Оглавление

1 Вероятностное пространство. Случайные величины, дискретные и непрерывные. Фукнкции распределения.

Вероятностное пространство – это тройка $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, где

1. Ω - множество (описывает **пространство событий**). Его элементы $\omega \in \Omega$
2. $\mathcal{F}$ - σ-**алгебра подмножеств** множества Ω
3. P - **вероятностная мера**, $P(\Omega) = 1$

σ-алгебра замкнута относительно операций счетного объединения и пересечения. Также, если $\omega \in F \Rightarrow \bar{\omega} \in \mathcal{F}$ (содержит дополнение к событию).

Эксперимент: бросаем кубик: $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_6\}$ ω_i - на верхней грани i точек. На грани кости четное число: $C = \{\text{ выпало четное число}\} = \omega_2 + \omega_4 + \omega_6$

$P(A+B) = P(A) + P(B)$ если события **несовместны,** т.е. $AB = \varnothing$. Если же события **совместны**, то вероятность $P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB)$

События называются **независимыми** если вероятность их произведения равна произведению вероятности: $P(AB) = P(A)P(B)$

$P\left(\sum_{k=1}^{n} A_k\right) = 1 - \prod_{k=1}^{n}(1 - P(A_k))$ если события A_k независимы.

Случайная величина - это отображение $\xi : \Omega \to \mathcal{R}$ или Z**.** Для случайной величины при непрерывном отображении должна быть **измеримость** относительно борелевской σ-алгебры на $\mathcal{R}$: $\{\omega : \xi(\omega) \le x\} \in \mathcal{F}$. Из элемента сигма-алгебры попадаем в сигма-алгебру.

Вероятноть $P(\omega : \xi(\omega) \le x)$ - **функция распределения СВ.** СВ полностью определяется функцией распределения.

Если функция распределения F дифференцируема, то более наглядное представления о СВ дает **плотность вероятности СВ**: $f(x) = F'(x)$.

Функция распределения любой СВ обладает следующими свойстваами:

1. $F(x)$ определена на всей числовой прямой R
2. $F(x)$ не убывает, т.е. если $x_1 \le x_2$, то $F(x_1) \le F(x_2)$
3. $F(-\infty) = 0, F(+\infty) = 1,$ либо $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0, \lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 1$
4. $F(x)$ непрерывна справа, т.е. $\lim\limits_{x \to -x_0} F(x) = F(x_0)$

Если ξ - это дискретная СВ, принимающая значения $x_1 < x_2 < \ldots < x_i < \ldots$ с вероятностями $p_1 < p_2 < \ldots < p_n < \ldots$, то таблица вида:

ξ	x_1	x_2	…	x_i
p	p_1	p_2	…	p_i

называется **распределением дискретной СВ.**

У дискретной СВ функция распределения ступенчатая.

Если функция распределения непрерывна, то СВ будет **непрерывной СВ**.

Примеры:

случайное время обслуживания - непрерывная случайная величина, для которой функция распределения $F(t) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda t} & t \ge 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$, $f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, t \ge 0 \\ 0, t < 0 \end{cases}$

Вероятность нахождения в состоянии k $p_k = P\{X = k\} = e^{-\lambda} \dfrac{\lambda^k}{k!}$

2 Числовые характеристики случайных величин, производящие и характеристические функции.

Рассмотрим дискретную случайную величину с распределением

ξ	x_1	x_2	…	x_i
p	p_1	p_2	…	p_i

а также непрерывную СВ ξ с функцией распределения $F(x)$ и плотностью $f(x)$.

Математическое ожидание: $E\xi = \sum_{k=1}^{n} x_k p_k = \sum \xi(\omega_k) P\{\xi(\omega_k) = x_k\}$ или

$E\xi = \int_\Omega \xi(\omega) P((d\omega)) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x dF(x)$

Свойства:

1. $E[a\xi + b\eta] = aE\xi + bE\eta$ - линейность
2. $Ec = c, c - const$
3. Если СВ η является функцей СВ ξ, то $E\eta = Ef(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) p_\xi(y) dy$
4. Если СВ ξ, η независимы, то $E\xi E\eta = E[\xi\eta]$.

Дисперсия $D\xi = E[\xi - E\xi]^2 = E\xi^2 - [E\xi]^2$.

$D(\xi+\eta) = E(\xi+\eta)^2 - [E(\xi+\eta)]^2 = E\xi^2 + E\eta^2 + 2E[\xi\eta] - [E\xi]^2 - [E\eta]^2 - 2E\xi E\eta = D\xi + D\eta$

k **-м начальным моментом** случайной величины X, где $k \in N$, называется величина $v_k = E[X^k]$

k **-м центральным моментом** случайной величины X называется величина $\mu_k = E[(X - EX)^k]$

Производящая функция случайной величины ξ называется ряд

$\varphi_\xi(z) = Ez^\xi = \sum_{k=0}^{\infty} z^k p_k$, $\phi_\xi(z) = \int_\Omega z^{\xi(\omega)} P(d\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} z^\xi f(x) dx$, $|z| \le 1$.

Распределение вероятностей однозначно определяется своей производящей функцией

$p_k = \frac{1}{k!} \frac{d^k}{dz^k} \phi(z)|_{z=0}, k = 0,1,2,\ldots$??? что с индексами

Производящая функция позволяет вычислить МО $E\xi = \varphi'(z)|_{z=1}$ и Дисперсию $D\xi = \phi''_\xi(1) + \phi'_\xi(1) - \phi'_\xi(1)^2$

Характеристическая функция $\psi_\xi(u) = Ee^{iu\xi} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{iux} f(x) dx = \sum_{k=0}^{\infty} e^{iuk} p_k$

МО $\psi'(u)|_{u=0} = \int_{-\infty}^{\infty} ixe^{iux} f(x) dx|_{u=0} = i\int_{-\infty}^{\infty} xf(x) dx = iE\xi$ Дисп. $D\xi = -\psi''(0) + (\psi'(0))^2$

Пример: Пуассоновское распределение: $P(\xi = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$,

МО $Ep_k = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \lambda \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = \lambda e^{-\lambda} e^{\lambda} = \lambda$??? почму сумма от 1 а нет от 0

Дисперсия

$Dp_k = E(p_k)^2 - (Ep_k)^2$,

$E(p_k)^2 = Ep_k(p_k - 1) + Ep_k = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot (k-1) \cdot e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} + \lambda = \lambda^2 e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-2}}{(k-2)!} + \lambda = \lambda^2 + \lambda$

Таким образом $Dp_k = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda$

Либо, через производящую функцию:

$$\varphi_{\xi}(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}z^k=e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\lambda z)^k}{k!}=e^{-\lambda}e^{\lambda z}=e^{\lambda(z-1)}$$

$$\psi_{\xi}(u)=\sum_{k=0}^{\infty}e^{iuk}e^{-\lambda}\frac{(\lambda)^k}{k!}=\sum_{k=0}^{\infty}e^{iuk-\lambda}\frac{(\lambda)^k}{k!}=e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(e^{iu}\lambda\right)^k}{k!}=e^{-\lambda+e^{iu}\lambda}=e^{\lambda\left(e^{iu}-1\right)}$$

$$\frac{d\phi_{\xi}(z)}{dz}|_{z=1}=\frac{d}{dz}e^{\lambda(z-1)}|_{z=1}=\lambda e^{\lambda z-\lambda}|_{z=1}=\lambda=E\xi$$

Вторая производная $\frac{d^2\phi_{\xi}(z)}{dz^2}=\lambda^2e^{\lambda z-\lambda}$, тогда $\phi''_{\xi}(1)+\phi'_{\xi}(1)-\phi'_{\xi}(1)^2=\lambda^2+\lambda-\lambda^2=\lambda$

Экспоненциальное распределение $f(t)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda t}, t\geq 0\\ 0,\ t<0\end{cases}$

МО $E\xi=\int_0^{\infty}\lambda te^{-\lambda t}dt=\lambda\int_0^{\infty}te^{-\lambda t}dt=\begin{vmatrix}u=t & dv=e^{-\lambda t}dt\\ du=dt & v=-\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda t}\end{vmatrix}=-te^{-\lambda t}|_0^{\infty}+\int_0^{\infty}e^{-\lambda t}dt=-\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda t}|_0^{\infty}=\frac{1}{\lambda}$

Дисп

$$D\xi=E\left[\xi^2\right]-\left[E\xi\right]^2, E\left[\xi^2\right]=\lambda\int_0^{\infty}t^2e^{-\lambda t}dt=\begin{vmatrix}u=t^2 & dv=e^{-\lambda t}dt\\ du=2t\,dt & v=-\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda t}\end{vmatrix}=,$$

$$=\lambda\left(-\frac{t^2}{\lambda}e^{-\lambda t}|_0^{\infty}+\frac{2}{\lambda}\int_0^{\infty}te^{-\lambda t}dt\right)=2\int_0^{\infty}te^{-\lambda t}dt=(см.\ пред.)=\frac{2}{\lambda^2}$$

Таким образом $D\xi=E\left[\xi^2\right]-\left[E\xi\right]^2=\frac{2}{\lambda^2}-\frac{1}{\lambda^2}=\frac{1}{\lambda^2}$

3 Экспоненциальный, гиперэкспоненциалный, эрланговский законы распределения и их числовые характеристики.

