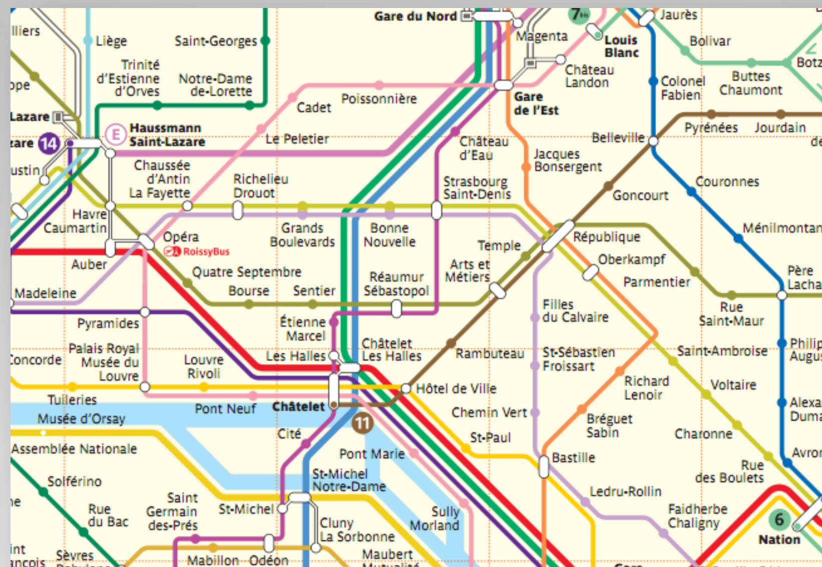
RO et IA : Théorie des Graphes

ESGI-PPA-4 Vidal

Pourquoi les graphes ?

- Nous sommes en permanence confrontés à des graphes :



Pourquoi les graphes ?

- Nous sommes en permanence confrontés à des graphes :

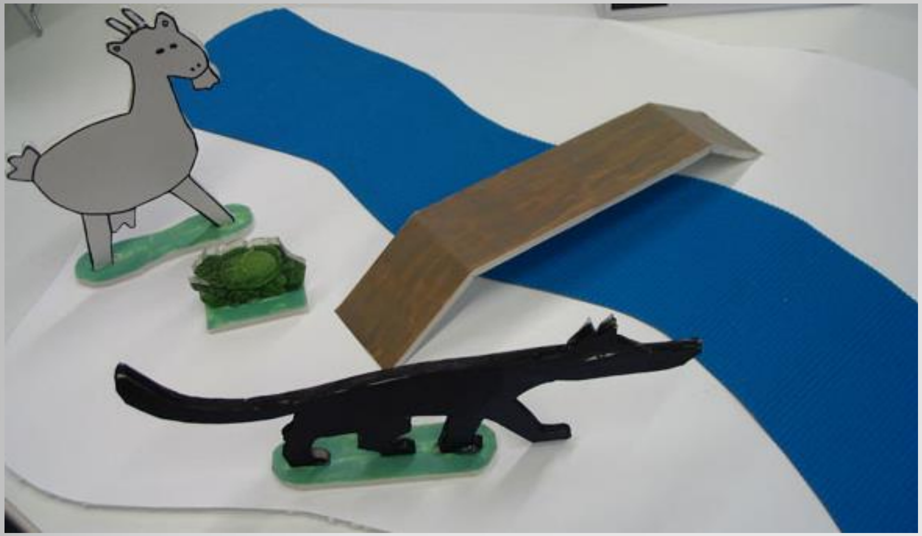
Pourquoi les graphes ?

Des graphes pour mieux visualiser des problèmes…

- Premier exemple :
  - Voyage intersidéral
    - Nous sommes en 3002. Il existe un transport interplanétaire entre les neuf planètes du système solaire. Des navires spatiaux assurent les liaisons suivantes : Pluton-Vénus, Uranus-Neptune, Terre-Mercure, Jupiter-Mars, Mercure-Vénus, Saturne-Neptune, Terre-Pluton, Saturne-Jupiter, Uranus-Mars, Pluton-Mercure.
    - Peut-on partir de la Terre et arriver sur Mars ?

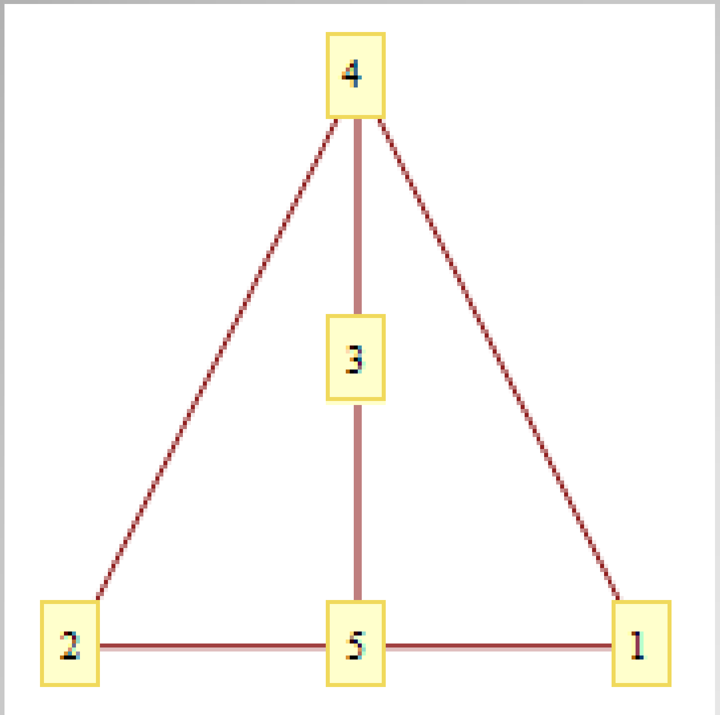
Des graphes pour mieux visualiser des problèmes…

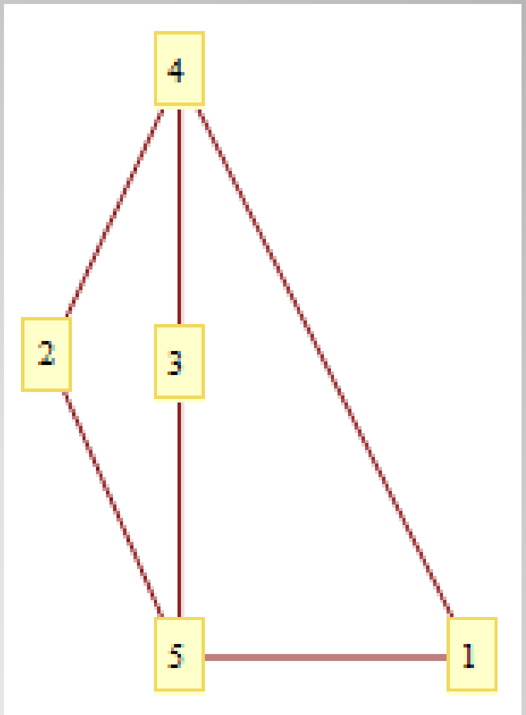
- Deuxième exemple moins évident mais classique :
  - La chèvre, le loup, le chou et le passeur …
    - Un passeur doit faire traverser une rivière à un loup, une chèvre et un chou, dans une barque si petite qu'il ne peut emporter que l'un d'eux à chaque voyage. Pour des raisons évidentes, il ne peut laisser le loup et la chèvre seuls sur une rive, pas plus que la chèvre et le chou. Comment s'y prend-il ?



Des graphes pour mieux visualiser des problèmes…

- Ces deux graphes sont-ils identiques ?





