1 Вероятностное пространство. Случайные величины, дискретные и непрерывные. Фукнкции распределения.

Вероятностное пространство – это тройка $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, где

1. Ω - множество (описывает **пространство событий**). Элементы будут обозначаться $\omega \in \Omega$
2. $\mathcal{F}$ - σ**-алгебра подмножеств** множества Ω
3. P - **вероятностная мера**, $P(\Omega)=1$

σ-алгебра замкнута относительно операций счетного объединения и пересечения. Также, если $\omega \in F \Rightarrow \bar{\omega} \in \mathcal{F}$ (содержит дополнение к событию).

Эксперимент: бросаем кубик: $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_6\}$ ω_i - на верхней грани *i* точек. На грани кости четное число: $C = \{ \text{ выпало четное число} \} = \omega_2 + \omega_4 + \omega_6$

$P(A+B) = P(A) + P(B)$, если события **несовместны,** т.е. $AB = \varnothing$. $0 \le P(A) \le 1$. Если же события **совместны**, то вероятность $P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB)$

События называются **независимыми** если вероятность их произведения равна произведению вероятности: $P(AB) = P(A)P(B)$

$P\left(\sum_{k=1}^n A_k\right) = 1 - \prod_{k=1}^n (1 - P(A_k))$ если события A_k независимы.

Случайная величина - это отображение $\xi : \Omega \to \mathcal{R}$ или Z**.** Для случайной величины при непрерывном отображении должна быть **измеримость** относительно борелевской σ-алгебры на $\mathcal{R}$: $\{\omega : \xi(\omega) \le x\} \in \mathcal{F}$. $\xi(\omega) \in (-\infty, x]$. Из элемента сигма-алгебры попадаем в сигма-алгебру.

Вероятноть $P(\omega : \xi(\omega) \le x)$ - **функция распределения СВ.** СВ полностью определяется функцией распределения.

Если функция распределения *F* дифференцируема, то более наглядное представления о СВ дает **плотность вероятности СВ**: $f(x) = F'(x)$.

Функция распределения любой СВ обладает следующими свойстваами:

1. $F(x)$ определена на всей числовой прямой *R*
2. $F(x)$ не убывает, т.е. если $x_1 \le x_2$, то $F(x_1) \le F(x_2)$
3. $F(-\infty) = 0, F(+\infty) = 1,$ либо $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0, \lim_{x \to +\infty} F(x) = 1$
4. $F(x)$ непрерывна справа, т.е. $\lim_{x \to -x_0} F(x) = F(x_0)$

Если ξ - это дискретная СВ, принимающая значения $x_1 < x_2 < \ldots < x_i < \ldots$ с вероятностями $p_1 < p_2 < \ldots < p_n < \ldots$,то таблица вида:

ξ	x_1	x_2	…	x_i
p	p_1	p_2	…	p_i

называется **распределением дискретной СВ.**

У дискретной СВ функция распределения ступенчатая.

Если функция распределения непрерывна, то СВ называется **непрерывной СВ**.

Примеры:

случайное время обслуживания - непрерывная случайная величина, для которой функция распределения $F(t)=\begin{cases}1-e^{-\lambda t} & t\geq 0\\ 0 & t<0\end{cases}$, $f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, t\geq 0\\ 0, t<0\end{cases}$

Вероятность нахождения в состоянии k $p_k = P\{X=k\} = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$

2 Числовые характеристики случайных величин, производящие и характеристические функции.

Рассмотрим дискретную СВ $x_1, x_2, \ldots,$ с вероятностями $p_1, p_2, \ldots,$ т.е. $p_k = P\{\xi(\omega)=k\}$а также непрерывную СВ с функцией распределения $F(x)$ и плотностью $f(x)$.

Математическое ожидание: $EX = \sum_{k=1}^{n} x_k p_k = \sum X(\omega_k) P\{X(\omega_k)=x_k\}$ или

$E\xi = \int_\Omega \xi(\omega)P((d\omega)) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} xdF(x)$

Свойства:

1. $E[a\xi + b\eta] = aE\xi + bE\eta$ - линейность
2. $Ec = c, c - const$
3. Если СВ η является функцей СВ ξ, то $E\eta = Ef(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(y)p_\xi(y)dy$

Если СВ ξ, η независимы, то $E\xi E\eta = E[\xi\eta]$.

Дисперсия $D\xi = E[\xi - E\xi]^2 = E\xi^2 - [E\xi]^2$.

$D(\xi+\eta) = E[\xi+\eta-E[\xi+\eta]]^2 = E(\xi+\eta)^2 - [E(\xi+\eta)]^2 = E\xi + E\eta^2 + 2E[\xi\eta] - [E\xi]^2 - [E\eta]^2 -$
$- 2E\xi E\eta = D\xi + D\eta$

k **-м начальным моментом** случайной велчины X, где $k \in N$, называется величина $v_k = E\left[X^k\right]$

k **-м центральным моментом** случайной величины X называется величина $\mu_k = E\left[(X-EX)^k\right]$

Производящая функция $\phi_\xi(z) = Ez^\xi = \sum z^k p_k$, $\phi_\xi(z) = \int_\Omega z^{\xi(\omega)}P(d\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} z^\xi f(x)dx$

Распределение вероятностей однозначно определяется своей производящей функцией: $p_k = \frac{1}{k!}\frac{d^k}{dz^k}\phi(z)|_{z=0}, k=0,1,2,\ldots$

Производящая функция позволяет вычислить МО $\phi'(z)|_{z=1} = E\xi$ и Дисперсию $D\xi = \phi''_\xi(1) + \phi'_\xi(1) - \phi'_\xi(1)^2$

Характеристическая функция $\psi_\xi(u) = Ee^{iu\xi} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{iux} f(x)dx = \sum_{k=0}^{\infty} e^{iuk} p_k$

МО $\psi'(u)|_{u=0} = \int_{-\infty}^{\infty} ixe^{iux} f(x)dx|_{u=0} = i\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = iE\xi$??? $= -iE\xi$ Дисп. $D\xi = -\psi''(0) + (\psi'(0))^2$

Пример: Пуассоновское распределение: $P(\xi=k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$, МО $Ep_k = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda}\lambda \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = \lambda e^{-\lambda} e^{\lambda} = \lambda$

Дисперсия

$Dp_k = E(p_k)^2 - (Ep_k)^2$,

$$E(p_k)^2 = Ep_k(p_k-1) + Ep_k = \sum_{k=1}^{\infty} k\cdot(k-1)\cdot e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} + \lambda = \lambda^2 e^{-\lambda}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^{k-2}}{(k-2)!} + \lambda = \lambda^2 + \lambda$$

Таким образом $Dp_k = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda$

Либо, через производящую функцию:

$$\varphi_\xi(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} z^k = e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\lambda z)^k}{k!} = e^{-\lambda}e^{\lambda z} = e^{\lambda(z-1)}$$

$$\psi_\xi(u) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{iuk} e^{-\lambda}\frac{(\lambda)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} e^{iuk-\lambda}\frac{(\lambda)^k}{k!} = e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(e^{iu}\lambda)^k}{k!} = e^{-\lambda+e^{iu}\lambda} = e^{\lambda(e^{iu}-1)}$$

$$\frac{d\phi_\xi(z)}{dz}\Big|_{z=1} = \frac{d}{dz}e^{\lambda(z-1)}\Big|_{z=1} = \lambda e^{\lambda z-\lambda}\Big|_{z=1} = \lambda = E\xi$$

Вторая производная $\frac{d^2\phi_\xi(z)}{dz^2} = \lambda^2 e^{\lambda z-\lambda}$, тогда $\phi''_\xi(1) + \phi'_\xi(1) - \phi'_\xi(1)^2 = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda$

Экспоненциальное распределение $f(t) = \begin{cases}\lambda e^{-\lambda t}, t \ge 0\\ 0,\ t<0\end{cases}$

МО $E\xi = \int_0^{\infty}\lambda t e^{-\lambda t}dt = \lambda\int_0^{\infty} t e^{-\lambda t}dt = \begin{vmatrix} u=t & dv = e^{-\lambda t}dt \\ du = dt & v = -\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda t}\end{vmatrix} = -te^{-\lambda t}\Big|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} e^{-\lambda t}dt = -\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda t}\Big|_0^{\infty} = \frac{1}{\lambda}$

Дисп

$$D\xi = E\left[\xi^2\right] - \left[E\xi\right]^2, E\left[\xi^2\right] = \lambda\int_0^{\infty} t^2 e^{-\lambda t}dt = \begin{vmatrix} u=t^2 & dv = e^{-\lambda t}dt \\ du = 2t\,dt & v = -\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda t}\end{vmatrix} =,$$

$$= \lambda\left(-\frac{t^2}{\lambda}e^{-\lambda t}\Big|_0^{\infty} + \frac{2}{\lambda}\int_0^{\infty} te^{-\lambda t}dt\right) = 2\int_0^{\infty} te^{-\lambda t}dt = (\text{см. пред.}) = \frac{2}{\lambda^2}$$

Таким образом $D\xi = E\left[\xi^2\right] - \left[E\xi\right]^2 = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}$

3 Экспоненциальный, гиперэкспоненциалный, эрланговский законы распределения и их числовые характеристики.

Экспоненциальное распределение – непрерывная СВ, имеет показательное распределение с параметром $\lambda > 0$,

Функция распределения : $P(\xi \le t) = \begin{cases}1 - e^{-\lambda t}, t\ge 0\\ 0, t<0\end{cases}$,

плотность $f(t) = \begin{cases}\lambda e^{-\lambda t}, t \ge 0\\ 0, t<0\end{cases}$ МО $E\xi = \frac{1}{\lambda}$ Дисп $D\xi = \frac{1}{\lambda^2}$ (вычисляются в предыдущем вопросе)

Гиперэкспоненциальная СВ: $\xi = \sum_{k=1}^{n} \tau_k$ где τ_k - независимые экспоненциальные распределения СВ с параметрами λ_k.

Плотность: $f_\xi(t) = \begin{cases} \sum_{k=1}^{m} a_k \lambda_k e^{-\lambda_k t}, t \geq 0 \\ 0, t < 0 \end{cases}$, где $\alpha_i \lambda_i \geq 0, i = 1..m$,

МО $E\xi = \sum_{l=1}^{m} \frac{a_l}{\lambda_l}$, Дисперсия распределения $D\xi = 2\sum_{l=1}^{m} \frac{\alpha_l}{\lambda_l^2} - \left(\sum_{l=1}^{m} \frac{\alpha_l}{\lambda_l} \right)^2$

Распределение Эрланга k-го порядка – распределение, описывающее непрерывную СВ X, принимающую положительные значения в интервале $(0;\infty)$ и представляюущщю собой сумму k независимых СВ.