Экспоненциальная СВ имеет показательное распределение с параметром $\lambda>0$,

Функция распределения : $P(\xi\leq t)=\begin{cases}1-e^{-\lambda t}, t\geq 0\\ 0, t<0\end{cases}$, плотность $f(t)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda t}, t\geq 0\\ 0, t<0\end{cases}$ МО $E\xi=\frac{1}{\lambda}$

Дисп $D\xi=\frac{1}{\lambda^2}$ (вычисляются в предыдущем вопросе)

Гиперэкспоненциальная СВ: $\xi=\sum_{k=1}^{n}\tau_k$ где τ_k - независимые экспоненциально–распределенные СВ с параметрами λ_k называется **гиперэкспоненциальной СВ**

Функция распределения СВ ξ задается соотношением:

$$f_{\xi}(t)=\sum_{k=1}^{n}\left(1-e^{l-\lambda_k t}\right),$$

а СВ $\eta=\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\tau_k$ имеет функцию распределения $F_{\eta}(t)=\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\left(1-e^{-\lambda_k t}\right)$,

$f_\eta(t)=\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\lambda_k e^{-\lambda_k t}$??? Которая из этих величин гиперэкспоненциальная? Здесь задается две СВ, одна с коэффициентами α, другая без.

МО $E\xi=\sum_{l=1}^{m}\frac{a_l}{\lambda_l}$, Дисперсия $D\xi=2\sum_{l=1}^{m}\frac{a_l}{\lambda_l^2}-\left(\sum_{l=1}^{m}\frac{a_l}{\lambda_l}\right)^2$

Распределение Эрланга k-го порядка – распределение, описывающее непрерывную СВ X, принимающую положительные значения в интервале $(0;\infty)$ и представляюущую собой сумму *k* независимых СВ, распределенных по одному и тому же экспоненциальному закону с параметром λ.

$$F_k(x)=1-e^{-\lambda x}\sum_{i=0}^{k-1}\frac{(\lambda x)^i}{i!}\qquad f(x)=\frac{\lambda(\lambda x)^{k-1}}{(k-1)!}e^{-\lambda x},x\geq 0,$$

$$E\xi=\frac{k}{\lambda},\ D\xi=\frac{k}{\lambda^2}.$$

где $\lambda>0$ и натуральное число *k* – параметр распределения Эрланга.
??? Как расисать

При *k* = 1 распределение эрланга вероятностей экспоненциаьлное, а при $k\to\infty$ приближается к нормальному распределению.

Распределение Эрланга является двупараметрическим (с параметрами λ и *k*), оно может использоваться для аппроксимации распределений по двум первым моментам.

4 Преобразования Лапласа для распределений из вопроса 3.

Преобразование Лапласа плотности распределения *f*(*x*) неотрицательной непрерывной СВ ξ называется функция. $F(s)=\int_0^\infty e^{-sx}f(x)dx$, $s>0$.

Плотность распределения однозначно определяется своим преобразованием Лапласа. Дифференцируя преобразование Лапласа по *s* в точке *s*=0, можно определить моменты СВ:

$$(-1)^k Ex^k=\frac{d^kF(s)}{ds^k}\mid s=0,k=1,2,...$$

Преобразование Лапласа *F*(*s*) суммы $x=x_1+x_2+\ldots+x_n$ независимых СВ равно произведению преобразований Лапласа слагаемых: $F(s)=\prod_{k=1}^{n}F_k(s)$

Заметим, что $\frac{1}{\lambda+s}=\frac{1}{1+\frac{s}{\lambda}}=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\left(\frac{s}{\lambda}\right)^k$ $E\xi=\frac{s}{\lambda},E\xi^k=\frac{k!}{\lambda k}$??? k или lamda, откуда взялись эти формулы, тем более неправильные???

Заметим, что $\lambda=\frac{1}{E\xi}\to$среднее число заявок за единицу времени или **интенсивность потока**.

Линейность: $L(af+bg)=aLf+bLg$, где a,b - вещественные числа, а f,g - функции для которых определено преобразование Лапласа.

Примеры преобразований Лапласа:

1. $f(t)=1\Rightarrow\ \hat{1}=\int_0^\infty e^{-st}dt=-\frac{1}{s}e^{-st}\cdot|_0^\infty=\frac{1}{s}$

2. $f(t)=t \Rightarrow \quad \hat{f}(t)=\int_0^\infty te^{-st}dt = \begin{vmatrix} u=t & dv=e^{-st}dt \\ du=dt & v=-\frac{1}{s}e^{-st} \end{vmatrix} = \frac{1}{s}\int_0^\infty e^{-st}dtr = \frac{1}{s^2}$

3. $f(t)=e^{-\lambda t} \Rightarrow \quad \hat{f}(t)=\int_0^\infty e^{-st}e^{-\lambda t}dt = \int_0^\infty e^{-(s+\lambda)t}dt = \frac{1}{\lambda+s}$

Для тригонометрии нужно использовать формулы Эйлера.

$z=\cos\alpha+i\sin\alpha \quad z=e^{i\alpha}\overline{z}=e^{-i\alpha}=\cos\alpha-i\sin\alpha, \quad \cos\alpha=\frac{e^{i\alpha}+e^{-i\alpha}}{2}\sin\alpha=\frac{e^{i\alpha}-e^{-i\alpha}}{2i}$

1. $f(t)=\sin(\alpha t) \Rightarrow$

$$\widehat{f}(t)=\int_0^\infty e^{-st}\sin\alpha\tau dt=\int_0^\infty e^{-st}\frac{e^{i\alpha t}-e^{-i\alpha t}}{2i}dt=\left[\frac{1}{s-i\alpha}-\frac{1}{s+i\alpha}\right]\frac{1}{2i}=\frac{s+i\alpha-s+i\alpha}{(s^2+\alpha^2)2i}=\frac{\alpha}{s^2+\alpha^2}$$

2. $f(t)=\cos(\alpha t) \Rightarrow \quad \frac{s}{s^2+\alpha^2}$

3. $f(t)=\phi'(t) \Rightarrow \quad \hat{f}(t)=\int_0^\infty e^{-st}\frac{d}{dt}\varphi(t)dt \begin{vmatrix} u=e^{-st} & dv=\phi'(t)dt \\ u=-se^{-st} & v=\phi(t) \end{vmatrix} = -\phi(0)+s\int_0^\infty e^{-st}\phi(t)dt = -\phi(0)+s\widehat{\phi(t)}$

Экспоненциальное распределение: $f(t)=\begin{cases} \lambda e^{-\lambda t}, t\ge 0 \\ 0, t<0 \end{cases}$

$$\hat{f}(s)=\int_0^\infty e^{-st}\lambda e^{-\lambda t}dt=\lambda\int_0^\infty e^{-t(s+\lambda)}dt=-\frac{\lambda}{s+\lambda}e^{-t(s+\lambda)}\Big|_0^\infty=\frac{\lambda}{s+\lambda}$$

Гиперэкспоненциальное распределение: используя линейность, $\hat{f}(s)=\sum_{i=1}^n\alpha_i\frac{\lambda_i}{\lambda_i+s}$

Эрланговское распределение:

$$\hat{f}(s)=\int_0^\infty e^{-sx}\lambda\frac{\lambda^{k-1}x^{k-1}}{(k-1)!}e^{-\lambda x}dx=\frac{\lambda^k}{(k-1)!}\int_0^\infty e^{-x(s+\lambda)}x^{k-1}dx=$$

$$\begin{vmatrix} u=x^{k-1} & dv=e^{-x(s+\lambda)} \\ du=(k-1)x^{k-2}dx & v=-\frac{1}{s+\lambda}e^{-x(s+\lambda)} \end{vmatrix} = \frac{\lambda^k}{(k-1)!}\left(-\frac{1}{s+\lambda}x^{k-1}e^{-x(s+\lambda)}\Big|_0^\infty+\frac{k-1}{s+\lambda}\int x^{k-2}e^{-x(s+\lambda)}dx\right)$$

Выполнив интегрирование по частям k-1 раз, получим $\left(\frac{\lambda}{\lambda+s}\right)^k$

5 Пуассоновский процесс и его свойства

Целочисленный пуассоновский точечный процесс $N(t), 0\le t<+\infty$ определяется тремя свойствами:

1. **Ординарность** - вероятность наступления более одного события на любом малом интервале времени Δt имеет более высокий порядок малости, чем Δt. Поэтому для него выполняются соотношения $P\{N(t+\Delta t)-N(t)=1\}=P\{N(\Delta t)=1\}=\nu\Delta t+o(\Delta t)$ и $P\{N(t+\Delta t)-N(t)>1\}=P\{N(\Delta t)>1\}=o(\Delta t)$, ν - некоторая положительная величина, имеющая размерность, обратную времени. Следствием этих двух соотношений является равенство $P\{N(t+\Delta t)-N(t)=0\}=P\{N(\Delta t)=0\}=1-\nu\Delta t+o(\Delta t)$

2. **Стационарность** - его статистические характеристики не изменяются при сдвиге всех точек вдоль оси времени на произвольную Δ

3. **Независимость** (отсутствие последействия) - во все моменты времени имеет независимые приращения (значения) на неперекрывающихся интервалах времени.

$$p(x(t)=k)=e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^k}{k!},$$

МО $E\xi(t)=\lambda t$, Дисперсия $D(\xi(t))=\lambda t$

Производящая функция $\phi_N(z)=\sum_{k=0}^{\infty}z^k e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^k}{k!}=e^{-\lambda t}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(z\lambda t)^k}{k!}=e^{-\lambda t}e^{z\lambda t}=e^{-\lambda t(1-z)}$

Характеристическая функция:

$$\psi_{\xi}(u)=\sum_{k=0}^{\infty}e^{iuk}e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^k}{k!}=\sum_{k=0}^{\infty}e^{iuk-\lambda t}\frac{(\lambda t)^k}{k!}=e^{-\lambda t}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(e^{iu}\lambda\right)^k}{k!}=e^{-\lambda t+e^{iu}\lambda}=e^{\lambda t\left(e^{iu}-1\right)}$$

6 Марковские процессы, определения и свойства.

Из Moodle:

Пусть *N* –множество натуральных чисел, T > 0.

B(*R*) - пространство измеримых ограниченных борелевских функций, заданных на вещественной оси R

M(R) - пространство ограниченных борелевских мер, определенных на борелевской σ-алгебре $\mathcal{B}_R$.

Для заданной случайной величины ξ ∈ *R*, функции *f* ∈ B(R) и σ-подалгебры $\mathcal{G}$ σ-алгебры $\mathcal{F}$ пусть $E\left[f(\xi)|\mathcal{G}\right]$ обозначает условное математическое ожидание случайной величины η = f(ξ) относительно $\mathcal{G}$.

P. S. борелевская функция — отображение одного топологического пространства в другое (обычно оба суть пространства вещественных чисел), для которого прообраз любого борелевского множества есть борелевское множество.

Случайная величина ξ порождает вероятностную меру μ_{ξ}, определенную соотношением $\mu_{\xi}(G)=P\{\omega:\xi(\omega)\in G\}$ для любого борелевского подмножества $G\in\mathcal{B}_R$. Пусть $\mathcal{F}_{\theta}$ обозначает σ-алгебру, порожденную случайными величинами ξ(θ), θ ∈ [*s, T*]. Случайный процесс ξ(*t*) ∈ *R* называется **Марковским случайным процессом**, если для любой измеримой ограниченной скалярной функции *f*(*x*) справедливо равенство

$$E\left[f(\xi(t))|\mathcal{F}_{\theta}\right]=E\left[f(\xi(t))|\xi(\theta)\right] \quad (1.1)$$

??? Может быть в правой части должно быть $\theta(T)$

Для любого $G\in\mathcal{B}_R$ соотношение $P(s,x,t,G)=P\{\xi(t)\in G|\xi(s)=x\}$ определяет **переходную вероятность** марковского процесса $\xi(t)$. Марковское свойство процесса $\xi(t)$ влечет за собой справедливость **уравнения Чепмена-Колмогорова**

$$P(s,x,t,G)=\int_R P(s,x,\tau,dy)P(\tau,y,t,G) \quad (1.2)$$

??? может быть должно быть y а не dy, почему интегрирование по всему *R*?

Мы можем говорить о дискретном и непрерывном времени , а также о дискретном и непрерывном состоянии.

Марковский процесс называют **однородным по времени**, если

$$P(s,x,t,G)=P(t-s,x,G)$$

В случае, когда множество значений процесса $\xi(t)$ - дискретное множество V, например V={1,2,…,d$_1$} или множество целых чисел, случайный процесс $\nu(t)$ со значением из V называют **однородной по времени** марковской цепью, если

$$P\{\nu(t+h)=l\,|\,\nu(t)=l\}=1-q_1h+o(h),$$

$$P\{\nu(t+h)=m\,|\,\nu(t)=l\}=q_{lm}h+o(h), \text{где } m\neq l \text{ и } q_l=\sum_{m\neq l}q_{lm}.$$

??? Мы не можем суммировать по этим индексам, т.к. они уже используются

Если марковская цепь задана в терминах q_{lm}, то важно иметь ввиду, что ее переходные вероятности задаются соотношением

$$p_{lm}=\frac{q_{lm}}{q_l}=\frac{q_{lm}}{\sum_{m\neq l}q_{lm}}$$??? Что такое q_{lm}

Примером **марковской цепи с непрерывным временем** и **дискретным множеством состояний** $X=N$ является пуассоновский процесс $N(t)$ с интенсивностью λ, поскольку

$$P\{N(t+h)=l+1\,|\,N(t)=l\}=\lambda h+o(h),$$
$$P\{N(t+h)=l\,|\,N(t)=l\}=1-\lambda h+o(h)$$

7 Переходные вероятности, уравнение Чепмена-Колмогорова

Переходная вероятность Марковского процесса выражается формулой
$p(s,x,t,A)=P\{\xi(t)\in A\,|\,\xi(s)=x\}$, где $s,t\in[0,T], x\in B, A$ - борелевское подмножество B.

Марковское свойство при этом описывается **уравнением Чепмена-Колмогоова**,

$$p(s,x,t,A)=\int_{-\infty}^{+\infty}p(s,x,\theta,dz)p(\theta,z,t,A)$$

Плотность переходной вероятности: $p(s,x,t,y)$ - это положительная функция,

$$p(s,x,t,A)=\int_A p(s,x,t,y)dy$$

при этом уравнение Чепмена-Колмогорова имеет вид

$$p(s,x,t,y)=\int_{-\infty}^{+\infty}p(s,x,\theta,z)\,p(\theta,z,t,y)dz$$??? Здесь уже нет дифференцирования внутри *p*

уравнение Чепмена-Колмогорова для марковской цепи с дискретным временем. $\Rightarrow$

$$p_{kj}^{(m)}=\sum_{i=1}^{n}p_{ki}^{(m-1)}p_{ij}^{1}=\sum_{i=1}^{n}p_{ki}^{(m-l)}p_{ij}^{(l)},\ m=1,2,3,\ldots$$

Для цепи с непрерывным временем опишем с помощью уравнения Чепмена-Колмогрова:

$$p_{ij}(t)=\sum_{i=1}^{n}p_{ij}(t-s)p_{ij}(s) \text{ или } p_{ij}(t)=\sum_{k=1}^{n}p_{ij}(s)p_{ij}(t-s), \text{ если } 0, j\in\forall=\{1,\ldots,n\}$$

Борелевская сигма-алгебра - минимальная сигма-алгебра, содержащая все открытые (каждая точка входит вместе с некоторой окрестностью) подмножества топологического пространства (также она содержит и все замкнутые, эти подмножества также называются Борелевыми). Борелевская сигма-алгебра обычно выступает в роли сигма-алгебры случайных событий вероятностного пространства. В борелевской сигма-алгебре на прямой или на отрезке содержатся многие « простые» множества: все интервалы, полуинтервалы, отрезки и их счётные объединения. Борелевской сигма-алгеброй в R называется самая маленькая среди всех возможных σ-алгебр, содержащих любые интервалы на прямой. Если не оговорено иное, в качестве топологического пространства выступает множество вещественных чисел.

8 Марковские цепи с дискретным временем, способы их описания (матрицы, графы)

Пусть $V = \{v_1, ..., v_k\}$ - множество состояний. В любой момент времени ситема может находиться в одном состоянии и меняет свое состояне только в моменты $t_1, t_2, ..., t_n, ...$. $\nu(t)$ - состояние системы в момент времени t.

$p_k(t) = P(\nu(t) = k)$, $p_{ij} = P(\nu(k+1) = j \mid \nu(k) = i)$.

