Теория СДУ

ПМИ-4

December 14, 2017

Contents

1 Стохастические интегралы

1.1 Винеровский процесс.

Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ - заданное вероятностное пространство.

Случайная величина - это измеримое отображение $\Omega \to \mathcal{R}$, $\{\omega : \xi(\omega) \leq x\} \in \mathcal{F}$.

Винеровский процесс $w(t)$ - это случайный процесс, обладающий следующими свойствами:

1. $w(0) = 0$

2. Приращение $\Delta_t w = w(t + \Delta t) - w(t)$ - гауссовская СВ с распределением $\mathcal{N}(0, \Delta t)$, т.е.

(a) $E\Delta_t w = 0$

(b) $E\left|\Delta_t w\right|^2 = \Delta t$

3. Приращение $\Delta_t w$ и $\Delta_S w$, где $0 \leq s < t$ на непересекающихся интервалах независимы: $E\Delta_t w \Delta_s w = 0$.

Пусть $(\Omega, \mathcal{F})$ - измеримое пространство и μ, ν - вероятностные меры, заданные на нем. Рассмотрим σ - подалгебру $\mathcal{H}$ σ - алгебры $\mathcal{F}$ (сигма-подалгебра: каждое множество из $\mathcal{H}$ лежит в $\mathcal{F}$, т.е. из того, что мы попадаем в $\mathcal{H}$ мы попадаем в $\mathcal{F}$, но не наоборот). Тогда **условное математическое ожидание** случайной величины ξ относительно $\mathcal{H}$ обозначим $E\left[\xi|\mathcal{H}\right]$. Условное математическое ожидание - это $\mathcal{H}$- измеримая случайная величина, определяемая соотношением

$$\int_H E\left[\xi|\mathcal{H}\right] P\left(d\omega\right) = \int_H \xi\left(\omega\right) P\left(d\omega\right), \forall H \in \mathcal{H}$$

Пусть μ и ν - две вероятностные меры, определенные на $(\Omega, \mathcal{F})$ и пусть ν **абсолютно непрерывна относительно** μ (это значит: если $\mu\left(A\right) = 0, A \in \mathcal{F}$, то $\nu\left(A\right) = 0$. Обозначают это $\nu << \mu$.

Если при этом $\mu << \nu$, то меры называются **эквивалентыми:** $\mu \sim \nu$**.**

Теорема Радона-Никодима (Р-Н): Если μ, ν - вероятностные меры на $(\Omega, \mathcal{F})$ и $\nu << \mu$, то существует единственная положительная измеримая функция

$$\rho\left(\omega\right) : \nu\left(H\right) = \int_H \rho\left(\omega\right) \mu\left(d\omega\right), \forall H \in \mathcal{F}$$

Функция $\rho\left(\omega\right) = \frac{\nu(d\omega)}{\mu(d\omega)}$(не деление, это такое же деление, как когда пишем производную) называется **производной Радона-Никодима (Р-Н).**

Возвращаясь к определению условного среднего, рассмотрим меру $\mu\left(H\right) = \int_H \xi\left(\omega\right) P\left(d\omega\right), H \in \mathcal{H}$. Эта мера $\mu\left(H\right)$ абсолютно непрерывна относительно $P\left(d\omega\right)|_H$ и ее производная Р-Н - это $E\left[\xi|\mathcal{H}\right]$.

1.2 Свойства условного среднего

1. $E\left[\alpha\xi + \beta\eta/\mathcal{H}\right] = \alpha E\left[\xi|\mathcal{H}\right] + \beta E\left[\eta|\mathcal{H}\right]$, где $\alpha, \beta \in \mathcal{R}$.

2. $E\left[\xi|\mathcal{H}\right] = \xi$ если ξ - $\mathcal{H}$- измеримо.

3. $E\left[\xi|\mathcal{H}\right] = E\xi$

4. $E\left[E\left[\xi|\mathcal{H}\right]\right] = E\xi$

5. Рассмотрим σ-подалгебру $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$, при этом $E\xi \equiv E\left[\xi|\mathcal{F}_0\right]$. Пусть $\mathcal{H} \supset \mathcal{H}_1$ - подалгебры алгебры $\mathcal{F}$, тогда $E\left[E\left[\xi|\mathcal{H}_1\right]|\mathcal{H}\right] = E\left[\xi|\mathcal{H}_1\right]$

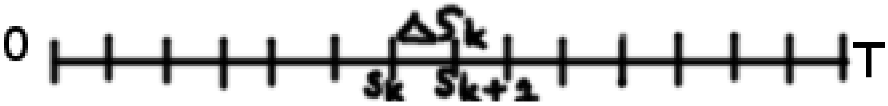
6. $E\left[\xi\eta|\mathcal{H}\right] = \eta E\left[\xi|\mathcal{H}\right]$ если η - $\mathcal{H}$ -измеримая СВ.

По идее, **отсюда начинается ответ на этот вопрос**. Но вся предыдущая теория будет использоваться при оценке свойств стохастического интеграла.

1.3 Стохастический интеграл и стохастичесий дифференциал.

Пусть $A(s)$-$\mathcal{F}_s$-измеримый случайный процесс, где $\mathcal{F}_s \equiv \mathcal{F}_s^w$- поток σ-подалгебр, порожденный винеровским процессом.

Рассмотрим разбиение вида:



Предположим, что $A(s)$- ступенчатая функция и рассмотрим СВ

$$I(A) = \sum_{k=1}^{n} A(s_k)\,\Delta_{s_k}\omega = \sum_{k=1}^{n} A(s_k)\left[\omega(s_k+\Delta s) - \omega(s_k)\right]$$

Это очень похоже на вычисление площади под графиком.

$I(A)$ называется **стохастическим интегралом** от ступенчатой функции $A(s)$. Его свойства:

1. $EI(A)$. Для того, чтобы вычислить $EI(A)$ воспользуемся свойствами условных средних (св-во 2 усл. сред. и св-во 2 Винеровского процесса)

$$E\sum_{k=1}^{n} A(s_k)\,\Delta_{s_k}\omega = E\left[\sum_{k=1}^{n} E\left(A(s_k)\,\Delta_{s_k}\omega\right)/\mathcal{F}_{s_k}\right] = E\left[\sum_{k=1}^{n} A(s_k)\,E\left[\Delta_{s_k}\omega|\mathcal{F}_{s_k}\right]\right] = 0$$

2.

$$E\left|I(A)\right|^2 = E\left[\sum A(s_k)\,\Delta_{s_k}\omega\right]^2 =$$

$$E\sum\left(A(s_k)\,\Delta_{s_k}\omega\right)^2 + E\left[\sum\sum A(t_k)\,\Delta_{t_k}\omega\cdot A(s_k)\,\Delta_{s_k}\omega\right]^2 + E\left[\sum\sum A(s_k)\,\Delta_{s_k}\omega\cdot A(s_j)\,\Delta_{s_j}\omega\right] =$$

$$= E\sum E\left[\left[A(S_k)\,\Delta_{s_k}\omega\right]^2|\mathcal{F}_{s_k}\right] = E\sum A^2(s_k)\,E\left[\Delta_{s_k}\omega\right]^2|\mathcal{F}_{s_k} = E\sum A^2(s_k)\left[s_{k+1}-s_k\right]$$

$$E\left|I(A)\right|^2 = \sum EA^2(s_k)\,\Delta_{s_k}$$

Другими словами, для ступенчатых функций $I(A) = \int_0^T A(s)\,dw(s)$ и $E\left[\int_0^T A(s)\,dw(s)\right] = 0$, $E\left[\int_0^T A(s)\,dw(s)\right]^2 = \int_0^T EA^2(s)\,ds$

Построение стохастического интеграла можно продолжить на следующий класс случайных функций $\mathcal{H}_s$, таких что $E\int_0^T\left(A(s)-A_n(s)\right)^2 ds \to 0$ при $n\to\infty$ где $A_n(s)$ - это ступенчатая функция

$$A_n(s) = \begin{cases} A(s_k) & s_k \le s < s_{k+1} \\ 0 & \text{в противном случае} \end{cases}, k = 1, ..., n$$

Для функций из этого класса $I(A) = \lim I_n(A)$ по вероятности.

При этом $EI(A) = 0, E\left[I(A)\right]^2 = \int_0^T EA^2(s)\,ds$

Соответствующий интеграл с переменным верхним пределом определим соотношением

$$\int_0^t A(s)\,dw(s) = \int_0^T I(s\le t)\,A(s)\,dw(s)$$

Стохастический интеграл $\int_0^t A(s)\,dw(s)$, определенный выше, является $\mathcal{F}_t$-мартингалом (локальным).

1.4 Мартингалы.

Случайный процесс $X(t)$ является $\mathcal{F}_t$- мартингалом, если

$E|X(t)| < \infty$, $E[M(T)|\mathcal{F}_t] = M(t)$

Если $E|X(t)| < \infty$ при $t \leq T$, то говорят, что X - **локальный мартингал**.

Примеры:

№1. Винеровский процесс.

$E[w(T)|\mathcal{F}_t] = w(t)$, $E[w(T) - w(t) + w(t)|\mathcal{F}_t] = E[w(T) - w(t)|\mathcal{F}_t] + w(t) = w(t)$. Используется свойство приращения Гауссовской величины.

Заметим, что $w(t)$- это локальный мартингал, т.к. $E|w(t)|^2 = t$

№2. Стохастический интеграл $\int_0^t A(s)\,dw(s)$ тоже является локальным $\mathcal{F}_t$ - мартингалом: $E\left[\int_0^T A(s)\,dw(s)\,|\mathcal{F}_t\right] = \int_0^t A(s)\,dw(s)$.

