Correction CC 3

Etape 1 : Construction du dictionnaire

Pour construire le dictionnaire, nous allons tout d'abord introduire des variables d'écarts pour transformer les inéquations en équations :

$$x_1 + x_2 + x_3 = 5$$
$$10\,x_1 + 6x_2 + x_4 = 45$$

$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$

De même, profitons en pour mettre l'équation de Z sous une forme pouvant être recopiée dans nos tableaux du simplexe :

$- 5x_1 - 4x_2 + Z = 0$

Etape 2 : Le dictionnaire est-il réalisable ?

Se dégage-t-il une solution évidente si l'on met les variables de décision à zéro ?

$$0 + 0 + x_3 = 5 \;\Rightarrow\; x_3 = 5$$
$$10 \times 0 + 6 \times 0 + x_4 = 45 \;\Rightarrow\; x_4 = 45$$

$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$

Réponse : oui. Ainsi, nous pouvons entamer l'algorithme du simplexe (en une phase) directement.

Nous choisirons ici la méthode des tableaux (nous aurions pu choisir la méthode systématique).

Etape 3 : Initialisation du tableau

Les variables en base initialement seront x_3 et x_4 (n'intervenant que sur une ligne et non nulles dans la solution évidente). Ainsi, x_1 et x_2 seront considérées hors base initialement.

Le tableau sera construit de la sorte : une colonne par variable (toutes confondues), une colonne pour Z, une colonne pour les constantes, une ligne par variable en base, une ligne pour Z, ce qui donne :

	x1	x2	x3	x4	Z	V
x3						
x4						
Z						

Pour remplir la matrice, il sufit d'insérer les coeficients appropriés que l'on peut lire à partir du dictionnaire (il suffit d'imaginer le symbole = se trouvant entre la colonne Z et la colonne V pour chaque ligne) :

	x1	x2	x3	x4	Z	V
x3	1	1	1	0	0	5
x4	10	6	0	1	0	45
Z	−5	−4	0	0	1	0

Nous pouvons vérifier que notre tableau semble bien construit car pour chacune de nos variables en base, le coeficient à l'intersection ligne/colonne est égal à 1 et à 0 sur le reste de leur colonne.

	x1	x2	x3	x4	Z	V
x3	1	1	1	0	0	5
x4	10	6	0	1	0	45
Z	−5	−4	0	0	1	0

	x1	x2	x3	x4	Z	V
x3	1	1	1	0	0	5
x4	10	6	0	1	0	45
Z	−5	−4	0	0	1	0

Etape 4 : Itération(s) de l'algorithme

Choix de la colonne pivot :

Sur la ligne des Z, nous choisissons la valeur de la colonne (correspondant à une variable) la plus basse (la plus négative).

Remarque 1 : Dans le cas où il y en aurait plusieurs, on en choisit arbitrairement une.

Remarque 2 : Si aucune valeur n'est strictement négative, cela signifie que l'on ne peut augmenter la valeur de Z et donc qu'aucune itération n'est nécessaire.

Ici il s'agit de la colonne x1 car $-5 < -4 < 0 \leq 0$.

	x1	x2	x3	x4	Z	V
x3	1	1	1	0	0	5

x4	10	6	0	1	0	45
Z	-5	-4	0	0	1	0

Choix de la ligne pivot :

Pour chaque ligne correspondant à une variable en base, on calcule le ratio colonne V sur colonne pivot ainsi cela donne :

Ligne x3 :

5 / 1 = 5

Ligne x4 :

45 / 10 = 4,5

On choisit la ligne pour laquelle le précédent ratio est positif et minimum. Ici il s'agit de la ligne de x4 car 4,5 < 5.

Remarque 3 : Si le ratio est de la forme : 0 / (-a) où a est une nombre positif, on considère cela comme un nombre négatif bien que le ratio soit égal à 0 (et donc on ne le sélectionne pas) car la contrainte sous jacente est : x? >= 0.

Ainsi la ligne du pivot ici est :

	x1	x2	x3	x4	Z	V
x3	1	1	1	0	0	5
x4	10	6	0	1	0	45
Z	-5	-4	0	0	1	0

Pivotage

Le choix de la colonne du pivot nous dicte quelle variable va entrer en base et celui de la ligne du pivot celle qui va sortir de la base.

Ainsi ici, x1 va entrer en base (et prendre la place de x4) et x4 va sortir de la base.

On commence par renommer la ligne du pivot selon la variable qui entre en base :

	x1	x2	x3	x4	Z	V
x3	1	1	1	0	0	5
x1	10	6	0	1	0	45
Z	-5	-4	0	0	1	0

Maintenant, et pour que x1 soit vraiment en base, plusieurs opérations sont nécessaires.

Obtenir un 1 à l'intersection de la ligne et de la colonne de la variable qui vient de rentrer en base

Ici nous avons 10, pour conserver la validité de la ligne tout en cherchant à remplacer 10 par 1, nous divisons l'intégralité de la ligne par 10 ce qui nous donne :

	x1	x2	x3	x4	Z	V
x3	1	1	1	0	0	5
x1	1	6 / 10	0	1 / 10	0	45 / 10
Z	-5	-4	0	0	1	0

Obtenir un 0 sur la colonne du pivot sur les autres lignes

Ici nous avons deux lignes à modifier (Lx3 et LZ) pour lesquelles nous cherchons à obtenir un 0 sur la colonne x1.

Pour la ligne x3 nous allons effectuer l'opération suivante : Lx3 = Lx3 - (1) × Lx1

Ce qui nous donne :

	x1	x2	x3	x4	Z	V
x3	0	4 / 10	1	-1 / 10	0	5 / 10
x1	1	6 / 10	0	1 / 10	0	45 / 10
Z	-5	-4	0	0	1	0

Pour la ligne Z nous allons effectuer l'opération suivante : LZ = LZ - (-5) × Lx1 = LZ + 5×Lx1

Ce qui nous donne :

	x1	x2	x3	x4	Z	V
x3	0	4 / 10	1	-1 / 10	0	5 / 10
x1	1	6 / 10	0	1 / 10	0	45 / 10
Z	0	-1	0	5 / 10	1	225 / 10

Le pivotage est effectué, nous pouvons vérifier que notre tableau semble bien construit car pour chacune de nos variables en base, le coeficient à l'intersection ligne/colonne est égal à 1 et à 0 sur le reste de leur colonne.

	x1	x2	x3	x4	Z	V
x3	0	4 / 10	1	-1 / 10	0	5 / 10
x1	1	6 / 10	0	1 / 10	0	45 / 10
Z	0	-1	0	5 / 10	1	225 / 10

Critère d'arrêt

Pour savoir si l'on doit procéder à une autre itération, il suffit de regarder les valeurs de la ligne Z pour les colonnes correspondant aux variables. S'il reste des valeurs strictement négatives, c'est que l'on peut encore augmenter Z.

Ici c'est le cas, sur la colonne x2 de la ligne des Z, la valeur est égale à -1 et donc est strictement négative.

	x1	x2	x3	x4	Z	V
x3	0	4 / 10	1	-1 / 10	0	5 / 10
x1	1	6 / 10	0	1 / 10	0	45 / 10
Z	0	-1	0	5 / 10	1	225 / 10

Nous devons donc procéder à une nouvelle itération.

