



СИСТЕМЫ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ

Конспект группы ПМИ-3



2017 г.
СПБГАСУ

Оглавление

Оглавление.....	1
1 Вероятностное пространство. Случайные величины, дискретные и непрерывные. Функции распределения.....	1
2 Числовые характеристики случайных величин, производящие и характеристические функции.....	2
3 Экспоненциальный, гиперэкспоненциальный, эрланговский законы распределения и их числовые характеристики.	4
4 Преобразования Лапласа для распределений из вопроса 3.	5
5 Пуассоновский процесс и его свойства.....	6
6 Марковские процессы, определения и свойства.	7
7 Переходные вероятности, уравнение Чепмена-Колмогорова	8
8 Марковские цепи с дискретным временем, способы их описания (матрицы, графы)	9
9 Марковские цепи с непрерывным временем, генератор марковской цепи и его свойства.	10
10 Прямые и обратные уравнения Колмогорова для марковской цепи.	11
11 Процессы рождения и гибели	12
12 Системы массового обслуживания и их классификация	13
13 Одноканальные и многоканальные СМО с отказами.....	14
14 Система $M M 1 \infty$ ОДУ для распределений	15
15 Стационарные распределения для системы $M M 1 r$???	16
16 Формулы Литтла	17
17 Система $M M n r$ ОДУ для распределений если r конечно.....	17
18. Стационарные распределения для системы $M M n r$	19

1 Вероятностное пространство. Случайные величины, дискретные и непрерывные. Функции распределения.

Вероятностное пространство – это тройка (Ω, \mathcal{F}, P) , где

1. Ω - множество (описывает **пространство событий**). Его элементы $\omega \in \Omega$
2. \mathcal{F} - σ -алгебра подмножеств множества Ω
3. P - **вероятностная мера**, $P(\Omega)=1$

σ -алгебра замкнута относительно операций счетного объединения и пересечения. Также, если $\omega \in F \Rightarrow \bar{\omega} \in \mathcal{F}$ (содержит дополнение к событию).

Эксперимент: бросаем кубик: $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_6\}$ ω_i - на верхней грани i точек. На грани кости четное число: $C = \{ \text{выпало четное число} \} = \omega_2 + \omega_4 + \omega_6$

$P(A+B) = P(A) + P(B)$ если события **несовместны**, т.е. $AB = \emptyset$. Если же события **совместны**, то вероятность $P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB)$

События называются **независимыми** если вероятность их произведения равна произведению вероятности: $P(AB) = P(A)P(B)$

$P(\sum_{k=1}^n A_k) = 1 - \prod_{k=1}^n (1 - P(A_k))$ если события A_k независимы.

Случайная величина - это отображение $\xi: \Omega \rightarrow \mathcal{R}$ или Z . Для СВ при непрерывном отображении должна быть **измеримость** относительно борелевской σ -алгебры на \mathcal{R} : $\{\omega: \xi(\omega) \leq x\} \in \mathcal{F}$. Из элемента сигма-алгебры попадаем в сигма-алгебру.

Вероятность $P(\omega: \xi(\omega) \leq x)$ - **функция распределения СВ**. СВ полностью определяется функцией распределения.

Если функция распределения F дифференцируема, то более наглядное представление о СВ дает **плотность вероятности СВ**: $f(x) = F'(x)$.

Функция распределения любой СВ обладает следующими свойствами:

1. $F(x)$ определена на всей числовой прямой R
2. $F(x)$ не убывает, т.е. если $x_1 \leq x_2$, то $F(x_1) \leq F(x_2)$
3. $F(-\infty) = 0, F(+\infty) = 1$, либо $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0, \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$
4. $F(x)$ непрерывна справа, т.е. $\lim_{x \rightarrow -x_0} F(x) = F(x_0)$

Если ξ - это дискретная СВ, принимающая значения $x_1 < x_2 < \dots < x_i < \dots$ с вероятностями $p_1 < p_2 < \dots < p_n < \dots$, то таблица вида:

ξ	x_1	x_2	...	x_i
p	p_1	p_2	...	p_i

называется **распределением дискретной СВ**.

У дискретной СВ функция распределения ступенчатая.

Если функция распределения непрерывна, то СВ будет **непрерывной СВ**.

Примеры:

случайное время обслуживания – Экспоненциальная СВ $F(t) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda t} & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$,

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

Пуассоновская случайная величина: $p_k = P\{X = k\} = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$

2 Числовые характеристики случайных величин, производящие и характеристические функции.

Рассмотрим дискретную случайную величину с распределением

ξ	x_1	x_2	...	x_i
p	p_1	p_2	...	p_i

а также непрерывную СВ ξ с функцией распределения $F(x)$ и плотностью $f(x)$.

Математическое ожидание: $E\xi = \sum_{k=1}^n x_k p_k = \sum \xi(\omega_k) P\{\xi(\omega_k) = x_k\}$ или

$$E\xi = \int_{\Omega} \xi(\omega) P(d\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x dF(x)$$

Свойства:

1. $E[a\xi + b\eta] = aE\xi + bE\eta$ - линейность
2. $Ec = c, c - const$
3. Если СВ η является функцией СВ ξ , то $E\eta = Ef(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(y)p_{\xi}(y)dy$
4. Если СВ ξ, η независимы, то $E\xi E\eta = E[\xi\eta]$.

Дисперсия $D\xi = E[\xi - E\xi]^2 = E\xi^2 - [E\xi]^2$.

$$D(\xi + \eta) = E(\xi + \eta)^2 - [E(\xi + \eta)]^2 = E\xi^2 + E\eta^2 + 2E[\xi\eta] - [E\xi]^2 - [E\eta]^2 - 2E\xi E\eta = D\xi + D\eta$$

k -м начальным моментом случайной величины X , где $k \in N$, называется величина

$$\nu_k = E[X^k]$$

k -м центральным моментом случайной величины X называется величина

$$\mu_k = E[(X - EX)^k]$$

Производящая функция случайной величины ξ

$$\varphi_{\xi}(z) = Ez^{\xi} = \sum_{k=0}^{\infty} z^k p_k, \quad \phi_{\xi}(z) = \int_{\Omega} z^{\xi(\omega)} P(d\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} z^{\xi} f(x)dx, \quad |z| \leq 1.$$

Распределение вероятностей однозначно определяется своей производящей функцией

$$p_k = \frac{1}{k!} \frac{d^k}{dz^k} \phi(z)|_{z=0}, k = 0, 1, 2, \dots \quad ??? \text{ что с индексами, почему в 0 а не 1.}$$

Производящая функция позволяет вычислить МО $E\xi = \phi'(z)|_{z=1}$ и Дисперсию

$$D\xi = \phi''_{\xi}(1) + \phi'_{\xi}(1) - \phi'_{\xi}(1)^2$$

Характеристическая функция $\psi_{\xi}(u) = Ee^{iu\xi} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{iux} f(x)dx = \sum_{k=0}^{\infty} e^{iuk} p_k$

$$\text{МО } \psi'(u)|_{u=0} = \int_{-\infty}^{\infty} ixe^{iux} f(x)dx|_{u=0} = i \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = iE\xi \quad \text{Дисп. } D\xi = -\psi''(0) + (\psi'(0))^2$$

$$P(\xi = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!},$$

Пример: Пуассоновское распределение:

$$\text{МО } Ep_k = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \lambda \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = \lambda e^{-\lambda} e^{\lambda} = \lambda$$

Дисперсия

$$Dp_k = E(p_k)^2 - (Ep_k)^2,$$

$$E(p_k)^2 = Ep_k(p_k - 1) + Ep_k = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot (k-1) \cdot e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} + \lambda = \lambda^2 e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-2}}{(k-2)!} + \lambda = \lambda^2 + \lambda$$

$$\text{Таким образом } Dp_k = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda$$

Либо, через производящую функцию:

$$\varphi_{\xi}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} z^k = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda z)^k}{k!} = e^{-\lambda} e^{\lambda z} = e^{\lambda(z-1)}$$

$$\psi_{\xi}(u) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{iuk} e^{-\lambda} \frac{(\lambda)^k}{k!} = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(e^{iu} \lambda)^k}{k!} = e^{-\lambda + e^{iu} \lambda} = e^{\lambda(e^{iu} - 1)}$$

$$\frac{d\phi_{\xi}(z)}{dz} \Big|_{z=1} = \frac{d}{dz} e^{\lambda(z-1)} \Big|_{z=1} = \lambda e^{\lambda z - \lambda} \Big|_{z=1} = \lambda = E\xi$$

Вторая производная $\frac{d^2\phi_{\xi}(z)}{dz^2} = \lambda^2 e^{\lambda z - \lambda}$, тогда $\phi_{\xi}''(1) + \phi_{\xi}'(1) - \phi_{\xi}'(1)^2 = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda$