Действительно, по аналогии с предыдущим примером

$E\left[\left[\int_0^T A(s)\,dw(s) - \int_0^t A(s)\,dw(s)\right] + \int_0^t A(s)\,dw(s)\,|\mathcal{F}_t\right] = \int_0^t A(s)\,dw(s)$ поскольку $E\left[\int_t^T A(s)\,dw(s)\,|\mathcal{F}_t\right] = 0$

№3. $w^2(t)$ - **не является мартингалом**. Для любого мартингала $X(t)$ справедливо соотношение $E[X(T) - X(t)|\mathcal{F}_t] = 0$ ($X(T) - X(t)$- мартингал-разность)

Случайный процесс $w^2(t)$ обладает свойством $Ew^2(t) = t$, при этом $w^2(t) - t$ является $\mathcal{F}_t$- мартингалом и называется **квадратичным мартингалом**.

1.5 Формула Ито

Говорят, что случайный процесс $\xi(t)$ обладает **стохастическим дифференциалом** $d\xi(t) = a(t)\,dt + A(t)\,dw(t)$ если с вероятностью 1 справедливо соотношение $\xi(t) = \xi(s) + \int_s^t a(\vartheta)\,d\vartheta + \int_s^t A(\vartheta)\,dw(\vartheta)$

Пусть $\xi(t)$ - случайный процесс, обладающий стохастическим дифференциалом $d\xi = a(t)\,dt + A(t)\,dw(t)$и $f(t,x)$ - неслучайная функция, дифференцируемая по t и дважды дифференцируепмая по $x \in \mathcal{R}$.

$a(\vartheta) \in \mathcal{R}, A(\vartheta) \in \mathcal{R}$.

Тогда случайный процесс $\eta(t) = f(t,\xi(t))$ обладает стохастическим дифференциалом вида

$$d\eta(t) = \left[\frac{\partial f}{\partial t}(t,\xi(t)) + a(t)\frac{\partial f}{\partial x}(t,\xi(t)) + \frac{1}{2}A^2(t)\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t,\xi(t))\right]dt + \frac{\partial f(t,\xi(t))}{\partial x}A(t)\,dw(t)$$

Доказательство этой формулы основано на формуле Тейлора и свойствах винеровского процесса.

В силу формулы Тейлора $f(t+\Delta t, x(t+\Delta t)) = f(t,x(t)) + f'_t(...)\Delta t + f'_x(...)\Delta x + \frac{1}{2}f''_x(...)\Delta^2 x + ...$, $\Delta x = x(t+\Delta t) - x(t)$, если бы была неслучайная ситуация, то на третьем слагаемом мы бы остановились.

При переходе к стохастическому случаю

$f(t+\Delta t, \xi(t+\Delta t)) = f(t,\xi(t)) + f'_t(t,\xi(t))\Delta t + f'_x(t,\xi(t))\Delta\xi + \frac{1}{2}f''_x(t,\xi(t))(\Delta\xi(t))^2 + ...$

$\Delta\xi = a(t)\Delta t + A(t)\Delta w$

$(\Delta\xi)^2 \sim a^2(t)\Delta t$

Винеровский процесс обладает свойством: $\Delta w \sim \sqrt{\Delta t}$, мы этим воспользовались

Интегральный вид формулы Ито.

Если $d\xi = a(t)\,dt + A(t)\,dw(t)$, то $\eta(t) = f(t,\xi(t))$ удовлетворяет соотношению $f(t,\xi(t)) = f(s,\xi(s)) + \int_s^t \left[\frac{\partial f}{\partial \vartheta} + a(\vartheta)\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{2}A^2(\vartheta)\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right](\vartheta,\xi(\vartheta))\,d\vartheta + \int_s^t \frac{\partial f(\vartheta,\xi(\vartheta))}{\partial x}A(\vartheta)\,dw(\vartheta)$

Примеры

Первый пример:

$\eta(t) = (w(t))^2$
$d\xi = dw, f(x) = x^2$
$a = 0, A = 1$
$f'(x) = 2x, f''(x) = 2$
Тогда $d\eta = dt + 2w(t)\,dw(t)$

Из этой формулы следует,что интеграл $\int_0^T w(t)\,dw(t) = \frac{1}{2}w^2(T) - \frac{T}{2} = (w(T))^2 - (w(0))^2 = T - 0 = 2\int_0^T w(t)\,dw(t)$??? Что означает эта формула

Второй пример: $d\xi(t) = 2\xi(t)\,dt + 4tdw(t)$, $f(t,x) = |x|^2$, $f_t' = 0, f_x' = 2x, f_x'' = 2$, $a(t) = 2t, A(t) = 4t$.

$d\eta = [2t \cdot 2\xi(t) + 16t^2]\,dt + 2\xi(t) \cdot 4tdw(t)$

Третий пример: $d\xi = a(t)\,dt + A(t)\,dw(t)$, $f(t,x) = \exp x$, $f_x' = f_x'' = \exp x$,
$\eta(t) = \exp(\xi(t)) = e^{\xi(t)}$
$d\eta = \left[exp(\xi(t))\,a(t) + \frac{1}{2}A^2(t)\,exp(\xi(t))\right]dt + \exp(\xi(t))\,A(t)\,dw(t)$
$d\eta = \eta(t)\left[a(t) + \frac{1}{2}A^2(t)\right]dt + \eta(t)\,A(t)\,dw(t)$ - линейное стохастическое уравнение. Теперь, мы знаем как его решать: $\exp(\xi(t))$.
$d\xi = tdt + 5dw(t)$
$f(t,x) = \ln x$, $a = t, A = 5, f_t' = 0, f_x' = \frac{1}{x}, f_x'' = -\frac{1}{x^2}$
$d\eta = \left[t \cdot \frac{1}{\xi(t)} - \frac{25}{2}\frac{1}{\xi^2(t)}\right]dt + \frac{5}{\xi(t)}dw(t)$

1.6 Многомерный стохастический интеграл

Многомерный винеровский процесс $w(t) \in \mathcal{R}^d$ - это случайный процесс, такой, что его компоненты $w(t) = (w_1(t), w_2(t), ..., w_d(t))$ $w_k(t)$ - это независимые винеровские процессы (скалярные).

Напомним, что в одномерном случае, $w(t) \in \mathcal{R}$ имеет плотность распределения $f(t,x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}}e^{-\frac{x^2}{2t}}$

$f(t,x) = \frac{1}{\left(\sqrt{2\pi t}\right)^d}e^{-\frac{||x||^2}{2t}} = \frac{1}{\left(\sqrt{2\pi t}\right)^d}\prod_{k=1}^d e^{-\frac{x_k^2}{2t}}$

1. $Ew_i(t)\,w_k(t) = 0, i \neq k = 1, ..., d$
2. $E||w(t)||^2 = E\sum_{i=1}^d (w_i(t))^2 = d \cdot t$
3. $p(t,x,y) = \frac{1}{\left(\sqrt{2\pi t}\right)^d}e^{-\frac{||y-x||^2}{2t}}$

Стохастический интеграл: пусть $A(t) \in \mathcal{R}^n \otimes \mathcal{R}^n \equiv Matz^n$ - ступенчатая функция:

$A(t)\begin{cases} A(t_k) & t_k \le t < t_{k+1} \\ 0 & \text{иначе} \end{cases}$

Зададим стохастический интеграл соотношением

$$I(A) = \sum A(t_k)\,\Delta_k w \in \mathcal{R}^n$$

Заметим, что $A(t)$ - $\mathcal{F}_t^w$ - измерима. $(x,y) = \sum x_k \cdot y_k$ - скалярное произведение.
Вектор с компонентной l: $(I(A))_l = \sum_{k=1}^m \sum^t A_{jl}\Delta_k w_j$
Пусть $\Delta_k w_j = w_j(t_{k+1}) - w_j(t_k)$. Тогда
$EI(A) = E\sum A(t_k)\,\Delta_k w = E\sum A(t_k)\,E[\Delta_k w/\mathcal{F}_{t_k}] = 0$, т.к. $A(t_k)$- $\mathcal{F}_{t_k}$ - измеримая.
$E\left(I(A)^2\right) = \sum_k AA\Delta_k t$
$E\,||I(A)||^2 = E\,||\sum A(t_k)\,\Delta_k w||^2$
При вычислении:
$E(A(t_k)\,\Delta_k w, A(t_j)\,\Delta_j w)$

Пусть $t_k > t_j$, тогда $= E\left[E\left[A(t_k)\Delta_k w, A(t_j)\Delta_j w | F_{t_j}\right]\right]$

Заметим, что:

$(A(t_k)\Delta_k w, A(t_j)\Delta_j w) = E\sum_j A_{lq}(t_l)\Delta_j w_q \cdot E\sum_m A_{lm}(t_k)\Delta_k w_m = E\sum_l\sum_m A_{ml}(t_k)\Delta_k w_m = A_{ql}(t_i)p_j \cdot w_q$

В силу независимости $\Delta_k w_m$ и $\Delta_j w_q$ при $j \neq q$

$E(I(A))^2 = \int_0^T EA^2(t)\,dt$

$E\sum|A_{ml}(t_k)\Delta_k w_m|^2$??? Что это значит

$A^2 = AA^T$

$A_{ml}(t_k)A_{lq}\Delta_k w_m \Delta_k w_q$

$A_{ml}A_{lm} = TrA^2$, где $TrA = \sum_{i=1}^n B_{ii}$

Класс интегрируемых функций - это матричные функции $A(t)$ такие, что $E\int_0^T TrA^2(\tau)\Delta\tau < \infty$

Случайный процесс $\xi(t) \in \mathcal{R}^n$ имеет **стохастический дифференциал**

$$d\xi = a(t)\,dt + A(t)\,dw(t) \tag{1.1}$$

где $w(t) \in \mathcal{R}, a(t) \in \mathcal{R}^n, A(t) \in Matr^n$если с вероятностью 1 справедливо равенство

$$\xi(t) = \xi(s) + \int_s^t a(\vartheta)\,d\vartheta + \int_s^t A(\vartheta)\,dw(\vartheta) \tag{1.2}$$

2 Многомерная формула Ито

Пусть $\xi(t)$ имеет стохастический дифференциал вида (1) и $f(t,x) \in \mathcal{R}$, $t \in [0,T], x \in \mathcal{R}^n$ - это диференцируемая на t и дважды дифференцируемая по x скалярная функция

Тогда случайный процесс $\eta(t) = f(t,\xi(t))$ имеет стохастический дифференциал вида

$$d\eta = \left[\frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{i=1}^n a_i(t)\frac{\partial f}{\partial x_i} + \sum_{i,k,j} A_{ik}(t)\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}A_{kj}(t)\right](t,\xi(t))\,dt + \sum_{i,k}\frac{\partial f}{\partial x_i}A_{x_i}(t)\,dw_k(t) \tag{2.1}$$

Пусть $\nabla f(x) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, .., \frac{\partial f}{\partial x_n}\right)$, $f''(x) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right)_{i,j=1}^n$

Тогда формулу (3.3) можно переписать в виде:

$$d\eta = \left[\frac{\partial f(t,\xi(t))}{\partial t} + (a(t), \nabla f(t,\xi(t))) + \frac{1}{2}TrA(t)f''(t,\xi(t))A^T(t)\right]dt + (\nabla f, A(t))\,dw(t) \tag{2.2}$$

05.10.17

3 Стохастические дифференциальные уравнения (СДУ)

Пусть $a(t,x)$ и $A(t,x)$ - заданные функции.

Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ - заданное вероятностное пространство и $w(t)$ - стандартный винеровский процесс.

Рассмотрим СДУ вида

$$d\xi = a(t,\xi(t))\,dt + A(t,\xi(t))\,dw(t) \tag{3.1}$$

Заметим, что $a\left(t,x\right)$ и $A\left(t,x\right)$ могут быть случайными, но тогда мы будем предполагать, что они F_t^w - измеримы.

Мы будем решать задачу Коши для СДУ (3.1) с условиями

$$\xi\left(s\right)=x\in\mathcal{R}\,(\text{или } \xi\left(s\right)=\xi_0-F_s-\text{измерима})\tag{3.2}$$

Будем говорить, что процесс $\xi\left(t\right)$ является решением (3.1), (3.2) если с вероятностью 1 справедливо равенство

$$\xi\left(T\right)=\xi\left(s\right)+\int_s^T a\left(\vartheta,\xi\left(\vartheta\right)\right)d\vartheta+\int_s^T A\left(\vartheta,\xi\left(\vartheta\right)\right)dw\left(\vartheta\right)\tag{3.3}$$

Рассмотрим уравнение

$$\xi\left(t\right)=x+\int_s^t a\left(\vartheta,\xi\left(\vartheta\right)\right)d\vartheta+\int_s^t A\left(\vartheta,\xi\left(\vartheta\right)\right)dw\left(\vartheta\right)\tag{3.4}$$

Сформулируем необходимое и достаточное условие существования решения уравнения (3.4). Будем говорить, что выполнено условие У1, если справедливы оценки:

$$\begin{gathered}\left|a\left(t,x\right)\right|^2+\left|A\left(t,x\right)\right|^2\le C\left[1+\left|x\right|^2\right]\\ \left|a\left(t,x\right)-a\left(t,y\right)\right|^2+\left|A\left(t,x\right)-A\left(t,y\right)\right|^2\le L\left|x-y\right|^2\\ C,L-\text{неслучайные постоянные}\end{gathered}$$

При этом оценки выполняются либо с вероятностью 1, либо в среднем квадратичном.

Теорема 3.1: Пусть коэффициенты (3.1) (3.2) (или 3.4) удовлетворяют условию У1. Тогда существует единственное решение $\xi\left(t\right)=\xi_{s,x}\left(t\right)$

Доказательство: Построим систему последовательных приближений:

$\xi^1\left(t\right)=x+\int_s^t a\left(\vartheta,x\right)d\vartheta+\int_s^t A\left(\vartheta,x\right)dw\left(\vartheta\right)$

$\xi^2\left(t\right)=x\int_s^t a\left(\vartheta,\xi^1\left(\vartheta\right)\right)d\vartheta+\int_s^t A\left(\vartheta,\xi^1\left(\vartheta\right)\right)dw\left(\vartheta\right)$

Общий вид: $\xi^n\left(t\right)=x+\int_s^t a\left(\vartheta,\xi^{n-1}\left(\vartheta\right)\right)d\vartheta+\int_s^t A\left(\vartheta,\xi^{n-1}\left(\vartheta\right)\right)dw\left(\vartheta\right)$

Обозначим $\mathcal{H}_T^2=\left\{\xi\left(\vartheta\right),0\le\vartheta\le T:\sup\limits_{\vartheta}E\xi^2\left(\vartheta\right)<\infty\right\}$

Наша цель показать, что $\xi^n\in\mathcal{H}_T^2$ и существует единственный предел $\underset{n\to\infty}{lim}\xi^n\left(t\right)=\xi\left(t\right)$, удовлетворяющий (3.4).

Для доказательства единственности решения уравнения (5.4) воспользуемся леммой Гронуолла.

Лемма Гронуолла: Пусть $\alpha\left(t\right)$ - положительная функция, удовлетворяющая неравенству

$$\alpha\left(t\right)\le A+\int_0^t B\alpha\left(\tau\right)d\tau\tag{3.5}$$

Тогда

$$\alpha\left(t\right)\le Ae^{Bt}\tag{3.6}$$

Доказательство леммы: проитерируем оценку

$\alpha\left(t\right)\le A+\int_0^t B\left[A+\int_0^\tau B\alpha\left(\vartheta\right)d\vartheta\right]d\tau=A+ABt+\int_0^t\int_0^\tau B\alpha\left(\vartheta\right)d\vartheta d\tau\le$

$\alpha\left(t\right)\le A\left(1+Bt\right)+B\int_0^t\int_0^\tau\left[A+\int_0^{\vartheta_1}B\alpha\left(\vartheta\right)\right]d\vartheta d\tau...$

$=A\left(1+Bt+B+B^2\int\int\int...\right)$

$\int_0^t\int_0^\tau d\vartheta d\tau=\int_0^t\tau d\tau=\frac{t^2}{2}$

Повторяя эти оценки, мы получим неравенство

$\alpha(t) \le A\left[1 + Bt + B^2\frac{t^2}{2!} + ... + B^n\frac{t^n}{n!} + ...\right] = Ae^{Bt}$

Замечание: аналогично доказывается, что если $\alpha(t) \le A + \int_0^t B(\tau)\alpha(\tau)d\tau$, то $\alpha(t) \le Ae^{\int_0^t B(\tau)d\tau}$

Вернемся к доказательству теоремы 5.1:

Для того, чтобы доказать единственность, мы предположим обратное, т.е. пусть существует 2 решения уравнения (5.4) $\xi(t)$ и $\eta(t)$.

Оценим разность

$$\alpha(t) = E\left|\xi(t) - \eta(t)\right|^2 = E\left\{\int_0^t \left[a(\vartheta, \xi(\vartheta)) - a(\vartheta, \eta(\vartheta))\right]d\vartheta + \int_0^t \left[A(\vartheta, \xi(\vartheta)) - A(\vartheta, \eta(\vartheta))\right]dw(\vartheta)\right\}^2$$

??? Почему интегралы от 0 а не от s?

Воспользуемся тем, что $|(c,b)|^2 \le |c|^2|b|^2$, тогда $\left[\int_0^t 1\cdot a(\tau)d\tau\right]^2 \le \int_0^t 1^2 d\tau \int_0^t a^2(\tau)d\tau = t\int_0^t a^2(\tau)d\tau$,

Для второго слагаемого применим свойство $E\left|\int_0^t A(\tau)dw(\tau)\right|^2 \le \int_0^t EA^2(\tau)d\tau$. Эта формула определена в конце третьей страницы. Также воспользуемся тем, что $|a+b|^2 \le 2a^2 + 2b^2$

$$\alpha(t) \le 2t\int_0^t E\left|a(\vartheta, \xi(\vartheta)) - a(\vartheta, \eta(\vartheta))\right|^2 d\vartheta + 2\int_0^t E\left[A(\vartheta, \xi(\vartheta)) - A(\vartheta, \eta(\vartheta))\right]^2 d\vartheta$$

Используя условие У1 мы получим

$$\alpha(t) \le 2\int_0^t E\left[t\left|a(\vartheta, \xi(\vartheta)) - a(\vartheta, \eta(\vartheta))\right|^2 + \left|A(\vartheta, \xi(\vartheta)) - A(\vartheta, \eta(\vartheta))\right|^2\right]d\vartheta$$

$$\alpha(t) \le 2\int_0^t E\left[tL\left|\left|\xi(\vartheta) - \eta(\vartheta)\right|\right|^2 + L\left|\left|\xi(\vartheta) - \eta(\vartheta)\right|\right|^2\right]d\vartheta =$$

$$= 2L(t+1)\int_0^t E\left|\left|\xi(\vartheta) - \eta(\vartheta)\right|\right|^2 d\vartheta$$

$\alpha(t) = 2L(t+1)\int_0^t \alpha(\vartheta)d\vartheta$. В силу леммы Гронуолла получим соотношение $E\left|\left|\xi(t) - \eta(t)\right|\right|^2 = 0$

Доказано

Для доказательства существования решения рассмотрим последовательные приближения

$\xi^{n+1}(t) = x + \int_s^t a(\vartheta, \xi^n(\vartheta))d\vartheta + \int_s^t A(\vartheta, \xi^n(\vartheta))dw(\vartheta)$

$\xi^{n+2}(t) = x + \int_s^t a(\vartheta, \xi^{n+1}(\vartheta))d\vartheta + \int_s^t A(\vartheta, \xi^{n+1}(\vartheta))dw(\vartheta)$ и оценим

$E\left|\xi^{n+2}(t) - \xi^{n+1}(t)\right|^2 \le L(t+1)\int_0^t E\left|\xi^{n+1}(\vartheta) - \xi^n(\vartheta)\right|^2 d\vartheta \le L(t+1)\int_0^t\int_0^\vartheta L(\vartheta+1)E\left|\xi^n(\vartheta) - \xi^{n-1}(\vartheta)\right|^2 d\vartheta \le ... \le \frac{[L(t+1)]^n}{n!} \le ...$

