Теория СДУ

ПМИ-4

December 10, 2017

Contents

1 Стохастический интеграл, формула Ито 1
1.1 Винеровский процесс. 1
1.2 Свойства условного среднего 2
1.3 Стохастический интеграл и стохастичесий дифференциал. 2
1.4 Мартингалы. 4
1.5 Формула Ито 4
1.6 Многомерный стохастический интеграл 5

2 Многомерная формула Ито 6

3 Стохастические дифференциальные уравнения (СДУ) 6

4 Марковские процессы 10

5 Марковское свойство решения стохастических уравнений 11
5.1 Уравнение колмогорова, обратное уравнение 11
5.2 Формула Фейнмана Каца 12

6 Генерация марковского процесса 14
6.1 Вероятностное представление решения задачи Коши для нелинейного параболического уравнения 14

7 Новый раздел, чтобы перезапустить нумерацию 07.09.17 лекция 16

1 Стохастический интеграл, формула Ито

1.1 Винеровский процесс.

Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ - заданное вероятностное пространство.

Случайная величина - это измеримое отображение $\Omega \to \mathcal{R}$, $\{\omega : \xi(\omega) \le x\} \in \mathcal{F}$.

Винеровский процесс $w(t)$ - это случайный процесс, обладающий следующими свойствами:

1. $w(0) = 0$

2. Приращение $\Delta_t w = w(t + \Delta t) - w(t)$ - гауссовская СВ с распределением $\mathcal{N}(0, \Delta t)$, т.е.

(a) $E\Delta_t w = 0$

(b) $E\left|\Delta_t w\right|^2 = \Delta t$

3. Приращение $\Delta_t w$ и $\Delta_S w$, где $0 \le s < t$ на непересекающихся интервалах независимы: $E\Delta_t w \Delta_s w = 0$.

Пусть $(\Omega, \mathcal{F})$ - измеримое пространство и μ, ν - вероятностные меры, заданные на нем. Рассмотрим σ - подалгебру $\mathcal{H}$ σ - алгебры $\mathcal{F}$ (сигма-подалгебра: каждое множество из $\mathcal{H}$ лежит в $\mathcal{F}$, т.е. из того, что мы попадаем в $\mathcal{H}$ мы попадаем в $\mathcal{F}$, но не наоборот). Тогда **условное математическое ожидание** случайной величины ξ относительно $\mathcal{H}$ обозначим $E\left[\xi|\mathcal{H}\right]$. Условное математическое ожидание - это $\mathcal{H}$- измеримая случайная величина, определяемая соотношением

$$\int_H E\left[\xi|\mathcal{H}\right] P\left(d\omega\right) = \int_H \xi\left(\omega\right) P\left(d\omega\right), \forall H \in \mathcal{H}$$

Пусть μ и ν - две вероятностные меры, определенные на $(\Omega, \mathcal{F})$ и пусть ν **абсолютно непрерывна относительно** μ (это значит: если $\mu\left(A\right) = 0, A \in \mathcal{F}$, то $\nu\left(A\right) = 0$. Обозначают это $\nu << \mu$.

Если при этом $\mu << \nu$, то меры называются **эквивалентыми:** $\mu \sim \nu$**.**

Теорема Радона-Никодима (Р-Н): Если μ, ν - вероятностные меры на $(\Omega, \mathcal{F})$ и $\nu << \mu$, то существует единственная положительная измеримая функция

$$\rho\left(\omega\right) : \nu\left(H\right) = \int_H \rho\left(\omega\right) \mu\left(d\omega\right), \forall H \in \mathcal{F}$$

Функция $\rho\left(\omega\right) = \frac{\nu(d\omega)}{\mu(d\omega)}$(не деление, это такое же деление, как когда пишем производную) называется **производной Радона-Никодима (Р-Н).**

Возвращаясь к определению условного среднего, рассмотрим меру $\mu\left(H\right) = \int_H \xi\left(\omega\right) P\left(d\omega\right), H \in \mathcal{H}$. Эта мера $\mu\left(H\right)$ абсолютно непрерывна относительно $P\left(d\omega\right)|_H$ и ее производная Р-Н - это $E\left[\xi|\mathcal{H}\right]$.

1.2 Свойства условного среднего

1. $E\left[\alpha\xi + \beta\eta/\mathcal{H}\right] = \alpha E\left[\xi|\mathcal{H}\right] + \beta E\left[\xi|\mathcal{H}\right]$, где $\alpha, \beta \in \mathcal{R}$.

2. $E\left[\xi|\mathcal{H}\right] = \xi$ если ξ - $\mathcal{H}$- измеримо.

3. $E\left[\xi|\mathcal{H}\right] = E\xi$

4. $E\left[E\left[\xi|\mathcal{H}\right]\right] = E\xi$

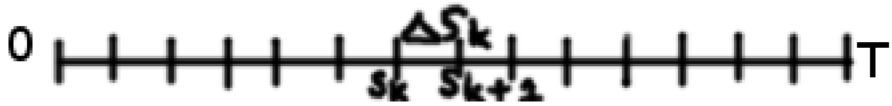
5. Рассмотрим σ-подалгебру $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$, при этом $E\xi \equiv E\left[\xi|\mathcal{F}_0\right]$. Пусть $\mathcal{H} \supset \mathcal{H}_1$ - подалгебры алгебры $\mathcal{F}$, тогда $E\left[E\left[\xi|\mathcal{H}_1\right]|\mathcal{H}\right] = E\left[\xi|\mathcal{H}_1\right]$

6. $E\left[\xi\eta|\mathcal{H}\right] = \eta E\left[\xi|\mathcal{H}\right]$ если η - $\mathcal{H}$ -измеримая СВ.

1.3 Стохастический интеграл и стохастичесий дифференциал.

Пусть $A\left(s\right)$-$\mathcal{F}_s$-измеримый случайный процесс, где $\mathcal{F}_s \equiv \mathcal{F}_s^w$- поток σ-подалгебр, порожденный винеровским процессом.

Рассмотрим разбиение вида:



Предположим, что $A(s)$- ступенчатая функция и рассмотрим СВ

$$I(A)=\sum_{k=1}^{n}A(s_k)\,\Delta_{s_k}\omega=\sum_{k=1}^{n}A(s_k)\left[\omega(s_k+\Delta s)-\omega(s_k)\right]$$

Это очень похоже на вычисление площади под графиком.

$I(A)$ называется **стохастическим интегралом** от ступенчатой функции $A(s)$. Его свойства:

1. $EI(A)$. Для того, чтобы вычислить $EI(A)$ воспользуемся свойствами условных средних (св-во 2 усл. сред. и св-во 2 Винеровского процесса)

$$E\sum_{k=1}^{n}A(s_k)\,\Delta_{s_k}\omega=E\left[\sum_{k=1}^{n}E\left(A(s_k)\,\Delta_{s_k}\omega\right)/\mathcal{F}_{s_k}\right]=E\left[\sum_{k=1}^{n}A(s_k)\,E\left[\Delta_{s_k}\omega|\mathcal{F}_{s_k}\right]\right]=0$$

2.

$$E\left|I(A)\right|^2=E\left[\sum A(s_k)\,\Delta_{s_k}\omega\right]^2=$$
$$=E\sum\left(A(s_k)\,\Delta_{s_k}\omega\right)^2+E\left[\sum\sum A(t_k)\,\Delta_{t_k}\omega\cdot A(s_k)\,\Delta_{s_k}\omega\right]^2+E\left[\sum\sum A(s_k)\,\Delta_{s_k}\omega\cdot A(s_j)\,\Delta_{s_j}\omega\right.$$
$$=E\sum E\left[\left[A(S_k)\,\Delta_{s_k}\omega\right]^2|\mathcal{F}_{s_k}\right]=E\sum A^2(s_k)\,E\left[\Delta_{s_k}\omega\right]^2|\mathcal{F}_{s_k}=E\sum A^2(s_k)\left[s_{k+1}-s_k\right]$$

$$E\left|I(A)\right|^2=\sum EA^2(s_k)\,\Delta_k s$$

??? во второй формуле непонятно с индексами

Другими словами, для ступенчатых функций $I(A)=\int_0^T A(s)\,dw(s)$ и $E\left[\int_0^T A(s)\,dw(s)\right]=0$, $E\left[\int_0^T A(s)\,dw(s)\right]^2=\int_0^T EA^2(s)\,ds$

Построение стохастического интеграла можно продолжить на следующий класс случайных функций $\mathcal{H}_s$, таких что $E\int_0^T\left(A(s)-A_n(s)\right)^2ds\to 0$ при $n\to\infty$ где $A_n(s)$ - это ступенчатая функция

$$A_n(s)=\begin{cases}A(s_k) & s_k\le s<s_{k+1}\\ 0 & \text{в противном случае}\end{cases},k=1,...,n$$

Для функций из этого класса $I(A)=\lim I_n(A)$ по вероятности.

При этом $EI(A)=0, E\left[I(A)\right]^2=\int_0^T EA^2(s)\,ds$

Соответствующий интеграл с переменным верхним пределом определим соотношением

$$\int_0^t A(s)\,dw(s)=\int_0^T I(s\le t)\,A(s)\,dw(s)$$

Стохастический интеграл $\int_0^t A(s)\,dw(s)$, определенный выше, является $\mathcal{F}_t$-мартингалом (локальным).

1.4 Мартингалы.

Случайный процесс $X(t)$ является $\mathcal{F}_t$- мартингалом, если

$E|X(t)| < \infty$, $E[M(T)|\mathcal{F}_t] = M(t)$

Если $E|X(t)| < \infty$ при $t \leq T$, то говорят, что X - **локальный мартингал**.

Примеры:

№1. Винеровский процесс.

$E[w(T)|\mathcal{F}_t] = w(t)$, $E[w(T) - w(t) + w(t)|\mathcal{F}_t] = E[w(T) - w(t)|\mathcal{F}_t] + w(t) = w(t)$. Используется свойство приращения Гауссовской величины.

Заметим, что $w(t)$- это локальный мартингал, т.к. $E|w(t)|^2 = t$??? П

№2. Стохастический интеграл $\int_0^t A(s)\,dw(s)$ тоже является локальным $\mathcal{F}_t$ - мартингалом: $E\left[\int_0^T A(s)\,dw(s)\,|\mathcal{F}_t\right] = \int_0^t A(s)\,dw(s)$.