Марковская цепь с дискретным временем

$E\left[\nu^{(k)} \mid \nu(0), \nu(1), ..., \nu(k-1)\right] = E\left[\nu^{(k)} \mid \mathcal{F}_{k-1}\right] = E\left[\nu^{(k)} \mid \nu(k-1)\right]$

$P(s, x, y, B) = \int_R p(s, x, \theta, dz)\, p(\theta, z, t, B)$ - **уравнение Чепмена-Колмогорова** для марковской цепи с дискретным временем. $\Rightarrow$ $p_{kj}^{(m)} = \sum_{i=1}^{n} p_{ki}^{(m-1)} p_{ij}^{1} = \sum_{i=1}^{n} p_{ki}^{(m-l)} p_{ij}^{(l)}$, $m = 1,2,3,...$

В матричном виде уравнение Чепмена-Колмогорова имеет вид $\mathrm{P}^m = \mathrm{P}^{m-l}\mathrm{P}^l$

Матрица P называется также **стохастической матрицей (переходная вероятность)**, т.к. она обладает свойством: $\sum_{j=1}^{n} p_{kj} = 1$, $0 \le p_{ij} \le 1$

Чтобы задать марковскую цепь с дискретным временем, достаточно задать ее начальное состояние $v = (v_1, ... v_n)$ (если цепь имеет n последовательных состояний) и переходную вероятность $p_{ik}^{(1)}$ за один шаг.

Множество состояний марковской цепи также можно рассматривать как множество узлов некоторого графа.

Не входит в вопрос, но на всякий случай:

Состояние марковской цепи можно разбить на **классы**

Если состояние i и j таковы, что $p_{ij} > 0$, $p_{ji} > 0$, то эти состояния называются **сообщающимися**.

Если состояния i и j таковы, что $p_{ij}^{(n)} > 0$, $p_{ji}^{(n)} > 0$, то эти состояния называются **сообщающимися при некотором n**.

Будем называть класс C такой, что для всех $i, j \in C$ состояния i и j – сообщающиеся – **классом сообщающихся состояний.**

Замкнутый класс состояний - это класс, из которого нельзя выйти.

Из того, что $p_{ij}^{(n-1)} > 0$ следует, что $j \in C$. ???

Утверждение: цепь Маркова с конечным числом состояний имеет хотя бы один замкнутый сообщающийся класс.

Состояние из незамкнутого класса, называется **несущественным** состоянием.

Состояние *i* называется **поглощающим**, если $p_{ii} = 1$.

Цепь Маркова называется **неприводимой**, если все ее состояния попадают в один замкнутый класс.

Состояние *i* из некоторого подкласса $i \in I$ называется **возвратным**, если событие ??? и **невозвратным**, если событие ???

Теорема: состояние i является возвратным, если величина $f_i = P_i\left(X_n = i, \forall_n\right) = 1$ и невозвратно, если $f_i < 1$???

9 Марковские цепи с непрерывным временем, генератор марковской цепи и его свойства.

Существуют два способа задания МЦсНВ.

Марковское свойство для цепи с непрерывным временем опишем с помощью уравнения Чепмена-Колмогрова: $P(s,x,t,y) = \int_{-\infty}^{\infty} p(s,x,\theta,z)p(\theta,z,t,y)dz$, $p_{ij}(t) = \sum_{i=1}^{n} p_{ij}(t-s)p_{ij}(s)$ или

$p_{ij}(t) = \sum_{k=1}^{n} p_{ij}(s)p_{ij}(t-s)$, если $0, j \in \forall = \{1,\ldots,n\}$

Различные способы описания н.в.

1) $P\left(\xi(0)\right) = i_0, \xi(t_1) = i, ..., \xi(t_k - t_{k-1}) = i_{k-1}; \xi(t_m - t_{m-1}) = i = \mu_0\left(p_{i,0,i}(t), ..., p_{i,m-1,i}(t_m - t_{m-1})\right) = G$

??? почему индексы повторяются

и используеем соотношение: $P(AB) = P(A/B)P(B)$ и выбираем последовательно в качестве собсобптеле ??? вида $\{\xi(t_k - t_{k-1}) = i_k / \xi(t_{k-1}) = i_{k-1}\}$ получим требуемое соотношение, где $\mu_0 = P\{\xi(0) = i_0; P_{i_k-1,l}(t_k - t_{k-1}) = P(\xi(t_l) = i_k / \xi(t_{k-1}) = i_{k-1})\}$???

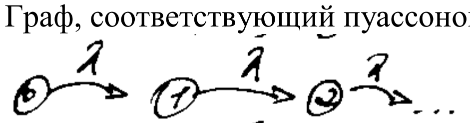
2) Нужно задать поведение переходной вероятности на малых интервалах времени.

В качестве примера МЦ с НВ рассмотрим Пуассоновский процесс $N(t)$. Пусть $p_k(t) = P(N(t) = k)$, при этом $\sum_{k=0}^{\infty} p_k(t) = 1$

Приращения процесса $N(t)$ на пересечении интервалов независимы, т.е. $N(t+\Delta t) - N(t)$ и $N(s+\Delta S) - N(s)$ - независимые случайные величины.

При этом $P(N(t) = 0) = e^{-\lambda t}$, $P(N(t) = 1) = e^{-\lambda t}\lambda t$ если t мало, то $P(N(t) \geq 2) = o(t)$

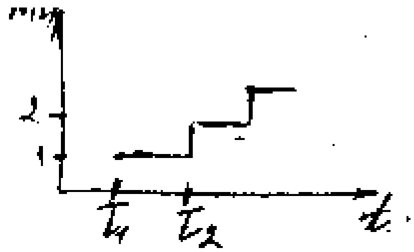
Граф, соответствующий пуассоновскому процессу имеет вид



и матрица Q имеет вид

$$Q = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & \lambda & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{pmatrix}$$

Траектория Пуассоновскоого процесса имеет вид



Опишем поведение приращения пуассоновского процесса на малых временах.

$P(N(t+\Delta t)-N(t)=k)=e^{-\lambda\Delta t}\frac{(\lambda\Delta t)^k}{k!}$

$P(N(t+\Delta t)-N(t)=0)=e^{-\lambda\Delta t}=1-\lambda\Delta t+o(|\Delta t|)$

$P(N(t+\Delta t)-N(t)=1)=e^{-\lambda\Delta t}\lambda\Delta t$

$P(N(t+\Delta t)-N(t)\geq 2)=o(\Delta t)$

$p_{ik}(t+\Delta t)=P(N(t+\Delta t)=k\mid N(t)=i)$

Вычислим

$p_{ik}(t+\Delta t)-p_{ik}(t)=\begin{cases}\lambda\Delta t+o(\Delta t), k=i+1\\ o(\Delta t), k\geq 2\end{cases}$??? верны ли условия

т.к. $p_{ii}(t+\Delta t)-p_{ii}(t)=1-\lambda\Delta t+o(\Delta t)$

Вычислим $\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{p_{ik}(t+\Delta t)-p_{ik}(t)}{\Delta t}=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}[\lambda\Delta t+o(\Delta t)]=\lambda$

$p_j=\sum_{i=1}^{n}p_i p_{ij}(t),\quad p_i(t)=P\{x(t)=i\}\quad p_{ij}(t)=P\{x(t)=j\mid x(0)=i\}$??? почему 0

Таким образом, соответствующее уравнение $p_i(t)$ будет иметь вид $\frac{dp_i(t)}{dt}=\lambda p_i(t)$???

10 Прямые и обратные уравнения Колмогорова для марковской цепи.

класс Q-матриц – это класс матриц вида

$Q=\begin{pmatrix}q_{11} & \dots & q_{1n}\\ \dots & \dots & \dots\\ q_{n1} & \dots & q_{nn}\end{pmatrix}$, обладающих следующими свойствами:

q_{ij} - непрерывная величина, при $i\neq j$ $\sum_{i=1}^{n}q_{ij}=0$, откуда $q_{ij}=-\sum_{\substack{j=1\\ j\neq 0}}^{n}q_{ij}=0$???

Матрицы образуют алгебру M_n, это значит: $A,B\in M_n$ и $\alpha,\beta\in\Re$, то $\alpha A+\beta B\in M_n$

Марковские цепи с дискретным временем:

$P\left(\xi^{(1)} = j \mid \xi = i\right) = p_{ij}$

$P\left(\xi^{(2)} = k \mid \xi^{(0)} = i, \xi^{(1)} = j\right) = p \cdot P\left(\xi^{2} = k \mid \xi^{(1)} = j\right) = p_{ji}^{2}$??? правильно ли поставлены

$p_{ik}^{2} = \sum_{j=1}^{n} p_{jk} p_{ij}$

индексы

$Q = (q_{ik})_{i,k=1}^{n} \sum_{k} q_{ik} = 0$, $\sum_{k \neq i} q_{ik} > 0, \quad i \neq k, q_{ik} \geq 0$

$P(t) = e^{tQ} = I + IQ + \frac{t^2 Q^2}{2!} + \ldots + \frac{t^n Q^n}{n!} + \ldots$

$|Q| = \max |q_{ik}|$

$|Q|^2 = \sum_{k} q_{ik} q_{kj} = QQ^T$???

