# 

Оглавление

[1](#_Toc483908402)

[1 Вероятностное пространство. Случайные величины, дискретные и непрерывные. Фукнкции распределения. 2](#_Toc483908403)

[2 Числовые характеристики случайных величин, производящие и характеристические функции. 3](#_Toc483908404)

[3 Экспоненциальный, гиперэкспоненциалный, эрланговский законы распределения и их числовые характеристики. 4](#_Toc483908405)

[4 Преобразования Лапласа для распределений из вопроса 3. 5](#_Toc483908406)

[5 Пуассоновский процесс и его свойства 7](#_Toc483908407)

[6 Марковские процессы, определения и свойства. 7](#_Toc483908408)

[7 Переходные вероятности, уравнение Чепмена-Колмогорова 8](#_Toc483908409)

[8 Марковские цепи с дискретным временем, способы их описания (матрицы, графы) 9](#_Toc483908410)

[9 Марковские цепи с непрерывным временем, генератор марковской цепи и его свойства. 10](#_Toc483908411)

[10 Прямые и обратные уравнения Колмогорова для марковской цепи. ??? что-то не так, чего-то не хватает 12](#_Toc483908412)

[11 Процессы рождения и гибели 12](#_Toc483908413)

[12 Системы массового обслуживания и их классификация 14](#_Toc483908414)

[13 Одноканальные и многоканальные СМО с отказами 15](#_Toc483908415)

[14 Система M|M|1| ОДУ для распределений 16](#_Toc483908416)

[15 Стационарные распределения для системы M|M|1|r ??? 17](#_Toc483908417)

[16 Формулы Литтла 18](#_Toc483908418)

[17 Система M|M|n|r ОДУ для распределений если r конечно 18](#_Toc483908419)

[18. Стационарные распределения для системы M|M|n|r 18](#_Toc483908420)

[Не вошло в вопросы 19](#_Toc483908421)

[1 Показатели эффективности СМО 19](#_Toc483908422)

[1.1 Расчет показателей одноканальной СМО с отказами 19](#_Toc483908423)

[1.2 Таблица для многоканальной системы 21](#_Toc483908424)

[2 Марковские системы массового обслуживания 22](#_Toc483908425)

[3 Система с повторными заявками 26](#_Toc483908426)

[3.1 Распределение потока повторных заявок в системе 26](#_Toc483908427)

[4 Нестационарные характерстики СМО с повторными заявками 29](#_Toc483908428)

[5 Условные вероятности и условные математические ожидания 30](#_Toc483908429)

[6 6. Случайные процессы и их числовые характеристики 30](#_Toc483908430)

# 1 Вероятностное пространство. Случайные величины, дискретные и непрерывные. Фукнкции распределения.

**Вероятностное пространство – это тройка** , где

1.  - множество (описывает **пространство событий**). Его элементы 
2.  - -**алгебра подмножеств** множества 
3.  - **вероятностная мера**, 

-алгебра замкнута относительно операций счетного объединения и пересечения. Также, если  (содержит дополнение к событию).

Эксперимент: бросаем кубик:   - на верхней грани *i* точек. На грани кости четное число: 

 если события **несовместны,** т.е. . Если же события **совместны**, то вероятность 

События называются **независимыми** если вероятность их произведения равна произведению вероятности: 

 если события  независимы.

**Случайная величина -** это отображениеили **.** Для случайной величины при непрерывном отображении должна быть **измеримость** относительно борелевской -алгебры на : . Из элемента сигма-алгебры попадаем в сигма-алгебру.

Вероятноть  - **функция распределения СВ.** СВ полностью определяется функцией распределения.

Если функция распределения *F* дифференцируема, то более наглядное представления о СВ дает **плотность вероятности СВ**: .

Функция распределения любой СВ обладает следующими свойстваами:

1. *F*(*x*) определена на всей числовой прямой *R*
2. *F*(*x*) не убывает, т.е. если , то 
3. либо 
4. *F(x)* непрерывна справа, т.е. 

