

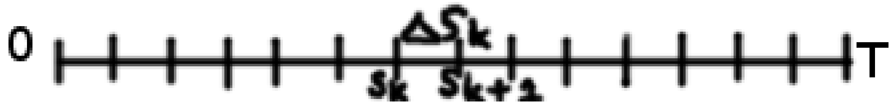
5. Рассмотрим σ-подалгебру $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$, при этом $E\xi \equiv E[\xi|\mathcal{F}_0]$. Пусть $\mathcal{H} \supset \mathcal{H}_1$ - подалгебры алгебры $\mathcal{F}$, тогда $E[E[\xi|\mathcal{H}_1]|\mathcal{H}] = E[\xi|\mathcal{H}_1]$

6. $E[\xi\eta|\mathcal{H}] = \eta E[\xi|\mathcal{H}]$ если η - $\mathcal{H}$ -измеримая СВ.

1.3 Стохастический интеграл и стохастичесий дифференциал.

Пусть $A(s)$-$\mathcal{F}_s$-измеримый случайный процесс, где $\mathcal{F}_s \equiv \mathcal{F}_s^w$- поток σ-подалгебр, порожденный винеровским процессом.

Рассмотрим разбиение вида:



Предположим, что $A(s)$- ступенчатая функция и рассмотрим СВ

$$I(A) = \sum_{k=1}^{n} A(s_k)\,\Delta_{s_k}\omega = \sum_{k=1}^{n} A(s_k)\left[\omega(s_k + \Delta s) - \omega(s_k)\right]$$

Это очень похоже на вычисление площади под графиком.

$I(A)$ называется **стохастическим интегралом** от ступенчатой функции $A(s)$. Его свойства:

1. $EI(A)$. Для того, чтобы вычислить $EI(A)$ воспользуемся свойствами условных средних (св-во 2 усл. сред. и св-во 2 Винеровского процесса)

$$E\sum_{k=1}^{n} A(s_k)\,\Delta_{s_k}\omega = E\left[\sum_{k=1}^{n} E\left(A(s_k)\,\Delta_{s_k}\omega\right)/\mathcal{F}_{s_k}\right] = E\left[\sum_{k=1}^{n} A(s_k)\,E\left[\Delta_{s_k}\omega|\mathcal{F}_{s_k}\right]\right] = 0$$

2.

$$E\left|I(A)\right|^2 = E\left[\sum A(s_k)\,\Delta_{s_k}\omega\right]^2 =$$
$$= E\sum\left(A(s_k)\,\Delta_{s_k}\omega\right)^2 + E\left[\sum\sum A(t_k)\,\Delta_{t_k}\omega\cdot A(s_k)\,\Delta_{s_k}\omega\right]^2 + E\left[\sum\sum A(s_k)\,\Delta_{s_k}\omega\cdot A(s_j)\,\Delta_{s_j}\omega\right.$$
$$= E\sum E\left[\left[A(S_k)\,\Delta_{s_k}\omega\right]^2|\mathcal{F}_{s_k}\right] = E\sum A^2(s_k)\,E\left[\Delta_{s_k}\omega\right]^2|\mathcal{F}_{s_k} = E\sum A^2(s_k)\left[s_{k+1} - s_k\right]$$

$$E\left|I(A)\right|^2 = \sum EA^2(s_k)\,\Delta_k s$$

??? во второй формуле непонятно с индексами

Другими словами, для ступенчатых функций $I(A) = \int_0^T A(s)\,dw(s)$ и $E\left[\int_0^T A(s)\,dw(s)\right] = 0$, $E\left[\int_0^T A(s)\,dw(s)\right]^2 = \int_0^T EA^2(s)\,ds$

Построение стохастического интеграла можно продолжить на следующий класс случайных функций $\mathcal{H}_s$, таких что $E\int_0^T \left(A(s) - A_n(s)\right)^2 ds \to 0$ при $n \to \infty$ где $A_n(s)$ - это ступенчатая функция

$$A_n(s) = \begin{cases} A(s_k) & s_k \le s < s_{k+1} \\ 0 & \text{в противном случае} \end{cases}, k = 1, ..., n$$

Для функций из этого класса $I(A) = \lim I_n(A)$ по вероятности.

При этом $EI(A) = 0, E\left[I(A)\right]^2 = \int_0^T EA^2(s)\,ds$

Соответствующий интеграл с переменным верхним пределом определим соотношением

$$\int_0^t A(s)\,dw(s) = \int_0^T I(s \le t)\,A(s)\,dw(s)$$

Стохастический интеграл $\int_0^t A(s)\,dw(s)$, определенный выше, является $\mathcal{F}_t$-мартингалом (локальным).

1.4 Мартингалы.

Случайный процесс $X(t)$ является $\mathcal{F}_t$- мартингалом, если

$E|X(t)| < \infty$, $E[M(T)|\mathcal{F}_t] = M(t)$

Если $E|X(t)| < \infty$ при $t \leq T$, то говорят, что X - **локальный мартингал**.

Примеры:

№1. Винеровский процесс.

$E[w(T)|\mathcal{F}_t] = w(t)$, $E[w(T) - w(t) + w(t)|\mathcal{F}_t] = E[w(T) - w(t)|\mathcal{F}_t] + w(t) = w(t)$. Используется свойство приращения Гауссовской величины.

Заметим, что $w(t)$- это локальный мартингал, т.к. $E|w(t)|^2 = t$??? П

№2. Стохастический интеграл $\int_0^t A(s)\,dw(s)$ тоже является локальным $\mathcal{F}_t$ - мартингалом: $E\left[\int_0^T A(s)\,dw(s)|\mathcal{F}_t\right] = \int_0^t A(s)\,dw(s)$.

Действительно, по аналогии с предыдущим примером

$E\left[\left[\int_0^T A(s)\,dw(s) - \int_0^t A(s)\,dw(s)\right] + \int_0^t A(s)\,dw(s)|\mathcal{F}_t\right] = \int_0^t A(s)\,dw(s)$ поскольку $E\left[\int_t^T A(s)\,dw(s)|\mathcal{F}_t\right] = 0$

№3. $w^2(t)$ - **не является мартингалом**. Для любого мартингала $X(t)$ справедливо соотношение $E[X(T) - X(t)|\mathcal{F}_t] = 0$ ($X(T) - X(t)$- мартингал-разность)

Случайный процесс $w^2(t)$ обладает свойством $Ew^2(t) = t$, при этом $w^2(t) - t$ является $\mathcal{F}_t$- мартингалом и называется **квадратичным мартингалом**.

1.5 Формула Ито

Говорят, что случайный процесс $\xi(t)$ обладает **стохастическим дифференциалом** $d\xi(t) = a(t)\,dt + A(t)\,dw(t)$ если с вероятностью 1 справедливо соотношение $\xi(t) = \xi(s) + \int_s^t a(\vartheta)\,d\vartheta + \int_s^t A(\vartheta)\,dw(\vartheta)$

Пусть $\xi(t)$ - случайный процесс, обладающий стохастическим дифференциалом $d\xi = a(t)\,dt + A(t)\,dw(t)$и $f(t,x)$ - неслучайная функция, дифференцируемая по t и дважды дифференцируепмая по $x \in \mathcal{R}$.

$a(\vartheta) \in \mathcal{R}, A(\vartheta) \in \mathcal{R}$.

Тогда случайный процесс $\eta(t) = f(t, \xi(t))$ обладает стохастическим дифференциалом вида

$$d\eta(t) = \left[\frac{\partial f}{\partial t}(t,\xi(t)) + a(t)\frac{\partial f}{\partial x}(t,\xi(t)) + \frac{1}{2}A^2(t)\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t,\xi(t))\right]dt + \frac{\partial f(t,\xi(t))}{\partial x}A(t)\,dw(t)$$

Доказательство этой формулы основано на формуле Тейлора и свойствах винеровского процесса.

В силу формулы Тейлора $f(t+\Delta t, x(t+\Delta t)) = f(t, x(t)) + f'_t(...)\Delta t + f'_x(...)\Delta x + \frac{1}{2}f''_x(...)\Delta^2 x + ...$, $\Delta x = x(t+\Delta t) - x(t)$, если бы была неслучайная ситуация, то на третьем слагаемом мы бы остановились.

При переходе к стохастическому случаю

$f(t+\Delta t, \xi(t+\Delta t)) = f(t,\xi(t)) + f'_t(t,\xi(t))\Delta t + f'_x(t,\xi(t))\Delta\xi + \frac{1}{2}f''_x(t,\xi(t))(\Delta\xi(t))^2 + ...$

$\Delta\xi = a(t)\Delta t + A(t)\Delta w$

$(\Delta\xi)^2 \sim a^2(T)\Delta t$

Винеровский процесс обладает свойством: $\Delta w \sim \sqrt{\Delta t}$, мы этим воспользовались ??? В каком смысле

Интегральный вид формулы Ито.

