

Теория СДУ

ПМИ-4

December 5, 2017

Contents

1 Стохастический интеграл, формула Ито	1
1.1 Винеровский процесс.	1
1.2 Свойства условного среднего	2
1.3 Стохастический интеграл и стохастический дифференциал.	2
1.4 Мартингалы.	4
1.5 Формула Ито	4
1.6 Многомерный стохастический интеграл	5
2 Многомерная формула Ито	6
3 Стохастические дифференциальные уравнения (СДУ)	6
4 Марковские процессы	10
5 Марковское свойство решения стохастических уравнений	11
5.1 Уравнение Колмогорова, обратное уравнение	11
5.2 Формула Фейнмана-Каца	12
6 Генерация марковского процесса	13
6.1 Вероятностное представление решения задачи Коши для нелинейного параболического уравнения	14
7 Новый раздел, чтобы перезапустить нумерацию	16
07.09.17 лекция	

1 Стохастический интеграл, формула Ито

1.1 Винеровский процесс.

Пусть (Ω, \mathcal{F}, P) - заданное вероятностное пространство.

Случайная величина - это измеримое отображение $\Omega \rightarrow \mathcal{R}$, $\{\omega : \xi(\omega) \leq x\} \in \mathcal{F}$.

Винеровский процесс $w(t)$ - это случайный процесс, обладающий следующими свойствами:

1. $w(0) = 0$

2. Приращение $\Delta_t w = w(t + \Delta t) - w(t)$ - гауссовская СВ с распределением $\mathcal{N}(0, \Delta t)$, т.е.

- (a) $E\Delta_t w = 0$
- (b) $E|\Delta_t w|^2 = \Delta t$

3. Приращение $\Delta_t w$ и $\Delta_s w$, где $0 \leq s < t$ на непересекающихся интервалах независимы:
 $E\Delta_t w \Delta_s w = 0$.

Пусть (Ω, \mathcal{F}) - измеримое пространство и μ, ν - вероятностные меры, заданные на нем. Рассмотрим σ - подалгебру \mathcal{H} σ - алгебры \mathcal{F} (сигма-подалгебра: каждое множество из \mathcal{H} лежит в \mathcal{F} , т.е. из того, что мы попадаем в \mathcal{H} мы попадаем в \mathcal{F} , но не наоборот).

Тогда **условное математическое ожидание** случайной величины ξ относительно \mathcal{H} обозначим $E[\xi|\mathcal{H}]$. Условное математическое ожидание - это \mathcal{H} -измеримая случайная величина, определяемая соотношением

$$\int_H E[\xi|\mathcal{H}] P(d\omega) = \int_H \xi(\omega) P(d\omega), \forall H \in \mathcal{H}$$

Пусть μ и ν - две вероятностные меры, определенные на (Ω, \mathcal{F}) и пусть ν **абсолютно непрерывна относительно μ** (это значит: если $\mu(A) = 0, A \in \mathcal{F}$, то $\nu(A) = 0$). Обозначают это $\nu \ll \mu$.

Если при этом $\mu \ll \nu$, то меры называются **эквивалентными**: $\mu \sim \nu$.

Теорема Радона-Никодима (Р-Н): Если μ, ν - вероятностные меры на (Ω, \mathcal{F}) и $\nu \ll \mu$, то существует единственная положительная измеримая функция

$$\rho(\omega) : \nu(H) = \int_H \rho(\omega) \mu(d\omega), \forall H \in \mathcal{F}$$

Функция $\rho(\omega) = \frac{\nu(d\omega)}{\mu(d\omega)}$ (не деление, это такое же деление, как когда пишем производную) называется **производной Радона-Никодима (Р-Н)**.

Возвращаясь к определению условного среднего, рассмотрим меру $\mu(H) = \int_H \xi(\omega) P(d\omega), H \in \mathcal{H}$. Эта мера $\mu(H)$ абсолютно непрерывна относительно $P(d\omega)|_H$ и ее производная Р-Н - это $E[\xi|\mathcal{H}]$.

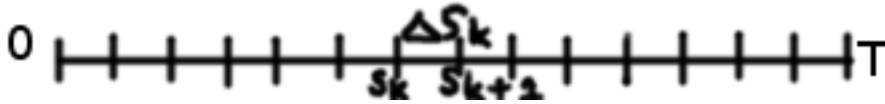
1.2 Свойства условного среднего

1. $E[\alpha\xi + \beta\eta|\mathcal{H}] = \alpha E[\xi|\mathcal{H}] + \beta E[\eta|\mathcal{H}]$, где $\alpha, \beta \in \mathcal{R}$.
2. $E[\xi|\mathcal{H}] = \xi$ если ξ - \mathcal{H} -измеримо.
3. $E[\xi|\mathcal{H}] = E\xi$
4. $E[E[\xi|\mathcal{H}]] = E\xi$
5. Рассмотрим σ -подалгебру $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$, при этом $E\xi \equiv E[\xi|\mathcal{F}_0]$. Пусть $\mathcal{H} \supset \mathcal{H}_1$ - подалгебры алгебры \mathcal{F} , тогда $E[E[\xi|\mathcal{H}_1]|\mathcal{H}] = E[\xi|\mathcal{H}_1]$
6. $E[\xi\eta|\mathcal{H}] = \eta E[\xi|\mathcal{H}]$ если η - \mathcal{H} -измеримая СВ.

1.3 Стохастический интеграл и стохастический дифференциал.

Пусть $A(s)$ - \mathcal{F}_s -измеримый случайный процесс, где $\mathcal{F}_s \equiv \mathcal{F}_s^w$ -поток σ -подалгебр, порожденный винеровским процессом.

Рассмотрим разбиение вида:



Предположим, что $A(s)$ - ступенчатая функция и рассмотрим СВ

$$I(A) = \sum_{k=1}^n A(s_k) \Delta s_k \omega = \sum_{k=1}^n A(s_k) [\omega(s_k + \Delta s) - \omega(s_k)]$$

Это очень похоже на вычисление площади под графиком.

$I(A)$ называется **стохастическим интегралом** от ступенчатой функции $A(s)$. Его свойства:

1. $EI(A)$. Для того, чтобы вычислить $EI(A)$ воспользуемся свойствами условных средних (св-во 2 усл. сред. и св-во 2 Винерова процесса)

$$E \sum_{k=1}^n A(s_k) \Delta s_k \omega = E \left[\sum_{k=1}^n E(A(s_k) \Delta s_k \omega) / \mathcal{F}_{s_k} \right] = E \left[\sum_{k=1}^n A(s_k) E[\Delta s_k \omega | \mathcal{F}_{s_k}] \right] = 0$$

2.

$$\begin{aligned} E|I(A)|^2 &= E \left[\sum A(s_k) \Delta s_k \omega \right]^2 = \\ &= E \sum (A(s_k) \Delta s_k \omega)^2 + E \left[\sum \sum A(t_k) \Delta t_k \omega \cdot A(s_k) \Delta s_k \omega \right]^2 + E \left[\sum \sum A(s_k) \Delta s_k \omega \cdot A(s_j) \Delta s_j \omega \right] \\ &= E \sum E[A(s_k) \Delta s_k \omega]^2 | \mathcal{F}_{s_k} = E \sum A^2(s_k) E[\Delta s_k \omega]^2 | \mathcal{F}_{s_k} = E \sum A^2(s_k) [s_{k+1} - s_k] \end{aligned}$$

$$E|I(A)|^2 = \sum EA^2(s_k) \Delta s_k$$

??? во второй формуле непонятно с индексами

Другими словами, для ступенчатых функций $I(A) = \int_0^T A(s) dw(s)$ и $E \left[\int_0^T A(s) dw(s) \right] = 0$, $E \left[\int_0^T A(s) dw(s) \right]^2 = \int_0^T EA^2(s) ds$

Построение стохастического интеграла можно продолжить на следующий класс случайных функций \mathcal{H}_s , таких что $E \int_0^T (A(s) - A_n(s))^2 ds \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ где $A_n(s)$ - это ступенчатая функция

$$A_n(s) = \begin{cases} A(s_k) & s_k \leq s < s_{k+1} \\ 0 & \text{в противном случае} \end{cases}, k = 1, \dots, n$$

Для функций из этого класса $I(A) = \lim I_n(A)$ по вероятности.

При этом $EI(A) = 0$, $E[I(A)]^2 = \int_0^T EA^2(s) ds$

Соответствующий интеграл с переменным верхним пределом определим соотношением

$$\int_0^t A(s) dw(s) = \int_0^T I(s \leq t) A(s) dw(s)$$

Стохастический интеграл $\int_0^t A(s) dw(s)$, определенный выше, является \mathcal{F}_t -мартингалом (локальным).

1.4 Мартингалы.

Случайный процесс $X(t)$ является \mathcal{F}_t -мартингалом, если

$$E|X(t)| < \infty, E[M(T)|\mathcal{F}_t] = M(t)$$

Если $E|X(t)| < \infty$ при $t \leq T$, то говорят, что X - **локальный мартингал**.

Примеры:

№1. Винеровский процесс.

$$E[w(T)|\mathcal{F}_t] = w(t), E[w(T) - w(t) + w(t)|\mathcal{F}_t] = E[w(T) - w(t)|\mathcal{F}_t] + w(t) = w(t).$$

Используется свойство приращения Гауссовской величины.

Заметим, что $w(t)$ - это локальный мартингал, т.к. $E|w(t)|^2 = t$??? П

№2. Стохастический интеграл $\int_0^t A(s) dw(s)$ тоже является локальным \mathcal{F}_t - мартингалом: $E\left[\int_0^T A(s) dw(s) | \mathcal{F}_t\right] = \int_0^t A(s) dw(s)$.