Если  - это дискретная СВ, принимающая значения  с вероятностями то таблица вида:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | *x*1 | *x*2 | *…* | *xi* |
| *p* | *p*1 | *p*2 | *…* | *pi* |

называется **распределением дискретной СВ.**

У дискретной СВ функция распределения ступенчатая.

Если функция распределения непрерывна, то СВ будет **непрерывной СВ**.

**Примеры:**

случайное время обслуживания - непрерывная случайная величина, для которой функция распределения , 

Вероятность нахождения в состоянии *k* 

# 2 Числовые характеристики случайных величин, производящие и характеристические функции.

Рассмотрим дискретную СВ  с вероятностями  т.е.а также непрерывную СВ с функцией распределения  и плотностью .

**Математическое ожидание:**  или 

Свойства:

1.  - линейность
2. 
3. Если СВ  является функцей СВ , то 
4. Если СВ  независимы, то .

**Дисперсия** .



**-м начальным моментом** случайной величины , где , называется величина 

**-м центральным моментом** случайной величины  называется величина 

**Производящая функция** дискретной случайной величины , принимающей неотрицательные цлочисленные значения  наызывается ряд

, , .

Распределение вероятностей однозначно определяется своей производящей функцией



Производящая функция позволяет вычислить МО  и Дисперсию 

**Характеристическая функция** 

МО  ???  Дисп. 

**Пример: Пуассоновское распределение:** ,

МО 

Дисперсия 

Таким образом 

Либо, через производящую функцию:







Вторая производная , тогда 

**Экспоненциальное распределение** 

МО 

Дисп

,

Таким образом 

# 3 Экспоненциальный, гиперэкспоненциалный, эрланговский законы распределения и их числовые характеристики.

**Экспоненциальное распределение –** непрерывная СВ, имеет показательное распределение с параметром >0,

Функция распределения:  ,   
плотность  МО  Дисп  (вычисляются в предыдущем вопросе)

**Гиперэкспоненциальная СВ:**  где  - независимые экспоненциальные распределения СВ с параметрами .

Плотность: , где ,

МО Дисперсия распределения

**Распределение Эрланга k-го порядка** – распределение, описывающее непрерывную СВ X, принимающую положительные значения в интервале  и представляюущую собой сумму *k* независимых СВ.

 ??? правильная ли формула

,

, .

где  и натуральное число *k* – параметр распределения Эрланга.

??? Как расисать

При *k* = 1 распределение эрланга вероятностей экспоненциаьлное, а при  приближается к нормальному распределению.

Распределение Эрланга является двупараметрическим (с параметрами  и k), оно может использоваться для аппроксимации распределений по двум первым моментам.

# 4 Преобразования Лапласа для распределений из вопроса 3.

**Преобразование Лапласа** плотности распределения *f*(*x*) неотрицательной непрерывной СВ  называется функция. , .

Плотность распределения однозначно определяется своим преобразованием Лапласа. Дифференцируя преобразование Лапласа по *s* в точке *s*=0, можно определить моменты СВ: 

Преобразование Лапласа *F*(s) суммы x=x1+x2+…+xn независимых СВ равно произведению преобразований Лапласа слагаемых: 

Заметим, что  ???

 ??? k или lamda???

Заметим, что среднее число заявок за единицу времени или **интенсивность потока**.

**Свойства** преобразования Лапласа

1. , где  - вещественные числа, а  - функции для которых определено преобразование Лапласа.
2. 

Примеры преобразований Лапласа:

1.  
2.  
3.  

Для тригонометрии нужно использовать формулы Эйлера.

, 

1. 
2.  
3.  

