Programmation Linéaire

Objectif

Apprendre à modéliser les problèmes réels et à résoudre les programmes linéaires.

De nombreux problèmes réels peuvent être exprimés comme des programmes linéaires.

Les programmes linéaires peuvent être résolus efficacement par certains algorithmes.

Ce sont d’excellents exemples de questions pratiques dont la résolution nécessite une combinaison de méthodes algorithmiques, de mathématiques élémentaires et de bon sens.

Programmation Linéaire

Généralités

L'objectif de la programmation linéaire est de trouver la valeur optimale d'une fonction linéaire sous contraintes linéaires. La fonction à optimiser est baptisée fonction coût.

Quand se trouve-t-on dans le cadre d'un problème relevant de la programmation linéaire ?

Lorsqu'on peut modéliser un problème sous forme d'une fonction économique à maximiser dans le respect de certaines contraintes, alors on est typiquement dans le cadre de la programmation linéaire.
Soit une fonction économique ou de coût Z telle que:

```
Z = C1.X1 + C2.X2 + ... + Cn.Xn;
```

où les Xi sont des variables qui influent sur la valeur de Z, et les Ci les poids respectifs de ces variables modélisant l'importance relative de chacune de ces variables sur la valeur de la fonction économique.
Les contraintes relatives aux variables s'expriment de la façon suivante:

```
A11.X1 + A12.X2 + ... + A1n.Xn ≤ B1;
A21.X1 + A22.X2 + ... + A2n.Xn ≤ B2;
 ...;
Am1.X1 + Am2.X2 + ... + Amn.Xn ≤ Bm;
```

On verra par la suite comment revenir à cette forme lorsque que l'énnoncé du problème ne s'y prète pas directement.

Exemple

Considérons un agriculteur qui possède des terres, de superficie égale à **H** hectares, dans lesquelles il peut planter du blé et du maïs. L' agriculteur possède une quantité **Eng** d' engrais et **Ins** d' insecticide. Le blé nécessite une quantité **Enb** d'engrais par hectare et **Inb** d'insecticide par hectare. Les quantités correspondantes pour le maïs sont notées **Enm** et **Inm**.

Soit **Pb** le prix de vente du blé et **Pm** celui du maïs (par hectare). Si l'on note par **xb** et **xm** le nombre d'hectares à planter en blé et maïs, comment exprimer le fait que l'agriculteur souhaite maximiser son gain, tout en restant dans les limites de ses ressources ?

Exemple

Variables

```
xb,xm;
```

Déterminons la fonction d'économie à maximiser

```
Z = Pb × xb + Pm × xm;
```

Ennonçons l'ensemble des contraintes s'appliquant à ces variables

Contraintes de superficie

```
xb + xm ≤ H;
xb ≥ 0;
xm ≥ 0;
```

Contrainte sur la quantité d'engrais

```
Enb × xb + Enm × xm ≤ Eng;
```

Contrainte sur la quantité d'insecticide

```
Inb × xb + Inm × xm ≤ Ins;
```

Méthode de résolution graphique (instanciation)

Avant cela, instancions nos constantes ...

```
Pb = 1;
Pm = 1;
H = 5;
Enb = 2;
Enm = 1;
Inb = 1;
Inm = 2;
Eng = 4;
Ins = 3;
```