Действительно, по аналогии с предыдущим примером

$$E\left[\left[\int_0^T A(s) dw(s) - \int_0^t A(s) dw(s)\right] + \int_0^t A(s) dw(s) | \mathcal{F}_t\right] = \int_0^t A(s) dw(s) \text{ поскольку}$$

$$E\left[\int_t^T A(s) dw(s) | \mathcal{F}_t\right] = 0$$

№3. $w^2(t)$ - не является мартингалом. Для любого мартингала $X(t)$ справедливо соотношение $E[X(T) - X(t) | \mathcal{F}_t] = 0$ ($X(T) - X(t)$ - мартингал-разность)

Случайный процесс $w^2(t)$ обладает свойством $Ew^2(t) = t$, при этом $w^2(t) - t$ является \mathcal{F}_t -мартингалом и называется **квадратичным мартингалом**.

1.5 Формула Ито

Говорят, что случайный процесс $\xi(t)$ обладает **стохастическим дифференциалом** $d\xi(t) = a(t)dt + A(t)dw(t)$ если с вероятностью 1 справедливо соотношение $\xi(t) = \xi(s) + \int_s^t a(\vartheta) d\vartheta + \int_s^t A(\vartheta) dw(\vartheta)$

Пусть $\xi(t)$ - случайный процесс, обладающий стохастическим дифференциалом $d\xi = a(t)dt + A(t)dw(t)$ и $f(t, x)$ - неслучайная функция, дифференцируемая по t и дважды дифференцируемая по $x \in \mathcal{R}$.

$$a(\vartheta) \in \mathcal{R}, A(\vartheta) \in \mathcal{R}.$$

Тогда случайный процесс $\eta(t) = f(t, \xi(t))$ обладает стохастическим дифференциалом вида

$$d\eta(t) = \left[\frac{\partial f}{\partial t}(t, \xi(t)) + a(t) \frac{\partial f}{\partial x}(t, \xi(t)) + \frac{1}{2} A^2(t) \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t, \xi(t)) \right] dt + \frac{\partial f(t, \xi(t))}{\partial x} A(t) dw(t)$$

Доказательство этой формулы основано на формуле Тейлора и свойствах винеровского процесса.

В силу формулы Тейлора $f(t + \Delta t, x(t + \Delta t)) = f(t, x(t)) + f'_t(\dots) \Delta t + f'_x(\dots) \Delta x + \frac{1}{2} f''_x(\dots) \Delta^2 x + \dots$, $\Delta x = x(t + \Delta t) - x(t)$, если бы была неслучайная ситуация, то на третьем слагаемом мы бы остановились.

При переходе к стохастическому случаю

$$f(t + \Delta t, \xi(t + \Delta t)) = f(t, \xi(t)) + f'_t(t, \xi(t)) \Delta t + f'_x(t, \xi(t)) \Delta \xi + \frac{1}{2} f''_x(t, \xi(t)) (\Delta \xi(t))^2 + \dots$$

$$\Delta \xi = a(t) \Delta t + A(t) \Delta w$$

$$(\Delta \xi)^2 \sim a^2(t) \Delta t$$

Винеровский процесс обладает свойством: $\Delta w \sim \sqrt{\Delta t}$, мы этим воспользовались ???

В каком смысле

Интегральный вид формулы Ито.

$$\text{Если } d\xi = a(t)dt + A(t)dw(t), \text{ то } \eta(t) = f(t, \xi(t)) \text{ имеет вид } f(t, \xi(t)) = f(s, \xi(s)) + \int_s^t \left[\frac{\partial f}{\partial \vartheta} + a(\vartheta) \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{2} A^2(\vartheta) \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right] (\vartheta, \xi(\vartheta)) d\vartheta + \int_s^t \frac{\partial f(\vartheta, \xi(\vartheta))}{\partial x} A(\vartheta) dw(\vartheta)$$

Примеры

Первый пример:

$$\eta(t) = (w(t))^2$$

$$d\xi = dw, f(x) = x^2$$

$$a = 0, A = 1$$

$$f'(x) = 2x, f''(x) = 2$$

$$\text{Тогда } d\eta = dt + 2w(t) dw(t)$$

Из этой формулы следует, что интеграл $\int_0^T w(t) dw(t) = \frac{1}{2}w^2(T) - \frac{T}{2} = (w(T))^2 - (w(0))^2 = T - 0 = 2 \int_0^T w(t) dw(t)$??? Не до конца понятная формула

Второй пример: $d\xi(t) = 2\xi(t) dt + 4tdw(t)$, $f(t, x) = |x|^2$, $f'_t = 0$, $f'_x = 2x$, $f''_{xx} = 2$, $a(t) = 2t$, $A(t) = 4t$.

$$d\eta = [2t \cdot 2\xi(t) + 16t^2] dt + 2\xi(t) \cdot 4tdw(t)$$

Третий пример: $d\xi = a(t) dt + A(t) dw(t)$, $f(t, x) = \exp x$, $f'_x = f''_{xx} = \exp x$,

$$\eta(t) = \exp(\xi(t)) = e^{\xi(t)}$$

$$d\eta = [\exp(\xi(t)) a(t) + \frac{1}{2} A^2(t) \exp(\xi(t))] dt + \exp(\xi(t)) A(t) dw(t)$$

$$d\eta = \eta(t) [a(t) + \frac{1}{2} A^2(t)] dt + \eta(t) A(t) dw(t) - \text{линейное стохастическое уравнение.}$$

Теперь, мы знаем как его решать: $\exp(\xi(t))$.

$$d\xi = tdt + 5dw(t)$$

$$f(t, x) = \ln x, a = t, A = 5, f'_t = 0, f'_x = \frac{1}{x}, f''_{xx} = -\frac{1}{x^2}$$

$$d\eta = \left[t \cdot \frac{1}{\xi(t)} - \frac{25}{2} \frac{1}{\xi^2(t)} \right] dt + \frac{5}{\xi(t)} dw(t)$$

1.6 Многомерный стохастический интеграл

Многомерный винеровский процесс $w(t) \in \mathcal{R}^d$ - это случайный процесс, такой, что его компоненты $w(t) = (w_1(t), w_2(t), \dots, w_d(t))$ $w_k(t)$ - это независимые винеровские процессы (скалярные).

Напомним, что в одномерном случае, $w(t) \in \mathcal{R}$ имеет плотность распределения $f(t, x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t^2}} e^{-\frac{x^2}{2t}}$, $F(t, x) = P(\xi_t \leq x)$

$$f(t, x) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi t})^d} e^{-\frac{\|x\|^2}{2t}} = \frac{1}{(\sqrt{2\pi t})^d} \prod_{k=1}^d e^{-\frac{x_k^2}{2t}}$$

1. $E w_i(t) w_k(t) = 0, i \neq k = 1, \dots, d$
2. $E \|w(t)\|^2 = E \sum_{i=1}^d (w_i(t))^2 = d \cdot t$
3. $p(t, x, y) = ???$??? Правильны ли эти свойства,

Стохастический интеграл: пусть $A(t) \in \mathcal{R}^n \otimes \mathcal{R}^n \equiv Mat^n$ - ступенчатая функция:

$$A(t) \begin{cases} A(t_k) & t_k \leq t < t_{k+1} \\ 0 & \text{иначе} \end{cases}$$

Зададим стохастический интеграл соотношением

$$I(A) = \sum A(t_k) \Delta_k w \in \mathcal{R}^n$$

Заметим, что $A(t) - F_t^w$ - измерима

$(x, y) = \sum x_k \cdot y_k$ - скалярное произведение

$$EI(A) = E \sum A(t_k) \Delta_k w = E \sum A(t_k) E[\Delta_k w / \mathcal{F}_{t_k}] = 0, \text{ т.к. } A(t_k) - \mathcal{F}_{t_k} - \text{измерима.}$$

$(I(A))_l = \sum_{k=1}^m \sum_{j=1}^t A_{jl} \Delta_k w_j$??? Правильная ли это формула? В некоторых конспектах ее нет, по каким индексам идет суммирование - непонятно

$$\Delta_k w_j = w_j(t_{k+1}) - w_j(t_k)$$

$$E(I(A)^2) = \sum_k A A \Delta_k t$$

$$E \|I(A)\|^2 = E \left\| \sum A(t_k) \Delta_k w \right\|^2$$

При вычислении:

$$E(A(t_k) \Delta_k w, A(t_j) \Delta_j w)$$

Пусть $t_k > t_j$, тогда $= E[E[A(t_k) \Delta_k w, A(t_j) \Delta_j w | F_{t_j}]]$

Заметим, что:

$$(A(t_k) \Delta_k w, A(t_j) \Delta_j w) = E \sum_j A_{lq}(t_l) \Delta_j w_q \cdot E \sum_m A_{lm}(t_k) \Delta_k w_m = E \sum_l \sum_m A_{ml}(t_k) \Delta_k w_m = A_{ql}(t_i) p_j \cdot w_q ??? \text{ ЧТО С ИНДЕКСАМИ? Кажется, здесь есть серьезная ошибка.}$$

В силу независимости $\Delta_k w_m$ и $\Delta_j w_q$ при $j \neq q$

$$E(I(A))^2 = \int_0^T EA^2(t) dt$$

$E \sum |A_{ml}(t_k) \Delta_k w_m|^2$??? Что это значит

$$A^2 = AA^T$$

$$A_{ml}(t_k) A_{lq} \Delta_k w_m \Delta_k w_q$$

$$A_{ml} A_{lm} = \text{Tr} A^2, \text{ где } \text{Tr} A = \sum_{i=1}^n B_{ii}$$