Экспоненциальное распределение $f(t) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t}, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$

МО $E\xi = \int_0^{\infty} \lambda t e^{-\lambda t} dt = \lambda \int_0^{\infty} t e^{-\lambda t} dt = \left| \begin{matrix} u = t & dv = e^{-\lambda t} dt \\ du = dt & v = -\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda t} \end{matrix} \right| = -t e^{-\lambda t} \Big|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} dt = -\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda t} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{\lambda}$

Дисп

$$D\xi = E[\xi^2] - [E\xi]^2, E[\xi^2] = \lambda \int_0^{\infty} t^2 e^{-\lambda t} dt = \left| \begin{matrix} u = t^2 & dv = e^{-\lambda t} dt \\ du = 2t dt & v = -\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda t} \end{matrix} \right| =$$

$$= \lambda \left(-\frac{t^2}{\lambda} e^{-\lambda t} \Big|_0^{\infty} + \frac{2}{\lambda} \int_0^{\infty} t e^{-\lambda t} dt \right) = 2 \int_0^{\infty} t e^{-\lambda t} dt = (\text{см. пред.}) = \frac{2}{\lambda^2}$$

Таким образом $D\xi = E[\xi^2] - [E\xi]^2 = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}$

3 Экспоненциальный, гиперэкспоненциальный, эрланговский законы распределения и их числовые характеристики.

Экспоненциальная СВ имеет показательное распределение с параметром $\lambda > 0$,

Функция распределения: $P(\xi \leq t) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda t}, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$, плотность $f(t) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t}, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$ МО

$E\xi = \frac{1}{\lambda}$ Дисп $D\xi = \frac{1}{\lambda^2}$ (вычисляются в предыдущем вопросе)

Гиперэкспоненциальная СВ: $\xi = \sum_{k=1}^n \tau_k$ где τ_k - независимые экспоненциально-

распределенные СВ с параметрами λ_k называется **гиперэкспоненциальной СВ**

Функция распределения СВ ξ задается соотношением:

$$F_{\xi}(t) = \sum_{k=1}^n (1 - e^{-\lambda_k t}), f_{\xi}(t) = \sum_{k=1}^n (\lambda_k e^{-\lambda_k t})$$

а СВ $\eta = \sum_{k=1}^n \alpha_k \tau_k$ имеет ФР $F_{\eta}(t) = \sum_{k=1}^n \alpha_k (1 - e^{-\lambda_k t})$, $f_{\eta}(t) = \sum_{k=1}^n \alpha_k \lambda_k e^{-\lambda_k t}$??? Которая из

этих величин гиперэкспоненциальная? Здесь задается две СВ, одна с коэффициентами α , другая без.

МО $E\xi = \sum_{l=1}^m \frac{a_l}{\lambda_l}$, Дисперсия $D\xi = 2 \sum_{l=1}^m \frac{a_l}{\lambda_l^2} - \left(\sum_{l=1}^m \frac{a_l}{\lambda_l} \right)^2$

Распределение Эрланга k-го порядка – распределение, описывающее непрерывную СВ X , принимающую положительные значения в интервале $(0; \infty)$ и представляющую собой сумму k независимых СВ, распределенных по одному и тому же экспоненциальному закону с параметром λ .

$$F_k(x) = 1 - e^{-\lambda x} \sum_{i=0}^{k-1} \frac{(\lambda x)^i}{i!} \quad f(x) = \frac{\lambda (\lambda x)^{k-1}}{(k-1)!} e^{-\lambda x}, x \geq 0, \quad E\xi = \frac{k}{\lambda}, \quad D\xi = \frac{k}{\lambda^2}.$$

где $\lambda > 0$ и натуральное число k – параметр распределения Эрланга.

??? Как расписать

При $k = 1$ распределение эрланга вероятностей экспоненциальное, а при $k \rightarrow \infty$ приближается к нормальному распределению.

Распределение Эрланга является двухпараметрическим (с параметрами λ и k), оно может использоваться для аппроксимации распределений по двум первым моментам.

4 Преобразования Лапласа для распределений из вопроса 3.

Преобразование Лапласа плотности распределения $f(x)$ неотрицательной непрерывной СВ ξ называется функция. $F(s) = \int_0^\infty e^{-sx} f(x) dx, s > 0$.

Плотность распределения однозначно определяется своим преобразованием Лапласа. Дифференцируя преобразование Лапласа по s в точке $s=0$, можно определить моменты СВ:

$$(-1)^k E\xi^k = \frac{d^k F(s)}{ds^k} \Big|_{s=0}, k = 1, 2, \dots$$

Преобразование Лапласа $F(s)$ суммы $x = x_1 + x_2 + \dots + x_n$ независимых СВ равно произведению преобразований Лапласа слагаемых: $F(s) = \prod_{k=1}^n F_k(s)$

$$\text{Заметим, что } \frac{1}{\lambda + s} = \frac{1}{1 + \frac{s}{\lambda}} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left(\frac{s}{\lambda} \right)^k \quad E\xi = \frac{s}{\lambda}, E\xi^k = \frac{k!}{\lambda^k} \quad ??? k \text{ или } \lambda, \text{ откуда}$$

взялись эти формулы, тем более неправильные???

Заметим, что $\lambda = \frac{1}{E\xi} \rightarrow$ среднее число заявок за единицу времени или **интенсивность**

потока.

Линейность: $L(af + bg) = aLf + bLg$, где a, b – вещественные числа, а f, g – функции для которых определено преобразование Лапласа.

Примеры преобразований Лапласа:

$$1. \quad f(t) = 1 \Rightarrow \hat{f} = \int_0^\infty e^{-st} dt = -\frac{1}{s} e^{-st} \Big|_0^\infty = \frac{1}{s}$$

$$2. \quad f(t) = t \Rightarrow \hat{f}(t) = \int_0^\infty t e^{-st} dt = \left| \begin{array}{l} u = t \quad dv = e^{-st} dt \\ du = dt \quad v = -\frac{1}{s} e^{-st} \end{array} \right| = \frac{1}{s} \int_0^\infty e^{-st} dt = \frac{1}{s^2}$$

$$3. \quad f(t) = e^{-\lambda t} \Rightarrow \hat{f}(t) = \int_0^\infty e^{-st} e^{-\lambda t} dt = \int_0^\infty e^{-(s+\lambda)t} dt = \frac{1}{\lambda + s}$$

Для тригонометрии нужно использовать формулы Эйлера.

$$z = e^{i\alpha}, \bar{z} = \cos \alpha + i \sin \alpha, \bar{z} = e^{-i\alpha} = \cos \alpha - i \sin \alpha, \quad \cos \alpha = \frac{e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}}{2}, \sin \alpha = \frac{e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}}{2i}$$

$$1. \quad f(t) = \sin(\alpha t) \Rightarrow$$

$$\hat{f}(t) = \int_0^\infty e^{-st} \sin \alpha \tau d\tau = \int_0^\infty e^{-st} \frac{e^{i\alpha t} - e^{-i\alpha t}}{2i} dt = \left[\frac{1}{s - i\alpha} - \frac{1}{s + i\alpha} \right] \frac{1}{2i} = \frac{s + i\alpha - s + i\alpha}{(s^2 + \alpha^2) 2i} = \frac{\alpha}{s^2 + \alpha^2}$$

$$2. \quad f(t) = \cos(\alpha t) \Rightarrow \frac{s}{s^2 + \alpha^2}$$

$$3. \quad f(t) = \phi'(t) \Rightarrow \hat{f}(t) = \int_0^\infty e^{-st} \frac{d}{dt} \phi(t) dt \left| \begin{array}{l} u = e^{-st} dv = \phi'(t) dt \\ u = -se^{-st} v = \phi(t) \end{array} \right| = -\phi(0) + s \int_0^\infty e^{-st} \phi(t) dt = -\phi(0) + s \widehat{\phi(t)}$$

$$\text{Экспоненциальное распределение: } f(t) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t}, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

$$\hat{f}(s) = \int_0^\infty e^{-st} \lambda e^{-\lambda t} dt = \lambda \int_0^\infty e^{-t(s+\lambda)} dt = -\frac{\lambda}{s+\lambda} e^{-t(s+\lambda)} \Big|_0^\infty = \frac{\lambda}{s+\lambda}$$

$$\text{Гиперэкспоненциальное распределение: используя линейность, } \hat{f}(s) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \frac{\lambda_i}{\lambda_i + s}$$