Ainsi notre fonction objectif devient

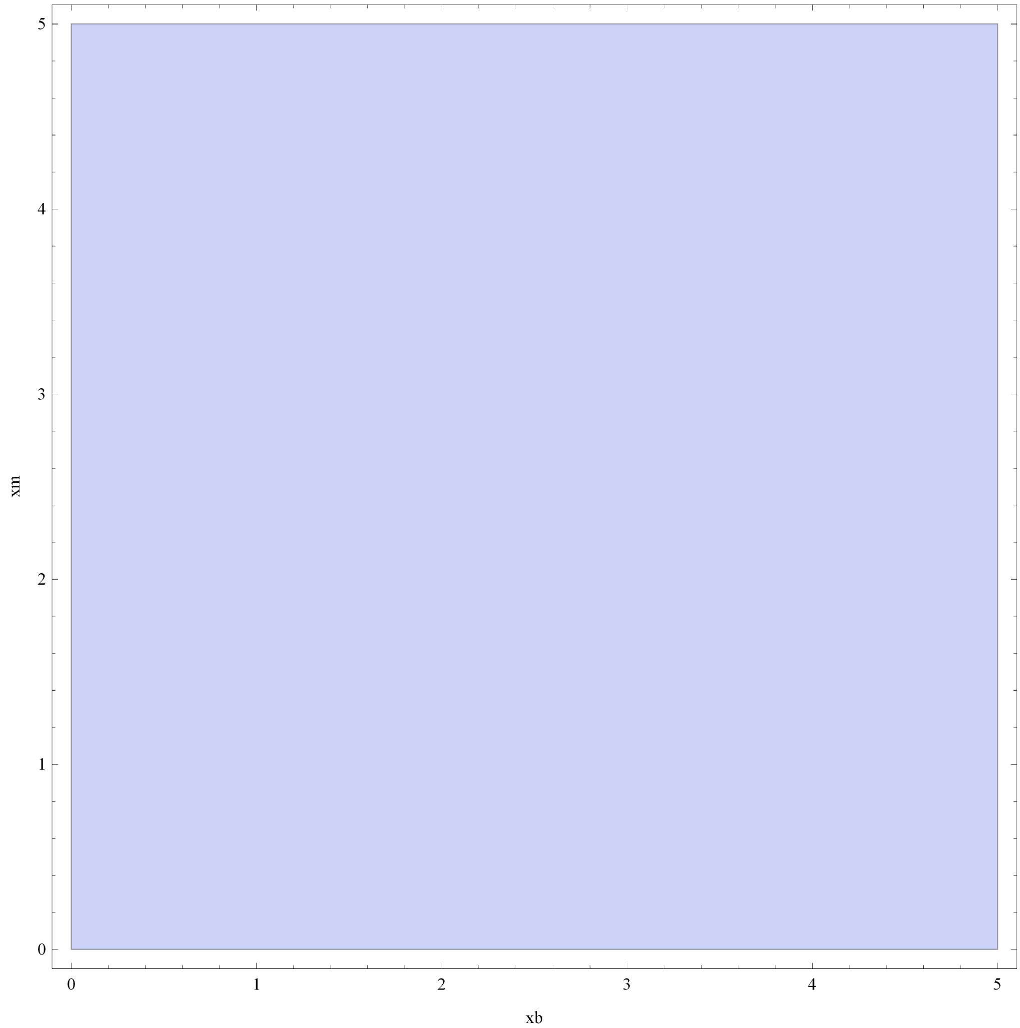
```
Z = xb + xm;
```

Et nos contraintes

```
xb + xm ≤ 5;
2xb + xm ≤ 4;
xb + 2xm ≤ 3;
xb ≥ 0;
xm ≥ 0;
```

Méthode de résolution graphique (représentation)