Действительно, по аналогии с предыдущим примером

$E\left[\left[\int_0^T A(s)\,dw(s) - \int_0^t A(s)\,dw(s)\right] + \int_0^t A(s)\,dw(s)\,|\mathcal{F}_t\right] = \int_0^t A(s)\,dw(s)$ поскольку $E\left[\int_t^T A(s)\,dw(s)\,|\mathcal{F}_t\right] = 0$

№3. $w^2(t)$ - **не является мартингалом**. Для любого мартингала $X(t)$ справедливо соотношение $E[X(T) - X(t)|\mathcal{F}_t] = 0$ ($X(T) - X(t)$- мартингал-разность)

Случайный процесс $w^2(t)$ обладает свойством $Ew^2(t) = t$, при этом $w^2(t) - t$ является $\mathcal{F}_t$- мартингалом и называется **квадратичным мартингалом**.

1.5 Формула Ито

Говорят, что случайный процесс $\xi(t)$ обладает **стохастическим дифференциалом** $d\xi(t) = a(t)\,dt + A(t)\,dw(t)$ если с вероятностью 1 справедливо соотношение $\xi(t) = \xi(s) + \int_s^t a(\vartheta)\,d\vartheta + \int_s^t A(\vartheta)\,dw(\vartheta)$

Пусть $\xi(t)$ - случайный процесс, обладающий стохастическим дифференциалом $d\xi = a(t)\,dt + A(t)\,dw(t)$и $f(t,x)$ - неслучайная функция, дифференцируемая по t и дважды дифференцируепмая по $x \in \mathcal{R}$.

$a(\vartheta) \in \mathcal{R}, A(\vartheta) \in \mathcal{R}$.

Тогда случайный процесс $\eta(t) = f(t, \xi(t))$ обладает стохастическим дифференциалом вида

$$d\eta(t) = \left[\frac{\partial f}{\partial t}(t,\xi(t)) + a(t)\frac{\partial f}{\partial x}(t,\xi(t)) + \frac{1}{2}A^2(t)\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t,\xi(t))\right]dt + \frac{\partial f(t,\xi(t))}{\partial x}A(t)\,dw(t)$$

Доказательство этой формулы основано на формуле Тейлора и свойствах винеровского процесса.

В силу формулы Тейлора $f(t+\Delta t, x(t+\Delta t)) = f(t, x(t)) + f'_t(...)\,\Delta t + f'_x(...)\,\Delta x + \frac{1}{2}f''_x(...)\,\Delta^2 x + ...$, $\Delta x = x(t+\Delta t) - x(t)$, если бы была неслучайная ситуация, то на третьем слагаемом мы бы остановились.

При переходе к стохастическому случаю

$f(t+\Delta t, \xi(t+\Delta t)) = f(t,\xi(t)) + f'_t(t,\xi(t))\,\Delta t + f'_x(t,\xi(t))\,\Delta\xi + \frac{1}{2}f''_x(t,\xi(t))\,(\Delta\xi(t))^2 + ...$

$\Delta\xi = a(t)\,\Delta t + A(t)\,\Delta w$

$(\Delta\xi)^2 \sim a^2(T)\,\Delta t$

Винеровский процесс обладает свойством: $\Delta w \sim \sqrt{\Delta t}$, мы этим воспользовались ??? В каком смысле

Интегральный вид формулы Ито.

Если $d\xi = a(t)\,dt + A(t)\,dw(t)$, то $\eta(t) = f(t,\xi(t))$ имеет вид $f(t,\xi(t)) = f(s,\xi(s)) + f\int_s^t \left[\frac{\partial f}{\partial \vartheta} + a(\vartheta)\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{2}A^2(\vartheta)\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right](\vartheta,\xi(\vartheta))\,d\vartheta + \int_s^t \frac{\partial f(\vartheta,\xi(\vartheta))}{\partial x}A(\vartheta)\,dw(\vartheta)$

Примеры

Первый пример:
$\eta(t) = (w(t))^2$
$d\xi = dw, f(x) = x^2$
$a = 0, A = 1$
$f'(x) = 2x, f''(x) = 2$
Тогда $d\eta = dt + 2w(t)\,dw(t)$

Из этой формулы следует,что интеграл $\int_0^T w(t)\,dw(t) = \frac{1}{2}w^2(T) - \frac{T}{2} = (w(T))^2 - (w(0))^2 = T - 0 = 2\int_0^T w(t)\,dw(t)$??? Не до конца понятная формула

Второй пример: $d\xi(t) = 2\xi(t)\,dt + 4tdw(t)$, $f(t,x) = |x|^2$, $f'_t = 0, f'_x = 2x, f''_x = 2$, $a(t) = 2t, A(t) = 4t$.

$d\eta = [2t \cdot 2\xi(t) + 16t^2]\,dt + 2\xi(t) \cdot 4tdw(t)$

Третий пример: $d\xi = a(t)\,dt + A(t)\,dw(t)$, $f(t,x) = \exp x$, $f'_x = f''_x = \exp x$,
$\eta(t) = \exp(\xi(t)) = e^{\xi(t)}$
$d\eta = \left[exp(\xi(t))\,a(t) + \frac{1}{2}A^2(t)\,exp(\xi(t))\right]dt + \exp(\xi(t))\,A(t)\,dw(t)$

$d\eta = \eta(t)\left[a(t) + \frac{1}{2}A^2(t)\right]dt + \eta(t)\,A(t)\,dw(t)$ - линейное стохастическое уравнение. Теперь, мы знаем как его решать: $\exp(\xi(t))$.

$d\xi = tdt + 5dw(t)$
$f(t,x) = \ln x,\ a = t, A = 5, f'_t = 0, f'_x = \frac{1}{x}, f''_x = -\frac{1}{x^2}$
$d\eta = \left[t \cdot \frac{1}{\xi(t)} - \frac{25}{2}\frac{1}{\xi^2(t)}\right]dt + \frac{5}{\xi(t)}dw(t)$

1.6 Многомерный стохастический интеграл

Многомерный винеровский процесс $w(t) \in \mathcal{R}^d$ - это случайный процесс, такой, что его компоненты $w(t) = (w_1(t), w_2(t), ..., w_d(t))$ $w_k(t)$ - это независимые винеровские процессы (скалярные).

Напомним, что в одномерном случае, $w(t) \in \mathcal{R}$ имеет плотность распределения $f(t,x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}}e^{-\frac{x^2}{2t}}$

$f(t,x) = \frac{1}{\left(\sqrt{2\pi t}\right)^d}e^{-\frac{||x||^2}{2t}} = \frac{1}{\left(\sqrt{2\pi t}\right)^d}\prod_{k=1}^d e^{-\frac{x_k^2}{2t}}$

1. $Ew_i(t)\,w_k(t) = 0, i \neq k = 1, ..., d$
2. $E||w(t)||^2 = E\sum_{i=1}^d (w_i(t))^2 = d \cdot t$
3. $p(t,x,y) =$??? ??? Правильны ли эти свойства,

Стохастический интеграл: пусть $A(t) \in \mathcal{R}^n \otimes \mathcal{R}^n \equiv Matz^n$ - ступенчатая функция:

$A(t) \begin{cases} A(t_k) & t_k \leq t < t_{k+1} \\ 0 & \text{иначе} \end{cases}$

Зададим стохастический интеграл соотношением

$$I(A) = \sum A(t_k)\,\Delta_k w \in \mathcal{R}^n$$

Заметим, что $A(t)$ - $\mathcal{F}_t^w$ - измерима
$(x,y) = \sum x_k \cdot y_k$ - скалярное произведение

$EI(A) = E\sum A(t_k)\,\Delta_k w = E\sum A(t_k)\,E[\Delta_k w/\mathcal{F}_{t_k}] = 0$, т.к. $A(t_k)$- $\mathcal{F}_{t_k}$ - измеримая. ???

$(I(A))_l = \sum_{k=1}^m \sum^t A_{jl}\Delta_k w_j$??? Правильная ли это формула? В некоторых конспектах ее нет, по каким индексам идет суммирование - непонятно

$\Delta_k w_j = w_j(t_{k+1}) - w_j(t_k)$
$E\left(I(A)^2\right) = \sum_k AA\Delta_k t$

$E\left|\left|I\left(A\right)\right|\right|^2 = E\left|\left|\sum A\left(t_k\right)\Delta_k w\right|\right|^2$

При вычислении:

$E\left(A\left(t_k\right)\Delta_k w, A\left(t_j\right)\Delta_j w\right)$

Пусть $t_k > t_j$, тогда $= E\left[E\left[A\left(t_k\right)\Delta_k w, A\left(t_j\right)\Delta_j w | F_{t_j}\right]\right]$

Заметим, что:

$\left(A\left(t_k\right)\Delta_k w, A\left(t_j\right)\Delta_j w\right) = E\sum_j A_{lq}\left(t_l\right)\Delta_j w_q \cdot E\sum_m A_{lm}\left(t_k\right)\Delta_k w_m = E\sum_l\sum_m A_{ml}\left(t_k\right)\Delta_k w_m = A_{ql}\left(t_i\right)p_j \cdot w_q$??? ЧТО С ИНДЕКСАМИ? Кажется, здесь есть серьезная ошибка.