Класс интегрируемых функций - это матричные функции $A(t)$ такие, что $E \int_0^T \text{Tr} A^2(\tau) d\tau < \infty$

Случайный процесс $\xi(t) \in \mathcal{R}^n$ имеет **стохастический дифференциал**

$$d\xi = a(t) dt + A(t) dw(t) \quad (1.1)$$

где $w(t) \in \mathcal{R}, a(t) \in \mathcal{R}^n, A(t) \in \text{Matr}^n$ если с вероятностью 1 справедливо равенство

$$\xi(t) = \xi(s) + \int_s^t a(\vartheta) d\vartheta + \int_s^t A(\vartheta) dw(\vartheta) \quad (1.2)$$

2 Многомерная формула Ито

Пусть $\xi(t)$ имеет стохастический дифференциал вида (1) и $f(t, x) \in \mathcal{R}, t \in [0, T], x \in \mathcal{R}^n$ - это дифференцируемая на t и дважды дифференцируемая по x скалярная функция

Тогда случайный процесс $\eta(t) = f(t, \xi(t))$ имеет стохастический дифференциал вида

$$d\eta = \left[\frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{i=1}^n a_i(t) \frac{\partial f}{\partial x_i} + \sum_{i,k,j} A_{ik}(t) \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} A_{kj}(t) \right] (t, \xi(t)) dt + \sum_{i,l} \frac{\partial f}{\partial x_l} A_k(t) dw_k(t) \quad (2.1)$$

??? Правильная ли эта формула? Также вопрос к индексам

Пусть $\nabla f(x) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right), f''(x) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right)_{i,j=1}^n$

Тогда формулу (3.3) можно переписать в виде:

$$d\eta = \left[\frac{\partial f(t, \xi(t))}{\partial t} + (a(t), \nabla f(t, \xi(t))) + \frac{1}{2} \text{Tr} A(t) f''(t, \xi(t)) A^T(t) \right] dt + (\nabla f, A(t)) dw(t) \quad (2.2)$$

05.10.17

3 Стохастические дифференциальные уравнения (СДУ)

Пусть $a(t, x)$ и $A(t, x)$ - заданные функции.

Пусть (Ω, \mathcal{F}, P) - заданное вероятностное пространство и $w(t)$ - стандартный винеровский процесс.

Рассмотрим СДУ вида

$$d\xi = a(t, \xi(t)) dt + A(t, \xi(t)) dw(t) \quad (3.1)$$

Заметим, что $a(t, x)$ и $A(t, x)$ могут быть случайными, но тогда мы будем предполагать, что они F_t^w - измеримы.

Мы будем решать задачу Коши для СДУ (3.1) с условиями

$$\xi(s) = x \text{ (или } \xi(s) = \xi_0 - F_s \text{ - измерима)} \quad (3.2)$$

Будем говорить, что процесс $\xi(t)$ является решением (3.1), (3.2) если с вероятностью 1 справедливо равенство

$$\xi(T) = \xi(s) + \int_s^T a(\xi, \xi(\vartheta)) d\vartheta + \int_s^T A(\vartheta, \xi(\vartheta)) dw(\vartheta) \quad (3.3)$$

Рассмотрим уравнение

$$\xi(t) = x + \int_s^t a(\vartheta, \xi(\vartheta)) d\vartheta + \int_s^t A(\vartheta, \xi(\vartheta)) dw(\vartheta) \quad (3.4)$$

Сформулируем необходимое и достаточное условие существования решения уравнения (3.4). Будем говорить, что выполнено условие У1, если справедливы оценки:

$$\begin{aligned} |a(t, x)|^2 + |A(t, x)|^2 &\leq C [1 + |x|^2] \\ |a(t, x) - a(t, y)|^2 + |A(t, x) - A(t, y)|^2 &\leq L(x, y)^2 \\ C, L &\text{ - неслучайные постоянные} \end{aligned}$$

При этом оценки выполняются либо с вероятностью 1, либо в среднем квадратичном.

Теорема 3.1: Пусть коэффициенты (3.1) (3.2) (или 3.4) удовлетворяют условию У1. Тогда существует единственное решение $\xi(t) = \xi_{s,x}(t)$

Доказательство: Построим систему последовательных приближений:

$$\xi^1(t) = x + \int_s^t a(\vartheta, x) d\vartheta + \int_s^t A(\vartheta, x) dw(\vartheta)$$

$$\xi^2(t) = x + \int_s^t a(\vartheta, \xi^1(\vartheta)) d\vartheta + \int_s^t A(\vartheta, \xi^1(\vartheta)) dw(\vartheta)$$

$$\text{Общий вид: } \xi^n(t) = x + \int_s^t a(\vartheta, \xi^{n-1}(\vartheta)) d\vartheta + \int_s^t A(\vartheta, \xi^{n-1}(\vartheta)) dw(\vartheta)$$

$$\text{Обозначим } \mathcal{H}_T^2 = \left\{ \xi(\vartheta), 0 \leq \vartheta \leq T : \sup_{\vartheta} E \xi^2(\vartheta) < \infty \right\}$$

Наша цель показать, что $\xi^n \in \mathcal{H}_T^2$ и существует единственный предел $\lim_{n \rightarrow \infty} \xi^n(t) = s(t)$, удовлетворяющий (5.4). ??? Точно 2? Может быть п?

Для доказательства единственности решения уравнения (5.4) воспользуемся леммой Гронуолла.

Лемма Гронуолла: Пусть $\alpha(t)$ - положительная функция, удовлетворяющая неравенству

$$\alpha(t) \leq A + \int_0^t B\alpha(\tau) d\tau \quad (3.5)$$

Тогда

$$\alpha(t) \leq Ae^{Bt} \quad (3.6)$$

Доказательство леммы: проитерируем оценку

$$\alpha(t) \leq A + \int_0^t B \left[A + \int_0^\tau B\alpha(\vartheta) d\vartheta \right] d\tau = A + ABt + \int_0^t \int_0^\tau B\alpha(\vartheta) d\vartheta d\tau \leq$$

$$\alpha(t) \leq A(1 + Bt) + B \int_0^t \int_0^\tau \left[A + \int_0^{\vartheta_1} B\alpha(\vartheta) \right] d\vartheta d\tau \dots$$

$$= A(1 + Bt + B + B^2 \int \int \int \dots)$$

$$\int_0^t \int_0^\tau d\vartheta d\tau = \int_0^t \tau d\tau = \frac{t^2}{2}$$

Повторяя эти оценки, мы получим неравенство

$$\alpha(t) \leq A \left[1 + Bt + B^2 \frac{t^2}{2!} + \dots + B^n \frac{t^n}{n!} + \dots \right] = Ae^{Bt}$$

Замечание: аналогично доказывается, что если $\alpha(t) \leq A + \int_0^t B(\tau) \alpha(\tau) d\tau$, то $\alpha(t) \leq Ae^{\int_0^t B(\tau) d\tau}$

Вернемся к доказательству теоремы 5.1:

Для того, чтобы доказать единственность, мы предположим обратное, т.е. пусть существует 2 решения уравнения (5.4) $\xi(t)$ и $\eta(t)$.

Оценим разность

$$\alpha(t) = E|\xi(t) - \eta(t)|^2 = E \left\{ \int_0^t [a(\vartheta, \xi(\vartheta)) - a(\vartheta, \eta(\vartheta))] d\vartheta + \int_0^t [A(\vartheta, \xi(\vartheta)) - A(\vartheta, \eta(\vartheta))] dw(\vartheta) \right\}^2$$

??? Почему интегралы от 0 а не от s?

С учетом того, что

$$\left| \int_0^t a(\tau) d\tau \right|^2 \leq \text{выкладки}$$

$$|(c, b)|^2 \leq |c|^2 |b|^2, \text{ а значит } \left[\int_0^t 1 \cdot a(\tau) d\tau \right]^2 \leq \int_0^t 1^2 d\tau \int_0^t a^2(\tau) d\tau = t \int_0^t a^2(\tau) d\tau,$$

$$E \left| \int_0^t A(\tau) dw(\tau) \right|^2 \leq \int_0^t A^2(\tau) d\tau \quad ??? \text{ Откуда эта формула}$$

Воспользуемся тем, что $|a + b|^2 \leq 2a^2 + 2b^2$

$$\alpha(t) \leq t \int_0^t E|a(\vartheta, \xi(\vartheta)) - a(\vartheta, \eta(\vartheta))|^2 d\vartheta + \int_0^t E[A(\vartheta, \xi(\vartheta)) - A(\vartheta, \eta(\vartheta))]^2 d\vartheta$$

Используя условие У1 мы получим ??? Как мы их используем? Почему второй интеграл с мат. ожиданием?

$$\alpha(t) \leq Lt \int_0^t \alpha(\vartheta) d\vartheta + L \int_0^t \alpha(\vartheta) d\vartheta = L(1+t) \int_0^t \alpha(\vartheta) d\vartheta \text{ в силу леммы Гронуолла}$$

$E|\xi(t) - \eta(t)|^2 = 0$??? Как здесь используется лемма Гронуолла

Доказано

Для доказательства существования решения рассмотрим последовательные приближения

$$\xi^{n+1}(t) = x + \int_s^t a(\vartheta, \xi^n(\vartheta)) d\vartheta + \int_s^t A(\vartheta, \xi^n(\vartheta)) dw(\vartheta)$$

$$\xi^{n+2}(t) = x + \int_s^t a(\vartheta, \xi^{n+1}(\vartheta)) d\vartheta + \int_s^t A(\vartheta, \xi^{n+1}(\vartheta)) dw(\vartheta) \text{ и оценим}$$

$$E|\xi^{n+2}(t) - \xi^{n+1}(t)|^2 \leq L(t+1) \int_s^t E|\xi^{n+1}(\vartheta) - \xi^n(\vartheta)|^2 d\vartheta \leq$$

$$L(t+1) \int_0^t \int_0^\vartheta L(\vartheta+1) E|\xi^n(\vartheta) - \xi^{n-1}(\vartheta)|^2 d\vartheta \leq \dots \leq \frac{[L(t+1)]^n}{n!} \leq \dots$$