Если $d\xi = a(t)\,dt + A(t)\,dw(t)$, то $\eta(t) = f(t,\xi(t))$ имеет вид $f(t,\xi(t)) = f(s,\xi(s)) + f\int_s^t \left[\frac{\partial f}{\partial \vartheta} + a(\vartheta)\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{2}A^2(\vartheta)\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right](\vartheta,\xi(\vartheta))\,d\vartheta + \int_s^t \frac{\partial f(\vartheta,\xi(\vartheta))}{\partial x}A(\vartheta)\,dw(\vartheta)$

Примеры

Первый пример:
$\eta(t) = (w(t))^2$
$d\xi = dw, f(x) = x^2$
$a = 0, A = 1$
$f'(x) = 2x, f''(x) = 2$
Тогда $d\eta = dt + 2w(t)\,dw(t)$
Из этой формулы следует,что интеграл $\int_0^T w(t)\,dw(t) = \frac{1}{2}w^2(T) - \frac{T}{2} = (w(T))^2 - (w(0))^2 = T - 0 = 2\int_0^T w(t)\,dw(t)$??? Не до конца понятная формула
Второй пример: $d\xi(t) = 2\xi(t)\,dt + 4t dw(t)$, $f(t,x) = |x|^2$, $f'_t = 0, f'_x = 2x, f''_x = 2$, $a(t) = 2t, A(t) = 4t$.
$d\eta = [2t \cdot 2\xi(t) + 16t^2]\,dt + 2\xi(t) \cdot 4t dw(t)$
Третий пример: $d\xi = a(t)\,dt + A(t)\,dw(t)$, $f(t,x) = \exp x$, $f'_x = f''_x = \exp x$,
$\eta(t) = \exp(\xi(t)) = e^{\xi(t)}$
$d\eta = \left[exp(\xi(t))\,a(t) + \frac{1}{2}A^2(t)\,exp(\xi(t))\right]dt + \exp(\xi(t))\,A(t)\,dw(t)$
$d\eta = \eta(t)\left[a(t) + \frac{1}{2}A^2(t)\right]dt + \eta(t)\,A(t)\,dw(t)$ - линейное стохастическое уравнение. Теперь, мы знаем как его решать: $\exp(\xi(t))$.
$d\xi = tdt + 5dw(t)$
$f(t,x) = \ln x$, $a = t, A = 5, f'_t = 0, f'_x = \frac{1}{x}, f''_x = -\frac{1}{x^2}$
$d\eta = \left[t \cdot \frac{1}{\xi(t)} - \frac{25}{2}\frac{1}{\xi^2(t)}\right]dt + \frac{5}{\xi(t)}dw(t)$

1.6 Многомерный стохастический интеграл

Многомерный винеровский процесс $w(t) \in \mathcal{R}^d$ - это случайный процесс, такой, что его компоненты $w(t) = (w_1(t), w_2(t), ..., w_d(t))$ $w_k(t)$ - это независимые винеровские процессы (скалярные).

Напомним, что в одномерном случае, $w(t) \in \mathcal{R}$ имеет плотность распределения $f(t,x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t^2}}e^{-\frac{x^2}{2t}}$, $F(t,x) = P(\xi_t \le x)$
$f(t,x) = \frac{1}{\left(\sqrt{2\pi t}\right)^d}e^{-\frac{||x||^2}{2t}} = \frac{1}{\left(\sqrt{2\pi t}\right)^d}\prod_{k=1}^d e^{-\frac{x_k^2}{2t}}$

1. $Ew_i(t)\,w_k(t) = 0, i \ne k = 1, ..., d$
2. $E||w(t)||^2 = E\sum_{i=1}^d (w_i(t))^2 = d \cdot t$
3. $p(t,x,y) =$??? ??? Правильны ли эти свойства,

Стохастический интеграл: пусть $A(t) \in \mathcal{R}^n \otimes \mathcal{R}^n \equiv Matz^n$ - ступенчатая функция:
$A(t)\begin{cases} A(t_k) & t_k \le t < t_{k+1} \\ 0 & \text{иначе} \end{cases}$
Зададим стохастический интеграл соотношением

$$I(A) = \sum A(t_k)\,\Delta_k w \in \mathcal{R}^n$$

Заметим, что $A(t)$ - F_t^w - измерима
$(x,y) = \sum x_k \cdot y_k$ - скалярное произведение
$EI(A) = E\sum A(t_k)\,\Delta_k w = E\sum A(t_k)\,E[\Delta_k w/\mathcal{F}_{t_k}] = 0$, т.к. $A(t_k)$- $\mathcal{F}_{t_k}$ - измеримая.
$(I(A))_l = \sum_{k=1}^m \sum^t A_{jl}\Delta_k w_j$??? Правильная ли это формула? В некоторых конспектах ее нет, по каким индексам идет суммирование - непонятно
$\Delta_k w_j = w_j(t_{k+1}) - w_j(t_k)$
$E\left(I(A)^2\right) = \sum_k AA\Delta_k t$
$E\,||I(A)||^2 = E\,||\sum A(t_k)\,\Delta_k w||^2$

При вычислении:

$E\left(A\left(t_k\right)\Delta_k w, A\left(t_j\right)\Delta_j w\right)$

Пусть $t_k > t_j$, тогда $= E\left[E\left[A\left(t_k\right)\Delta_k w, A\left(t_j\right)\Delta_j w | F_{t_j}\right]\right]$

Заметим, что:

$\left(A\left(t_k\right)\Delta_k w, A\left(t_j\right)\Delta_j w\right) = E\sum_j A_{lq}\left(t_l\right)\Delta_j w_q \cdot E\sum_m A_{lm}\left(t_k\right)\Delta_k w_m = E\sum_l\sum_m A_{ml}\left(t_k\right)\Delta_k w_m = A_{ql}\left(t_i\right)p_j \cdot w_q$??? ЧТО С ИНДЕКСАМИ? Кажется, здесь есть серьезная ошибка.

В силу независимости $\Delta_k w_m$ и $\Delta_j w_q$ при $j \neq q$

$E\left(I\left(A\right)\right)^2 = \int_0^T EA^2\left(t\right)dt$

$E\sum\left|A_{ml}\left(t_k\right)\Delta_k w_m\right|^2$??? Что это значит

$A^2 = AA^T$

$A_{ml}\left(t_k\right)A_{lq}\Delta_k w_m \Delta_k w_q$

$A_{ml}A_{lm} = TrA^2$, где $TrA = \sum_{i=1}^n B_{ii}$

Класс интегрируемых функций - это матричные функции $A\left(t\right)$ такие, что $E\int_0^T TrA^2\left(\tau\right)\Delta\tau < \infty$

Случайный процесс $\xi\left(t\right) \in \mathcal{R}^n$ имеет **стохастический дифференциал**

$$d\xi = a\left(t\right)dt + A\left(t\right)dw\left(t\right) \tag{1.1}$$

где $w\left(t\right) \in \mathcal{R}, a\left(t\right) \in \mathcal{R}^n, A\left(t\right) \in Matr^n$если с вероятностью 1 справедливо равенство

$$\xi\left(t\right) = \xi\left(s\right) + \int_s^t a\left(\vartheta\right)d\vartheta + \int_s^t A\left(\vartheta\right)dw\left(\vartheta\right) \tag{1.2}$$

2 Многомерная формула Ито

Пусть $\xi\left(t\right)$ имеет стохастический дифференциал вида (1) и $f\left(t,x\right) \in \mathcal{R}$, $t \in \left[0,T\right], x \in \mathcal{R}^n$ - это диференцируемая на t и дважды дифференцируемая по x скалярная функция

Тогда случайный процесс $\eta\left(t\right) = f\left(t,\xi\left(t\right)\right)$ имеет стохастический дифференциал вида

$$d\eta = \left[\frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{i=1}^n a_i\left(t\right)\frac{\partial f}{\partial x_i} + \sum_{i,k,j} A_{ik}\left(t\right)\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}A_{kj}\left(t\right)\right]\left(t,\xi\left(t\right)\right)dt + \sum_{i,l}\frac{\partial f}{\partial x_l}A_k\left(t\right)dw_k\left(t\right) \tag{2.1}$$

??? Правильная ли эта формула? Также вопрос к индексам

Пусть $\nabla f\left(x\right) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, .., \frac{\partial f}{\partial x_n}\right)$, $f''\left(x\right) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right)_{i,j=1}^n$

Тогда формулу (3.3) можно переписать в виде:

$$d\eta = \left[\frac{\partial f\left(t,\xi\left(t\right)\right)}{\partial t} + \left(a\left(t\right), \nabla f\left(t,\xi\left(t\right)\right)\right) + \frac{1}{2}TrA\left(t\right)f''\left(t,\xi\left(t\right)\right)A^T\left(t\right)\right]dt + \left(\nabla f, A\left(t\right)\right)dw\left(t\right) \tag{2.2}$$

05.10.17

3 Стохастические дифференциальные уравнения (СДУ)

Пусть $a\left(t,x\right)$ и $A\left(t,x\right)$ - заданные функции.

Пусть $\left(\Omega, \mathcal{F}, P\right)$ - заданное вероятностное пространство и $w\left(t\right)$ - стандартный винеровский процесс.

Рассмотрим СДУ вида

$$d\xi = a\left(t,\xi\left(t\right)\right)dt + A\left(t,\xi\left(t\right)\right)dw\left(t\right) \tag{3.1}$$

Заметим, что $a\left(t,x\right)$ и $A\left(t,x\right)$ могут быть случайными, но тогда мы будем предполагать, что они F_t^w - измеримы.

Мы будем решать задачу Коши для СДУ (3.1) с условиями

$$\xi\left(s\right) = x\,(\text{или } \xi\left(s\right) = \xi_0 - F_s - \text{измерима}) \tag{3.2}$$

Будем говорить, что процесс $\xi\left(t\right)$ является решением (3.1), (3.2) если с вероятностью 1 справедливо равенство

$$\xi\left(T\right) = \xi\left(s\right) + \int_s^T a\left(\xi,\xi\left(\vartheta\right)\right)d\vartheta + \int_s^T A\left(\vartheta,\xi\left(\vartheta\right)\right)dw\left(\vartheta\right) \tag{3.3}$$

Рассмотрим уравнение

$$\xi\left(t\right) = x + \int_s^t a\left(\vartheta,\xi\left(\vartheta\right)\right)d\vartheta + \int_s^t A\left(\vartheta,\xi\left(\vartheta\right)\right)dw\left(\vartheta\right) \tag{3.4}$$

Сформулируем необходимое и достаточное условие существования решения уравнения (3.4). Будем говорить, что выполнено условие У1, если справедилвы оценки:

$$\begin{gathered}
\left|a\left(t,x\right)\right|^2 + \left|A\left(t,x\right)\right|^2 \le C\left[1+\left|x\right|^2\right] \\
\left|a\left(t,x\right)-a\left(t,y\right)\right|^2 + \left|A\left(t,x\right)-A\left(t,y\right)\right|^2 \le L\left(x,y\right)^2 \\
C, L - \text{неслучайные постоянные}
\end{gathered}$$

При этом оценки выполняются либо с вероятностью 1, либо в среднем квадратичном.