Choix de la colonne pivot :

Valeur de la colonne de la variable la plus négative sur la ligne Z : -1 (colonne x2).

	x1	x2	x3	x4	Z	V
x3	0	4 / 10	1	-1 / 10	0	5 / 10
x1	1	6 / 10	0	1 / 10	0	45 / 10
Z	0	-1	0	5 / 10	1	225 / 10

Choix de la ligne pivot :

Ratio ligne x3 : (5/10) / (4/10) = 5/4

Ratio ligne x1 : (45/10) / (6/10) = 45/6

5/4 < 45/6 => On choisit la ligne de x3 :

	x1	x2	x3	x4	Z	V
x3	0	4 / 10	1	-1 / 10	0	5 / 10
x1	1	6 / 10	0	1 / 10	0	45 / 10
Z	0	-1	0	5 / 10	1	225 / 10

Pivotage

Renommage de la ligne pivot

	x1	x2	x3	x4	Z	V
x2	0	4 / 10	1	-1 / 10	0	5 / 10
x1	1	6 / 10	0	1 / 10	0	45 / 10
Z	0	-1	0	5 / 10	1	225 / 10

Obtenir un 1 à l'intersection de la ligne et de la colonne de la variable qui vient de rentrer en base

On divise Lx2 par 4/10 :

	x1	x2	x3	x4	Z	V
x2	0	1	10 / 4	-1 / 4	0	5 / 4
x1	1	6 / 10	0	1 / 10	0	45 / 10
Z	0	-1	0	5 / 10	1	225 / 10

Obtenir un 0 sur la colonne du pivot sur les autres lignes

Lx1 = Lx1 - (6/10) Lx2

	x1	x2	x3	x4	Z	V
x2	0	1	10 / 4	-1 / 4	0	5 / 4
x1	1	0	-6 / 4	1 / 4	0	15 / 4
Z	0	-1	0	5 / 10	1	225 / 10

LZ = LZ - (-1) Lx2 = LZ + Lx2

	x1	x2	x3	x4	Z	V
x2	0	1	10 / 4	-1 / 4	0	5 / 4
x1	1	0	-6 / 4	1 / 4	0	15 / 4
Z	0	0	10 / 4	1 / 4	1	95 / 4

Critère d'arrêt

Toutes les valeurs des colonnes des variables sur la ligne Z sont positives => nous ne pouvons plus trouver de meilleure solution augmentant Z.

Etape 5 : lecture du résultat

Pour obtenir ZMax ainsi que les valeurs des variables donnant un Z maximum, il suffit de lire le tableau final :

	x1	x2	x3	x4	Z	V
x2	0	1	10 / 4	-1 / 4	0	5 / 4
x1	1	0	-6 / 4	1 / 4	0	15 / 4
Z	0	0	10 / 4	1 / 4	1	95 / 4

Dans la solution finale, chaque variable hors base à pour valeur 0.

Ainsi ici x3 = 0 et x4 = 0.

Dans la solution finale chaque variable en base a pour valeur la valeur de la colonne V sur sa ligne : x2 = 5/4 et x1 = 15/4

Dans la solution finale, Zmax a pour valeur la valeur de la colonne V sur la ligne Z : ZMax = 95/4

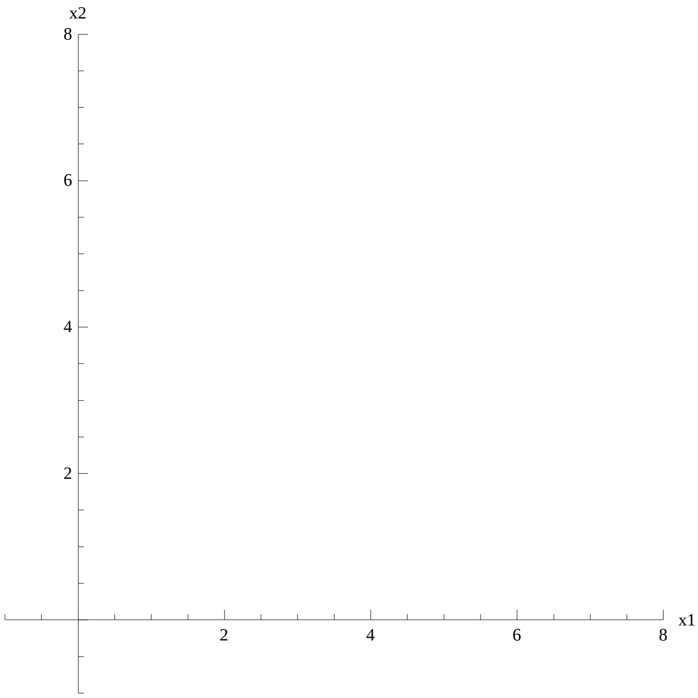
Fin Exercice 1

Correction CC4

Il s’agit de résoudre le même problème que précédemment, en partant du principe que x1 et x2 ne peuvent prendre que des valeurs entières, c.à.d. x1, x2 $\in \mathbb{N}^+$

Résolution Graphique

Etape 1 : Traçons le repère



Etape 2 : Représentons les contraintes sur le graphe

Contrainte 1 : $x_1 + x_2 \leq 5$

Droite délimitant le demi plan : $x_1 + x_2 = 5$

Trouvons deux points vérifiant cette équation pour pouvoir la tracer la droite correspondante.

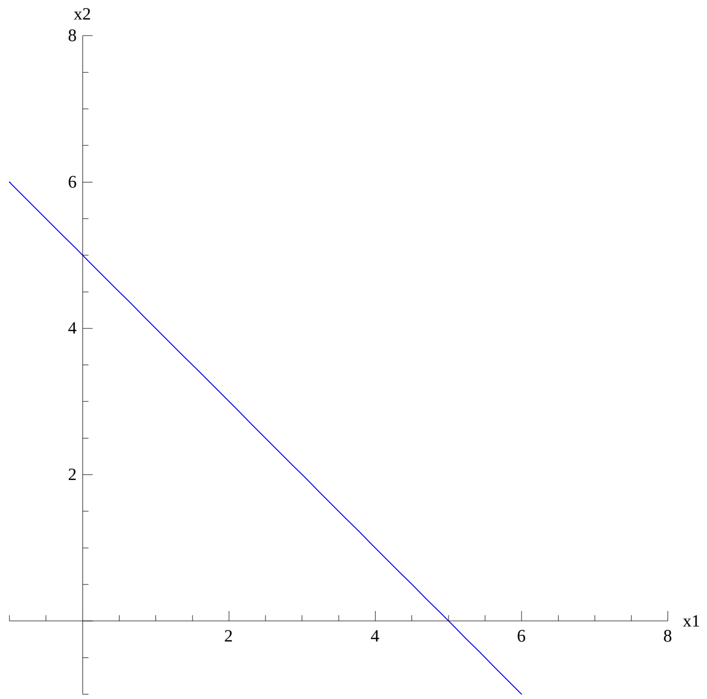
Point A1 :

Si $x_1 = 0$, alors $0 + x_2 = 5$ et donc $x_2 = 5$. Ainsi, A1 a pour coordonnées (0, 5)

Point B1 :

Si $x_2 = 0$, alors $x_1 + 0 = 5$ et donc $x_1 = 5$. Ainsi, B1 a pour coordonnées (5, 0)

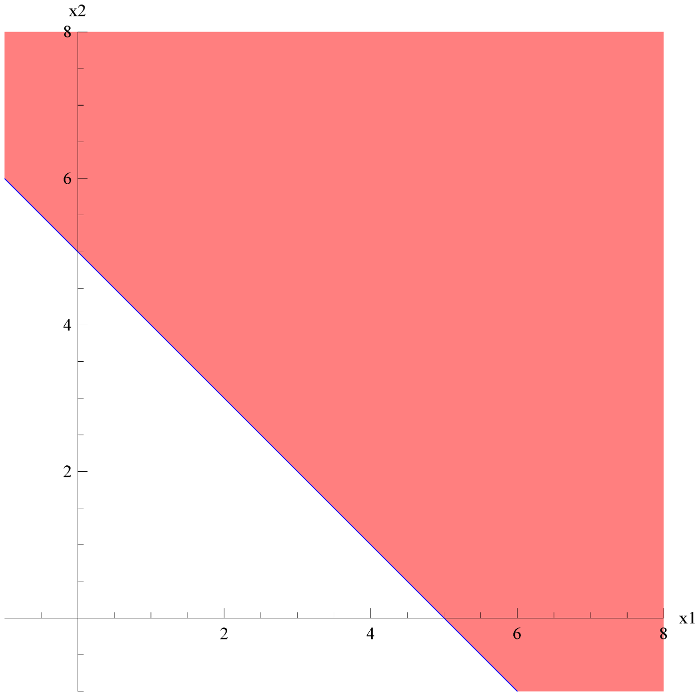
Traçons donc la droite passant par A1 et B1 :



Déterminons la partie du demi plan à éliminer. Pour ce faire, prenons un point n'appartenant pas à la droite et vérifions s'il vérifie l'inéquation du demi plan. Prenons le point de coordonnées (0, 0), vérifie-t-il l'inéquation ?