Des graphes pour mieux visualiser des problèmes…

http://fr.wikipedia.org/wiki/Lexique_de_la_théorie_des_graphes

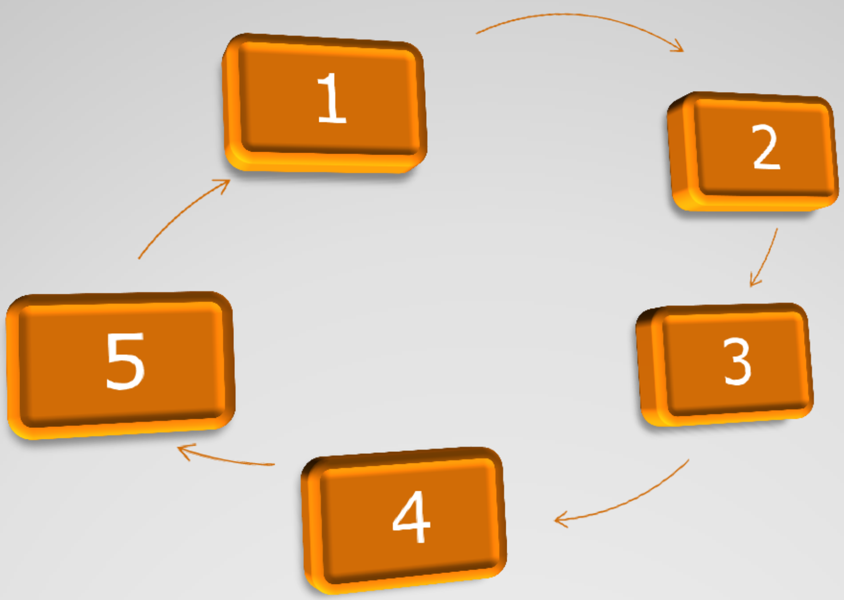
Un peu de vocabulaire

Graphes orientés

- Un ***graphe orienté*** est défini par le doublet où :
  - X est l’ensemble des sommets (ou nœuds) du graphe
  - U est l’ensemble des arcs du graphe

Graphes orientés

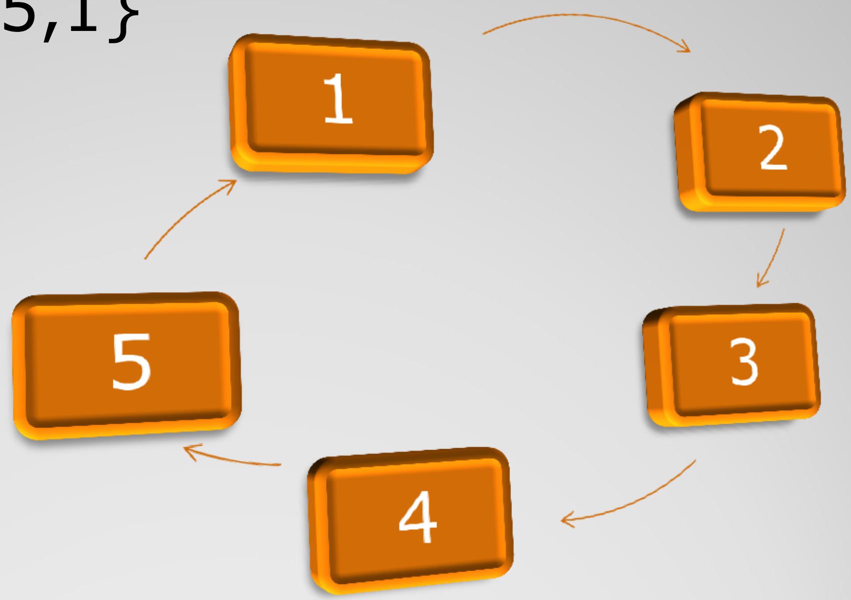
- Exemple :
  - X = {1,2,3,4,5}
  - U = {{1,2},{2,3},{3,4},{4,5},{5,1}}



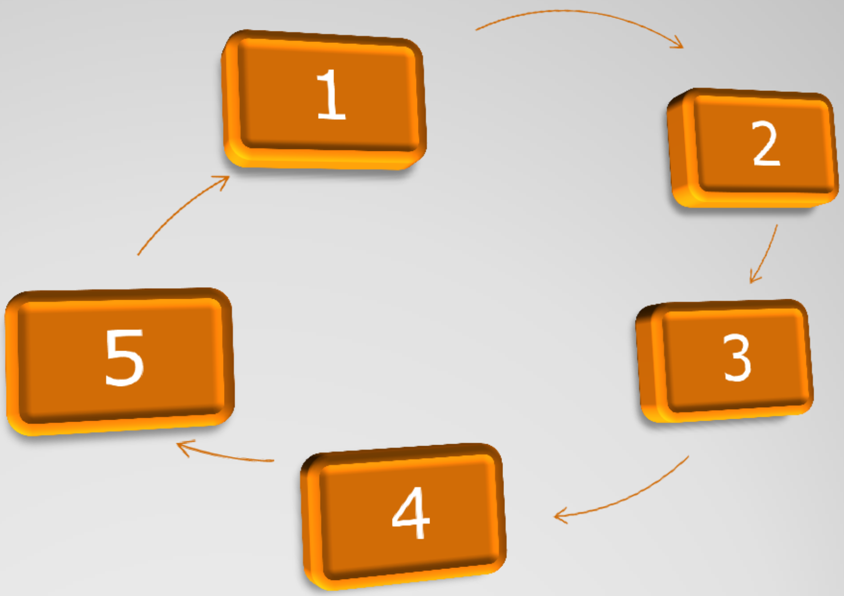
Graphes orientés

Graphes orientés

- Un ***chemin*** est défini par une liste de sommets tels qu'il existe un arc de chaque sommet vers le suivant
  - Chemin 1: {1,2,3}
  - Chemin 2: {4,5,1}
  - …



- Un ***circuit*** est un chemin vers lui-même :
  - Circuit 1: {1,2,3,4,5,1}
  - Circuit 2: {4,5,1,2,3,4}
  - …



Graphes orientés

- Une ***boucle*** est un circuit de longueur 1
- Un ***chemin élémentaire*** est un chemin tel qu'en le parcourant, on ne rencontre pas deux fois le même sommet.
- Un ***chemin simple*** est un chemin ne passant pas plus d'une fois par le même arc

Graphes orientés

- Un ***chemin hamiltonien*** est un chemin passant une fois par chaque sommet du graphe.

- Un ***circuit hamiltonien*** est un chemin hamiltonien se refermant sur son sommet d'origine

Graphes orientés

- Un ***chemin eulérien*** est un chemin passant une fois par chaque arc du graphe.
- Un ***circuit eulérien*** est un chemin eulérien se refermant sur son sommet d’origine

Graphes orientés

- Un graphe est dit ***complet*** si chacun de ses sommets possède un arc vers tout autre sommet, y compris lui-même.
  - *On remarquera que si un graphe complet comporte N sommets, alors il comporte N^2 arcs.*

Graphes orientés

- ***L'ordre*** d'un graphe est son nombre de sommet
- ***Le degré*** d'un sommet est le nombre d'arcs ayant une extrémité en ce sommet et l'autre en un autre sommet
- ***Le demi degré intérieur (ou entrant)*** d'un sommet est le nombre d'arcs ayant une extrémité finale en ce sommet et non leur extrémité initiale)
- ***Le demi degré extérieur (ou sortant)*** d'un sommet est le nombre d'arcs ayant une extrémité initiale en ce sommet (et non leur extrémité finale)

Graphes orientés

- Un graphe orienté est dit ***fortement connexe*** s’il existe un chemin entre tout couple de sommet.