$F_k(x) = 1 - e^{-\lambda x} \sum_{i=0}^{k-1} \frac{(\lambda x)^i}{i!}$??? правильная ли формула

$f(x) = \lambda \frac{\lambda^{k-1} x^{k-1}}{(k-1)!} e^{-\lambda x}, x \geq 0$,

$E\xi = \frac{k}{\lambda}$, $D\xi = \frac{k}{\lambda^2}$.

где $\lambda > 0$ и натуральное число k – параметр распределения Эрланга.
??? Как расисать

При $k = 1$ распределение эрланга вероятностей экспоненциаьлное, а при $k \to \infty$ приближается к нормальному распределению.

Распределение Эрланга является двупараметрическим (с параметрами λ и k), оно может использоваться для аппроксимации распределений по двум первым моментам.

4 Преобразования Лапласа для распределений из вопроса 3.

Преобразование Лапласа плотности распределения $f(x)$ неотрицательной непрерывной СВ ξ называется функция. $F(s) = \int_0^\infty e^{-sx} f(x) dx$, $s > 0$.

Плотность распределения однозначно определяется своим преобразованием Лапласа. Дифференцируя преобразование Лапласа по s в точке s=0, можно определить моменты СВ:

$(-1)^k Ex^k = \frac{d^2 Fs}{ds^k} | s = 0$

Преобразование Лапласа F(s) суммы $x = x_1 + x_2 + \ldots + x_n$ независимых СВ равно произведению преобразований Лапласа слагаемых: $F(s) = \prod_{k=1}^{n} F_k(s)$

Заметим, что $\frac{1}{\lambda + s} = \frac{1}{1 + \frac{s}{\lambda}} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left(\frac{s}{\lambda} \right)^k$???

$E\xi = \frac{s}{\lambda}, E\xi^k = \frac{k!}{\lambda k}$??? k или lamda???

Заметим, что $\lambda = \frac{1}{E\xi} \to$ среднее число заявок за единицу времени или **интенсивность потока**.

Свойства преобразования Лапласа

1. $L(af + bg) = aLf + bLg$, где a, b - вещественные числа, а f, g - функции для которых определено преобразование Лапласа.
2. $\frac{d}{dt} f(t) = sF(s) - f(0)$

Примеры преобразований Лапласа:

1. $f(t) = 1 \Rightarrow \ 1 = \int_0^\infty e^{-st} dt = -\frac{1}{s} e^{-st} \cdot |_0^\infty = \frac{1}{s}$
2. $f(t) = t \Rightarrow \ f(t) = \int_0^\infty t e^{-st} dt = \begin{vmatrix} u = t & dv = e^{-st} dt \\ du = dt & v = -\frac{1}{s} e^{-st} \end{vmatrix} = \frac{1}{s} \int_0^\infty e^{-st} dtr = \frac{1}{s^2}$
3. $f(t) = e^{-\lambda t} \Rightarrow \ f(t) = \int_0^\infty e^{-st} e^{-\lambda t} dt = \int_0^\infty e^{-(s+\lambda)t} dt = \frac{1}{\lambda + s}$

Для тригонометрии нужно использовать формулы Эйлера.

$z = \cos\alpha + i\sin\alpha z = e^{i\alpha} \overline{z} = e^{-i\alpha} = \cos\alpha - i\sin\alpha, \quad \cos\alpha = \frac{e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}}{2} \sin\alpha = \frac{e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}}{2i}$

1. $f(t) = \sin(\alpha t) \Rightarrow$

$$\widehat{f}(t) = \int_0^\infty e^{-st} \sin\alpha\tau dt = \int_0^\infty e^{-st} \frac{e^{i\alpha t} - e^{-i\alpha t}}{2i} dt = \left[\frac{1}{s - i\alpha} - \frac{1}{s + i\alpha}\right] \frac{1}{2i} = \frac{s + i\alpha - s + i\alpha}{(s^2 + \alpha^2)2i} = \frac{\alpha}{s^2 + \alpha^2}$$

2. $f(t) = \cos(\alpha t) \Rightarrow \ \frac{s}{s^2 + \alpha^2}$

3. $f(t) = \phi'(t) \Rightarrow \ f(t) = \int_0^\infty e^{-st} \frac{d}{dt} \phi(t) dt \begin{vmatrix} u = e^{-st} & dv = \phi'(t) dt \\ u = -se^{-st} & v = \phi(t) \end{vmatrix} = -\phi(0) + s\int_0^\infty e^{-st} \phi(t) dt = -\phi(0) + s\,\widehat{\phi(t)}$

Экспоненциальное распределение: $f(t) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t}, t \ge 0 \\ 0, t < 0 \end{cases}$

По свойству 1, $\hat{f}(s) = \int_0^\infty e^{-st} \lambda e^{-\lambda t} dt = \lambda \int_0^\infty e^{-t(s+\lambda)} dt = -\frac{\lambda}{s + \lambda} e^{-t(s+\lambda)} |_0^\infty = \frac{\lambda}{s + \lambda}$

Гиперэкспоненциальное распределение: используя линейность, $\hat{f}(s) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \frac{\lambda_i}{\lambda_i + s}$

Эрланговское распределение:

$$\hat{f}(s) = \int_0^\infty e^{-sx} \lambda \frac{\lambda^{k-1} x^{k-1}}{(k-1)!} e^{-\lambda x} dx = \frac{\lambda^k}{(k-1)!} \int_0^\infty e^{-x(s+\lambda)} x^{k-1} dx =$$

$$\begin{vmatrix} u = x^{k-1} & dv = e^{-x(s+\lambda)} \\ du = (k-1) x^{k-2} dx & v = -\frac{1}{s+\lambda} e^{-x(s+\lambda)} \end{vmatrix} = \frac{\lambda^k}{(k-1)!} \left(-\frac{1}{s+\lambda} x^{k-1} e^{-x(s+\lambda)} |_0^\infty + \frac{k-1}{s+\lambda} \int x^{k-2} e^{-x(s+\lambda)} dx \right)$$

Выполнив интегрирование по частям k раз, получим $\left(\frac{\lambda}{\lambda+s}\right)^k$

5 Пуассоновский процесс и его свойства

Целочисленный пуассоновский точечный процесс $N(t), 0 \le t < +\infty$ определяется тремя свойствами:

1. **Ординарность** - вероятность наступления более одного события на любом малом интервале времени Δt имеет более высокий порядок малости, чем Δt. Поэтому для него выполняются соотношения $P\{N(t+\Delta t)-N(t)=1\}=P\{N(\Delta t)=1\}=\nu\Delta t+o(\Delta t)$ и $P\{N(t+\Delta t)-N(t)>1\}=P\{N(\Delta t)>1\}=o(\Delta t)$, ν - некоторая положительная величина, имеющая размерность, обратную времени. Следствием этих двух соотношений является равенство $P\{N(t+\Delta t)-N(t)=0\}=P\{N(\Delta t)=0\}=1-\nu\Delta t+o(\Delta t)$
2. **Стационарность** - его статистические характеристики не изменяются при сдвиге всех точек вдоль оси времени на произвольную Δ
3. **Независимость** (отсутствие последействия) во все моменты времени (периоды) - имеет независимые приращения (значения) на неперекрывающихся интервалах времени.

$p(x(t)=k)=e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^k}{k!}$,

МО $E\xi(t)=\lambda t$, Дисперсия $D(\xi(t))=\lambda t$

Производящая функция $\phi_N(z)=\sum_{k=0}^{\infty} z^k e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^k}{k!}=e^{-\lambda t}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(z\lambda t)^k}{k!}=e^{-\lambda t}e^{z\lambda t}=e^{-\lambda t(1-z)}$

Характеристическая функция:

$$\psi_\xi(u)=\sum_{k=0}^{\infty} e^{iuk}e^{-\lambda}\frac{(\lambda)^k}{k!}=\sum_{k=0}^{\infty} e^{iuk-\lambda}\frac{(\lambda)^k}{k!}=e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(e^{iu}\lambda\right)^k}{k!}=e^{-\lambda+e^{iu}\lambda}=e^{\lambda\left(e^{iu}-1\right)}$$

6 Марковские процессы, определения и свойства.

Из Moodle:

Пусть N –множество натуральных чисел, T > 0. Обозначим B(R) пространство измеримых ограниченных борелевских функций заданных на вещественной оси R, M(R) - пространство ограниченных борелевских мер, определенных на борелевской σ-алгебре $\mathcal{B}_R$. Для заданной случайной величины ξ ∈ R, функции f ∈ B(R) и σ-подалгебры $\mathcal{G}$ σ-алгебры $\mathcal{F}$ пусть $E\left[f(\xi)|\mathcal{G}\right]$ обозначает условное математическое ожидание случайной величины η = f(ξ) относительно $\mathcal{G}$.

Случайная величина ξ ∈ R порождает вероятностную меру μ_ξ, определенную соотношением $\mu_\xi(G)=P\{\omega:\xi(\omega)\in G\}$ для любого борелевского подмножества $G\in\mathcal{B}_R$. Пусть $\mathcal{F}_\theta$ обозначает σ-алгебру, порожденную случайными величинами ξ(θ), θ ∈ [s, T]. Случайный процесс ξ(t) ∈ R **называется Марковским случайным процессом**, если для любой измеримой ограниченной скалярной функции $f(x)$ справедливо равенство

$$E\left[f(\xi(t))|\mathcal{F}_\theta\right]=E\left[f(\xi(t))|\xi(\theta)\right] \qquad (1.1)$$

Для любого $G\in\mathcal{B}_R$ соотношение $P(s,x,t,G)=P\{\xi(t)\in G|\xi(s)=x\}$ определяет переходную вероятность марковского процесса $\xi(t)$. Марковское свойство процесса $\xi(t)$

влечет за собой справедливость **уравнения Чепмена-Колмогрова**

$$P(s,x,t,G)=\int_R P(s,x,\tau,dy)P(\tau,y,t,G) \tag{1.2}$$

Мы можем говорить о дискретном и непрерывном времени , а также о дискретном и непрерывном состоянии (пространство состояний может быть непрерывным).