и $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{[L(t+1)]^n}{n!} = 0$??? Как это работает

При этом предельная функция (предельный процесс) удовлетворяет оценке $E\|\xi(t)\|^2 < \infty$

$$E\|\xi(t)\|^2 \leq 3\|x\|^2 + t \int_0^t |\vartheta, \xi(\vartheta)|^2 d\vartheta + \int_0^t E|A(\vartheta, \xi(\vartheta))|^2 d\vartheta$$

В силу У1

$$E|\xi(t)|^2 \leq 3|x|^2 + L(t+1) \int_0^t C[1 + \xi^2(\tau)] d\tau \leq [3|x|^2 + LC(t+1)t] + \int_0^t CE|\xi^2(\tau)|^2 d\tau \leq [3|x|^2 + LC(t+1)t] e^{Ct} \text{ и } \sup_{0 \leq t \leq T} E|\xi(t)|^2 < \infty$$

??? Откуда здесь тройка?

Свойства решений СДУ.

№1. Рассмотрим СДУ

$$d\xi(t) = a(\xi(t)) dt + A(\xi(t)) dw(t) \quad (3.7)$$

и покажем, что его **решение непрерывно по начальным данным.**

Для этого оценим разность

$$\begin{aligned}
& E |\xi_{s,x}(t) - \xi_{s,y}(t)|^2 \leq 3|x-y|^2 + (t-s) \int_s^t E |a(\xi_{s,x}(\vartheta)) - a(\xi_{s,y}(\vartheta))|^2 d\vartheta + \int_s^t E |A(\xi_{s,x}(\vartheta)) - A(\xi_{s,y}(\vartheta))|^2 d\vartheta \\
& \xi_{s,x}(t) = x + \int_s^t a(\xi_{s,x}(\vartheta)) d\vartheta + A(\xi_{s,x}(\vartheta)) dw(\vartheta) \\
& |\xi_{s,x}(t) - \xi_{s,y}(t)|^2 = \left[[x-y] + \int_s^t (a(\xi_{s,x}(\vartheta)) - a(\xi_{s,y}(\vartheta))) d\vartheta + \int_s^t (A(\xi_{s,x}(\vartheta)) - A(\xi_{s,y}(\vartheta))) dw(\vartheta) \right]^2 \\
& = 3(x-y)^2 + 3(t-s) \int_s^t E |a(\xi_{s,x}(\vartheta)) - a(\xi_{s,y}(\vartheta))|^2 d\vartheta + 3(t-s) \int_s^t E |A(\xi_{s,x}(\vartheta)) - A(\xi_{s,y}(\vartheta))|^2 d\vartheta \leq 3(x-y)^2 e^{kT}, \quad k = 3(T+1)L, 0 \leq s \leq t \leq T
\end{aligned}$$

??? Не мог бы кто-нибудь проверить эту формулу

№2. Гладкость решений СДУ.

Пусть $\xi_{s,x}(t)$ - это решение (3.4). Обозначим $\frac{\partial}{\partial x} \xi_{s,x}(t) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\xi_{s,x+\Delta}(t) - \xi_{s,x}(t)}{\Delta x}$, где предел понимается в среднеквадратичном.

При этом процесс $\eta(t) = \frac{\partial}{\partial x} \xi_{s,x}(t)$ удовлетворяет СДУ

$$d\eta(\vartheta) = a'_x(\xi(\vartheta)) \eta(\vartheta) d\vartheta + A'_x(\xi(\vartheta)) \eta(\vartheta) dw(\vartheta) \quad (3.8)$$

??? Как получить эти формулы

Таким образом, если коэффициент $a(x)$ и $A(x)$ k раз дифференцируемы, $k = 1, 2, \dots$, то решения $\xi_{s,x}(t)$ уравнения (3.4) тоже k раз дифференцируемы.

Если $a'(x)$ и $A'(x)$ - ограниченные, то уравнение (3.8) определено корректно, т.е. его коэффициенты удовлетворяют У1.

Обозначим $\gamma(t) = \frac{\partial^2 \xi_{s,x}(t)}{\partial x^2}$

Формально, мы получим, что $\gamma(t)$ удовлетворяет СДУ

$$d\gamma(t) = a'_x(\xi_{s,x}(\vartheta)) \gamma(\vartheta) d\vartheta + A'_x(\xi_{s,x}(\vartheta)) \gamma(\vartheta) dw(\vartheta) + a''_x(\xi(\vartheta)) \eta(\vartheta) d\vartheta + A''_x(\xi_{s,x}(\vartheta)) \eta^2(\vartheta) dw(\vartheta) \quad (3.9)$$

??? Мне кажется, что где-то ошибка

Решение уравнения (3.8) имеет вид

$$\eta(t) = \exp \left[\int_s^t a'(\xi_{s,x}(\vartheta)) d\vartheta + \int_s^t A'(\xi_{s,x}(\vartheta)) dw(\vartheta) - \frac{1}{2} \int_s^t [A'(\xi_{s,x}(\vartheta))]^2 d\vartheta \right]$$

19.10.17

$$d\xi = a(\xi(t)) dt + A(\xi(t)) dw(t)$$

$$\xi(s) = x, \eta(t) = u(t, \xi(t))$$

$$d\eta(t) = \left[\frac{\partial u(t, \xi(t))}{\partial t} + a(\xi(t)) \frac{\partial u(t, \xi(t))}{\partial x} + \frac{1}{2} A^2(\xi(t)) \frac{\partial^2 u(t, \xi(t))}{\partial x^2} \right] dt +$$

$$\frac{\partial u(t, \xi(t))}{\partial x} A(\xi(t)) dw(t) = du(t, \xi(t))$$

$$\frac{\partial u}{\partial s} + a(x) \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} A^2(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

$$u(T, x) = u_0(x), s \leq t \leq T$$

Проинтегрируем наши $d\eta(t)$ от s до T

$$u(T, \xi(T)) - u(s, x) = \int_s^T [\dots] dt + \int_s^T \frac{\partial u}{\partial x}(t, \xi(t)) A(\xi(t)) dw(t)$$

$$Eu_0(\xi(T)) - u(s, x) = 0$$

Математическое ожидание стохастического процесса равно нулю. Дисперсия равна τ .

$$u(s, x) = Eu_0(\xi(T))$$

$$\frac{\partial u}{\partial s} + a(x) \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} A^2(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x)$$

$$\left[\frac{\partial u(t, \xi(t))}{\partial t} + a(\xi(t)) \frac{\partial u(t, \xi(t))}{\partial x} + \frac{1}{2} A^2(\xi(t)) \frac{\partial^2 u(t, \xi(t))}{\partial x^2} + f(\xi(t)) - f(\xi(t)) \right] dt +$$

$$\frac{\partial u(t, \xi(t))}{\partial x} A(\xi(t)) dw(t) = d\eta(t) = du(t, \xi(x))$$

$u(s, x) = E \left[u_0(\xi(T)) - \int_s^T f(\xi(t)) dt \right]$??? Почему, откуда появилось второе слагаемое с интегралом

Пример:

$$d\xi = \sin(\xi(t)) dt + \cos \xi(t) dw(t)$$

$$\xi(s) = x$$

$$f(t, x) = t \sin x$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = t \cos x, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -t \sin x$$

$$d\eta = \sin x + \sin(\xi(t)) t \cos x - \frac{1}{2} \cos^2(\xi(t)) t \sin x = 0$$

4 Марковские процессы

Случайный процесс называется **марковским** относительно потока σ -алгебр \mathcal{F}_t , если справедливо соотношение:

$$E[f(\xi(T)) | \mathcal{F}_t] = E[f(\xi(T)) | \xi(t)]$$

для любой измеримой ограниченной функции $f(x)$, $0 \leq t \leq T$.

С каждым марковским процессом связана его переходная вероятность

$$p(s, x, t, G) = P\{\xi(t) \in G | \xi(s) = x\}, G \in \mathcal{R}, G = [a; b]$$

В терминах переходной вероятности, марковское свойство описывается уравнением

Чепмена-Колмогорова

$$P(s, x, t, G) = \int_{-\infty}^{\infty} p(s, x, \vartheta, dz) p(\vartheta, z, t, G)$$

$$\text{Если } P(s, x, t, G) = \int_G p(s, x, t, y) dy$$

Тогда уравнение Чепмена-Колмогорова имеет вид:

$$p(s, x, t, y) = \int_{-\infty}^{\infty} p(s, x, \vartheta, z) p(\vartheta, z, t, y) dz$$

Каждый марковский процесс порождает эволюционное семейство, действующее в пространстве V измеримых ограниченных функций.

$$u(s, t) f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y) p(s, x, t, y) dy$$

Эволюционное свойство $u(s, t)$ т.е. равенство $u(s, t) = u(s, \vartheta) u(\vartheta, t)$ следует из уравнения Ч-К.