$|P(t)| \leq 1 + tk + \frac{t^2 k^2}{2!} = e^{tk}$

$P(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{P(t + \Delta t) - P(t)}{\Delta t} = Qe^{tQ} = QP(t)$

$\frac{dP(t)}{dt} = P(t)Q$ **- прямое уравнение Колмогорова,** $P(0) = I$

$\frac{dP(t)}{dt} = QP(t)$ **- Обратное уравнение Колмогорова**

11 Процессы рождения и гибели

Рассмотрим ПРГ, у которого интенсивность рождения λ, а гибели - μ

Генератор ПРГ имеет вид:

$$Q = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & 0 & \ldots \\ \mu & -(\lambda + \mu) & \lambda & 0 & \ldots \\ 0 & \mu & -(\lambda + \mu) & \lambda & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{pmatrix}$$

Для того, чтобы найти матрицу переходных вероятностей, рассматриваем прямое уравнение Колмогорова

$\frac{dP(t)}{dt} = P(t)Q$, $P(0) = I$

При этом для элементов $p_{ij}(t)$ матрицы $P(t)$ - получим следующую систему ОДУ:

$$\begin{pmatrix} p_{11} & \ldots & p_{1n} \\ p_{21} & \ldots & \\ 0 & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & \ldots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & 0 & \ldots \\ \mu & -(\lambda + \mu) & \lambda & 0 & \ldots \\ 0 & \mu & -(\lambda + \mu) & \lambda & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{pmatrix}$$

Получаем следующую систему ОДУ:

$$\frac{dp_{11}(t)}{dt} = -\lambda p_{11} + \mu p_{12},\ p_{11}(0) = 1$$

$$\frac{dp_{12}(t)}{dt} = -(\lambda + \mu)p_{12}(t) + \lambda p_{11}(t) + \mu p_{13}(t)$$

и т.д.

Напомним, что справедливо соотношение для МЦ с НВ

$$p_j = \sum_{i=1}^{n} p_i p_{ij}(t),\quad p_i(t) = P\{x(t) = i\}\quad p_{ij}(t) = P\{x(t) = j / x(0) = i\}$$

Таким образом, зная уравнение для $p_{ij}(t)$ можно найти уравнения для $p_i(t)$.

рассмотрим еще один подход к выводу уравнений для $p_{ij}(t)$.

При фиксированном $X(t) = i$

$$P\big(x(t+h) = i \mid x(t) = 0\big) = 1 - (\lambda + \mu)h + o(h)$$

$$p\big(x(t+h) = i+1 \mid x(t) = i\big) = \lambda_i h + o(h)$$

$$p\big(x(t+h) = i-1 \mid x(t) = i\big) = \mu_i h + o(h)$$

$$p\big(x(t+h) = i \mid x(t) > 1\big) = o(h)$$

При этом прямое уравнение Колмогорова будет иметь вид

$\frac{dp_{ij}}{dt} = \lambda_{j-1} p_{ij-1} - (\lambda_i + \mu_i) p_{ij} + \mu_{j+1} p_{ij+1}$, при этом полагаем $p_{i0}(0) = 1; p_{ij}(0) = 0$, если $i \neq j$

Обратное уравнение Колмогрова для рассматриваемого процесса будет имеь вид

$$\frac{dp}{dt} = QP, P(0) = I$$

$$\frac{dp_{ij}(t)}{dt} = \lambda_i p_{i+1}(t) - (\lambda_i + \mu_i) p_{ij}(t) + \mu_0 p_{i-1,j}$$

$$p_{i0}(0) = 1, p_{ij}(0) = 0, i \neq j$$

12 Системы массового обслуживания и их классификация

СМО **Системы массового обслуживания** – совокупность, включающая:

1. Входящий поток
2. Обслуживающее устройство
3. Выходящий поток

Для того, чтобы описать СМО, нужно

1) Описать входящий поток – задать распределения
2) Описать время обслуживания одним устройством
3) Задать число обслуживающих устройств
4) Описать величину очереди

Входящий поток – поток, поступающих заявок – это СП с дискретным множеством состояний.

Опишем классификацию СМО: **классификация Кендалла**.

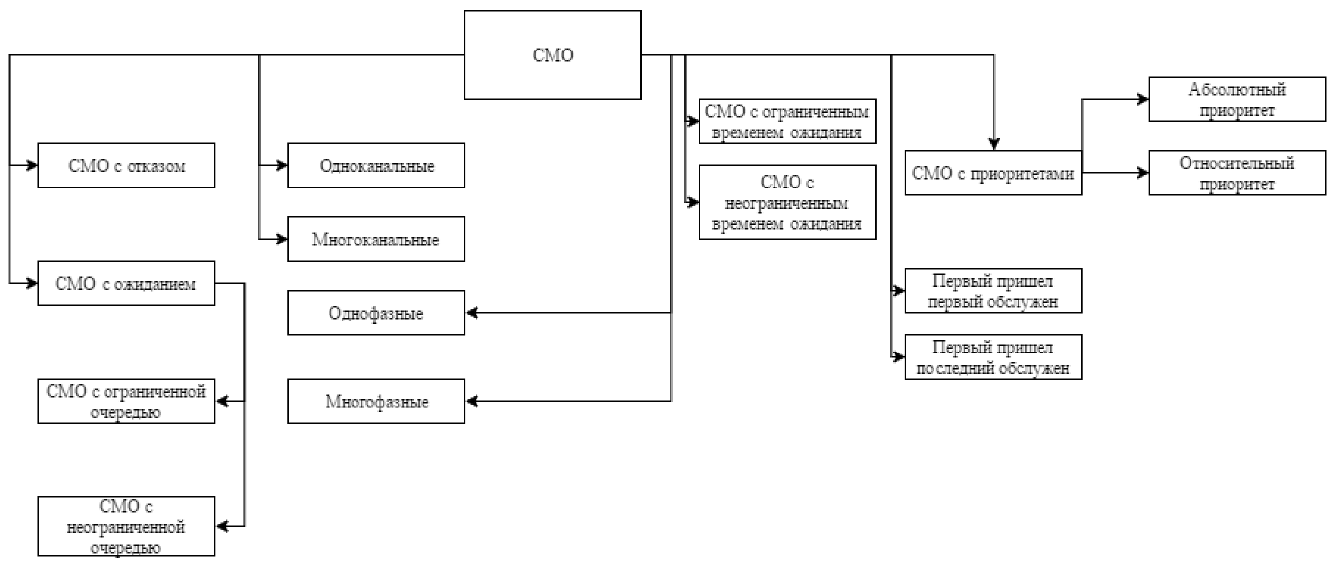
Пример: $M \mid M \mid n \mid r$. Это означает, что входящий поток - марковский, время обслуживания – экспоненциальное, n - число обслуживаемых устройств, r - длина очереди.

Входящий поток

Обозначим $\partial(t)$ - число заявок поступивших в систему за время t, пусть $\{\tau_k\}$

Свойства входящего потока

1. **Отсутствуют последствия** - во все моменты времени имеет независимые приращения (значения) на неперекрывающихся интервалах времени
2. **Стационарность**, статистические характеристики не изменяются при сдвиге всех точек вдоль оси времени на произвольную Δ
3. **Ординарность**, $P\left(\partial\left(\Delta t\right) > 1\right) = o\left(\Delta t\right)$ т.е. заявки поступают по одной.



13 Одноканальные и многоканальные СМО с отказами

В Moodle есть ответ на этот вопрос.

1. Одноканальные

Системой с отказами будем называть СМО без накопителей(без очереди).

Модель одноканальной с-мы с отказом является простейшая из всех моделей СМО. Входящий потом у этой системы описывается пуассоновским процессом с интенсивностью λ, т.е число заявок принадлежащих к моменту $t, \nu(t)$ имеет распределение $P(\nu(t) = k) = e^{-\lambda t}\dfrac{(\lambda t)^k}{k!}$

Обслуживание поступивших заявок происходит в течение случ.времени $\tau_{serv} = \tau_{otk}$ с экспоненциальным законом распредления с параметром μ, те

$P(\tau_{serv} < t) = \begin{cases} 1 - e^{-\mu t}, t >= 0 \\ 0, t > 0 \end{cases}$ и плотность этого распредления $P(t) = \mu \cdot e^{-\mu t}$

Рассмотренная система имеет 2 состояния:

0-в с-ме нет заявок(канал свободен)

1-в с-ме есть одна заявка(канал занят)

$\nu(t)$-это состояние системы:

$P(\nu(t) = 0) = p_0;\ P(\nu(t) = 1) = p1;\ p_0(t) + p_1(t) = 1$ (1)

Уравнение Колмагорова для м.ц. имеет вид:

$$\frac{dp_0}{dt} = -\lambda p_0(t) + \mu p_1(t) \qquad (2)$$

$$\frac{dp1}{dt} = -\lambda p_1(t) + \mu p_2(t) \qquad (3)$$

Генератор этой м.ц. имеет вид:

$$\Theta = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda \\ \mu & -\mu \end{pmatrix}$$

$$\frac{d}{dt} p(t) = \Theta * p(t); \quad p(t) = e^{\Theta t}$$

Выражая $p_1(t)$ из (1) в виде: $p_1(t) = 1 - p_0(t)$ и подставляя в (2)=>

$$\frac{dp_0}{dt} = -\lambda p_1 + \mu(1 - p_0(t)) => \frac{dp_0}{dt} = -(\lambda + \mu) p_0(t) + \mu (4)$$

$$p_0(t) = \frac{\mu}{\lambda + \mu} + \frac{\lambda}{\lambda + \mu} \cdot e^{-(\lambda+\mu)t} \qquad (5)$$

14 Система M|M|1|∞ ОДУ для распределений

В Moodle есть ответ на этот вопрос

1. Марковский входящий поток
2. Экспоненциальное время обслуживания
3. 1 обслуживающее устройство – одноканальная система
4. Очередь бесконечна

Когда очередь бесконечна, говорят, что это – **система без потерь**.