Первое неравенство - мы применяем формулу, разобранную в доказательстве единства решения (там $\alpha(t)$ было МО разности двух решений, здесь - разность последовательных приближений к решению). При этом от шага $n+2$ и $n+1$ мы переходим к шагам $n+1$ и n соответственно. Повторяя этот процесс многократно, мы сводим этот интеграл к дроби. Дальше мы устремляем количество последовательных решений к бесконечности и получаем, что $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{[L(t+1)]^n}{n!} = 0$. При этом предельная функция (предельный процесс) удовлетворяет оценке $E\left|\left|\xi(t)\right|\right|^2 < \infty$

Чтобы это показать, применим неравенство $|a+b+c|^2 \le 3\left(|a|^2+|b|^2+|c|^2\right)$??? Почему тройка только перед ||x||

$E\,||\xi(t)||^2 \le 3\,||x||^2 + t\int_0^t E\,|a(\vartheta,\xi(\vartheta))|^2\,d\vartheta + \int_0^t E\,|A(\vartheta,\xi(\vartheta))|^2\,d\vartheta$

В силу У1

$E\,|\xi(t)|^2 \le 3\,|x|^2 + L(t+1)\int_0^t C\left[1+\xi^2(\tau)\right]d\tau \le \left[3\,|x|^2 + LC(t+1)\,t\right] + \int_0^t CE\,|\xi(\tau)|^2\,d\tau \le$
$\le \left[3\,|x|^2 + LC(t+1)\,t\right]e^{Ct}$ в силу Леммы Гроноулла и $\sup\limits_{0\le t\le T} E\,|\xi(t)|^2 < \infty$

Свойства решений СДУ.

№1. Рассмотрим СДУ

$$d\xi(t) = a(\xi(t))\,dt + A(\xi(t))\,dw(t) \tag{3.7}$$

и покажем, что его **решение непрерывно по начальным данным**.

Напомним, что $\xi_{s,x}(t) = x + \int_s^t a(\xi_{s,x}(\vartheta))\,d\vartheta + A(\xi_{s,x}(\vartheta))\,dw(\vartheta)$

Оценим разность ??? Тот же вопрос с тройками

$E\,|\xi_{s,x}(t)-\xi_{s,y}(t)|^2 \le 3\,|x-y|^2 + (t-s)\int_s^t E\,|a(\xi_{s,x}(\vartheta)) - a(\xi_{s,y}(\vartheta))|^2\,d\vartheta + \int_s^t E\,|A(\xi_{s,x}(\vartheta)) - A(\xi_{s,y}(\vartheta))|^2\,d\vartheta$

$|\xi_{s,x}(t)-\xi_{s,y}(t)|^2 = \left[[x-y] + \int_s^t a(\xi_{s,x}(\vartheta)) - a(\xi_{s,y}(\vartheta))\right]d\vartheta + \int_s^t \left[A(\xi_{s,x}(\vartheta)) - A(\xi_{s,y}(\vartheta))\,dw\right]^2$

$= 3\,(x-y)^2 + 3\,(t-s+1)\int_s^t EL\,|\xi_{s,x}(\vartheta)-\xi_{s,y}(\vartheta)|^2\,d\vartheta$ в силу леммы Гроноулла $\le 3\,(x-y)^2 e^{kT}$, $k = 3\,(t-s+1)\,L$,$0 \le s \le t \le T$

№2. Гладкость решений СДУ.

Пусть $\xi_{s,x}(t)$- это решение (3.4). Обозначим $\frac{\partial}{\partial x}\xi_{s,x}(t) = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\xi_{s,x+\Delta}(t)-\xi_{s,x}(t)}{\Delta x}$, где предел понимается в среднеквадратичном.

При этом процесс $\eta(t) = \frac{\partial}{\partial x}\xi_{s,x}(t)$ удовлетворяет СДУ

$$d\eta(\vartheta) = a'_x(\xi(\vartheta))\,\eta(\vartheta)\,d\vartheta + A'_x(\xi(\vartheta))\,\eta(\vartheta)\,dw(\vartheta) \tag{3.8}$$

Таким образом, если коэффициент $a(x)$ и $A(x)$ k раз дифференцируемы, $k = 1, 2, ...,$, то решения $\xi_{s,x}(t)$уравнения (3.4) тоже k раз дифференцируемы.

Если $a'(x)$ и $A'(x)$- ограниченные, то уравнение (3.8) определено корректно, т.е. его коэффициенты удовлетворяют У1.

Обозначим $\gamma(t) = \frac{\partial^2\xi_{s,x}(t)}{\partial x^2}$

Формально, мы получим, что $\gamma(t)$ удовлетворяет СДУ

$$d\gamma(t) = a'_x(\xi_{s,x}(\vartheta))\,\gamma(\vartheta)\,d\vartheta + A'_x(\xi_{s,x}(\vartheta))\,\gamma(\vartheta)\,dw(\vartheta) + a''_x(\xi(\vartheta))\,\eta(\vartheta)\,d\vartheta + A''(\xi_{s,x}(\vartheta))\,\eta^2(\vartheta)\,dw(\vartheta) \tag{3.9}$$

Решение уравнения (3.8) имеет вид

$$\eta(t) = \exp\left[\int_s^t a'(\xi_{s,x}(\vartheta))\,d\vartheta + \int_s^t A'(\xi_{s,x}(\vartheta))\,dw(\vartheta) - \frac{1}{2}\int_s^t \left[A'(\xi_{s,x}(\vartheta))\right]^2 d\vartheta\right]$$

19.10.17

$d\xi = a(\xi(t))\,dt + A(\xi(t))\,dw(t)$

$\xi(s) = x$, $\eta(t) = u(t,\xi(t))$

$d\eta(t) = \left[\frac{\partial u(t,\xi(t))}{\partial t} + a(\xi(t))\frac{\partial u(t,\xi(t))}{\partial x} + \frac{1}{2}A^2(\xi(t))\frac{\partial^2 u(t,\xi(t))}{\partial x^2}\right]dt + \frac{\partial u(t,\xi(t))}{\partial x}A(\xi(t))\,dw(t) = du(t,\xi(t))$

Рассмотрим уравнение в частных производных $\frac{\partial u}{\partial s} + a(x)\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2}A^2(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$ с граничным условием $u(T,x) = u_0(x)\,, s \le t \le T$

Проинтегрируем $d\eta\left(t\right)$ от s до T

$u\left(T,\xi\left(T\right)\right)-u\left(s,x\right)=\int_s^T\left[...\right]dt+\int_s^T\frac{\partial u}{\partial x}\left(t,\xi\left(t\right)\right)A\left(\xi\left(t\right)\right)d\omega\left(t\right)$ - формула Ньютона-Лейбница

$Eu_0\left(\xi\left(T\right)\right)-u\left(s,x\right)=0$

Математическое ожидание стохастического процесса равно нулю. Дисперсия равна τ.

$u\left(s,x\right)=Eu_0\left(\xi\left(T\right)\right)$

$\frac{\partial u}{\partial s}+a\left(x\right)\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{2}A^2\left(x\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=f\left(x\right)$

$\left[\frac{\partial u(t,\xi(t))}{\partial t}+a\frac{\partial u(t,\xi(t))}{\partial x}+\frac{1}{2}A^2\left(\xi\left(t\right)\right)\frac{\partial^2 u(t,\xi(t))}{\partial x}+f\left(\xi\left(t\right)\right)-f\left(\xi\left(t\right)\right)\right]dt+\frac{\partial u(t,\xi(t))}{dx}A\left(\xi\left(t\right)\right)dw\left(t\right)=d\eta\left(t\right)=du\left(t,\xi\left(x\right)\right)$

$u\left(s,x\right)=E\left[u_0\left(\xi\left(T\right)\right)-\int_s^T f\left(\xi\left(t\right)\right)dt\right]$??? Почему, откуда появилось второе слагаемое с интегралом

Пример:

$d\xi=sin\left(\xi\left(t\right)\right)dt+cos\xi\left(t\right)dw\left(t\right)$

$\xi\left(s\right)=x$

$f\left(t,x\right)=t\sin x$

$\frac{\partial f}{\partial x}=t\cos x,\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=-t\sin x$

$d\eta=\sin x+\sin\left(\xi\left(t\right)\right)t\cos x-\frac{1}{2}cos^2\left(\xi\left(t\right)\right)t\sin x=0$

??? Разве не $d\eta=\left[\sin\xi\left(t\right)+\sin\left(\xi\left(t\right)\right)t\cos x-\frac{1}{2}cos^2\left(\xi\left(t\right)\right)t\sin x\right]dt+t\cos^2\xi\left(t\right)dw\left(t\right)$

4 Марковские процессы

Случайный процесс называется **марковским** относительно потока σ -аглебр $\mathcal{F}_t$, если справедливо соотношение:

$$E\left[f\left(\xi\left(T\right)\right)|\mathcal{F}_t\right]=E\left[f\left(\xi\left(T\right)\right)|\xi\left(t\right)\right]$$

для любой измеримой ограниченной функции $f\left(x\right)$, $0\leq t\leq T$.

С каждым марковским процессом связана его **переходная вероятность**

$p\left(s,x,t,G\right)=P\left\{\xi\left(t\right)\in G|\xi\left(s\right)=x\right\},G\in\mathcal{R},\ G=[a;b)$

В терминах переходной вероятности, марковское свойство описывается **уравнением Чепмена-Колмогорова**

$$p\left(s,x,t,G\right)=\int_{-\infty}^{\infty}p\left(s,x,\vartheta,dz\right)p\left(\vartheta,z,t,G\right)$$

Если $P\left(s,x,t,G\right)=\int_G p\left(s,x,t,y\right)dy$, то уравнение Чепмена-Колмогорова имеет вид:

$$p\left(s,x,t,y\right)=\int_{-\infty}^{\infty}p\left(s,x,\vartheta,z\right)p\left(\vartheta,z,t,y\right)dz$$

Каждый марковский процесс порождает **эволюционное семейство**, действующее в пространстве V измеримых ограниченных функций.