Действительно:

$$\begin{aligned} u(s, t) f(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(y) p(s, x, t, y) dy = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \left[\int_{-\infty}^{\infty} p(s, x, \vartheta, z) p(\vartheta, z, t, y) dz \right] dy = \text{изменяем} \\ &\text{порядок интегрирования, } u(\vartheta, t) f(z) = \phi(z), \text{ далее} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} p(s, x, \vartheta, z) \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(y) p(\vartheta, z, t, y) dy \right] dz \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} p(s, x, \vartheta, z) (u(\vartheta, t) f)(z) dz = \int_{-\infty}^{\infty} p(s, x, \vartheta, z) \phi(z) dz = u(s, \vartheta) \phi(z) = \\ &u(s, \vartheta) u(\vartheta, t) f(x) \end{aligned}$$

Генератор эволюционного семейства $u(s, t)$ - это оператор A , задаваемый соотношением:

$$\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{u(s, s+\Delta s) - I}{\Delta s} f(x) = Af(x), \quad I - \text{единичный оператор.}$$

Генератор марковского процесса - это оператор L , задаваемый соотношением

$$\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{Ef(\xi_{s,x}(s+\Delta s)) - f(x)}{\Delta s} = Lf(x)$$

Если $u(s, t) f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y) p(s, x, t, y) dy$, т.е. $u(s, t)$ порожден марковским процессом $\xi(t)$ с плотностью переходной вероятности $p(s, x, t, y)$, то $Af = Lf$ на области их определения.

5 Марковское свойство решения стохастических уравнений

Рассмотрим СДУ

$$d\xi = a(\xi(\vartheta)) d\vartheta + A(\xi(\vartheta)) dw(\vartheta), \xi(s) = x \quad (5.1)$$

Мы будем предполагать, что функции $a(x), A(x)$ неслучайные и удовлетворяют условию теоремы существования и единства решения СДУ.

Теорема 5.1 Пусть $a(x), A(x)$ неслучайны и существует решение $\xi_{s,x}(t)$ задачи (5.1). Тогда $\xi_{s,x}(t)$ - марковский процесс.

Доказательство:

Рассмотрим случайный процесс

$$\xi(t) = x + \int_s^t a(\xi(\vartheta)) d\vartheta + \int_s^t A(\xi(\vartheta)) dw(\vartheta) = \xi(\tau) + \int_\tau^s a(\xi(\vartheta)) d\vartheta + \int_\tau^t A(\xi(\vartheta)) dw(\vartheta).$$

Это равенство вытекает из единственности решения (5.1)

Процесс $\xi_{\tau,\eta}(t)$, $\eta = \xi(\tau)$ можно представить в виде функции, зависящей от двух переменных ω и ω_1 , где $\omega = \eta(\tau)$ и ω_1 поражден стохастическим и обыкновенным интегралом.

В силу свойств стохастических интегралов, ω и ω_1 независимые.

Пусть $\xi(t) = g(\omega, \omega_1)$. g можно представить в виде: $g(\omega, \omega_1) = \sum_{k=0}^{\infty} \phi_k(\omega) \psi_k(\omega_1)$

Используя это свойство можно показать, что в любой измеримой ограниченной функции $f(x)$ справедливо равенство $Ef(\xi(T) | \mathcal{F}_\tau) = Ef(\xi(T) | \xi(\tau))$, т.е. $\xi(t)$ - это марковский процесс.

5.1 Уравнение колмогорова, обратное уравнение

Пусть $\xi(t)$ - решение уравнения (5.1) со случайными коэффициентами. Рассмотрим функцию $u(s, x) = Ef(\xi_{s,x}(T))$ и выведем уравнение, которому она удовлетворяет.

Вычислим:

$$u(s + \Delta s, x) - u(s, x) = \int f(y) p(s + \Delta s, x, T, y) dy - \int f(y) p(s, x, T, y) dy \quad (5.2)$$

Воспользуемся уравнением Ч-К

$p(s, x, T, y) = \int p(s, x, s + \Delta s, z) p(s + \Delta s, z, T, y) dz$??? Но ведь уравнение Чепмена-Колмогорова имеет вид: $p(s, x, t, y) = \int_{-\infty}^{\infty} p(s, x, \vartheta, z) p(\vartheta, z, t, y) dz$

Из (5.2) получим:

$$u(s + \Delta s, x) - u(s, x) = \int f(y) p(s + \Delta s, x, T, y) dy - \int f(y) \int p(s, x, s + \Delta s, z) \cdot p(s + \Delta s, z, T, y) dz dy \quad (5.3)$$

$$u(s, x) = Ef(\xi_{s,x}(T)) = \int f(y) p(s, x, T, y) dy$$

Поскольку

$$\int f(y) p(s + \Delta s, z, T, y) dy = u(s + \Delta s, z) \text{ то из (5.3) следует, что и } u(s + \Delta s, x) - u(s, x) = \int f(y) p(s + \Delta s, x, T, y) dy - \int u(s + \Delta s, z) p(s + \Delta s, z, T, y) dz$$

Таким образом $u(s + \Delta s, x) - u(s, x) = E \{ u(s + \Delta s, \xi_{s+\Delta s, x}(t)) - u(s + \Delta s, \xi_{s+\Delta s, \xi(s+\Delta s)}(T)) \}$??? Почему

Перепишем полученные соотношения в следующем виде. Напомним, что $u(s, x) = \int f(y) p(s, x, s + \Delta s, y) dy = \int f(y) \int p(s, x, \vartheta, z) p(\vartheta, z, s + \Delta s, y) dy dz = Eu(s, \xi_{s,x}(s + \Delta s))$

$$u(s + \Delta s, x) - u(s, x) = -E[u(s + \Delta s, \xi_{s,x}(s + \Delta s)) - u(s + \Delta s, x)]$$

$$u(s + \Delta s, \xi_{s,x}(s + \Delta s)) - u(s + \Delta s, x)$$

Используя формулу Ито, получим

$$\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{u(s + \Delta s, x) - u(s, x)}{\Delta s} = \frac{\partial u}{\partial s} = - \left[a(x) \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} A^2(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right] \quad ??? \quad \text{как здесь используется ф-ла}$$

Ито?

Таким образом, функция $u(s, x) = Ef(\xi_{s,x}(T))$ удовлетворяет задаче Коши $\frac{\partial u}{\partial s} + a(x) \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} A^2(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$, $u(T, x) = f(x)$

$$d\xi = 3f(\vartheta) d\vartheta + \sin(\xi(\vartheta)) dw, \quad \xi(s) = x, \quad f(x)$$

$$u(s, x) = Ef(\xi_{s,x}(T))$$

$$\frac{\partial u}{\partial s} + 3x \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \sin^2 x \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0,$$

Другой вариант:

$$\frac{\partial u}{\partial s} + 4x \frac{\partial u}{\partial x} - 9x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

$$u(T, x) = \sin x$$

Написать вероятностное представление:

$$d\xi = 4\xi(\vartheta) d\vartheta + 3\sqrt{2}\xi(\vartheta) du$$

$$u(s, x) = E \sin(\xi_{s,x}(T))$$

Пример:

$$\text{№1. } d\xi = \sqrt{3} \sin(\xi(\vartheta)) + \sqrt{2} \cos(3\xi(\vartheta)) dw(\vartheta)$$

$$\xi(s) = x$$

$$f(x) = \cos x$$

$$u(s, x) = E \cos(\xi_{s,x}(T))$$

$$a(\xi(\vartheta)) = \sqrt{3} \sin(\xi(\vartheta)), \quad a(x) = \sqrt{3} \sin x$$

$$A(\xi(\vartheta)) = \sqrt{2} \cos(3\xi(\vartheta)), \quad A(x) = \sqrt{2} \cos 3x$$

$$\frac{\partial u}{\partial s} + \sqrt{3} \sin x \frac{\partial u}{\partial x} + \cos^2 3x \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

$$u(T, x) = \cos x$$

$$\frac{\partial u}{\partial s} + \sin(x) \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \cos^2(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

$$u(T, x) = 2 \sin x, \quad u(s, x) = Ef(\xi_{s,x}(T))$$

$$d\xi = \sin(\xi(\vartheta)) d\vartheta + \cos(\xi(\vartheta)) dw\vartheta$$

$$u(s, x) = E 2 \sin(\xi_{s,x}(T))$$

5.2 Формула Фейнмана Каца

Рассмотрим задачу Коши

$$\frac{\partial u}{\partial s} + a(x) \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} A^2(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + c(x) u = 0, \quad u(T, x) = f(x) \quad (5.4)$$

Нужно построить вероятностное представление решения этой задачи.