Graphes orientés

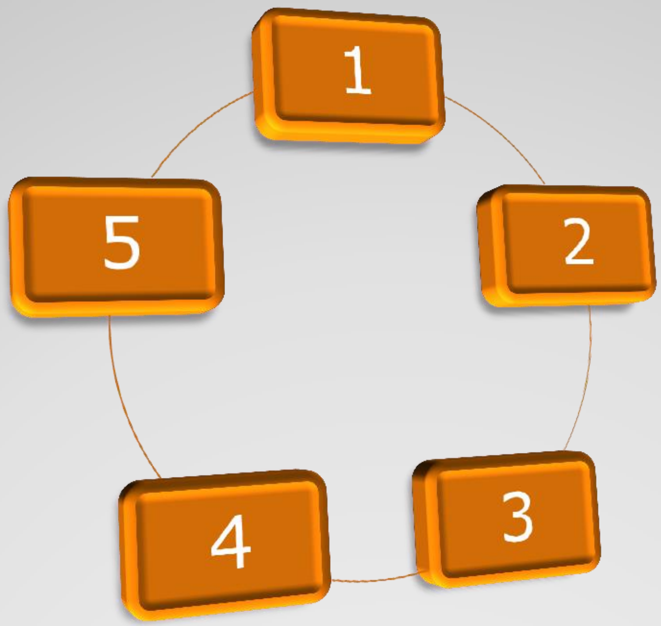
Graphes non orientés

- Un ***graphe non orienté*** est défini par le doublet où :
  - X est l’ensemble des sommets (ou nœuds) du graphe
  - U est l’ensemble des arrêtes du graphe

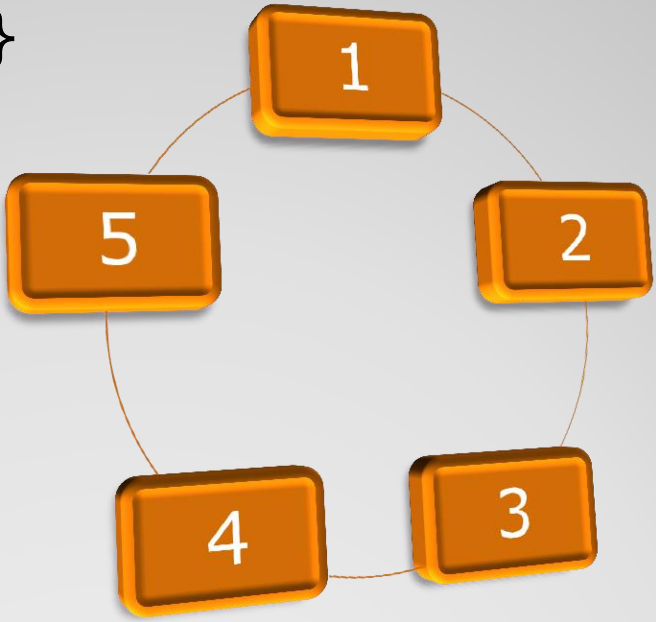
Graphes non orientés

Graphes non orientés

- Exemple :
  - X = {1,2,3,4,5}
  - U = {{1,2},{2,3},{3,4},{4,5},{5,1}}

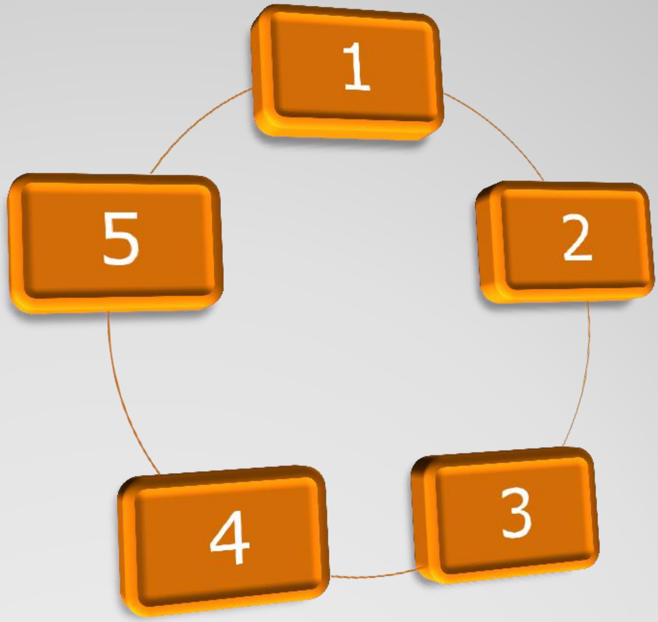


- Un ***chaine*** est définie par une séquence d’arêtes consécutives ou de sommets liés par des arêtes consécutives
  - Chaine 1: {1,2,3}
  - Chaine 2: {4,5,1}
  - …



Graphes non orientés

- Un ***cycle*** est une chaîne fermée :
  - Cycle 1: {1,2,3,4,5,1}
  - Cycle 2: {4,5,1,2,3,4}
  - …



Graphes non orientés

- Une ***chaine élémentaire*** est une chaine telle qu'en la parcourant, on ne rencontre pas deux fois le même sommet.

- Une ***chaine simple*** est une chaine ne passant pas plus d'une fois par la même arête

Graphes non orientés

- Une ***chaine hamiltonienne*** est une chaine contenant une fois tous les sommets du graphe.

- Un ***cycle hamiltonien*** est une chaine hamiltoniene se refermant sur son sommet d'origine

Graphes non orientés

- Une ***chaine eulérienne*** est une chaine passant une fois par chaque arrête du graphe.

- Un ***cycle eulérien*** est une chaine eulérienne se refermant sur son sommet d'origine

Graphes non orientés

- Un graphe non orienté est dit ***complet*** si chacun de ses sommets possède une arrête vers tout autre sommet.

  - *On remarquera que si un graphe non orienté complet comporte N sommets, alors il comporte* $\frac{N*(N-1)}{2}$ *arrêtes.*

Graphes non orientés

- ***L'ordre*** d'un graphe est son nombre de sommet

- ***Le degré*** d'un sommet est le nombre d'arrêtes ayant une extrémité en ce sommet et l'autre en un autre sommet

Graphes non orientés

- Un graphe non orienté est dit ***connexe*** s'il existe une chaine entre tout couple de sommet.

Graphes non orientés

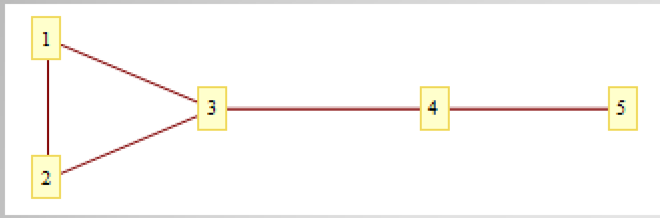
Comment représenter des graphes non orientés ?

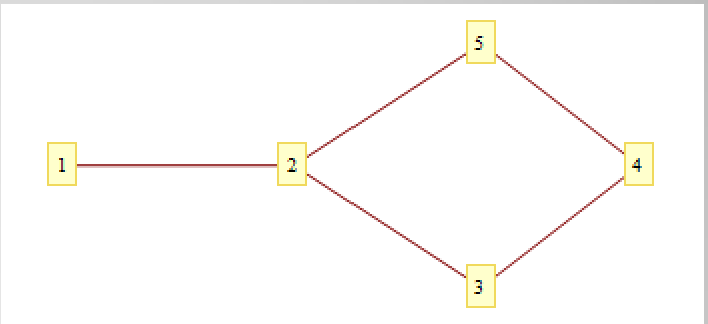
- L’ordre du graphe, son nombre d’arêtes/arcs et le degré de chaque sommet sont-ils suffisant ?

Comment représenter des graphes non orientés ?