Марковский процесс называют однородным по времени, если

$$P(s,x,t,G)=P(t-s,x,G)$$

В случае, когда множество значений процесса $\xi(t)$ - дисретное множество V, например V={1,2,…,d$_1$} или V – множество целых чисел, случайный процесс $\kappa(t)$ со значением в V называют **однородной по времени** марковской цепью, если справедливы соотношения

$$P\{\kappa(t+h)=l\mid\nu(t)=l\}=1-q_1h+o(h),$$

$$P\{\nu(t+h)=m\mid\nu(t)=l\}=q_{lm}h+o(h),\text{где } m\neq l \text{ и } q_l=\sum_{m\neq l}q_{lm}.$$

Примером **марковской цепи с непрерывным временем** и **дискретным множеством состояний** $X=N$ является пуассоновский процесс $N(t)$ с интенсивностью λ, поскольку

$$P\{N(t+h)=l+1\mid N(t)=l\}=\lambda h+o(h),$$

$$P\{N(t+h)=l\mid N(t)=l\}=1-\lambda h+o(h)$$

Для заданной марковской цепи $\kappa(t)$ обозначим $p_{lm}(h)=P(\kappa(t+h)=m\mid\kappa(t)=l)$ ее переходную вероятность и пусть $P(h)$ - матрица с элементами $p_{lm}(h)$.

Если марковская цепь задана в терминах q_{lm}, то важно иметь ввиду, что ее переходные вероятности задаются соотношением

$$p_{lm}=\frac{q_{lm}}{q_l}=\frac{q_{lm}}{\sum_{m\neq 1}q_{lm}}$$

7 Переходные вероятности, уравнение Чепмена-Колмогорова ???

Переходная вероятность Марковского процесса выражается формулой
$p(s,x,t,A)=P\{\xi(t)\in A\mid\xi(s)=x\}$, где $s,t\in[0,T], x\in B, A$- борелевское подмножество B.

Марковское свойство при этом описывается **уравнением Чепмена-Колмогоова**,
$p(s,x,t,A)=\int_{-\infty}^{+\infty}p(s,x,\theta,dz)p(\theta,z,t,A)$

Плотность переходной вероятности: $p(s,x,t,y)$ - это положительная функция,
$p(s,x,t,A)=\int_A p(s,x,t,y)\,dy$

при этом уравнение Чепмена-Колмогорова имеет вид
$p(s,x,t,y)=\int_{-\infty}^{+\infty}p(s,x,\theta,z)p(\theta,tz,t,y)dz$

Борелевская сигма-алгебра - минимальная сигма-алгебра, содержащая все открытые (каждая точка входит вместе с некоторой окрестностью) подмножества топологического пространства (также она содержит и все замкнутые, эти подмножества также называются

Борелевыми). Борелевская сигма-алгебра обычно выступает в роли сигма-алгебры случайных событий вероятностного пространства. В борелевской сигма-алгебре на прямой или на отрезке содержатся многие « простые» множества: все интервалы, полуинтервалы, отрезки и их счётные объединения. Борелевской сигма-алгеброй в R называется самая маленькая среди всех возможных σ-алгебр, содержащих любые интервалы на прямой. Если не оговорено иное, в качестве топологического пространства выступает множество вещественных чисел.

8 Марковские цепи с дискретным временем, способы их описания (матрицы, графы)

Пусть $V = \{x_1,\dots,x_n\}$, тогда $p_k(t) = P(\nu(t) = k)$, где ν - состояния $p_{ij} = P(\nu(k+1) = j \mid \nu(k) = i)$.

Марковская цепь с дискретным временем

$E[\xi(T) \mid \mathrm{F}_t] = E(\xi(T) \mid \xi(t))$ в данном случае

$E\left[\nu^{(k)} \mid \nu(0), \nu(1), \dots, \nu(k-1)\right] = E\left[\nu^{(k)} \mid \mathrm{F}_{k-1}\right] = E\left[\nu^{(k)} \mid \nu(k-1)\right]$

$P(s,x,y,B) = \int p(s,x,\theta,dz) p(\theta,z,t,B)$ - **уравнение Чепмена-Колмогорова** для марковской цепи с дискретным временем. $\Rightarrow$ $p_{kj}^{(m)} = \sum_{i=1}^{n} p_{ki}^{(m-1)} p_{ij}^{1} = \sum_{i=1}^{n} p_{ki}^{(m-l)} p_{ij}^{(l)}$, $m = 1,2,3,\dots$

??? Надо добавить здесь – что такое theta, B, dz и т.д.

В матричном виде уравнение Чепмена-Колмогорова имеет вид $\mathrm{P}^m = \mathrm{P}^{m-1}\mathrm{P}$ или $\mathrm{P}^m = \mathrm{P}^{m-l}\mathrm{P}^l$

Вывод: Чтобы задать марковскую цепь с дискретным временем, достаточно задать ее начальное состояние $\nu = (\nu_1, .. \nu_n)$ (если цепь имеет n последовательных состояний) и переходную вероятность $p_{ik}^{(1)}$ за один шаг. При этом, состояние марковской цепи за m шагов задается соотношением $p^{(m)} = \nu \mathrm{P}^m$ или $p_j^{(m)} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \nu_i p_{ik} \cdot p_{kj}^{(m-1)}$

Не входит в вопрос, но на всякий случай:

Состояние марковской цепи можно разбить на **классы**

Если состояние i и j таковы, что $p_{ij} > 0$, $p_{ji} > 0$, то эти состояния называются **сообщающимися**.

Если состояния i и j таковы, что $p_{ij}^{(n)} > 0$, $p_{ji}^{(n)} > 0$, то эти состояния называются **сообщающимися при некотором n**.

Будем называть класс C такой, что для всех $i, j \in C$ состояния i и j – сообщающиеся – **классом сообщающихся состояний.**

Класс называется **замкнутым**, если для $\forall i \in C$ и класса I, для элемента $j \in I$.??? Замкнутый класс состояний - это класс, из которого **нельзя выйти**.

Из того, что $p_{ij}^{(n-1)} > 0$ следует, что $j \in C$.

Утверждение: цепь Маркова с конечным числом состояний имеет хотя бы один замкнутый сообщающийся класс.

Состояние из незамкнутого класса, называется **несущественным** состоянием.

Состояние i называется **поглощающим**, если $p_{ii} = 1$.

Цепь Маркова называется **неприводимой**, если все ее состояния попадают в один замкнутый класс.

Состояние i из некоторого подкласса $i \in I$ называется **возвратным**, если событие и **невозвратным**, если событие

Теорема: состояние i является возвратным, если величина $f_i = P_i(X_n = i, \forall_n) = 1$ и невозвратно, если $f_i < 1$??? не наоборот

Множество состояний марковской цепи можно рассматривать как множество узлов некоторого графа.

Матрица P называется также **стохастической матрицей (переходная вероятность)**, т.к. она обладает свойством: $\sum_{j=1}^{n} p_{kj} = 1$

Рассмотрим $X_t, t = 1,2,\ldots$ - индексированное семейство СВ. Введем обозначения

$P(X_k = j \mid x_{k-1} = i) = p_{ij}^{(1)}$ за 1 шаг.

$P(X_k = j \mid X_{k-1} = i, X_{k-2} = i_{k-2},\ldots,X_0 = i_0) = p_{ij}^{(k)}$ - за k шагов.

Марковость: $P(X_k = j \mid X_0 = i_0,\ldots,X_{k-1} = i) = P(X_k = j \mid X_{k-1} = i)$

9 Марковские цепи с непрерывным временем, генератор марковской цепи и его свойства.

Существуют два способа задания МЦсНВ.

№1: *Q* – матрицы

класс Q-матриц – это класс матриц вида

$Q = \begin{pmatrix} q_{11} & \cdots & q_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ q_{n1} & \cdots & q_{nn} \end{pmatrix}$, обладающих следующими свойствами:

q_{ij} - непрерывная величина при $i \neq j$ $\sum_{i=1}^{n} q_{ij} = 0$??? В конспекте не видно – равно, а также какие индексы? или не равно, $q_{ij} = -\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq 0}}^{n} q_{ij} = 0$

Матрицы образуют алгебру M_n, это значит: $A, B \in M_n$ и $\alpha, \beta \in \Re$, то $\alpha A + \beta B \in M_n$

Марковское свойство для цепи с непрерывным временем опишем с помощью уравнения Чепмена-Колмогрова: $P(s,x,t,y) = \int_{-\infty}^{\infty} p(s,x,\theta,z)p(\theta,z,t,y)dz$, $p_{ij}(t) = \sum_{i=1}^{n} p_{ij}(t-s)p_{ij}(s)$ или $p_{ij}(t) = \sum_{k=1}^{n} p_{ij}(s)p_{ij}(t-s)$, если $0, j \in \forall = \{1,\ldots,n\}$???

Различные способы описания н.в.

1) $P\left(\xi(0)\right) = i_0, \xi(t_1) = i, \ldots, \xi(t_k - t_{k-1}) = i_{k-1}; \xi(t_m - t_{m-1}) = i = \mu_0\left(p_{i,0,i}(t), \ldots, p_{i,m-1,i}(t_m - t_{m-1})\right) = G$

??? почему индексы повторяются

и использыеем соотношение: $P(AB) = P(A/B)P(B)$ и выбираем последовательно в качестве собсобптеле вида $\{\xi(t_k - t_{k-1}) = i_k / \xi(t_{k-1}) = i_{k-1}\}$ получим требуемое соотношение, где $\mu_0 = P\{\xi(0) = i_0; P_{i_k -1,l}(t_k - t_{k-1}) = P(\xi(t_l) = i_k / \xi(t_{k-1}) = i_{k-1})\}$???

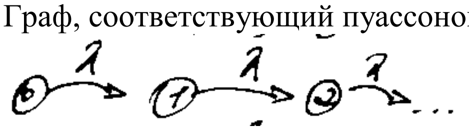
2) Нужно задать поведение переходной вероятности на малых интервалах времени. В качестве примера МЦ с НВ рассмотрим Пуассоновский процесс

Нужно задать поведение переходной вероятности на малых интервалах времени. В качестве примера марковской цепи с непрерывным временем рассмотрим пуассоновский процесс $N(t)$. Пусть $p_k(t) = P(N(t) = k)$, при этом $\sum_{k=0}^{\infty} p_k(t) = 1$

Кроме того приращения процесса $N(t)$ на пересечении интервалов независимы, т.е. $N(t+\Delta t) - N(t)$ и $N(s+\Delta S) - N(s)$ - независимые случайные величины.