Рассмотрим СДУ

$$d\xi = a(\xi(\vartheta)) d\vartheta + A(\xi(\vartheta)) dw(\vartheta) \quad (5.5)$$

$$d\eta = c(\xi(\vartheta)) \eta(\vartheta) d\vartheta \quad (5.6)$$

$$\xi(s) = x, \quad \eta(s) = 1$$

и функцию $u(s, x)$ вида

$$u(s, x) = E[\eta(T) f(\xi_{s,x}(T))] \quad (5.7)$$

Покажем, что $u(s, x)$ вида (5.7) удовлетворяет (5.4)

Заметим, что процесс $\eta(t)$ имеет вид $\eta(t) = \exp \int_s^T c(\xi(\vartheta)) d\vartheta$ и вычислим $u(s + \Delta s, x) - u(s, x)$??? Здесь $\eta(t)$ - интеграл с T в качестве верхнего предела, см. следующий вопрос

$$u(s + \Delta s, x) - u(s, x) =$$

Рассмотрим

$$u(s, x) = E\eta(s + \Delta s) f(\xi_{s,x}(s + \Delta s))$$

$$\text{Тогда } u(s + \Delta s, x) - u(s, x) = u(s + \Delta s, x) - E\eta(s + \Delta s) + f(\xi_{s,x}(s + \Delta s))$$

Примечание: $\eta(s + \Delta s) = \exp \int_s^{s+\Delta s} c(\xi(a)) d\vartheta$??? Здесь $\eta(t)$ - верхний предел зависит от аргумента. Может быть $\eta(t) = \int_s^t \dots$ а не \int_s^T

Рассмотрим разность $E[\eta(s + \Delta s) - \eta(s)] f(\xi_{s,x}(s + \Delta s)) + E[\eta(s) [f(\xi_{s,x}(s + \Delta s)) - f(x)]]$??? Есть лишняя открывающая скобка

$$= E \left[e^{\int_s^{s+\Delta s} c(\xi(\vartheta)) d\vartheta} - 1 \right] f(\xi_{s,x}(s + \Delta s)) + E[f(\xi_{s,x}) - f(x)]$$

Таким образом

$$\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{u(s+\Delta s, x) - u(s, x)}{\Delta s} = \frac{\partial u}{\partial s} = - \left(c(x) u + a(x) \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} A^2(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)$$

Отсюда вытекает, что $u(s, x) = E e^{\int_s^T c(\xi(\vartheta)) d\vartheta} \cdot f(\xi_{s,x}(T))$ удовлетворяет задаче Коши.

$$\frac{\partial u}{\partial s} + a(x) \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} A^2(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + c(x) u(x) = 0, u(T, x) = f(x) \quad (5.8)$$

Рассмотрим СДУ

$$d\xi = a(\xi(\vartheta)) d\vartheta + A(\xi(\vartheta)) dw(\vartheta)$$

и процесс $du(t, \xi(t)) = [u'_t + au'_x + \frac{1}{2} \Delta^2 u''_x] dt + u'_x A(\xi(t)) dw$

Пусть $c \equiv 0$. Тогда, добавляя и вычитая в квадратных скобках $f(\xi(t))$ получим

$$du = [u'_t + au'_x + \frac{1}{2} A^2 \cdot u''_{xx} + f - f] dt + u'_x A dw$$

$$du = f(\xi(t)) dt + u'_x A dw$$

Интегрируем по t от s до T .

$$Eu(T, \xi(T)) - u(s, x) = E \int_s^T f(\xi(\vartheta)) d\vartheta$$

Отсюда следует, что

$$u(s, x) = E \left[f(\xi_{s,x}(T)) + \int_s^T f(\xi_{s,x}(\vartheta)) d\vartheta \right]$$

??? Может быть, более подробно это расписать

02.11.17

6 Генерация марковского процесса

$$Gr f(x) = \lim_{\Delta s} \frac{Ef(\xi_{s,x}(s+\Delta s)) - f(x)(t_k)}{\Delta s} = a(x) f'(x) + \frac{1}{2} A^2(x) F''(x)$$

$$u(s, x) = f(\xi_{s,x}(T))$$

$$\frac{\partial u}{\partial s} + a(x) \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} A^2(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, u(T, x) = f(x)$$

$$u(s, x) = E \left[\exp \left[\int_s^T c(\xi(\vartheta)) d\vartheta \right] \right]_F$$

$$\frac{\partial u}{\partial s} + a(x) \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} A^2(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + g(x) = 0$$

$$d\xi = a(\xi(t)) dt + A(\xi(t)) dw(t)$$

$$u(s, x)$$

$$du(\vartheta, \xi(\vartheta)) = \left[\frac{\partial u}{\partial \vartheta} + a \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{A^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + g - g \right] (\vartheta, \xi(\vartheta))^2 + \frac{\partial u}{\partial x} (\vartheta, \xi(\vartheta)) A(\xi(\vartheta)) dw(\vartheta)$$

$$\int_s^T Au(\vartheta, \xi(\vartheta)) = - \int_s^T g(\xi(\vartheta)) d\vartheta + \int_s^T \frac{\partial u}{\partial x} A(\xi(\vartheta)) dw$$

$$Eu(T, \xi(T)) - u(s, x) = -E \int_s^T g(\xi(\vartheta)) d\vartheta$$

$$u(s, x) = E \left[f(\xi_{s,x}(T)) + \int_s^T g(\xi(\vartheta)) d\vartheta \right]$$

6.1 Вероятностное представление решения задачи Коши для нелинейного параболического уравнения

Семилинейными параболическими уравнениями будем называть параболические уравнения, коэффициенты которых зависят как от временной и пространственной переменных, так и от искомой скалярной функции f .

Рассмотрим семилинейное параболическое уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial s} + a(x, u(s, x)) \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} A^2(x, u(s, x)) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, u(T, x) = u_0(x) \quad (6.1)$$

Наряду с задачей (6.1) рассмотрим стохастическую задачу

$$d\xi = a(\xi(\vartheta), u(\vartheta, \xi(\vartheta))) d\vartheta + A(\xi(\vartheta), \nu(\vartheta, \xi(\vartheta))) dw(\vartheta) \quad (6.2)$$

$$u(s, x) = Eu_0(\xi_{s,x}(T)) \quad (6.3)$$

Сформулируем условие на коэффициенты $a(x, u)$, $A(x, u)$ и условие $u_0(x)$ при котором существует единственное решение системы (9.2) (9.3)

Условие С9.1

Пусть справедливы оценки

$$|a(x, u)|^2 + |A(x, u)|^2 \leq C(1 + |x|^2 + |u|^{2p})$$

$$|a(x, u) - a(y, v)|^2 + |A(x, u) - A(y, v)|^2 \leq L|x - y| + k_{u,v}|u - v|^2$$

Решать задачу (6.2-6.3) мы будем с помощью методов последовательного приближения.

Рассмотрим последовательное приближение

$$u^0(x) = u_0(x), \xi^0(t) = x$$

$$\xi^1(t) = x + \int_s^t a(\xi^1(\vartheta), u^1(\vartheta, \xi^1(\vartheta))) d\vartheta + \int_s^t A(\xi^1(\vartheta), u^1(\vartheta, \xi^1(\vartheta))) dw(\vartheta)$$

$$u^2(s, x) = Eu_0(\xi_{s,x}^1(T))$$

$$\xi^2(t) = x + \int_s^t a(\xi^2(\vartheta), u^2(\vartheta, \xi^2(\vartheta))) d\vartheta + \int_s^t A(\xi^2(\vartheta), u^2(\vartheta, \xi^2(\vartheta))) dw(\vartheta)$$

$$u^n(s, x) = Eu_0(\xi_{s,x}^{(n-1)}(T))$$

$$\xi^n(t) = x + \int_s^t a(\xi^n(\vartheta), u^n(\vartheta, \xi^n(\vartheta))) d\vartheta + \int_s^t A(\xi^n(\vartheta), u^n(\vartheta, \xi^n(\vartheta))) dw(\vartheta)$$

Заметим, что в силу условий С9, на каждом шаге последовательных приближений можем утверждать существование и единственность решений СДУ.

При этом все функции $u^n(s, x)$ равномерно ограничены если функция $u_0(x)$ - ограничена, т.е. $\sup_x |u_0(x)| \leq k_0$

В силу *теоремы Арцела-Асколи*, для того, чтобы семейство непрерывных функций $u^n(s, x)$ сходилась к непрерывной функции $u(s, x)$ при фиксированном s , нужно проверить, что функции $u^n(s, x)$ равномерно ограничены и равномерно непрерывны.

Покажем, что семейство функций $u^n(s, x)$ равномерно непрерывно. Для этого достаточно показать, что семейство $\nu^n(s, x) = \frac{\partial}{\partial x} u^n(s, x)$ равномерно ограничено. Для того, чтобы это доказать рассмотрим линейную систему

Пусть $g(s, x)$ - ограниченная мин??? функция или даже дифференцируемая по x , т.е.

$$\left| \frac{\partial g(s, x)}{\partial x} \right| \leq k'_g(s)$$

Рассмотрим СДУ

$$d\xi = a(\xi(\vartheta), g(\vartheta, \xi(\vartheta))) d\vartheta + A(\xi(\vartheta), g(\vartheta), g(\vartheta, \xi(\vartheta))) dw(\vartheta), \xi(s) = x \quad (6.4)$$

$$\nu(s, x) = Eu_0(\xi_{s,x}(T)) \quad (6.5)$$

Пусть $\eta(\vartheta) = \frac{\partial}{\partial x} \xi_{s,x}(T)$

$$d\eta(\vartheta) = [a'_x(\xi(\vartheta), g(\vartheta, g(\vartheta))) + a'_g(\xi(\vartheta), g(\vartheta), \xi(\vartheta)) \frac{\partial g}{\partial x}(\vartheta, \xi(\vartheta))] \eta(\vartheta) dw(\vartheta) + \left[A'_x(\xi(\vartheta), g(\vartheta, \xi(\vartheta))) + A'_g(\vartheta) \frac{\partial g}{\partial x}(\vartheta, \xi(\vartheta)) \right] \eta(\vartheta) dw(\vartheta) \quad (6.6)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} u_0(\xi_{s,x}(T))$$

Наша цель - показать, что существует функция $B(t)$ такая, что если

$$\left| \frac{\partial g(t,x)}{\partial x} \right| \leq B(t) \text{ то и } \left| \frac{\partial \nu(t,x)}{\partial x} \right| \leq B(t)$$

Для всех t из некоторого интервала предполагаем, что $u_0(x)$ имеет ограниченную производную, т.е. $\sup_x \left| \frac{\partial u_0(x)}{\partial x} \right| \leq k'_0$

$$\text{При этом } \sup_x \left| \frac{\partial \nu(s,x)}{\partial x} \right|^2 \leq k_0 \sup_x E |\eta(T)|^2$$

$$\text{Оценим } E |\eta(T)|^2$$

$$\text{поскольку } E |\eta(t)|^2 = |h|^2 + 2E \int_s^T [a'_x + a'_g g'(\vartheta, \xi(\vartheta))] \eta(\vartheta)^2 d\vartheta$$

?? Что дальше?