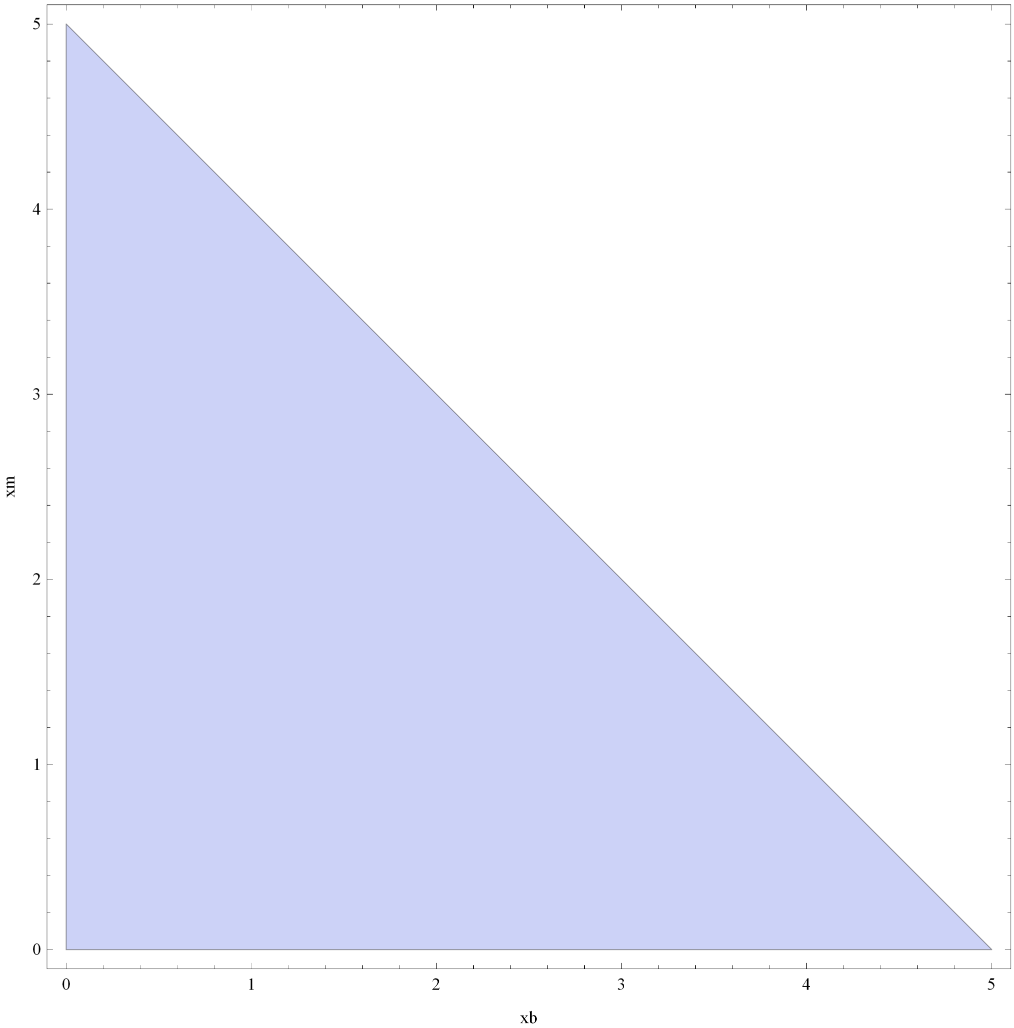
Représentons nos deux variables sur un repère orthonormé



Méthode de résolution graphique (représentation)

