Programmation Linéaire en nombre entiers

Il s'agit exactement du même problème que précédemment à cela près que les variables ne peuvent prendre que des valeurs entières.

En effet, c'est le cas dans beaucoup de problème de R.O. (on ne peut pas vendre 4.5 voitures et 1.5 camion !).

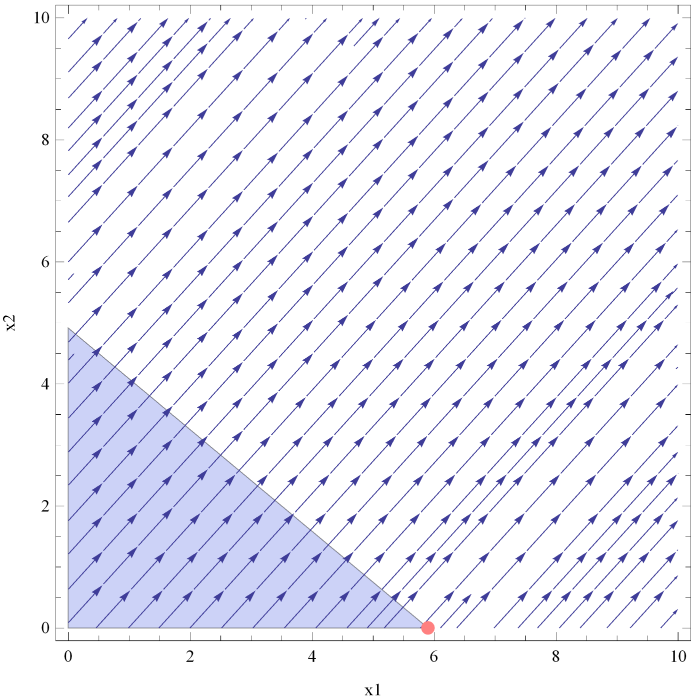
De plus, il ne suffit pas d'arrondir pour obtenir forcément la solution optimale :

Max Z = $10x_1+11x_2$

sous contraintes :

$10\, x_1+12\, x_2 \leq 59$

avec $x_1, x_2 \geq 0$



Solution optimale si x_1 et x_2 réels:

$$\left\{59,\ \left\{x_1 \to \frac{59}{10},\ x_2 \to 0\right\}\right\}$$

Solution optimale si x_1 et x_2 entiers:

```
Maximize[{10x₁+11x₂,10x₁+12x₂≤59&&x₁≥0&&x₂≥0&&x₁∈Integers&&x₂∈Integers},{x₁,x₂}]
```

```
{54, {x₁ → 1, x₂ → 4}}
```

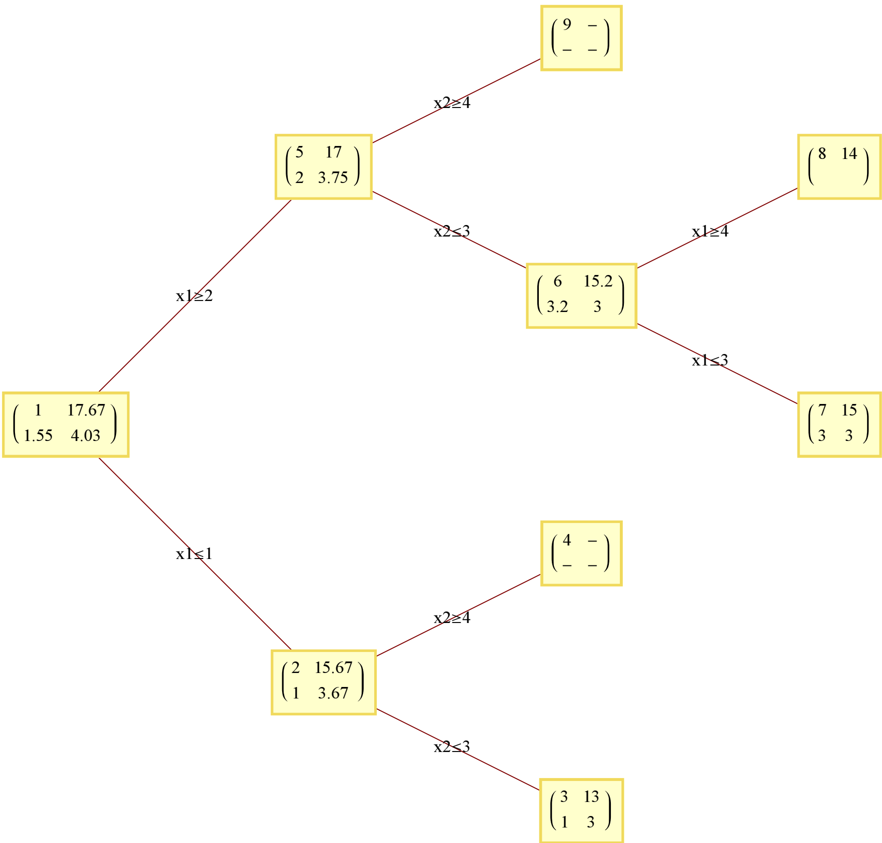
PLNE : Branch and Bound

Une méthode dite par séparation et évaluation consiste à résoudre plusieurs simplexes consécutifs en ajoutant progressivement des contraintes et séparant les domaines des variables.