**Экспоненциальное распределение:** 

По свойству 1, ****

**Гиперэкспоненциальное распределение:** используя линейность, ****

**Эрланговское распределение: **

Выполнив интегрирование по частям *k*-1 раз, получим 

# 5 Пуассоновский процесс и его свойства

Целочисленный пуассоновский точечный процесс  определяется тремя свойствами:

1. **Ординарность** - вероятность наступления более одного события на любом малом интервале времени  имеет более высокий порядок малости, чем . Поэтому для него выполняются соотношения  и ,  - некоторая положительная величина, имеющая размерность, обратную времени. Следствием этих двух соотношений является равенство 

2. **Стационарность** - его статистические характеристики не изменяются при сдвиге всех точек вдоль оси времени на произвольную 

3. **Независимость** (отсутствие последействия) во все моменты времени (периоды) - имеет независимые приращения (значения) на неперекрывающихся интервалах времени.

,

МО , Дисперсия 

Производящая функция 

Характеристическая функция: 

# 6 Марковские процессы, определения и свойства.

Из Moodle:

Пусть N –множество натуральных чисел, T > 0.

B(R) - пространство измеримых ограниченных борелевских функций заданных на вещественной оси R,

M(R) - пространство ограниченных борелевских мер, определенных на борелевской σ-алгебре .

Для заданной случайной величины ξ ∈ R, функции *f* ∈ B(R) и σ-подалгебры  σ-алгебры  пусть  обозначает условное математическое ожидание случайной величины η = f(ξ) относительно .

*P. S. борелевская функция — отображение одного топологического пространства в другое (обычно оба суть пространства вещественных чисел), для которого прообраз любого борелевского множества есть борелевское множество.*

Случайная величина ξ ∈ *R* порождает вероятностную меру , определенную соотношением  для любого борелевского подмножества . Пусть  обозначает σ-алгебру, порожденную случайными величинами ξ(θ), θ ∈ [s, T]. Случайный процесс ξ(t) ∈ *R* **называется Марковским случайным процессом**, если для любой измеримой ограниченной скалярной функции *f*(*x*) справедливо равенство



Для любого  соотношение  определяет переходную вероятность марковского процесса . Марковское свойство процесса  влечет за собой справедливость **уравнения Чепмена-Колмогрова**



Мы можем говорить о дискретном и непрерывном времени , а также о дискретном и непрерывном состоянии.

Марковский процесс называют однородным по времени, если



В случае, когда множество значений процесса  - дискретное множество V, например V={1,2,…,d1} или *V* – множество целых чисел, случайный процесс  со значением в V называют **однородной по времени** марковской цепью, если справедливы соотношения



Примером **марковской цепи с непрерывным временем** и **дискретным множеством состояний**  является пуассоновский процесс  с интенсивностью , поскольку



Для заданной марковской цепи  обозначим  ее переходную вероятность и пусть  - матрица с элементами .

Если марковская цепь задана в терминах , то важно иметь ввиду, что ее переходные вероятности задаются соотношением



# 7 Переходные вероятности, уравнение Чепмена-Колмогорова

**Переходная вероятность Марковского процесса** выражается формулой, где - борелевское подмножество .

Марковское свойство при этом описывается **уравнением Чепмена-Колмогоова**, 

Плотность переходной вероятности:  - это положительная функция, 

при этом уравнение Чепмена-Колмогорова имеет вид 

уравнение Чепмена-Колмогорова для марковской цепи с дискретным временем.  , 

Для цепи с непрерывным временем опишем с помощью уравнения Чепмена-Колмогрова: ,  или , если 

Борелевская сигма-алгебра - минимальная сигма-алгебра, содержащая все открытые (каждая точка входит вместе с некоторой окрестностью) подмножества топологического пространства (также она содержит и все замкнутые, эти подмножества также называются Борелевыми). Борелевская сигма-алгебра обычно выступает в роли сигма-алгебры случайных событий вероятностного пространства. В борелевской сигма-алгебре на прямой или на отрезке содержатся многие « простые» множества: все интервалы, полуинтервалы, отрезки и их счётные объединения. Борелевской сигма-алгеброй в  называется самая маленькая среди всех возможных -алгебр, содержащих любые интервалы на прямой. Если не оговорено иное, в качестве топологического пространства выступает множество вещественных чисел.