Supprimons les solutions ne respectant pas la contrainte

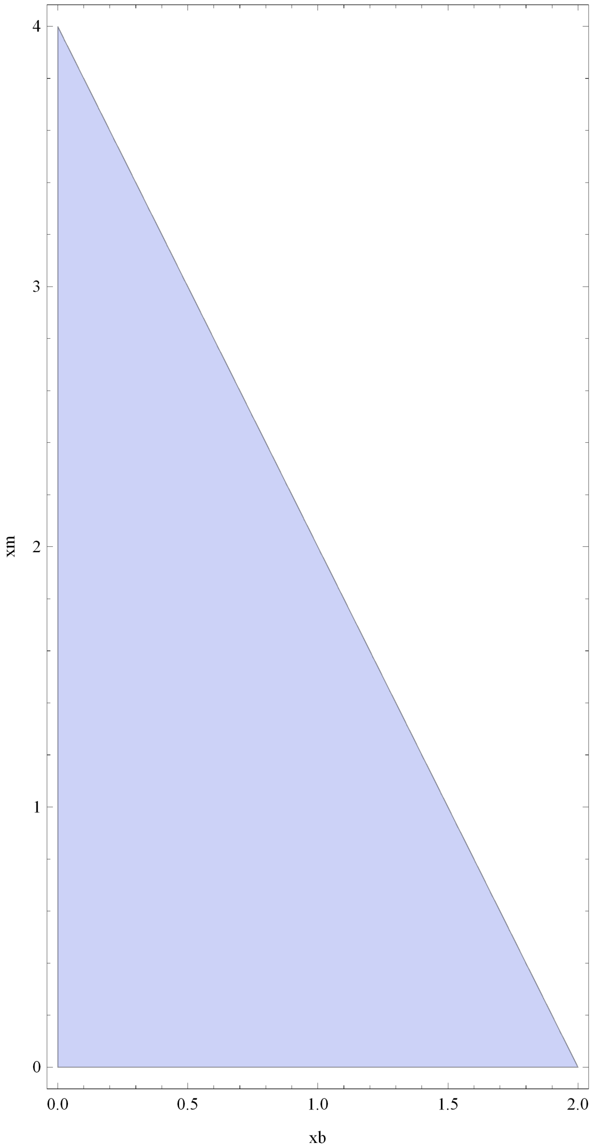
```
xb+xm ≤ 5;
```



Méthode de résolution graphique (représentation)