В силу независимости $\Delta_k w_m$ и $\Delta_j w_q$ при $j \neq q$

$E\left(I\left(A\right)\right)^2 = \int_0^T EA^2\left(t\right)dt$

$E\sum\left|A_{ml}\left(t_k\right)\Delta_k w_m\right|^2$??? Что это значит

$A^2 = AA^T$

$A_{ml}\left(t_k\right)A_{lq}\Delta_k w_m \Delta_k w_q$

$A_{ml}A_{lm} = TrA^2$, где $TrA = \sum_{i=1}^n B_{ii}$

Класс интегрируемых функций - это матричные функции $A\left(t\right)$ такие, что $E\int_0^T TrA^2\left(\tau\right)\Delta\tau < \infty$

Случайный процесс $\xi\left(t\right) \in \mathcal{R}^n$ имеет **стохастический дифференциал**

$$d\xi = a\left(t\right)dt + A\left(t\right)dw\left(t\right) \tag{1.1}$$

где $w\left(t\right) \in \mathcal{R}, a\left(t\right) \in \mathcal{R}^n, A\left(t\right) \in Matr^n$если с вероятностью 1 справедливо равенство

$$\xi\left(t\right) = \xi\left(s\right) + \int_s^t a\left(\vartheta\right)d\vartheta + \int_s^t A\left(\vartheta\right)dw\left(\vartheta\right) \tag{1.2}$$

2 Многомерная формула Ито

Пусть $\xi\left(t\right)$ имеет стохастический дифференциал вида (1) и $f\left(t,x\right) \in \mathcal{R}$, $t \in \left[0,T\right], x \in \mathcal{R}^n$ - это диференцируемая на t и дважды дифференцируемая по x скалярная функция

Тогда случайный процесс $\eta\left(t\right) = f\left(t,\xi\left(t\right)\right)$ имеет стохастический дифференциал вида

$$d\eta = \left[\frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{i=1}^n a_i\left(t\right)\frac{\partial f}{\partial x_i} + \sum_{i,k,j} A_{ik}\left(t\right)\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}A_{kj}\left(t\right)\right]\left(t,\xi\left(t\right)\right)dt + \sum_{i,l}\frac{\partial f}{\partial x_l}A_k\left(t\right)dw_k\left(t\right) \tag{2.1}$$

??? Правильная ли эта формула? Также вопрос к индексам

Пусть $\nabla f\left(x\right) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, .., \frac{\partial f}{\partial x_n}\right)$, $f''\left(x\right) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right)_{i,j=1}^n$

Тогда формулу (3.3) можно переписать в виде:

$$d\eta = \left[\frac{\partial f\left(t,\xi\left(t\right)\right)}{\partial t} + \left(a\left(t\right), \nabla f\left(t,\xi\left(t\right)\right)\right) + \frac{1}{2}TrA\left(t\right)f''\left(t,\xi\left(t\right)\right)A^T\left(t\right)\right]dt + \left(\nabla f, A\left(t\right)\right)dw\left(t\right) \tag{2.2}$$

05.10.17

3 Стохастические дифференциальные уравнения (СДУ)

Пусть $a\left(t,x\right)$ и $A\left(t,x\right)$ - заданные функции.

Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ - заданное вероятностное пространство и $w(t)$ - стандартный винеровский процесс.

Рассмотрим СДУ вида

$$d\xi = a(t, \xi(t))\, dt + A(t, \xi(t))\, dw(t) \tag{3.1}$$

Заметим, что $a(t,x)$ и $A(t,x)$ могут быть случайными, но тогда мы будем предполагать, что они F_t^w - измеримы.

Мы будем решать задачу Коши для СДУ (3.1) с условиями

$$\xi(s) = x \,(\text{или } \xi(s) = \xi_0 - F_s - \text{измерима}) \tag{3.2}$$

Будем говорить, что процесс $\xi(t)$ является решением (3.1), (3.2) если с вероятностью 1 справедливо равенство

$$\xi(T) = \xi(s) + \int_s^T a(\xi, \xi(\vartheta))\, d\vartheta + \int_s^T A(\vartheta, \xi(\vartheta))\, dw(\vartheta) \tag{3.3}$$

Рассмотрим уравнение

$$\xi(t) = x + \int_s^t a(\vartheta, \xi(\vartheta))\, d\vartheta + \int_s^t A(\vartheta, \xi(\vartheta))\, dw(\vartheta) \tag{3.4}$$

Сформулируем необходимое и достаточное условие существования решения уравнения (3.4). Будем говорить, что выполнено условие У1, если справедилвы оценки:

$$\begin{aligned} |a(t,x)|^2 + |A(t,x)|^2 &\leq C\left[1 + |x|^2\right] \\ |a(t,x) - a(t,y)|^2 + |A(t,x) - A(t,y)|^2 &\leq L(x,y)^2 \\ &C, L - \text{неслучайные постоянные} \end{aligned}$$

При этом оценки выполняются либо с вероятностью 1, либо в среднем квадратичном.

Теорема 3.1: Пусть коэффициенты (3.1) (3.2) (или 3.4) удовлетворяют условию У1. Тогда существует единственное решение $\xi(t) = \xi_{s,x}(t)$

Доказательство: Построим систему последовательных приближений:
$\xi^1(t) = x + \int_s^t a(\vartheta, x)\, d\vartheta + \int_s^T A(\vartheta, x)\, dw(\vartheta)$
$\xi^2(t) = x \int_s^t a(\vartheta, \xi^1(\vartheta))\, d\vartheta + \int_s^t A(\vartheta, \xi^1(\vartheta))\, dw(\vartheta)$
Общий вид: $\xi^n(t) = x + \int_s^t a(\vartheta, \xi^{n-1}(\vartheta))\, d\vartheta + \int_s^t A(\vartheta, \xi^{n-1}(\vartheta))\, dw(\vartheta)$
Обозначим $\mathcal{H}_T^2 = \left\{\xi(\vartheta), 0 \leq \vartheta \leq T : \sup\limits_{\vartheta} E\xi^2(\vartheta) < \infty\right\}$

Наша цель показать, что $\xi^n \in \mathcal{H}_T^2$ и существует единственный предел $\lim\limits_{n\to\infty} \xi^n(t) = s(t)$, удовлетворяющий (5.4). ??? Точно 2? Может быть n?

Для доказательства единственности решения уравнения (5.4) воспользуемся леммой Гронуолла.

Лемма Гронуолла: Пусть $\alpha(t)$ - положительная функция, удовлетворяющая неравенству

$$\alpha(t) \leq A + \int_0^t B\alpha(\tau)\, d\tau \tag{3.5}$$

Тогда

$$\alpha(t) \leq Ae^{Bt} \tag{3.6}$$

Доказательство леммы: проитерируем оценку

$\alpha(t) \le A + \int_0^t B\left[A + \int_0^\tau B\alpha(\vartheta)\,d\vartheta\right]d\tau = A + ABt + \int_0^t\int_0^\tau B\alpha(\vartheta)\,d\vartheta d\tau \le$
$\alpha(t) \le A(1+Bt) + B\int_0^t\int_0^\tau\left[A + \int_0^{\vartheta_1} B\alpha(\vartheta)\right]d\vartheta d\tau ...$
$= A\left(1 + Bt + B + B^2\int\int\int ...\right)$
$\int_0^t\int_0^\tau d\vartheta d\tau = \int_0^t \tau d\tau = \frac{t^2}{2}$
Повторяя эти оценки, мы получим неравенство
$\alpha(t) \le A\left[1 + Bt + B^2\frac{t^2}{2!} + ... + B^n\frac{t^n}{n!} + ...\right] = Ae^{Bt}$

Замечание: аналогично доказывается, что если $\alpha(t) \le A + \int_0^t B(\tau)\,\alpha(\tau)\,d\tau$, то $\alpha(t) \le Ae^{\int_0^t B(\tau)d\tau}$

Вернемся к доказательству теоремы 5.1:

Для того, чтобы доказать единственность, мы предположим обратное, т.е. пусть существует 2 решения уравнения (5.4) $\xi(t)$ и $\eta(t)$.

Оценим разность

$$\alpha(t) = E\left|\xi(t) - \eta(t)\right|^2 = E\left\{\int_0^t \left[a(\vartheta,\xi(\vartheta)) - a(\vartheta,\eta(\vartheta))\right]d\vartheta + \int_0^t \left[A(\vartheta,\xi(\vartheta)) - A(\vartheta,\eta(\vartheta))\right]dw(\vartheta)\right\}^2$$

??? Почему интегралы от 0 а не от s?

Воспользуемся тем, что $|(c,b)|^2 \le |c|^2|b|^2$, тогда $\left[\int_0^t 1\cdot a(\tau)\,d\tau\right]^2 \le \int_0^t 1^2 d\tau \int_0^t a^2(\tau)\,d\tau = t\int_0^t a^2(\tau)\,d\tau$,

Для второго слагаемого применим свойство $E\left|\int_0^t A(\tau)\,dw(\tau)\right|^2 \le \int_0^t A^2(\tau)\,d\tau$??? Откуда эта формула. Также воспользуемся тем, что $|a+b|^2 \le 2a^2 + 2b^2$

$$E\left|\xi\right|$$

$$\alpha(t) \le t\int_0^t E\left|a(\vartheta,\xi(\vartheta)) - a(\vartheta,\eta(\vartheta))\right|^2 d\vartheta + \int_0^t E\left[A(\vartheta,\xi(\vartheta)) - A(\vartheta,\eta(\vartheta))\right]^2 d\vartheta$$

Используя условие У1 мы получим ??? Как мы их используем?

Формула ниже имеет вид предыдущей формулы, но вместо двух интегралов используется $\alpha(t)$. Видимо, мы чего-то не понимаем об условии У1 :)

$\alpha(t) \le Lt\int_0^t \alpha(\vartheta)\,d\vartheta + L\int_0^t \alpha(\vartheta)\,d\vartheta = L(1+t)\int_0^t \alpha(\vartheta)\,d\vartheta$ в силу леммы Гронуолла ??? Как здесь используется лемма Гронуолла

Доказано

Для доказательства существования решения рассмотрим последовательные приближения
$\xi^{n+1}(t) = x + \int_s^t a(\vartheta,\xi^n(\vartheta))\,d\vartheta + \int_s^t A(\vartheta,\xi^n(\vartheta))\,dw(\vartheta)$
$\xi^{n+2}(t) = x + \int_s^t a(\vartheta,\xi^{n+1}(\vartheta))\,d\vartheta + \int_s^t A(\vartheta,\xi^{n+1}(\vartheta))\,dw(\vartheta)$ и оценим
$E\left|\xi^{n+2}(t) - \xi^{n+1}(t)\right|^2 \le L(t+1)\int_s^t E\left|\xi^{n+1}(\vartheta) - \xi^n(\vartheta)\right|^2 d\vartheta \le L(t+1)\int_0^t\int_0^\vartheta L(\vartheta+1)\,E\left|\xi^n(\vartheta) - \xi^{n-1}(\vartheta)\right|^2 d\vartheta \le ... \le \frac{[L(t+1)]^n}{n!} \le ...$

Первое неравенство - мы применяем формулу, разобранную в доказательстве единства решения (там $\alpha(t)$ было МО разности двух решений, здесь - разность последовательных приближений к решению). При этом от шага $n+2$ и $n+1$ мы переходим к шагам $n+1$ и n соответственно. Повторяя этот процесс многократно, мы сводим этот интеграл к дроби. Дальше мы устремляем количество последовательных решений к бесконечности и получаем, что $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{[L(t+1)]^n}{n!} = 0$. При этом предельная функция (предельный процесс) удовлетворяет оценке $E\left|\left|\xi(t)\right|\right|^2 < \infty$

Применим неравенство $|a+b+c|^2 \le 3\left(|a|^2+|b|^2+|c|^2\right)$

$E\left||\xi(t)|\right|^2 \le 3\left||x|\right|^2 + t\int_0^t E\left|a(\vartheta,\xi(\vartheta))\right|^2 d\vartheta + \int_0^t E\left|A(\vartheta,\xi(\vartheta))\right|^2 d\vartheta$??? Почему тройка только у первого слагаемого

В силу У1 ??? Почему в силу У1?

