Algorithme du simplexe

1- Initialisation : former le dictionnaire

S’assurer que le dictionnaire est réalisable (un dictionnaire est dit réalisable si la mise à zéro de toutes les variables hors base est possible sans violer les contraintes).

2- Itération : Chercher à effectuer un pivotage

Si tous les coefficients des variables de la fonction objectif sont négatifs, l’optimum est atteint, STOP.

Sinon, choix de la variable d’entrée, choix de la variable de sortie et pivotage.

Méthode des tableaux

Plutôt que d'utiliser la méthode systématique avec les dictionnaires, il est aussi possible d'utiliser une autre méthode, dite des tableaux.

Cela permet de calculer plus rapidement les itérations entre les différents dictionnaires.

PL précédent :

Max $Z = 5x_1 + 4x_2 + 3x_3$ sous contraintes :

$$2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 5$$

$$4x_1 + x_2 + 2x_3 + x_5 = 11$$

$$3x_1 + 4x_2 + 2x_3 + x_6 = 8$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0$$

Tableau initial :

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	Z	valeur
x_4	2	3	1	1	0	0	0	5
x_5	4	1	2	0	1	0	0	11
x_6	3	4	2	0	0	1	0	8
Z	−5	−4	−3	0	0	0	1	0

Méthode des tableaux

Choix de la variable d'entrée : coeficient sur la ligne de Z le plus négatif, ici x_1.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	Z	valeur
x_4	2	3	1	1	0	0	0	5
x_5	4	1	2	0	1	0	0	11
x_6	3	4	2	0	0	1	0	8
Z	-5	-4	-3	0	0	0	1	0

Choix de la variable de sortie : ratio de la colonne valeur sur la colonne d'entrée positive le plus faible et positif, ici x_4.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	Z	valeur	
x_4	2	3	1	1	0	0	0	5	$\frac{5}{2}$
x_5	4	1	2	0	1	0	0	11	$\frac{11}{4}$
x_6	3	4	2	0	0	1	0	8	$\frac{8}{3}$
Z	-5	-4	-3	0	0	0	1	0	

Méthode des tableaux

Pivotons les deux variables :

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	Z	valeur	
x_4	2	3	1	1	0	0	0	5	$\times \frac{1}{2}$
x_5	4	1	2	0	1	0	0	11	
x_6	3	4	2	0	0	1	0	8	
Z	−5	−4	−3	0	0	0	1	0	

La colonne de la variable d'entrée doit être égale à 0 pour toutes les lignes sauf pour celle de la variable de sortie :

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	Z	valeur	
x_1	**1**	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	**0**	**0**	**0**	$\frac{5}{2}$	
x_5	4	1	2	0	1	0	0	11	$-4\,Lx_1$
x_6	3	4	2	0	0	1	0	8	$-3\,Lx_1$
Z	−5	−4	−3	0	0	0	1	0	$+5\,Lx_1$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	Z	valeur	
x_1	1	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0	0	$\frac{5}{2}$	
x_5	**0**	**−5**	**0**	**−2**	**1**	**0**	**0**	**1**	
x_6	**0**	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{2}$	**0**	**1**	**0**	$\frac{1}{2}$	
Z	**0**	$\frac{7}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{5}{2}$	**0**	**0**	**1**	$\frac{25}{2}$	

Procédons maintenant à l'itération suivante :

Méthode des tableaux

Il existe encore un coéficient sur la ligne Z négatif, ainsi nous pouvons encore trouver une meilleure valeur de Z :

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	Z	valeur	
x_1	1	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0	0	$\frac{5}{2}$	
x_5	0	−5	0	−2	1	0	0	1	
x_6	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{2}$	0	1	0	$\frac{1}{2}$	
Z	0	$\frac{7}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{5}{2}$	0	0	1	$\frac{25}{2}$	

Variables à faire entrer x_3, variable à faire sortir : x_6

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	Z	valeur	
x_1	1	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0	0	$\frac{5}{2}$	5
x_5	0	−5	0	−2	1	0	0	1	–
x_6	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{2}$	0	1	0	$\frac{1}{2}$	1
Z	0	$\frac{7}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{5}{2}$	0	0	1	$\frac{25}{2}$	

Méthode des tableaux

Permutation :

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	Z	valeur	
x_1	1	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0	0	$\frac{5}{2}$	
x_5	0	-5	0	-2	1	0	0	1	
x_6	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{2}$	0	1	0	$\frac{1}{2}$	$\times 2$
Z	0	$\frac{7}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{5}{2}$	0	0	1	$\frac{25}{2}$	

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	Z	valeur	
x_1	1	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0	0	$\frac{5}{2}$	$-\frac{1}{2}\,Lx_3$
x_5	0	-5	0	-2	1	0	0	1	$-0\,Lx_3$
x_3	**0**	**-1**	**1**	**-3**	**0**	**2**	**0**	**1**	
Z	0	$\frac{7}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{5}{2}$	0	0	1	$\frac{25}{2}$	$+\frac{1}{2}\,Lx_3$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	Z	valeur	
x_1	**1**	**2**	**0**	**2**	**0**	**-1**	**0**	**2**	
x_5	0	-5	0	-2	1	0	0	1	
x_3	0	-1	1	-3	0	2	0	1	
Z	**0**	**3**	**0**	**1**	**0**	**1**	**1**	**13**	

Toutes les coeficients sur la ligne Z sont positifs => on arrête l'algorithme.