G1	n=1	m=0	(0)
G2	n=2	m=0	(0,0)
G3	n=2	m=1	(1,1)
G4	n=3	m=0	(0,0,0)
G5	n=3	m=1	(0,1,1)
G6	n=3	m=2	(1,1,2)
G7	n=3	m=3	(2,2,2)
G8	n=4	m=0	(0,0,0,0)
G9	n=4	m=1	(0,0,1,1)
G10	n=4	m=2	(0,1,1,2)
G11	n=4	m=2	(1,1,1,1)
G12	n=4	m=3	(0,2,2,2)
G13	n=4	m=3	(1,1,1,3)
G14	n=4	m=3	(1,1,2,2)
G15	n=4	m=4	(1,2,2,3)
G16	n=4	m=4	(2,2,2,2)
G17	n=4	m=5	(2,2,3,3)
G18	n=4	m=6	(3,3,3,3)
G19	n=5	m=0	(0,0,0,0,0)
G20	n=5	m=1	(0,0,0,1,1)
G21	n=5	m=2	(0,0,1,1,2)
G22	n=5	m=2	(0,1,1,1,1)
G23	n=5	m=3	(0,0,2,2,2)
G24	n=5	m=3	(0,1,1,1,3)
G25	n=5	m=3	(0,1,1,2,2)
G26	n=5	m=3	(1,1,1,1,2)
G27	n=5	m=4	(0,1,2,2,3)
G28	n=5	m=4	(0,2,2,2,2)
G29	n=5	m=4	(1,1,1,1,4)
G30	n=5	m=4	(1,1,1,2,3)
G31	n=5	m=4	(1,1,2,2,2)
G32	n=5	m=4	(1,1,2,2,2)
G33	n=5	m=5	(0,2,2,3,3)
G34	n=5	m=5	(1,1,2,2,4)
G35	n=5	m=5	(1,1,2,3,3)
G36	n=5	m=5	(1,2,2,2,3)
G37	n=5	m=5	(1,2,2,2,3)
G38	n=5	m=5	(2,2,2,2,2)
G39	n=5	m=6	(0,3,3,3,3)
G40	n=5	m=6	(1,2,2,3,4)

- L’ordre du graphe, son nombre d’arrêtes/arcs et le degré de chaque sommet sont-ils suffisant ?
  - Non exemple :
    - (1, 2, 2, 2, 3)

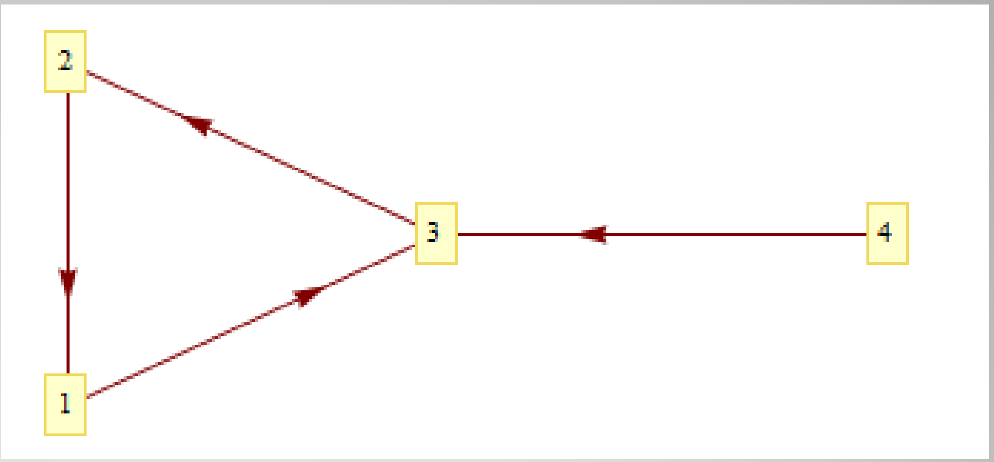




Comment représenter des graphes non orientés ?

- Matrice d’adjacence

```
{
 {0, 0, 1, 0},
 {1, 0, 0, 0},
 {0, 1, 0, 0},
 {0, 0, 1, 0}
}
```



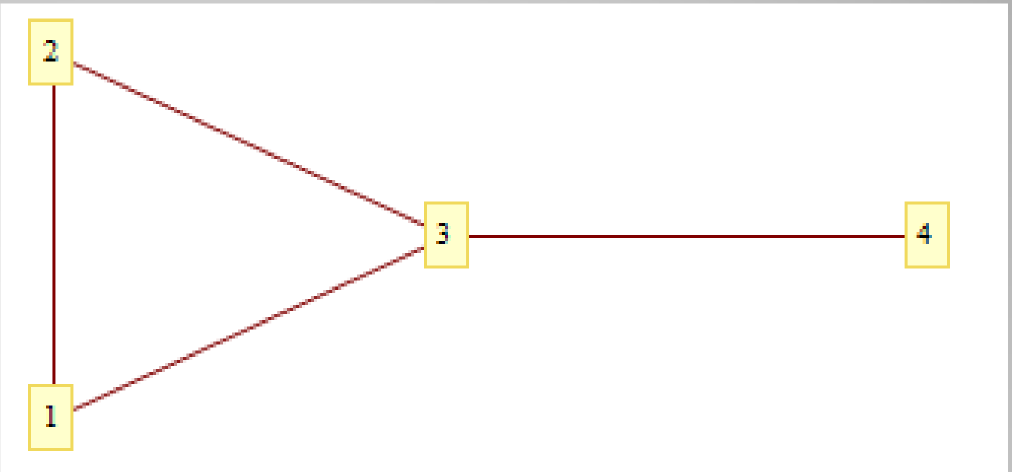
Comment représenter des graphes orientés ?

- Matrice d’adjacence
  - La somme des nombres d’une ligne donne le degré sortant du sommet correspondant
  - la somme des nombres d’une colonne donne le degré entrant du sommet correspondant
  - La trace de la matrice donne le nombre de boucles du graphe

Comment représenter des graphes orientés ?

- Matrice d’adjacence

```
{
 {0, 1, 1, 0},
 {1, 0, 1, 0},
 {1, 1, 0, 1},
 {0, 0, 1, 0}
}
```



Comment représenter des graphes non orientés ?

- Matrice d’adjacence
  - La matrice est symétrique
  - La somme des nombres d’une même ligne (ou d’une même colonne) donne le degré du sommet correspondant
  - La trace de la matrice donne le nombre de boucles du graphe

Comment représenter des graphes non orientés ?