$E|\xi(t)|^2 \le 3|x|^2 + L(t+1)\int_0^t C\left[1+\xi^2(\tau)\right]d\tau \le \left[3|x|^2+LC(t+1)t\right] + \int_0^t CE\left|\xi^2(\tau)\right|^2 d\tau \le$

$\le \left[3|x|^2+LC(t+1)t\right]e^{Ct}$ в силу Леммы Гроноулла и $\underset{0\le t\le T}{sup}E|\xi(t)|^2<\infty$

Свойства решений СДУ.

№1. Рассмотрим СДУ

$$d\xi(t) = a(\xi(t))\,dt + A(\xi(t))\,dw(t) \tag{3.7}$$

и покажем, что его **решение нерперывно по начальным данным**.

Напомним, что $\xi_{s,x}(t) = x + \int_s^t a(\xi_{s,x}(\vartheta))\,d\vartheta + A(\xi_{s,x}(\vartheta))\,dw(\vartheta)$

Оценим разность

$E|\xi_{s,x}(t)-\xi_{s,y}(t)|^2 \le 3|x-y|^2 + (t-s)\int_s^t E\left|a(\xi_{s,x}(\vartheta))-a(\xi_{s,y}(\vartheta))\right|^2 d\vartheta + \int_s^t E\left|A(\xi_{s,x}(\vartheta))-A(\xi_{s,y}(\vartheta))\right|^2 d\vartheta$

$|\xi_{s,x}(t)-\xi_{s,y}(t)|^2 = \left[[x-y]+\int_s^t a(\xi_{s,x}(\vartheta))-a(\xi_{s,y}(\vartheta))\right]d\vartheta + \int_s^t\left[A(\xi_{s,x}(\vartheta))-A(\xi_{s,y}(\vartheta))\,dw\right]^2$

$= 3(x-y)^2 + 3(t-s+1)\int_s^t EL\left|\xi_{s,x}(\vartheta)-\xi_{s,y}(\vartheta)\right|^2 d\vartheta \le 3(x-y)^2 e^{kT}$, $k = 3(T+1)L$,$0\le s\le t\le T$

Я переписал эту формулу по сравнению с предыдущей версией конспекта. Поменял порядок скобок так, чтобы это было логично :)

№2. Гладкость решений СДУ.

Пусть $\xi_{s,x}(t)$- это решение (3.4). Обозначим $\frac{\partial}{\partial x}\xi_{s,x}(t) = \underset{\Delta x\to 0}{lim}\frac{\xi_{s,x+\Delta}(t)-\xi_{s,x}(t)}{\Delta x}$, где предел понимается в среднеквадратичном.

При этом процесс $\eta(t) = \frac{\partial}{\partial x}\xi_{s,x}(t)$ удовлетворяет СДУ

$$d\eta(\vartheta) = a'_x(\xi(\vartheta))\,\eta(\vartheta)\,d\vartheta + A'_x(\xi(\vartheta))\,\eta(\vartheta)\,dw(\vartheta) \tag{3.8}$$

??? Как получить эти формулы

Таким образом, если коэффициент $a(x)$ и $A(x)$ k раз дифференцируемы, $k=1,2,...,$, то решения $\xi_{s,x}(t)$уравнения (3.4) тоже k раз дифференцируемы.

Если $a'(x)$ и $A'(x)$- ограниченные, то уравнение (3.8) определено корректно, т.е. его коэффициенты удовлетворяют У1.

Обозначим $\gamma(t) = \frac{\partial^2\xi_{s,x}(t)}{\partial x^2}$

Формально, мы получим, что $\gamma(t)$ удовлетворяет СДУ

$$d\gamma(t) = a'_x(\xi_{s,x}(\vartheta))\,\gamma(\vartheta)\,d\vartheta + A'_x(\xi_{s,x}(\vartheta))\,\gamma(\vartheta)\,dw(\vartheta) + a''_x(\xi(\vartheta))\,\eta(\vartheta)\,d\vartheta + A''(\xi_{s,x}(\vartheta))\,\eta^2(\vartheta)\,dw(\vartheta) \tag{3.9}$$

Решение уравнения (3.8) имеет вид

$$\eta(t) = \exp\left[\int_s^t a'(\xi_{s,x}(\vartheta))\,d\vartheta + \int_s^t A'(\xi_{s,x}(\vartheta))\,dw(\vartheta) - \frac{1}{2}\int_s^t\left[A'(\xi_{s,x}(\vartheta))\right]^2 d\vartheta\right]$$

19.10.17

$d\xi = a(\xi(t))\,dt + A(\xi(t))\,dw(t)$

$\xi(s) = x$, $\eta(t) = u(t,\xi(t))$

$d\eta(t) = \left[\frac{\partial u(t,\xi(t))}{\partial t} + a(\xi(t))\frac{\partial u(t,\xi(t))}{\partial x} + \frac{1}{2}A^2(\xi(t))\frac{\partial^2 u(t,\xi(t))}{\partial x^2}\right]dt + \frac{\partial u(t,\xi(t))}{\partial x}A(\xi(t))\,dw(t) = du(t,\xi(t))$

Рассмотрим уравнение в частных производных $\frac{\partial u}{\partial s} + a(x)\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2}A^2(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$ с граничным условием $u(T,x) = u_0(x)\,, s \le t \le T$

Проинтегрируем $d\eta(t)$ от s до T

$u(T,\xi(T)) - u(s,x) = \int_s^T [...]\,dt + \int_s^T \frac{\partial u}{\partial x}(t,\xi(t))\,A(\xi(t))\,d\omega(t)$ - формула Ньютона-Лейбница

$Eu_0(\xi(T)) - u(s,x) = 0$

Математическое ожидание стохастического процесса равно нулю. Дисперсия равна τ.

$u(s,x) = Eu_0(\xi(T))$

$\frac{\partial u}{\partial s} + a(x)\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2}A^2(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x)$

$\left[\frac{\partial u(t,\xi(t))}{\partial t} + a\frac{\partial u(t,\xi(t))}{\partial x} + \frac{1}{2}A^2(\xi(t))\frac{\partial^2 u(t,\xi(t))}{\partial x} + f(\xi(t)) - f(\xi(t))\right]dt + \frac{\partial u(t,\xi(t))}{dx}A(\xi(t))\,dw(t) = d\eta(t) = du(t,\xi(x))$

$u(s,x) = E\left[u_0(\xi(T)) - \int_s^T f(\xi(t))\,dt\right]$??? Почему, откуда появилось второе слагаемое с интегралом

Пример:

$d\xi = sin(\xi(t))\,dt + cos\xi(t)\,dw(t)$

$\xi(s) = x$

$f(t,x) = t\sin x$

$\frac{\partial f}{\partial x} = t\cos x$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -t\sin x$

$d\eta = \sin x + \sin(\xi(t))\,t\cos x - \frac{1}{2}cos^2(\xi(t))\,t\sin x = 0$

??? Разве не $d\eta = \left[\sin\xi(t) + \sin(\xi(t))\,t\cos x - \frac{1}{2}cos^2(\xi(t))\,t\sin x\right]dt + t\cos^2\xi(t)\,dw(t)$

4 Марковские процессы

Случайный процесс называется **марковским** относительно потока σ -аглебр $\mathcal{F}_t$, если справедливо соотношение:

$$E[f(\xi(T))\,|\mathcal{F}_t] = E[f(\xi(T))\,|\xi(t)]$$

для любой измеримой ограниченной функции $f(x)$, $0 \le t \le T$.

С каждым марковским процессом связана его **переходная вероятность**

$p(s,x,t,G) = P\{\xi(t) \in G | \xi(s) = x\}\,, G \in \mathcal{R},\ G = [a;b)$

В терминах переходной вероятности, марковское свойство описывается **уравнением Чепмена-Колмогорова**

$P(s,x,t,G) = \int_{-\infty}^{\infty} p(s,x,\vartheta,dz)\,p(\vartheta,z,t,G)$

Если $P(s,x,t,G) = \int_G p(s,x,t,y)\,dy$, Тогда уравнение Чепмена-Колмогорова имеет вид:

$p(s,x,t,y) = \int_{-\infty}^{\infty} p(s,x,\vartheta,z)\,p(\vartheta,z,t,y)\,dz$

Каждый марковский процесс порождает эволюционное семейство, действующее в пространстве V измеримых ограниченных функций.

$u(s,t)\,f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y)\,p(s,x,t,y)\,dy$

Эволюционное свойство $u(s,t)$ т.е. равенство $u(s,t) = u(s,\vartheta)\,u(\vartheta,t)$ следует из уравнения Ч-К.

Действительно:

$u(s,t)\,f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y)\,p(s,x,t,y)\,dy = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\left[\int_{-\infty}^{\infty} p(s,x,\vartheta,z)\,p(\vartheta,z,t,y)\,dz\right]dy$ =изменяем порядок интегрирования,$u(\vartheta,t)\,f(z) = \phi(z)$, далее

$= \int_{-\infty}^{\infty} p(s,x,\vartheta,z)\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(y)\,p(\vartheta,z,t,y)\,dy\right]dz$
$= \int_{-\infty}^{\infty} p(s,x,\vartheta,z)\,(u(\vartheta,t)\,f)(z)\,dz = \int_{-\infty}^{\infty} p(s,x,\vartheta,z)\,\phi(z)\,dz = u(s,\vartheta)\,\phi(z) = u(s,\vartheta)\,u(\vartheta,t)\,f(x)$

Генератор эволюционного семейства $u(s,t)$ - это оператор A, задаваемый соотношением:

$\lim\limits_{\Delta s\to 0}\frac{u(s,s+\Delta s)-I}{\Delta s}f(x) = Af(x)$, I - единичный оператор.