1. – число заявок в системе в момент t. Это случайный процесс, принимающий значения из множества $V = \{0,1,2,...\}$

Обозначим $p_{ij}(\Delta)$ - вероятность перехода из состояния i в состояние j за время Δ (Δt).

По предположению, за время Δ с вероятностью $1 - \lambda\Delta + o(\Delta)$ не поступит ни одной заявки, а если $\nu(t) > 0$, то с вероятностью $1 - \mu\Delta + o(\Delta)$ ни одна заявка не будет обслужена.

Одна заявка может быть обслужена – тогда число заявок -1. Может прийти заявка, тогда +1.

$p_{00}(\Delta)$ - вероятность того, что за время Δ из 0 никто не пришел $= 1 - \lambda\Delta + o(\Delta), i, j = 0$

$p_{i,i+1} = \lambda\Delta + o(\Delta)$ $p_{i,i-1}(\Delta) = \mu\Delta + o(\Delta)$

Другими словами $\nu(t)$ - это процесс рождения-гибели (ПРГ).

Пусть $p_i(t) = p(\nu(t) = i)$

$$p_0(t + \Delta) = (1 - \lambda\Delta) p_0(t) + \mu p_1(t)\Delta + o(\Delta)$$

$$p_i(t + \Delta t) = (1 - (\lambda + \mu)\Delta) p_i(t) + \lambda\Delta p_{i-1}(t) + \mu\Delta p_{i+1}(t) + o(\Delta)$$

$\frac{p_i(t + \Delta) - p_i(t)}{\Delta} = -(\lambda + \mu) p_i(t) + \lambda p_{i-1}(t) + \mu p_{i+1}(t) + O(\Delta)$ теперь O а не o, т.к. на одну Δ.

Получили производную: $\frac{dp_i(t)}{dt} = -(\lambda + \mu) p_i(t) + \lambda p_{i-1}(t) + \mu p_{i+1}(t)$, $i = 1,...$

$$\frac{dp_0(t)}{dt} = -\lambda p_0(t) + \mu p_1(t)$$

Дальше мы хотим решить эту систему уравнений

Для этой системы нам не хватает начальных условий

$p_i(0) = p_i$ уже без времени

Поскольку явно решить эту систему сложно, то можно предположить, что существует $\lim\limits_{t\to\infty} p_i(t) = p_i$

Мы сказали, что в правой части в пределе должны стоять константы, тогда их производные – нули. Тогда система приобретет вид

$$0 = -\lambda p_0 + \mu p_1$$

$$0 = -(\lambda + \mu) p_i + \lambda p_{i-1} + \mu p_{i+1}$$

Откуда получим получим, что $p_1 = \dfrac{\lambda}{\mu} p_0$

Обозначим $\rho = \dfrac{\lambda}{\mu}$

$$\mu p_2 = (\lambda + \mu) p_1 + \lambda p_0 = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 p_0 + \frac{\lambda}{\mu} p_0 + \frac{\lambda}{\mu} p_0$$

Отсюда $p_0 = \dfrac{1}{\sum_{i=0}^{\infty} \rho^i}$

При этом $\sum_{i=0}^{\infty} \rho^i < \infty$ если $\rho < 1$ и тогда $\dfrac{1}{1-\rho}$ - сумма убывающей геометрической прогрессией.

Следовательно, если $\rho < 1$, то $p_0 = (1-\rho)$ и $p_i = \rho^i (1-\rho)$

Мы нашли вероятность любого состояния в стационарном режиме

Итак, стационарное распределение числа заявок в системе $M/M/1/\infty$ является геометрическим распределением.

N - среднее число заявок в системе.

$$N = \sum_{i=1}^{\infty} p_i i = (1-\rho) \sum_{i=0}^{\infty} i \rho^i = \frac{\rho}{1-\rho}$$

средняя длина очереди - Q. $Q = N - 1$

$$Q = \sum_{i=1}^{\infty} (i-1) p_i = (1-\rho) \sum_{i=1}^{\infty} (i-1) \rho^i = (1-\rho) \left[\sum_{i=1}^{\infty} i \rho^i - \sum_{i=1}^{\infty} \rho^i \right] = \frac{\rho^2}{1-\rho}$$

$\nu(t)$ число заявок в системе

τ - время обслуживания.

Среднее время ожидания начала обслуживания $\dfrac{\rho}{\mu(1-\rho)} = \overline{w}$

среднее время пребывания в системе $\dfrac{1}{\mu(1-\rho)} = \overline{v}$

Параметр ρ называется **загрузкой системы** (или **пропускной способностью**).

15 Стационарные распределения для системы M|M|1|r ???

$$p_i = \frac{1-\rho}{1-\rho^{r+2}}\rho^i \quad i = 0,..,r+1$$

$$p_0 = \left[\sum_{i=0}^{n-1}\frac{\rho^i}{i!} + \frac{\rho^n}{n!}\frac{1-\left(\frac{\rho}{n}\right)^{r+1}}{\left(1-\frac{\rho}{n}\right)}\right]^{-1} \quad ??? \quad Q = \frac{\rho^2 p_0}{(1-\rho)^2}$$

$$p_{W=0} = \sum_{i=0}^{n-1} p_i = p_0 \sum_{i=0}^{n-1}\frac{\rho^i}{i!}$$

W **- среднее время пребывания в системе**

16 Формулы Литтла

Пусть N - среднее число заявок в системе со стационарным средним временем пребывания в системе $\bar{\nu}$

Тогда $N = \lambda\bar{\nu}$

За время T в среднем в систему поступит λT заявок

При этом каждая заявка в среднем проводит в системе время $\bar{\nu}$. Среднее время пребывания в системе λT заявки равно $\lambda\bar{\nu}T$

При этом в каждый момент в системе находится $N = \frac{\lambda\bar{\nu}T}{T} = \lambda\bar{\nu}$

Аналогично, $Q = \lambda\cdot\overline{w}$ - эти формулы называются **формулами Литтла.**

17 Система M|M|n|r ОДУ для распределений если r конечно

Система массового обслуживания M|M|N|r

Правило прихода заявок: $P(\nu(t)=k) = \frac{(\lambda t)^k}{k!}e^{-\lambda t}$.

Обозначим $\nu(t)$ число заявок в системе. $\nu(t)$ - это марковский процесс с множеством состояний $\mathcal{X} = \{0,1,2,...,n+r\}$. Выпишем систему соотношений: $p_k(t) = P(\nu(t)=k)$, $p_{ij}(\Delta) = P(\nu(t+\Delta t) = j \mid \nu(t) = i)$, $p_{ii}(\Delta t) = P(\nu(t+\Delta t) = i \mid \nu(t) = i)$.

Далее, поскольку

$p_{i,i+1}(\Delta t) = \lambda\Delta t + o(\Delta t)$, $p_{i,i-1}(\Delta t) = \mu\Delta t + o(\Delta t)$ получаем

$P\{\textit{не пришло ни одной заявки}\} = 1-\lambda\Delta t + o(\Delta t)$,

$P\{\textit{не ушло ни одной заявки}\} = 1-\mu\Delta t + o(\Delta t)$

1й случай: $k < n$.Заявки сразу поступают на обслуживание и обслуживаются независимо

2й случай: $n \le i$. Получим:

$$p_{ii}(\Delta t) = 1-(\lambda + n\mu)\Delta t + o(\Delta t)$$

$$p_{i,i+1}(\Delta t) = \lambda\Delta t + o(\Delta t)$$

$$p_{i,i-1}(\Delta t) = i\mu\Delta t + o(\Delta t)$$

$p_{i,j}(\Delta t) = o(\Delta t) \quad |i-j| \geq 2$

Нас интересует событие: $\{$*число заявок в системе стало меньше на* $1\}$ ={1-е обслуживающее устройство освободилось}+{2-е обслуживающее устройство освободилось}+…

3й случай: $i = n + r$

$i = n + r$. Если $i = n + r$, то поступившая заявка теряется $p_{n+r,n+r}(\Delta t) = 1 - n\mu\Delta t + o(\Delta t)$

$p_{n+r,n+r-1}(\Delta t) = n\mu\Delta t + o(\Delta t)$

Таким образом, процесс $\nu(t)$ - это процесс рождения и гибели с интенсивностями

$\lambda_i = \lambda \quad i = 0,\ldots,n+r-1, \ \lambda_{n+r} = 0$

$\mu_i = \mu \quad i = 0,\ldots,n-1$

$\mu_i = n\mu, \quad n \leq i \leq n+r$

Как найти? $p_i(t) = \sum_j p_{ij}(t)\, p_j(t)$

Переход из состояния 0 в состояние 1 возможен если поступила заявка.