При этом $P(N(t) = 0) = e^{-\lambda t}$, $P(N(t) = 1) = e^{-\lambda t}\lambda t$ если t мало, то $P(N(t) \geq 2) = o(t)$

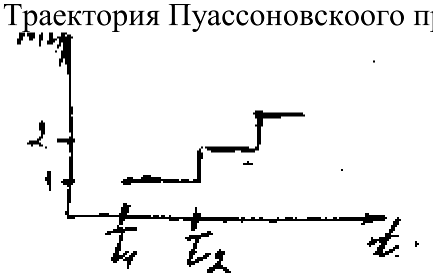
Граф, соответствующий пуассоновскому процессу имеет вид



и матрица Q имеет вид

$$Q = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & \lambda & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

Траектория Пуассоновскоого процесса имеет вид



Опишем поведение приращения пуассоновского процесса на малых временах.

$$P(N(t+\Delta t) - N(t) = k) = e^{-\lambda \Delta t}\frac{(\lambda \Delta t)^k}{k!}$$

$$P(N(t+\Delta t) - N(t) = 0) = e^{-\lambda \Delta t} = 1 - \lambda \Delta t + o(|\Delta t|)$$

$$P(N(t+\Delta t) - N(t) = 1) = e^{-\lambda \Delta t}\lambda \Delta t$$

$$P(N(t+\Delta t) - N(t) \geq 2) = o(\Delta t)$$

$$p_{ik}(t+\Delta t) = P(N(t+\Delta t) = k \mid N(t) = i)$$

Вычислим

$$p_{ik}(t+\Delta t) - p_{ik}(t) = \begin{cases} \lambda \Delta t + o(\Delta t), k = i+1 \\ o(\Delta t), k \geq 2 \end{cases}$$??? верны ли условия

т.к. $p_{ii}(t+\Delta t) - p_{ii}(t) = 1 - \lambda \Delta t + o(\Delta t)$

Вычислим $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{p_{ik}(t+\Delta t) - p_{ik}(t)}{\Delta t} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{1}{\Delta t}[\lambda \Delta t + o(\Delta t)] = \lambda$

$$p_i(t) = \sum p_{ki}(t)\, p_k(t)$$

Таким образом, соответствующее уравнение $p_i(t)$ будет иметь вид $\frac{dp_i(t)}{dt} = \lambda p_i(t)$

10 Прямые и обратные уравнения Колмогорова для марковской цепи.

Марковские цепи с дискретным временем.

$$P\left(\xi^{(1)} = j \mid \xi = i\right) = p_{ij}$$
$$P\left(\xi^{(2)} = k \mid \xi^{(0)} = i, \xi^{(1)} = j\right) = p \cdot P\left(\xi^{2} = k \mid \xi^{(1)} = j\right) = p_{ji}^{2}$$
$$p_{ik}^{2} = \sum_{j=1}^{n} p_{jk} p_{ij}$$

??? правильно ли поставлены индексы

$$Q = (q_{ik})_{i,k=1}^{n} \sum_{k} q_{ik} = 0$$

$$\sum_{k \neq i} q_{ik} > 0, i \neq k, q_{ik} \geq 0$$

$$P(t) = e^{tQ} = I + IQ + \frac{t^2 Q^2}{2!} + \ldots + \frac{t^n Q^n}{n!} + \ldots$$

$$|Q| = \max |q_{ik}|$$

$$|Q|^2 = \sum_{i,k} q_{ik} q_{kj} = QQ^T$$

$$|P(t)| \leq 1 + tk + \frac{t^2 k^2}{2!} = e^{tk}$$

$$P(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{P(t + \Delta t) - P(t)}{\Delta t} = Qe^{tQ} = QP(t)$$

$\frac{dP(t)}{dt} = P(t)Q$ **- прямое уравнение Колмогорова,** $P(0) = I$

$\frac{dP(t)}{dt} = Qp(t)$ **- Обратное уравнение Колмогорова**

11 Процессы рождения и гибели

Рассмотрим ПРГ, у которого интенсивность рождения λ, а гибели - μ

Генератор ПРГ имеет вид:

$$Q=\begin{pmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & 0 & \dots \\ \mu & -(\lambda+\mu) & \lambda & 0 & \dots \\ 0 & \mu & -(\lambda+\mu) & \lambda & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

Для того, чтобы найти матрицу переходных вероятностей, рассматриваем прямоуе уравнение Колмогорова

$$\frac{dP(t)}{dt}=P(t)Q\,,\;\; P(0)=I$$

При этом для элементов $p_{ij}(t)$ параметр $p(t)$ получаем следующую систему ОДУ:

$$\frac{dp_{1?}(t)}{dt}=-\lambda p_{11}+\mu p_{12}$$??? Индексы, $p_{11}(0)=1$

$$\frac{dp_{12}(t)}{dt}=-(\lambda+\mu)p_{12}(t)+\lambda p_{11}(t)+\mu p_{13}(t)$$ и т.д.

Напомним, что справедливо соотношение для МЦ с НВ

$$p_j=\sum_{i=1}^{n} p_i\, p_{ij}(t) \quad p_{ij}(t)=P\{x(t)=j\,/\,x(0)=i\}$$

зная $\frac{\partial}{p_{ij}(t)}$ можно найти уп. $\frac{\partial}{p_{i,j}(t)}$???

Рассмотрим еще один подход к выводу уравнения $\partial/p_{ij}(t)$

Поскольку мы имеем дино СМУ с непрерывнм временем, то при фиксированном зи $X(t)=0$, то

$$P(x(t+h)=i\,/\,x(t)=0)=1-(\lambda+\mu)h+o(h)$$
$$p(x(t+h)=i+1/\,x(t)=i)=xh+o(h)$$
$$p(x(t+h)=i-1/\,x(t)=0)=\mu h+o(h)$$
$$p(x(t+h)+i\,/\,x(t)>1)=o(h)$$

При этом прямое уравнение Колмогорова будет иметь вид

$\frac{dp_{ij}}{dt}=\lambda_{j-1}p_{ij-1}-(\lambda_i+\mu_i)p_{ij}+\mu_{j+1}p_{ij+1}$, при этом полагаем $p_{i0}(0)=1; p_{ij}(0)=0$, если $i\neq j$

Обратное уравнение Колмогрова для рассматриваемого процесса будет имеь вид

$$\frac{dp}{dt}=QP, P(0)=I$$

$$\frac{dp_{ij}(t)}{dt}=\lambda_i\, p_{i+1}(t)-(\lambda_i+\mu_i)p_{ij}(t)+\mu_0\, p_{i-1,j}$$

$$p_{i0}(0)=1, p_{ij}(0)=0, i\neq j$$

12 Системы массового обслуживания и их классификация

СМО **Системы массового обслуживания** – совокупность, включающая:

1. Входящий поток
2. Обслуживающее устройство
3. Выходящий поток

СМО могут быть **одноканальными** и **многоканальными** в зависимости от того, сколько обслуживающих устройств в внашей системе.

Входящий поток – поток, поступающих заявок – это случайный процесс с дискретным множеством состояний.

Опишем классификацию СМО: **классификация Кендалла**.

Пример: $M|N|n|r$. Это означает, что входящий поток - марковский, время обслуживания – экспоненциальное, n - число обслуживаемых устройств, r - длина очереди.

Входящий поток

Обозначим $\partial(t)$ - число заявок поступивших в систему за время t, пусть $\{\tau_k\}$ моменты прихода заявок.

Для того, чтобы описать входящий поток, введем в рассмотрение случайную величину $\xi_i = \tau_i - \tau_{i-1}$

И пусть $F_{\xi_1,\ldots\xi_n}(x_1,\ldots,x_k) = P\{\xi \le x_1,\ldots,\xi_n \le x_n\}$ /

Наряду с этим рассмотрим набор интервалов $[\partial, t_1),[t_1,t_2),\ldots,(t_{k-1},t_k)$ и обозначим ∂_k - число заявок, поступающих за время ξ_k, т.е. на интервале $[t_{k-1},t_k)$ и пусть G/μ_1 $M_k, t_1,\ldots,t_n$

$$P(\partial_1 = m_1,\ldots,\partial_k = m_k)$$

Свойства входящего потока

1. Отсутствуют последствия
2. **Стационарность**, т.е. число заявок за интервал $[\tau, t_1+\tau]$ совпадает с числом заявок на интервале $[0,t_1]$
3. **Ординарность**, $P(\partial(\Delta t) > 1) = o(\Delta t)$ т.е. заявки поступают по одной.

13 Одноканальные и многоканальные СМО с отказами

1. Одноканальные

Системой с отказами будем называть СМО без накопителей(без очереди).

Модель одноканальной с-мы с отказом является простейшая из всех моделей СМО. Входящий потом у этой системы описывается пуассоновским процессом с интенсивностью λ, те число принадлежащих заявок к моменту $t, \nu(t)$ имеет распределение $P(\nu(t)=k) = e^{-\lambda t}\dfrac{(\lambda t)^k}{k!}$

Обслуживание поступивших заявок происходит в течение случ.времени $\tau_{serv} = \tau_{otk}$ с экспоненциальным законом распредления с параметром μ, те

$P(\tau_{serv} < t) = \begin{cases} 1 - e^{-\mu t}, t >= 0 \\ 0,\ t > 0 \end{cases}$ и плотность этого распредления $P(t) = \mu \cdot e^{-\mu t}$

Рассмотренная система имеет 2 состояния:

0-в с-ме нет заявок(канал свободен)

1-в с-ме есть одна заявка(канал занят)

$\nu(t)$ -это состояние системы:

$P(\nu(t)=0) = p_0;\ P(\nu(t)=1) = p1;\ p_0(t) + p_1(t) = 1$ (1)

Уравнение Колмагорова для м.ц. имеет вид:

$$\frac{dp_0}{dt} = -\lambda p_0(t) + \mu p_1(t) \qquad (2)$$

$$\frac{dp1}{dt} = -\lambda p_1(t) + \mu p_2(t) \qquad (3)$$

Генератор этой м.ц. имеет вид:

$$\Theta = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda \\ \mu & -\mu \end{pmatrix}$$

$$\frac{d}{dt}\, p(t) = \Theta * p(t); \quad p(t) = e^{\Theta t}$$

Выражая $p_1(t)$ из (1) в виде: $p_1(t) = 1 - p_0(t)$ и подставляя в (2)=>

$$\frac{dp_0}{dt} = -\lambda p_1 + \mu(1 - p_0(t)) => \frac{dp_0}{dt} = -(\lambda + \mu)\, p_0(t) + \mu (4)$$

$$p_0(t) = \frac{\mu}{\lambda + \mu} + \frac{\lambda}{\lambda + \mu} \cdot e^{-(\lambda+\mu)t} \qquad (5)$$

14 Система M|M|1|∞ ОДУ для распределений

1. Марковский входящий поток
2. Экспоненциальное время обслуживания
3. 1 обслуживающее устройство – одноканальная система
4. Очередь бесконечна

Когда очередь бесконечна, говорят, что это – **система без потерь**.