Генератор марковского процесса - это оператор L, задаваемый соотношением
$\lim\limits_{\Delta s\to 0}\frac{Ef(\xi_{s,x}(s+\Delta s))-f(x)}{\Delta s} = Lf(x)$

Если $u(s,t)\,f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y)\,p(s,x,t,y)\,dy$, т.е. $u(s,t)$ порожден марковским процессом $\xi(t)$ с плотностью переходной вероятности $p(s,x,t,y)$, то $Af = Lf$ на области их определения.

5 Марковское свойство решения стохастических уравнений

Рассмотрим СДУ

$$d\xi = a(\xi(\vartheta))\,d\vartheta + A(\xi(\vartheta))\,dw(\vartheta), \xi(s) = x \tag{5.1}$$

Мы будем предполагать, что функции $a(x), A(x)$ неслучайные и удовлетворяют условию теоремы существования и единства решения СДУ.

Теорема 5.1 Пусть $a(x), A(x)$ неслучайны и существует решение $\xi_{s,x}(t)$ задачи (5.1). Тогда $\xi_{s,x}(t)$ - марковский процесс.

Доказательство:

Рассмотрим случайный процесс
$\xi(t) = x + \int_s^t a(\xi(\vartheta))\,d\vartheta + \int_s^t A(\xi(\vartheta))\,dw(\vartheta) = \xi(\tau) + \int_\tau^s a(\xi(\vartheta))\,d\vartheta + \int_\tau^t A(\xi(\vartheta))\,dw(\vartheta)$.
Это равенство вытекает из единственности решения (5.1)

Процесс $\xi_{\tau,\eta}(t)$, $\eta = \xi(\tau)$ можно представить в виде функции, зависящей от двух переменных ω и ω_1, где $\omega = \eta(\tau)$ и ω_1 пораждён стохастическим и обыкновенным интегралом.

В силу свойств стохастических интегралов, ω и ω_1 независимые.

Пусть $\xi(t) = g(\omega,\omega_1)$. g можно представить в виде: $g(\omega,\omega_1) = \sum_{k=0}^{\infty}\phi_k(\omega)\,\psi_k(\omega_1)$

Используя это свойство можно показать, что в любой измеримой ограниченно функции $f(x)$ справедливо равенство $Ef(\xi(T)\,|\mathcal{F}_\tau) = Ef(\xi(T)\,|\xi(\tau))$, т.е. $\xi(t)$ - это марковский процесс.

5.1 Уравнение колмогорова, обратное уравнение

Пусть $\xi(t)$ - решение уравнения (5.1) со случайными коэффициентами. Рассмотрим функцию $u(s,x) = Ef(\xi_{s,x}(T))$ и выведем уравнение, которому она удовлетворяет.

Вычислим:

$$u(s+\Delta s,x) - u(s,x) = \int f(y)\,p(s+\Delta s,x,T,y)\,dy - \int f(y)\,p(s,x,T,dy) \tag{5.2}$$

Воспользуемся уравнением Ч-К
$p(s,x,T,y) = \int p(s,x,s+\Delta s,z)\,p(s+\Delta s,z,T,y)\,dy$??? Но ведь уравнение Чепмена-Колмогорова имеет вид: $p(s,x,t,y) = \int_{-\infty}^{\infty} p(s,x,\vartheta,z)\,p(\vartheta,z,t,y)\,dz$

Из (5.2) получим:

$$u(s+\Delta s,x)-u(s,x)=\int f(y)\,p(s+\Delta s,x,T,y)\,dy-\int f(y)\int p(s,x,s+\Delta s,z)\cdot p(s+\Delta s,z,T,y)\,dzdy \tag{5.3}$$

$u(s,x)=Ef(\xi_{s,x}(T))=\int f(y)\,p(s,x,T,y)\,dy$

Поскольку

$\int f(y)\,p(s+\Delta s,z,T,y)=u(s+\Delta s,z)$ то из (5.3) следует, что и $u(s+\Delta s,x)-u(s,x)=\int f(y)\,p(s+\Delta s,x,T,y)\,dy-\int u(s+\Delta s,z)\,p(s+\Delta s,z,T,y)\,dz$

Таким образом $u(s+\Delta s,x)-u(s,x)=E\left\{u(s+\Delta s,\xi_{s+\Delta s,x}(t))-u\left(s+\Delta s,\xi_{s+\Delta s,\xi(s+\Delta s)}(T)\right)\right\}$
??? Почему

Перепишем полученные соотношения в следующем виде. Напомним, что $u(s,x)=\int f(y)\,p(s,x,s+\Delta s,y)\,dy=\int f(y)\int p(s,x,\vartheta,z)\,p(\vartheta,z,s+\Delta s,y)\,dydz=Eu(s,\xi_{s,x}(s+\Delta))$

$u(s+\Delta s,x)-u(s,x)=-E\left[u(s+\Delta s,\xi_{s,x}(s+\Delta s))-u(s+\Delta s,x)\right]$

$u(s+\Delta s,\xi_{s,x}(s+\Delta s))-u(s+\Delta s,x)$

Используя формулу Ито, получим

$\lim\limits_{\Delta s\to 0}\frac{u(s+\Delta s,x)-u(s,x)}{\Delta s}=\frac{\partial u}{\partial s}=-\left[a(x)\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{2}A^2(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right]$ В квадртаной скобке находится слагаемое перед ds в формуле Ито.

Таким образом, функция $u(s,x)=Ef(\xi_{s,x}(T))$ удовлетворяет задаче Коши $\frac{\partial u}{\partial s}+a(x)\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{2}A^2(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0$, $u(T,x)=f(x)$

Пример:

$d\xi=3f(\vartheta)\,d\vartheta+sin(\xi(\vartheta))\,dw,\ \xi(s)=x,\ f(x)$

$u(s,x)=Ef(\xi_{s,x}(T))$

$\frac{\partial u}{\partial s}+3x\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{2}sin^2x\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0$,

Другой вариант:

$\frac{\partial u}{\partial s}+4x\frac{\partial u}{\partial x}-9x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0$

$u(T,x)=sinx$

Написать вероятностное представление:

$d\xi=4\xi(\vartheta)\,d\vartheta+3\sqrt{2}\xi(\vartheta)\,du$

$u(s,x)=Esin(\xi_{s,x}(T))$

Пример:

№1. $d\xi=\sqrt{3}sin(\xi(\vartheta))+\sqrt{2}cos(3\xi(\vartheta))\,dw(\vartheta)$

$\xi(s)=x$

$f(x)=\cos x$

$u(s,x)=Ecos(\xi_{s,x}(T))$

$a(\xi(\vartheta))=\sqrt{3}\sin(\xi(\vartheta)),\ a(x)=\sqrt{3}\sin x$

$A(\xi(\vartheta))=\sqrt{2}\cos(3\xi(\vartheta)),\ A(x)=\sqrt{2}\cos 3x$

$\frac{\partial u}{\partial s}+\sqrt{3}\sin x\frac{\partial u}{\partial x}+cos^2 3x\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0$

$u(T,x)=\cos x$

$\_\_\_\_\_\_\_\_$

$\frac{\partial u}{\partial s}+sin(x)\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{2}cos^2(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0$

$u(T,x)=2\sin x,\ u(s,x)=Ef(\xi_{s,x}(T))$

$d\xi=\sin(\xi(\vartheta))\,d\vartheta+cos(\xi(\vartheta))\,dw\vartheta$

$u(s,x)=E2sin(\xi_{s,x}(T))$

5.2 Формула Фейнмана Каца

Рассмотрим задачу Коши

$$\frac{\partial u}{\partial s} + a(x)\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2}A^2(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + c(x)u = 0, u(T,x) = f(x) \tag{5.4}$$

Нужно построить вероятностное представление решения этой задачи.

Рассмотрим СДУ

$$d\xi = a(\xi(\vartheta))\,d\vartheta + A(\xi(\vartheta))\,dw(\vartheta) \tag{5.5}$$

$$d\eta = c(\xi(\vartheta))\,\eta(\vartheta)\,d\vartheta \tag{5.6}$$

$$\xi(s) = x, \eta(s) = 1$$

и функцию $u(s,x)$ вида

$$u(s,x) = E\left[\eta(T)\,f(\xi_{s,x}(T))\right] \tag{5.7}$$

Покажем, что $u(s,x)$ вида (5.7) удовлетворяет (5.4)

Заметим, что процесс $\eta(t)$ имеет вид $\eta(t) = \exp\int_s^T c(\xi(\vartheta))\,d\vartheta$ и вычислим $u(s+\Delta s,x) - u(s,x)$??? Здесь $\eta(t)$ - интеграл с T в качестве верхнего предела, см. следующий вопрос

$u(s+\Delta s,x) - u(s,x) =$

Рассмотрим

$u(s,x) = E\eta(s+\Delta s)\,f(\xi_{s,x}(s+\Delta s))$

Тогда $u(s+\Delta s,x) - u(s,x) = u(s+\Delta s,x) - E\eta(s+\Delta s) + f(\xi_{s,x}(s+\Delta s))$

Примечание: $\eta(s+\Delta s) = \exp\int_s^{s+\Delta s} c(\xi(a))\,d\vartheta$??? Здесь $\eta(t)$- верхний предел зависит от аргумента. Может быть $\eta(t) = \int_s^t ...$ а не $\int_s^T$

Рассмотрим разность $E\left[\eta(s+\Delta s) - \eta(s)\right]f(\xi_{s,x}(s+\Delta s)) + E\left[\eta(s)\left[f(\xi_{s,x}(s+\Delta s)) - f(x)\right]\right.$??? Есть лишняя открывающая скобка

$=E\left[e^{\int_s^{s+\Delta s} c(\xi(\vartheta))d\vartheta} - 1\right] f(\xi_{s,x}(s+\Delta s)) + E\left[f(\xi_{s,x}) - f(x)\right]$

Таким образом

$\lim\limits_{\Delta s\to 0}\frac{u(s+\Delta s,x)-u(s,x)}{\Delta s} = \frac{\partial u}{\partial s} = -\left(c(x)\,u + a(x)\,\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2}A^2(x)\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)$

Отсюда вытекает, что $u(s,x) = Ee^{\int_s^T c(\xi(\vartheta))d\vartheta}\cdot f(\xi_{s,x}(T))$ удовлетворяет задаче Коши.

$$\frac{\partial u}{\partial s} + a(x)\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2}A^2(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + c(x)\,u(x) = 0, u(T,x) = f(x) \tag{5.8}$$

Рассмотрим СДУ

$$d\xi = a(\xi(\vartheta))\,d\vartheta + A(\xi(\vartheta))\,dw(\vartheta)$$

и процесс $du(t,\xi(t)) = \left[u'_t + au'_x + \frac{1}{2}\Delta^2 u''_x\right]dt + u'_x A(\xi(t))\,dw$

Пусть $c \equiv 0$. Тогда, добавляя и вычитая в квадратных скобках $f(\xi(t))$ получим

$du = \left[u'_t + au'_x + \frac{1}{2}A^2\cdot u''_{xx} + f - f\right]dt + u'_x A dw$

$du = f(\xi(t))\,dt + u'_x A dw$

Интегрируем по t от s до T .

