Homework3

杨加佳　　　　15331354

1.1

从 DFT 和 IDFT 的公式可以看出

DFT: $$F(u,v)=\frac{1}{MN}\sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1}f(x,y)e^{-j2\pi(ux/M+vy/N)}$$

Inverse DFT: $$f(x,y)=\sum_{u=0}^{M-1}\sum_{v=0}^{N-1}F(u,v)e^{j2\pi(ux/M+vy/N)}$$

如果忽略常数项，对同一个图片操作，所得结果的实部将会是一样的。所以可以利用对同一张图片（或矩阵）分别进行 DFT 和 IDFT 操作，将结果取实部，并输出将二者进行对比。如果值相同，则两个部分都有常数项 1/$\sqrt{MN}$，否则值较小的含有常数项 1/MN。而对于图片，可以比较直观地通过亮度看出来，如果亮度一样则两个部分都有常数项 1/$\sqrt{MN}$，如果亮度不同，则暗一点的含有常数项 1/MN。

1.2

由 DFT 及 IDFT 的周期性

Periodicity

$$F(u,v)=F(u+M,v)=F(u,v+N)=F(u+M,v+N)$$

Because of $e^{-j2\pi x}=1$ and,

$$e^{-j2\pi((u+M)x/M+vy/N)}=e^{-j2\pi(ux/M+vy/N)}$$

Inverse DFT has the same property

$$f(x,y)=f(x+M,y)=f(x,y+N)=f(x+M,y+N)$$

所以无论在哪里补 0，只要补 0 数量是一样的就终究可以通过周期性进行平移得到同样的图，所以其实是一样的。

1.3.1

由

两个$M \times N$的离散函数（矩阵）$f(x, y)$和$h(x, y)$的卷积定义为

$$f(x,y)*h(x,y)=\sum_{m=0}^{M-1}\sum_{n=0}^{N-1}f(m,n)h(x-m,y-n)$$

滤波操作 f(x,y)*h(x,y) 可以写成

1/4 [h(x - 1, y) + h(x + 1, y) + h(x, y - 1) + h(x, y + 1)]

又由

◆ Translation

Translation in the image plane

$$f(x-x_0, y-y_0) \Leftrightarrow F(u, v)\, e^{-j2\pi(u_0x/M+v_0y/N)}$$

及卷积定理

可得 F(u,v)*H(u,v) = 1/2 * F(u,v)[cos(2πu/M) + cos(2πv/N)]

所以等价的滤波器为

H(u,v) = 1/2[cos(2πu/M) + cos(2πv/N)]

1.3.2

低通滤波器。

首先将$\frac{1}{2}[\cos(\frac{2\pi u}{M})+\cos(\frac{2\pi v}{N})]$平移为以下形式

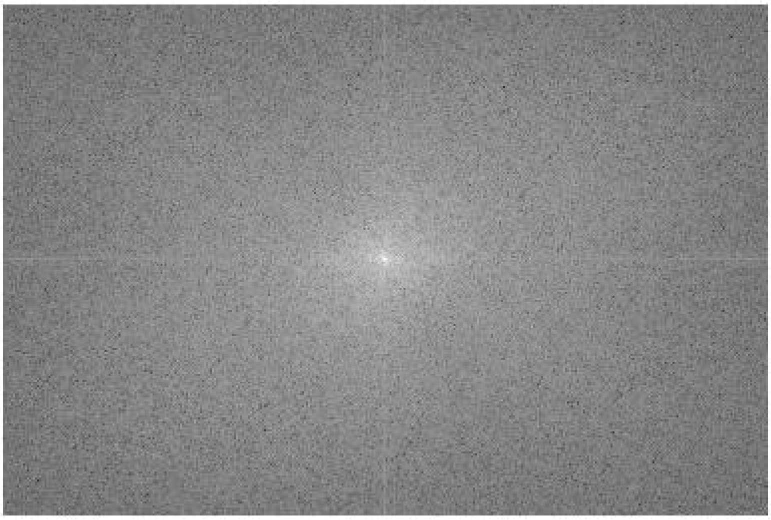
$$\frac{1}{2}[\cos(\frac{2\pi(u-\frac{M}{2})}{M})+\cos(\frac{2\pi(v-\frac{N}{2})}{N})]$$