Эрланговское распределение:

$$\hat{f}(s) = \int_0^\infty e^{-sx} \lambda \frac{\lambda^{k-1} x^{k-1}}{(k-1)!} e^{-\lambda x} dx = \frac{\lambda^k}{(k-1)!} \int_0^\infty e^{-x(s+\lambda)} x^{k-1} dx =$$

$$\left| \begin{array}{ll} u = x^{k-1} & dv = e^{-x(s+\lambda)} \\ du = (k-1)x^{k-2} dx & v = -\frac{1}{s+\lambda} e^{-x(s+\lambda)} \end{array} \right| = \frac{\lambda^k}{(k-1)!} \left(-\frac{1}{s+\lambda} x^{k-1} e^{-x(s+\lambda)} \Big|_0^\infty + \frac{k-1}{s+\lambda} \int_0^\infty x^{k-2} e^{-x(s+\lambda)} dx \right)$$

$$\text{Выполнив интегрирование по частям } k-1 \text{ раз, получим } \left(\frac{\lambda}{\lambda + s} \right)^k$$

5 Пуассоновский процесс и его свойства

Целочисленный пуассоновский точечный процесс $N(t), 0 \leq t < +\infty$ определяется тремя свойствами:

1. **Ординарность** - вероятность наступления более одного события на любом малом интервале времени Δt имеет более высокий порядок малости, чем Δt . Поэтому для него выполняются соотношения $P\{N(t+\Delta t) - N(t) = 1\} = P\{N(\Delta t) = 1\} = \nu \Delta t + o(\Delta t)$ и $P\{N(t+\Delta t) - N(t) > 1\} = P\{N(\Delta t) > 1\} = o(\Delta t)$, ν - некоторая положительная величина, имеющая размерность, обратную времени. Следствием этих двух соотношений является равенство $P\{N(t+\Delta t) - N(t) = 0\} = P\{N(\Delta t) = 0\} = 1 - \nu \Delta t + o(\Delta t)$

2. **Стационарность** - его статистические характеристики не изменяются при сдвиге всех точек вдоль оси времени на произвольную Δ

3. **Независимость** (отсутствие последействия) - во все моменты времени имеет независимые приращения (значения) на неперекрывающихся интервалах времени.

$$p(x(t) = k) = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!},$$

МО $E\xi(t) = \lambda t$, Дисперсия $D(\xi(t)) = \lambda t$

Производящая функция $\phi_N(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!} = e^{-\lambda t} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z\lambda t)^k}{k!} = e^{-\lambda t} e^{z\lambda t} = e^{-\lambda t(1-z)}$

Характеристическая функция:

$$\psi_{\xi}(u) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{iuk} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} e^{iuk-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!} = e^{-\lambda t} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(e^{iu}\lambda)^k}{k!} = e^{-\lambda t + e^{iu}\lambda} = e^{\lambda t(e^{iu}-1)}$$

6 Марковские процессы, определения и свойства.

Из Moodle:

Пусть N – множество натуральных чисел, $T > 0$.

$B(R)$ - пространство измеримых ограниченных борелевских функций, заданных на вещественной оси R

$M(R)$ - пространство ограниченных борелевских мер, определенных на борелевской σ -алгебре \mathcal{B}_R .

Для заданной случайной величины $\xi \in R$, функции $f \in B(R)$ и σ -подалгебры \mathcal{G} σ -алгебры \mathcal{F} пусть $E[f(\xi)|\mathcal{G}]$ обозначает условное математическое ожидание случайной величины $\eta = f(\xi)$ относительно \mathcal{G} .

P. S. борелевская функция — отображение одного топологического пространства в другое (обычно оба суть пространства вещественных чисел), для которого прообраз любого борелевского множества есть борелевское множество.

Случайная величина ξ порождает вероятностную меру μ_{ξ} , определенную соотношением $\mu_{\xi}(G) = P\{\omega: \xi(\omega) \in G\}$ для любого борелевского подмножества $G \in \mathcal{B}_R$. Пусть \mathcal{F}_{θ} обозначает σ -алгебру, порожденную случайными величинами $\xi(\theta)$, $\theta \in [s, T]$.

??? Все предыдущее нам нужно?

Случайный процесс $\xi(t) \in R$ называется **Марковским случайным процессом**, если для любой измеримой ограниченной скалярной функции $f(x)$ справедливо равенство

$$E[f(\xi(t))|\mathcal{F}_{\theta}] = E[f(\xi(t))|\xi(\theta)] \quad (1.1)$$

Когда пространство состояний Марковского процесса счетно, то она называется **Марковской цепью**.

??? Может быть в правой части должно быть $\theta(T)$

Для любого $G \in \mathcal{B}_R$ соотношение $P(s, x, t, G) = P\{\xi(t) \in G | \xi(s) = x\}$ определяет **переходную вероятность** марковского процесса $\xi(t)$. Марковское свойство процесса $\xi(t)$ влечет за собой справедливость **уравнения Чепмена-Колмогорова**

$$P(s, x, t, G) = \int_R P(s, x, \tau, dy) P(\tau, y, t, G) \quad (1.2)$$

??? может быть должно быть y а не dy , почему интегрирование по всему R ?

Мы можем говорить о дискретном и непрерывном времени, а также о дискретном и непрерывном состоянии.

Марковский процесс называют **однородным по времени**, если

$$P(s, x, t, G) = P(t-s, x, G)$$

В случае, когда множество значений процесса $\xi(t)$ – дискретное множество V ,

например $V = \{1, 2, \dots, d_1\}$ или множество целых чисел, случайный процесс $\nu(t)$ со значением из V называют **однородной по времени** марковской цепью, если

$$P\{\nu(t+h) = l \mid \nu(t) = l\} = 1 - q_l h + o(h),$$

$$P\{\nu(t+h) = m \mid \nu(t) = l\} = q_{lm} h + o(h), \text{ где } m \neq l \text{ и } q_l = \sum_{m \neq l} q_{lm}.$$

??? Мы не можем суммировать по этим индексам, т.к. они уже используются

Если марковская цепь задана в терминах q_{lm} , то важно иметь ввиду, что ее переходные вероятности задаются соотношением

$$p_{lm} = \frac{q_{lm}}{q_l} = \frac{q_{lm}}{\sum_{m \neq l} q_{lm}} \quad ??? \text{ Что такое } q_{lm}$$

Примером **марковской цепи с непрерывным временем и дискретным множеством состояний** $X = N$ является пуассоновский процесс $N(t)$ с интенсивностью λ , поскольку

$$P\{N(t+h) = l+1 \mid N(t) = l\} = \lambda h + o(h),$$

$$P\{N(t+h) = l \mid N(t) = l\} = 1 - \lambda h + o(h)$$

7 Переходные вероятности, уравнение Чепмена-Колмогорова

Переходная вероятность Марковского процесса выражается формулой

$$p(s, x, t, A) = P\{\xi(t) \in A \mid \xi(s) = x\}, \text{ где } s, t \in [0, T], x \in B, A - \text{борелевское подмножество } B.$$

Марковское свойство при этом описывается **уравнением Чепмена-Колмогорова**,

$$p(s, x, t, A) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(s, x, \theta, dz) p(\theta, z, t, A)$$

Плотность переходной вероятности: $p(s, x, t, y)$ - это положительная функция,

$$p(s, x, t, A) = \int_A p(s, x, t, y) dy$$

при этом уравнение Чепмена-Колмогорова имеет вид

$$p(s, x, t, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(s, x, \theta, z) p(\theta, z, t, y) dz \quad ??? \text{ Здесь уже нет дифференцирования внутри } p$$

уравнение Чепмена-Колмогорова для марковской цепи с дискретным временем. \Rightarrow

$$p_{kj}^{(m)} = \sum_{i=1}^n p_{ki}^{(m-1)} p_{ij}^1 = \sum_{i=1}^n p_{ki}^{(m-1)} p_{ij}^{(1)}, \quad m = 1, 2, 3, \dots$$

Для цепи с непрерывным временем опишем с помощью уравнения Чепмена-Колмогорова:

$$p_{ij}(t) = \sum_{i=1}^n p_{ij}(t-s) p_{ij}(s) \text{ или } p_{ij}(t) = \sum_{i=1}^n p_{ij}(s) p_{ij}(t-s), \text{ если } 0, j \in \forall = \{1, \dots, n\} \quad ??? \text{ индексы в}$$

сумме и в формуле одинаковые

Борелевская сигма-алгебра - минимальная сигма-алгебра, содержащая все открытые (каждая точка входит вместе с некоторой окрестностью) подмножества топологического пространства (также она содержит и все замкнутые, эти подмножества также называются Борелевыми). Борелевская сигма-алгебра обычно выступает в роли сигма-алгебры случайных событий вероятностного пространства. В борелевской сигма-алгебре на прямой или на отрезке содержатся многие «простые» множества: все интервалы, полуинтервалы, отрезки и их счётные объединения. Борелевской сигма-алгеброй в R называется самая маленькая среди всех возможных σ -алгебр, содержащих любые интервалы на прямой. Если не оговорено иное, в

качестве топологического пространства выступает множество вещественных чисел.