$Eu(T,\xi(T)) - u(s,x) = E\int_s^T f(\xi(\vartheta))\,d\vartheta$

Отсюда следует, что

$u(s,x) = E\left[f(\xi_{s,x}(T)) + \int_s^T f(\xi_{s,x}(\vartheta))\,d\vartheta\right]$

??? Может быть, более подробно это расписать

02.11.17

6 Генерация марковского процесса

$Grf\left(x\right)=\lim\frac{Ef\left(\xi_{s,x}\left(s+\Delta s\right)-f\left(x\right)\left(t_k\right)\right)}{\Delta s}=a\left(x\right)f'\left(x\right)+\frac{1}{2}A^2\left(x\right)F''\left(x\right)$

$u\left(s,x\right)=f\left(\xi_{s,x}\left(T\right)\right)$

$\frac{\partial u}{\partial s}+a\left(x\right)\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{2}A^2\left(x\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0,u\left(T,x\right)=f\left(x\right)$

$u\left(s,x\right)=E\left[exp\left[\int_s^T c\left(\xi\left(\vartheta\right)\right)dq\right]\right]_F$

$\frac{\partial u}{\partial s}+a\left(x\right)\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{2}A^2\left(x\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+g\left(x\right)=0$

$d\xi=a\left(\xi\left(t\right)\right)dt+A\left(\xi\left(t\right)\right)dw\left(t\right)$

$u\left(s,x\right)$

$du\left(\vartheta,\xi\left(\vartheta\right)\right)=\left[\frac{\partial u}{\partial\vartheta}+a\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{A^2}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+g-g\right]\left(\vartheta,\xi\left(\vartheta\right)\right)^2+\frac{\partial u}{\partial x}\left(\vartheta,\xi\left(\vartheta\right)\right)A\left(\xi\left(\vartheta\right)\right)dw\left(\vartheta\right)$

$\int_s^T Au\left(\vartheta,\xi\left(\vartheta\right)\right)=-\int_s^T g\left(\xi\left(\vartheta\right)\right)d\vartheta+\int_s^T\frac{\partial u}{\partial x}A\left(\xi\left(\vartheta\right)\right)\partial w$

$Eu\left(T,\xi\left(T\right)\right)-u\left(s,x\right)=-E\int_s^T g\left(\xi\vartheta\right)d\vartheta$

$u\left(s,x\right)=E\left[f\left(\xi_{s,x}\left(T\right)\right)+\int_s^T g\left(\xi\left(\vartheta\right)\right)d\vartheta\right]$

6.1 Вероятностное представление решения задачи Коши для нелинейного параболического уравнения

Семилинейными параболическими уравнениями будем называть параболические уравнения, коэффициенты которых зависят как от временной и пространственной переменных, так и от искомой скалярной функции f.

Рассмотрим семилинейное параболическое уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial s}+a\left(x,u\left(s,x\right)\right)\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{2}A^2\left(x,u\left(s,x\right)\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0,u\left(T,x\right)=u_0\left(x\right)\qquad(6.1)$$

Наряду с задачей (6.1) рассмотрим стохастическую задачу

$$d\xi=a\left(\xi\left(\vartheta\right),u\left(\vartheta,\xi\left(\vartheta\right)\right)\right)d\vartheta+A\left(\xi\left(\vartheta,\nu\left(\vartheta,\xi\left(\vartheta\right)\right)\right)\right)dw\left(\vartheta\right)\qquad(6.2)$$

$$u\left(s,x\right)=Eu_0\left(\xi_{s,x}\left(T\right)\right)\qquad(6.3)$$

Сформулируем условие на коэффициенты $a\left(x,u\right)$, $A\left(x,u\right)$ и условие $u_0\left(x\right)$при котором существует единственное решение системы (9.2) (9.3)

Условие C9.1

Пусть справедливы оценки

$\left|a\left(x,u\right)\right|^2+\left|A\left(x,u\right)\right|^2\le C\left(1+\left|x\right|^2+\left|u\right|^{2p}\right)$

$\left|a\left(x,u\right)-a\left(y,v\right)\right|^2+\left|A\left(x,u\right)-A\left(y,\nu\right)\right|^2\le L\left|x-y\right|+k_{u,v}\left|u-\nu\right|^2$

Решать задачу (6.2-6.3) мы будем с помощью методов последовательного приближения.

Рассмотрим последовательное приближение

$u^0\left(x\right)=u_0\left(x\right),\xi^0\left(t\right)=x$

$\xi^1\left(t\right)=x+\int_s^t a\left(\xi^1\left(\vartheta\right),u^1\left(\vartheta,\xi^1\left(\vartheta\right)\right)\right)d\vartheta+\int_s^t A\left(\xi^1\left(\vartheta\right),u^1\left(\vartheta,\xi^1\left(\vartheta\right)\right)\right)dw\left(\vartheta\right)$

$u^2\left(s,x\right)=Eu_0\left(\xi_{s,x}^1\left(T\right)\right)$

$\xi^2\left(t\right)=x+\int_s^t a\left(\xi^2\left(\vartheta\right),u^2\left(\vartheta,\xi\left(\vartheta\right)\right)\right)d\vartheta+\int_s^T A\left(\xi^2\left(\vartheta\right),u^2\left(\vartheta,\xi^2\left(\vartheta\right)\right)\right)dw\left(\vartheta\right)$

$u^n\left(s,x\right)=Eu_0\left(\xi^{(n-1)}\left(T\right)\right)$

$\xi^n\left(t\right)=x+\int_s^t a\left(\xi^n\left(\vartheta\right),u^n\left(\vartheta\right),\xi\left(\vartheta\right)\right)d\vartheta+\int_s^T A\left(\xi^n\left(\vartheta\right),u^n\left(\vartheta,\xi^n\left(\vartheta\right)\right)\right)dw\left(\vartheta\right)$

Заметим, что в силу условий C9, на каждом шаге последовательных приближений можем утверждать существование и единственность решений СДУ.

При этом все функции $u^n(s,x)$ равномерно ограничены если функция $u_0(x)$ - ограничена, т.е. $\sup_x |u_0(x)| \le k_0$

В силу *теоремы Арцела-Асколи*, для того, чтобы семейство непрерывных функций $u^n(s,x)$ сходилась к непрерывной функции $u(s,x)$ при фиксированном s, нужно проверить, что функции $u^n(s,x)$ равномерно ограничены и равномерно непрерывны.

Покажем, что семейство функцией $u^n(s,x)$ равномерно непрерывно. Для этого достаточно показать, что семейство $\nu^n(s,x) = \frac{\partial}{\partial x}u^n(s,x)$ равномерно ограничено. Для того, чтобы это доказать расмотрим линейную систему

Пусть $g(s,x)$ - ограниченная мин??? функция или даже дифференцируемая по x , т.е. $\left|\frac{\partial g(s,x)}{\partial x}\right| \le k'_g(s)$

Рассмотрим СДУ

$$d\xi = a(\xi(\vartheta), g(\vartheta, \xi(\vartheta)))\,d\vartheta + A(\xi(\vartheta), g(\vartheta), g(\vartheta, \xi(\vartheta)))\,dw(\vartheta), \xi(s) = x \tag{6.4}$$

$$\nu(s,x) = Eu_0(\xi_{s,x}(T)) \tag{6.5}$$

Пусть $\eta(\vartheta) = \frac{\partial}{\partial x}\xi_{s,x}(T)$

$d\eta(\vartheta) = \left[a'_x(\xi(\vartheta), g(\vartheta, g(\vartheta))) + a'_g(\xi(\vartheta), g(\vartheta), \xi(\vartheta))\frac{\partial g}{\partial x}(\vartheta, \xi(\vartheta))\right]$

$$\eta(\vartheta)\,d\vartheta + \left[A'_x(\xi)(\vartheta), g(\vartheta, \xi(\vartheta)) + A'_g()\frac{\partial g}{\partial x}(\vartheta, \xi(\vartheta))\right]\eta(\vartheta)\,dw(\vartheta) \tag{6.6}$$

$\frac{\partial}{\partial x}u_0(\xi_{s,x}(T))$

Наша цель - показать, что существует функция $B(t)$ такая, что если $\left|\frac{\partial g(t,x)}{\partial x}\right| \le B(t)$ то и $\left|\frac{\partial \nu(t,x)}{\partial x}\right| \le B(t)$

Для всех t из некоторого интервала предполагаем, что $u_0(x)$ имеет ограниченную производную, т.е. $\sup_x \left|\frac{\partial u_0(x)}{\partial x}\right| \le k'_0$

При этом $\sup_x \left|\frac{\partial \nu(s,x)}{\partial x}\right|^2 \le k_0 \sup_x E|\eta(T)|^2$

Оценим $E|\eta(T)|^2$

поскольку $E|\eta(t)|^2 = |h|^2 + 2E\int_s^T \left[a'_x + a'_g g'(\vartheta, \xi(\vartheta))\right]\eta(\vartheta)^2\,d\vartheta$

?? Что дальше?