$0 + 0 \leq 5$? Oui !

Ainsi, l'origine du repère est dans le demi-plan solution de l'inéquation, éliminons donc l'autre côté de la droite.



Contrainte 2 : 10 x_1 + 6$x_2 \leq$ 45

Droite délimitant le demi plan : $10\ x_1 + 6\ x_2 = 45$

Trouvons deux points vérifiant cette équation pour pouvoir la tracer la droite correspondante.

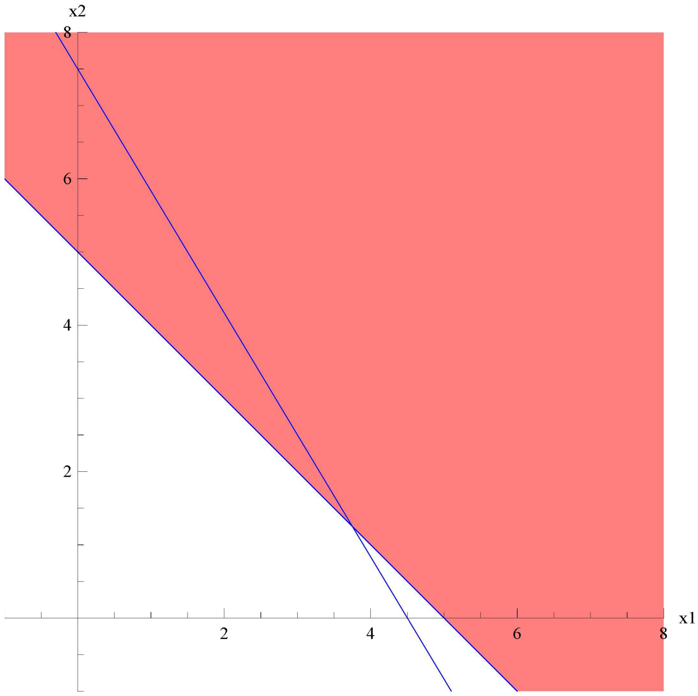
Point A2 :

Si $x_1 = 0$, alors $10\times 0 + 6\ x_2 = 45$ et donc $x_2 = 45/6 = 15/2$. Ainsi, A1 a pour coordonnées (0, 7.5)

Point B2 :

Si $x_2 = 0$, alors $10\times x_1 + 6\times 0 = 45$ et donc $x_1 = 45/10 = 9/2$. Ainsi, B1 a pour coordonnées (2.5, 0)

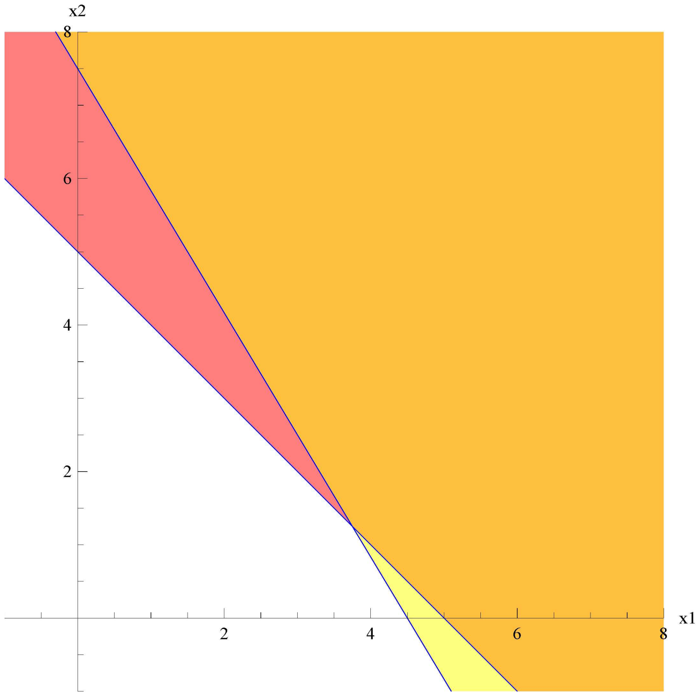
Traçons donc la droite passant par A2 et B2 :



Déterminons la partie du demi plan à éliminer. Pour ce faire, prenons un point n'appartenant pas à la droite et vérifions s'il vérifie l'inéquation du demi plan. Prenons le point de coordonnées (0, 0), vérifie-t-il l'inéquation ?

10×0 + 6×0 ≤ 45 ? Oui !

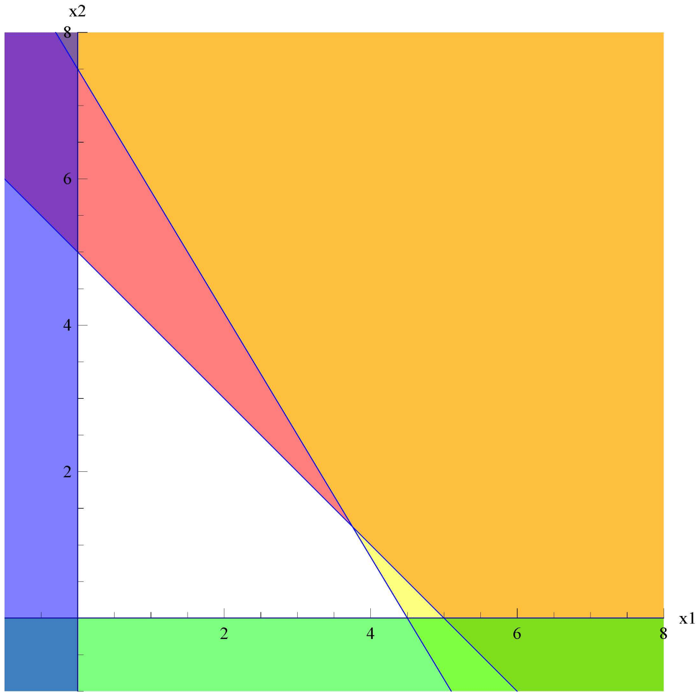
Ainsi, l’origine du repère est dans le demi-plan solution de l’inéquation, éliminons donc l’autre côté de la droite.



Contraintes 3 et 4 : x1, x2 ≥ 0

N'oublions pas en effet que x1 et x2 doivent être positives ou nulles.