Теорема 3.1: Пусть коэффициенты (3.1) (3.2) (или 3.4) удовлетворяют условию У1. Тогда существует единственное решение $\xi\left(t\right) = \xi_{s,x}\left(t\right)$

Доказательство: Построим систему последовательных приближений:

$\xi^1\left(t\right) = x + \int_s^t a\left(\vartheta,x\right)d\vartheta + \int_s^T A\left(\vartheta,x\right)dw\left(\vartheta\right)$

$\xi^2\left(t\right) = x\int_s^t a\left(\vartheta,\xi^1\left(\vartheta\right)\right)d\vartheta + \int_s^t A\left(\vartheta,\xi^1\left(\vartheta\right)\right)dw\left(\vartheta\right)$

Общий вид: $\xi^n\left(t\right) = x + \int_s^t a\left(\vartheta,\xi^{n-1}\left(\vartheta\right)\right)d\vartheta + \int_s^t A\left(\vartheta,\xi^{n-1}\left(\vartheta\right)\right)dw\left(\vartheta\right)$

Обозначим $\mathcal{H}_T^2 = \left\{\xi\left(\vartheta\right), 0 \le \vartheta \le T : \sup\limits_{\vartheta} E\xi^2\left(\vartheta\right) < \infty\right\}$

Наша цель показать, что $\xi^n \in \mathcal{H}_T^2$ и существует единственный предел $\underset{n\to\infty}{lim}\xi^n\left(t\right) = s\left(t\right)$, удовлетворяющий (5.4). ??? Точно 2? Может быть n?

Для доказательства единственности решения уравнения (5.4) воспользуемся леммой Гроноулла.

Лемма Гроноулла: Пусть $\alpha\left(t\right)$ - положительная функция, удовлетворяющая неравенству

$$\alpha\left(t\right) \le A + \int_0^t B\alpha\left(\tau\right)d\tau \tag{3.5}$$

Тогда

$$\alpha\left(t\right) \le Ae^{Bt} \tag{3.6}$$

Доказательство леммы: проитерируем оценку

$\alpha\left(t\right) \le A + \int_0^t B\left[A + \int_0^\tau B\alpha\left(\vartheta\right)d\vartheta\right]d\tau = A + ABt + \int_0^t\int_0^\tau B\alpha\left(\vartheta\right)d\vartheta d\tau \le$

$\alpha\left(t\right) \le A\left(1+Bt\right) + B\int_0^t\int_0^\tau\left[A + \int_0^{\vartheta_1} B\alpha\left(\vartheta\right)\right]d\vartheta d\tau...$

$= A\left(1 + Bt + B + B^2 \int\int\int ...\right)$
$\int_0^t \int_0^\tau d\vartheta d\tau = \int_0^t \tau d\tau = \frac{t^2}{2}$
Повторяя эти оценки, мы получим неравенство
$\alpha(t) \le A\left[1 + Bt + B^2\frac{t^2}{2!} + ... + B^n\frac{t^n}{n!} + ...\right] = Ae^{Bt}$

Замечание: аналогично доказывается, что если $\alpha(t) \le A + \int_0^t B(\tau)\alpha(\tau)d\tau$, то $\alpha(t) \le Ae^{\int_0^t B(\tau)d\tau}$

Вернемся к доказательству теоремы 5.1:

Для того, чтобы доказать единственность, мы предположим обратное, т.е. пусть суещствует 2 решения уравнения (5.4) $\xi(t)$ и $\eta(t)$.

Оценим разность

$$\alpha(t) = E\left|\xi(t) - \eta(t)\right|^2 = E\left\{\int_0^t \left[a(\vartheta,\xi(\vartheta)) - a(\vartheta,\eta(\vartheta))\right]d\vartheta + \int_0^t \left[A(\vartheta,\xi(\vartheta)) - A(\vartheta,\eta(\vartheta))\right]dw(\vartheta)\right\}^2$$

??? Почему интегралы от 0 а не от s?

С учетом того, что
$\left|\int_0^t a(\tau)d\tau\right|^2 \le$выкладки
$|(c,b)|^2 \le |c|^2|b|^2$, а значит $\left[\int_0^t 1\cdot a(\tau)d\tau\right]^2 \le \int_0^t 1^2 d\tau \int_0^t a^2(\tau)d\tau = t\int_0^t a^2(\tau)d\tau$,
$E\left|\int_0^t A(\tau)dw(\tau)\right|^2 \le \int_0^t A^2(\tau)d\tau$??? Откуда эта формула

Воспользуемся тем, что $|a+b|^2 \le 2a^2 + 2b^2$
$\alpha(t) \le t\int_0^t E\left|a(\vartheta,\xi(\vartheta)) - a(\vartheta,\eta(\vartheta))\right|^2 d\vartheta + \int_0^t E\left[A(\vartheta,\xi(\vartheta)) - A(\vartheta,\eta(\vartheta))\right]^2 d\vartheta$

Используя условие У1 мы получим ??? Как мы их используем? Почему второй интеграл с мат. ожиданием?

$\alpha(t) \le Lt\int_0^t \alpha(\vartheta)d\vartheta + L\int_0^t \alpha(\vartheta)d\vartheta = L(1+t)\int_0^t \alpha(\vartheta)d\vartheta$ в силу леммы Гронуолла $E\left|\xi(t) - \eta(t)\right|^2 = 0$??? Как здесь используется лемма Гронуолла

Доказано

Для доказательства существования решения рассмотрим последовательные приближения
$\xi^{n+1}(t) = x + \int_s^t a(\vartheta,\xi^n(\vartheta))d\vartheta + \int_s^t A(\vartheta,\xi^n(\vartheta))dw(\vartheta)$
$\xi^{n+2}(t) = x + \int_s^t a(\vartheta,\xi^{n+1}(\vartheta))d\vartheta + \int_s^t A(\vartheta,\xi^{n+1}(\vartheta))dw(\vartheta)$ и оценим
$E\left|\xi^{n+2}(t) - \xi^{n+1}(t)\right|^2 \le L(t+1)\int_s^t E\left|\xi^{n+1}(\vartheta) - \xi^n(\vartheta)\right|^2 d\vartheta \le L(t+1)\int_0^t\int_0^\vartheta L(\vartheta+1)E\left|\xi^n(\vartheta) - \xi^{n-1}(\vartheta)\right|^2 d\vartheta \le ... \le \frac{[L(t+1)]^n}{n!} \le ...$
и $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{[L(t+1)]^n}{n!} = 0$??? Как это работает

При этом предельная функция (предельный процесс) удовлетворяет оценке $E\left|\left|\xi(t)\right|\right|^2 < \infty$
$E\left|\left|\xi(t)\right|\right|^2 \le 3\left|\left|x\right|\right|^2 + t\int_0^t \left|\vartheta,\xi(\vartheta)\right|^2 d\vartheta + \int_0^t E\left|A(\vartheta,\xi(\vartheta))\right|^2 d\vartheta$
В силу У1
$E\left|\xi(t)\right|^2 \le 3|x|^2 + L(t+1)\int_0^t C\left[1 + \xi^2(\tau)\right]d\tau \le \left[3|x|^2 + LC(t+1)t\right] + \int_0^t CE\left|\xi^2(\tau)\right|^2 d\tau \le$
$\le \left[3|x|^2 + LC(t+1)t\right]e^{Ct}$ и $\sup\limits_{0\le t\le T} E\left|\xi(t)\right|^2 < \infty$

??? Откуда здесь тройка?

Свойства решений СДУ.

№1. Рассмотрим СДУ

$$d\xi(t) = a(\xi(t))dt + A(\xi(t))dw(t) \qquad (3.7)$$

и покажем, что его **решение нерперывно по начальным данным**.

Для этого оценим разность

$E\left|\xi_{s,x}(t)-\xi_{s,y}(t)\right|^2 \le 3\left|x-y\right|^2+(t-s)\int_s^t E\left|a\right|\xi_{s,x}(\vartheta)-(\xi_{s,y}(\vartheta))\left|^2 d\vartheta+\int_s^t E\left|A\right|\xi_{s,x}(\vartheta))-A(\xi_{s,y}(\vartheta))\right|^2] d\vartheta$

$\xi_{s,x}(t)=x+\int_s^t a(\xi_{s,x}(\vartheta))\,d\vartheta+A(\xi_{s,x}(\vartheta))\,dw(\vartheta)$

$\left|\xi_{s,x}(t)-\xi_{s,y}(t)\right|^2 = \left[[x-y]+\int_s^t a(\xi_{s,x}(\vartheta))-a(\xi_{s,y}(\vartheta))\right]d\vartheta + \int_s^t\left[A(\xi_{s,x}(\vartheta))-A(\xi_{s,y}(\vartheta))\,dw\right]^2$

$= 3(x-y)^2 + 3(t-s+1???)\int_s^t EL\left|\xi_{s,x}(\vartheta)-\xi_{s,y}(\vartheta)\right|^2 d\vartheta \le 3(x-y)^2 e^{kT},\quad k = 3(T+1)L, 0\le s\le t\le T$

??? Не мог бы кто-нибудь проверить эту формулу

№2. Гладкость решений СДУ.