# 8 Марковские цепи с дискретным временем, способы их описания (матрицы, графы)

Пусть , тогда , где  - состояния .

Марковская цепь с дискретным временем

 в данном случае 

 - **уравнение Чепмена-Колмогорова** для марковской цепи с дискретным временем.  ,  ??? Надо добавить здесь – что такое theta, B, dz и т.д.

В матричном виде уравнение Чепмена-Колмогорова имеет вид  или 

**Вывод:** Чтобы задать марковскую цепь с дискретным временем, достаточно задать ее начальное состояние  (если цепь имеет  последовательных состояний) и переходную вероятность  за один шаг. При этом, состояние марковской цепи за  шагов задается соотношением  или 

Не входит в вопрос, но на всякий случай:

Состояние марковской цепи можно разбить на **классы**

Если состояние  и  таковы, что , , то эти состояния называются **сообщающимися**.

Если состояния  и  таковы, что , , то эти состояния называются **сообщающимися при некотором n**.

Будем называть класс  такой, что для всех  состояния i и j – сообщающиеся – **классом сообщающихся состояний.**

Класс называется **замкнутым**, если для  и класса , для элемента .???Замкнутый класс состояний - это класс, из которого **нельзя выйти**.

Из того, что  следует, что .

**Утверждение:** цепь Маркова с конечным числом состояний имеет хотя бы один замкнутый сообщающийся класс.

Состояние из незамкнутого класса, называется **несущественным** состоянием.

Состояние i называется **поглощающим**, если .

Цепь Маркова называется **неприводимой**, если все ее состояния попадают в один замкнутый класс.

Состояние i из некоторого подкласса  называется **возвратным**, если событие и **невозвратным**, если событие

**Теорема:** состояние  является возвратным, если величина  и невозвратно, если  ??? не наоборот

Множество состояний марковской цепи можно рассматривать как множество узлов некоторого графа.

Матрица  называется также **стохастической матрицей (переходная вероятность)**, т.к. она обладает свойством: 

Рассмотрим  - индексированное семейство СВ. Введем обозначения

за 1 шаг.

- за  шагов.

**Марковость**: 

# 9 Марковские цепи с непрерывным временем, генератор марковской цепи и его свойства.

Существуют два способа задания МЦсНВ.

**№1: *Q* – матрицы**

класс Q-матриц – это класс матриц вида

, обладающих следующими свойствами:

 - непрерывная величина при  , откуда 

Матрицы образуют алгебру *Mn*, это значит:  и , то 

**Марковское свойство** для цепи с непрерывным временем опишем с помощью уравнения Чепмена-Колмогрова: ,  или , если  ???

Различные способы описания н.в.

1. ??? почему индексы повторяются

и используеем соотношение:  и выбираем последовательно в качестве собсобптеле вида  получим требуемое соотношение, где  ???

1. Нужно задать поведение переходной вероятности на малых интервалах времени.

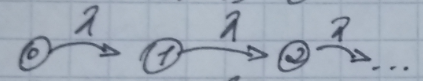
В качестве примера МЦ с НВ рассмотрим Пуассоновский процесс

Нужно задать поведение переходной вероятности на малых интервалах времени. В качестве примера марковской цепи с непрерывным временем рассмотрим пуассоновский процесс . Пусть , при этом 

Кроме того приращения процесса  на пересечении интервалов независимы, т.е.  и  - независимые случайные величины.

При этом ,  если  мало, то 

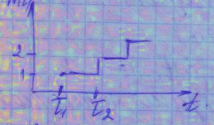
Граф, соответствующий пуассоновскому процессу имеет вид



и матрица  имеет вид



Траектория Пуассоновскоого процесса имеет вид



Опишем поведение приращения пуассоновского процесса на малых временах.











Вычислим

 ??? верны ли условия

т.к. 