Supprimons les solutions ne respectant pas la contrainte

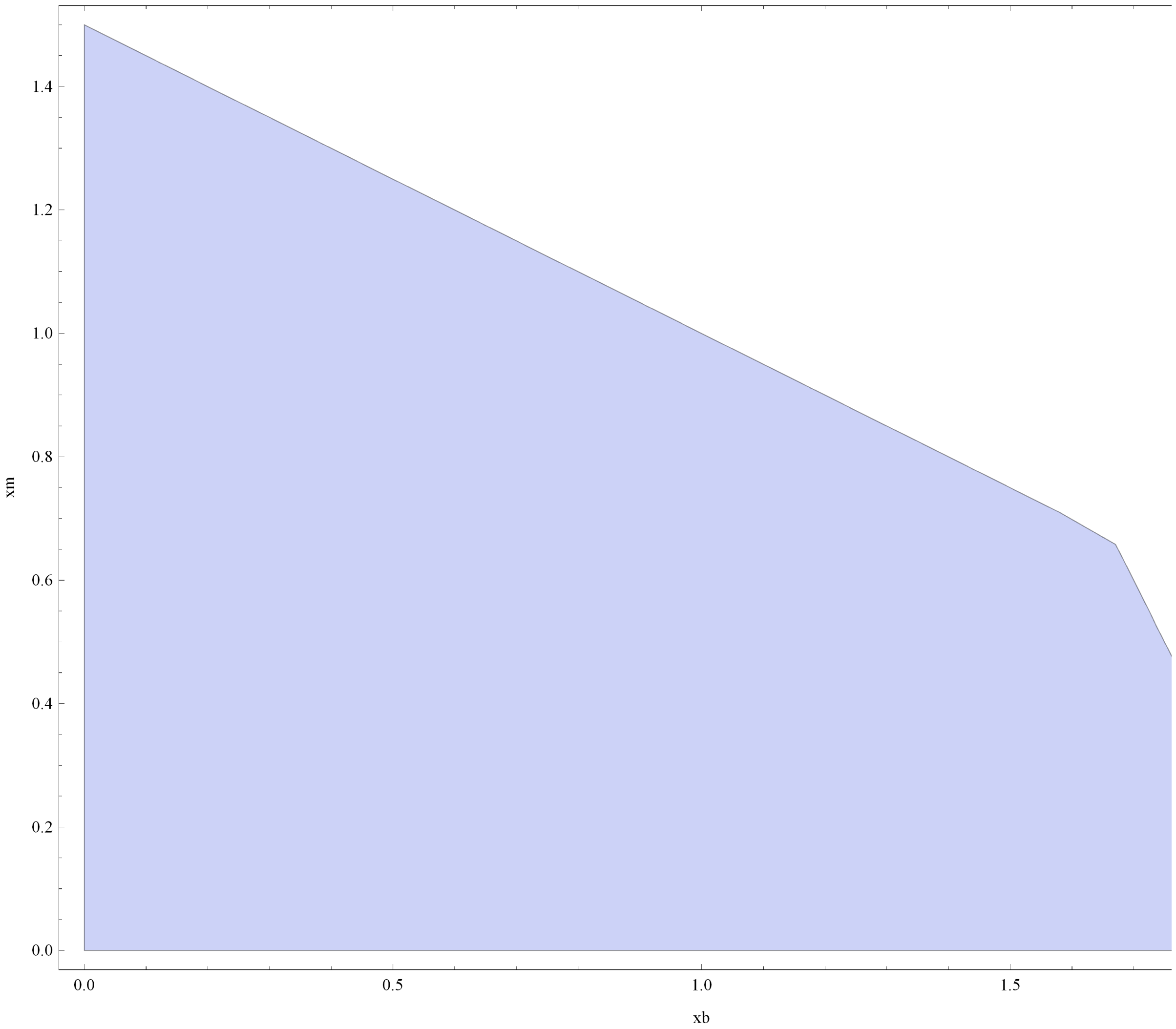
```
2xb+xm ≤ 4;
```



Méthode de résolution graphique (représentation)

Supprimons les solutions ne respectant pas la contrainte

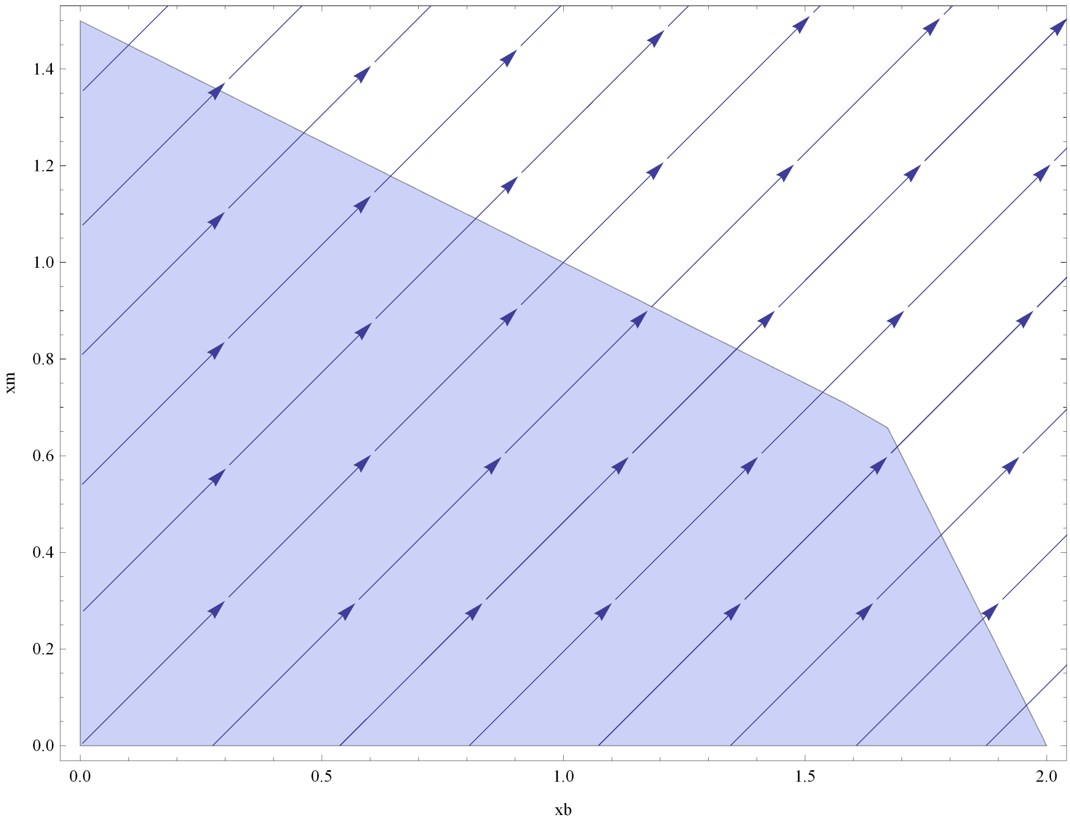
```
xb+2xm ≤ 3;
```



Méthode de résolution graphique (représentation)