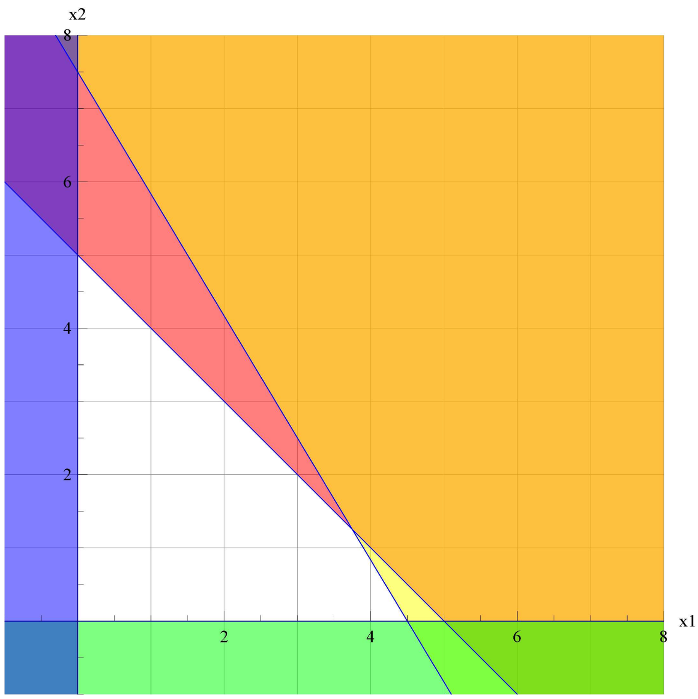
Ainsi, éliminons la partie gauche de l’axe des ordonnées et la partie supérieure de l’axe des abcisses.



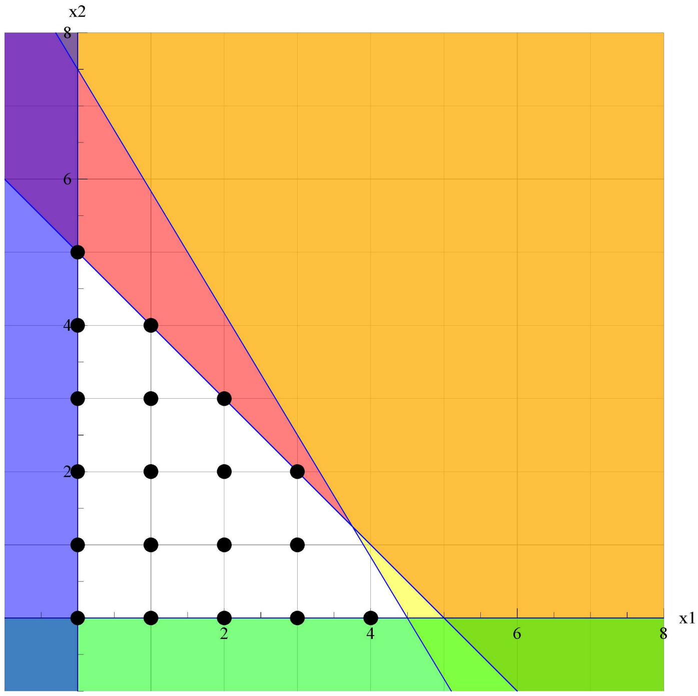
Nous obtenons ainsi le polytope convexe solution des contraintes pour x1 et x2 à valeurs réelles.

Etape 3 : Se limiter aux valeurs entières de x1 et x2

Traçons la grille correspondante aux valeurs entières de x et y

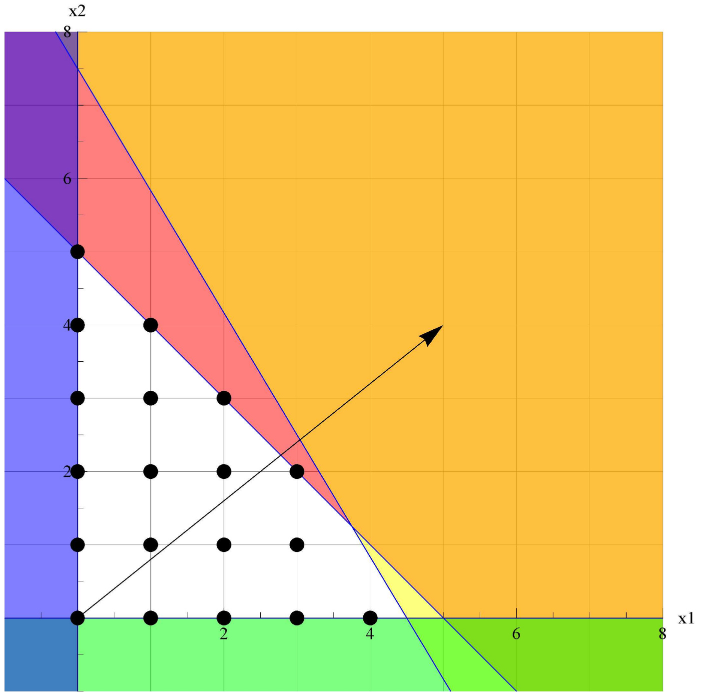


Seuls les points de cette grille appartenant au polytope convexe sont solutions de notre ensemble de contraintes avec x et y à valeurs entières :



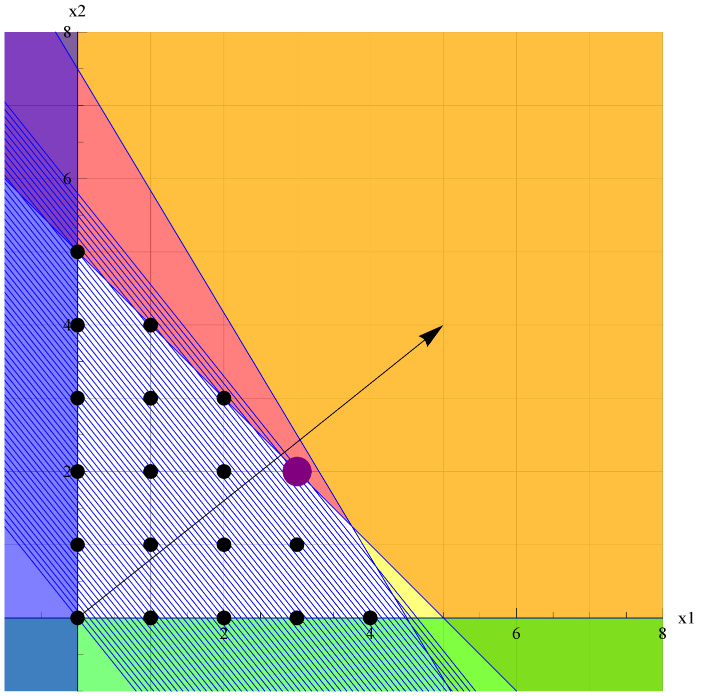
Etape 4 : Représenter le sens de croissance de Z

Sachant que Z est de la forme $Z = 5\,x_1 + 4\,x_2$, Traçons le vecteur ((0, 0), (5, 4)) :



Etape 5 : Lecture du point donnant ZMax

Il suffit maintenant en se déplaçant depuis l'origine dans le sens indiqué par le vecteur de choisir le dernier point de la grille appartenant au polytope :



Nous pouvons ainsi lire les valeurs pour x1 et x2 entiers donnant ZMax, il s'agit des coordonnées du point en violet sur le graphe, de coordonnées (3, 2).

Ainsi, ZMax = 5 × 3 + 4 × 2 = 23

Fin de la méthode graphique.

Résolution analytique, méthode Branch & Bound (simplexes consécutifs)

La méthode Branch and Bound est simple, il s'agit de résoudre une première fois le problème sans tenir compte de la contrainte $x_1, x_2 \in \mathbb{N}^+$ mais simplement les considérer comme $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^+$. Après obtention de ZMax à l'aide par exemple de l'algorithme du simplexe, on observe les valeurs pour x_1^{Zmax}, x_2^{Zmax}. Si ces dernières sont entières, on arrête l'algorithme, si l'une (ou les deux) n'est pas entière, on la choisit (ou l'une des deux) pour réaliser deux cas. Chacun de ces deux cas rajoute une contrainte à notre problème à valeures réelles. On résoud l'un, on observe la solution, et on refait des cas si nécessaire jusqu'à obtenir une solution entière ou une absence de solution. On passe ensuite à l'autre cas et l'on fait de même.