Вычислим 



Таким образом, соответствующее уравнение  будет иметь вид 

# 10 Прямые и обратные уравнения Колмогорова для марковской цепи. ??? что-то не так, чего-то не хватает

Марковские цепи с дискретным временем.



??? правильно ли поставлены индексы















 - **прямое уравнение Колмогорова,** 

 - **Обратное уравнение Колмогорова**

# 11 Процессы рождения и гибели

Рассмотрим ПРГ, у которого интенсивность рождения , а гибели - 

Генератор ПРГ имеет вид:



Для того, чтобы найти матрицу переходных вероятностей, рассматриваем прямое уравнение Колмогорова

, 

При этом для элементов  матрицы  - получим следующую систему ОДУ:



Получаем следующую систему ОДУ:





и т.д.

Напомним, что справедливо соотношение для МЦ с НВ

,  

Таким образом, зная уравнение для  можно найти уравнения для .

рассмотрим еще один подход к выводу уравнений для  .

Поскольку мы имеем дино СМУ с непрерывнм временем, то при фиксированном , то



При этом прямое уравнение Колмогорова будет иметь вид

, при этом полагаем , если 

Обратное уравнение Колмогрова для рассматриваемого процесса будет имеь вид



# 12 Системы массового обслуживания и их классификация

СМО **Системы массового обслуживания** – совокупность, включающая:

1. Входящий поток
2. Обслуживающее устройство
3. Выходящий поток

СМО могут быть **одноканальными** и **многоканальными** в зависимости от того, сколько обслуживающих устройств в рассматриваемой системе.

Для того, чтобы описать СМО, нужно

1. Описать входящий поток – задать распределения
2. Описать время обслуживания одноим устройством
3. Задать число обслуживающих устройств
4. Описать величину очереди

**Входящий поток** – поток, поступающих заявок – это СП с дискретным множеством состояний.

Опишем классификацию СМО: **классификация Кендалла**.

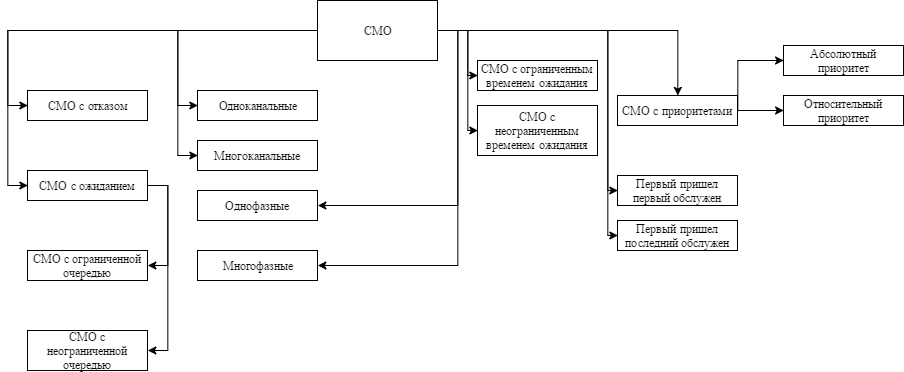
Пример: . Это означает, что входящий поток - марковский, время обслуживания – экспоненциальное,  - число обслуживаемых устройств,  - длина очереди.

**Входящий поток**

Обозначим  - число заявок поступивших в систему за время , пусть  моменты прихода заявок.

Для того, чтобы описать входящий поток, введем в рассмотрение случайную величину  и пусть  /

Наряду с этим рассмотрим набор интервалов  и обозначим  - число заявок, поступающих за время , т.е. на интервале  и пусть ??? странные интервалы ??? 



# 13 Одноканальные и многоканальные СМО с отказами

**В Moodle есть ответ на этот вопрос.**

1. Одноканальные

Системой с отказами будем называть СМО без накопителей(без очереди).