$u\left(s,t\right)f\left(x\right)=\int_{-\infty}^{\infty}f\left(y\right)p\left(s,x,t,y\right)dy$

Эволюционное свойство $u\left(s,t\right)$ т.е. равенство $u\left(s,t\right)=u\left(s,\vartheta\right)u\left(\vartheta,t\right)$ следует из уравнения Ч-К.

Действительно:

$u\left(s,t\right)f\left(x\right)=\int_{-\infty}^{\infty}f\left(y\right)p\left(s,x,t,y\right)dy=\int_{-\infty}^{\infty}f\left(x\right)\left[\int_{-\infty}^{\infty}p\left(s,x,\vartheta,z\right)p\left(\vartheta,z,t,y\right)dz\right]dy=$изменяем порядок интегрирования,$u\left(\vartheta,t\right)f\left(z\right)=\phi\left(z\right)$, далее

$=\int_{-\infty}^{\infty}p\left(s,x,\vartheta,z\right)\left[\int_{-\infty}^{\infty}f\left(y\right)p\left(\vartheta,z,t,y\right)dy\right]dz=\int_{-\infty}^{\infty}p\left(s,x,\vartheta,z\right)\left(u\left(\vartheta,t\right)f\right)\left(z\right)dz=\int_{-\infty}^{\infty}p\left(s,x,\vartheta,z\right)\phi\left(z\right)dz=u\left(s,\vartheta\right)\phi\left(z\right)=u\left(s,\vartheta\right)u\left(\vartheta,t\right)f\left(x\right)$

Генератор эволюционного семейства $u(s,t)$ - это оператор A, задаваемый соотношением:
$\lim\limits_{\Delta s\to 0} \frac{u(s,s+\Delta s)-I}{\Delta s} f(x) = Af(x)$, I - единичный оператор.
Генератор марковского процесса - это оператор L, задаваемый соотношением
$\lim\limits_{\Delta s\to 0} \frac{Ef(\xi_{s,x}(s+\Delta s))-f(x)}{\Delta s} = Lf(x)$
Если $u(s,t) f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y) p(s,x,t,y) dy$, т.е. $u(s,t)$ порожден марковским процессом $\xi(t)$ с плотностью переходной вероятности $p(s,x,t,y)$, то $Af = Lf$ на области их определения.

5 Марковское свойство решения стохастических уравнений

Рассмотрим СДУ

$$d\xi = a(\xi(\vartheta)) d\vartheta + A(\xi(\vartheta)) dw(\vartheta), \xi(s) = x \tag{5.1}$$

Мы будем предполагать, что функции $a(x), A(x)$ неслучайные и удовлетворяют условию теоремы существования и единства решения СДУ.

Теорема 5.1 Пусть $a(x), A(x)$ неслучайны и существует решение $\xi_{s,x}(t)$ задачи (5.1). Тогда $\xi_{s,x}(t)$ - марковский процесс.

Доказательство:

Рассмотрим случайный процесс
$\xi(t) = x + \int_s^t a(\xi(\vartheta)) d\vartheta + \int_s^t A(\xi(\vartheta)) dw(\vartheta) = \xi(\tau) + \int_\tau^s a(\xi(\vartheta)) d\vartheta + \int_\tau^t A(\xi(\vartheta)) dw(\vartheta)$.
Это равенство вытекает из единственности решения (5.1)

Процесс $\xi_{\tau,\eta}(t)$, $\eta = \xi(\tau)$ можно представить в виде функции, зависящей от двух переменных ω и ω_1, где $\omega = \eta(\tau)$ и ω_1 пораждeн стохастическим и обыкновенным интегралом.

В силу свойств стохастических интегралов, ω и ω_1 независимые.

Пусть $\xi(t) = g(\omega, \omega_1)$. g можно представить в виде: $g(\omega,\omega_1) = \sum_{k=0}^{\infty} \phi_k(\omega) \psi_k(\omega_1)$

Используя это свойство можно показать, что в любой измеримой ограниченно функции $f(x)$ справедливо равенство $Ef(\xi(T)|\mathcal{F}_\tau) = Ef(\xi(T)|\xi(\tau))$, т.е. $\xi(t)$ - это марковский процесс.

5.1 Уравнение колмогорова, обратное уравнение

Пусть $\xi(t)$ - решение уравнения (5.1) со случайными коэффициентами. Рассмотрим функцию $u(s,x) = Ef(\xi_{s,x}(T))$ и выведем уравнение, которому она удовлетворяет.

С учетом того, что $u(s,x) = Ef(\xi_{s,x}(T)) = \int f(y) p(s,x,T,y) dy$, вычислим:

$$u(s+\Delta s, x) - u(s,x) = \int f(y) p(s+\Delta s, x, T, y) dy - \int f(y) p(s,x,T,dy) \tag{5.2}$$

Воспользуемся уравнением Ч-К
$p(s,x,T,y) = \int p(s,x,s+\Delta s,z) p(s+\Delta s,z,T,y) dy$
Из (5.2) получим:

$$u(s+\Delta s, x) - u(s,x) = \int f(y) p(s+\Delta s, x, T, y) dy - \int f(y) \int p(s,x,s+\Delta s,z) \cdot p(s+\Delta s,z,T,y) dz dy \tag{5.3}$$

Поскольку

$\int f(y)\,p(s+\Delta s,z,T,y) = u(s+\Delta s,z)$ то из (5.3) следует, что и $u(s+\Delta s,x) - u(s,x) = \int f(y)\,p(s+\Delta s,x,T,y)\,dy - \int u(s+\Delta s,z)\,p(s+\Delta s,z,T,y)\,dz$

Таким образом $u(s+\Delta s,x) - u(s,x) = E\left\{u(s+\Delta s,\xi_{s+\Delta s,x}(t)) - u\left(s+\Delta s,\xi_{s+\Delta s,\xi(s+\Delta s)}(T)\right)\right\}$??? Почему

Перепишем полученные соотношения в следующем виде. Напомним, что $u(s,x) = \int f(y)\,p(s,x,s+\Delta s,y)\,dy = \int f(y)\int p(s,x,\vartheta,z)\,p(\vartheta,z,s+\Delta s,y)\,dydz = Eu(s,\xi_{s,x}(s+\Delta))$

$u(s+\Delta s,x) - u(s,x) = u(s+\Delta s,x) - E\left[u(s+\Delta s,\xi_{s,x}(s+\Delta s))\right]$

Используя формулу Ито, получим

$\lim\limits_{\Delta s\to 0}\frac{u(s+\Delta s,x)-u(s,x)}{\Delta s} = \frac{\partial u}{\partial s} = -\left[a(x)\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2}A^2(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right]$ В квадртаной скобке находится слагаемое перед ds в формуле Ито.

Таким образом, функция $u(s,x) = Ef(\xi_{s,x}(T))$ удовлетворяет задаче Коши $\frac{\partial u}{\partial s} + a(x)\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2}A^2(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$, $u(T,x) = f(x)$

Пример:

$d\xi = 3f(\vartheta)\,d\vartheta + sin(\xi(\vartheta))\,dw,\ \xi(s) = x,\ f(x)$

$u(s,x) = Ef(\xi_{s,x}(T))$

$\frac{\partial u}{\partial s} + 3x\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2}sin^2x\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$,

Другой вариант:

$\frac{\partial u}{\partial s} + 4x\frac{\partial u}{\partial x} - 9x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$

$u(T,x) = sinx$

Написать вероятностное представление:

$d\xi = 4\xi(\vartheta)\,d\vartheta + 3\sqrt{2}\xi(\vartheta)\,du$

$u(s,x) = Esin(\xi_{s,x}(T))$

Пример:

№1. $d\xi = \sqrt{3}sin(\xi(\vartheta)) + \sqrt{2}cos(3\xi(\vartheta))\,dw(\vartheta)$

$\xi(s) = x$

$f(x) = \cos x$

$u(s,x) = Ecos(\xi_{s,x}(T))$

$a(\xi(\vartheta)) = \sqrt{3}\sin(\xi(\vartheta)),\ a(x) = \sqrt{3}\sin x$

$A(\xi(\vartheta)) = \sqrt{2}\cos(3\xi(\vartheta)),\ A(x) = \sqrt{2}\cos 3x$

$\frac{\partial u}{\partial s} + \sqrt{3}\sin x\frac{\partial u}{\partial x} + cos^2 3x\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$

$u(T,x) = \cos x$

_ _ _ _ _ _ _ _ _ _

$\frac{\partial u}{\partial s} + sin(x)\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2}cos^2(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$

$u(T,x) = 2\sin x,\ u(s,x) = Ef(\xi_{s,x}(T))$

$d\xi = \sin(\xi(\vartheta))\,d\vartheta + cos(\xi(\vartheta))\,dw\vartheta$

$u(s,x) = E2sin(\xi_{s,x}(T))$

5.2 Формула Фейнмана-Каца

Рассмотрим задачу Коши

$$\frac{\partial u}{\partial s} + a(x)\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2}A^2(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + c(x)\,u = 0, u(T,x) = f(x) \tag{5.4}$$

Нужно построить вероятностное представление решения этой задачи.