Résolution du problème à valeur réelle

On remarque ici que c'est la question posée dans l'exercice précédent, ainsi on peut directement donner la solution pour $x_1,\ x_2 \in \mathbb{R}^+$:

ZMax = 95/4, $x_1^{\text{Zmax}} = 15/4$ et $x_2^{\text{Zmax}} = 5/4$.

Condition d'arrêt x_1^{Zmax} et x_2^{Zmax} existent – ils et sont – ils entiers ?

Non, ni x1 ni x2 ne sont entiers.

Choix de la variable sur laquelle faire un cas

On choisit x2 (on aurait tout aussi bien pu prendre x1) pour faire un cas.

Ici $x_2^{\text{Zmax}} = 5/4 = 1.25$

Les deux cas possibles sont $x_2 \leq 1$ et $x_2 \geq 2$.

Cas 1 : $x_2 \leq 1$

Résolution en considérant $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^+$

Pour construire le dictionnaire, nous allons tout d'abord introduire des variables d'écarts pour transformer les inéquations en équations :

$$\begin{aligned}
x_1 + x_2 + x_3 &= 5 \\
10\,x_1 + 6x_2 + x_4 &= 45 \\
x_2 + x_5 &= 1 \\
-5x_1 - 4x_2 + Z &= 0
\end{aligned}$$

$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$

Le dictionnaire est-il réalisable ?

Se dégage-t-il une solution évidente si l'on met les variables de décision à zéro ?

$$\begin{aligned}
0 + 0 + x_3 &= 5 \Rightarrow x_3 = 5 \\
10 \times 0 + 6\times 0 + x_4 &= 45 \Rightarrow x_4 = 45 \\
0 + x_5 &= 1 \Rightarrow x_5 = 1
\end{aligned}$$

$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$

Réponse : oui. Ainsi, nous pouvons entamer l'algorithme du simplexe (en une phase) directement.

Nous choisirons ici la méthode des tableaux (nous aurions pu choisir la méthode systématique).

Construisons notre premier tableau du simplexe :

	x1	x2	x3	x4	x5	Z	V
x3	1	1	1	0	0	0	5
x4	10	6	0	1	0	0	45
x5	0	1	0	0	1	0	1
Z	-5	-4	0	0	0	1	0

Choix de la ligne et de la colonne pivot :

	x1	x2	x3	x4	x5	Z	V
x3	1	1	1	0	0	0	5
x4	10	6	0	1	0	0	45
x5	0	1	0	0	1	0	1
Z	-5	-4	0	0	0	1	0

Pivotage :

	x1	x2	x3	x4	x5	Z	V
x3	1	1	1	0	0	0	5
x1	1	6 / 10	0	1 / 10	0	0	45 / 10
x5	0	1	0	0	1	0	1
Z	-5	-4	0	0	0	1	0

=>

	x1	x2	x3	x4	x5	Z	V
x3	0	4 / 10	1	-1 / 10	0	0	5 / 10
x1	1	6 / 10	0	1 / 10	0	0	45 / 10
x5	0	1	0	0	1	0	1
Z	0	-1	0	5 / 10	0	1	225 / 10

Le critère d'arrêt n'est pas atteint car la valeur de la colonne x2 sur la ligne Z est négative.

Choix de la ligne et de la colonne pivot :

	x1	x2	x3	x4	x5	Z	V
x3	0	4 / 10	1	– 1 / 10	0	0	5 / 10
x1	1	6 / 10	0	1 / 10	0	0	45 / 10
x5	0	1	0	0	1	0	1
Z	0	– 1	0	5 / 10	0	1	225 / 10

Pivotage :

	x1	x2	x3	x4	x5	Z	V
x3	0	4 / 10	1	– 1 / 10	0	0	5 / 10
x1	1	6 / 10	0	1 / 10	0	0	45 / 10
x2	0	1	0	0	1	0	1
Z	0	– 1	0	5 / 10	0	1	225 / 10

= >

	x1	x2	x3	x4	x5	Z	V
x3	0	0	1	– 1 / 10	– 4 / 10	0	1 / 10
x1	1	0	0	1 / 10	– 6 / 10	0	39 / 10
x2	0	1	0	0	1	0	1
Z	0	0	0	5 / 10	1	1	235 / 10

Le critère d'arrêt est atteint car il n'y a pas de valeurs négatives sur la ligne de Z pour les colonnes des variables.

On obtient ZMax = 23.5, $x_1^{\text{Zmax}} = 3.9$ et $x_2^{\text{Zmax}} = 1$.

Condition d'arrêt x_1^{Zmax} et x_2^{Zmax} existent – ils et sont – ils entiers ?

x1 n'est pas entiers, on doit refaire des cas.

Choix de la variable sur laquelle faire un cas

On choisit x1 cette fois-ci (on aurait pu encore choisir x2).

Ainsi, soit x1 ≤ 3, soit x1 ≥ 4.

Cas 2 : $x_2 \leq 1$ et $x_1 \leq 3$

Résolution en considérant $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^+$

Pour construire le dictionnaire, nous allons tout d'abord introduire des variables d'écarts pour transformer les inéquations en équations :

$$
\begin{array}{lllllll}
x_1 + & x_2 + x_3 & & & & & = 5 \\
10\,x_1 + 6x_2 & & + x_4 & & & & = 45 \\
 & x_2 & & + x_5 & & & = 1 \\
x_1 & & & & + x_6 & & = 3 \\
-5x_1 & -4x_2 & & & & + Z & = 0
\end{array}
$$

$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0$

Le dictionnaire est-il réalisable ?

Se dégage-t-il une solution évidente si l'on met les variables de décision à zéro ?

$$
\begin{array}{llllll}
0 & + \ 0 & + x_3 & = 5 & \Rightarrow & x_3 = 5 \\
10 \times 0 & + 6\times 0 & + x_4 & = 45 & \Rightarrow & x_4 = 45 \\
 & 0 & + x_5 & = 1 & \Rightarrow & x_5 = 1 \\
0 & & + x_6 & = 3 & \Rightarrow & x_6 = 3
\end{array}
$$

$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0$

Réponse : oui. Ainsi, nous pouvons entamer l'algorithme du simplexe (en une phase) directement.

Nous choisirons ici la méthode des tableaux (nous aurions pu choisir la méthode systématique).

Construisons notre premier tableau du simplexe :

	x1	x2	x3	x4	x5	x6	Z	V
x3	1	1	1	0	0	0	0	5
x4	10	6	0	1	0	0	0	45
x5	0	1	0	0	1	0	0	1
x6	1	0	0	0	0	1	0	3
Z	– 5	– 4	0	0	0	0	1	0

Choix de la ligne et de la colonne pivot :

	x1	x2	x3	x4	x5	x6	Z	V
x3	1	1	1	0	0	0	0	5
x4	10	6	0	1	0	0	0	45
x5	0	1	0	0	1	0	0	1
x6	1	0	0	0	0	1	0	3
Z	-5	-4	0	0	0	0	1	0

Pivotage :

	x1	x2	x3	x4	x5	x6	Z	V
x3	1	1	1	0	0	0	0	5
x4	10	6	0	1	0	0	0	45
x5	0	1	0	0	1	0	0	1
x1	1	0	0	0	0	1	0	3
Z	-5	-4	0	0	0	0	1	0

=>

	x1	x2	x3	x4	x5	x6	Z	V
x3	0	1	1	0	0	-1	0	2
x4	0	6	0	1	0	-10	0	15
x5	0	1	0	0	1	0	0	1
x1	1	0	0	0	0	1	0	3
Z	0	-4	0	0	0	5	1	15

Le critère d'arrêt n'est pas atteint car la valeur de la colonne x2 sur la ligne Z est négative.