1. – число заявок в системе в момент t. Это случайный процесс, принимающий значения из множества $V = \{0,1,2,...\}$

Обозначим $p_{ij}(\Delta)$ - вероятность перехода из состояния i в состояние j за время Δ (Δt).

По предположению, за время Δ с вероятностью $1 - \lambda\Delta + o(\Delta)$ не поступит ни одной заявки, а если $\nu(t) > 0$, то с вероятностью $1 - \mu\Delta + o(\Delta)$ ни одна заявка не будет обслужена.

Одна заявка может быть обслужена – тогда число заявок -1. Может прийти заявка, тогда +1.

$p_{00}(\Delta)$ - вероятность того, что за время Δ из 0 никто не пришел $= 1 - \lambda\Delta + o(\Delta), i, j = 0$

$p_{i,i+1} = \lambda\Delta + o(\Delta)$ $p_{i,i-1}(\Delta) = \mu\Delta + o(\Delta)$

Другими словами $\nu(t)$ - это процесс рождения-гибели (ПРГ).

Пусть $p_i(t) = p(\nu(t) = i)$

$$p_0(t+\Delta) = (1 - \lambda\Delta)p_0(t) + \mu p_1(t)\Delta + o(\Delta)$$

$$p_i(t+\Delta t) = (1 - (\lambda + \mu)\Delta)p_i(t) + \lambda\Delta p_{i-1}(t) + \mu\Delta p_{i+1}(t) + o(\Delta)$$

$\dfrac{p_i(t+\Delta) - p_i(t)}{\Delta} = -(\lambda + \mu)p_i(t) + \lambda p_{i-1}(t) + \mu p_{i+1}(t) + O(\Delta)$ теперь O а не o, т.к. на одну Δ .

Получили производную: $\dfrac{dp_i(t)}{dt} = -(\lambda + \mu)p_i(t) + \lambda p_{i-1}(t) + \mu p_{i+1}(t), \; i = 1,...$

$$\frac{dp_0(t)}{dt} = -\lambda p_0(t) + \mu p_1(t)$$

Дальше мы хотим решить эту систему уравнений

Для этой системы нам не хватает начальных условий

$p_i(0) = p_i$ уже без времени

Поскольку явно решить эту систему сложно, то можно предположить, что существует $\lim\limits_{t\to\infty} p_i(t) = p_i$

Мы сказали, что в правой части в пределе должны стоять константы, тогда их производные – нули. Тогда система приобретет вид

$$0 = -\lambda p_0 + \mu p_1$$

$$0 = -(\lambda + \mu)p_i + \lambda p_{i-1} + \mu p_{i+1}$$

Откуда получим получим, что $p_1 = \dfrac{\lambda}{\mu} p_0$

Обозначим $\rho = \dfrac{\lambda}{\mu}$

$$\mu p_2 = (\lambda + \mu)p_1 + \lambda p_0 = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 p_0 + \frac{\lambda}{\mu} p_0 + \frac{\lambda}{\mu} p_0$$

Отсюда $p_0 = \dfrac{1}{\sum_{i=0}^{\infty}\rho^i}$

При этом $\sum_{i=0}^{\infty}\rho^i < \infty$ если $\rho < 1$ и тогда $\dfrac{1}{1-\rho}$ - сумма убывающей геометрической прогрессией.

Следовательно, если $\rho < 1$, то $p_0 = (1-\rho)$ и $p_i = \rho^i(1-\rho)$

Мы нашли вероятность любого состояния в стационарном режиме

Итак, стационарное распределение числа заявок в системе $M/M/1/\infty$ является геометрическим распределением.

N - среднее число заявок в системе.

$$N = \sum_{i=1}^{\infty} p_i i = (1-\rho)\sum_{i=0}^{\infty} i\rho^i = \frac{\rho}{1-\rho}$$

средняя длина очереди - Q. $Q = N - 1$

$$Q = \sum_{i=1}^{\infty}(i-1)p_i = (1-\rho)\sum_{i=1}^{\infty}(i-1)\rho^i = (1-\rho)\left[\sum_{i=1}^{\infty} i\rho^i - \sum_{i=1}^{\infty}\rho^i\right] = \frac{\rho^2}{1-\rho}$$

$\nu(t)$ число заявок в системе

τ - время обслуживания.

Среднее время ожидания начала обслуживания $\dfrac{\rho}{\mu(1-\rho)} = \overline{w}$

среднее время пребывания в системе $\dfrac{1}{\mu(1-\rho)} = \overline{v}$

Параметр ρ называется **загрузкой системы** (или **пропускной способностью**).

15 Стационарные распределения для системы M|M|1|r

Тогда $p_i = \dfrac{1-\rho}{1-\rho^{r+2}}\rho^i \quad i = 0,..,r+1$

$$p_0 = \left[\sum_{i=0}^{n-1}\frac{\rho^i}{i!} + \frac{\rho^n}{n!}\frac{1-\left(\dfrac{\rho}{n}\right)^{r+1}}{\left(1-\dfrac{\rho}{n}\right)}\right]^{-1}$$

$$p_{W=0} = \sum_{i=0}^{n-1} p_i = p_0\sum_{i=0}^{n-1}\frac{\rho^i}{i!}$$

W **- среднее время пребывания в системе**

Вероятность потери заявки – когда заняты все системы и очередь задействована полностью? $P_{n+r} = \pi = \dfrac{\rho^{n+r}}{n!n^r}\cdot p_0$

16 Формулы Литтла

Пусть N - среднее число заявок в системе со стационарным средним временем пребывания в системе $\bar{v}$

Тогда $N = \lambda\bar{v}$

За время T в среднем в систему поступит λT заявок

При этом каждая заявка в среднем проводит в системе время $\bar{v}$. Среднее время пребывания в системе λT заявками равно $\lambda\bar{v}T$

При этом в каждый момент в системе находится $N = \dfrac{\lambda\bar{v}T}{T} = \lambda\bar{v}$

Аналогично, $Q = \lambda\cdot\overline{w}$ - эти формулы называются **формулами Литтла.** 17. Система M|M|n|r ОДУ для распределений если r конечно

18. Стационарные распределения для системы M|M|n|r

17 Система M|M|n|r ОДУ для распределений если r конечно

$$p_0 = \left[1+\rho+\ldots+\frac{\rho^n}{n!}+\frac{\rho^{n+1}}{n!n}+\ldots+\frac{\rho^{n+r}}{n!n^r}\right]^{-1}, \quad p_1 = \rho\cdot p_0,\ldots, \quad p_n = \frac{\rho^n}{n!}\cdot p_0,$$

$$p_{n+1} = \frac{\rho^{n+1}}{n!\cdot n}\cdot p_0,\ldots,_0, \quad p_{n+r} = \frac{\rho^{n+r}}{n!\cdot n^r}\cdot p$$

Среднее число заявок в системе $N = Q + \rho$

$$Q=\frac{\rho^{n+1}p_0}{n!n\left(1-\frac{\rho}{n}\right)}$$

Среднее число занятых каналов $\bar{k}=\rho$

Среднее время обслуживания, $w=\frac{Q}{\lambda}$, среднее время пребывания $\bar{v}=\frac{N}{\lambda}$

Число поступающих заявок - случайный процесс. Самый простой процесс - пуассоновский.

M|M|n|r

Интенсивность пуассоновского процесса - λ

Случайное время обслуживания заявки - τ - экспоненциальный закон распределения с параметром μ

Регламент обслуживания в очереди может быть разнообразным. Нетерпеливые заявки.

Показатели качества системы: среднее число заявок в очереди, среднее время ожидания, и т.д.

Для того, чтобы задать τ необходимо задать тройку (Ω, F, P), случайный процесс - отображение $\xi:\Omega\to R$

$\{\omega * \tau(\omega) <= t\} \in F$

$$\mathrm{P}(\tau <= t)=\begin{cases}1-e^{-\mu t} & t>=0\\ 0 & t<=0\end{cases}$$

$$E\tau = \int_{\Omega}\tau(\omega)P(d\omega)=\int_0^{\infty}t\mu e^{-\mu t}dt=\frac{1}{\mu}$$

Входящий поток: пуассоновский процесс.

$$p(\nu(t)=k)=e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^k}{k!},\ E\nu(t)=\lambda t$$

M|M|n|r - система массового обслуживания, входящий поток пуассоновский, время обслуживания - экспоненциально-распределенное, накопитель равен r, число каналов равно n. Таким образом, для задания системы, необходимо указать параметры распределения. На основе этих данных, необходимо получить самые разнообразные характеристики системы. Возникают экономические задачи.

TODO - т.к. преподаватель просила давать определение для каждой переменной или коэффициента в формуле, то нужно добавить в конец конспекта таблицу со всеми используемыми символами и их расшифровкой.

18 Не вошло в вопросы

1 Показатели эффективности СМО

Важенйшими показателями эффективности СМО являются абсолютная и относительная пропускная способность.

Абсолютной пропускной способностью СМО назовем среднее число заявок, которое может обслужить система за единицу времени.

Относительная пропускная способность - это средняя доля поступивших заявок, обслуживаемая системой, т.е. это отношение среднего числа заявок, которое может обслужить система за единицу времени к среднему числу заявок, поступивших в систему за это время.

Кроме того, важную роль в оценке СМО играют следующие показатели:

1. Среднее число заявок в очереди
2. Среднее число обслуживаемых заявок
3. Среднее время ожидания в очереди
4. Среднее время обслуживания

1.1 Расчет показателей одноканальной СМО с отказами

Таблица 1. Показатели эффективности одноканальной СМО с отказами.