Практика

Частные случаи

$$\frac{\partial u}{\partial s} + a(x) \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{A^2(x)}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + a(x) u + f(x) = 0$$

$$\#1: c(x) \equiv 0$$

$$u(s, x) = E \left[\sin(\xi(T)) + \int_s^T \sin \xi(\vartheta) d\vartheta \right]$$

$$\#2. f(x) = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial s} + a(x) \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} A^2(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + c(x) u = 0$$

$$u(T, x) = u_0(x)$$

$$d\xi = a(\xi(\vartheta)) d\vartheta + A(\xi(\vartheta)) dw(\vartheta), \xi(s) = x$$

$$d\eta = c(\xi(\vartheta)) \eta(\vartheta) d\vartheta, \eta(s) = 1$$

$$\eta(0) = e^{\int_s^T c(\vartheta(\tau)) d\tau}$$

$$u(s, x) = E \left[e^{\int_s^T c(\xi(\vartheta)) d\vartheta} u_0(\xi_{s,x}(T)) \right] = E \left[e^{\int_s^{s+\Delta s} c(\xi(\vartheta)) d\vartheta + \int_{s+\Delta s}^T c(\xi(\vartheta)) d\vartheta} u_0(\xi_{s,x}(T)) \right]$$

$$u(s + \Delta s, x) - u(s, x) = E \left[e^{\int_{s+\Delta s}^T c(\xi(\vartheta)) d\vartheta} u_0(\xi_{s+\Delta s,x}(T)) - e^{\int_s^{s+\Delta s} c(\xi(\vartheta)) d\vartheta + \int_{s+\Delta s}^T c(\xi(\vartheta)) d\vartheta} u_0(\xi_{s,x}(T)) \right]$$

Добавим и вычтем выражение вида

$$e^{\int_{s+\Delta s}^T c(\xi(\vartheta)) d\vartheta} u_0(\xi_{s,x}(T))$$

Тогда

$$u(s + \Delta s, x) - u(s, x) = E \left\{ e^{\int_{s+\Delta s}^T c(\xi(\vartheta)) d\vartheta} [u_0(\xi_{s+\Delta s,x}(T)) - u_0(\xi_{s,x}(T))] + \left[e^{\int_s^T c(\xi(\vartheta)) d\vartheta} - e^{\int_{s+\Delta s}^T c(\xi(\vartheta)) d\vartheta} \right] u_0(\xi_{s,x}(T)) \right\}$$

$$\frac{1}{\Delta} \left[e^{\int_s^{s+\Delta s} c(\xi(\vartheta)) d\vartheta} - 1 \right] e^{\int_{s+\Delta s}^T c(\xi(\vartheta)) d\vartheta} u_0(\xi_{s,x}(T)) = c(x) du(s, x)$$

$$\frac{\partial u}{\partial s} + a(x) \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} A^2(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + c(x) u = 0$$

Наше решение имеет вид:

$$E \left[e^{\int_s^T c(\xi(\vartheta)) d\vartheta} u_0(\xi_{s,x}(T)) \right] = u(s, x)$$

$$u(s, x) = E \left[e^{\int_s^T \xi(\vartheta) d\vartheta} u_0(\xi_{s,x}(T)) + \int_0^T e^{\int_0^T \xi(\tau) d\tau} \sin(\xi(\vartheta)) d\vartheta \right]$$

$$\frac{\partial u}{\partial s} + a(x) \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} A^2(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + c(x) u + f(x) = 0$$

$$u(T, x) = u_0(x)$$

$$d\xi(\vartheta) = a(\xi(\vartheta)) d\vartheta + A(\xi(\vartheta)) du(\vartheta), \xi(s) = x$$

$$d\eta(\vartheta) = c(\xi(\vartheta)) \eta(\vartheta) d\vartheta, \eta(s) = 1$$

$$u(s, x) = E \left[\eta(T) u_0(\xi_{s,x}(T)) - \int_s^T \eta(\vartheta) f(\xi(\vartheta)) d\vartheta \right]$$

01.12.17

7 Новый раздел, чтобы перезапустить нумерацию

$$\begin{aligned}
d\xi &= a(\xi(\vartheta)) d\vartheta + A(\xi(\vartheta)) dw d\vartheta, \xi(s) = x \\
\xi(t) &= x + \int_s^t a(\xi(\vartheta)) d\vartheta + \int_s^t A(\xi(\vartheta)) dw(\vartheta, w) \\
\xi_n(t) &= x + \sum_{k=1}^n \int_{t_k}^{t_{k+1}} \left[a(\xi(\vartheta)) d\vartheta + \int_{t_k}^{t_{k+1}} A(\xi(\vartheta)) dw(\vartheta) \right] \\
\xi_n(t) &= x + \sum [a(\xi(t_k)) \Delta_k + A(\xi(t_k)) \Delta_k w] \\
\Delta_k w &= w(t_{k+1}) - w(t_k) \\
u(s, x) &= E\nu(\xi_{s,x}(???, w))??? \\
\frac{\partial u}{\partial s} + a(x) \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} A^2(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= 0 \\
u(T, x) &= \nu(x)
\end{aligned}$$

Напомним, что мы рассматриваем систему ??? Когда мы начали ее рассматривать?

$$d\xi = a^u(\xi(\vartheta)) d\vartheta + A^u(\xi(\vartheta)) dw(\vartheta), \xi(s) = x \quad (7.1)$$

$$u(s, x) = Eu_0(\xi_{s,x}(T)), \text{ где } a^u(x) = a(x, u(s, x)) \quad (7.2)$$

Для того, чтобы построить решения системы (7.2) рассмотрим последовательные приближения

$$d\xi_n(\vartheta) = a^{u_n}(\xi_n(\vartheta)) d\vartheta + A^{u_n}(\xi_n(\vartheta)) dw(\vartheta) \quad (7.3)$$

$$\xi_n(s) = x \quad (7.4)$$

$$u^{n+1}(s, x) = E_{s,x} u_0(\xi_n(T)), \text{ где } E_{s,x}(\xi(t)) \equiv E[\xi_{s,x}(t)]$$

На каждом шаге системы последовательных приближений мы решаем уравнения вида

$$d\xi = a(\xi(\vartheta), \nu(\vartheta, \xi(\vartheta))) d\vartheta + A(\xi(\vartheta), \nu(\vartheta, \xi(\vartheta))) dw(\vartheta) \quad (7.5)$$

где $\nu(t, x)$ известная функция ($\nu(\vartheta, x) \equiv u^n(\vartheta, x)$)

$$g(s, x) = Eu_0(\xi_{s,x}(T)) \quad (7.6)$$

где $\xi_{s,x}(\vartheta)$ - решение (8.5)

$$u^1(s, x) = u_0(x), \xi_0(0) = x$$

Рассмотрим уравнения (7.5) и (7.6) и положим, что если $\nu(s, x)$ - ограниченная Липшицева функция, то и $g(s, x)$ тоже ограниченная Липшицева функция с одинаковой константой Липшица.

$|\nu(t, x) - \nu(t, y)| = L(t) |x - y|$, то справедлива оценка $|g(t, x) - g(t, y)| \leq L(t) |x - y|$

Лемма 8.1 Пусть коэффициенты $a^u(x)$ и $A^u(x)$ удовлетворяют условиям существования и единственности решения СДУ.

Тогда существует интервал $\{T_1; T\}$ такой, что $g(t, x) - g(t, y) \leq \beta(t) |x - y|$, если $|\nu(t, x) - \nu(t, y)| \leq \beta(t) |x - y|$ для некоторой функции $\beta(t)$ ограниченной на интервале $[T_1, T]$

Доказательство:

Рассмотрим процесс $\xi(t)$

$$\begin{aligned}
E|\xi_x(t) - \xi_y(t)|^2 &\leq |x - y|^2 + 2E \int_s^t [a(\xi_{s,x}(\vartheta), \nu(\vartheta, \xi_{s,x}(\vartheta))) - a(\xi_{s,y}(\vartheta), \nu(\vartheta, \xi_{s,y}(\vartheta)))] \cdot \\
&\cdot (\xi_{s,x}(\vartheta) - \xi_{s,y}(\vartheta)) d\vartheta + E \int_s^t |A(\xi_{s,x}(\vartheta), \nu(\vartheta, \xi_{s,y}(\vartheta))) - A(\xi_{s,y}(\vartheta), \nu(\vartheta, \xi_{s,y}(\vartheta)))|^2 d\vartheta \leq \\
&\leq |x - y|^2 + 2 \int E |\xi_{s,x}(\vartheta) - \xi_{s,y}(\vartheta)|^2 + K_0 \beta(\vartheta) |\xi_{s,x}(\vartheta) - \xi_{s,y}(\vartheta)|^2 d\vartheta
\end{aligned}$$

Оценим далее $(g(s, x) - g(s, y))^2 = |Eu_0(\xi_{s,x}(T)) - u_0(\xi_{s,y}(T))| \leq L_0 E |\xi_{s,x}(T) - \xi_{s,y}(T)|^2$ где $L_0, K_{???}$ - константа Липшица функции $u_0(x)$ и функции $a(\nu)$

??? Во всем этом разделе что-то не так со скобками, прошу проверить :)