Практика

Частные случаи

$\frac{\partial u}{\partial s} + a(x)\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{A^2(x)}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + a(x)u + f(x) = 0$

#1: $c(x) \equiv 0$

$u(s,x) = E\left[\sin(\xi(T)) + \int_s^T \sin\xi(\vartheta)\,d\vartheta\right]$

#2. $f(x) = 0$

$\frac{\partial u}{\partial s} + a(x)\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2}A^2(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + c(x)u = 0$

$u(T,x) = u_0(x)$

$d\xi = a(\xi(\vartheta))\,d\vartheta + A(\xi(\vartheta))\,dw(\vartheta), \xi(s) = x$

$d\eta = c(\xi(\vartheta))\eta(\vartheta)\,d\vartheta, \eta(s) = 1$

$\eta(0) = e^{\int_s^\vartheta c(\vartheta(\tau))d\tau}$

$u(s,x) = E\left[e^{\int_s^T c(\xi(\vartheta))d\vartheta}u_0(\xi_{s,x}(T))\right] = E\left[e^{\int_s^{s+\Delta s} c(\xi(\vartheta))d\vartheta + \int_{s+\Delta s}^T c(\xi(\vartheta))d\vartheta}u_0(\xi_{s,x}(T))\right]$

$u(s+\Delta s, x) - u(s,x) = E\left[e^{\int_{s+\Delta s}^T c(\xi(\vartheta))d\vartheta}u_0(\xi_{s+\Delta s,x}(T)) - e^{\int_s^{s+\Delta s} c(\xi(\vartheta))d\vartheta + \int_{s+\Delta s}^T c(\xi(\vartheta))d\vartheta}u_0(\xi_{s,x}(T))\right]$

Добавим и вычтем выражение вида

$e^{\int_{s+\Delta s}^T c(\xi(\vartheta))d\vartheta}u_0(\xi_{s,x}(T))$

Тогда
$u(s+\Delta s,x)-u(s,x)=E\{e^{\int_{s+\Delta s}^{T}c(\xi(\vartheta))d\vartheta}\left[u_0\left(\xi_{s+\Delta s,x}(T)\right)-u_0\left(\xi_{s,x}(T)\right)\right]+$
$+\left[e^{\int_s^T c(\xi(\vartheta))d\vartheta}-e^{\int_{s+\Delta s}^T c(\xi(\vartheta))d\vartheta}\right]u_0\left(\xi_{s,x}(T)\right)\}$
$\frac{1}{\Delta}\left[e^{\int_s^{s+\Delta s}c(\xi(\vartheta))d\vartheta}-1\right]e^{\int_{s+\Delta s}^T c(\xi(\vartheta))d\vartheta}u_0\left(\xi_{s,x}(T)\right)=c(x)\,du(s,x)$
$\frac{\partial u}{\partial s}+a(x)\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{2}A^2(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+c(x)u=0$
Наше решение имеет вид:
$E\left[e^{\int_s^T c(\xi(\vartheta))d\vartheta}u_0\left(\xi_{s,x}(T)\right)\right]=u(s,x)$
$u(s,x)=E\left[e^{\int_s^T \xi(\vartheta)d\vartheta}u_0\left(\xi_{s,x}(T)\right)+\int_0^T e^{\int_0^T\xi(\tau)d\tau}sin\left(\xi(\vartheta)\right)d\vartheta\right]$
$\frac{\partial u}{\partial s}+a(x)\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{2}A^2(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+c(x)u+f(x)=0$
$u(T,x)=u_0(x)$
$d\xi(\vartheta)=a(\xi(\vartheta))\,d\vartheta+A(\xi(\vartheta))\,du(\vartheta)\,,\xi(s)=x$
$d\eta(\vartheta)=c(\xi(\vartheta))\,\eta(\vartheta)\,d\vartheta,\eta(s)=1$
$u(s,x)=E\left[\eta(T)\,u_0\left(\xi_{s,x}(T)\right)-\int_s^T\eta(\vartheta)\,f(\xi(\vartheta))\,d\vartheta\right]$
01.12.17

7 Новый раздел, чтобы перезапустить нумерацию

$d\xi=a(\xi(\vartheta))\,d\vartheta+A(\xi(\vartheta))\,dwd\vartheta,\ \xi(s)=x$
$\xi(t)=x+\int_s^t a(\xi(\vartheta))\,d\vartheta+\int_s^t A(\xi(\vartheta))\,dw(\vartheta,w)$
$\xi_n(t)=x+\sum_{k=1}^n\int_{t_k}^{t_{k+1}}\left[a(\xi(\vartheta))\,d\vartheta+\int_{t_k}^{t_{k+1}}A(\xi(\vartheta))\,dw(\vartheta)\right]$
$\xi_n(t)=x+\sum\left[a(\xi(t_k))\,\Delta_k+A(\xi(t_k))\,\Delta_k w\right]$
$\Delta_k w=w(t_{k+1})-w(t_k)$
$u(s,x)=E\nu\left(\xi_{s,x}(???,w)\right)???$
$\frac{\partial u}{\partial s}+a(x)\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{2}A^2(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0$
$u(T,x)=\nu(x)$
Напомним, что мы расматриваем систему ??? Когда мы начали ее рассматривать?

$$d\xi=a^u(\xi(\vartheta))\,d\vartheta+A^u(\xi(\vartheta))\,dw(\vartheta)\,,\xi(s)=x \tag{7.1}$$

$$u(s,x)=Eu_0\left(\xi_{s,x}(T)\right),\text{где}a^u(x)=a(x,u(s,x)) \tag{7.2}$$

Для того, чтобы построить решения системы (7.2) рассмотрим последовательные приближения

$$d\xi_n(\vartheta)=a^{u_n}(\xi_n(\vartheta))\,d\vartheta+A^{u_n}(\xi_n(\vartheta))\,dw(\vartheta) \tag{7.3}$$

$$\xi_n(s)=x \tag{7.4}$$

$u^{n+1}(s,x)=E_{s,x}u_0(\xi_n(T))$, где $E_{s,x}(\xi(t))\equiv E\left[\xi_{s,x}(t)\right]$
На каждом шаге системы последовательных приближений мы решаем уравнения вида

$$d\xi=a(\xi(\vartheta),\nu(\vartheta,\xi(\vartheta)))\,d\vartheta+A(\xi(\vartheta),\nu(\vartheta,\xi(\vartheta)))\,dw(\vartheta) \tag{7.5}$$

где $\nu(t,x)$известная функция $(\nu(\vartheta,x)\equiv u^n(\vartheta,x))$

$$g(s,x)=Eu_0\left(\xi_{s,x}(T)\right) \tag{7.6}$$

где $\xi_{s,x}(\vartheta)$ - решение (8.5)
$u^1(s,x)=u_0(x)\,,\xi_0(0)=x$

Рассмотрим уравнения (7.5) и (7.6) и положим, что если $\nu(s,x)$ - ограниченная Липшицева функция, то и $g(s,x)$ тоже ограниченная Липшецева функция с одинаковой константой Липшица.

$|\nu(t,x)-\nu(t,y)| = L(t)|x-y|$, то справедлива оценка $|g(t,x)-g(t,y)| \le L(t)|x-y|$

Лемма 8.1 Пусть коэффициенты $a^u(x)$ и $A^u(x)$ удовлетворяют условиям существования и единственности решения СДУ.

Тогда существует интервал $\{T_1;T\}$ такой, что $g(t,x)-g(t,y) \le \beta(t)|x-y|$, если $|\nu(t,x)-\nu(t,y)| \le \beta(t)|x-y|$ для некоторой функции $\beta(t)$ ограниченной на интервале $[T_1,T]$

Доказательство:

Рассмотрим процесс $\xi(t)$

$E|\xi_x(t)-\xi_y(t)|^2 \le |x-y|^2 + 2E\int_s^t [a(\xi_{s,x}(\vartheta),\nu(\vartheta,\xi_{s,x}(\vartheta))) - a(\xi_{s,y}(\vartheta),\nu(\vartheta,\xi_{s,y}(\vartheta)))]\cdot$
$\cdot(\xi_{s,x}(\vartheta)-\xi_{s,y}(\vartheta))\,d\vartheta + E\int_s^t |A(\xi_{s,x}(\vartheta),\nu(\vartheta,\xi_{s,y}(\vartheta))) - A(\xi_{s,y}(\vartheta),\nu(\xi_{s,y}(\vartheta)))|^2 d\vartheta \le$
$\le |x-y|^2 + 2\int E|\xi_{s,x}(\vartheta)-\xi_{s,y}(\vartheta)|^2 + K_0\beta(\vartheta)|\xi_{s,x}(\vartheta)-\xi_{s,y}(\vartheta)|^2 d\vartheta$

Оценим далее $(g(s,x)-g(s,y))^2 = |E\nu_0(\xi_{s,x}(T)) - \nu_0(\xi_{s,y}(T))| \le L_0E|\xi_{s,x}(T)-\xi_{s,y}(T)|^2$где $L_0, K_{???}$- константа Липшица функции $u_0(x)$ и функции $a(\nu)$

??? Во всем этом разделе что-то не так со скобками, прошу проверить :)

Таким образом:

$|g(s,x)-g(s,y)|^2 \le L_0E|\xi_{s,x}(T)-\xi_{s,y}(T)|^2 \le |x-y|^2 \exp\int_s^T [K_1+K_2\beta(\vartheta)]\,d\vartheta$

Поскольку $E|\xi_{s,x}(T)-\xi_{s,y}(T)|^2 \le |x-y|^2 + \int_s^T c\left[|\xi_{s,x}(t)-\xi_{s,y}(T)|^2\right] - [1-K_{???}\beta(\vartheta)]\,d\vartheta$

Отсюда в силу леммы Гронуолла: $E|\xi_{s,x}(T)-\xi_{s,y}(T)|^2 \le |x-y|^2 \exp\int_s^T [1+K_{???}\beta(\vartheta)]\,d\vartheta$

Рассмотрим соотношение $\beta(t-s) = K_0\exp\int_s^T [K_1+K_2\beta(t-\vartheta)]\,d\vartheta$ и его дифференциальный вариант

$$\frac{d\beta(t-s)}{ds} = [K_1+K_2\beta(t-s)]\,\beta(t-s),\ \beta(T)=K_0 \tag{7.7}$$

Перепишем ОДУ (8.7) в виде

$$\frac{d\beta}{(K_1+K_2\beta)\,\beta} = ds \tag{7.8}$$

Представим $\frac{1}{(K_1+K_2\beta)\beta} = \frac{A_1}{K_1+K_2\beta} + \frac{A_2}{\beta}$

$A_1\beta + A_2K_1 + A_2K_2\beta = 1$

$A_1 + A_2K_2 = 0, A_2K_1 = 1$

Таким образом, $A_2 = \frac{1}{K_1}$,$A_1 = -\frac{A_2}{K_1}$

и (12.8) приобретает вид

$\frac{1}{K\cdot K_1[K_1+K_2\beta]} + \frac{1}{K}\frac{1}{\beta} = ds$

$\frac{1}{K_1[K_1+K_2\beta]} + \frac{1}{\beta} = Kds$??? правильно?