8 Марковские цепи с дискретным временем, способы их описания (матрицы, графы)

Пусть $V = \{v_1, \dots, v_k\}$ - множество состояний. В любой момент времени система может находиться в одном состоянии и меняет свое состояние только в моменты $t_1, t_2, \dots, t_n, \dots$. $v(t)$ - состояние системы в момент времени t .

$$p_k(t) = P(v(t) = k), \quad p_{ij} = P(v(k+1) = j | v(k) = i).$$

Марковская цепь с дискретным временем

$$E[v^{(k)} | v(0), v(1), \dots, v(k-1)] = E[v^{(k)} | \mathcal{F}_{k-1}] = E[v^{(k)} | v(k-1)]$$

$$P(s, x, y, B) = \int_R p(s, x, \theta, dz) p(\theta, z, t, B) \quad \text{- уравнение Чепмена-Колмогорова для}$$

марковской цепи с дискретным временем. $\Rightarrow p_{kj}^{(m)} = \sum_{i=1}^n p_{ki}^{(m-1)} p_{ij}^1 = \sum_{i=1}^n p_{ki}^{(m-1)} p_{ij}^{(l)}, \quad m=1, 2, 3, \dots$

В матричном виде уравнение Чепмена-Колмогорова имеет вид $P^m = P^{m-1} P^1$

Матрица P называется также **стохастической матрицей (переходная вероятность)**,

т.к. она обладает свойством: $\sum_{j=1}^n p_{kj} = 1, \quad 0 \leq p_{ij} \leq 1$

Чтобы задать марковскую цепь с дискретным временем, достаточно задать ее начальное состояние $v = (v_1, \dots, v_n)$ (если цепь имеет n последовательных состояний) и переходную вероятность $p_{ik}^{(1)}$ за один шаг.

Множество состояний марковской цепи также можно рассматривать как множество узлов некоторого графа.

Не входит в вопрос, но на всякий случай:

Состояние марковской цепи можно разбить на **классы**

Если состояние i и j таковы, что $p_{ij} > 0, \quad p_{ji} > 0$, то эти состояния называются **сообщающимися**.

Если состояния i и j таковы, что $p_{ij}^{(n)} > 0, \quad p_{ji}^{(n)} > 0$, то эти состояния называются **сообщающимися при некотором n** .

Будем называть класс C такой, что для всех $i, j \in C$ состояния i и j – сообщаемые – **классом сообщающихся состояний**.

Замкнутый класс состояний - это класс, из которого нельзя выйти.

Из того, что $p_{ij}^{(n-1)} > 0$ следует, что $j \in C$. ???

Утверждение: цепь Маркова с конечным числом состояний имеет хотя бы один замкнутый сообщающийся класс.

Состояние из незамкнутого класса, называется **несущественным** состоянием.

Состояние i называется **поглощающим**, если $p_{ii} = 1$.

Цепь Маркова называется **неприводимой**, если все ее состояния попадают в один замкнутый класс.

Состояние i из некоторого подкласса $i \in I$ называется **возвратным**, если событие ??? и

невозвратным, если событие ???

Теорема: состояние i является возвратным, если величина $f_i = P_i(X_n = i, \forall_n) = 1$ и невозвратно, если $f_i < 1$???

9 Марковские цепи с непрерывным временем, генератор марковской цепи и его свойства.

Марковское свойство для цепи с непрерывным временем опишем с помощью уравнения

Чепмена-Колмогорова: $P(s, x, t, y) = \int_{-\infty}^{\infty} p(s, x, \theta, z) p(\theta, z, t, y) dz$, $p_{ij}(t) = \sum_{i=1}^n p_{ij}(t-s) p_{ij}(s)$ или

$$p_{ij}(t) = \sum_{k=1}^n p_{ij}(s) p_{ij}(t-s), \text{ если } 0, j \in \forall = \{1, \dots, n\}$$

Различные способы описания н.в.

$$1) P(\xi(0) = i_0, \xi(t_1) = i_1, \dots, \xi(t_k - t_{k-1}) = i_{k-1}; \xi(t_m - t_{m-1}) = i) = \mu_0(p_{i_0, i_1}(t_1), \dots, p_{i_{k-1}, i_m}(t_m - t_{m-1})) = G$$

??? почему индексы повторяются

и используем соотношение: $P(AB) = P(A/B)P(B)$ и выбираем последовательно в

качестве события вида $\{\xi(t_k - t_{k-1}) = i_k / \xi(t_{k-1}) = i_{k-1}\}$ получим требуемое соотношение,

где $\mu_0 = P\{\xi(0) = i_0; P_{i_0, i_1}(t_1 - t_0) = P(\xi(t_1) = i_1 / \xi(t_0) = i_0)\}$???

2) Нужно задать поведение переходной вероятности на малых интервалах времени.

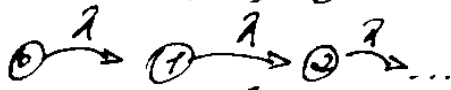
В качестве примера МЦ с НВ рассмотрим Пуассоновский процесс $N(t)$. Пусть

$$p_k(t) = P(N(t) = k), \text{ при этом } \sum_{k=0}^{\infty} p_k(t) = 1$$

Приращения процесса $N(t)$ на пересечении интервалов независимы, т.е. $N(t + \Delta t) - N(t)$ и $N(s + \Delta s) - N(s)$ - независимые случайные величины.

При этом $P(N(t) = 0) = e^{-\lambda t}$, $P(N(t) = 1) = e^{-\lambda t} \lambda t$ если t мало, то $P(N(t) \geq 2) = o(t)$

Граф, соответствующий пуассоновскому процессу имеет вид



и матрица Q имеет вид

$$Q = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & \lambda & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

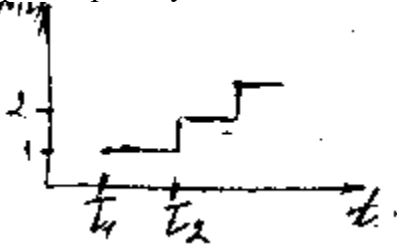
класс Q -матриц – это класс матриц вида

$$Q = \begin{pmatrix} q_{11} & \dots & q_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ q_{n1} & \dots & q_{nn} \end{pmatrix}, \text{ обладающих следующими свойствами:}$$

q_{ij} - непрерывная величина, при $i \neq j$ $\sum_{i=1}^n q_{ij} = 0$, откуда $q_{ij} = -\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n q_{ij} = 0$???

Матрицы образуют алгебру M_n , это значит: $A, B \in M_n$ и $\alpha, \beta \in \mathfrak{R}$, то $\alpha A + \beta B \in M_n$

Траектория Пуассоновского процесса имеет вид



Опишем поведение приращения пуассоновского процесса на малых временах.

$$P(N(t + \Delta t) - N(t) = k) = e^{-\lambda \Delta t} \frac{(\lambda \Delta t)^k}{k!}$$

$$P(N(t + \Delta t) - N(t) = 0) = e^{-\lambda \Delta t} = 1 - \lambda \Delta t + o(|\Delta t|)$$

$$P(N(t + \Delta t) - N(t) = 1) = e^{-\lambda \Delta t} \lambda \Delta t$$

$$P(N(t + \Delta t) - N(t) \geq 2) = o(\Delta t)$$

$$p_{ik}(t + \Delta t) = P(N(t + \Delta t) = k \mid N(t) = i)$$

Вычислим

$$p_{ik}(t + \Delta t) - p_{ik}(t) = \begin{cases} \lambda \Delta t + o(\Delta t), & k = i + 1 \\ o(\Delta t), & k \geq 2 \end{cases} \quad ??? \text{ верны ли условия}$$

$$\text{т.к. } p_{ii}(t + \Delta t) - p_{ii}(t) = 1 - \lambda \Delta t + o(\Delta t)$$

$$\text{Вычислим } \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{p_{ik}(t + \Delta t) - p_{ik}(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} [\lambda \Delta t + o(\Delta t)] = \lambda$$

$$p_j = \sum_{i=1}^n p_i p_{ij}(t), \quad p_i(t) = P\{x(t) = i\} \quad p_{ij}(t) = P\{x(t) = j \mid x(0) = i\} \quad ??? \text{ почему } 0$$

Таким образом, соответствующее уравнение $p_i(t)$ будет иметь вид $\frac{dp_i(t)}{dt} = \lambda p_i(t) \quad ???$

10 Прямые и обратные уравнения Колмогорова для марковской цепи.