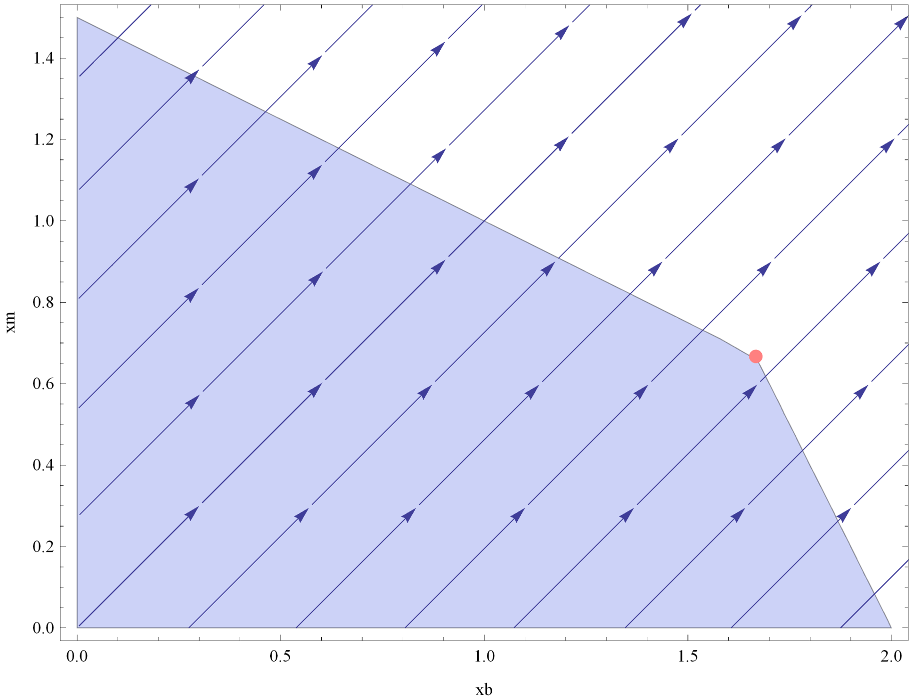
Affichons la direction vers laquelle croit le gain

```
Z = xb + xm;
```



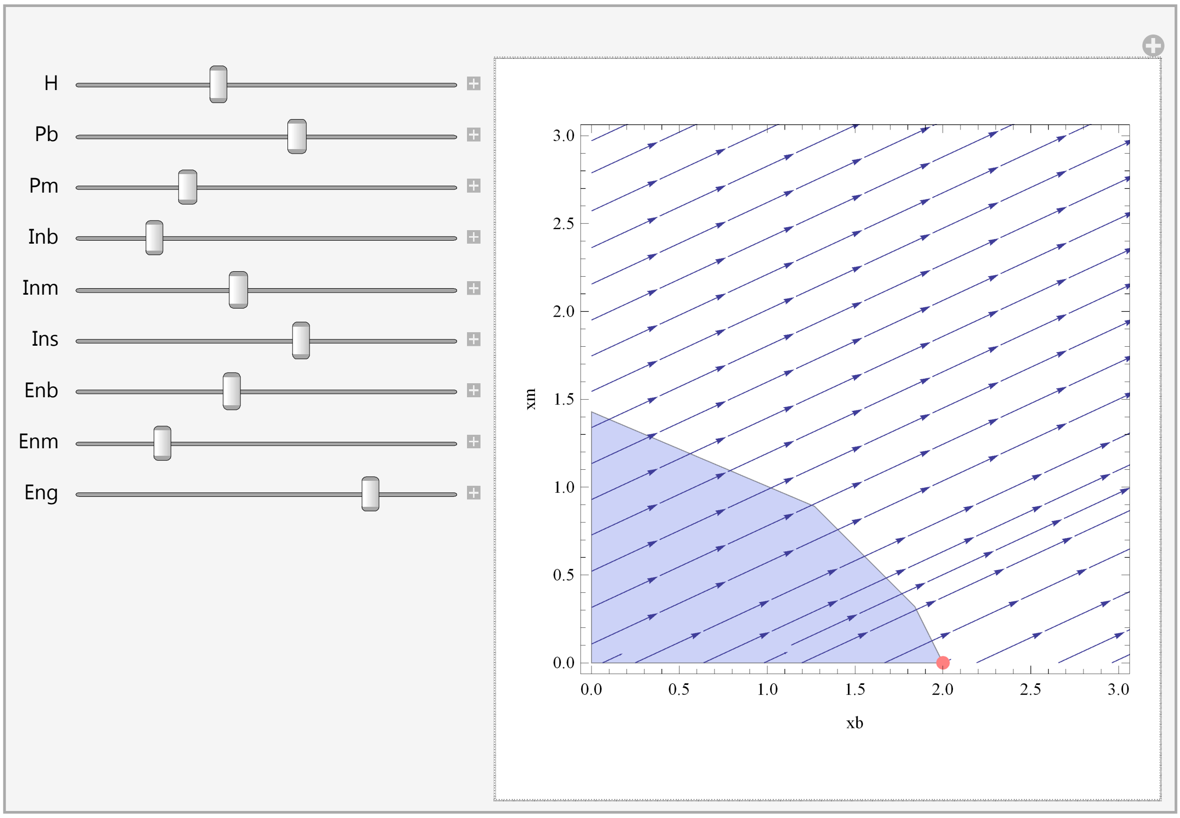
Méthode de résolution graphique (représentation)