	Термин	Обозначение
	Интенсивность входящего потока	λ
	Интенсивность выходящего потока	μ
	Приведенная интенсивность потока заявок	ρ
	Среднее время обслуживания заявки	$\bar{t}_{serv}$
	Относительная пропускная способность	q
	Абсолютная пропускная способность	A
	Вероятность того, что заявка	P_{serv}

	обслужена	
	Вероятность отказа	P_{otk}

Траектория пуассоновского процесса

$$P(T_k \le t) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda t} \\ 0 \end{cases}$$

$$p(\nu_\upsilon(t) = k) = e^{-\mu t} \frac{(\mu t)^k}{k!}$$

Постановка задачи: пусть задана СМО, т.е. заданы μ, λ и $n = 1$ (одноканальная система с отказом). Требуется найти $\bar{t}, \rho, q, A, P_{serv}, P_{otk}$

Формулы для рассчета

$$\bar{t}_{serv} = \frac{1}{\mu}$$

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu}$$

$$q = \frac{1}{\rho + 1}$$

$$A = \lambda q$$

$$P_{serv} = q$$

$$P_{otk} = 1 - P_{serv} = 1 - q$$

1.2 Таблица для многоканальной системы

Таблица 2. Показатели эффективности многоканальной СМО с отказами.

	Термин	Обозначение
	Интенсивность входящего потока	λ
	Интенсивность выходящего потока	μ
	Приведенная интенсивность потока заявок	ρ

	Число каналов обслуживания	$n, (n > 1)$
	Вероятность того, что занято 0,1,...,n каналов	$p_0, p_1, \ldots, p_n$
	Относительная пропускная способность	q
	Абсолютная пропускная способность	A
	Вероятность того, что заявка обслужена	P_{serv}
	Вероятность отказа	P_{otk}
	Среднее число занятых каналов	$\bar{k}$

Параметры ρ, λ, μ такие же как в таблице 1.

Основные объекты, которые нас будут интересовать:

Вероятность $p_0, \ldots, p_n$, $p_k = P(\nu(t) = k)$ вычисляются по формулам Эрланга:

$$p_0 = \frac{1}{\sum_{k=0}^{n} \frac{\rho^k}{k!}}, \quad p_k = \frac{\rho^k}{k!} p_0, \rho = \frac{\lambda}{\mu}$$

$$P_{otk} = p_n = \frac{\rho^n}{n!} \rho_0$$

$$q = 1 - p_{otk} = 1 - \frac{\rho^n}{n!} \rho_0$$

$$A = \lambda q = \lambda \left(1 - \frac{\rho^n}{n!} \rho_0 \right)$$

$$\bar{k} = \frac{A}{\mu} \rho \left(1 - \frac{\rho^n}{n!} p_0 \right)$$

Пример 1: на вход многоканальной СМО поступает поток заявок с интенсивностью 11 заявок/час. Среднее время обслуживания заявки 0,15 часа. Каждая заявка приносит доход 130 рублей, а содержание одного канала обходится 122 р/час. Найти оптимальное число каналов СМО.

Решение:

$\lambda = 11$, $\mu = \dfrac{1}{0{,}15} = 6{,}67$ заявок/час. $\rho = \dfrac{\lambda}{\mu} = \dfrac{11}{6{,}67} = 1{,}65$. Заметим, что если система имеет n, то доходность $D(n) = 130 \cdot A - 122n$

Для того, чтобы найти А, нужно определить $q = \dfrac{1}{1+\rho} = 0{,}38$

Пусть $n = 1$

$A = \lambda q = 11 \cdot 130$

D=130A-122=421,4 руб/час.

Посчитать дома сами???

Пусть $n = 2$

Продолжим это в следующий раз

Решено

16.02.17 законспектировать

02.03.17 лекция

2 Марковские системы массового обслуживания

Первая система, которую мы рассмотрим: $M|E_m|1|\infty$

Рассмотрим СМО вида $1|E_m|1|\infty$, где M означает, что входящий поток имеет пуассоновское распределение с параметром λ, E_m означает, что время обслуживания τ имеет Эрланговское распределение с параметрами μ и n, т.е. $P(\tau \le x) = B(x)$ и $b(x) = B'(x) = \dfrac{\lambda^m x^{m-1}}{(m-1)!} e^{-\mu x}$.

Рассматриваемая СМО имеет 1 канал и бесконечный накопитель (можно сказать, что она не имеет отказов).

Пусть $\nu(t)$ - число заявок в системе (отличается от числа заявок в очереди на 1). Будет ли динамика система Марковской? Для того, чтобы понять это, нам понадобится новый объект: $\xi(t)$ - **число фаз**, которое осталась обслужить для заявки, находящейся на обслуживании.

Процесс $\nu(t)$ не является марковским, однако процесс $\eta(t) = (\nu(t); \xi(t))$ уже является марковским.

Пространство состояний этой системы процесса $\eta(t)$ имеет вид $X = \{\{0\}, \{i, j\}, i = 0, \ldots, n, \ldots, j = 1, \ldots, m\}$

$\{0\}$ соответствует пустой системе. i - число заявок в системе. j - число фаз, оставшисях для обслуживания.

Определим переходные вероятности процесса $\eta(t)$ за время Δt.

1. Из состояния $\{0\}$ можно перейти в состояние $(1, m)$ (m означает число фаз, которые осталось обслужить) с вероятностью $\lambda\Delta + o(\Delta)$ (поступила заявка и начато обслуживание)

2. Из состояния $\{i, j\}$ можно перейти в состояние $(i+1, j)$ с вероятностью $\lambda\Delta + o(\Delta)$ (продолжается обслуживание заявки, но в систему поступила новая заявка) или в состояние $(i, j-1)$ $\mu\Delta + o(\Delta)$ (окончилось обслуживание на j-й фазе, осталась $j-1$ фаза обслуживания)

3. Из состояния $(i,1)$ можно перейти в состояние $(i+1, j)$ с вероятностью $\lambda\Delta + o(\Delta)$ или $(i-1, m)$ с вероятносью $\mu\Delta + o(\Delta)$

Пусть $p_0(t) = P\{\nu(t) = 0\}$.

$p_{i,j}(t) = P\{\nu(t) = i, \xi(t) = j\}$

Сразу запишем дифференциальные уравнения. Распределения $p_0(t)$ и $p_{i,j}(t)$ следующей системе ОДУ.

$p_0'(t) = -\lambda p_0(t) + \mu p_{1,1}(t)$ - вероятность того, что система осталась пустой. Доказывается как в прошлом семестре.

$p'_{1,,j}(t) = -(\lambda+\mu)p_{1,,j}(t) + \mu p_{1,,j+1}(t)$

$p'_{1,m}(t) = -(\lambda+\mu)p_{1,m}(t) + \lambda p_0(t) + \mu p_{2,1}(t)$

$p'_{i,j}(t) = -(\lambda+\mu)p_{i,j}(t) + \lambda p_{i-1,j} + \mu p_{1,j+1}(t), \quad j < m$

$p'_{i,m}(t) = -(\lambda+\mu)p_{i,m}(t) + \lambda p_{i-1,m}(t) + \mu p_{i+1,1}(t)$

Система (2.1)

Рассмотрим уравнения, которым подчиняются $\lim_{t\to\infty} p_{i,j}(t) = P_{i,j}$. При этом величины $P_{i,j}$ удовлетворяющие системе алгебраической соотношений (2), которая получается из (1) при $\frac{dp_{i,j}}{dt} \equiv 0$ (заменяем все производные нулями в (2.1))

Графы, соответствующие балансовым соотношениям (2) имеют вид (картинка в отдельном файле).

При этом в состоянии (i, j) $i \ge 2,, j = 1,\ldots,m-1$ суммарный поток вероятностей устроен так, что выходящий поток $(\lambda+\mu)p_{i,j}$ и входящий поток $-\lambda p_{i-1,j} + \mu p_{i,j+1}$ в сумме дают ноль.

Рассмотрим подмножество пространства X состоящее из $\{0\}$ и $\{k, j\}$ $k = 1,\ldots,i, j = 1,\ldots,m$. При этом мы получаем с учетом принципа локального баланса, что граф рассматриваемой системы имеет вид (в том же файле).

Анализируя систему (2), мы получаем соотношение

$$\begin{cases} \lambda p_0 = & \mu p_{1,1} \\ \lambda p_{i,\cdot} = & p_{i+1,1} \end{cases}$$

Где символ $\cdot$ обозначет суммирование по всем значениям соответствующего дискретного аргумента.

30.03.17 лекция

СМО - обслуживание многофазовое. Не смотря на то, что в каждой фазе обслуживание по экспоненциальному закону с постоянным показателем, закон обслуживания оказывается Эрланговским.

Это некие системы типа сложной Марковской цепи. Мы хотели бы вывести уравнение Колмогорова. Это будет система ОДУ. Ищем стационарное решение. Мы верим в то, что это эргодическая. На больших временах становится устойчивой. Вместо системы ОДУ возникает некая система алгебраических уравнений. Так или иначе, система сводится к виду, пригодному для исследования.

Нас интересуют следующие вопросы: среднее число заявок, среднее число заявок в очереди и некие временные параметры.

Текущая система: пуассоновский входящий поток, вторая буква уже не М, а e_m - закон Эрланга.

Какое среднее время заявки должны провести в очереди/системе?

Нужны функции распределения. Функция распределения суммы экспоненциальных распределений случайных величин.

$\mu e^{-\mu t}$ - как найти преобразование Лапласа для этой функции: $\int_0^\infty e^{-st}\mu e^{-\mu t}dt = \omega_H(t)$ - перемножение - сложение показателей. $= \dfrac{\mu}{\mu+s}$

Когда возникает Эрланговское распределение, то суммируются показатели преобразования $\omega_\varepsilon(s) = \left(\dfrac{\mu}{\mu+s}\right)^m$

$f_\varepsilon(t) = \dfrac{\mu^m t^{m-1}}{(m-1)!}e^{-\mu t}$ - будем интегрировать по частям, убирая показатель экспоненты до тех пор, пока не дойдем до экспоненты.