Construction de la matrice d’adjacence

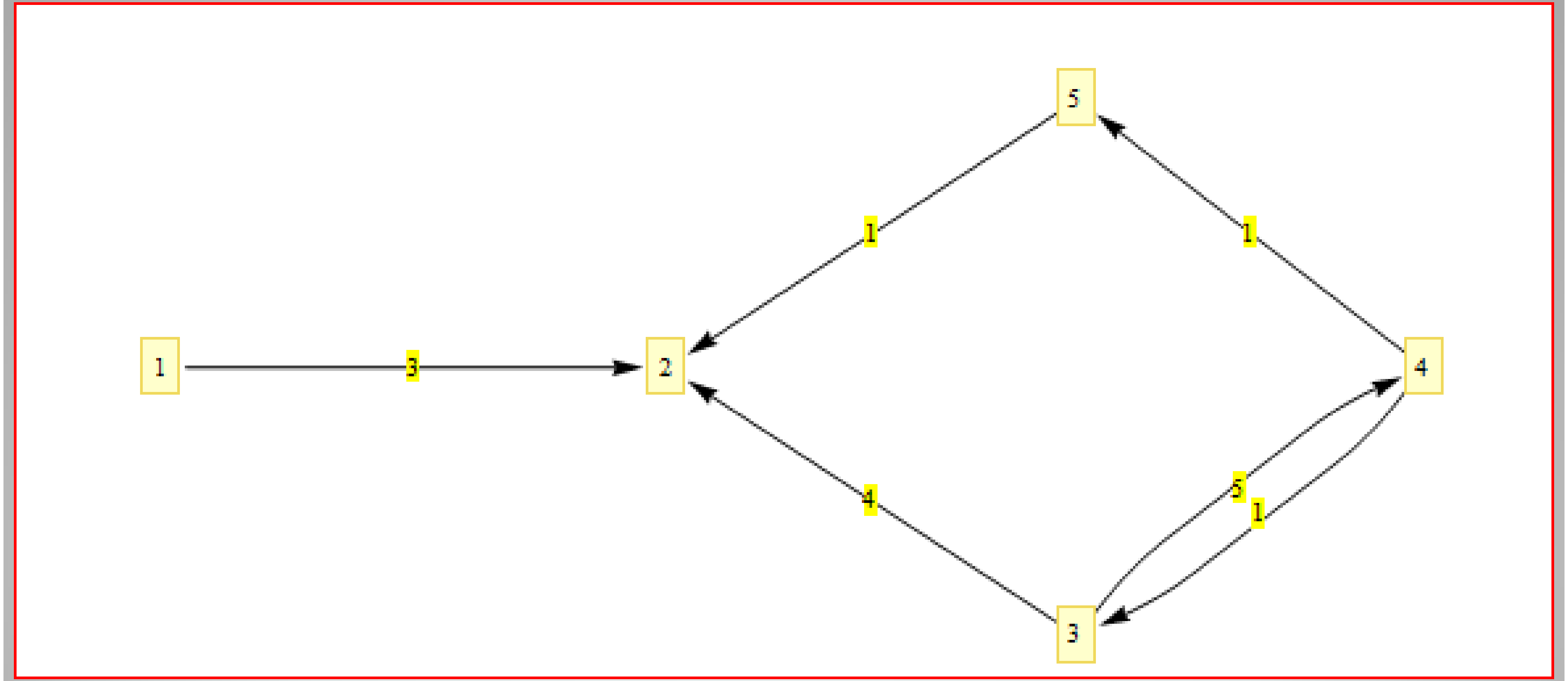
- Matrice d’adjacence
  - Matrice carrée NxN où N est l’ordre du graphe
  - Soit A cette matrice et A[i,j] la valeur de la case à la ligne i et la colonne j avec i dans {1..N} et j dans {1..N}
  - Alors
    - A[i,j] = 1 s’il existe un arc/arrête entre les nœuds i et j.
    - A[i,j] = 0 sinon.

- Autres représentations
  - Matrice d’incidence
  - Liste d’adjacence

Comment représenter des graphes ?

- Théorème d’Euler
  - Un graphe connexe admet un cycle eulérien si et seulement si tous ses sommets sont de degré pair.
  - Un graphe connexe admet une chaîne eulérienne si et seulement si tous ses sommets sont de degré pair **sauf éventuellement deux d’entre eux**.

Retour sur les cycles et chaînes Eulériennes



Graphes pondérés

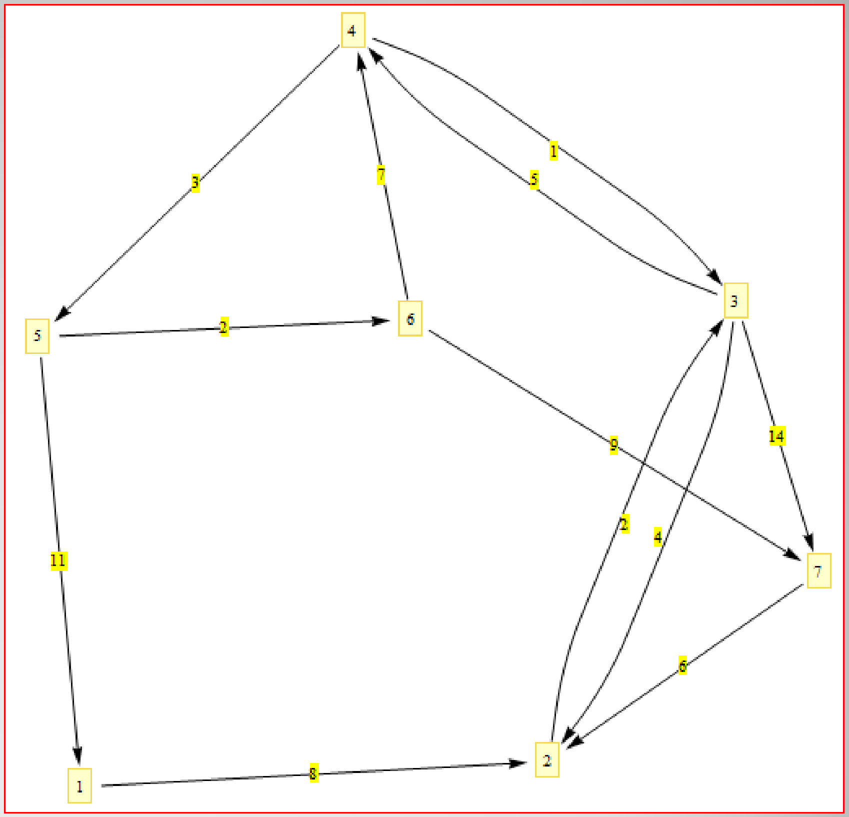
- Un graphe pondéré orienté (non orienté) est un graphe auquel on associe à chacun (chacune) de ses arcs (arrêtes) une valeur, le poids, représentant le coût pour aller d’un nœud à un autre.

Graphes pondérés

Matrice de couts

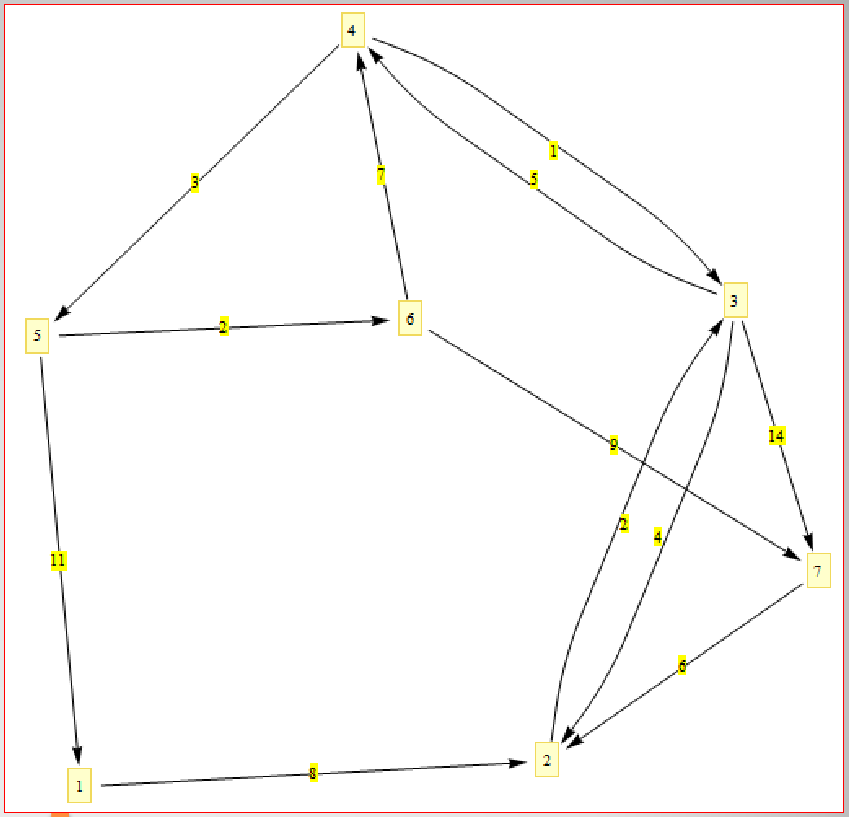
- Semblable à la matrice d’adjacence, nous pouvons représenter une graphe pondéré par une matrice

0	8	0	0	0	0	0
0	0	2	0	0	0	0
0	4	0	5	0	0	14
0	0	1	0	3	0	0
11	0	0	0	0	2	0
0	0	0	7	0	0	9
0	6	0	0	0	0	0



- Quel est le chemin de moindre coût pour aller du nœud 5 au nœud 2 ?