Choix de la ligne et de la colonne pivot :

	x1	x2	x3	x4	x5	x6	Z	V
x3	0	1	1	0	0	-1	0	2
x4	0	6	0	1	0	-10	0	15
x5	0	1	0	0	1	0	0	1
x1	1	0	0	0	0	1	0	3
Z	0	-4	0	0	0	5	1	15

Pivotage :

	x1	x2	x3	x4	x5	x6	Z	V
x3	0	1	1	0	0	-1	0	2
x4	0	6	0	1	0	-10	0	15
x2	0	1	0	0	1	0	0	1
x1	1	0	0	0	0	1	0	3
Z	0	-4	0	0	0	5	1	15

= >

	x1	x2	x3	x4	x5	x6	Z	V
x3	0	0	1	0	-1	-1	0	1
x4	0	0	0	1	-6	-10	0	9
x2	0	1	0	0	1	0	0	1
x1	1	0	0	0	0	1	0	3
Z	0	0	0	0	4	5	1	19

Le critère d'arrêt est atteint car il n'y a pas de valeurs négatives sur la ligne de Z pour les colonnes des variables de décision.

On obtient ZMax = 19, $x_1^{Zmax} = 3$ et $x_2^{Zmax} = 1$.

Condition d'arrêt x_1^{Zmax} et x_2^{Zmax} existent – ils et sont – ils entiers ?

x_1^{Zmax} et x_2^{Zmax} sont entiers, ainsi nous avons une première solution entière : Z = 19, $x_1 = 3$ et $x_2 = 1$, cependant nous ne pouvons affirmer qu'il s'agisse de la valeur maximum pour Z car nous n'avons pas résolu tous les cas.

Cas 3 : $x_2 \leq 1$ et $x_1 \geq 4$

Pour construire le dictionnaire, nous allons tout d'abord introduire des variables d'écarts pour transformer les inéquations en équations :

$$\begin{array}{llllllll}
x_1 + & x_2 + x_3 & & & & & & = 5 \\
10\,x_1 + 6x_2 & & + x_4 & & & & & = 45 \\
& x_2 & & + x_5 & & & & = 1 \\
x_1 & & & & - x_6 & & & = 4 \\
-5x_1 & - 4x_2 & & & & & + Z & = 0
\end{array}$$

$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0$

Le dictionnaire est-il réalisable ?

Se dégage-t-il une solution évidente si l'on met les variables de décision à zéro ?

$$\begin{array}{lllll}
0 + 0 & + x_3 & = 5 & \Rightarrow & x_3 = 5 \\
10 \times 0 + 6\times 0 & + x_4 & = 45 & \Rightarrow & x_4 = 45 \\
0 & + x_5 & = 1 & \Rightarrow & x_5 = 1 \\
0 & - x_6 & = 4 & \Rightarrow & x_6 = -4 \Rightarrow \text{impossible}
\end{array}$$

$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0$

Aucune solution évidente ne se dégage, ainsi, nous allons utiliser la méthode du simplexe en deux Phases.

Intéressons-nous au sous problème suivant (première phase)

Max W = -A1

$$\begin{array}{lcl} x_1 + x_2 + x_3 & & = 5 \\ 10\,x_1 + 6x_2 + x_4 & & = 45 \\ x_2 + x_5 & & = 1 \\ x_1 - x_6 + \text{A1} & & = 4 \end{array}$$

$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$, A1 ≥ 0

Le dictionnaire est-il réalisable ?

Se dégage-t-il une solution évidente si l'on met les variables de décision ainsi que x_6 à zéro ?

$$\begin{array}{llll} 0 + 0 + x_3 & = 5 & \Rightarrow & x_3 = 5 \\ 10 \times 0 + 6\times 0 + x_4 & = 45 & \Rightarrow & x_4 = 45 \\ 0 + x_5 & = 1 & \Rightarrow & x_5 = 1 \\ 0 - 0 + \text{A1} & = 4 & \Rightarrow & \text{A1} = 4 \end{array}$$

$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$, A1 ≥ 0

Réponse : oui. Ainsi, nous pouvons entamer l'algorithme du simplexe (pour ce sous problème).

Mais avant, réécrivons l'expression de W en fonction des variables de décision pour pouvoir l'insérer dans le tableau :

W = -A1 = -4 + x_1 - x_6 ⇒ $-x_1+x_6+\text{W}=-4$

Construisons notre premier tableau du simplexe :

	x1	x2	x3	x4	x5	x6	A1	Z	W	V
x3	1	1	1	0	0	0	0	0	0	5
x4	10	6	0	1	0	0	0	0	0	45
x5	0	1	0	0	1	0	0	0	0	1
A1	1	0	0	0	0	-1	1	0	0	4
Z	-5	-4	0	0	0	0	0	1	0	0
W	-1	0	0	0	0	1	0	0	1	-4

Choix de la ligne et de la colonne pivot :

	x1	x2	x3	x4	x5	x6	A1	Z	W	V
x3	1	1	1	0	0	0	0	0	0	5
x4	10	6	0	1	0	0	0	0	0	45
x5	0	1	0	0	1	0	0	0	0	1
A1	1	0	0	0	0	-1	1	0	0	4
Z	-5	-4	0	0	0	0	0	1	0	0
W	-1	0	0	0	0	1	0	0	1	-4

Pivotage :

	x1	x2	x3	x4	x5	x6	A1	Z	W	V
x3	1	1	1	0	0	0	0	0	0	5
x4	10	6	0	1	0	0	0	0	0	45
x5	0	1	0	0	1	0	0	0	0	1
x1	1	0	0	0	0	-1	1	0	0	4
Z	-5	-4	0	0	0	0	0	1	0	0
W	-1	0	0	0	0	1	0	0	1	-4

⇒

	x1	x2	x3	x4	x5	x6	A1	Z	W	V
x3	0	1	1	0	0	1	-1	0	0	1
x4	0	6	0	1	0	10	-10	0	0	5
x5	0	1	0	0	1	0	0	0	0	1
x1	1	0	0	0	0	-1	1	0	0	4
Z	0	-4	0	0	0	-5	5	1	0	20
W	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0

Le critère d'arrêt est atteint car il n'y a pas de valeurs négatives sur la ligne de W pour les colonnes des variables de décision et les variables artificielles ne sont plus en base, nous pouvons retirer les colonnes A1 et W, ainsi que la ligne W :

	x1	x2	x3	x4	x5	x6	Z	V
x3	0	1	1	0	0	1	0	1
x4	0	6	0	1	0	10	0	5
x5	0	1	0	0	1	0	0	1
x1	1	0	0	0	0	-1	0	4
Z	0	-4	0	0	0	-5	1	20

Remarque : Si nous avions trouvé un WMax < 0, cela signifiait qu'il n'existait pas de solution pour ce cas là.

Deuxième phase, résolution du tableau obtenu

	x1	x2	x3	x4	x5	x6	Z	V
x3	0	1	1	0	0	1	0	1
x4	0	6	0	1	0	10	0	5
x5	0	1	0	0	1	0	0	1
x1	1	0	0	0	0	-1	0	4
Z	0	-4	0	0	0	-5	1	20

Doit-on procéder à des itérations de l'algorithme du simplexe ?

Réponse : oui, car il se trouve des valeurs négatives sur la ligne Z pour les colonnes des variables.

Choix de la ligne et de la colonne pivot :

	x1	x2	x3	x4	x5	x6	Z	V
x3	0	1	1	0	0	1	0	1
x4	0	6	0	1	0	10	0	5
x5	0	1	0	0	1	0	0	1
x1	1	0	0	0	0	-1	0	4
Z	0	-4	0	0	0	-5	1	20

Pivotage :

	x1	x2	x3	x4	x5	x6	Z	V
x3	0	1	1	0	0	1	0	1
x6	0	6 / 10	0	1 / 10	0	1	0	5 / 10
x5	0	1	0	0	1	0	0	1
x1	1	0	0	0	0	-1	0	4
Z	0	-4	0	0	0	-5	1	20

$\Rightarrow$

	x1	x2	x3	x4	x5	x6	Z	V
x3	0	4 / 10	1	-1 / 10	0	0	0	5 / 10
x6	0	6 / 10	0	1 / 10	0	1	0	5 / 10
x5	0	1	0	0	1	0	0	1
x1	1	6 / 10	0	1 / 10	0	0	0	45 / 10
Z	0	-1	0	5 / 10	0	0	1	225 / 10

Le critère d'arrêt n'est pas atteint car la valeur de la colonne x2 sur la ligne Z est négative.