$W(x)$ - время ожидания (время, проведенное в очереди). Преобразование Лапласа для него. $\omega(s) = \int_0^\infty e^{-sx}dW(x)$.

$$= p_0 + \sum_{i=1}^\infty \sum_{j=1}^m \left(\frac{\mu}{\mu+s}\right)^{(i-1)m+j} p_{ij} = p_0 + \left(\frac{\mu+s}{\mu}\right)^m \sum \left(\frac{\mu}{\mu+s}\right)^j$$

$$\sum \left(\frac{\mu}{\mu+s}\right)^j p_{ij}$$

$$P_j(z) = \sum_{i=0}^\infty z^i p_{ij}$$

$$= p_0 + \left(\frac{\mu+s}{\mu}\right)^m P_j\left(\frac{\mu}{\mu+s}\right) = \frac{s(\mu+s)^m(1-\rho)}{(s-\lambda)(\mu+s)^m + \lambda\mu^m}$$

Стационарное распределение $V(x)$ времени пребывания заявки в системе имеет преобразование Лапаласа вида $\phi(s) = \int_0^\infty e^{-sx}dV(x) = \omega(s)\left(\dfrac{\mu}{\mu+s}\right)^m = \dfrac{s\mu^m(1-\rho)}{(s-\lambda)(\mu+s)^m + \lambda\mu^m}$

$w = -\omega(0)$

Функция распределения $F(x)$ и ее функция Лапласа, то $\int_0^\infty e^{-sx}w(x)dx = \omega(s)$

Продиффиренцируем левую часть $\int_0^\infty (-x)e^{-sx}w(x)dx\,|_{s=0} = 0 = -\int xw(x)dx = -E\tau$

$\omega = -\omega(0) = \dfrac{\rho(m+1)}{2\mu(1-\rho)} = \dfrac{Q}{\lambda}$.

Мы получили то, что называется формулами Лиддла.

Далее найти среднее время, проведенное заявкой в системе

$$v=-\phi'(0)=\frac{m}{\lambda}\left[1+\frac{\rho\left(1+\frac{1}{m}\right)}{2(1-\rho)}\right]=\frac{N}{\lambda}$$

Как решать системы ОДУ? М$|e_m|1|\infty$.

Что такое производящая функция: $p_j(z,t)=\sum_{k=0}^{\infty} z^k p_{kj}(t)$.

Нестационарные характеристики.

$$\frac{d}{dz}p(t,z)|_{z=1}=\sum kz^{k-1}p_{kj}(t)|_{z=1}=\sum_{k=0}^{\infty} kp_k(t)=E$$

Возвращаясь к системе ОДУ (2.1) и умножая i-е уравнение этой системы на z^i с последующим суммированием, мы получим ОДУ для функции $P_j(t,z)=\sum_z^i p_{ij}(t)$ уравнение которое имеет вид, $\frac{d}{dt}P_j(t,z)=-(\lambda+\mu)p_j(t,z)+\lambda zP_i(t,z)+\mu P_{j+1}(t,z),\quad j=1,\dots,m-1$

$$\frac{d}{dt}P_m(t,z)+\frac{d}{dt}P_0(t)=-\lambda[P_m(t,z)+P_0(t)]-\mu P_m(t,z)+\lambda z[P_m(t,z)+P_0(t)]+\frac{\mu}{z}P_1(t,z).$$

Это уже не бесконечная система уравнений.

Решая полученную сстему с помощью преобразований Лапласа, вводя обозначения

$\pi_j(t,z)=\int_0^{\infty}e^{-st}P_j(t,z)dt$, $\pi_0(s)=\int_0^{\infty}e^{-st}P_0(t)dt$

$$s\pi_j(s,z)-P_j(z)=-[\lambda(1-z)\mu]\pi_j(s,z)+\mu\pi_{j+1}(s),\quad j=1,\dots,m-1.$$

$$s\pi_m(s)-P_m(z)+sd\pi_0(s)-P_0=-[\lambda(1-z)+\mu]P_m(s,z)-\lambda(1-z)\pi_0(s)+\frac{\mu}{z}\pi_1(s,z),$$ где

$P_m(z)=\sum_{j=0}^{\infty} z^i p_{ij}(0)$

$P_0=p_0(t)$ - совпали. Вероятность того, что система пуста

Мы взяли систему, у которой входящий поток был Пуассоновский, очередь бесконечна. Сумели найти более-менее явные выражения. Все остальное посчитает компьютер, ему нужно будет лишь решать СЛАУ.

3 Система с повторными заявками

Система с повторяющимися заявками - однокнальная, без накопителя и экспоненциальным временем обслуживания.

Предположим, что заявка, получившая отказ, повторяет попытку войти в систему. Возникает поток повторных заявок.

Повторная заявка не может попасть на обслуживание сразу после того, как обслуживающее устройство освободилось. Она может попасть на обслуживание, если произведет повторную попытку, т.е. через случайное время τ распределенное по экспоненциальному закону с параметром γ. Заявка может уйти с вероятностью q.

3.1 Распределение потока повторных заявок в системе

Пусть $\nu(t)$ - число повторных заявок. Обозначим $\chi(t)$ величину вида

Пусть $\eta(t)=(\nu(t),\chi(t))$ - это марковский процесс с пространством состояний вида $X=\{(i,j),i=0,1,...,,j=0,1\}$

Описать марковскую цепь - описать множество ее состояний и вероятности перехода из одного состояния в другое.

Опишем переходные вероятности процесса $\eta(t)$.

Пункт 1: Из состояния $(i,0)\to(i,1)$ (поступление новой заявки и начало обслуживания) с интенсивностью $\lambda\Delta+o(\Delta)$ и в состояние $(i-1,1)$ с интенсивностью $i\gamma\Delta+o(\Delta)$ (произвела удачную повторную попытку одна из i заявок).

Пункт 2: $(i,1)$ за время Δ система может перейти в состояние $(i,0)$ с интенсивностью $\mu\Delta+o(\Delta)$ (окончено обслуживание заявки) и с итенсивностью $\lambda(1-q)\Delta+o(\Delta)$ система перейдет в состояние $(i+1,1)$ (поступила новая заявка и застала прибор занятым, однако с вероятностью $(1-q)$ эта новая заявка осталась в системе) и в состояние $(i-1,1)$ с вероятностью $i\gamma\Delta+o(\Delta)$ (одна из повторных заявок произвела новую попытку неудачно и ушла из системы)

13.04.17 лекция

То, чем мы занимаемся на практике - лучше мы это сделали на компьютерах. Для этого нужен компьютерный класс. Где его найти?..u

Система с повторными заявками. Простой случай M|M|1|0. Если заявка застает занятую систему, то уходит. Но "ушедшая" заявка имеет несколько возможностей: вернуться.

Число повторных заявок, которые могут вернуться в систему и состояние системы. Процесс $\eta(t)=(\nu(t),\chi(t))$.

Как задать Марковскую цепь?

$X=\{(i,j),i=0,1,...,j=0,1\}$ - пространство состояний

$(i,0)$ - приходит заявка и застает свободную систему. Ее сразу обслуживают, т.е. $\to(i,1)$. Либо $\to(i-1,1)$

Вероятности соответственно $\lambda\Delta+o(\Delta)$

и $i\gamma\Delta+o(\Delta)$ где γ - случайное время, когда процесс может повторить попытку, τ - время, прошедшее до попытки дозвониться, γ - его параметр. Типичная модель для телефонной станции.

$(i,1)$ можем перейти в состояние $(i,0)$ - $\mu\Delta+o(\Delta)$. $\to(i+1,1)$ - во первых пришла новая заявка, но она застала систему занятой, а предыдущая не передумала уходить, т.е. $\lambda(1-q)\Delta+o(\Delta)$.

Теперь нужно описать вероятности перехода из одного состояния в другое если известны эти интенсивности.

Пусть $P_{i0}(t)=P\{\nu(t)=i,\chi(t)=0\}$ - вероятность того, что в системе i повторных заявок (повторов) и прибор свободен. $P_{i1}=P(\nu(t)=i,\chi(t)=1)$

Рассмотрим систему уравнений Колможгорова для СМО с повторами заявок.

$\dot{p}_{i0}(t)=-(\lambda+i\gamma)p_{i0}(t)+\mu p_{i1}(t),i\geq 0$

$\dot{p}_{01}(t)=-(\lambda(1-q)+\mu)p_{01}+\lambda p_{00}(t)+\gamma p_{10}(t)+\gamma q p_{11}(t)$

Последнее слагаемое - завка подождала и решила уйти.

Предпоследнее - азявка с интенсинвостью γ решила повториться.

Возможности изменение χ мы исчерпали. Что будет для других i?

$$\dot{p}_{i1}(t) = -(\lambda(1-q)+\mu+\gamma qp)p_{i1}(t)+\lambda(1-q)p_{i-1,1}(t)+\lambda p_{i0}(t)+\gamma(i+1)p_{i+1,0}(t)+\gamma q(i+1)p_{i+1,1}(t)$$

Вся эта система - **(7.1)**

Система была в $p_{i+1,1}$ - это может произойти из-за того, что заявка подождала, махнула рукой и ушла, а прибор в это время работает.

Одна из i заявок решила повторить свою попытку, ждала время γ, перешли.

Новая заявка пополнила систему.

Пришла новая заявка, решила не оставлять систему и возникла структура.

Что мы дальше делаем.

Решать сложно, найдем стационарное решение. Приравниваем производные к нулю.

Стационарное распределение числа заявок.

Рассмотрим систему

$$\begin{cases} 0 = & -(\lambda+i\gamma)p_{i0}+\mu p_{i1} \\ 0 = & -(\lambda(1-q)+\mu)p_{01}+\lambda p_{00}+\gamma p_{10}+\gamma q p_{11} \\ 0 = & -(\lambda(1-q)+\mu+i\gamma q)p_{i1}+\lambda(1-q)p_{i-1,1}+\lambda p_{i0}+\gamma(i+1)p_{i+1,0}+\gamma q(i+1)p_{i+1,1} \end{cases}$$

(7.2) - система глобального баланса

Суммарный поток вероятности $(\lambda+i\gamma)P_{i0}$ выхода из состояния $(i,0)$ образуется за счет поступления на прибор либо новой заявки либо одной из повторных заявок, а попасть в это состояние можно после завершени обслуживания. Равенство этих потоков - это первое уравнение в системе (7.2).

Из состояния $(0,1)$ можно выйти (причем суммарный поток вероятности выхода $(\lambda(1-q)+\mu)p_{01}$) за счет поступления заявки, заставшей прибор занятым и ставшей с вероятностью $(1-q)$ повторным либо после того, как завершено обслуживание на приборе, а попасть в это состояние можно при поступлении заявки в свободную систему (поток вероятности λp_{00}) либо при удачном завершении попытки единственной повторной заявки (с вероятностью γp_{10}) или при неудачной попытке повторной заявки (с вероятностью $\gamma q p_{11}$).

Для того, чтобы решить (7.2), просуммируем первое соотношение в системе от $i+1$ до ∞, а третье от i до ∞ и сложим полученные соотношения.