ZMAX = 13 avec $x_1 = 2$, $x_2 = 0$ et $x_3 = 1$

Simplexe, cas général

Pour l'instant nous ne nous sommes intéressés qu'aux cas particuliers où le PL était sous forme standard. qu'en est-il maintenant du problème suivant :

Min $Z = 2x_1 + x_2$ sous contraintes :

$3x_1 + x_2 \geqslant 9$

$x_1 + x_2 \geqslant 6$

$x_1, x_2 \geq 0$

Transformons tout d'abord le problème de minimisation en un problème de maximisation :

Min $Z = 2x_1 + x_2 \Longleftrightarrow$ Max $Z' = -2x_1 - x_2$

Puis ajoutons des variables artificielles pour transformer les inégalités en égalités :

$3x_1 + x_2 - x_3 \quad = 9$

$x_1 + x_2 \quad - x_4 = 6$

$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$

On remarque que $x_1 = 0$ et $x_2 = 0$ n'est pas solution du PL car cela impliquerai entre autre $x_3 = -9$ incompatible avec $x_3 \geq 0$. Le PL n'est pas réalisable en l'état.

Pour pallier ce problème, nous introduisons deux nouvelles variables artificielles A_1 et A_2 dans le système :

$3x_1 + x_2 - x_3 \quad + A_1 \quad = 9$

$x_1 + x_2 \quad - x_4 \quad + A_2 = 6$

$x_1, x_2, x_3, x_4, A_1, A_2 \geq 0$

La méthode *en deux phases*

Première phase

Cherchons maintenant à maximiser W = $-A_1 - A_2$

Selon les contraintes :

$$3\,x_1 + x_2 - x_3 \qquad + A_1 \qquad = 9$$

$$x_1 + x_2 \qquad - x_4 \qquad + A_2 = 6$$

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ A_1,\ A_2 \geq 0$$

Ainsi une solution de base réalisable est : $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0$, $A_1 = 9$ et $A_2 = 6 \Rightarrow W = -15$

W peut être réécrit : $W = -9 + 3\,x_1 + x_2 - x_3 - 6 + x_1 + x_2 - x_4 = -15 + 4\,x_1 + 2\,x_2 - x_3 - x_4$

Notre premier tableau peut donc être écrit :

	x_1	x_2	x_3	x_4	A_1	A_2	Z'	W	valeur
A_1	3	1	−1	0	1	0	0	0	9
A_2	1	1	0	−1	0	1	0	0	6
Z'	2	1	0	0	0	0	1	0	0
W	−4	−2	1	1	0	0	0	1	−15

La méthode *en deux phases*

Première phase, suite :

On choisit x1 pour entrer dans la base et A1 pour en sortir

	x_1	x_2	x_3	x_4	A_1	A_2	Z'	W	valeur	
A_1	3	1	-1	0	1	0	0	0	9	9 / 3
A_2	1	1	0	-1	0	1	0	0	6	6 / 1
Z'	2	1	0	0	0	0	1	0	0	
W	-4	-2	1	1	0	0	0	1	-15	

	x_1	x_2	x_3	x_4	A_1	A_2	Z'	W	valeur	
A_1	3	1	-1	0	1	0	0	0	9	*x 1 / 3*
A_2	1	1	0	-1	0	1	0	0	6	
Z'	2	1	0	0	0	0	1	0	0	
W	-4	-2	1	1	0	0	0	1	-15	

	x_1	x_2	x_3	x_4	A_1	A_2	Z'	W	valeur	
x_1	**1**	**1 / 3**	**-1 / 3**	**0**	**1 / 3**	**0**	0	**0**	**3**	
A_2	1	1	0	-1	0	1	0	0	6	$-Lx_1$
Z'	2	1	0	0	0	0	1	0	0	$-2\,Lx_1$
W	-4	-2	1	1	0	0	0	1	-15	$+4\,Lx_1$

	x_1	x_2	x_3	x_4	A_1	A_2	Z'	W	valeur	
x_1	1	1 / 3	-1 / 3	0	1 / 3	0	0	0	3	
A_2	**0**	**2 / 3**	**1 / 3**	**-1**	**-1 / 3**	**1**	0	**0**	**3**	
Z'	**0**	**1 / 3**	**2 / 3**	**0**	**-2 / 3**	**0**	**1**	**0**	**-6**	
W	**0**	**-2 / 3**	**-1 / 3**	**1**	**4 / 3**	**0**	0	**1**	**-3**	

La méthode *en deux phases*

Première phase, suite :