Рассмотрим СДУ

$$d\xi = a(\xi(\vartheta))\,d\vartheta + A(\xi(\vartheta))\,dw(\vartheta) \tag{5.5}$$

$$d\eta = c\left(\xi\left(\vartheta\right)\right)\eta\left(\vartheta\right)d\vartheta \tag{5.6}$$

$$\xi\left(s\right) = x, \eta\left(s\right) = 1$$

и функцию $u\left(s,x\right)$ вида

$$u\left(s,x\right) = E\left[\eta\left(T\right)f\left(\xi_{s,x}\left(T\right)\right)\right] \tag{5.7}$$

Покажем, что $u\left(s,x\right)$ вида (5.7) удовлетворяет (5.4)

Примечание: $\eta\left(s+\Delta s\right) = \exp\int_s^{s+\Delta s} c\left(\xi\left(a\right)\right)d\vartheta$??? Здесь $\eta\left(t\right)$- верхний предел зависит от аргумента. Может быть $\eta\left(t\right) = \int_s^t \ldots$ а не $\int_s^T$

Заметим, что процесс $\eta\left(t\right)$ имеет вид $\eta\left(t\right) = \exp\int_s^T c\left(\xi\left(\vartheta\right)\right)d\vartheta$ и вычислим $u\left(s+\Delta s,x\right) - u\left(s,x\right)$??? Здесь $\eta\left(t\right)$ - интеграл с T в качестве верхнего предела, см. предыдущий вопрос

$u\left(s+\Delta s,x\right) - u\left(s,x\right) =$

Рассмотрим

$u\left(s,x\right) = E\eta\left(s+\Delta s\right)f\left(\xi_{s,x}\left(s+\Delta s\right)\right)$

Тогда $u\left(s+\Delta s,x\right) - u\left(s,x\right) = u\left(s+\Delta s,x\right) - E\eta\left(s+\Delta s\right) + f\left(\xi_{s,x}\left(s+\Delta s\right)\right)$??? Почему $+$, а не умножение

Рассмотрим разность $E\left[\eta\left(s+\Delta s\right) - \eta\left(s\right)\right]f\left(\xi_{s,x}\left(s+\Delta s\right)\right) + E\left[\eta\left(s\right)f\left(\xi_{s,x}\left(s+\Delta s\right)\right) - f\left(x\right)\right]$??? Правильно ли расставлены скобки

$=E\left[e^{\int_s^{s+\Delta s} c\left(\xi\left(\vartheta\right)\right)d\vartheta} - 1\right]f\left(\xi_{s,x}\left(s+\Delta s\right)\right) + E\left[f\left(\xi_{s,x}\right) - f\left(x\right)\right]$

Таким образом

$\underset{\Delta s\to 0}{lim}\frac{u(s+\Delta s,x)-u(s,x)}{\Delta s} = \frac{\partial u}{\partial s} = -\left(c\left(x\right)u + a\left(x\right)\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2}A^2\left(x\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)$

Отсюда вытекает, что $u\left(s,x\right) = Ee^{\int_s^T c\left(\xi\left(\vartheta\right)\right)d\vartheta}\cdot f\left(\xi_{s,x}\left(T\right)\right)$ удовлетворяет задаче Коши.

$$\frac{\partial u}{\partial s} + a\left(x\right)\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2}A^2\left(x\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + c\left(x\right)u\left(x\right) = 0, u\left(T,x\right) = f\left(x\right) \tag{5.8}$$

Рассмотрим СДУ

$$d\xi = a\left(\xi\left(\vartheta\right)\right)d\vartheta + A\left(\xi\left(\vartheta\right)\right)dw\left(\vartheta\right)$$

и процесс $du\left(t,\xi\left(t\right)\right) = \left[u'_t + au'_x + \frac{1}{2}\Delta^2 u''_x\right]dt + u'_x A\left(\xi\left(t\right)\right)dw$

Пусть $c\equiv 0$. Тогда, добавляя и вычитая в квадратных скобках $f\left(\xi\left(t\right)\right)$ получим

$du = \left[u'_t + au'_x + \frac{1}{2}A^2\cdot u''_{xx} + f - f\right]dt + u'_x A dw$

$du = f\left(\xi\left(t\right)\right)dt + u'_x A dw$

Интегрируем по t от s до T .

$Eu\left(T,\xi\left(T\right)\right) - u\left(s,x\right) = E\int_s^T f\left(\xi\left(\vartheta\right)\right)d\vartheta$

Отсюда следует, что

$u\left(s,x\right) = E\left[f\left(\xi_{s,x}\left(T\right)\right) + \int_s^T f\left(\xi_{s,x}\left(\vartheta\right)\right)d\vartheta\right]$

??? Может быть, более подробно это расписать

02.11.17

6 Генерация марковского процесса

$Grf\left(x\right) = \lim\frac{Ef(\xi_{s,x}(s+\Delta s)-f(x)(t_k))}{\Delta s} = a\left(x\right)f'\left(x\right) + \frac{1}{2}A^2\left(x\right)F''\left(x\right)$

$u\left(s,x\right) = f\left(\xi_{s,x}\left(T\right)\right)$

$\frac{\partial u}{\partial s} + a\left(x\right)\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2}A^2\left(x\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, u\left(T,x\right) = f\left(x\right)$

$u(s,x) = E\left[exp\left[\int_s^T c(\xi(\vartheta))\,dq\right]\right]_F$
$\frac{\partial u}{\partial s} + a(x)\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2}A^2(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + g(x) = 0$
$d\xi = a(\xi(t))\,dt + A(\xi(t))\,dw(t)$
$u(s,x)$
$du(\vartheta,\xi(\vartheta)) = \left[\frac{\partial u}{\partial \vartheta} + a\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{A^2}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + g - g\right](\vartheta,\xi(\vartheta))^2 + \frac{\partial u}{\partial x}(\vartheta,\xi(\vartheta))\,A(\xi(\vartheta))\,dw(\vartheta)$
$\int_s^T Au(\vartheta,\xi(\vartheta)) = -\int_s^T g(\xi(\vartheta))\,d\vartheta + \int_s^T \frac{\partial u}{\partial x}A(\xi(\vartheta))\,\partial w$
$Eu(T,\xi(T)) - u(s,x) = -E\int_s^T g(\xi\vartheta)\,d\vartheta$
$u(s,x) = E\left[f(\xi_{s,x}(T)) + \int_s^T g(\xi(\vartheta))\,d\vartheta\right]$

6.1 Вероятностное представление решения задачи Коши для нелинейного параболического уравнения

Семилинейными параболическими уравнениями будем называть параболические уравнения, коэффициенты которых зависят как от временной и пространственной переменных, так и от искомой скалярной функции.

Рассмотрим семилинейное параболическое уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial s} + a(x,u(s,x))\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2}A^2(x,u(s,x))\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, u(T,x) = u_0(x) \qquad (6.1)$$

Наряду с задачей (6.1) рассмотрим стохастическую задачу

$$d\xi = a(\xi(\vartheta), u(\vartheta,\xi(\vartheta)))\,d\vartheta + A(\xi(\vartheta, u(\vartheta,\xi(\vartheta))))\,dw(\vartheta) \qquad (6.2)$$

$$u(s,x) = Eu_0(\xi_{s,x}(T)) \qquad (6.3)$$

Сформулируем условие на коэффициенты $a(x,u)$, $A(x,u)$ и условие $u_0(x)$при котором существует единственное решение системы (6.2) (6.3)

Условие C9.1

Пусть справедливы оценки
$|a(x,u)|^2 + |A(x,u)|^2 \le C\left(1 + |x|^2 + |u|^{2p}\right)$
$|a(x,u) - a(y,v)|^2 + |A(x,u) - A(y,\nu)|^2 \le L|x-y| + k_{u,v}|u-\nu|^2$
Решать задачу (6.2-6.3) мы будем с помощью методов последовательного приближения.
Рассмотрим последовательное приближение
$u^0(x) = u_0(x), \xi^0(t) = x$
$\xi^1(t) = x + \int_s^t a(\xi^1(\vartheta), u^1(\vartheta,\xi^1(\vartheta)))\,d\vartheta + \int_s^t A(\xi^1(\vartheta), u^1(\vartheta,\xi^1(\vartheta)))\,dw(\vartheta)$
$u^2(s,x) = Eu_0\left(\xi^1_{s,x}(T)\right)$
$\xi^2(t) = x + \int_s^t a(\xi^2(\vartheta), u^2(\vartheta,\xi(\vartheta)))\,d\vartheta + \int_s^T A(\xi^2(\vartheta), u^2(\vartheta,\xi^2(\vartheta)))\,dw(\vartheta)$
$u^n(s,x) = Eu_0\left(\xi^{(n-1)}(T)\right)$
$\xi^n(t) = x + \int_s^t a(\xi^n(\vartheta), u^n(\vartheta), \xi(\vartheta))\,d\vartheta + \int_s^T A(\xi^n(\vartheta), u^n(\vartheta,\xi^n(\vartheta)))\,dw(\vartheta)$

Заметим, что в силу условий C9, на каждом шаге последовательных приближений можем утверждать существование и единственность решений СДУ.

При этом все функции $u^n(s,x)$ равномерно ограничены если функция $u_0(x)$ - ограничена, т.е. $\sup_x |u_0(x)| \le k_0$

В силу *теоремы Арцела-Асколи*, для того, чтобы семейство непрерывных функций $u^n(s,x)$ сходилась к непрерывной функции $u(s,x)$ при фиксированном s, нужно проверить, что функции $u^n(s,x)$ равномерно ограничены и равномерно непрерывны.

Покажем, что семейство функций $u^n(s,x)$ равномерно непрерывно. Для этого достаточно показать, что семейство $\nu^n(s,x) = \frac{\partial}{\partial x}u^n(s,x)$ равномерно ограничено. Для того, чтобы это доказать, расмотрим линейную систему

Пусть $g(s,x)$ - ограниченная Липшецева функция или даже дифференцируемая по x , т.е. $\left|\frac{\partial g(s,x)}{\partial x}\right| \le k_g'(s)$. Рассмотрим СДУ

$$d\xi = a(\xi(\vartheta), g(\vartheta,\xi(\vartheta)))\,d\vartheta + A(\xi(\vartheta), g(\vartheta,\xi(\vartheta)))\,dw(\vartheta), \xi(s) = x \tag{6.4}$$

$$\nu(s,x) = Eu_0(\xi_{s,x}(T)) \tag{6.5}$$

Пусть $\eta(\vartheta) = \frac{\partial}{\partial x}\xi_{s,x}(T)$

$d\eta(\vartheta) = \left[a_x'(\xi(\vartheta), g(\vartheta, g(\vartheta))) + a_g'(\xi(\vartheta), g(\vartheta,\xi(\vartheta)))\frac{\partial g}{\partial x}(\vartheta,\xi(\vartheta))\right]???$ Где дифференциал

$$\eta(\vartheta)\,d\vartheta + \left[A_x'(\xi(\vartheta)), g(\vartheta,\xi(\vartheta)) + A_g'(\vartheta,\xi(\vartheta))\frac{\partial g}{\partial x}(\vartheta,\xi(\vartheta))\right]\eta(\vartheta)\,dw(\vartheta) \tag{6.6}$$

$$\frac{\partial\nu(s,x)}{\partial x} = E\frac{\partial u_0(\xi_{s,x}(T))}{\partial y}\cdot\nu(T) \tag{6.7}$$

Наша цель - показать, что существует функция $B(t)$ такая, что если
$\left|\frac{\partial g(t,x)}{\partial x}\right| \le B(t)$ то и $\left|\frac{\partial\nu(t,x)}{\partial x}\right| \le B(t)$ для всех t из интервала.