Нас будут интересовать объекты $\dfrac{p_{ij}(t+\Delta) - p_{ij}(t)}{\Delta}$

Разложим экспоненту в ряд: $e^{-\lambda\Delta} = 1 - \lambda\Delta + o(\Delta)$

Интенсивность перехода из состояние 1 в 0 - μ, из состояния 2 в 1 - 2μ и т.д. до n. Начиная с $n+1$ и кончая $n+r$, интенсивность будет равна $n\mu$.

Таким образом, в системе $M\,|\,M\,|\,n\,|\,r$ переходные вероятности $p_{ij}(t+\Delta t)$ имеет вид:

1) $i < n$

$$p_{i,i-1}(\Delta) = i\mu\Delta + o(\Delta)$$
$$p_{ii}(\Delta) = (1 - \lambda\Delta + o(\Delta))(1 - \mu\Delta + o(\Delta)) = 1 - (\lambda + \mu)\Delta + o(\Delta)$$
$$p_{i,i+1}(\Delta) = \lambda\Delta + o(\Delta)$$

$$p_j(t) = P(\nu(t) = j) = \sum_i p_{ij}(t) \cdot p_i(t)$$

Последнее получено по формуле полной вероятности

Воспользуемся выражениями для $p_{ii}(\Delta) = 1 - (\lambda + i\mu)\Delta + o(\Delta)$. Заметим, что все обслуживающие устройства работают независимо. При этом вероятность того, что освободится одно устройство равна $\mu\Delta + o(\Delta)$, а вероятность того, что оно не освободится равна $1 - \mu\Delta + o(\Delta)$.

У нас есть события: A_1 = {не освободилось первое устройство}, … A_i ={не освободилось i-е устройство}. Произошло $B = A_1,\ldots,A_i$ - ни одно устройство не освободилось.

Таким образом, $P(B) = P(A_1 \ldots A_i) = \prod_{k=1}^{i} A_k = (1 - \mu\Delta + o(\Delta))^i$

Возведем в степень i, используя бином Ньютона, $o(\Delta)$ опускаем…

$(a+b)^i = a^i + ia^{i-1}b + ...$ все остальное не очень волнует, т.е. : $(1-\mu\Delta + o(\Delta))^i = 1 - i\mu\Delta + o(\Delta)$

Теперь заменим $i+1$ и $i-1$ на j . : ???

Получив соотношение для $p_{ij}(\Delta)$ и воспользовавшись формулой полной вероятности

$\sum p_{ij}(t) \cdot p_i(t) = p_j(t)$, получим следующее соотношение для $j = 0,...,n,...,n+r$

$$p_0(t+\Delta) = (1-\lambda\Delta)\, p_0(t)$$

$$p_i(t+\Delta t) = (1-(\lambda+i\mu)\Delta)\, p_i(t) + \lambda\Delta p_{i-1}(t) + (i+1)\mu p_{i+1}(t)\Delta + o(\Delta)$$

Их полученного выражения следует, что $p_0(t+\Delta t) - p_0(t) = -\lambda\Delta p_0(t) + \mu\Delta p_1(t) + o(\Delta)$

Где-то здесь была опечатка!!!

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{p_0(t+\Delta t) - p_0(t)}{\Delta t} = -\lambda p_0(t) + \mu p_1(t) = \frac{dp_0(t)}{dt}$$

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{p_i(t+t) - p_i(t)}{\Delta t} = -(\lambda + i\mu)\, p_i(t) + \lambda p_{i-1}(t) + i(i+1)\mu p_{i+1}(t) = \frac{dp_i(t)}{dt}$$

Мы получили систему ОДУ

$$\frac{dp_i}{dt} = -(\lambda + n\mu)\, p_i(t) + \lambda p_{i-1}(t) + n\mu p_{i+1}(t), \;\; i = n,...,n+r-1$$

$$\frac{dp_{n+r}(t)}{dt} = -n\mu p_{n+r}(t) + \lambda p_{n+r-1}(t)$$

Предполагаем, что у системы есть стационарное решение, в левой части поставим нули.
Зная поведение

$$p_{ij}(\Delta) = 1 - \lambda\Delta - n\mu\Delta$$

$$p_{i,i-1}(\Delta) = n\mu\Delta + o(\Delta)$$

$$p_{n+r,n+r}(\Delta) = 1 - n\mu\Delta$$

Таким образом, система M|M|n|r – это процесс рождения и гибели. Точнее процесс $\nu(t)$ - это ПРГ с интенсивностями:

$\lambda_i = \lambda,$ если $i = 0,...,n+r-1$

$\lambda_{n+r} = 0$ - заявка потеряется

$\mu_i = i\mu \quad i = 0...,n-1$

$\mu_i = n\mu \quad i = n,...,n+r$

Отсюда следует, что величины $p_i(t) = P(\nu(t) = i)$ удовлетворяют следующим соотношениям:

$$p_0(t+\Delta) = (1-\lambda\Delta)\, p_0(t) + \mu\Delta p_1(t) + o(\Delta)$$

$$p_i(t+\Delta) = (1-(\lambda+i\mu)\Delta)\, p_1(t) < \lambda\Delta p_{i-1}(t) + i\mu\Delta p_{i+1}(t) + o(\Delta), \;\; i = 1,...,n-1$$

$$p_i(t+\Delta) = (1-(\lambda+n\mu)\Delta)\, p_i(t) + \lambda\Delta p_{i-1}(t) + n\mu\Delta p_{i+1}(t) + o(\Delta), \;\; i = n,...,n+r-1$$

$$p_{n+r}(t+\Delta) = (1-n\mu\Delta)\, p_{n+r}(t) + \lambda\Delta p_{n+r-1}(t) + o(\Delta)$$

Из полученных соотношений вытекает, что $p_i(t)$ удовлетворяют следующей системе ОДУ:

$$\frac{dp_0(t)}{dt} = -\lambda p_0(t) + \mu p_1(t)$$
$$\frac{dp_i(t)}{dt} = -(\lambda + i\mu) p_i(t) + \lambda p_{i-1}(t) + i\mu p_{i+1}(t), i = 1,...,n-1$$
$$\frac{dp_i(t)}{dt} = -(\lambda + n\mu) p_i(t) + \lambda p_{i-1}(t) + n\mu p_{i+1}(t) \qquad i = n,...,n+r-1$$
$$\frac{dp_{n+r}(t)}{dt} = -n\mu p_{n+r}(t) + \lambda p_{n+r-1}(t)$$

При этом начальные условия $p_i(0) = 1$

НАЗОВЕМ ВСЕ ЭТО СИСТЕМОЙ (14.1)

18. Стационарные распределения для системы M|M|n|r

Предположим, что решения $p_i(t)$ системы (14.1) имеют предельные распределения $\lim\limits_{t\to\infty} p_i(t) = p_i$

Тогда величины p_i удовлетворяют системе алгебраических уравнений

$$0 = -\lambda p_0(t) + \mu p_1(t)$$
$$0 = -(\lambda + i\mu) p_i(t) + \lambda p_{i-1}(t) + i\mu p_{i+1}(t) \quad i = 1,...,n-1$$
$$0 = -(\lambda + n\mu) p_i(t) + \lambda p_{i-1}(t) + n\mu p_{i+1}(t) \qquad i = n,...,n+r-1$$
$$0 = -n\mu p_{n+r}(t) + p_{n+r-1}(t)$$

(14.2)

Граф, соответствующий системе (2) имеет вид КАРТИНКИ НЕТ… есть текстовое описание :)

0, 1,…, i-1, i, i+1, … ,n-1, n, n+1, …, n+r – узлы графа.