On choisit x3 pour entrer dans la base et A2 pour en sortir

	x_1	x_2	x_3	x_4	A_1	A_2	Z'	W	valeur	
x_1	1	1/3	-1/3	0	1/3	0	0	0	3	9
A_2	0	2/3	1/3	-1	-1/3	1	0	0	3	9/2
Z'	0	1/3	2/3	0	-2/3	0	1	0	-6	
W	0	-2/3	-1/3	1	4/3	0	0	1	-3	

	x_1	x_2	x_3	x_4	A_1	A_2	Z'	W	valeur	
x_1	1	1/3	-1/3	0	1/3	0	0	0	3	
A_2	0	2/3	1/3	-1	-1/3	1	0	0	3	$\times 3/2$
Z'	0	1/3	2/3	0	-2/3	0	1	0	-6	
W	0	-2/3	-1/3	1	4/3	0	0	1	-3	

	x_1	x_2	x_3	x_4	A_1	A_2	Z'	W	valeur	
x_1	1	1/3	-1/3	0	1/3	0	0	0	3	$-\frac{1}{3} Lx_2$
x_2	*0*	*1*	*1/2*	*-3/2*	*-1/2*	*3/2*	*0*	*0*	*9/2*	
Z'	0	1/3	2/3	0	-2/3	0	1	0	-6	$-\frac{1}{3} Lx_2$
W	0	-2/3	-1/3	1	4/3	0	0	1	-3	$+\frac{2}{3} Lx_2$

	x_1	x_2	x_3	x_4	A_1	A_2	Z'	W	valeur	
x_1	*1*	*0*	*-1/2*	*1/2*	*1/2*	*-1/2*	0	*0*	*3/2*	
x_2	0	1	1/2	-3/2	-1/2	3/2	0	0	9/2	
Z'	*0*	*0*	*1/2*	*1/2*	*-1/2*	*-1/2*	*1*	*0*	*-15/2*	
W	*0*	*0*	*0*	*0*	*1*	*1*	0	*1*	*0*	

On remarque ainsi que $x_1 = 3/2$, $x_2 = 9/2$ et $x_3 = x_4 = A_1 = A_2 = 0$ est une solution réalisable pour le système avec W = 0

La méthode *en deux phases*

Deuxième phase :

On écrit ainsi le tableau suivant (on a conservé les lignes précédentes, supprimé les colonnes A1 et A2 ainsi que la ligne W):

	x_1	x_2	x_3	x_4	Z'	valeur	
x_1	1	0	−1 / 2	1 / 2	0	3 / 2	
x_2	0	1	1 / 2	−3 / 2	0	9 / 2	
Z'	0	0	1 / 2	1 / 2	1	−15 / 2	

Or on remarque ici que les coeficients de x_3 et x_4 sont tous positifs ⇒ nous sommes déjà en présence de la solution optimale, pas besoin de procéder à des itérations successives.

La solution optimale est donc $x_1 = 3/2,\ x_2 = 9/2,\ Z' = -15/2 \Rightarrow Z = 15/2$

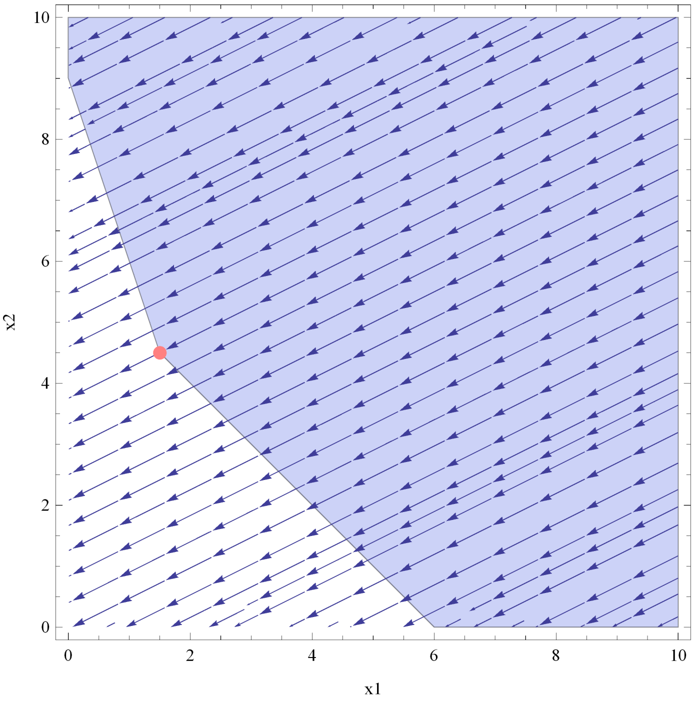
Vérification de notre solution :

Min $Z = 2x_1 + x_2$ sous contraintes :

$3x_1 + x_2 \geqslant 9$

$x_1 + x_2 \geqslant 6$

$x_1,\ x_2 \geq 0$



Exemple méthode en deux phases

Max Z = $4x_1+12x_2$

sous contraintes :

$x_1 \leq 1000$

$x_2 \leq 500$

$3\,x_1 + 6\,x_2 \leq 4200$

$x_1 + x_2 \geq 1000$

$x_1 + 2\,x_2 \geq 1200$

avec x_1, $x_2 \geq 0$

```
{600., 400.}
```

Solution de l'exemple précédent : Z = 7200