

Регулярные графы

Пырзу Виталий

15 октября 2019 г.

Часть А

Сосчитаем общее число вызовов *Push* и *Relable* в алгоритме. Поделим все вызовы *Push* на насыщающие (см. определение с лекции, там же доказано, что их $O(|V||E|)$). Так же понятно, что *Discharge* совершает не более одного ненасыщающего *Push* (так как вызов ненасыщающего *Push* делает вершину, из которой он совершался, ненасыщенной). Сосчитаем вызовы *Discharge* в течении работы алгоритма. Ясно, что их в $|V| - 2$ раз больше, чем итераций цикла. Итераций, внутри которых происходит *Relable* всего $O(|V|^2)$, так как суммарно столько *Relable* может сделать алгоритм (лемма с лекции). Итерации, внутри которых не происходит *Relable* уменьшают потенциал $\Phi = \max\{h(v) \mid v \in V \setminus \{s, t\}, v \text{ — избыточная}\}$, так как все избыточные вершины максимальной высоты h перестанут быть избыточными, а новых избыточных вершин такой высоты не появится, так как высота вершин не изменяется по предположению, а вызовов от вершин большей высоты, чем h не будет (они не избыточные по определению потенциала). Поскольку потенциал никогда не бывает отрицательным, а увеличиться он может только на $O(|V|^2)$, так как высота любой вершины увеличивается максимум на $O(|V|)$, то и уменьшиться он может не больше, чем на $O(|V|^2)$. Значит, всего итераций $O(|V|^2)$, а вызовов *Discharge* $O(|V|^3)$.

Значит, суммарно алгоритм сделает $O(|V|^3)$ операций *Push*, выполняющихся за $O(1)$ и $O(|V|^2)$ операций *Relable*, выполняющихся за $O(|V|)$, а так же $O(|V|^3)$ операций по инкременту цикла и перехода к новому ребру в *Discharge*.

Часть В

Рассмотрим последовательность вызовов *Discharge*, выполненных между двумя вызовами *Discharge* для некоторой вершины v . Сосчитаем их количество: последовательностей, во время которых вызывался *Relable* всего $O(|V|^2)$, так как суммарно столько вызовов *Relable* сделал алгоритм. Рассмотрим последовательность, внутри которой *Relable* не вызывался, а значит, высоты не менялись. Покажем, что в конце этой последовательности (последнего вызова *Discharge* для v) потенциал уменьшился. Понятно, что все переполненные вершины максимальной высоты всегда лежат в очереди. Значит, внутри этой последовательности мы их точно обработаем (второй раз вершина v попадет в конец очереди и будет обработана после них), и они перестанут быть переполненными. Понятно, что новых переполненных вершин максимальной высоты и более не появится (доказано в первом пункте). А значит, потенциал стал меньше, и таких последовательностей $O(|V|^2)$. Значит, вызовов *Discharge* для каждой вершины $O(|V|^2)$ (между последовательностями есть один такой вызов), а всего вызовов *Discharge* $O(|V|^3)$. Аналогично пункту 1 ограничим число вызовов *Push* числом вызовов *Discharge* и тогда очевидно, что алгоритм работает за $O(|V|^3)$.