Exemple

Max Z = $x_1 + 4\,x_2$ S.C. :

$5\,x_1 + 8\,x_2 \leq 40$
$-2\,x_1 + 3\,x_2 \leq 9$
avec $x_1,\ x_2 \geq 0$ et à valeurs entières



Exemple PLNE

Max Z = 3 x_1 + 5 x_2 S.C. :

$x_1 + 2\,x_2 \leq 3$
$6\,x_1 + 8\,x_2 \leq 15$
avec $x_1,\ x_2 \geq 0$ et à valeurs entières

Correction détaillée

Dictionnaire :

$Z - 3x_1 - 5x_2 = 0$

$x_1 + 2x_2 + x_3 = 3$
$6x_1 + 8x_2 + x_4 = 15$
avec $x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$ et à valeurs entières

Première étape : simplexe classique

	x_1	x_2	x_3	x_4	Z	valeur
x_3	1	2	1	0	0	3
x_4	6	8	0	1	0	15
Z	−3	−5	0	0	1	0

	x_1	x_2	x_3	x_4	Z	valeur
x_2	1 / 2	1	1 / 2	0	0	3 / 2
x_4	2	0	−4	1	0	3
Z	−1 / 2	0	5 / 2	0	1	15 / 2

	x_1	x_2	x_3	x_4	Z	valeur
x_2	0	1	3 / 2	−1 / 4	0	3 / 4
x_1	1	0	−2	1 / 2	0	3 / 2
Z	0	0	3 / 2	1 / 4	1	33 / 4

Cela nous donne notre premier noeud de notre arbre :

1	33 / 4
x1 : 3 / 2	x2 : 3 / 4

Ni x1 ni x2 n'ont des valeurs entières, on choisit alors de faire des cas sur x1 (on aurait pu choisir x2 aussi).

Ainsi, soit x1 ≤ 1, soit x1 ≥ 2 (bornes inf et sup entières de 3/2)

Cas numéro 1 : x1 ≤ 1

Nouveau dictionnaire :

$Z - 3x_1 - 5x_2 = 0$
$x_1 + 2x_2 + x_3 = 3$
$6x_1 + 8x_2 + x_4 = 15$
$x_1 + x_5 = 1$

avec $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$

simplexe :

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	Z	valeur
x_3	1	2	1	0	0	0	3
x_4	6	8	0	1	0	0	15
x_5	1	0	0	0	1	0	1
Z	−3	−5	0	0	0	1	0

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	Z	valeur
x_2	1 / 2	1	1 / 2	0	0	0	3 / 2
x_4	2	0	−4	1	0	0	3
x_5	1	0	0	0	1	0	1
Z	−1 / 2	0	5 / 2	0	1	1	15 / 2

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	Z	valeur
x_2	1 / 2	1	1 / 2	0	0	0	3 / 2
x_4	2	0	−4	1	0	0	3
x_5	1	0	0	0	1	0	1
Z	−1 / 2	0	5 / 2	0	1	1	15 / 2

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	Z	valeur
x_2	0	1	1 / 2	0	−1 / 2	0	1
x_4	0	0	−4	1	−2	0	1
x_1	1	0	0	0	1	0	1
Z	0	0	5 / 2	0	3 / 2	1	8

Nous obtenons une première solution à valeur entière : x1 = 1, x2 = 1, Z = 8.

Cela donne ainsi un autre noeud à notre arbre :

2	8
x1 : 1	x2 : 1

Il reste cependant à traiter les cas restants avant de conclure à la valeur maximale de Z pour x1 et x2 entiers.

Cas numéro 2 : x1 ≥ 2

Nouveau Dictionnaire

$Z - 3\,x_1 - 5\,x_2 = 0$
$x_1 + 2\,x_2 + x_3 = 3$
$6\,x_1 + 8\,x_2 + x_4 = 15$
$x_1 - x_5 = 2$

Dictionnaire non réalisable, introduction d'une variable artificielle :

$Z - 3\,x_1 - 5\,x_2 = 0$
$x_1 + 2\,x_2 + x_3 = 3$
$6\,x_1 + 8\,x_2 + x_4 = 15$
$x_1 - x_5 + \text{A1} = 2$

avec $x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5,\ \text{A1} \geq 0$

Résolvons d'abord le problème Max W = -A1=-2 + x1 -x5 => -x1+x5+W=-2

Simplexe (première phase):