Choix de la ligne et de la colonne pivot :

	x1	x2	x3	x4	x5	x6	Z	V
x3	0	4 / 10	1	-1 / 10	0	0	0	5 / 10
x6	0	6 / 10	0	1 / 10	0	1	0	5 / 10
x5	0	1	0	0	1	0	0	1
x1	1	6 / 10	0	1 / 10	0	0	0	45 / 10
Z	0	-1	0	5 / 10	0	0	1	225 / 10

Pivotage :

	x1	x2	x3	x4	x5	x6	Z	V
x3	0	4 / 10	1	-1 / 10	0	0	0	5 / 10
x2	0	1	0	1 / 6	0	10 / 6	0	5 / 6
x5	0	1	0	0	1	0	0	1
x1	1	6 / 10	0	1 / 10	0	0	0	45 / 10
Z	0	-1	0	5 / 10	0	0	1	225 / 10

$\Rightarrow$

	x1	x2	x3	x4	x5	x6	Z	V
x3	0	0	1	-10 / 60	0	-40 / 60	0	10 / 60
x2	0	1	0	1 / 6	0	10 / 6	0	5 / 6
x5	0	0	0	-1 / 6	1	-10 / 6	0	1 / 6
x1	1	0	0	0	0	-1	0	40 / 10
Z	0	0	0	40 / 60	0	10 / 6	1	1400 / 60

Le critère d'arrêt est atteint car il n'y a pas de valeurs négatives sur la ligne de Z pour les colonnes des variables.

On obtient ZMax = 140/6 ≃ 23.33, $x_1^{Zmax} = 4$ et $x_2^{Zmax} = 5/6 \simeq 0.83333$.

Condition d'arrêt x_1^{Zmax} et x_2^{Zmax} existent – ils et sont – ils entiers ?

x2 n'est toujours pas entier, on doit refaire des cas.

Choix de la variable sur laquelle faire un cas

On choisit x2.

Ainsi, soit x2 ≤ 0, soit x2 ≥ 1.

Cas 4 : $x_2 \leq 1$, $x_1 \geq 4$ et $x_2 \geq 1$

Avant tout chose, on remarque que l'on a $x_2 \leq 1$ et $x_2 \geq 1$, c a d $x_2 = 1$.

Ainsi, le problème devient :

Max Z = $5x_1 + 4\times1$

$x_1 + 1$	≤ 5	$\Rightarrow$	$x_1 \leq 6$
$10\,x_1 + 6\times1$	≤ 45	$\Rightarrow$	$x_1 \leq 39/10$
x_1	≥ 4	$\Rightarrow$	$x_1 \geq 4$

On obtient une inconsistence : $x_1 \leq 3.9$ et $x_1 \geq 4$.

On n'a donc ici pas de solutions pour le cas numéro 4.

Cas 5 : $x_2 \leq 1$, $x_1 \geq 4$ et $x_2 \leq 0$

Avant tout chose, on remarque que l'on a $x_2 \leq 0$ et $x_2 \geq 0$ par définition, c a d $x_2 = 0$.

Ainsi, le problème devient :

Max Z = $5x_1 + 4\times0$ $\Rightarrow$ $Z = 5x_1$

$x_1 + 0$	≤ 5	$\Rightarrow$	$x_1 \leq 5$
$10\,x_1 + 6\times0$	≤ 45	$\Rightarrow$	$x_1 \leq 45/10$
x_1	≥ 4	$\Rightarrow$	$x_1 \geq 4$

Une solution évidente est donc de choisir $x_1 = 45/10$ (nous aurions pu aussi réaliser un simplexe pour la trouver). Ce qui nous donne ZMax = $5\times45/10 = 45/2$, $x_1 = 45/10$, $x_2 = 0$

Condition d'arrêt x_1^{Zmax} et x_2^{Zmax} existent – ils et sont – ils entiers ?

x1 n'est toujours pas entier, on doit refaire des cas.

Choix de la variable sur laquelle faire un cas

On choisit x1.

Ainsi, soit x1 ≤ 4, soit x1 ≥ 5.

Cas 6 : $x_2 \leq 1$, $x_1 \geq 4$, $x_2 \leq 0$ et $x_1 \leq 4$

Avant tout chose, on remarque que l'on a $x_2 \leq 0$ et $x_2 \geq 0$ par définition, c a d $x_2 = 0$. De même on a $x_1 \leq 4$ et $x_1 \geq 4$, c a d $x_1 = 4$.

Ainsi le problème devient :

Max Z = $5\times20 + 4\times0$ $\Rightarrow$ Z = 20

$4 + 0$	≤ 5	$\Rightarrow$	$4 \leq 5$
$10\times4 + 6\times0$	≤ 45	$\Rightarrow$	$40 \leq 45$

Les contraintes sont respectées et les valeurs de x_1 et x_2 fixées et entières ainsi, nous venons de trouver une deuxième solution entière à notre problème : Z = 20, $x_1 = 4$ et $x_2 = 0$, cependant nous ne pouvons affirmer qu'il s'agisse de la valeur maximum pour Z car nous n'avons pas résolu tous les cas.

Cas 7 : $x_2 \leq 1$, $x_1 \geq 4$, $x_2 \leq 0$ et $x_1 \geq 5$

Avant tout chose, on remarque que l'on a $x_2 \leq 0$ et $x_2 \geq 0$ par définition, c a d $x_2 = 0$.

Ainsi le problème devient :

Max Z = $5x_1 + 4\times0$ $\Rightarrow$ $Z = 5x_1$

$x_1 + 0$	≤ 5	$\Rightarrow$	$x_1 \leq 5$
$10\,x_1 + 6\times0$	≤ 45	$\Rightarrow$	$x_1 \leq 45/10$
x_1	≥ 4	$\Rightarrow$	$x_1 \geq 4$
x_1	≥ 5	$\Rightarrow$	$x_1 \geq 5$

On obtient une inconsistence : $x_1 \leq 4.5$ et $x_1 \geq 5$.

On n'a donc ici pas de solutions pour le cas numéro 7.

Cas 8 : $x_2 \geq 2$

Résolution en considérant $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^+$

Pour construire le dictionnaire, nous allons tout d'abord introduire des variables d'écarts pour transformer les inéquations en équations :

$$\begin{aligned}
x_1 + x_2 + x_3 &= 5 \\
10\,x_1 + 6x_2 + x_4 &= 45 \\
x_2 - x_5 &= 2 \\
-5x_1 - 4x_2 + Z &= 0
\end{aligned}$$

$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$

Se dégage-t-il une solution évidente si l'on met les variables de décision à zéro ?

$$\begin{array}{llll} 0 + 0 + x_3 & = 5 & \Rightarrow & x_3 = 5 \\ 10 \times 0 + 6\times 0 + x_4 & = 45 & \Rightarrow & x_4 = 45 \\ 0 - x_5 & = 2 & \Rightarrow & x_5 = -2 \Rightarrow \text{impossible par définition car } x_5 \geq 0 \end{array}$$

Aucune solution évidente ne se dégage, ainsi, nous allons utiliser la méthode du simplexe en deux Phases.