$\int_{\beta(s)}^{\beta(T)} \frac{d\beta}{\widetilde{K}_1+\widetilde{K}_2\beta} + \int_{\beta(s)}^{\beta(T)}\frac{d\beta}{\beta}$, $\widetilde{K}_1 = K_1^2, \widetilde{K}_2 = K_1K_2$

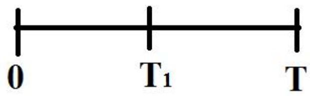
$Ln\left[\widetilde{K}_1+\widetilde{K}_2\beta\right]|_{\beta(s)}^{\beta(T)} + ln\beta|_{\beta(s)}^{\beta(T)} = (T-s)\,K$

Решая полученные алгебраические уравнения мы получим ответ в виде $\beta(T-s) = \frac{\widetilde{K}_1K_0}{\widetilde{K}_1+K-K_0e^{K_2(t-s)}}$

Функция $\beta(T-s)$ ограничена на интервале $[T_1,T]$, где $\widetilde{K}_1+K_0-K_0e^{K_2(T-s)} = 0$

$e^{K_2(T-T_1)} = \frac{\widetilde{K}_1+K_0}{K_0}$

$K_2(T-T_1) = \ln\left(1+\frac{\widetilde{K}_1}{K_0}\right)$ для всех $\widetilde{T}_1 < T_1$ функция $\beta(T-s)$ ограничена при $s > T_1$



Практика:

$\frac{\partial u}{\partial s}+\frac{\partial u(s,x)}{\partial s}+u\left(s,x\right)\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0,\ u\left(T,x\right)=u_0\left(x\right)$

$d\xi=u\left(\vartheta,\xi\left(\vartheta\right)\right)d\vartheta+dw$

$\nu\left(s,x\right)=Eu_0\left(\xi_{s,x}\left(T\right)\right)$

$\frac{\partial\nu}{\partial s}+u\left(s,x\right)\frac{\partial\nu}{\partial x}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2\nu}{\partial x^2}=0$

$\nu\left(s,x\right)\equiv u\left(s,x\right)$

$\begin{cases} d\xi= & u\left(\vartheta,\xi\left(\vartheta\right)\right)+du\\ u\left(s,x\right)= & Eu_0\left(\xi_{s,x}\left(T\right)\right)\end{cases}$

$\frac{\partial u}{\partial s}+\left(x+u\left(s,x\right)\right)\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{2}u^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0$

$d\xi=\left[\xi\left(\vartheta\right)+u\left(\vartheta,\xi\left(\vartheta\right)\right)\right]d\vartheta+u\left(\vartheta,\xi\left(\vartheta\right)\right)dw$

$u\left(s,x\right)=E\sin\left(\xi_{s,x}\left(T\right)\right)$

$\frac{\partial u}{\partial s}+4x\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{x^2}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\cos xu+\sin x=0$

$u\left(T,x\right)=sin\left(x\right)$

$\frac{\partial u}{\partial s}+a\left(x\right)\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{2}A^2\left(x\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+c\left(x\right)u=0$

$u\left(T,x\right)=u_0\left(x\right)$

$d\xi=a\left(\xi\left(\vartheta\right)\right)d\vartheta+A\left(\xi\left(\vartheta\right)\right)dw\left(\vartheta\right),\xi\left(s\right)=x$

$d\eta=c\left(\xi\left(\vartheta\right)\right)\eta\left(\vartheta\right)d\vartheta,\eta\left(s\right)=1$

$\eta\left(0\right)=\exp\int_s^{\vartheta}c\left(\xi\left(t\right)\right)dt$

$u\left(s,x\right)=E\eta\left(T\right)u_0\left(\xi_{s,x}\left(T\right)\right)=Ee^{\int_s^T c(\xi(\vartheta))d\vartheta}u_0\left(\vartheta_{s,x}\left(T\right)\right)$

$c=0$

$d\xi=4\xi\left(\vartheta\right)d\vartheta+\xi\left(\vartheta\right)dw\left(\vartheta\right)$

$d\eta=cos\left(\xi\left(\vartheta\right)\right)\eta\left(\vartheta\right)d\vartheta$

$u\left(s,x\right)=Ee^{\int_s^T cos(\xi(\vartheta))d\vartheta}\cdot sin\left(\xi_{s,x}\left(T\right)\right)$

$\frac{\partial u}{\partial s}+4x\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{x^2}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+cosxu+x=0$

$\frac{\partial u}{\partial s}+a\left(x\right)\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{2}A^2\left(x\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+f\left(x\right)=0$

$u\left(T,x\right)=u_0\left(x\right)$

$d\xi=a\left(\xi\left(\vartheta\right)\right)d\vartheta+A\left(\xi\left(\vartheta\right)\right)dw\left(\vartheta\right),f\left(s\right)=x$

$du\left(\vartheta,\xi\left(\vartheta\right)\right)=\int_s^T\left(\frac{\partial u}{\partial\vartheta}+a\left(\xi\left(\vartheta\right)\right)\frac{\partial u(\vartheta,\xi(\vartheta))}{\partial x}+\frac{1}{2}A^2\left(\xi\left(\vartheta\right)\right)\frac{\partial^2 u(\vartheta,\xi(\vartheta))}{\partial^2 x^2}+f\left(\xi\left(\vartheta\right)\right)-f\left(\xi\left(\vartheta\right)\right)\right)d\vartheta+\int_s^T A\frac{\partial u}{\partial x}dw$

$E\left(u\left(T,\xi\left(T\right)\right)\right)-u\left(s,x\right)=-E\left[\int_s^T f\left(\xi\left(\vartheta\right)\right)d\vartheta\right]$

$u\left(s,x\right)=E\Big[u_0\left(\xi\left(T\right)\right)+\int_s^T f\left(\xi\left(\vartheta\right)\right)d\vartheta\Big]$

$\frac{\partial u}{\partial s}+a\left(x\right)\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{2}A^2\left(x\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+c\left(x\right)u+f\left(x\right)=0$

$u\left(s,x\right)=E\left[\eta\left(T\right)u_0\left(\xi_{s,x}\left(T\right)\right)+\int_s^T\eta\left(\vartheta\right)f\left(\xi_{s,x}\left(\vartheta\right)\right)d\vartheta\right]$

$d\left[u\left(\vartheta,\xi\left(\vartheta\right)\right)\eta\left(\vartheta\right)\right]=du\left(\vartheta,\xi\left(\vartheta\right)\right)\cdot\eta\left(\vartheta\right)+u\left(\vartheta,\xi\left(\vartheta\right)\right)d\eta$

$d\left[\gamma\left(\vartheta\right)\eta\left(\vartheta\right)\right]$

$d\gamma=q\gamma\left(\vartheta\right)d\vartheta+Q\gamma\left(\vartheta\right)dw\left(\vartheta\right)$

$d\eta=c\eta\left(\vartheta\right)d\vartheta+c\eta\left(\vartheta\right)dw\left(\vartheta\right)$

$d\left(\gamma\left(\vartheta\right)\eta\left(\vartheta\right)\right)=\eta\left(\vartheta\right)d\gamma\left(\vartheta\right)+\gamma\left(\vartheta\right)d\eta...$

$d\left(u\left(\vartheta,\xi\left(\vartheta\right)\right)\eta\left(\vartheta\right)\right)=\left(\frac{\partial u}{\partial\xi}+a\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{2}A^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)\eta\left(\vartheta\right)+uc\left(\xi\left(\vartheta\right)\right)\eta\left(\vartheta\right)d\vartheta+...=\left(\frac{\partial u}{\partial\vartheta}+a\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{2}A^2\frac{\partial^2 u}{\partial x}+cu\right)\eta\left(\vartheta\right),\ d\vartheta+$ мартингал

$$E\left[\eta\left(T\right)u_0\left(\xi_{s,x}\left(T\right)\right)-u\left(s,x\right)\right]=E\int_s^T\eta\left(\vartheta\right)f\left(\xi\left(\vartheta\right)\right)d\vartheta$$
$$u\left(s,x\right)=E\left[\eta\left(T\right)u_0\left(\xi\left(T\right)\right)+\int_s^T\eta\left(\vartheta\right)f\left(\xi\left(\vartheta\right)\right)d\vartheta\right]$$
$$\eta\left(\vartheta\right)=\exp\int_s^{\vartheta}c\left(\xi\left(\vartheta_1\right)\right)d\vartheta_1$$
$$d\xi=4\xi\left(\vartheta\right)d\vartheta+\xi\left(\vartheta\right)dw\left(\vartheta\right)$$
$$d\eta=cos\left(\xi\left(\vartheta\right)\right)\cdot\eta\left(\vartheta\right)d\vartheta$$
$$u\left(s,x\right)=E\left[e^{\int_s^T cos\left(\xi\left(\vartheta\right)\right)d\vartheta}\cdot\sin\left(\xi\left(T\right)\right)+\int_s^T e^{\int_s^T cos\left(\xi\left(\vartheta_1\right)\right)d\vartheta_1}\cdot\xi\left(\vartheta\right)d\vartheta\right]$$