При этом, мы получим гораздо более простые связи

$$\begin{cases} \lambda p_{00} = & \mu p_{01} \\ \lambda p_{10}+\lambda(1-q)p_{i-1,1} = & (\mu+i\gamma q)p_{i1} \end{cases} \quad (i=1..\infty) \quad \textbf{(7.3),}$$

Выражая p_{10} через p_{i1} и подставляя во второе слагаемое в (7.3) полуим

$\left(\mu+i\gamma q-\dfrac{\lambda\mu}{\lambda+i\gamma}\right)p_{i,1} = \lambda(1-q)p_{i-1,1}$, из этих формул следует

$$p_{i0} = p_{00}\sigma_i\prod_{j=0}^{i}\vartheta_j,\ p_{i1} = p_{00}\prod_{j=0}^{i}\vartheta_j \text{ где } \vartheta_0 = \rho = \frac{\lambda}{\mu},\ \vartheta_i = \frac{\lambda(1-q)(\lambda+i\gamma)}{i\gamma(\mu+q\lambda+iq\gamma)}, \sigma_i = \frac{\mu}{\lambda+i\gamma}.$$

Все эти формулы - **(7.4)**. σ - величина, обратная ропускной способности. Т.к. γ не равна нулю, то возникают соотношения.

27.04.17 лекция

Работаем с Марковскими цепями. Цепь - потому что дискретное множество состояний. Входящий поток - Макровская цепь. Пуассоновский поток является цепью.

Какие еще есть цепи. Число заявок в системе, число заявок в очереди. Эти процессы принимают дискретные значения, но время непрерывное. Все, что связано с задачами, есть в мудле.

Продолжаем рассматривать системы с отказами (т.е. последняя цифра в классификации Кенделла - 0).

Первый поток - новые заявки, второй - ушедшие заявки. Заявки возвращаются с некоей вероятностью. Нужно описывать двухкомпонентным потоком но все равно это будет марковская цепь.

Для того, чтобы описать цепь, нужно задать пространство состояний (оно дискретно, но может иметь сложную структуру) и определить - как выполняется переход из одной системы в другую.

Есть прямые уравнения Колмогорова для этой системы. Сначала рассмотрим стационарное решение.

Не хватает p_{00} и p_{01} -нужно просуммировать все слагаемые от 0 до ∞, и выразим p_{00} из этой формулы.

p_{00} находим из условий нормировки $p_{\bullet,\bullet}=1$. $p_{\bullet,\bullet}=\sum_j\sum_i p_{i,j}$. Таким образом,

$p_{0,0}=\left[\sum_{i=0}^{\infty}(1+\sigma_i)\prod_{j=0}^{i}\vartheta_j\right]^{-1}$ **(7.5)**. Если $q>0$, то (7.5) сходится при всех $\lambda,\mu,\gamma>0$, а если $q=0$, то сходимость имеет место при $\rho=\dfrac{\lambda}{\mu}<1$.

Таким образом, были получены некоторые ряды и рассмотрена их сходимость. но для работы с системой нужны конкретные числа.

Альтернативный способ нахождения хаарктеристик СМО M|M|1|0 с повторными заявками состоит в отыскании производящей функции $P_j(z)=\sum_{i=0}^{\infty}p_{i,j}z^i$ - две производящие функии.

Умножая i-е уравнение в (7.3) для $p_{i,j}$ на z^i получим:

$0=-\lambda P_0(z)-\gamma zP_0'(z)+\mu P_1(z)$,

$0=\lambda P_0 m(z+\gamma P_0'(z)+[\lambda(1-q)(1-z)+\mu]P_1(z)+\gamma q(1-z)P_1(z)$ **(7.6) - система**.

При $q=0$ мы получаем соотношение: $0=-\lambda P_0(z)-\gamma zP_0'(z)+\mu P_1(z)$,

$0=\lambda P_0(z)+\gamma P_0'(z)-(\lambda(1-z)+\mu)P_1(z)$ **(7.7)**

откуда следует соотношение $\alpha(1-\rho z)p_0'(z)-\rho P_0(z)=0$, где $\alpha=\dfrac{\gamma}{\lambda}, \rho=\dfrac{\lambda}{\mu}$. линейное однородное уравнение. Решение этого уравнения имеет вид: $P_0(z)=C(1-\rho z)^{-1/\alpha}$ где C - постоянная, которую потом нужно будет найти, и в силу (7.7) $P_1(z)=C\rho(1-\rho z)^{-1-1/\alpha}$

Таким образом, $P(z)=P_0(z)+P_1(z)$ удовлетворяет соотношениям $P(z)=\dfrac{C[1+\rho(1-z)]}{(1-\rho z)^{1+1/\alpha}}$.

Постоянная C вычисляется из условий нормировки $P(1)=1$, т.е. $C=(1-\rho)^{1+1/\alpha}$.

Дифференцируя выражения для $P_{i,j}$ и вычисляя производную при $z=1$, получим, что $P_{i,0}=\dfrac{1}{i!}P_0^{(i)}(1)=(1-\rho)^{1+1/\alpha}\rho^i C_{1/\alpha+1}^i$, где (i) обозначает, что i раз продифференцировали.

$$P_{i,1}=\frac{1}{i!}P_1^{(i)}(1)=(1-\rho)^{1+1/\alpha}\rho^{i+1}C_{1/\alpha+i}^i$$

Стационарное среднее число N повторных заявок $N = P'(1) = \dfrac{\rho(1+\alpha\rho)}{\alpha(1-\rho)}$

Стационарная вероятность того, что поступившая в систему заявка будет обслужена с первой попытки $P_{w=0} = \sum_{i=0}^{\infty} p_{i,0} = P_0(1) = 1-\rho$

Многим вещам приходится верить на слово, если их подставить, то они будут работать. Если заложить эти формулы в программы, то программы все посчитают.

4 Нестационарные характерстики СМО с повторными заявками

Будем полагать $q = 0$ (все заявки повторяют попытки). При этом будем пользоваться производящей функцией.

$P_j(t,z) = \sum_{i=0}^{\infty} p_{i,j}(t) z^i$.

Из системы (7.1) следует $\dfrac{\partial}{\partial t} P_0(t,z) = -\lambda p_0(t,z) - \gamma z \dfrac{\partial}{\partial z} P_0(t,z) + \mu P_1(t,z)$

$$\frac{\partial}{\partial t} P_1(t,z) = \lambda_z P_1(t,z) - (\lambda+\mu) P_1(t,z) + \lambda P_0(t,z) + \gamma \frac{\partial}{\partial z} P_0(t,z)$$

Применяя преобразование Лапласа

$$\pi_0(s,z) = \int_0^{\infty} e^{-st} P_0(t,z) dt$$

$$\pi_1(s,z) = \int_0^{\infty} e^{-st} P_1(t,z) dt$$

Преобразование Лапласа от производной:

$$s\pi_0(s,z) - P_0(s,z) = -\lambda \pi_0(s,z) - \gamma z \frac{d}{dz} \pi_0(s,z) + \mu \pi_1(s,z)$$

$$s\pi_1(z) - P_1(z) = \lambda z \pi_1(s,z) - (\lambda+\mu)\pi_1(s,z) + \lambda \pi_0(s,z) + \gamma \frac{d}{dz} \pi_0(s,z) \quad \textbf{(*)}$$

где $P_0(z) = \sum_{i=0}^{\infty} p_{i,0}(0) z^i$, $P_1(z) = \sum P_{i,1}(0) z^i$

Выражая π_1 через π_0 и подставляя во второе соотношение (*), получим

$$\frac{d}{dz}\pi_0(s,z) - \frac{(\lambda+s)(\lambda+\mu+s) - \lambda\mu - \lambda(\lambda+s)z}{\gamma\left[\lambda z^2 - (s+\lambda+\mu)z + \mu\right]}\pi_0(s,z) = \frac{(s+\lambda+\mu-\lambda z)P_0(z) + \mu P_1(z)}{\gamma\left[\lambda z^2 - (s+\lambda+\mu)z + \mu\right]} \quad \textbf{(7.8)}$$

Получили неоднородное ОДУ, но с переменными коэффициентами. С одной стороны, мы занем как его решать.

Дальше возникают дроби - когда эти дроби будут конечными, не обратятся ли в бесконечность и т.д.

Осталось лишь исследовать эти выражения. После этого, мы досчитаем все характеристики системы. Это будет конец курса.

Разбор этой структуры довольно громоздкий.

Полученное выражение таково, что оно мало что говорит сразу для того, чтобы понимать - что с ним делать. Оно имеет вид дроби. Это долго, поставим на этом точку. Все равно, она не входит в экзамен :)

5 Условные вероятности и условные математические

ожидания.

$$\Omega = \sum_{k=1}^{\infty} A_k, A_k A_j = \varnothing, k \neq j$$

Условная вероятность $P(B \mid A_k) = \frac{P(BA_k)}{P(A_k)}$

Условные математические ожидания:

$$P_{A_k}(B) = P(B \mid A_k)$$

$$E[\xi \mid A_k] = \sum_{k=1}^{n} x_k P_{A_k}(B)$$

Условное математическое ожидание – математическое ожидание относительно условной вероятности.

Т.е. $P_A(B)$, тогда $E_\xi = \int_\Omega \xi(w) P_A(d\omega)$

Если бы было только 3 грани на кубике (всегда выпадает четное), то $P_A(B)$, условное среднее даст нам среднее с учетом того ,что вероятности теперь $\frac{1}{3}$

6 6. Случайные процессы и их числовые характеристики

Потоки сигма-алгебр

последовательность вложенных сигма-алгебр $F_t \subset F_T \subset F, t < T$ называется **потоком**.

Случайные процессы

$(\omega : \xi_t(\omega) \leq x) \in F_t \subset F \quad \forall\ t$ - Порожден поток, $\xi(t, \omega)$ - **случайный процесс**.

Главный пример – пуассоновский процесс:

$$p(x(t) = k) = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!} E\xi(t) = \lambda t, D(\xi(t)) = \lambda t$$

$$\phi_N(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!} = e^{-\lambda t} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z\lambda t)^k}{k!} = e^{-\lambda t} e^{z\lambda t} = e^{-\lambda t(1-z)}$$

???Гиперэкспоненциальное $p = \sum a_k \lambda_k e^{-\lambda_k t}$, Эрланговское, $F_\varepsilon(y) = \int_0^y \frac{x^k}{k!} e^{-\lambda x} dx$

Здесь память можно не напрягать. Можем просто написать $E\xi = \int_0^\infty x \cdot ?; > B => ABL$

Можем посчитать до конца если k - четное и через гамма-функцию, если k - нечетное.