Для всех t из некоторого интервала предполагаем, что $u_0(x)$ имеет ограниченную производную, т.е. $\sup\limits_x\left|\frac{\partial u_0(x)}{\partial x}\right| \le k_0'$

При этом $\sup\limits_x\left|\frac{\partial\nu(s,x)}{\partial x}\right|^2 \le k_0\sup\limits_x E|\eta(T)|^2$

Оценим $E|\eta(T)|^2$

поскольку $E|\eta(t)|^2 = |h|^2 + 2E\int_s^T\left[a_x' + a_g'g'(\vartheta,\xi(\vartheta))\right]\eta(\vartheta)^2\,d\vartheta$

?? Что дальше?

Практика

Частные случаи

$\frac{\partial u}{\partial s} + a(x)\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{A^2}{2}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + a(x)u + f(x) = 0$

#1: $c(x) \equiv 0$

$u(s,x) = E\left[\sin(\xi(T)) + \int_s^T \sin\xi(\vartheta)\,d\vartheta\right]$

#2. $f(x) = 0$

$\frac{\partial u}{\partial s} + a(x)\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2}A^2(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + c(x)u = 0$

$u(T,x) = u_0(x)$

$d\xi = a(\xi(\vartheta))\,d\vartheta + A(\xi(\vartheta))\,dw(\vartheta), \xi(s) = x$

$d\eta = c(\xi(\vartheta))\eta(\vartheta)\,d\vartheta, \eta(s) = 1$

$\eta(\vartheta) = e^{\int_s^\vartheta c(\xi(\tau))d\tau}$

$u(s,x) = E\left[e^{\int_s^T c(\xi(\vartheta))d\vartheta}u_0(\xi_{s,x}(T))\right] = E\left[e^{\int_s^{s+\Delta s} c(\xi(\vartheta))d\vartheta + \int_{s+\Delta s}^T c(\xi(\vartheta))d\vartheta}u_0(\xi_{s,x}(T))\right]$

$u(s+\Delta s,x) - u(s,x) = E\left[e^{\int_{s+\Delta s}^T c(\xi(\vartheta))d\vartheta}u_0(\xi_{s+\Delta s,x}(T)) - e^{\int_s^{s+\Delta s} c(\xi(\vartheta))d\vartheta + \int_{s+\Delta s}^T c(\xi(\vartheta))d\vartheta}u_0(\xi_{s,x}(T))\right]$

Добавим и вычтем выражение вида

$e^{\int_{s+\Delta s}^T c(\xi(\vartheta))d\vartheta}u_0(\xi_{s,x}(T))$

Тогда

$u(s+\Delta s,x) - u(s,x) = E\{e^{\int_{s+\Delta s}^T c(\xi(\vartheta))d\vartheta}\left[u_0(\xi_{s+\Delta s,x}(T)) - u_0(\xi_{s,x}(T))\right] +$

$+\left[e^{\int_s^T c(\xi(\vartheta))d\vartheta} - e^{\int_{s+\Delta s}^T c(\xi(\vartheta))d\vartheta}\right]u_0(\xi_{s,x}(T))\}$

$\frac{1}{\Delta}\left[e^{\int_s^{s+\Delta s} c(\xi(\vartheta))d\vartheta} - 1\right]e^{\int_{s+\Delta s}^T c(\xi(\vartheta))d\vartheta}u_0(\xi_{s,x}(T)) = c(x)\,du(s,x)$??? Как это работает

$\frac{\partial u}{\partial s} + a(x)\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2}A^2(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + c(x)u = 0$
Наше решение имеет вид:
$E\left[e^{\int_s^T c(\xi(\vartheta))d\vartheta} u_0(\xi_{s,x}(T))\right] = u(s,x)$
$u(s,x) = E\left[e^{\int_s^T \xi(\vartheta)d\vartheta} u_0(\xi_{s,x}(T)) + \int_0^T e^{\int_0^T \xi(\tau)d\tau} sin(\xi(\vartheta))\, d\vartheta\right]$
$\frac{\partial u}{\partial s} + a(x)\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2}A^2(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + c(x)u + f(x) = 0$
$u(T,x) = u_0(x)$
$d\xi(\vartheta) = a(\xi(\vartheta))\,d\vartheta + A(\xi(\vartheta))\,du(\vartheta), \xi(s) = x$
$d\eta(\vartheta) = c(\xi(\vartheta))\,\eta(\vartheta)\,d\vartheta, \eta(s) = 1$
$u(s,x) = E\left[\eta(T)\,u_0(\xi_{s,x}(T)) - \int_s^T \eta(\vartheta)\,f(\xi(\vartheta))\,d\vartheta\right]$
01.12.17

7 Новый раздел, чтобы перезапустить нумерацию

$d\xi = a(\xi(\vartheta))\,d\vartheta + A(\xi(\vartheta))\,dwd\vartheta$, $\xi(s) = x$
$\xi(t) = x + \int_s^t a(\xi(\vartheta))\,d\vartheta + \int_s^t A(\xi(\vartheta))\,dw(\vartheta, w)$
$\xi_n(t) = x + \sum_{k=1}^{n}\left[\int_{t_k}^{t_{k+1}} a(\xi(\vartheta))\,d\vartheta + \int_{t_k}^{t_{k+1}} A(\xi(\vartheta))\,dw(\vartheta)\right]$
$\xi_n(t) = x + \sum\left[a(\xi(t_k))\,\Delta_k + A(\xi(t_k))\,\Delta_k w\right]$
$\Delta_k w = w(t_{k+1}) - w(t_k)$
$u(s,x) = Eu(\xi_{s,x}(???, w))???$
$\frac{\partial u}{\partial s} + a(x)\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2}A^2(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$
$u(T,x) = \nu(x)$
Напомним, что мы расматриваем систему

$$d\xi = a^u(\xi(\vartheta))\,d\vartheta + A^u(\xi(\vartheta))\,dw(\vartheta), \xi(s) = x \tag{7.1}$$

$$u(s,x) = Eu_0(\xi_{s,x}(T)), \text{где } a^u(x) = a(x, u(s,x)) \tag{7.2}$$

Для того, чтобы построить решения системы (7.2) рассмотрим последовательные приближения

$$d\xi_n(\vartheta) = a^{u_n}(\xi_n(\vartheta))\,d\vartheta + A^{u_n}(\xi_n(\vartheta))\,dw(\vartheta) \tag{7.3}$$

$$\xi_n(s) = x \tag{7.4}$$

$u^{n+1}(s,x) = E_{s,x}u_0(\xi_n(T))$, где $E_{s,x}(\xi(t)) \equiv E[\xi_{s,x}(t)]$
На каждом шаге системы последовательных приближений мы решаем уравнения вида

$$d\xi = a(\xi(\vartheta), \nu(\vartheta, \xi(\vartheta)))\,d\vartheta + A(\xi(\vartheta), \nu(\vartheta, \xi(\vartheta)))\,dw(\vartheta) \tag{7.5}$$

где $\nu(t,x)$известная функция $(\nu(\vartheta,x) \equiv u^n(\vartheta,x))$

$$g(s,x) = Eu_0(\xi_{s,x}(T)) \tag{7.6}$$

где $\xi_{s,x}(\vartheta)$ - решение (7.5)
$u^1(s,x) = u_0(x), \xi_0(0) = x$

Рассмотрим уравнения (7.5) и (7.6) и положим, что если $\nu(s,x)$ - ограниченная Липшицева функция, то и $g(s,x)$ тоже ограниченная Липшецева функция с одинаковой константой Липшица: если $|\nu(t,x) - \nu(t,y)| = L(t)|x-y|$, то справедлива оценка $|g(t,x) - g(t,y)| \le L(t)|x-y|$

Лемма 8.1 Пусть коэффициенты $a^u(x)$ и $A^u(x)$ удовлетворяют условиям существования и единственности решения СДУ.