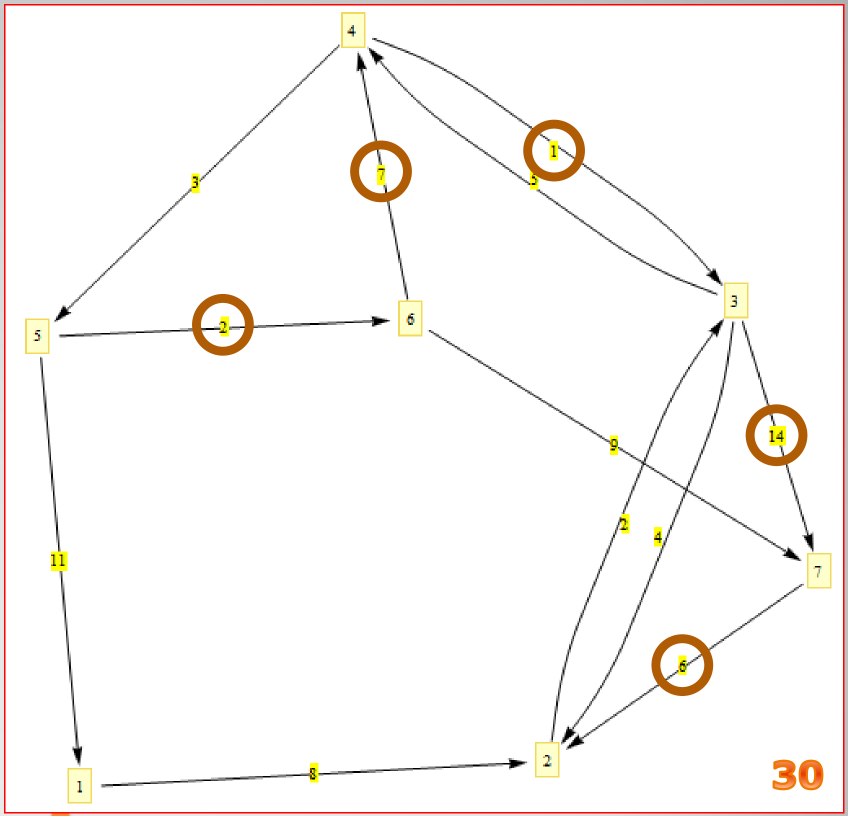
0	8	0	0	0	0	0
0	0	2	0	0	0	0
0	4	0	5	0	0	14
0	0	1	0	3	0	0
11	0	0	0	0	2	0
0	0	0	7	0	0	9
0	6	0	0	0	0	0



Plus court chemin

- Quel est le chemin de moindre coût pour aller du nœud 5 au nœud 2 ?

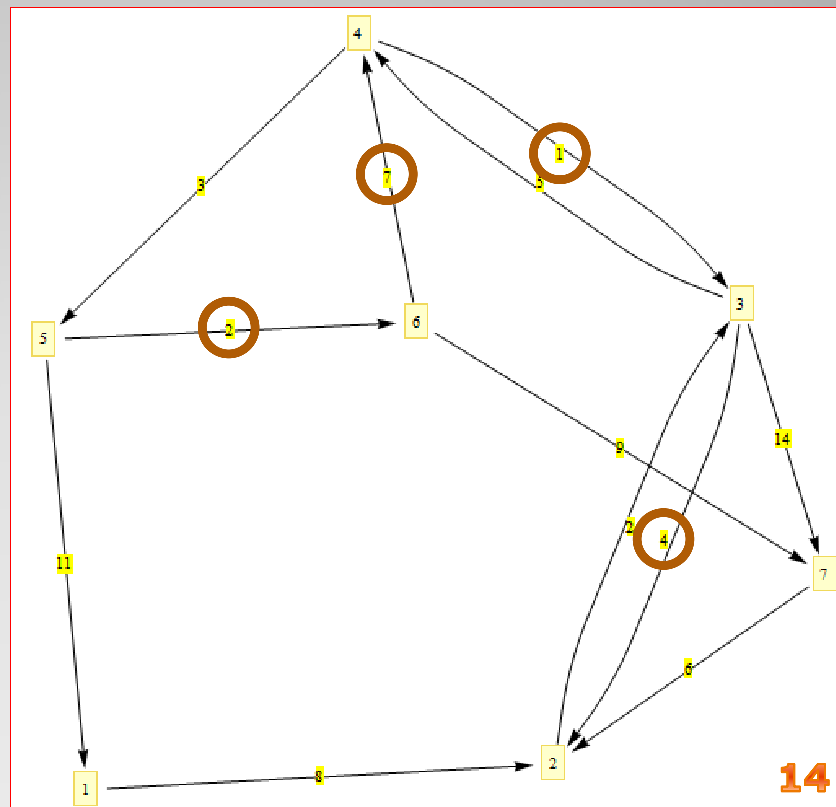
0	8	0	0	0	0	0
0	0	2	0	0	0	0
0	4	0	5	0	0	14
0	0	1	0	3	0	0
11	0	0	0	0	2	0
0	0	0	7	0	0	9
0	6	0	0	0	0	0



Plus court chemin

- Quel est le chemin de moindre coût pour aller du nœud 5 au nœud 2 ?

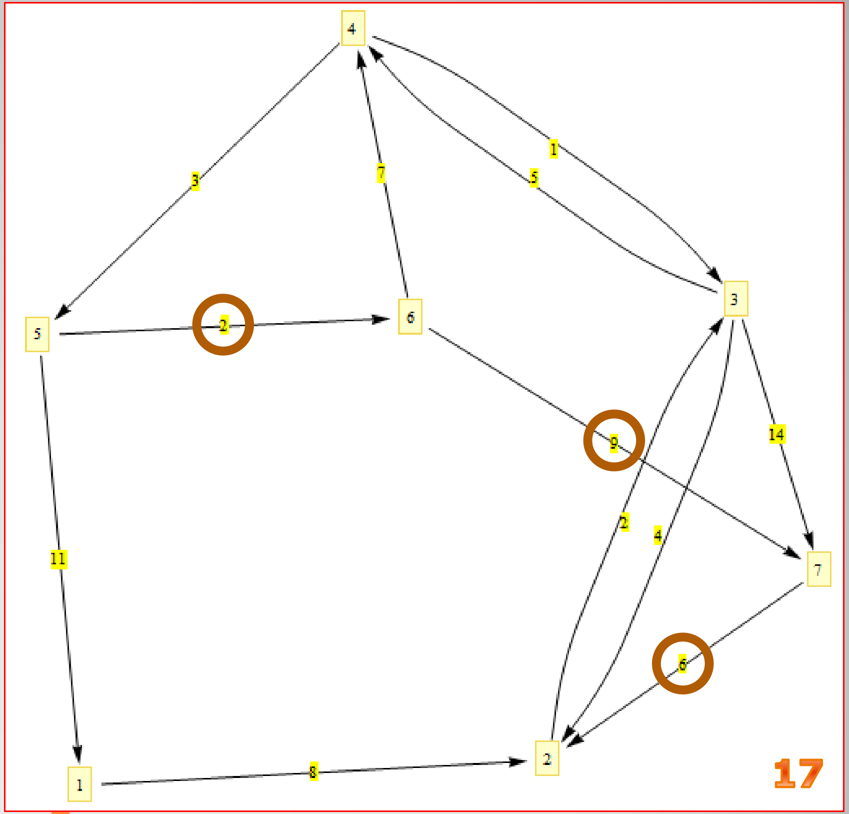
0	8	0	0	0	0	0
0	0	2	0	0	0	0
0	4	0	5	0	0	14
0	0	1	0	3	0	0
11	0	0	0	0	2	0
0	0	0	7	0	0	9
0	6	0	0	0	0	0



Plus court chemin

- Quel est le chemin de moindre coût pour aller du nœud 5 au nœud 2 ?