Пусть $\xi_{s,x}(t)$- это решение (3.4). Обозначим $\frac{\partial}{\partial x}\xi_{s,x}(t)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\xi_{s,x+\Delta}(t)-\xi_{s,x}(t)}{\Delta x}$, где предел понимается в среднеквадратичном.

При этом процесс $\eta(t)=\frac{\partial}{\partial x}\xi_{s,x}(t)$ удовлетворяет СДУ

$$d\eta(\vartheta)=a'_x(\xi(\vartheta))\,\eta(\vartheta)\,d\vartheta+A'_x(\xi(\vartheta))\,\eta(\vartheta)\,dw(\vartheta) \tag{3.8}$$

??? Как получить эти формулы

Таким образом, если коэффициент $a(x)$ и $A(x)$ k раз дифференцируемы, $k=1,2,...,$, то решения $\xi_{s,x}(t)$уравнения (3.4) тоже k раз дифференцируемы.

Если $a'(x)$ и $A'(x)$- ограниченные, то уравнение (3.8) определено корректно, т.е. его коэффициенты удовлетворяют У1.

Обозначим $\gamma(t)=\frac{\partial^2\xi_{s,x}(t)}{\partial x^2}$

Формально, мы получим, что $\gamma(t)$ удовлетворяет СДУ

$$d\gamma(t)=a'_x(\xi_{s,x}(\vartheta))\,\gamma(\vartheta)\,d\vartheta+A'_x(\xi_{s,x}(\vartheta))\,\gamma(\vartheta)\,dw(\vartheta)+a''_x(\xi(\vartheta))\,\eta(\vartheta)\,d\vartheta+A''(\xi_{s,x}(\vartheta))\,\eta^2(\vartheta)\,dw(\vartheta) \tag{3.9}$$

???Мне кажется, что где-то ошибка

Решение уравнения (3.8) имеет вид

$$\eta(t)=\exp\left[\int_s^t a'(\xi_{s,x}(\vartheta))\,d\vartheta+\int_s^t A'(\xi_{s,x}(\vartheta))\,dw(\vartheta)-\frac{1}{2}\int_s^t\left[A'(\xi_{s,x}(\vartheta))\right]^2 d\vartheta\right]$$

19.10.17

$d\xi=a(\xi(t))\,dt+A(\xi(t))\,dw(t)$

$\xi(s)=x,\ \eta(t)=u(t,\xi(t))$

$d\eta(t) = \left[\frac{\partial u(t,\xi(t))}{\partial t}+a(\xi(t))\frac{\partial u(t,\xi(t))}{\partial x}+\frac{1}{2}A^2(\xi(t))\frac{\partial^2 u(t,\xi(t))}{\partial x^2}\right]dt + \frac{\partial u(t,\xi(t))}{\partial x}A(\xi(t))\,dw(t)=du(t,\xi(t))$

$\frac{\partial u}{\partial s}+a(x)\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{2}A^2(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0$

$u(T,x)=u_0(x),\ s\le t\le T$

Проинтегрируем наши $d\eta(t)$ от s до T

$u(T,\xi(T))-u(s,x)=\int_s^T[...]\,dt+\int_s^T\frac{\partial u}{\partial x}(t,\xi(t))\,A(\xi(t))\,d\omega(t)$

$Eu_0(\xi(T))-u(s,x)=0$

Математическое ожидание стохастического процесса раво нулю. Дисперсия равна τ.

$u(s,x)=Eu_0(\xi(T))$

$\frac{\partial u}{\partial s}+a(x)\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{2}A^2(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=f(x)$

$\left[\frac{\partial u(t,\xi(t))}{\partial t}+a\frac{\partial u(t,\xi(t))}{\partial x}+\frac{1}{2}A^2(\xi(t))\frac{\partial^2 u(t,\xi(t))}{\partial x}+f(\xi(t))-f(\xi(t))\right]dt + \frac{\partial u(t,\xi(t))}{dx}A(\xi(t))\,dw(t)=d\eta(t)=du(t,\xi(x))$

$u(s,x) = E\left[u_0(\xi(T)) - \int_s^T f(\xi(t))\,dt\right]$??? Почему, откуда появилось второе слагаемое с интегралом

Пример:

$d\xi = sin(\xi(t))\,dt + cos\xi(t)\,dw(t)$

$\xi(s) = x$

$f(t,x) = t\sin x$

$\frac{\partial f}{\partial x} = t\cos x$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -t\sin x$

$d\eta = \sin x + \sin(\xi(t))\,t\cos x - \frac{1}{2}cos^2(\xi(t))\,t\sin x = 0$

4 Марковские процессы

Случайный процесс называется **марковским** относительно потока σ -аглебр $\mathcal{F}_t$, если справедливо соотношение:

$$E\left[f(\xi(T))\,|\mathcal{F}_t\right] = E\left[f(\xi(T))\,|\xi(t)\right]$$

для любой измеримой ограниченной функции $f(x)$, $0 \leq t \leq T$.

С каждым марковским процессом связана его переходная вероятность

$p(s,x,t,G) = P\{\xi(t) \in G|\xi(s) = x\}, G \in \mathcal{R}$, $G = [a;b)$

В терминах переходной вероятности, марковское свойство описывается уравнением Чепмена-Колмогорова

$P(s,x,t,G) = \int_{-\infty}^{\infty} p(s,x,\vartheta,dz)\,p(\vartheta,z,t,G)$

Если $P(s,x,t,G) = \int_G p(s,x,t,y)\,dy$

Тогда уравнение Чепмена-Колмогорова имеет вид:

$p(s,x,t,y) = \int_{-\infty}^{\infty} p(s,x,\vartheta,z)\,p(\vartheta,z,t,y)\,dz$

Каждый марковский процесс порождает эволюционное семейство, действующее в пространстве V измеримых ограниченных функций.

$u(s,t)\,f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y)\,p(s,x,t,y)\,dy$

Эволюционное свойство $u(s,t)$ т.е. равенство $u(s,t) = u(s,\vartheta)\,u(\vartheta,t)$ следует из уравнения Ч-К.

Действительно:

$u(s,t)\,f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y)\,p(s,x,t,y)\,dy = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\left[\int_{-\infty}^{\infty} p(s,x,\vartheta,z)\,p(\vartheta,z,t,y)\,dz\right]dy$ =изменяем порядок интегрирования,$u(\vartheta,t)\,f(z) = \phi(z)$, далее

$= \int_{-\infty}^{\infty} p(s,x,\vartheta,z)\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(y)\,p(\vartheta,z,t,y)\,dy\right]dz$

$= \int_{-\infty}^{\infty} p(s,x,\vartheta,z)\,(u(\vartheta,t)\,f)(z)\,dz = \int_{-\infty}^{\infty} p(s,x,\vartheta,z)\,\phi(z)\,dz = u(s,\vartheta)\,\phi(z) = u(s,\vartheta)\,u(\vartheta,t)\,f(x)$

5 Генератор эволюционного семейства u(s,t)

Генератор эволюционного семейства $u(s,t)$ - это оператор A, задаваемый соотношением:

$\lim\limits_{\Delta s\to 0} \frac{u(s,s+\Delta s)-I}{\Delta s} f(x) = Af(x)$, I - единичный оператор.

Генератор марковского процесса называют оператор L, задаваемы йсоотношением

$\lim\limits_{\Delta s\to 0} \frac{Ef(\xi_{s,x}(s+\Delta s))-f(x)}{\Delta sd} = Lf(x)$

Если $u(s,t)\,f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y)\,p(s,x,t,y)\,dy$, т.е. $u(s,t)$ порожден марковским процессом $\xi(t)$ с плотностью переходной вероятности $p(s,x,t,y)$, то $Af = Lf$ на области их определения.

6 Марковское свойство решения стохастических уравнений

Рассмотрим СДУ

$$d\xi = a\left(\xi\left(\vartheta\right)\right)d\vartheta + A\left(\xi\left(\vartheta\right)\right)dw\left(\vartheta\right), \xi\left(s\right) = x \tag{6.1}$$

Мы будем предполагать, что функции $a\left(x\right), A\left(x\right)$ неслучайные и удовлетворяют условию теоремы существования и единства решения СДУ.

Теорема 6.1 Пусть $a\left(x\right), A\left(x\right)$ неслучайны и существует решение $\xi_{s,x}\left(t\right)$задачи (6.1). Тогда $\xi_{s,x}\left(t\right)$ - марковский процесс.

Доказательство:

Рассмотрим случайный процесс $\xi\left(t\right) = xt$

$\int_s^t a\left(\xi\left(\vartheta\right)\right)d\vartheta + \int_s^t A\left(\xi\left(\vartheta\right)\right)dw\left(\vartheta\right) = \xi\left(\tau\right) + \int_\tau^s a\left(\xi\left(\vartheta\right)\right)d\vartheta + \int_\tau^t A\left(\xi\left(\vartheta\right)\right)dw\left(\vartheta\right)$.

Это равенство вытекает из единственности решения (6.1)

Процесс $\xi_{\tau,\eta}\left(t\right)$, $\eta = \xi\left(t\right)$ можно представить в виде функции, зависящей от двух переменных ω и ω_1, где $\omega = \eta\left(\tau\right)$ и ω_1, пораждённый стохастическим и обыкновенным интегралом.

В силу свойств стохастических интегралов, ω и ω_1 независимые.

Пусть $\xi\left(t\right) = g\left(\omega, \omega_1\right)$. g можно представить в виде:

$g\left(\omega, \omega_1\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \phi_k\left(\omega\right)\psi_k\left(\omega_1\right)$

Используя это свойство можно показать, что в любой измеримой ограниченно функции $f\left(x\right)$ справедливо равенство $Ef\left(\xi\left(T\right)|\mathcal{F}_\tau\right) = Ef\left(\xi\left(T\right)|\xi\left(\tau\right)\right)$, т.е. $\xi\left(t\right)$ - это марковский процесс.