Тогда существует интервал $\{T_1;T\}$ такой, что $g(t,x) - g(t,y) \le \beta(t)|x-y|$, если $|\nu(t,x) - \nu(t,y)| \le \beta(t)|x-y|$ для некоторой функции $\beta(t)$ ограниченной на интервале $[T_1, T]$

Доказательство:

Рассмотрим процесс $\xi(t)$

$E|\xi_x(t) - \xi_y(t)|^2 \le |x-y|^2 + 2E\int_s^t [a(\xi_{s,x}(\vartheta), \nu(\vartheta, \xi_{s,x}(\vartheta))) - a(\xi_{s,y}(\vartheta), \nu(\vartheta, \xi_{s,y}(\vartheta)))] \cdot$
$\cdot(\xi_{s,x}(\vartheta) - \xi_{s,y}(\vartheta))\,d\vartheta + E\int_s^t |A(\xi_{s,x}(\vartheta), \nu(\vartheta, \xi_{s,y}(\vartheta))) - A(\xi_{s,y}(\vartheta), \nu(\xi_{s,y}(\vartheta)))|^2\,d\vartheta \le$
$\le |x-y|^2 + 2\int E|\xi_{s,x}(\vartheta) - \xi_{s,y}(\vartheta)|^2 + K_0\beta(\vartheta)|\xi_{s,x}(\vartheta) - \xi_{s,y}(\vartheta)|^2\,d\vartheta$

Оценим далее $(g(s,x) - g(s,y))^2 = |E\nu_0(\xi_{s,x}(T)) - \nu_0(\xi_{s,y}(T))| \le L_0E|\xi_{s,x}(T) - \xi_{s,y}(T)|^2$где L_0, K_0- константа Липшица функции $u_0(x)$ и функции $a(\nu)$

Таким образом:

$|g(s,x) - g(s,y)|^2 \le L_0E|\xi_{s,x}(T) - \xi_{s,y}(T)|^2 \le |x-y|^2 \exp\int_s^T [K_1 + K_2\beta(\vartheta)]\,d\vartheta$

Поскольку $E|\xi_{s,x}(T) - \xi_{s,y}(T)|^2 \le |x-y|^2 + \int_s^T c\left[|\xi_{s,x}(t) - \xi_{s,y}(T)|^2\right] - [1 - K_v\beta(\vartheta)]\,d\vartheta$

Отсюда в силу леммы Гроноулла: $E|\xi_{s,x}(T) - \xi_{s,y}(T)|^2 \le |x-y|^2 \exp\int_s^T [1 + K_v\beta(\vartheta)]\,d\vartheta$

Рассмотрим соотношение $\beta(t-s) = K_0 \exp\int_s^T [K_1 + K_2\beta(T-\vartheta)]\,d\vartheta$ и его дифференциальный вариант

$$\frac{d\beta(t-s)}{ds} = [K_1 + K_2\beta(t-s)]\,\beta(t-s), \beta(T) = K_0 \tag{7.7}$$

Перепишем ОДУ (8.7) в виде

$$\frac{d\beta}{(K_1 + K_2\beta)\,\beta} = ds \tag{7.8}$$

Представим $\frac{1}{(K_1+K_2\beta)\beta} = \frac{A_1}{K_1+K_2\beta} + \frac{A_2}{\beta}$

$A_1\beta + A_2K_1 + A_2K_2\beta = 1$

$A_1 + A_2K_2 = 0, A_2K_1 = 1$

Таким образом, $A_2 = \frac{1}{K_1}$,$A_1 = -\frac{A_2}{K_1}$

и (7.8) приобретает вид

$\frac{1}{K \cdot K_1[K_1+K_2\beta]} + \frac{1}{K}\frac{1}{\beta} = ds$

$\frac{1}{K_1[K_1+K_2\beta]} + \frac{1}{\beta} = Kds$??? правильно?

$\int_{\beta(s)}^{\beta(T)} \frac{d\beta}{\widetilde{K}_1+\widetilde{K}_2\beta} + \int_{\beta(s)}^{\beta(T)} \frac{d\beta}{\beta}$, $\widetilde{K}_1 = K_1^2, \widetilde{K}_2 = K_1K_2$

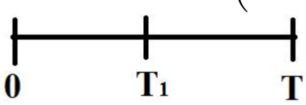
$Ln\left[\widetilde{K}_1 + \widetilde{K}_2\beta\right]|_{\beta(s)}^{\beta(T)} + ln\beta|_{\beta(s)}^{\beta(T)} = (T-s)\,K$

Решая полученные алгебраические уравнения мы получим ответ в виде $\beta(T-s) = \frac{\widetilde{K}_1K_0}{\widetilde{K}_1+K-K_0e^{K_2(t-s)}}$

Функция $\beta(T-s)$ ограничена на интервале $[T_1, T]$, где $\widetilde{K}_1 + K_0 - K_0e^{K_2(T-s)} = 0$

$e^{K_2(T-T_1)} = \frac{\widetilde{K}_1+K_0}{K_0}$

$K_2(T-T_1) = \ln\left(1 + \frac{\widetilde{K}_1}{K_0}\right)$ для всех $\widetilde{T}_1 < T_1$ функция $\beta(T-s)$ ограничена при $s > T_1$



Практика:

$\frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\partial u(s,x)}{\partial s} + u(s,x)\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$, $u(T,x) = u_0(x)$

$d\xi = u(\vartheta, \xi(\vartheta))\,d\vartheta + dw$

$\nu(s,x) = Eu_0(\xi_{s,x}(T))$
$\frac{\partial \nu}{\partial s} + u(s,x)\frac{\partial \nu}{\partial x} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \nu}{\partial x^2} = 0$
$\nu(s,x) \equiv u(s,x)$

$$\begin{cases} d\xi = & u(\vartheta,\xi(\vartheta)) + du \\ u(s,x) = & Eu_0(\xi_{s,x}(T)) \end{cases}$$

$\frac{\partial u}{\partial s} + (x + u(s,x))\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2}u^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$
$d\xi = [\xi(\vartheta) + u(\vartheta,\xi(\vartheta))]\,d\vartheta + u(\vartheta,\xi(\vartheta))\,dw$
$u(s,x) = E\sin(\xi_{s,x}(T))$

— — — —
$\frac{\partial u}{\partial s} + 4x\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{x^2}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \cos xu + \sin x = 0$
$u(T,x) = sin(x)$
$\frac{\partial u}{\partial s} + a(x)\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2}A^2(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + c(x)\,u = 0$
$u(T,x) = u_0(x)$
$d\xi = a(\xi(\vartheta))\,d\vartheta + A(\xi(\vartheta))\,dw(\vartheta)\,, \xi(s) = x$
$d\eta = c(\xi(\vartheta))\,\eta(\vartheta)\,d\vartheta, \eta(s) = 1$
$\eta(\vartheta) = \exp\int_s^\vartheta c(\xi(t))\,dt$
$u(s,x) = E\eta(T)\,u_0(\xi_{s,x}(T)) = Ee^{\int_s^T c(\xi(\vartheta))d\vartheta}u_0(\vartheta_{s,x}(T))$

— — — — — — — — — — —
$c = 0$
$d\xi = 4\xi(\vartheta)\,d\vartheta + \xi(\vartheta)\,dw(\vartheta)$
$d\eta = cos(\xi(\vartheta))\,\eta(\vartheta)\,d\vartheta$
$u(s,x) = Ee^{\int_s^T cos(\xi(\vartheta))d\vartheta} \cdot sin(\xi_{s,x}(T))$

— — — — — —
$\frac{\partial u}{\partial s} + 4x\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{x^2}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + cosxu + x = 0$
$\frac{\partial u}{\partial s} + a(x)\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2}A^2(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x) = 0$
$u(T,x) = u_0(x)$
$d\xi = a(\xi(\vartheta))\,d\vartheta + A(\xi(\vartheta))\,dw(\vartheta)\,, \xi(s) = x$
$du(\vartheta,\xi(\vartheta)) = \int_s^T \left(\frac{\partial u}{\partial \vartheta} + a(\xi(\vartheta))\frac{\partial u(\vartheta,\xi(\vartheta))}{\partial x} + \frac{1}{2}A^2(\xi(\vartheta))\frac{\partial^2 u(\vartheta,\xi(\vartheta))}{\partial x^2} + f(\xi(\vartheta)) - f(\xi(\vartheta))\right)d\vartheta + \int_s^T A\frac{\partial u}{\partial x}dw$
$E(u(T,\xi(T))) - u(s,x) = -E\left[\int_s^T f(\xi(\vartheta))\,d\vartheta\right]$
$u(s,x) = E\Big[u_0(\xi(T)) + \int_s^T f(\xi(\vartheta))\,d\vartheta\Big]$

— — — — — — — —
$\frac{\partial u}{\partial s} + a(x)\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2}A^2(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + c(x)\,u + f(x) = 0$
$u(s,x) = E\left[\eta(T)\,u_0(\xi_{s,x}(T)) + \int_s^T \eta(\vartheta)\,f(\xi_{s,x}(\vartheta))\,d\vartheta\right]$
$d[u(\vartheta,\xi(\vartheta))\,\eta(\vartheta)] = du(\vartheta,\xi(\vartheta)) \cdot \eta(\vartheta) + u(\vartheta,\xi(\vartheta))\,d\eta$
$d[\gamma(\vartheta)\,\eta(\vartheta)]$
$d\gamma = q\gamma(\vartheta)\,d\vartheta + Q\gamma(\vartheta)\,dw(\vartheta)$
$d\eta = c\eta(\vartheta)\,d\vartheta + c\eta(\vartheta)\,dw(\vartheta)$
$d(\gamma(\vartheta)\,\eta(\vartheta)) = \eta(\vartheta)\,d\gamma(\vartheta) + \gamma(\vartheta)\,d\eta...$
$d(u(\vartheta,\xi(\vartheta))\,\eta(\vartheta)) = \left(\frac{\partial u}{\partial \xi} + a\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2}A^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)\eta(\vartheta) + uc(\xi(\vartheta))\,\eta(\vartheta)\,d\vartheta + ... = \left(\frac{\partial u}{\partial \vartheta} + a\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2}A^2\frac{\partial^2 u}{\partial x} + cu\right)\eta(\vartheta),$
$d\vartheta +$ мартингал
$E[\eta(T)\,u_0(\xi_{s,x}(T)) - u(s,x)] = E\int_s^T \eta(\vartheta)\,f(\xi(\vartheta))\,d\vartheta$
$u(s,x) = E\left[\eta(T)\,u_0(\xi(T)) + \int_s^T \eta(\vartheta)\,f(\xi(\vartheta))\,d\vartheta\right]$
$\eta(\vartheta) = \exp\int_s^\vartheta c(\xi(\vartheta_1))\,d\vartheta_1$

$$d\xi = 4\xi(\vartheta)\,d\vartheta + \xi(\vartheta)\,dw(\vartheta)$$
$$d\eta = cos(\xi(\vartheta)) \cdot \eta(\vartheta)\,d\vartheta$$
$$u(s,x) = E\left[e^{\int_s^T cos(\xi(\vartheta))d\vartheta} \cdot \sin(\xi(T)) + \int_s^T e^{\int_s^T cos(\xi(\vartheta_1))d\vartheta_1} \cdot \xi(\vartheta)\,d\vartheta\right]$$