观察此式，当 u 从 0 增加到 M/2， v 从 0 增加到 N/2 时，式子的值增大；

而当 u 从 M/2 减少到 0，v 从 N/2 减少到 0 时，式子的值减小。

所以空间中的图像是一个周围低，中间高的图像，即为低通滤波器的图像。

2.2.1



2.2.2

2.2.3

傅里叶变换与反变换其实套公式用循环进行不断的求和就行。频谱图的话需要先对原图进行中心化，然后再进行傅里叶变换，然后取模，并进行一个 log 变换，最后 scaling 便能得到如图的频谱图。

过程中其实大家都发现如果用 4 重循环来进行傅里叶变换操作会十分耗时，所以可以根据书本上的这条公式，将 4 重循环拆分成 2 个 3 重循环，计算时间就会大大减少。

$$F(u,v) = \sum_{x=0}^{M-1} e^{-j2\pi ux/M} \sum_{y=0}^{N-1} f(x,y)\, e^{-j2\pi vy/N}$$

$$= \sum_{x=0}^{M-1} F(x,v)\, e^{-j2\pi ux/M}$$

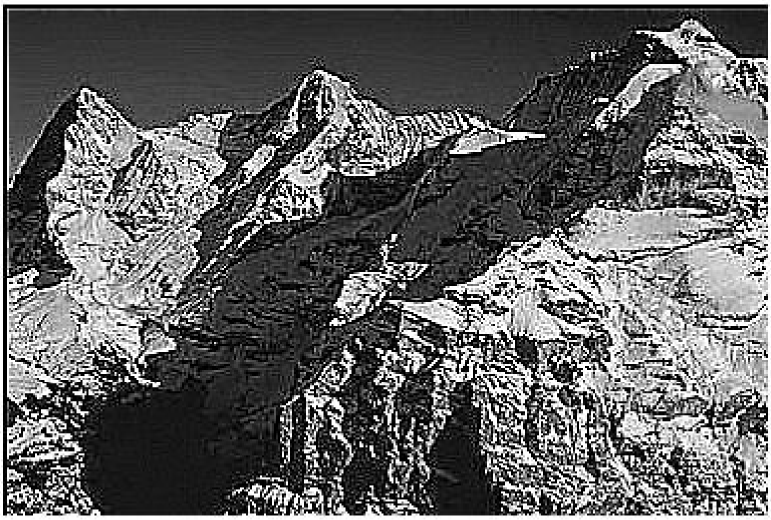
$$F(x,v) = \sum_{y=0}^{N-1} f(x,y)\, e^{-j2\pi vy/N}$$

2.4.1 3 × 3

7×7

11×11

2.4.2



2.4.3

根据卷积定理

卷积定理

$F(u,v)$—$f(x,y)$的傅里叶变换

$H(u,v)$—$h(x,y)$的傅里叶变换

则有

$$f(x,y)*h(x,y) \Leftrightarrow F(u,v)\cdot H(u,v)$$
$$f(x,y)h(x,y) \Leftrightarrow F(u,v)*H(u,v)$$

空间域的滤波操作，可以将原图和滤波器通过傅里叶变换投影的频域，将两个结果相乘再傅里叶反变换到空间域，便可得到基本相同的结果。

为了解决缠绕误差的问题，在对原图和滤波器扩展补 0 的时候，遵循 $P \geqq A+C+1$，$Q \geqq B+D+1$ 的不等式（这里取了等号成立）。延拓后，分别对延拓后的原图和滤波器进行傅里叶变换操作，并将结果进行点乘，最后得到一个复数矩阵，再对其进行傅里叶反变换操作后，取实部，便能得到想要的结果。在进行锐化的时候，还要将结果与同样进行了傅里叶变换及反变换的原图相加，得到锐化后的结果。