Марковские цепи с дискретным временем:

$$P(\xi^{(1)} = j \mid \xi = i) = p_{ij}$$

$$P(\xi^{(2)} = k \mid \xi^{(0)} = i, \xi^{(1)} = j) = p \cdot P(\xi^2 = k \mid \xi^{(1)} = j) = p_{ji}^2 \quad ??? \text{ правильно ли поставлены}$$

$$p_{ik}^2 = \sum_{j=1}^n p_{jk} p_{ij}$$

ИНДЕКСЫ

$$Q = (q_{ik})_{i,k=1}^n \sum_k q_{ik} = 0, \quad \sum_{k \neq i} q_{ik} > 0, \quad i \neq k, q_{ik} \geq 0$$

$$P(t) = e^{tQ} = I + IQ + \frac{t^2 Q^2}{2!} + \dots + \frac{t^n Q^n}{n!} + \dots$$

$$|Q| = \max |q_{ik}|$$

$$|Q|^2 = \sum_k q_{ik} q_{kj} = QQ^T \quad ???$$

$$|P(t)| \leq 1 + tk + \frac{t^2 k^2}{2!} = e^{tk}$$

$$P(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{P(t + \Delta t) - P(t)}{\Delta t} = Qe^{tQ} = QP(t)$$

$$\frac{dP(t)}{dt} = P(t)Q \quad \text{- прямое уравнение Колмогорова, } P(0) = I$$

$$\frac{dP(t)}{dt} = QP(t) \quad \text{- Обратное уравнение Колмогорова}$$

11 Процессы рождения и гибели

Рассмотрим ПРГ, у которого интенсивность рождения λ , а гибели - μ

Генератор ПРГ имеет вид:

$$Q = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & 0 & \dots \\ \mu & -(\lambda + \mu) & \lambda & 0 & \dots \\ 0 & \mu & -(\lambda + \mu) & \lambda & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

Для того, чтобы найти матрицу переходных вероятностей, рассматриваем прямое уравнение Колмогорова

$$\frac{dP(t)}{dt} = P(t)Q, \quad P(0) = I$$

При этом для элементов $p_{ij}(t)$ матрицы $P(t)$ - получим следующую систему ОДУ:

$$\begin{pmatrix} p_{11} & \dots & p_{1n} \\ p_{21} & \dots & \\ 0 & \dots & \\ 0 & \dots & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & 0 & \dots \\ \mu & -(\lambda + \mu) & \lambda & 0 & \dots \\ 0 & \mu & -(\lambda + \mu) & \lambda & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \quad ???$$

Получаем следующую систему ОДУ:

$$\frac{dp_{11}(t)}{dt} = -\lambda p_{11} + \mu p_{12}, \quad p_{11}(0) = 1$$

$$\frac{dp_{12}(t)}{dt} = -(\lambda + \mu)p_{12}(t) + \lambda p_{11}(t) + \mu p_{13}(t)$$

и т.д.

Напомним, что справедливо соотношение для МЦ с НВ

$$p_j = \sum_{i=1}^n p_i p_{ij}(t), \quad p_i(t) = P\{x(t) = i\} \quad p_{ij}(t) = P\{x(t) = j / x(0) = i\}$$

Таким образом, зная уравнение для $p_{ij}(t)$ можно найти уравнения для $p_i(t)$.

рассмотрим еще один подход к выводу уравнений для $p_{ij}(t)$.

При фиксированном $X(t) = i$

$$P(x(t+h) = i | x(t) = 0) = 1 - (\lambda + \mu)h + o(h)$$

$$p(x(t+h) = i+1 | x(t) = i) = \lambda_i h + o(h)$$

$$p(x(t+h) = i-1 | x(t) = i) = \mu_i h + o(h)$$

$$p(x(t+h) = i | x(t) > 1) = o(h)$$

При этом прямое уравнение Колмогорова будет иметь вид

$$\frac{dp_{ij}}{dt} = \lambda_{j-1}p_{ij-1} - (\lambda_i + \mu_i)p_{ij} + \mu_{j+1}p_{ij+1}, \text{ при этом полагаем } p_{i0}(0) = 1; p_{ij}(0) = 0, \text{ если } i \neq j$$

Обратное уравнение Колмогорова для рассматриваемого процесса будет иметь вид

$$\frac{dp}{dt} = QP, P(0) = I$$

$$\frac{dp_{ij}(t)}{dt} = \lambda_i p_{i+1}(t) - (\lambda_i + \mu_i)p_{ij}(t) + \mu_0 p_{i-1,j} \quad ??? \text{ что такое } \mu_0$$

$$p_{i0}(0) = 1, p_{ij}(0) = 0, i \neq j$$

12 Системы массового обслуживания и их классификация

СМО Системы массового обслуживания – совокупность, включающая:

1. Входящий поток
2. Обслуживающее устройство
3. Выходящий поток

Для того, чтобы описать СМО, нужно

- 1) Описать входящий поток – задать распределения
- 2) Описать время обслуживания одним устройством
- 3) Задать число обслуживающих устройств
- 4) Описать величину очереди

Входящий поток – поток, поступающих заявок – это СП с дискретным множеством состояний.

Опишем классификацию СМО: **классификация Кендалла**.

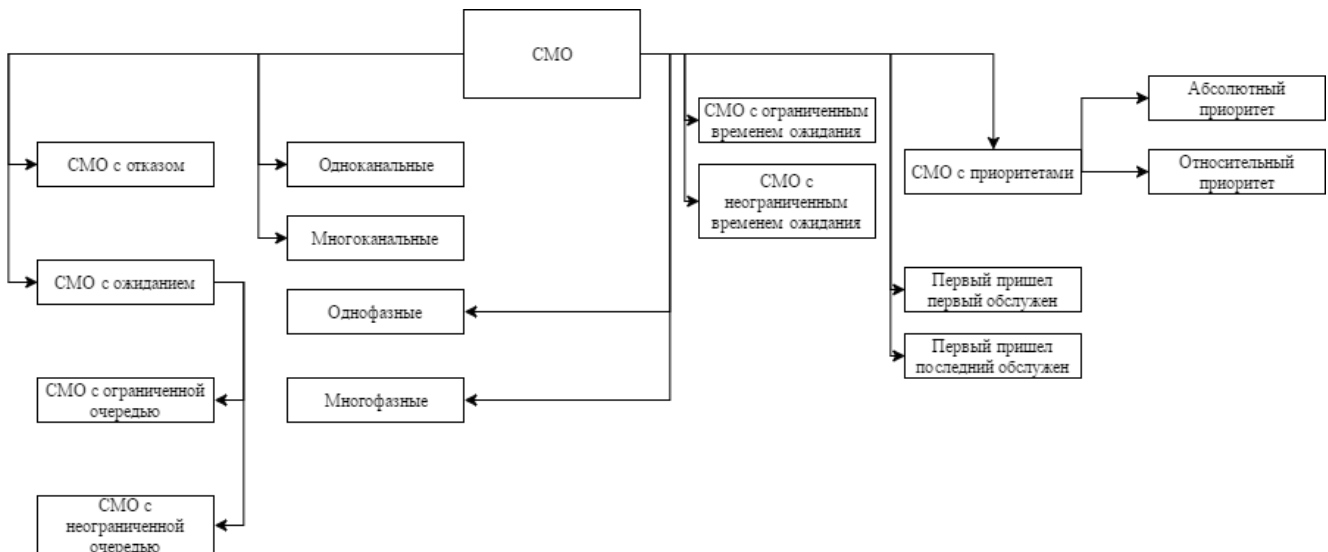
Пример: $M | M | n | r$. Это означает, что входящий поток - марковский, время обслуживания – экспоненциальное, n - число обслуживаемых устройств, r - длина очереди.

Входящий поток

Обозначим $\partial(t)$ - число заявок поступивших в систему за время t

Свойства входящего потока

1. **Отсутствуют последствия** - во все моменты времени имеет независимые приращения (значения) на неперекрывающихся интервалах времени
2. **Стационарность**, статистические характеристики не изменяются при сдвиге всех точек вдоль оси времени на произвольную Δ
3. **Ординарность**, $P(\partial(\Delta t) > 1) = o(\Delta t)$ т.е. заявки поступают по одной.



13 Одноканальные и многоканальные СМО с отказами

В Moodle есть ответ на этот вопрос.

1. Одноканальные

Системой с отказами будем называть СМО без накопителей(без очереди).

