Чисельні методи
Лабораторна робота №3
Варіант №5

Демедюк Віталій

30 квітня 2021 р.

Зміст

1 Задача №1

1.1 Умова

Методом Якобі розв'язати систему рівнянь.

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 10 \\ 7 \\ 23 \end{pmatrix}$$

1.2 Теоретичні відомості

Припустімо, що діагональні коефіцієнти невиродженої матриці A ненульові ($a_{ii} \neq 0$). Якщо деякі $a_{ii} = 0$, то цього можна досягти, переставивши деякі рядки чи стовпці матриці. розділивши i-*те* рівняння на a_{ii}, отримаємо таку СЛАР:

$$x_i = -\sum_{j=1}^{i-1} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j - \sum_{j=i+1}^{n} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j + \frac{b_i}{a_{ii}}, i = \overline{1, n}.$$

Задамо якесь початкове наближення $\overline{x}^0 = (x_1^0, ..., x_n^0)$. Наступні наближення обчислимо за формулами:

$$x_i^{k+1} = -\sum_{j=1}^{i-1} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j^k - \sum_{j=i+1}^{n} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j^k + \frac{b_i}{a_{ii}}, i = \overline{1, n}, k = 0, 1, ...$$

Метод збігається, тобто $\lim\limits_{k \to \infty} \|\overline{x}^k - \overline{x}\| = 0$, якщо виконуються умови діагональної переваги матриці A: $|a_{ii}| \geqslant \sum\limits_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}|, i = \overline{1, n}$. Якщо ж виконуються нерівності $q|a_{ii}| \geqslant \sum\limits_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}|, i = \overline{1, n}, q < 1$, то правдива така оцінка точності:

$$\|\overline{x}^k - \overline{x}\| \leqslant \frac{q^k}{1-q} \|\overline{x}^0 - \overline{x}^1 1\|$$

Ітерації виконують, поки не буде отримано потрібну кількість цифр в компонентах розв'язку чи до виконання умови $\frac{q^k}{1-q} < \varepsilon$

Вибір останньої умови пояснюється тим, що в разі її виконання для $\overline{x}^0 = 0$ моємо оцінку

$$\delta(\overline{x}) \leqslant \frac{\|\overline{x}^k - \overline{x}\|}{\|\overline{x}\|} \leqslant \frac{q^k}{1-q} < \varepsilon$$

1.3 Необхідні обчислення

Перевіряємо, чи виконується умова діагональної переваги нашої матриці.

$$a_{11} \geqslant a_{12} + a_{13} + a_{14}$$
$$4 \geqslant 2 = 0 + 1 + 1$$
$$a_{22} \geqslant a_{21} + a_{23} + a_{24}$$
$$3 \geqslant 1 = 0 + 0 + 1$$
$$a_{33} \geqslant a_{31} + a_{32} + a_{34}$$
$$2 \geqslant 1 = 1 + 0 + 0$$
$$a_{44} \geqslant a_{41} + a_{42} + a_{43}$$
$$5 \geqslant 2 = 1 + 1 + 0$$

Умова виконується!

1.4 Результат роботи програми

Вивід програми:

```
Jacobi method
4x_1 + x_3 + x_4 = 11
3x_2 + x_4 = 10
1x_1 + 2x_3 = 7
1x_1 + x_2 + 5x_4 = 23
Result:
x_1 = 1 , x_2 = 2 , x_3 = 3 , x_4 = 4.
```

2 Задача №2

Методом Зейделя розв'язати систему рівнянь.

2.1 Умова

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 6 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 18 \\ 13 \\ 17 \end{pmatrix}$$

2.2 Теоретичні відомості

Якщо в формулі методу Якобі обчислення наступного приближення використати вже відомі нові значення x_j^{k+1}, $j = \overline{1, i-1}$, то отримаємо формулу

$$x_i^{k+1} = -\sum_{j=1}^{i-1} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j^{k+1} - \sum_{j=i+1}^{n} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j^{k} + \frac{b_i}{a_{ii}}, i = \overline{1, n}, k = 0, 1, ...$$

Достатні умови збіжностім методу Зеделя такі самі, як і для методу Якобі. Крім того, метод Зейделя збігається, якщо $A^T = A \geq 0$. Умова невід'ємності симетричної матриці A означає, що невід'ємні її голові мінори.

Замінивши порядок обчислення компонент, отримаємо ще одну формулу методу Зейделя:

$$x_i^{k+1} = -\sum_{j=1}^{i-1} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j^{k} - \sum_{j=i+1}^{n} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j^{k+1} + \frac{b_i}{a_{ii}}, i = \overline{1, n}, k = 0, 1, ...$$

2.3 Необхідні обчислення

Перевіряємо, чи виконується умова діагональної переваги нашої матриці.

$$a_{11} \geqslant a_{12} + a_{13} + a_{14}$$

$$3 \geqslant 1 = 0 + 0 + 1$$

$$a_{22} \geqslant a_{21} + a_{23} + a_{24}$$

$$6 \geqslant 2 = 0 + 2 + 1$$

$$a_{33} \geqslant a_{31} + a_{32} + a_{34}$$

$$3 \geqslant 2 = 0 + 2 + 0$$

$$a_{44} \geqslant a_{41} + a_{42} + a_{43}$$

$$4 \geqslant 1 = 1 + 0 + 0$$

Умова виконується!

2.4 Результат роботи програми

Вивід програми:

```
Seidel method
3x_1 + x_4 = 7
6x_2 + 2x_3 = 18
2x_2 + 3x_3 = 13
1x_1 + 4x_4 = 17
Result:
x_1 = 1 , x_2 = 2 , x_3 = 3 , x_4 = 4.
```