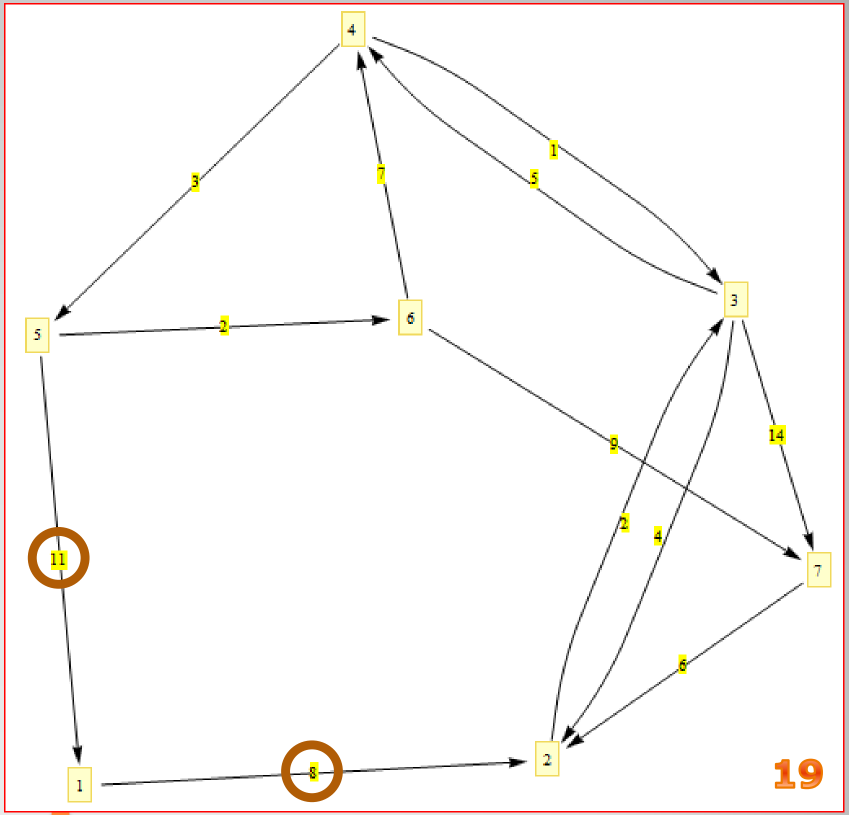
0	8	0	0	0	0	0
0	0	2	0	0	0	0
0	4	0	5	0	0	14
0	0	1	0	3	0	0
11	0	0	0	0	2	0
0	0	0	7	0	0	9
0	6	0	0	0	0	0



Plus court chemin

- Quel est le chemin de moindre coût pour aller du nœud 5 au nœud 2 ?

0	8	0	0	0	0	0
0	0	2	0	0	0	0
0	4	0	5	0	0	14
0	0	1	0	3	0	0
11	0	0	0	0	2	0
0	0	0	7	0	0	9
0	6	0	0	0	0	0



Plus court chemin

- Pouvez-vous imaginer un algorithme qui permette de trouver le meilleur chemin allant d’un point à un autre d’un graphe ?

Plus court chemin

- Algorithme de Djikstra
  - Initialisation
    - Etiqueter tous les nœuds du graphes avec un score infini.
    - Etiqueter le nœud de départ avec un score nul
    - Ajouter tous les nœuds à la liste L.
  - Boucle
    - Choisir le nœud de score le plus faible dans L : Nmin.
    - Si Nmin == Nœud destination → fin et remontée.
    - Pour chaque fils de Nmin :
      - Mettre à jour le score selon la formule score(Nmin) + Cout(Nmin→Voisin) à condition que le résultat soit plus faible que score(Voisin).
      - Retirer Nmin de L

Plus court chemin

- Algorithme de Djikstra

S1	S2	S3	S4	S6	S7
11 (S5)	∞	∞	∞	2 (S5)	∞

0	8	0	0	0	0	0
0	0	2	0	0	0	0
0	4	0	5	0	0	14
0	0	1	0	3	0	0
11	0	0	0	0	2	0
0	0	0	7	0	0	9
0	6	0	0	0	0	0

Plus court chemin

- Algorithme de Djikstra

S1	S2	S3	S4	S6	S7
11 (S5)	∞	∞	∞	2 (S5)	∞
11 (S5)	∞	∞	2 + 7 = 9 (S6)	-	2 + 9 = 11 (S6)

0	8	0	0	0	0	0
0	0	2	0	0	0	0
0	4	0	5	0	0	14
0	0	1	0	3	0	0
11	0	0	0	0	2	0
0	0	0	7	0	0	9
0	6	0	0	0	0	0

Plus court chemin

- Algorithme de Djikstra

S1	S2	S3	S4	S6	S7
11 (S5)	∞	∞	∞	2 (S5)	∞
11 (S5)	∞	∞	2 + 7 = 9 (S6)	-	2 + 9 = 11 (S6)
11 (S5)	∞	9 + 1 = 10 (S4)	-	-	11 (S6)

0	8	0	0	0	0	0
0	0	2	0	0	0	0
0	4	0	5	0	0	14
0	0	1	0	3	0	0
11	0	0	0	0	2	0
0	0	0	7	0	0	9
0	6	0	0	0	0	0

Plus court chemin

- Algorithme de Djikstra

S1	S2	S3	S4	S6	S7
11 (S5)	∞	∞	∞	2 (S5)	∞
11 (S5)	∞	∞	2 + 7 = 9 (S6)	-	2 + 9 = 11 (S6)
11 (S5)	∞	9 + 1 = 10 (S4)	-	-	11 (S6)
11 (S5)	10 + 4 = 14 (S3)	-	-	-	11 (S6)

Plus court chemin

0	8	0	0	0	0	0
0	0	2	0	0	0	0
0	4	0	5	0	0	14
0	0	1	0	3	0	0
11	0	0	0	0	2	0
0	0	0	7	0	0	9
0	6	0	0	0	0	0

- Algorithme de Djikstra

S1	S2	S3	S4	S6	S7
11 (S5)	∞	∞	∞	2 (S5)	∞
11 (S5)	∞	∞	2 + 7 = 9 (S6)	-	2 + 9 = 11 (S6)
11 (S5)	∞	9 + 1 = 10 (S4)	-	-	11 (S6)
11 (S5)	10 + 4 = 14 (S3)	-	-	-	11 (S6)
-	14 (S3)	-	-	-	11 (S6)

$$\begin{matrix} 0 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 5 & 0 & 0 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 11 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & 0 & 0 & 9 \\ 0 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}$$

Plus court chemin

- Algorithme de Djikstra

S1	S2	S3	S4	S6	S7
11 (S5)	∞	∞	∞	2 (S5)	∞
11 (S5)	∞	∞	2 + 7 = 9 (S6)	-	2 + 9 = 11 (S6)
11 (S5)	∞	9 + 1 = 10 (S4)	-	-	11 (S6)
11 (S5)	10 + 4 = 14 (S3)	-	-	-	11 (S6)
-	14 (S3)	-	-	-	11 (S6)
-	14 (S3)	-	-	-	-

0	8	0	0	0	0	0
0	0	2	0	0	0	0
0	4	0	5	0	0	14
0	0	1	0	3	0	0
11	0	0	0	0	2	0
0	0	0	7	0	0	9
0	6	0	0	0	0	0

Plus court chemin

Plus court chemin

- L'algorithme de Djikstra dans le cas de poids négatifs ?