Модель одноканальной с-мы с отказом является простейшая из всех моделей СМО. Входящий поток у этой системы описывается пуассоновским процессом с интенсивностью λ , т.е число заявок принадлежащих к моменту $t, v(t)$ имеет

$$\text{распределение } P(v(t) = k) = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!}$$

Обслуживание поступивших заявок происходит в течение случ.времени

$\tau_{serv} = \tau_{otk}$ с экспоненциальным законом распределения с параметром μ , те

$$P(\tau_{serv} < t) = \begin{cases} 1 - e^{-\mu t}, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases} \text{ и плотность этого распределения } P(t) = \mu \cdot e^{-\mu t}$$

Рассмотренная система имеет 2 состояния:

0-в с-ме нет заявок(канал свободен)

1-в с-ме есть одна заявка(канал занят)

$v(t)$ -это состояние системы:

$$P(v(t) = 0) = p_0; P(v(t) = 1) = p_1; p_0(t) + p_1(t) = 1 \quad (1)$$

Уравнение Колмагорова для м.ц. имеет вид:

$$\frac{dp_0}{dt} = -\lambda p_0(t) + \mu p_1(t) \quad (2)$$

$$\frac{dp_1}{dt} = -\lambda p_1(t) + \mu p_2(t) \quad (3)$$

Генератор этой м.ц. имеет вид:

$$\Theta = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda \\ \mu & -\mu \end{pmatrix}$$

$$\frac{d}{dt} p(t) = \Theta * p(t); \quad p(t) = e^{\Theta t}$$

Выражая $p_1(t)$ из (1) в виде: $p_1(t) = 1 - p_0(t)$ и подставляя в (2)=>

$$\frac{dp_0}{dt} = -\lambda p_1 + \mu(1 - p_0(t)) \Rightarrow \frac{dp_0}{dt} = -(\lambda + \mu)p_0(t) + \mu(4)$$

$$p_0(t) = \frac{\mu}{\lambda + \mu} + \frac{\lambda}{\lambda + \mu} \cdot e^{-(\lambda + \mu)t} \quad (5)$$

14 Система $M|M|1|_\infty$ ОДУ для распределений

В Moodle есть ответ на этот вопрос

1. Марковский входящий поток
2. Экспоненциальное время обслуживания
3. 1 обслуживающее устройство – одноканальная система
4. Очередь бесконечна

Когда очередь бесконечна, говорят, что это – **система без потерь**.

1. – число заявок в системе в момент t . Это случайный процесс, принимающий значения из множества $V = \{0, 1, 2, \dots\}$

Обозначим $p_{ij}(\Delta)$ - вероятность перехода из состояния i в состояние j за время Δ (Δt).

По предположению, за время Δ с вероятностью $1 - \lambda\Delta + o(\Delta)$ не поступит ни одной заявки, а если $\nu(t) > 0$, то с вероятностью $1 - \mu\Delta + o(\Delta)$ ни одна заявка не будет обслужена.

Одна заявка может быть обслужена – тогда число заявок -1 . Может прийти заявка, тогда $+1$.

$p_{00}(\Delta)$ - вероятность того, что за время Δ из 0 никто не пришел $= 1 - \lambda\Delta + o(\Delta)$, $i, j = 0$

$p_{i,i+1} = \lambda\Delta + o(\Delta)$ $p_{i,i-1}(\Delta) = \mu\Delta + o(\Delta)$

Другими словами $\nu(t)$ - это процесс рождения-гибели (ПРГ).

Пусть $p_i(t) = p(\nu(t) = i)$

$p_0(t + \Delta) = (1 - \lambda\Delta)p_0(t) + \mu p_1(t)\Delta + o(\Delta)$

$p_i(t + \Delta) = (1 - (\lambda + \mu)\Delta)p_i(t) + \lambda\Delta p_{i-1}(t) + \mu\Delta p_{i+1}(t) + o(\Delta)$

$\frac{p_i(t + \Delta) - p_i(t)}{\Delta} = -(\lambda + \mu)p_i(t) + \lambda p_{i-1}(t) + \mu p_{i+1}(t) + O(\Delta)$ теперь O а не o , т.к. на одну Δ

Получили производную: $\frac{dp_i(t)}{dt} = -(\lambda + \mu)p_i(t) + \lambda p_{i-1}(t) + \mu p_{i+1}(t)$, $i = 1, \dots$

$$\frac{dp_0(t)}{dt} = -\lambda p_0(t) + \mu p_1(t)$$

Дальше мы хотим решить эту систему уравнений

Для этой системы нам не хватает начальных условий

$p_i(0) = p_i$ уже без времени

Поскольку явно решить эту систему сложно, то можно предположить, что существует

$$\lim_{t \rightarrow \infty} p_i(t) = p_i$$

Мы сказали, что в правой части в пределе должны стоять константы, тогда их производные – нули. Тогда система приобретет вид

$$0 = -\lambda p_0 + \mu p_1$$

$$0 = -(\lambda + \mu)p_i + \lambda p_{i-1} + \mu p_{i+1}$$

Откуда получим, что $p_1 = \frac{\lambda}{\mu} p_0$

Обозначим $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$

$$\mu p_2 = (\lambda + \mu)p_1 + \lambda p_0 = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 p_0 + \frac{\lambda}{\mu} p_0 + \frac{\lambda}{\mu} p_0$$

Отсюда $p_0 = \frac{1}{\sum_{i=0}^{\infty} \rho^i}$

При этом $\sum_{i=0}^{\infty} \rho^i < \infty$ если $\rho < 1$ и тогда $\frac{1}{1-\rho}$ - сумма убывающей геометрической прогрессией.

Следовательно, если $\rho < 1$, то $p_0 = (1-\rho)$ и $p_i = \rho^i (1-\rho)$

Мы нашли вероятность любого состояния в стационарном режиме

Итак, стационарное распределение числа заявок в системе $M/M/1/\infty$ является геометрическим распределением.

N - среднее число заявок в системе.

$$N = \sum_{i=1}^{\infty} p_i i = (1-\rho) \sum_{i=0}^{\infty} i \rho^i = \frac{\rho}{1-\rho}$$

средняя длина очереди - Q . $Q = N - 1$

$$Q = \sum_{i=1}^{\infty} (i-1) p_i = (1-\rho) \sum_{i=1}^{\infty} (i-1) \rho^i = (1-\rho) \left[\sum_{i=1}^{\infty} i \rho^i - \sum_{i=1}^{\infty} \rho^i \right] = \frac{\rho^2}{1-\rho}$$

$\nu(t)$ число заявок в системе

τ - время обслуживания.

Среднее время ожидания начала обслуживания $\frac{\rho}{\mu(1-\rho)} = \bar{w}$

среднее время пребывания в системе $\frac{1}{\mu(1-\rho)} = \bar{v}$

Параметр ρ называется **загрузкой системы** (или **пропускной способностью**).

15 Стационарные распределения для системы $M|M|1|r$???

$$p_i = \frac{1-\rho}{1-\rho^{r+2}} \rho^i \quad i = 0, \dots, r+1$$

$$p_0 = \left[\sum_{i=0}^{n-1} \frac{\rho^i}{i!} + \frac{\rho^n}{n!} \frac{1 - \left(\frac{\rho}{n}\right)^{r+1}}{\left(1 - \frac{\rho}{n}\right)} \right]^{-1} \quad ??? \quad Q = \frac{\rho^2 p_0}{(1-\rho)^2}$$

$$p_{W=0} = \sum_{i=0}^{n-1} p_i = p_0 \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\rho^i}{i!}$$

W - среднее время пребывания в системе

16 Формулы Литтла

Пусть N - среднее число заявок в системе со стационарным средним временем пребывания в системе \bar{v}

Тогда $N = \lambda \bar{v}$

За время T в среднем в систему поступит λT заявок

При этом каждая заявка в среднем проводит в системе время \bar{v} . Среднее время пребывания в системе λT заявки равно $\lambda \bar{v} T$

При этом в каждый момент в системе находится $N = \frac{\lambda \bar{v} T}{T} = \lambda \bar{v}$

Аналогично, $Q = \lambda \cdot \bar{w}$ - эти формулы называются **формулами Литтла**.

17 Система M|M|n|r ОДУ для распределений если r конечно

Система массового обслуживания M|M|N|r

Правило прихода заявок: $P(v(t) = k) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}$.

Обозначим $v(t)$ число заявок в системе. $v(t)$ - это марковский процесс с множеством состояний $\mathcal{X} = \{0, 1, 2, \dots, n+r\}$. Выпишем систему соотношений: $p_k(t) = P(v(t) = k)$,

$$p_{ij}(\Delta) = P(v(t+\Delta) = j | v(t) = i), \quad p_{ii}(\Delta) = P(v(t+\Delta) = i | v(t) = i).$$

Далее, поскольку $e^{-\lambda \Delta} = 1 - \lambda \Delta + o(\Delta)$

$$p_{i,i+1}(\Delta) = \lambda \Delta + o(\Delta), \quad p_{i,i-1}(\Delta) = \mu \Delta + o(\Delta) \quad \text{получаем}$$

$$P\{\text{не пришло ни одной заявки}\} = 1 - \lambda \Delta + o(\Delta),$$

$$P\{\text{не ушло ни одной заявки}\} = 1 - \mu \Delta + o(\Delta)$$

Интенсивность перехода из состояния 1 в 0 - μ , из состояния 2 в 1 - 2μ и т.д. до n . Начиная с $n+1$ и кончая $n+r$, интенсивность будет равна $n\mu$.