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	A1	Z	W	valeur
x_3	1	2	1	0	0	0	0	0	3
x_4	6	8	0	1	0	0	0	0	15
A1	1	0	0	0	−1	1	0	0	2
Z	−3	−5	0	0	0	0	1	0	0
W	−1	0	0	0	1	0	0	1	−2

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	A1	Z	W	valeur
x_3	0	2	1	0	1	−1	0	0	1
x_4	0	8	0	1	6	−6	0	0	3
x_1	1	0	0	0	−1	1	0	0	2
Z	0	−5	0	0	−3	3	1	0	6
W	0	0	0	0	0	1	0	1	0

Max W = 0 => le problème originale possède des solutions, une solution particulière est x3 = 1, x4 = 3, x1 = 2, x5 = 0, x2 = 0

Simplexe (deuxième phase) :

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	Z	valeur
x_3	0	2	1	0	1	0	1
x_4	0	8	0	1	6	0	3
x_1	1	0	0	0	−1	0	2
Z	0	−5	0	0	−3	1	6

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	Z	valeur
x_3	0	0	1	−1 / 4	−1 / 2	0	1 / 4
x_2	0	1	0	1 / 8	3 / 4	0	3 / 8
x_1	1	0	0	0	−1	0	2
Z	0	0	0	5 / 8	3 / 4	1	63 / 8

Cela nous donne le troisième noeud de notre arbre :

3	63 / 8
x1 : 2	x2 : 3 / 8

Or, x2 n’est pas valeur entière, on choisit alors de faire des cas sur x2.

Ainsi, soit $x2 \le 0$, soit $x2 \ge 1$ (bornes inf et sup entières de 3/8)

Cas numéro 2-1 : x1 >= 2 et x2 <= 0

ici il n’est pas nécessaire (bien que possible) de dérouler une simplexe, en effet, on a $x2 \le 0$ et $x2 \ge 0$ ainsi, $x2 = 0$, ainsi, ils reste pour x1 les contraintes suivantes :

$x1 \ge 2$, $x1 \le 3$, $6x1 \le 15$ Sachant que Z augmente lorsque l’on augmente x1 (coefficient positif) la nouvelle solution est donc $x1 = 5/2$, $x2 = 0$ ce qui nous donne $Z = 15/2$

Cela nous donne le quatrième noeud de notre arbre :

4	15 / 2
x1 : 5 / 2	x2 : 0

Or, x1 n'est pas valeur entière, on choisit alors de faire des cas sur x1.

Ainsi, soit $x1 \le 2$, soit $x1 \ge 3$ (bornes inf et sup entières de 5/2)

Cas numéro 2-1-1 : x1 >= 2 et x2 <= 0 et x1 ≤ 2

ici il n'est pas nécessaire (bien que possible) de dérouler une simplexe, en effet, on a $x2 \le 0$ et $x2 \ge 0$ ainsi, $x2 = 0$, et $x1 >= 2$ et $x1 \le 2$ ainsi $x1 = 2$

La solution $x1 = 2$, $x2 = 0$ vérifie toutes les contraintes, et nous donne $Z = 6$, ceci est la deuxième solution à valeur entière trouvée jusqu’à maintenant.

Cela nous donne le cinquième noeud de notre arbre :

5	6
x1 : 2	x2 : 0

Il reste cependant à traiter les cas restants avant de conclure à la valeur maximale de Z pour x1 et x2 entiers.

Cas numéro 2-1-2 : x1 >= 2 et x2 <= 0 et x1 ≥ 3

ici il n'est pas nécessaire (bien que possible) de dérouler une simplexe, en effet, on a $x2 \le 0$ et $x2 \ge 0$ ainsi, $x2 = 0$, et $x1 >= 3$

Or, une des contraintes est : $6x1 + 8x2 \le 15 \Rightarrow x1 \le 5/2$ (car $x2 = 0$) $\Rightarrow$ incompatible avec $x1 \ge 3$

Pas de solutions donc pout le cas 2-1-2 cela nous donne le sixième noeud de notre arbre :

6	-
x1 : -	x2 : -

Il reste cependant à traiter les cas restants avant de conclure à la valeur maximale de Z pour x1 et x2 entiers.

Cas numéro 2-2 : x1 >= 2 et x2 >= 1

ici il n’est pas nécessaire (bien que possible) de dérouler une simplexe, en effet, on a $x1 \ge 2$ et $x2 \ge 1$ ainsi $x1 + 2x2 \ge 4$ incompatible avec $x1 + 2x2 \le 3$

Pas de solutions donc pout le cas 2-2 cela nous donne le septième et dernier noeud de notre arbre :

7	-
x1 : -	x2 : -

Conclusion

Seuls deux noeuds possèdent des valeurs entières pour x1 et x2 :

2	8	et	5	6
x1 : 1	x2 : 1		x1 : 2	x2 : 0

Ainsi, la valeur maximale de Z avec x1 et x2 entiers est Zmax = 8 avec x1 = 1 et x2 = 1