Таким образом:

$$|g(s, x) - g(s, y)|^2 \leq L_0 E |\xi_{s,x}(T) - \xi_{s,y}(T)|^2 \leq |x - y|^2 \exp \int_s^T [K_1 + K_2 \beta(\vartheta)] d\vartheta$$

$$\text{Поскольку } E |\xi_{s,x}(T) - \xi_{s,y}(T)|^2 \leq |x - y|^2 + \int_s^T c [|\xi_{s,x}(t) - \xi_{s,y}(T)|^2] - [1 - K_{???} \beta(\vartheta)] d\vartheta$$

$$\text{Отсюда в силу леммы Гронуолла: } E |\xi_{s,x}(T) - \xi_{s,y}(T)|^2 \leq |x - y|^2 \exp \int_s^T [1 + K_{???} \beta(\vartheta)] d\vartheta$$

Рассмотрим соотношение $\beta(t - s) = K_0 \exp \int_s^T [K_1 + K_2 \beta(t - \vartheta)] d\vartheta$ и его дифференциальный вариант

$$\frac{d\beta(t - s)}{ds} = [K_1 + K_2 \beta(t - s)] \beta(t - s), \beta(T) = K_0 \quad (7.7)$$

Перепишем ОДУ (8.7) в виде

$$\frac{d\beta}{(K_1 + K_2 \beta) \beta} = ds \quad (7.8)$$

$$\text{Представим } \frac{1}{(K_1 + K_2 \beta) \beta} = \frac{A_1}{K_1 + K_2 \beta} + \frac{A_2}{\beta}$$

$$A_1 \beta + A_2 K_1 + A_2 K_2 \beta = 1$$

$$A_1 + A_2 K_2 = 0, A_2 K_1 = 1$$

$$\text{Таким образом, } A_2 = \frac{1}{K_1}, A_1 = -\frac{A_2}{K_1}$$

и (12.8) приобретает вид

$$\frac{1}{K \cdot K_1 [K_1 + K_2 \beta]} + \frac{1}{K} \frac{1}{\beta} = ds$$

$$\frac{1}{K_1 [K_1 + K_2 \beta]} + \frac{1}{\beta} = K ds \quad ??? \text{ правильно?}$$

$$\int_{\beta(s)}^{\beta(T)} \frac{d\beta}{\tilde{K}_1 + \tilde{K}_2 \beta} + \int_{\beta(s)}^{\beta(T)} \frac{d\beta}{\beta}, \tilde{K}_1 = K_1^2, \tilde{K}_2 = K_1 K_2$$

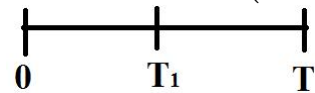
$$\ln [\tilde{K}_1 + \tilde{K}_2 \beta] \Big|_{\beta(s)}^{\beta(T)} + \ln \beta \Big|_{\beta(s)}^{\beta(T)} = (T - s) K$$

$$\text{Решая полученные алгебраические уравнения мы получим ответ в виде } \beta(T - s) = \frac{\tilde{K}_1 K_0}{\tilde{K}_1 + K - K_0 e^{K_2(T-s)}}$$

Функция $\beta(T - s)$ ограничена на интервале $[T_1, T]$, где $\tilde{K}_1 + K_0 - K_0 e^{K_2(T-s)} = 0$

$$e^{K_2(T-T_1)} = \frac{\tilde{K}_1 + K_0}{K_0}$$

$K_2(T - T_1) = \ln \left(1 + \frac{\tilde{K}_1}{K_0} \right)$ для всех $\tilde{T}_1 < T_1$ функция $\beta(T - s)$ ограничена при $s > T_1$



Практика:

$$\frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\partial u(s, x)}{\partial s} + u(s, x) \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, u(T, x) = u_0(x)$$

$$d\xi = u(\vartheta, \xi(\vartheta)) d\vartheta + dw$$

$$\nu(s, x) = Eu_0(\xi_{s,x}(T))$$

$$\frac{\partial \nu}{\partial s} + u(s, x) \frac{\partial \nu}{\partial x} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \nu}{\partial x^2} = 0$$

$$\nu(s, x) \equiv u(s, x)$$

$$\begin{cases} d\xi = u(\vartheta, \xi(\vartheta)) + du \\ u(s, x) = Eu_0(\xi_{s,x}(T)) \end{cases}$$

$$\frac{\partial u}{\partial s} + (x + u(s, x)) \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} u^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

$$d\xi = [\xi(\vartheta) + u(\vartheta, \xi(\vartheta))] d\vartheta + u(\vartheta, \xi(\vartheta)) dw$$

$$u(s, x) = E \sin(\xi_{s,x}(T))$$

$$\overline{\frac{\partial u}{\partial s}} + 4x \overline{\frac{\partial u}{\partial x}} + \frac{x^2}{2} \overline{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}} + \cos xu + \sin x = 0$$

$$u(T, x) = \sin(x)$$

$$\frac{\partial u}{\partial s} + a(x) \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} A^2(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + c(x) u = 0$$

$$u(T, x) = u_0(x)$$

$$d\xi = a(\xi(\vartheta)) d\vartheta + A(\xi(\vartheta)) dw(\vartheta), \xi(s) = x$$

$$d\eta = c(\xi(\vartheta)) \eta(\vartheta) d\vartheta, \eta(s) = 1$$

$$\eta(0) = \exp \int_s^\vartheta c(\xi(t)) dt$$

$$u(s, x) = E\eta(T) u_0(\xi_{s,x}(T)) = Ee^{\int_s^T c(\xi(\vartheta)) d\vartheta} u_0(\vartheta_{s,x}(T))$$

$$c = 0$$

$$d\xi = 4\xi(\vartheta) d\vartheta + \xi(\vartheta) dw(\vartheta)$$

$$d\eta = \cos(\xi(\vartheta)) \eta(\vartheta) d\vartheta$$

$$u(s, x) = Ee^{\int_s^T \cos(\xi(\vartheta)) d\vartheta} \cdot \sin(\xi_{s,x}(T))$$

$$\frac{\partial u}{\partial s} + 4x \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{x^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \cos xu + x = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial s} + a(x) \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} A^2(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x) = 0$$

$$u(T, x) = u_0(x)$$

$$d\xi = a(\xi(\vartheta)) d\vartheta + A(\xi(\vartheta)) dw(\vartheta), f(s) = x$$

$$du(\vartheta, \xi(\vartheta)) = \int_s^T \left(\frac{\partial u}{\partial \vartheta} + a(\xi(\vartheta)) \frac{\partial u(\vartheta, \xi(\vartheta))}{\partial x} + \frac{1}{2} A^2(\xi(\vartheta)) \frac{\partial^2 u(\vartheta, \xi(\vartheta))}{\partial x^2} + f(\xi(\vartheta)) - f(\xi(\vartheta)) \right) d\vartheta + \int_s^T A \frac{\partial u}{\partial x} dw$$

$$E(u(T, \xi(T))) - u(s, x) = -E \left[\int_s^T f(\xi(\vartheta)) d\vartheta \right]$$

$$u(s, x) = E \left[u_0(\xi(T)) + \int_s^T f(\xi(\vartheta)) d\vartheta \right]$$

$$\frac{\partial u}{\partial s} + a(x) \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} A^2(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + c(x) u + f(x) = 0$$

$$u(s, x) = E \left[\eta(T) u_0(\xi_{s,x}(T)) + \int_s^T \eta(\vartheta) f(\xi_{s,x}(\vartheta)) d\vartheta \right]$$

$$d[u(\vartheta, \xi(\vartheta)) \eta(\vartheta)] = du(\vartheta, \xi(\vartheta)) \cdot \eta(\vartheta) + u(\vartheta, \xi(\vartheta)) d\eta$$

$$d[\gamma(\vartheta) \eta(\vartheta)]$$

$$d\gamma = q\gamma(\vartheta) d\vartheta + Q\gamma(\vartheta) dw(\vartheta)$$

$$d\eta = c\eta(\vartheta) d\vartheta + c\eta(\vartheta) dw(\vartheta)$$

$$d(\gamma(\vartheta) \eta(\vartheta)) = \eta(\vartheta) d\gamma(\vartheta) + \gamma(\vartheta) d\eta \dots$$

$$d(u(\vartheta, \xi(\vartheta)) \eta(\vartheta)) = \left(\frac{\partial u}{\partial \xi} + a \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} A^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) \eta(\vartheta) + u c(\xi(\vartheta)) \eta(\vartheta) d\vartheta + \dots = \left(\frac{\partial u}{\partial \vartheta} + a \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} A^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + cu \right) \eta(\vartheta), d\vartheta + \text{мартингал}$$

$$E[\eta(T) u_0(\xi_{s,x}(T)) - u(s, x)] = E \int_s^T \eta(\vartheta) f(\xi(\vartheta)) d\vartheta$$

$$u(s, x) = E \left[\eta(T) u_0(\xi(T)) + \int_s^T \eta(\vartheta) f(\xi(\vartheta)) d\vartheta \right]$$

$$\eta(\vartheta) = \exp \int_s^\vartheta c(\xi(\vartheta_1)) d\vartheta_1$$

$$d\xi = 4\xi(\vartheta) d\vartheta + \xi(\vartheta) dw(\vartheta)$$

$$d\eta = \cos(\xi(\vartheta)) \cdot \eta(\vartheta) d\vartheta$$

$$u(s, x) = E \left[e^{\int_s^T \cos(\xi(\vartheta)) d\vartheta} \cdot \sin(\xi(T)) + \int_s^T e^{\int_s^T \cos(\xi(\vartheta_1)) d\vartheta_1} \cdot \xi(\vartheta) d\vartheta \right]$$