# Регулярные графы

Пырэу Виталий

15 октября 2019 г.

Пусть $n$ — число вершин в правой доле (оно равно числу вершин в левой, так как иначе совершенного паросочетания нет). Добавим в $G$ фиктивные исток $s$ и сток $t$. Соединим вершины первой доли с истоком (все ребра построенной сети имеют вес 1), а вершины второй доли со стоком. Все ребра двудольного графа присутствуют в сети. Покажем, что любой разрез в этой сети имеет пропускную способность не менее, чем $n$.

Фиксируем произвольный разрез $(S, T)$.

Обозначим через $L_s, L_t$ вершины левой доли, лежащие в $S$ и $T$ соответственно (аналогично определяется $R_s, R_t$). Рассмотрим ребра, выходящие из вершин множества $L_s$. Пусть $N$ — множество вершин, смежных каким-то вершинам $L_s$. Поскольку граф $d$-регулярный, то вершины из $N$ и $L_s$ связаны $|L_s|d$ ребрами. Значит, вершин в $N$ не менее, чем $L_s$ (в противном случае, в $N$ есть вершина степени $> d$ по принципу Дирихле). Значит, в $N \cap R_t$ лежит не менее, чем $|L_s| - |R_s|$ вершин. Все ребра, соединяющие $L_s$ и $N \cap R_t$ попадают в разрез и их как минимум $|L_s| - |R_s|$. Еще в разрез попадают $|L_t|$ ребер, выходящих из истока и $|R_s|$ ребер, входящих в сток. Всего этих ребер $\geq n$. Значит, поток величины $n$ (величина максимального потока) точно есть (любой разрез имеет величину $\geq n$ и есть разрез величины $n$ — например, $S = \{s\}$, а $T$ — все остальное). Запустим, не теряя общности, алгоритм Диница для его нахождения (это необходимо для того, чтобы поток, проходящий по каждому ребру был либо 0, либо 1, а не дробный). Тогда по потоку можно восстановить паросочетания — в него войдут только насыщенные ребра. Это паросочетание совершенное.