1й случай: $i < n$. Заявки сразу поступают на обслуживание и обслуживаются независимо

$$p_{i,i-1}(\Delta) = i\mu\Delta + o(\Delta)$$

$$p_{ii}(\Delta) = (1 - \lambda\Delta + o(\Delta))(1 - \mu\Delta + o(\Delta)) = 1 - (\lambda + \mu)\Delta + o(\Delta)$$

$$p_{i,i+1}(\Delta) = \lambda\Delta + o(\Delta)$$

??? может быть для ii будет

$$p_j(t) = P(v(t) = j) = \sum_i p_{ij}(t) \cdot p_i(t)$$

$$1 - (\lambda + \mu i)$$

Воспользуемся выражениями для $p_{ii}(\Delta)$. Заметим, что все обслуживающие устройства работают независимо. При этом вероятность того, что освободится одно устройство равна $\mu\Delta + o(\Delta)$, а вероятность того, что оно не освободится равна $1 - \mu\Delta + o(\Delta)$.

У нас есть события: $A_1 = \{\text{не освободилось первое устройство}\}, \dots, A_i = \{\text{не освободилось } i\text{-е устройство}\}$. Произошло $B = A_1, \dots, A_i$ - ни одно устройство не освободилось.

Таким образом, $P(B) = P(A_1 \dots A_i) = \prod_{k=1}^i P(A_k) = (1 - \mu\Delta + o(\Delta))^i$??? здесь не пропущен 1-

Возведем в степень i , используя бином Ньютона, $o(\Delta)$ опускаем...

$$(a+b)^i = a^i + ia^{i-1}b + \dots \text{ все остальное не очень волнует, т.е. : } (1 - \mu\Delta + o(\Delta))^i = 1 - i\mu\Delta + o(\Delta)$$

Теперь заменим $i+1$ и $i-1$ на j . : ???

Получив соотношение для $p_{ij}(\Delta)$ и воспользовавшись формулой полной вероятности

$\sum p_{ij}(t) \cdot p_i(t) = p_j(t)$, получим соотношение для $j = 0, \dots, n, \dots, n+r$??? или

$$p_i(t) = \sum_j p_{ij}(t) p_j(t)$$

$$p_0(t + \Delta) = (1 - \lambda\Delta) p_0(t)$$

$$p_i(t + \Delta) = (1 - (\lambda + i\mu)\Delta) p_i(t) + \lambda\Delta p_{i-1}(t) + (i+1)\mu p_{i+1}(t)\Delta + o(\Delta), i < n$$

2й случай: $n \leq i$. Получим:

$$p_{ii}(\Delta) = 1 - (\lambda + n\mu)\Delta + o(\Delta)$$

$$p_{i,i+1}(\Delta) = \lambda\Delta + o(\Delta)$$

$$p_{i,i-1}(\Delta) = n\mu\Delta + o(\Delta)$$

$$p_{i,j}(\Delta) = o(\Delta) \quad |i - j| \geq 2$$

3й случай: $i = n+r$

$i = n+r$. Если $i = n+r$, то поступившая заявка теряется $p_{n+r,n+r}(\Delta) = 1 - n\mu\Delta + o(\Delta)$

$$p_{n+r,n+r-1}(\Delta) = n\mu\Delta + o(\Delta)$$

Таким образом, процесс $\nu(t)$ - это процесс рождения и гибели с интенсивностями

$$\lambda_i = \lambda \quad i = 0, \dots, n+r-1, \quad \lambda_{n+r} = 0$$

$$\mu_i = \mu \quad i = 0, \dots, n-1$$

$$\mu_i = n\mu, \quad n \leq i \leq n+r$$

Отсюда следует, что выполняются соотношения:

$$p_0(t + \Delta) = (1 - \lambda\Delta) p_0(t) + \mu\Delta p_1(t) + o(\Delta)$$

$$p_i(t + \Delta) = (1 - (\lambda + i\mu)\Delta) p_i(t) + \lambda\Delta p_{i-1}(t) + i\mu\Delta p_{i+1}(t) + o(\Delta), \quad i = 1, \dots, n-1$$

$$p_i(t + \Delta) = (1 - (\lambda + n\mu)\Delta) p_i(t) + \lambda\Delta p_{i-1}(t) + n\mu\Delta p_{i+1}(t) + o(\Delta), \quad i = n, \dots, n+r-1$$

$$p_{n+r}(t + \Delta) = (1 - n\mu\Delta) p_{n+r}(t) + \lambda\Delta p_{n+r-1}(t) + o(\Delta)$$

При этом начальные условия $p_i(0) = 1$

Нас будут интересовать объекты $\frac{p_{ij}(t + \Delta) - p_{ij}(t)}{\Delta}$

$$p_0(t + \Delta) - p_0(t) = -\lambda\Delta p_0(t) + \mu\Delta p_1(t) + o(\Delta)$$

Где-то здесь была опечатка!!!

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{p_0(t + \Delta t) - p_0(t)}{\Delta t} = -\lambda p_0(t) + \mu p_1(t) = \frac{dp_0(t)}{dt}$$

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{p_i(t + \Delta t) - p_i(t)}{\Delta t} = -(\lambda + i\mu) p_i(t) + \lambda p_{i-1}(t) + i\mu p_{i+1}(t) = \frac{dp_i(t)}{dt}, \quad i=1, \dots, n-1$$

Мы получили систему ОДУ

$$\frac{dp_0(t)}{dt} = -\lambda p_0(t) + \mu p_1(t)$$

$$\frac{dp_i(t)}{dt} = -(\lambda + i\mu) p_i(t) + \lambda p_{i-1}(t) + i\mu p_{i+1}(t), \quad i=1, \dots, n-1$$

$$\frac{dp_i(t)}{dt} = -(\lambda + n\mu) p_i(t) + \lambda p_{i-1}(t) + n\mu p_{i+1}(t) \quad i=n, \dots, n+r-1$$

$$\frac{dp_{n+r}(t)}{dt} = -n\mu p_{n+r}(t) + \lambda p_{n+r-1}(t)$$

НАЗОВЕМ ВСЕ ЭТО СИСТЕМОЙ (14.1)

Таким образом, система $M|M|n|r$ – это процесс рождения и гибели. Точнее процесс $\nu(t)$ – это ПРГ с интенсивностями:

$$\lambda_i = \lambda, \quad \text{если } i=0, \dots, n+r-1$$

$$\lambda_{n+r} = 0 \quad \text{- заявка потеряется}$$

$$\mu_i = i\mu \quad i=0, \dots, n-1$$

$$\mu_i = n\mu \quad i=n, \dots, n+r$$

18. Стационарные распределения для системы $M|M|n|r$

Предположим, что решения $p_i(t)$ системы (14.1) имеют предельные распределения

$$\lim_{t \rightarrow \infty} p_i(t) = p_i$$

Тогда величины p_i удовлетворяют системе алгебраических уравнений

$$0 = -\lambda p_0 + \mu p_1$$

$$0 = -(\lambda + i\mu) p_i + \lambda p_{i-1} + i\mu p_{i+1} \quad i=1, \dots, n-1$$

$$0 = -(\lambda + n\mu) p_i + \lambda p_{i-1} + n\mu p_{i+1} \quad i=n, \dots, n+r-1$$

$$0 = -n\mu p_{n+r} + \lambda p_{n+r-1}$$

(14.2)

Граф, соответствующий системе (2) имеет вид КАРТИНКИ НЕТ... есть текстовое описание :)

0, 1, ..., i-1, i, i+1, ..., n-1, n, n+1, ..., n+r – узлы графа.

Из 1 в 0 – интенсивность μ

Из 2 в 1 – 2μ

Из i в $i-1 - i\mu$

Из $(i+1)$ в $i - (i+1)\mu$

Из n в $n-1 - n\mu$ и дальше везде будет $n\mu$

Принцип локального баланса, вытекающий из системы (14.2) утверждает, что входящий и выходящий потоки должны быть равны. Анализируя (14.2), получим

$$p_1(t) = \frac{\lambda}{\mu} p_0(t) \quad \lambda p_0 \text{ отсюда вытекает, а } \mu p_1 - \text{вытекает. ???}$$

$$\lambda p_i = (i+1)\mu p_{i+1}, \quad i=0, \dots, n-1$$

$$\lambda p_i = n\mu p_{i+1}, \quad i=n, \dots, n+r-1$$

Баланс нарушается только в последнем, т.к. ничего не выходит

$$\text{При этом, мы можем выразить все } p_i \text{ через } p_0 : p_{i+1} = \frac{\lambda}{\mu(i+1)} p_i = \frac{\lambda}{\mu(i+1)} \cdot \frac{\lambda}{\mu \cdot i} p_{i-1} \dots \text{ и}$$

т.д.