6.1 Уравнение колмогорова, обратное уравнение

Пусть $\xi\left(t\right)$ - решение уравнения (6.1) со случайными коэффициентами. Рассмотрим функцию $u\left(s,x\right) = Ef\left(\xi_{s,x}\left(T\right)\right)$ и выведем уравнение, которому она удовлетворяет.

Вычислим:

$$u\left(s+\Delta s, x\right) - u\left(s,x\right) = \int f\left(y\right)p\left(s+\Delta s, x, T, y\right)dy - \int f\left(y\right)p\left(s,x,T,dy\right) \tag{6.2}$$

Воспользуемся уравнением Ч-К

$p\left(s,x,T,y\right) = \int p\left(s,x,s+\Delta s,z\right)p\left(s+\Delta s,z,T,y\right)dy$

Из (7.2) получим:

$$u\left(s+\Delta s, x\right) - u\left(s,x\right) = \int f\left(y\right)p\left(s+\Delta s, x, T, y\right)dy - \int f\left(y\right)\int p\left(s,x,s+\Delta s,z\right)\cdot p\left(s+\Delta s,z,T,y\right)d\xi dy \tag{6.3}$$

$u\left(s,x\right) = Ef\left(\xi_{s,x}\left(T\right)\right) = \int f\left(y\right)p\left(s,x,T,y\right)dy$

Поскольку

$\int f\left(y\right)p\left(s+\Delta s,z,T,y\right) = u\left(s+\Delta s,z\right)$ то из (6.3) следует, что и $u\left(s+\Delta s,x\right) - u\left(s,x\right) = \int f\left(y\right)p\left(s+\Delta s,x,T,y\right)dy - \int u\left(s+\Delta s,z\right)p\left(s+\Delta s,z,T,y\right)dz$

Таким образом $u\left(s+\Delta s,x\right) - u\left(s,x\right) = E\left\{u\left(s+\Delta s, \xi_{s+\Delta s,x}\left(t\right)\right) - u\left(s+\Delta s, \xi_{s+\Delta s,\xi(s+\Delta s)}\left(T\right)\right)\right\}$

Перепишем полученные соотношения в следующем виде. Напомним, что $u\left(s,x\right) = \int f\left(y\right)p\left(s,x,s+\Delta s,y\right)dy = \int f\left(y\right)\int p\left(s,x,\vartheta,z\right)p\left(\vartheta,z,s+\Delta s,y\right)dydz = Eu\left(s,\xi_{s,x}\left(s+\Delta s\right)\right)$

$u\left(s+\Delta s,x\right) - u\left(s,x\right) = -E\left[u\left(s+\Delta s,\xi_{s,x}\left(s+\Delta s\right)\right) - u\left(s+\Delta s,x\right)\right]$

$u\left(s+\Delta s,\xi_{s,x}\left(s+\Delta s\right)\right) - u\left(s+\Delta s,x\right)$??? Правильная ли формула

Используя формулу Ито, получим
$\lim\limits_{\Delta s \to 0} \frac{u(s+\Delta s,x)-u(s,x)}{\Delta s} = \frac{\partial u}{\partial s} = -\left[a\left(x\right)\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2}A^2\left(x\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right]$

Таким образом, функция $u\left(s,x\right) = Ef\left(\xi_{s,x}\left(T\right)\right)$ удовлетворяет задаче Коши $\frac{\partial u}{\partial s} + a\left(x\right)\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2}A^2\left(x\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$, $u\left(T,x\right) = f\left(x\right)$ КР Задание №2

$d\xi = 3f\left(\vartheta\right)d\vartheta + sin\left(\xi\left(\vartheta\right)\right)dw$, $\xi\left(s\right) = x$, $f\left(x\right)$

$u\left(s,x\right) = Ef\left(\xi_{s,x}\left(T\right)\right)$

$\frac{\partial u}{\partial s} + 3x\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2}sin^2 x\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$,

Другой вариант:

$\frac{\partial u}{\partial s} + 4x\frac{\partial u}{\partial x} - 9x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$

$u\left(T,x\right) = sinx$

Написать вероятностное представление:

$d\xi = 4\xi\left(\vartheta\right)d\vartheta + 3\sqrt{2}\xi\left(\vartheta\right)du$

$u\left(s,x\right) = Esin\left(\xi_{s,x}\left(T\right)\right)$

Пример:

№1. $d\xi = \sqrt{3}sin\left(\xi\left(\vartheta\right)\right) + \sqrt{2}cos\left(3\xi\left(\vartheta\right)\right)dw\left(\vartheta\right)$

$\xi\left(s\right) = x$

$f\left(x\right) = \cos x$

$u\left(s,x\right) = Ecos\left(\xi_{s,x}\left(T\right)\right)$

$a\left(\xi\left(\vartheta\right)\right) = \sqrt{3}\sin\left(\xi\left(\vartheta\right)\right)$, $a\left(x\right) = \sqrt{3}\sin x$

$A\left(\xi\left(\vartheta\right)\right) = \sqrt{2}\cos\left(3\xi\left(\vartheta\right)\right)$, $A\left(x\right) = \sqrt{2}\cos 3x$

$\frac{\partial u}{\partial s} + \sqrt{3}\sin x\frac{\partial u}{\partial x} + cos^2 3x\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$

$u\left(T,x\right) = \cos x$

$\overline{\quad} - - - - - - - \overline{\quad}$

$\frac{\partial u}{\partial s} + sin\left(x\right)\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2}cos^2\left(x\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$

$u\left(T,x\right) = 2\sin x$, $u\left(s,x\right) = Ef\left(\xi_{s,x}\left(T\right)\right)$

$d\xi = \sin\left(\xi\left(\vartheta\right)\right)d\vartheta + cos\left(\xi\left(\vartheta\right)\right)dw\vartheta$

$u\left(s,x\right) = E2sin\left(\xi_{s,x}\left(T\right)\right)$

6.2 Формула Фейнмана Каца

Рассмотрим задачу Коши

$$\frac{\partial u}{\partial s} + a\left(x\right)\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2}A^2\left(x\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + c\left(x\right)u = 0, u\left(T,x\right) = f\left(x\right) \tag{6.4}$$

Нужно построить вероятностное представление решения этой задачи.

Рассмотрим СДУ

$$d\xi = a\left(\xi\left(\vartheta\right)\right)d\vartheta + A\left(\xi\left(\vartheta\right)\right)dw\left(\vartheta\right) \tag{6.5}$$

$$d\eta = c\left(\xi\left(\vartheta\right)\right)\eta\left(\vartheta\right)d\vartheta \tag{6.6}$$

$$\xi\left(s\right) = x, \eta\left(s\right) = 1$$

и функцию $u\left(s,x\right)$ вида

$$u\left(s,x\right) = E\left[\eta\left(T\right)f\left(\xi_{s,x}\left(T\right)\right)\right] \tag{6.7}$$

Покажем, что $u\left(s,x\right)$ вида (7.7) удовлетворяет 7.4

Заметим, что процесс $\eta\left(t\right)$ имеет вид $\eta\left(t\right) = \exp\int_s^T c\left(\xi\left(\vartheta\right)\right)d\vartheta$ и вычислим $u\left(s+\Delta s,x\right) - u\left(s,x\right)$

$u(s+\Delta s,x)-u(s,x)=$

Рассмотрим

$u(s,x)=E\eta(s+\Delta s)f(\xi_{s,x}(s+\Delta s))$

Тогда $u(s+\Delta s,x)-u(s,x)=u(s+\Delta s,x)-E\eta(s+\Delta s)+f(\xi_{s,x}(s+\Delta s))$

Примечание: $\eta(s+\Delta s)=\exp\int_s^{s+\Delta s}c(\xi(a))\,d\vartheta$

Рассмотрим разность $E[\eta(s+\Delta s)-\eta(s)]f(\xi_{s,x}(s+\Delta s))$ + $E[\eta(s)[f(\xi_{s,x}(s+\Delta s))-f(x)]$

$=E\left[e^{\int_s^{s+\Delta s}c(\xi(\vartheta))d\vartheta}-1\right]f(\xi_{s,x}(s+\Delta s))+E[f(\xi_{s,x})-f(x)]$

Таким образом

$\underset{\Delta s\to 0}{lim}\frac{u(s+\Delta s,x)-u(s,x)}{\Delta s}=\frac{\partial u}{\partial s}=-\left(c(x)u+a(x)\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{2}A^2(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)$

Отсюда вытекает, что $u(s,x)=Ee^{\int_s^T c(\xi(\vartheta))d\vartheta}\cdot f(\xi_{s,x}(T))$ удовлетворяет задаче Коши.

$$\frac{\partial u}{\partial s}+a(x)\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{2}A^2(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+c(x)u(x)=0,u(T,x)=f(x) \tag{6.8}$$

Рассмотрим СДУ

$$d\xi=a(\xi(\vartheta))d\vartheta+A(\xi(\vartheta))dw(\vartheta)$$

и процесс $du(t,\xi(t))=\left[u_t'+au_x'+\frac{1}{2}\Delta^2u_x''\right]dt+u_x'A(\xi(t))dw$

Пусть $c\equiv 0$. Тогда добавляется и вычитается в квадратных скобках $f(\xi(t))$ получим

$du=\left[u_t'+au_x'+\frac{1}{2}A^2\cdot u_{xx}''+f-f\right]dt+u_x'Adw$

$du=f(\xi(t))dt+u_x'Adw$

Интегрируем по t от s до T .