Intéressons-nous au sous problème suivant (première phase)

Max W = -A1

$$\begin{array}{l} x_1 + x_2 + x_3 = 5 \\ 10 x_1 + 6x_2 + x_4 = 45 \\ x_2 - x_5 + A1 = 2 \end{array}$$

x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, A1 ≥ 0

Se dégage-t-il une solution évidente si l'on met les variables de décision ainsi que x_5 à zéro ?

$$\begin{array}{llll} 0 + 0 + x_3 & = 5 & \Rightarrow & x_3 = 5 \\ 10 \times 0 + 6\times 0 + x_4 & = 45 & \Rightarrow & x_4 = 45 \\ 0 - 0 + A1 & = 2 & \Rightarrow & A1 = 2 \end{array}$$

x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, A1 ≥ 0

Réponse : oui. Ainsi, nous pouvons entamer l'algorithme du simplexe (pour ce sous problème).

Mais avant, réécrivons l'expression de W en fonction des variables de décision pour pouvoir l'insérer dans le tableau :

W = -A1 = -2 + x_2 - x_5 $\Rightarrow -x_2+x_5$+W= -2

Construisons notre premier tableau du simplexe :

	x1	x2	x3	x4	x5	A1	Z	W	V
x3	1	1	1	0	0	0	0	0	5
x4	10	6	0	1	0	0	0	0	45
x5	0	1	0	0	-1	1	0	0	2
Z	-5	-4	0	0	0	0	1	0	0
W	0	-1	0	0	1	0	0	1	-2

Choix de la ligne et de la colonne pivot :

	x1	x2	x3	x4	x5	A1	Z	W	V
x3	1	1	1	0	0	0	0	0	5
x4	10	6	0	1	0	0	0	0	45
x5	0	1	0	0	-1	1	0	0	2
Z	-5	-4	0	0	0	0	1	0	0
W	0	-1	0	0	1	0	0	1	-2

Pivotage :

	x1	x2	x3	x4	x5	A1	Z	W	V
x3	1	1	1	0	0	0	0	0	5
x4	10	6	0	1	0	0	0	0	45
x2	0	1	0	0	-1	1	0	0	2
Z	-5	-4	0	0	0	0	1	0	0
W	0	-1	0	0	1	0	0	1	-2

⇒

	x1	x2	x3	x4	x5	A1	Z	W	V
x3	1	0	1	0	1	-1	0	0	3
x4	10	0	0	1	6	-6	0	0	33
x2	0	1	0	0	-1	1	0	0	2
Z	-5	0	0	0	-4	4	1	0	8
W	0	0	0	0	0	1	0	1	0

Le critère d'arrêt est atteint car il n'y a pas de valeurs négatives sur la ligne de W pour les colonnes des variables de décision et les variables artificielles ne sont plus en base, nous pouvons retirer les colonnes A1 et W, ainsi que la ligne W :

	x1	x2	x3	x4	x5	Z	V
x3	1	0	1	0	1	0	3
x4	10	0	0	1	6	0	33
x2	0	1	0	0	-1	0	2
Z	-5	0	0	0	-4	1	8

Remarque : Si nous avions trouvé un WMax < 0, cela signifiait qu'il n'existait pas de solution pour ce cas là.

Deuxième phase, résolution du tableau obtenu

	x1	x2	x3	x4	x5	Z	V
x3	1	0	1	0	1	0	3
x4	10	0	0	1	6	0	33
x5	0	1	0	0	-1	0	2
Z	-5	0	0	0	-4	1	8

Doit-on procéder à des itérations de l'algorithme du simplexe ?

Réponse : oui, car il se trouve des valeurs négatives sur la ligne Z pour les colonnes des variables.

Choix de la ligne et de la colonne pivot :

	x1	x2	x3	x4	x5	Z	V
x3	1	0	1	0	1	0	3
x4	10	0	0	1	6	0	33
x2	0	1	0	0	-1	0	2
Z	-5	0	0	0	-4	1	8

Pivotage :

	x1	x2	x3	x4	x5	Z	V
x1	1	0	1	0	1	0	3
x4	10	0	0	1	6	0	33
x2	0	1	0	0	-1	0	2
Z	-5	0	0	0	-4	1	8

⇒

	x1	x2	x3	x4	x5	Z	V
x1	1	0	1	0	1	0	3
x4	0	0	-10	1	-4	0	3
x2	0	1	0	0	-1	0	2
Z	0	0	5	0	1	1	23

Le critère d'arrêt est atteint car il n'y a pas de valeurs négatives sur la ligne de Z pour les colonnes des variables de décision.

On obtient ZMax = 23, $x_1^{\mathrm{Zmax}} = 3$ et $x_2^{\mathrm{Zmax}} = 2$.

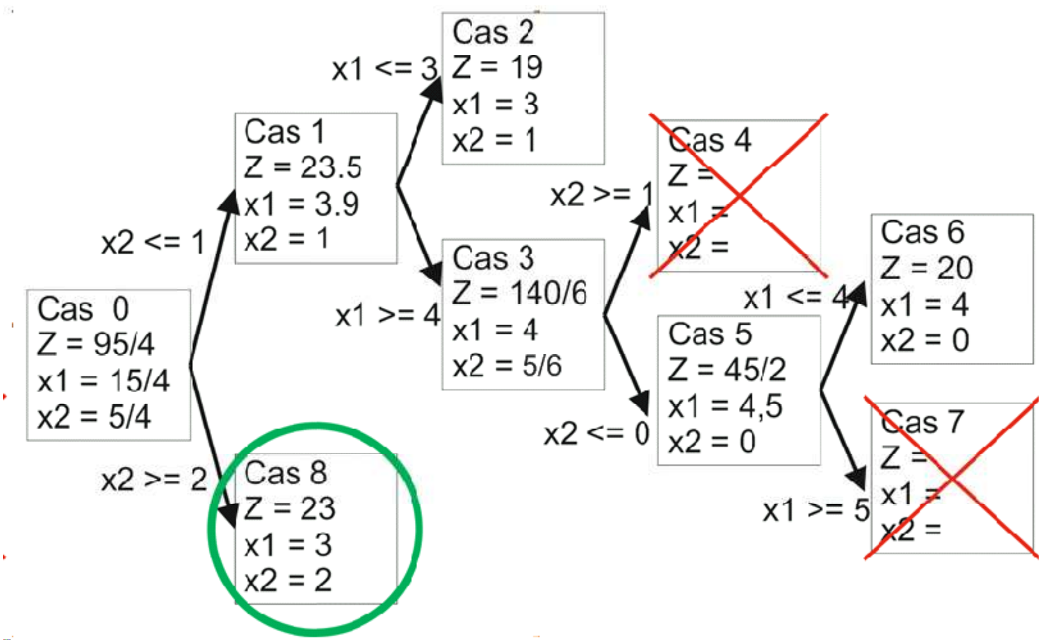
Condition d'arrêt x_1^{Zmax} et x_2^{Zmax} existent – ils et sont – ils entiers ?

x_1^{Zmax} et x_2^{Zmax} sont entiers, ainsi nous avons une troisième solution entière : Z = 23, $x_1 = 3$ et $x_2 = 2$.

Résumé

Tous les cas ont été exploré jusqu'à trouver une solution entière ou une absence de solution.

Nous pouvons résumer les résultats sous la forme de l'arbre suivant :



Nous avons trouvé trois solutions entières :

Cas 2 : Z = 19, $x_1 = 3$ et $x_2 = 1$.

Cas 6 : Z = 20, $x_1 = 4$ et $x_2 = 0$

Cas 8 : Z = 23, $x_1 = 3$ et $x_2 = 2$.

Déterminer Zmax pour x1 et x2 entiers :

La valeur de Z est la plus grande pour le cas 8, ainsi, la solution de notre problème de PLNE est :

ZMax = 23, $x_1 = 3$ et $x_2 = 2$.

Ce qui est confirmé par les résultats de la méthode graphique effectuée précédemment.