А также

$$\lambda p_{i-1} + \mu(i+1) p_{i+1} = (\lambda + i\mu) p_i \quad i=1, \dots, n-1$$

$$\lambda p_i = (i+1)\mu p_{i+1}, \quad i=1, \dots, n-1$$

$$\lambda p_i = n\mu p_{i+1}, \quad i=n, \dots, n+r-1 \quad ???$$

Итерируя полученные выражения, перейдем к соотношению

$$p_i = \frac{\rho^i}{i!} p_0, \text{ если } i=0, \dots, n-1$$

$$p_i = \frac{\rho^i}{n! n^{i-n}} p_0 \text{ если } i=n, \dots, n+r-1 \text{ т.е. } p_{n+1} = \frac{\rho^{n+1}}{n! n} p_0 \text{ и т.д.}$$

Воспользовавшись соотношением $\sum_{i=0}^{n+r} p_i = 1$ найдем выражение для p_0

$$p_0 = \left[\sum_{i=0}^{n-1} \frac{\rho^i}{i!} + \frac{\rho^n}{n!} \sum_{i=0}^r \left(\frac{\rho}{n} \right)^i \right]^{-1} \quad (14.3) \text{ т.к. } 1 = p_0 + p_1 + \dots + p_{n+r} = p_0 [\dots]^{-1}$$

Вероятность немедленного обслуживания заявки в стационарном режиме:

$$p_{W=0} = \sum_{i=0}^{n-1} p_i = p_0 \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\rho^i}{i!}$$

W - раньше было **среднее время пребывания в системе**

$$\text{Вероятность потери заявки } p_{n+r} = \pi = \frac{\rho^{n+r}}{n! n^r} \cdot p_0$$

Дополнительная информация: (не входит в вопрос)

Пусть $r=0$, т.е. $M | M | n | 0$ - с этих систем все началось. Мы звоним на коммутатор и все элементы коммутатора заняты – тогда заявка теряется.

Соответствующая система называется **системой Эрланга**. Она характерна для телефонных сетей.

В этом случае $p_i = \frac{\rho^i}{i!} \left[\sum_{k=0}^n \frac{\rho^k}{k!} \right]^{-1} \quad i=0, \dots, r$

Стационарные характеристики СМО $M | N | n | r$

Стационарная средняя длина очереди Q

$Q = \sum_{i=1}^r i p_{n+i} = p_n \sum_{i=1}^n i \left(\frac{\rho}{n} \right)^i$ - для вычисления Q положим $\frac{\rho}{n} = y$ и заметим, что

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n i y^i &= y \sum_{i=1}^n i y^{i-1} = y \frac{d}{dy} \sum_{i=1}^n y^i = y \frac{d}{dy} \left[\frac{y(1-y^r)}{1-y} \right] = y \frac{1-(r+1)y^r(1-y) + y(1-y^r)}{(1-y)^2} = \\ &= \frac{1-(r+1)y^r + r y^{r+1}}{(1-y)^2} \cdot y \end{aligned}$$

И $p_n = \frac{\rho^n}{n!} p_0$

Подставляем полученное выражение в Q :

Неизвестная дата

$M | M | n | r$

Появляется система с потерями

$$\frac{dp_k}{dt} = -(\lambda + (k+1)\mu) p_k + \lambda p_{k-1}(t) + (k+1)\mu p_{k+1}(t) \quad k < n-1$$

Будет $+n\mu p_{k+1}(t)$ когда $k \geq n$

Будет конечная система линейных уравнений:

Мы дошли до формул Литтла. Мы нашли N, Q и на этом на прошлой лекции

остановились.

$Q = \frac{\rho^{n-1}}{(n-1)!}$, $Q = \sum_{i=1}^r i p_{n+i} = p_n \sum_{i=1}^n i \left(\frac{\rho}{n} \right)^i$ - для вычисления Q положим $\frac{\rho}{n} = y$ и заметим,

что

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n i y^i &= y \sum_{i=1}^n i y^{i-1} = y \frac{d}{dy} \sum_{i=1}^n y^i = y \frac{d}{dy} \left[\frac{y(1-y^r)}{1-y} \right] = y \frac{1-(r+1)y^r(1-y) + y(1-y^r)}{(1-y)^2} = \\ &= \frac{1-(r+1)y^r + r y^{r+1}}{(1-y)^2} \cdot y \end{aligned}$$

И $p_n = \frac{\rho^n}{n!} p_0$

Подставляем полученное выражение в Q : $Q = \frac{\rho^{n-1}}{(n-1)!} \cdot \frac{1 + r \left(\frac{\rho}{n} \right)^{r+1} - (r+1) \left(\frac{\rho}{n} \right)^r}{\left(\frac{n}{\rho} - 1 \right)^2} p_0$

Вернемся к соотношению локального баланса.

$$\lambda p_i = (i+1)\mu p_{i+1} \quad i=0, \dots, n-1$$

$$\lambda p_i = n\mu p_{i+1} \quad i=n, \dots, n+r-1$$

Эти соотношения обозначим (*)

Из $i \rightarrow i+1$ с λ

$i+1 \rightarrow i$ с $i\mu$

Обозначим $\pi = \frac{\rho^n}{n!} \left[\sum_{i=0}^n \frac{\rho^i}{i!} \right]^{-1}$ - стационарная вероятность потери заявки. При этом,

$$p_i = \begin{cases} \frac{\rho^i}{i!} p_0, & i = 0, \dots, n-1 \\ \frac{\rho^i}{n! n^{i-n}} p_0, & i = n, \dots, n+r-1 \end{cases}$$

Просуммировав соотношения (*) по i от 0 до $n+r$, получим $\mu \left(\sum_{i=1}^{n-1} i p_i + \sum_{i=n}^{n+r} n p_i \right) = \mu \bar{n}$,

где \bar{n} - среднее число занятых приборов.

Обозначим $1-\pi$ - вероятность того, что не все приборы заняты и пусть

$\lambda_D = \lambda(1-\pi) = \mu \bar{n}$ где λ_D называется **интенсивностью выхода (пропускной способностью) системы**.

Обозначим $W(x)$ - стационарное распределение времени ожидания в начале обслуживания в системе $M|M|n|r$

Если $i < n$, то заявка обслуживается немедленно, а если $n < i < n+r$ то она ждет в течении времени τ

Время ожидания начала обслуживания заявки, заставшей в системе $n+i$ заявок.

$$\tau = \sum_{i=1}^r \tau_i$$

Таким образом время ожидания распределено по закону Эрланга с $i+1$ степенью свободы или $\varepsilon_{i+1, n\mu}$

$$W(x) = \frac{1}{1-\pi} \left[\sum_{i=0}^{n-1} p_i + \sum_{i=1}^r p_{n+i} \varepsilon_{i+1}(x) \right] = \frac{1}{1-\pi} \left[p_{W=0} + \sum_{i=1}^r p_{n+i} \varepsilon_{i+1}(x) \right]$$

Эрланговское распределение выглядит $\frac{x^k}{k+1} e^{-\lambda x}$ - сложная плотность.

Преобразование Лапласа $W(x)$ имеет вид $\omega(s) = \int_0^\infty e^{-sx} w(x) dx$, где $w(x) = W'(x)$

$$\omega(s) = \frac{1}{1-\pi} \left[p_{W=0} + n\mu p_n \cdot \sum_{i=0}^{r-1} \frac{\lambda^i}{(s+n\mu)^{i+1}} \right] - \text{видим геометрическую прогрессию. Сумму}$$

$$\text{этой геометрической прогрессии} = \frac{1}{1-\pi} \left[p_{W=0} + n\mu p_n \frac{1 - \left(\frac{\lambda}{s+n\mu} \right)}{s+n\mu-\lambda} \right]$$

Для того, чтобы найти среднее время ожидания начала обслуживания, нужно вычислить

$$\frac{d\omega(s)}{ds} \Big|_{s=0}$$

Резюме: мы провели обсуждение стационарных распределений системы массового

обслуживания, у которого n обслуживающих устройств и r – длина очереди.

TODO - т.к. преподаватель просила давать определение для каждой переменной или коэффициента в формуле, то нужно добавить в конец конспекта таблицу со всеми используемыми символами и их расшифровкой.