$Eu(T,\xi(T))-u(s,x)=E\int_s^T f(\xi(\vartheta))d\vartheta$

Отсюда следует, что

$u(s,x)=E\left[f(\xi_{s,x}(T))+\int_s^T f(\xi_{s,x}(\vartheta))d\vartheta\right]$

02.11.17

7 Генерация марковского процесса

$Grf(x)=\lim\frac{Ef(\xi_{s,x}(s+\Delta s)-f(x)(t_k))}{\Delta s}=a(x)f'(x)+\frac{1}{2}A^2(x)F''(x)$??? Тут точно Grf?

$u(s,x)=f(\xi_{s,x}(T))$

$\frac{\partial u}{\partial s}+a(x)\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{2}A^2(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0,u(T,x)=f(x)$

$u(s,x)=E\left[exp\left[\int_s^T c(\xi(\vartheta))dq\right]\right]_F$

$\frac{\partial u}{\partial s}+a(x)\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{2}A^2(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+g(x)=0$

$d\xi=a(\xi(t))dt+A(\xi(t))dw(t)$

$u(s,x)$

$du(\vartheta,\xi(\vartheta))=\left[\frac{\partial u}{\partial\vartheta}+a\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{A^2}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+g-g\right](\vartheta,\xi(\vartheta))^2+\frac{\partial u}{\partial x}(\vartheta,\xi(\vartheta))A(\xi(\vartheta))dw(\vartheta)$

$\int_s^T Au(\vartheta,\xi(\vartheta))=-\int_s^T g(\xi(\vartheta))d\vartheta+\int_s^T\frac{\partial u}{\partial x}A(\xi(\vartheta))\partial w$

$Eu(T,\xi(T))-u(s,x)=-E\int_s^T g(\xi\vartheta)d\vartheta$

$u(s,x)=E\left[f(\xi_{s,x}(T))+\int_s^T g(\xi(\vartheta))d\vartheta\right]$

7.1 Вероятностное представление решения задачи Коши для нелинейного параболического уравнения

Рассмотрим семилинейное параболическое уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial s}+a(x,u(s,x))\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{2}A^2(x,u(s,x))\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0,u(T,x)=u_0(x) \tag{7.1}$$

Наряду с задачей (7.1) рассмотрим стохастическую задачу

$$d\xi = a\left(\xi\left(\vartheta\right), u\left(\vartheta, \xi\left(\vartheta\right)\right)\right) d\vartheta + A\left(\xi\left(\vartheta, \nu\left(\vartheta, \xi\left(\vartheta\right)\right)\right)\right) dw\left(\vartheta\right) \tag{7.2}$$

$$u\left(s, x\right) = Eu_0\left(\xi_{s,x}\left(T\right)\right) \tag{7.3}$$

Сформулируем условие на коэффициенты $a\left(x, u\right)$, $A\left(x, u\right)$ и условие $u_0\left(x\right)$при котором существует единственное решение системы (9.2) (9.3)

Условие С9.1

Пусть справедливы оценки

$\left|a\left(x, u\right)\right|^2 + \left|A\left(x, u\right)\right|^2 \leq C\left(1 + \left|x\right|^2 + \left|u\right|^{2p}\right)$

$\left|a\left(x, u\right) - a\left(y, v\right)\right|^2 + \left|A\left(x, u\right) - A\left(y, \nu\right)\right|^2 \leq L\left|x - y\right| + k_{u,v}\left|u - \nu\right|^2$

Решать задачу (9.2) (.3) мы будем с помощью методов последовательного приближения.

Рассмотрим последовательное приближение

$u^0\left(x\right) = u_0\left(x\right), \xi^0\left(t\right) = x$

$\xi^1\left(t\right) = x + \int_s^t a\left(\xi^1\left(\vartheta\right), u^1\left(\vartheta, \xi^1\left(\vartheta\right)\right)\right) d\vartheta + \int_s^t A\left(\xi^1\left(\vartheta\right), u^1\left(\vartheta, \xi^1\left(\vartheta\right)\right)\right) dw\left(\vartheta\right)$

$u^2\left(s, x\right) = Eu_0\left(\xi^1_{s,x}\left(T\right)\right)$

$\xi^2\left(t\right) = x + \int_s^t a\left(\xi^2\left(\vartheta\right), u^2\left(\vartheta, \xi\left(\vartheta\right)\right)\right) d\vartheta + \int_s^T A\left(\xi^2\left(\vartheta\right), u^2\left(\vartheta, \xi^2\left(\vartheta\right)\right)\right) dw\left(\vartheta\right)$

$u^n\left(s, x\right) = Eu_0\left(\xi^{(n-1)}\left(T\right)\right)$

$\xi^n\left(t\right) = x + \int_s^t a\left(\xi^n\left(\vartheta\right), u^n\left(\vartheta\right), \xi\left(\vartheta\right)\right) d\vartheta + \int_s^T A\left(\xi^n\left(\vartheta\right), u^n\left(\vartheta, \xi^n\left(\vartheta\right)\right)\right) dw\left(\vartheta\right)$

Заметим, что в силу условий С9, на каждом шаге последнее приближение можем утверждать существование и единственность решений СДУ.

При этом все функции $u^n\left(s, x\right)$ равномерно ограничены если функция $u_0\left(x\right)$ - ограничена, т.е. $\sup\limits_x \left|u_0\left(x\right)\right| \leq k_0$

В силу теоремы Арцела-Асколи, для того, чтобы семейство непрерывных функций $u^n\left(s, x\right)$ сходилась к непрерывной функции $u\left(s, x\right)$ при фиксированном s, нужно проверить, что функции $u^n\left(s, x\right)$ равномерно ограничены и равномерно непрерывны.

Покажем, что семейство функцией $u^n\left(s, x\right)$ равномерно непрерывно. Для этого достаточно показать, что семейство $\nu^n\left(s, x\right) = \frac{\partial}{\partial x} u^n\left(s, x\right)$ равномерно ограничено. Для того, чтобы это доказать расмотрим линейную систему

Пусть $g\left(s, x\right)$ - ограниченная мин??? функция или даже дифференцируемая по x , т.е. $\left|\frac{\partial g(s,x)}{\partial x}\right| \leq k'_g\left(s\right)$

Рассмотрим СДУ

$$d\xi = a\left(\xi\left(\vartheta\right), g\left(\vartheta, \xi\left(\vartheta\right)\right)\right) d\vartheta + A\left(\xi\left(\vartheta\right), g\left(\vartheta\right), g\left(\vartheta, \xi\left(\vartheta\right)\right)\right) dw\left(\vartheta\right), \xi\left(s\right) = x \tag{7.4}$$

$$\nu\left(s, x\right) = Eu_0\left(\xi_{s,x}\left(T\right)\right) \tag{7.5}$$

Пусть $\eta\left(\vartheta\right) = \frac{\partial}{\partial x}\xi_{s,x}\left(T\right)$

$d\eta\left(\vartheta\right) = \left[a'_x\left(\xi\left(\vartheta\right), g\left(\vartheta, g\left(\vartheta\right)\right)\right) + a'_g\left(\xi\left(\vartheta\right), g\left(\vartheta\right), \xi\left(\vartheta\right)\right) \frac{\partial g}{\partial x}\left(\vartheta, \xi\left(\vartheta\right)\right)\right]$

$$\eta\left(\vartheta\right) d\vartheta + \left[A'_x\left(\xi\right)\left(\vartheta\right), g\left(\vartheta, \xi\left(\vartheta\right)\right) + A'_g\left(\right) \frac{\partial g}{\partial x}\left(\vartheta, \xi\left(\vartheta\right)\right)\right] \eta\left(\vartheta\right) dw\left(\vartheta\right) \tag{7.6}$$

$\frac{\partial}{\partial x} u_0\left(\xi_{s,x}\left(T\right)\right)$

Наша цль - показать, что существует функция $B\left(t\right)$ такая, что если

$\left|\frac{\partial g(t,x)}{\partial x}\right| \leq B\left(t\right)$ то и $\left|\frac{\partial \nu(t,x)}{\partial x}\right| \leq B\left(t\right)$

Для всех t из некоторого интервала предполагаем, что $u_0(x)$ имеет ограниченную производную, т.е. $\sup\limits_x \left|\frac{\partial u_0(x)}{\partial x}\right| \le k_0'$

При этом $\sup\limits_x \left|\frac{\partial \nu(s,x)}{\partial x}\right|^2 \le k_0 \sup\limits_x E\left|\eta(T)\right|^2$

Оценим $E\left|\eta(T)\right|^2$

поскольку $E\left|\eta(t)\right|^2 = |h|^2 + 2E\int_s^T \left[a_x' + a_g' g'(\vartheta,\xi(\vartheta))\right]\eta(\vartheta)^2 d\vartheta$

Практика

Частные случаи

$\frac{\partial u}{\partial s} + a(x)\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{A^2(x)}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + a(x)u + f(x) = 0$

#1: $c(x) \equiv 0$

u$(s,x) = E\left[\sin(\xi(T)) + \int_s^T \sin\xi(\vartheta)\,d\vartheta\right]$

#2. $f(x) = 0$

$\frac{\partial u}{\partial s} + a(x)\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2}A^2(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + c(x)u = 0$

$u(T,x) = u_0(x)$

$d\xi = a(\xi(\vartheta))d\vartheta + A(\xi(\vartheta))dw(\vartheta), \xi(s) = x$

$d\eta = c(\xi(\vartheta))\eta(\vartheta)d\vartheta, \eta(s) = 1$

$\eta(0) = e^{\int_s^\vartheta c(\vartheta(\tau))d\tau}$

$u(s,x) = E\left[e^{\int_s^T c(\xi(\vartheta))d\vartheta}u_0(\xi_{s,x}(T))\right] = E\left[e^{\int_s^{s+\Delta s} c(\xi(\vartheta))d\vartheta + \int_{s+\Delta s}^T c(\xi(\vartheta))d\vartheta}u_0(\xi_{s,x}(T))\right]$