- L’algorithme de Djikstra dans le cas de poids négatifs ?
  - Pas dans tous les cas
  - Circuit de poids total négatif

Plus court chemin

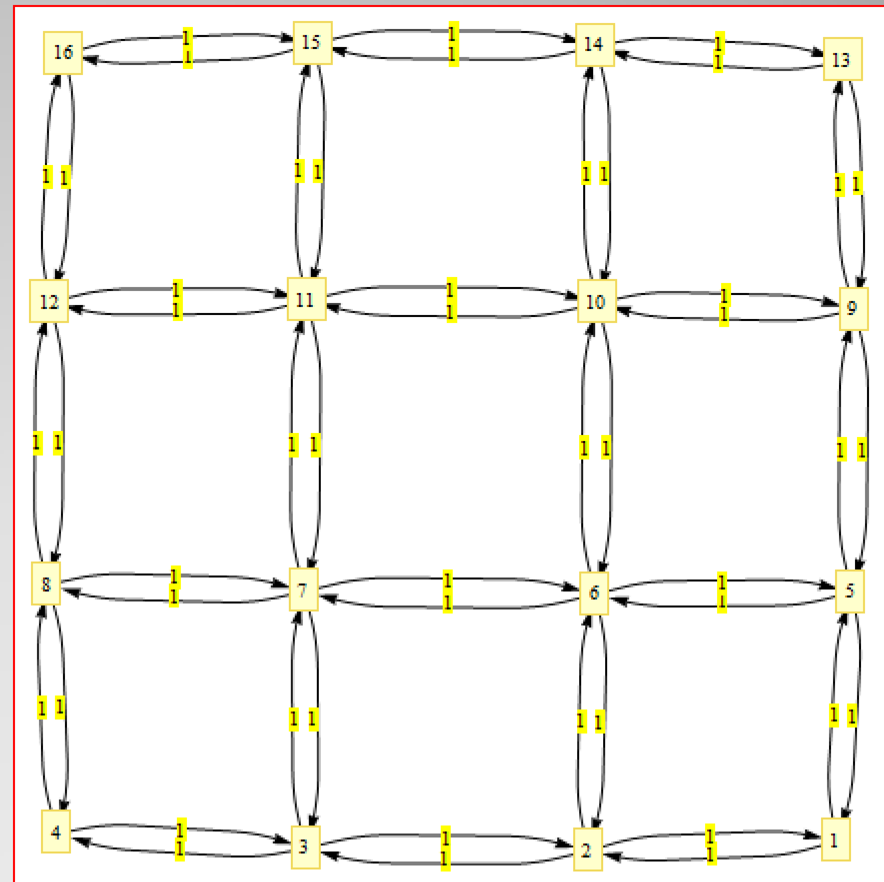
Plus court chemin

- Cas de la grille

		A	
D			

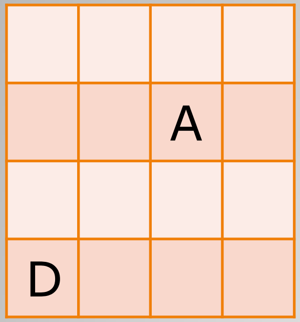
- Cas de la grille

		A	
D			



Plus court chemin

- Cas de la grille



0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	1	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
0	1	0	0	1	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	1	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0
0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0
0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0
0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	1	0	0	1	0	0
0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	1	0	0	1	0
0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	1
0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	1	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0

Plus court chemin

- Cas de la grille

∞	∞	∞	∞
∞	∞	∞	∞
∞	∞	∞	∞
0	∞	∞	∞

Plus court chemin

- Cas de la grille

∞	∞	∞	∞
∞	∞	∞	∞
1	∞	∞	∞
0	1	∞	∞

Plus court chemin

- Cas de la grille

∞	∞	∞	∞
∞	∞	∞	∞
1	2	∞	∞
0	1	2	∞

Plus court chemin

Plus court chemin

- Cas de la grille

∞	∞	∞	∞
2	∞	∞	∞
1	2	∞	∞
0	1	2	∞

- Cas de la grille

∞	∞	∞	∞
2	∞	∞	∞
1	2	3	∞
0	1	2	3

Plus court chemin

- Cas de la grille

∞	∞	∞	∞
2	3	∞	∞
1	2	3	∞
0	1	2	3

Plus court chemin

- Cas de la grille

3	∞	∞	∞
2	3	∞	∞
1	2	3	∞
0	1	2	3

Plus court chemin

Plus court chemin

- Cas de la grille

3	∞	∞	∞
2	3	∞	∞
1	2	3	4
0	1	2	3

- Cas de la grille

3	∞	∞	∞
2	3	4	∞
1	2	3	4
0	1	2	3

Plus court chemin

- Cas de la grille

3	4	∞	∞
2	3	4	∞
1	2	3	4
0	1	2	3

Plus court chemin

- Cas de la grille

3	4	∞	∞
2	3	4	∞
1	2	3	4
0	1	2	3

Plus court chemin

- Cas de la grille

3	4	∞	∞
2	3	4	5
1	2	3	4
0	1	2	3

Plus court chemin

- Cas de la grille

3	4	∞	∞
2	3	4	5
1	2	3	4
0	1	2	3

Plus court chemin

- Algorithme A*
  - Proposé en 1968 par Hart, Nilsson et Raphael

Plus court chemin

- Pourquoi A* ?
  - Djikstra trop long dans de nombreux cas.
  - Djikstra ne fait aucune hypothèse quant à la structure du graphe.

Plus court chemin

Plus court chemin

- A* = Djikstra + heuristique.

- Heuristique ?
  - Estimation du coût restant
    - Ex : Estimation de la distance restante à parcourir

- Dépendante des connaissances sur la structure du graphe

Plus court chemin

- Exemple d'heuristique :
  - Distance de Manhattan à vol d'oiseau

- Algorithme A*
  - Initialisation
    - Etiqueter tous les nœuds du graphes avec un score infini.
    - Etiqueter le nœud de départ avec un score nul
    - Ajouter tous les nœuds à la liste L.
  - Boucle
    - Choisir le nœud où la **valeur : (score(nœud) + estimation(nœud→destination))** est plus faible dans L : Nmin.
    - Si Nmin == Nœud destination → fin et remontée.
    - Pour chaque fils de Nmin :
      - Mettre à jour le score selon la formule score(Nmin) + Cout(Nmin→Voisin) à condition que le résultat soit plus faible que score(Voisin).
      - Retirer Nmin de L

Plus court chemin

- A* renvoie-t-il toujours la solution optimale ? (plus court chemin)
  - Cela dépend de l’heuristique utilisée.

- Admissibilité
  - A* est admissible quand l’heuristique utilisée ne surestime jamais le coût restant pour atteindre le nœud objectif à partir de n’importe quel nœud courant.

Plus court chemin

- Exemple d’heuristique non admissible
  - Distance en spirale …

Plus court chemin

- Limites de ces algorithmes
  - Djikstra comme A* tire partie du fait que la solution optimale au problème global est composée d’une série de solutions optimales à des sous problèmes (différentes parties du chemin). Cette propriété est essentielle lorsque l’on utilise des algorithmes issus de la programmation dynamique.

Plus court chemin