Ainsi le gain maximum se trouve à l'extrema suivant :



Méthode de résolution graphique (représentation)

Faisons varier les constantes



Méthode graphique, résumé

2 variables

L'ensemble des points satisfaisant une équation linéaire forme une droite.

L'ensemble des points satisfaisant une inégalité linéaire forme un demi plan.

L'ensemble des solutions d'un ensemble de contraintes forme un polygone convexe.

Solution optimale (si elle existe) est un sommet du polygone (ou tous les points d'un côté dans de rares cas).

Méthode graphique, contraintes

Peu pratique à 3 variables

Quasi-impossible à 4 et plus

Méthode graphique 2ème exemple

Vous disposez de 10000 euros que vous souhaitez investir. Votre banque vous propose trois types d’investissements. Pour l’investissement A le rendement est de 9% et la somme maximum que l’on peut investir est de 4000 euros. Pour l’investissement B on peut investir jusqu’à 5000 euros, avec un rendement de 4%.
Enfin le produit C a un rendement de 8% pour un montant maximum de 5000 euros.

1. Exprimer ce problème comme un PL. Donner la solution optimale.

2. La banque change d'avis. Si vous souhaitez faire un investissement (A, B ou C) il faut y mettre la somme exacte (respectivement 4000, 5000, et 5000 euros). Mettre à jour votre modèle ; est-ce toujours un PL?

Méthode graphique : troisième exemple

Maximiser

$Z = 30\, x_1 + 3\, x_2$

sous les contraintes

$3\, x_1 + 4 x_2 \leq 12$

$7\, x_1 + 2\, x_2 \leq 14$

$x_1, x_2 \geq 0$

Méthode graphique : quatrième exemple

Un fleuriste dispose de 50 lys, 80 roses et 80 jonquilles. Il réalise ou bien des bouquets qu’il vend 40 euros comprenant 10 lys, 10 roses et 20 jonquilles, ou bien des bouquets dont il tire un prix de 50 euros qui comprennent 10 lys, 20 roses et 10 jonquilles. Comment le fleuriste doit il former les bouquets pour réaliser une recette maximale ?

Méthode graphique : cinquième exemple

Maximiser

$$Z = 40x_1 + 60x_2$$

Sous contraintes

$$2x_1 + x_2 \leqslant 70$$
$$x_1 + x_2 \leqslant 40$$
$$x_1 + 3x_2 \leqslant 90$$
$$x_1 \geq 0$$
$$x_2 \geq 0$$