$u(s+\Delta s,x) - u(s,x) = E\left[e^{\int_{s+\Delta s}^T c(\xi(\vartheta))d\vartheta}u_0(\xi_{s+\Delta s,x}(T)) - e^{\int_s^{s+\Delta s} c(\xi(\vartheta))d\vartheta + \int_{s+\Delta s}^T c(\xi(\vartheta))d\vartheta}u_0(\xi_{s,x}(T))\right]$

Добавим и вычтем выражение вида

$e^{\int_{s+\Delta s}^T c(\xi(\vartheta))d\vartheta}u_0(\xi_{s,x}(T))$

Тогда

$u(s+\Delta s,x) - u(s,x) = E\{e^{\int_{s+\Delta s}^T c(\xi(\vartheta))d\vartheta}\left[u_0(\xi_{s+\Delta s,x}(T)) - u_0(\xi_{s,x}(T))\right] +$

$+\left[e^{\int_s^T c(\xi(\vartheta))d\vartheta} - e^{\int_{s+\Delta s}^T c(\xi(\vartheta))d\vartheta}\right]u_0(\xi_{s,x}(T))\}$

$\frac{1}{\Delta}\left[e^{\int_s^{s+\Delta s} c(\xi(\vartheta))d\vartheta} - 1\right]e^{\int_{s+\Delta s}^T c(\xi(\vartheta))d\vartheta}u_0(\xi_{s,x}(T)) = c(x)\,du(s,x)$

$\frac{\partial u}{\partial s} + a(x)\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2}A^2(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + c(x)u = 0$

Наше решение имеет вид:

$E\left[e^{\int_s^T c(\xi(\vartheta))d\vartheta}u_0(\xi_{s,x}(T))\right] = u(s,x)$

$u(s,x) = E\left[e^{\int_s^T \xi(\vartheta)d\vartheta}u_0(\xi_{s,x}(T)) + \int_0^T e^{\int_0^T \xi(\tau)d\tau}\sin(\xi(\vartheta))d\vartheta\right]$

$\frac{\partial u}{\partial s} + a(x)\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2}A^2(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + c(x)u + f(x) = 0$

$u(T,x) = u_0(x)$

$d\xi(\vartheta) = a(\xi(\vartheta))d\vartheta + A(\xi(\vartheta))du(\vartheta), \xi(s) = x$

$d\eta(\vartheta) = c(\xi(\vartheta))\eta(\vartheta)d\vartheta, \eta(s) = 1$

$u(s,x) = E\left[\eta(T)u_0(\xi_{s,x}(T)) - \int_s^T \eta(\vartheta)f(\xi(\vartheta))d\vartheta\right]$

01.12.17

8 Новый раздел, чтобы перезапустить нумерацию

$d\xi = a(\xi(\vartheta))d\vartheta + A(\xi(\vartheta))dwd\vartheta$, $\xi(s) = x$

$\xi(t) = x + \int_s^t a(\xi(\vartheta))d\vartheta + \int_s^t A(\xi(\vartheta))dw(\vartheta,w)$

$\xi_n(t) = x + \int_{k=1}^n \int_{t_k}^{t_{k+1}} a(\xi(\vartheta))d\vartheta + \int_{t_k}^{t_{k+1}} A(\xi(\vartheta))dw(\vartheta)$

$\xi_n(t) = x + \sum a(\xi(t_k))\Delta_k + A(\xi(t_k))\Delta_k w$

$\Delta_k w = w(t_{k+1}) - w(t_k)$

$u(s,x) = E\nu(\xi_{s,x}(???,w))$

$\frac{\partial u}{\partial s}+a\left(x\right)\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{2}A^2\left(x\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0$
$u\left(T,x\right)=\nu\left(x\right)$
Напомним, что мы расматриваем систему

$$d\xi=a^u\left(\xi\left(\vartheta\right)\right)d\vartheta+A^u\left(\xi\left(\vartheta\right)\right)dw\left(\vartheta\right),\xi\left(s\right)=x \tag{8.1}$$

$$u\left(s,x\right)=Eu_0\left(\xi_{s,x}\left(T\right)\right),\text{где}a^u\left(x\right)=a\left(x,u\left(s,x\right)\right) \tag{8.2}$$

Для того, чтобы построить решения системы (8.2) рассмотрим последовательные приближения

$$d\xi_n\left(\vartheta\right)=a^{u_n}\left(\xi_n\left(\vartheta\right)\right)d\vartheta+A^{u_n}\left(\xi_n\left(\vartheta\right)\right)dw\left(\vartheta\right) \tag{8.3}$$

$$,\xi_n\left(s\right)=x \tag{8.4}$$

$u^{n+1}\left(s,x\right)=E_{s,x}u_0\left(\xi_n\left(T\right)\right)$, где $E_{s,x}\left(\xi\left(t\right)\right)\equiv E\left[\xi_{s,x}\left(t\right)\right]$
На каждом шаге системы последовательных приближений мы решаем уравнения вида

$$d\xi=a\left(\xi\left(\vartheta\right),\nu\left(\vartheta,\xi\left(\vartheta\right)\right)\right)d\vartheta+A\left(\xi\left(\vartheta\right),\nu\left(\vartheta,\xi\left(\vartheta\right)\right)\right)dw\left(\vartheta\right) \tag{8.5}$$

где $\nu\left(t,x\right)$известная функция $\left(\nu\left(\vartheta,x\right)\equiv u^n\left(\vartheta,x\right)\right)$

$$g\left(s,x\right)=Eu_0\left(\xi_{s,x}\left(T\right)\right) \tag{8.6}$$

где $\xi_{s,x}\left(\vartheta\right)$ - решение (8.5)
$u^1\left(s,x\right)=u_0\left(x\right),\xi_0\left(0\right)=x$
Рассмотрим трим??? уравнения (8.5) и (8.6) и положим, что если $\nu\left(s,x\right)$ - ограниченная Липшицева функция, то и $g\left(s,x\right)$ тоже ограниченная Липшецева функцияс одинаковой константой Липшица.

$\left|\nu\left(t,x\right)-\nu\left(t,y\right)\right|=L\left(t\right)\left|x-y\right|$, то справедлива оценка $\left|g\left(t,x\right)-g\left(t,y\right)\right|\le L\left(t\right)\left|x-y\right|$

Лемма 8.1 Пусть коэффициенты $a^u\left(x\right)$ и $A^u\left(x\right)$ удовлетворяют условиям существования и единственности решения СДУ.

Тогда существует интервал $\{T_1;T\}$ такой, что $g\left(t,x\right)-g\left(t,y\right)\le\beta\left(t\right)\left|x-y\right|$, если $\left|\nu\left(t,x\right)-\nu\left(t,y\right)\right|\le\beta\left(t\right)\left|x-y\right|$ для некоторой функции $\beta\left(t\right)$ ограниченной на интервале $\left[T_1,T\right]$

Доказательство:

Рассмотрим процесс $\xi\left(t\right)$
$E\left|\xi_x\left(t\right)-\xi_y\left(t\right)\right|^2\le\left|x-y\right|^2+2E\int_s^t\left[a\left(\xi_{s,x}\left(\vartheta\right),\nu\left(\vartheta,\xi_{s,x}\left(\vartheta\right)\right)\right)-a\left(\xi_{s,y}\left(\vartheta\right),\nu\left(\vartheta,\xi_{s,y}\left(\vartheta\right)\right)\right)\right]\cdot$
$\cdot\left(\xi_{s,x}\left(\vartheta\right)-\xi_{s,y}\left(\vartheta\right)\right)d\vartheta+E\int_s^t\left|A\left(\xi_{s,x}\left(\vartheta\right),\nu\left(\vartheta,\xi_{s,y}\left(\vartheta\right)\right)\right)-A\left(\xi_{s,y}\left(\vartheta\right),\nu\left(\xi_{s,y}\left(\vartheta\right)\right)\right)\right|^2d\vartheta\le$
$\le\left|x-y\right|^2+2\int E\left|\xi_{s,x}\left(\vartheta\right)-\xi_{s,y}\left(\vartheta\right)\right|^2+K_0\beta\left(\vartheta\right)\left|\xi_{s,x}\left(\vartheta\right)-\xi_{s,y}\left(\vartheta\right)\right|^2d\vartheta$

Оценим далее $\left(g\left(s,x\right)-g\left(s,y\right)\right)^2=\left|E\nu_0\left(\xi_{s,x}\left(T\right)\right)-\nu_0\left(\xi_{s,y}\left(T\right)\right)\right|\le L_0E\left|\xi_{s,x}\left(T\right)-\xi_{s,y}\left(T\right)\right|^2$где $L_0,K_{???}$- изнстанта липица??? функции $u_0\left(x\right)$ и функции $a\left(\nu\right)$

??? Во всем этом разделе что-то не так со скобками, прошу проверить :)

Таким образом:
$\left|g\left(s,x\right)-g\left(s,y\right)\right|^2\le L_0E\left|\xi_{s,x}\left(T\right)-\xi_{s,y}\left(T\right)\right|^2\le\left|x-y\right|^2\exp\int_s^T\left[K_1+K_2\beta\left(\vartheta\right)\right]d\vartheta$

Поскольку $E\left|\xi_{s,x}\left(T\right)-\xi_{s,y}\left(T\right)\right|^2\le\left|x-y\right|^2+\int_s^T c\left[\left|\xi_{s,x}\left(t\right)-\xi_{s,y}\left(T\right)\right|^2\right]-\left[1-K_{???}\beta\left(\vartheta\right)\right]d\vartheta$