Из 1 в 0 – интенсивность μ

Из 2 в 1 – 2μ

Из *i* в *i*-1 – $i\mu$

Из $(i+1)$ в *i* - $(i+1)\mu$

Из *n* в *n*-1 - $n\mu$ и дальше везде будет $n\mu$

Принцип локального баланса, вытекающий из системы (14.2) утверждает, что входящий и выходящий потоки должны быть равны. Анализируя (14.2), получим

$p_1(t) = \frac{\lambda}{\mu} p_0(t)$ λp_0 отсюда вытекает, а μp_1 - вытекает. ???

$$\lambda p_i = (i+1)\mu p_{i+1}, \ i = 0 =,...,n-1$$
$$\lambda p_i = n\mu p_{i+1}, i = n,...,n+r-1$$

Баланс нарушается только в последнем, т.к. ничего не выходит

При этом, мы можем выразить все p_i через p_0 : $p_{i+1} = \frac{\lambda}{\mu(i+1)} p_i = \frac{\lambda}{\mu(i+1)} . \frac{\lambda}{\mu \cdot i} p_{i-1} ...$ и т.д.

А также

$\lambda p_{i-1} + \mu(i+1) p_{i+1} = (\lambda + i\mu) p_i \quad i = 1,...,n-1$

$\lambda p_i = (i+1)\mu p_{i+1}, i = 1,...,n-1$

$\lambda p_i = n\mu p_{i+1}, i = n,...,n+r-1$???

Итерируя полученные выражения, перейдем к соотношению

$p_i = \frac{\rho^i}{i!} p_0$, если $i = 0,...,n-1$

$p_i = \frac{\rho^i}{n! n^{i-n}} p_0$ если $i = n,...,n+r-1$

$p_{n+1} = \frac{\rho^{n+1}}{n! n} p_0$ и т.д.

Воспользовавшись соотношением $\sum_{i=0}^{n+r} p_i = 1$ найдем выражение для p_0

$p_0 = \left[\sum_{i=0}^{n-1} \frac{\rho^i}{i!} + \frac{\rho^n}{n!} \sum_{i=0}^{r} \left(\frac{\rho}{n} \right)^i \right]^{-1}$ **(14.3)** т.к. $1 = p_0 + p_1 + ... + p_{n+r} = p_0 [...]^{-1}$

Вероятность немедленного обслуживания заявки в стационарном режиме:

$$p_{W=0} = \sum_{i=0}^{n-1} p_i = p_0 \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\rho^i}{i!}$$

W - раньше было **среднее время пребывания в системе**

Вероятность потери заявки $p_{n+r} = \pi = \frac{\rho^{n+r}}{n! n^r} \cdot p_0$

Дополнительная информация: (не входит в вопрос)

Пусть $r = 0$, т.е. $M|M|n|0$ - с этих систем все началось. Мы звоним на коммутатор и все элементы коммутатора заняты – тогда заявка теряется.

Соответствующая система называется **системой Эрланга**. Она характерна для телефонных сетей.

В этом случае $p_i = \frac{\rho^i}{i!} \left[\sum_{k=0}^{n} \frac{\rho^k}{k!} \right]^{-1} \quad i = 0,...,r$

Стационарные характеристики СМО $M|N|n|r$

Стационарная средняя длина очереди Q

$Q = \sum_{i=1}^{r} i p_{n+i} = p_n \sum_{i=1}^{n} i \left(\frac{\rho}{n} \right)^i$ - для вычисления Q положим $\frac{\rho}{n} = y$ и заметим, что

$$\sum_{i=1}^{n} i y^i = y \sum_{i=1}^{n} i y^{i-1} = y \frac{d}{dy} \sum_{i=1}^{n} y^i = y \frac{d}{dy} \left[\frac{y(1-y^r)}{1-y} \right] = y \frac{1-(r+1) y^r (1-y) + y(1-y^r)}{(1-y)^2} =$$

$$= \frac{1-(r+1) y^r + r y^{r+1}}{(1-y)^2} \cdot y$$

И $p_n = \frac{\rho^n}{n!} p_0$

Подставляем полученное выражение в Q :

Неизвестная дата

$M|M|n|r$

Появляется система с потерями

$$\frac{dp_k}{dt}=-\left(\lambda+\left(k+1\right)\mu\right)p_k+\lambda p_{k-1}\left(t\right)+\left(k+1\right)\mu p_{k+1}\left(t\right)\quad k<n-1$$

Будет $+n\mu p_{k+1}\left(t\right)$ когда $k\geq n$

Будет конечная система линейных уравнений:

Мы дошли до формул Литтла. Мы нашли N,Q и на этом на прошлой лекции остановились.

$Q=\frac{\rho^{n-1}}{\left(n-1\right)!}$, $Q=\sum_{i=1}^{r}ip_{n+i}=p_n\sum_{i=1}^{n}i\left(\frac{\rho}{n}\right)^i$ - для вычисления Q положим $\frac{\rho}{n}=y$ и заметим, что

$$\sum_{i=1}^{n}iy^i=y\sum_{i=1}^{n}iy^{i-1}=y\frac{d}{dy}\sum_{i=1}^{n}y^i=y\frac{d}{dy}\left[\frac{y\left(1-y^r\right)}{1-y}\right]=y\frac{1-\left(r+1\right)y^r\left(1-y\right)+y\left(1-y^r\right)}{\left(1-y\right)^2}=$$

$$=\frac{1-\left(r+1\right)y^r+ry^{r+1}}{\left(1-y\right)^2}\cdot y$$

И $p_n=\frac{\rho^n}{n!}p_0$

Подставляем полученное выражение в Q : $Q=\frac{\rho^{n-1}}{\left(n-1\right)!}\cdot\frac{1+r\left(\frac{\rho}{n}\right)^{r+1}-\left(r+1\right)\left(\frac{\rho}{n}\right)^r}{\left(\frac{n}{\rho}-1\right)^2}p_0$

Вернемся к соотношению локального баланса.

$\lambda p_i=\left(i+1\right)\mu p_{i+1}\quad i=0,...,n-1$

$\lambda p_i=n\mu p_{i+1}\quad i=nk,...,n+r-1$

Эти соотношения обозначим **(*)**

Из $i\to i+1$ с λ

$i+1\to i$ с $i\mu$

Обозначим $\pi=\frac{\rho^n}{n!}\left[\sum_{i=0}^{n}\frac{\rho^i}{i!}\right]^{-1}$ - **стационарная вероятность потери заявки**. При этом,

$$p_i=\begin{cases}\frac{\rho^i}{i!}p_0,\ i=0,...,n-1\\ \frac{\rho^i}{n!n^{i-n}}p_0,\ i=n,...,n+r-1\end{cases}$$

Просуммировав соотношения (*) по i от 0 до $n+r$, получим $\mu\left(\sum_{i=1}^{n-1}ip_i+\sum_{i=n}^{n+r}np_i\right)=\mu\overline{n}$,

где $\overline{n}$ - среднее число занятых приборов.

Обозначим $1-\pi$ - вероятность того, что не все приборы заняты и пусть $\lambda_D=\lambda\left(1-\pi\right)=\mu\overline{n}$ где λ_D называется **интенсивностью выхода (пропускной способностью) системы**.

Обозначим $W(x)$ - стационарное распределение времени ожидания в начале обслуживания в системе $M|M|n|r$

Если $i<n$, то заявка обслуживается немедленно, а если $n<i<n+r$ то она ждет в течении времени τ

Время ожидания начала обслуживания заявки, заставшей в системе $n+i$ заявок.

$$\tau=\sum_{i=1}^{r}\tau_i$$

Таким образом время ожидания распределено по закону Эрланга с $i+1$ степенью свободы или $\varepsilon_{i+1,n\mu}$

$$W(x)=\frac{1}{1-\pi}\left[\sum_{i=0}^{n-1}p_i+\sum_{i=1}^{r}p_{n+i}\varepsilon_{i+1}(x)\right]=\frac{1}{1-\pi}\left[p_{W=0}+\sum_{i=1}^{r}p_{n+i}\varepsilon_{i+1}(x)\right]$$

Эрланговское распределение выглядит $\frac{x^k}{k+1}e^{-\lambda x}$ - сложная плотность.

Преобразование Лапласа $W(x)$ имеет вид $\omega(s)=\int_0^\infty e^{-sx}w(x)dx$, где $w(x)=W'(x)$

$\omega(s)=\frac{1}{1-\pi}\left[p_{W=0}+n\mu p_n\cdot\sum_{i=0}^{r-1}\frac{\lambda^i}{(s+n\mu)^{i+1}}\right]$ - видим геометрическую прогрессию. Сумму этой геометрической прогрессии $=\frac{1}{1-\pi}\left[P_{W=0}+n\mu p_n\frac{1-\left(\frac{\lambda}{s+n\mu}\right)}{s+n\mu-\lambda}\right]$

Для того, чтобы найти среднее время ожидания начала обслуживания, нужно вычислить $\frac{d\omega(s)}{ds}\Big|_{s=0}$

Резюме: мы провели обсуждение стационарных распределений системы массового обслуживания, у которого n обслуживающих устройств и r – длина очереди.

TODO - т.к. преподаватель просила давать определение для каждой переменной или коэффициента в формуле, то нужно добавить в конец конспекта таблицу со всеми используемыми символами и их расшифровкой.