Модель одноканальной с-мы с отказом является простейшая из всех моделей СМО. Входящий потом у этой системы описывается пуассоновским процессом с интенсивностью , те число принадлежащих заявок к моменту ) имеет распределение 

Обслуживание поступивших заявок происходит в течение случ.времени с экспоненциальным законом распредления с параметром , те  и плотность этого распредления 

Рассмотренная система имеет 2 состояния:

0-в с-ме нет заявок(канал свободен)

1-в с-ме есть одна заявка(канал занят)

-это состояние системы:



Уравнение Колмагорова для м.ц. имеет вид:



Генератор этой м.ц. имеет вид:





Выражая  из (1) в виде:  и подставляя в (2)=>





# 14 Система M|M|1| ОДУ для распределений

**В Moodle есть ответ на этот вопрос**

1. Марковский входящий поток

2. Экспоненциальное время обслуживания

3. 1 обслуживающее устройство – одноканальная система

4. Очередь бесконечна

Когда очередь бесконечна, говорят, что это – **система без потерь**.

1. – число заявок в системе в момент . Это случайный процесс, принимающий значения из множества 

Обозначим  - вероятность перехода из состояния  в состояние  за время  ().

По предположению, за время  с вероятностью  не поступит ни одной заявки, а если , то с вероятностью  ни одна заявка не будет обслужена.

Одна заявка может быть обслужена – тогда число заявок -1. Может прийти заявка, тогда +1.

 - вероятность того, что за время  из 0 никто не пришел 



Другими словами  - это процесс рождения-гибели (ПРГ).

Пусть 





 теперь  а не , т.к. на одну .

Получили производную: , 



Дальше мы хотим решить эту систему уравнений

Для этой системы нам не хватает начальных условий

 уже без времени

Поскольку явно решить эту систему сложно, то можно предположить, что существует 

Мы сказали, что в правой части в пределе должны стоять константы, тогда их производные – нули. Тогда система приобретет вид





Откуда получим получим, что 

Обозначим 



Отсюда 

При этом  если  и тогда  - сумма убывающей геометрической прогрессией.

Следовательно, если , то  и 

Мы нашли вероятность любого состояния в стационарном режиме

Итак, стационарное распределение числа заявок в системе  является геометрическим распределением.

 - среднее число заявок в системе.



средняя длина очереди - . 



 число заявок в системе

 - время обслуживания.

**Среднее время ожидания начала обслуживания** 

**среднее время пребывания в системе** 

Параметр  называется **загрузкой системы** (или **пропускной способностью**).

# 15 Стационарные распределения для системы M|M|1|r ???

 ??? 



 - **среднее время пребывания в системе**

# 16 Формулы Литтла

Пусть  - среднее число заявок в системе со стационарным средним временем пребывания в системе 

Тогда 

За время  в среднем в систему поступит  заявок

При этом каждая заявка в среднем проводит в системе время . Среднее время пребывания в системе  заявки равно 

При этом в каждый момент в системе находится 

Аналогично,  - эти формулы называются **формулами Литтла.**

# 17 Система M|M|n|r ОДУ для распределений если r конечно

**Также есть в Moodle**

M|M|n|r - система массового обслуживания, входящий поток пуассоновский, время обслуживания - экспоненциально-распределенное, накопитель равен r, число каналов равно n. Таким образом, для задания системы, необходимо указать параметры распределения.

Интенсивность пуассоновского процесса - 

Случайное время обслуживания заявки -  - экспоненциальный закон распределения с параметром 

Регламент обслуживания в очереди может быть разнообразным. Нетерпеливые заявки.

Для того, чтобы задать  необходимо задать тройку , случайный процесс - отображение 

, P



Входящий поток: пуассоновский процесс: , 

# 18. Стационарные распределения для системы M|M|n|r

**Показатели качества системы**: среднее число заявок в очереди, среднее время ожидания, и т.д.

,   

Среднее число заявок в системе 



Среднее число занятых каналов 

Среднее время обслуживания, , среднее время пребывания 

TODO - т.к. преподаватель просила давать определение для каждой переменной или коэффициента в формуле, то нужно добавить в конец конспекта таблицу со всеми используемыми символами и их расшифровкой.