Отсюда в силу леммы Гроноулла: $E\left|\xi_{s,x}\left(T\right)-\xi_{s,y}\left(T\right)\right|^2\le\left|x-y\right|^2\exp\int_s^T\left[1+K_{???}\beta\left(\vartheta\right)\right]d\vartheta$

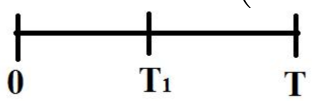
Рассмотрим соотношение $\beta\left(t-s\right)=K_0\exp\int_s^T\left[K_1+K_2\beta\left(t-\vartheta\right)\right]d\vartheta$ и его дифференциальный вариант

$$\frac{d\beta\left(t-s\right)}{ds}=\left[K_1+K_2\beta\left(t-s\right)\right]\beta\left(t-s\right),\beta\left(T\right)=K_0 \tag{8.7}$$

Перепишем ОДУ (8.7) в виде

$$\frac{d\beta}{\left(K_1+K_2\beta\right)\beta}=ds \tag{8.8}$$

Представим $\frac{1}{(K_1+K_2\beta)\beta}=\frac{A_1}{K_1+K_2\beta}+\frac{A_2}{\beta}$
$A_1\beta+A_2K_1+A_2K_2\beta=1$
$A_1+A_2K_2=0, A_2K_1=1$
Таким образом, $A_2=\frac{1}{K_1}$,$A_1=-\frac{A_2}{K_1}$
и (12.8) приобретает вид
$\frac{1}{K\cdot K_1[K_1+K_2\beta]}+\frac{1}{K}\frac{1}{\beta}=ds$
$\frac{1}{K_1[K_1+K_2\beta]}+\frac{1}{\beta}=Kds$??? правильно?
$\int_{\beta(s)}^{\beta(T)}\frac{d\beta}{\widetilde{K}_1+\widetilde{K}_2\beta}+\int_{\beta(s)}^{\beta(T)}\frac{d\beta}{\beta}$, $\widetilde{K}_1=K_1^2, \widetilde{K}_2=K_1K_2$
$Ln\left[\widetilde{K}_1+\widetilde{K}_2\beta\right]|_{\beta(s)}^{\beta(T)}+ln\beta|_{\beta(s)}^{\beta(T)}=\left(T-s\right)K$
Решая полученные алгебраические уравнения мы получим ответ в виде $\beta\left(T-s\right)=\frac{\widetilde{K}_1K_0}{\widetilde{K}_1+K-K_0e^{K_2(t-s)}}$
Функция $\beta\left(T-s\right)$ ограничена на интервале $[T_1,T]$, где $\widetilde{K}_1+K_0-K_0e^{K_2(T-s)}=0$
$e^{K_2(T-T_1)}=\frac{\widetilde{K}_1+K_0}{K_0}$
$K_2\left(T-T_1\right)=\ln\left(1+\frac{\widetilde{K}_1}{K_0}\right)$ для всех $\widetilde{T}_1<T_1$ функция $\beta\left(T-s\right)$ ограничена при $s>T_1$



Практика:
$\frac{\partial u}{\partial s}+\frac{\partial u(s,x)}{\partial s}+u\left(s,x\right)\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2u}{\partial x^2}=0$
$u\left(T,x\right)=u_0\left(x\right)$
$d\xi=u\left(\vartheta,\xi\left(\vartheta\right)\right)d\vartheta+dw$
$\nu\left(s,x\right)=Eu_0\left(\xi_{s,x}\left(T\right)\right)$
$\frac{\partial\nu}{\partial s}+u\left(s,x\right)\frac{\partial\nu}{\partial x}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2\nu}{\partial x^2}=0$
$\nu\left(s,x\right)\equiv u\left(s,x\right)$
$$\begin{cases}d\xi= & u\left(\vartheta,\xi\left(\vartheta\right)\right)+du\\ u\left(s,x\right)= & Eu_0\left(\xi_{s,x}\left(T\right)\right)\end{cases}$$
$\frac{\partial u}{\partial s}+\left(x+u\left(s,x\right)\right)\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{2}u^2\frac{\partial^2u}{\partial x^2}=0$
$d\xi=\left[\xi\left(\vartheta\right)+u\left(\vartheta,\xi\left(\vartheta\right)\right)\right]d\vartheta+u\left(\vartheta,\xi\left(\vartheta\right)\right)dw$
$u\left(s,x\right)=E\sin\left(\xi_{s,x}\left(T\right)\right)$

———
$\frac{\partial u}{\partial s}+4x\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{x^2}{2}\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+\cos xu+\sin x=0$
$u\left(T,x\right)=sin\left(x\right)$
$\frac{\partial u}{\partial s}+a\left(x\right)\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{2}A^2\left(x\right)\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+c\left(x\right)u=0$
$u\left(T,x\right)=u_0\left(x\right)$
$d\xi=a\left(\xi\left(\vartheta\right)\right)d\vartheta+A\left(\xi\left(\vartheta\right)\right)dw\left(\vartheta\right),\xi\left(s\right)=x$
$d\eta=c\left(\xi\left(\vartheta\right)\right)\eta\left(\vartheta\right)d\vartheta,\eta\left(s\right)=1$
$\eta\left(0\right)=\exp\int_s^\vartheta c\left(\xi\left(t\right)\right)dt$
$u\left(s,x\right)=E\eta\left(T\right)u_0\left(\xi_{s,x}\left(T\right)\right)=Ee^{\int_s^T c(\xi(\vartheta))d\vartheta}u_0\left(\vartheta_{s,x}\left(T\right)\right)$

$c=0$
$d\xi = 4\xi(\vartheta)\,d\vartheta + \xi(\vartheta)\,dw(\vartheta)$
$d\eta = cos(\xi(\vartheta))\,\eta(\vartheta)\,d\vartheta$
$u(s,x) = Ee^{\int_s^T cos(\xi(\vartheta))d\vartheta} \cdot sin(\xi_{s,x}(T))$

$\overline{\frac{\partial u}{\partial s} + 4x\frac{\partial u}{\partial x}} + \frac{x^2}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + cosxu + x = 0$
$\frac{\partial u}{\partial s} + a(x)\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2}A^2(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x) = 0$
$u(T,x) = u_0(x)$
$d\xi = a(\xi(\vartheta))\,d\vartheta + A(\xi(\vartheta))\,dw(\vartheta)\,,f(s) = x$
$du(\vartheta,\xi(\vartheta)) = \int_s^T \left(\frac{\partial u}{\partial \vartheta} + a(\xi(\vartheta))\frac{\partial u(\vartheta,\xi(\vartheta))}{\partial x} + \frac{1}{2}A^2(\xi(\vartheta))\frac{\partial^2 u(\vartheta,\xi(\vartheta))}{\partial^2 x^2} + f(\xi(\vartheta)) - f(\xi(\vartheta))\right)d\vartheta + \int_s^T A\frac{\partial u}{\partial x}dw$
$E(u(T,\xi(T))) - u(s,x) = -E\left[\int_s^T f(\xi(\vartheta))\,d\vartheta\right]$
$u(s,x) = E\Big[u_0(\xi(T)) + \int_s^T f(\xi(\vartheta))\,d\vartheta\Big]$

$\overline{\frac{\partial u}{\partial s} + a(x)\frac{\partial u}{\partial x}} + \frac{1}{2}A^2(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + c(x)\,u + f(x) = 0$
$u(s,x) = E\left[\eta(T)\,u_0(\xi_{s,x}(T)) + \int_s^T \eta(\vartheta)\,f(\xi_{s,x}(\vartheta))\,d\vartheta\right]$
$d[u(\vartheta,\xi(\vartheta))\,\eta(\vartheta)] = du(\vartheta,\xi(\vartheta)) \cdot \eta(\vartheta) + u(\vartheta,\xi(\vartheta))\,d\eta$
$d[\gamma(\vartheta)\,\eta(\vartheta)]$
$d\gamma = q\gamma(\vartheta)\,d\vartheta + Q\gamma(\vartheta)\,dw(\vartheta)$
$d\eta = c\eta(\vartheta)\,d\vartheta + c\eta(\vartheta)\,dw(\vartheta)$
$d(\gamma(\vartheta)\,\eta(\vartheta)) = \eta(\vartheta)\,d\gamma(\vartheta) + \gamma(\vartheta)\,d\eta ...$
$d(u(\vartheta,\xi(\vartheta))\,\eta(\vartheta)) = \left(\frac{\partial u}{\partial \xi} + a\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2}A^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)\eta(\vartheta) + uc(\xi(\vartheta))\,\eta(\vartheta)\,d\vartheta + ... = \left(\frac{\partial u}{\partial \vartheta} + a\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2}A^2\frac{\partial^2 u}{\partial x} + cu\right)\eta(\vartheta),\ d\vartheta +$ мартингал
$E[\eta(T)\,u_0(\xi_{s,x}(T)) - u(s,x)] = E\int_s^T \eta(\vartheta)\,f(\xi(\vartheta))\,d\vartheta$
$u(s,x) = E\left[\eta(T)\,u_0(\xi(T)) + \int_s^T \eta(\vartheta)\,f(\xi(\vartheta))\,d\vartheta\right]$
$\eta(\vartheta) = \exp\int_s^\vartheta c(\xi(\vartheta_1))\,d\vartheta_1$
$d\xi = 4\xi(\vartheta)\,d\vartheta + \xi(\vartheta)\,dw(\vartheta)$
$d\eta = cos(\xi(\vartheta)) \cdot \eta(\vartheta)\,d\vartheta$
$u(s,x) = E\left[e^{\int_s^T cos(\xi(\vartheta))d\vartheta} \cdot \sin(\xi(T)) + \int_s^T e^{\int_s^T cos(\xi(\vartheta_1))d\vartheta_1} \cdot \xi(\vartheta)\,d\vartheta\right]$