Чисельні методи
Лабораторна робота №2
Варіант №5

Демедюк Віталій

31 березня 2021 р.

Зміст

1 Задача №1

1.1 Умова

Методом Гаусса розв'язати систему рівнянь.

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 8 \\ 4 & -6 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 \\ 65 \\ -3 \\ 32 \end{pmatrix}$$

1.2 Теоретичні відомості

Розглянемо задачу:

$$Ax = b$$

де A - матриця з розмірності $n \times n$, $\vec{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)^T$ – шуканий вектор, $\vec{b} = (b_1, b_2, ..., b_n)^T$ – заданий вектор правих частин. Припустимо, що $detA \neq 0$, тобто існує єдиний розв'язок.

Запишемо рівняння у вигляді

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

Перший крок методу Гаусса (його ще називають матодом виключення невідомих) полягає у виключені невідомого x_1 з усіх рівнянь починаючи з другого, тобто в переході до системи

$$\begin{cases} x_1 + a_{12}^{(1)}x_2 + ... + a_{1n}^{(1)}x_n = b_1^{(1)} \\ \qquad a_{22}^{(1)}x_2 + ... + a_{2n}^{(1)}x_n = b_2^{(1)} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \qquad a_{n2}^{(1)}x_2 + ... + a_{nn}^{(1)}x_n = b_n^{(1)} \end{cases}$$

Продовжуючи цей процес виключення, отримаємо СЛАР з верхньотрикутною матрицею вигляду

$$\begin{cases} x_1 + a_{12}^{(1)}x_2 + ... + a_{1n}^{(1)}x_n = b_1^{(1)} \\ \qquad\quad x_2 + ... + a_{2n}^{(2)}x_n = b_2^{(2)} \\ \dotfill \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\quad x_n = b_n^{(n)} \end{cases}$$

Коефіцієнти системи обчислюють за формулами

$$a_{kj}^{(k)} = \frac{a_{kj}^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}}, b_k^{(k)} = \frac{b_k^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}}, k = \overline{1,n}, j = \overline{k+1,n};$$

$$a_{ij}^{(k)} = a_{ij}^{(k-1)} - a_{ik}^{(k-1)}a_{kj}^{(k)}, b_i^{(k)} = b_i^{(k-1)} - a_{ik}^{(k-1)}b_k^{(k)}, k = \overline{1,n-1}, i = \overline{k+1,n}, j = \overline{k+1,n}.$$

за умови $a_{kk}^{(k-1)} \neq 0$.

СЛАР з верхньотрикутною матрицею можна розв'язати за формулами

$$x_n = b_n^{(n)}, x_i = b_i^{(i)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}^{(i)}x_j, i = \overline{n-1,1}$$

1.3 Необхідні обчислення

$$detA = \begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 8 \\ 4 & -6 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 3 & 2 \end{vmatrix} = -450$$

$detA \neq 0$, отже система має єдиний розв'язок.

1.4 Результат роботи програми

Вивід програми:

```
Gaussian elimination
5x_1 + 2x_2 + x_3 = 14
1x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 8x_4 = 65
4x_1 - 6x_2 + x_3 = -3
5x_1 + 3x_3 + 2x_4 = 32
Result:
x_1 = 1 , x_2 = 2 , x_3 = 5 , x_4 = 6.
```

2 Задача №2

2.1 Умова

Методом прогонки розв'язати систему рівнянь.

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 4 & 1 & 5 \\ 0 & 5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ 37 \\ 30 \end{pmatrix}$$

2.2 Теоретичні відомості

Метод прогонки дозволяє розв'язувати СЛАР з тридіагональною матрицею. Система має такий вигляд

$$\begin{cases} b_1x_1 + c_1x_2 = d_1 \\ a_ix_{i-1} + b_ix_i + c_ix_{i+1} = d_i, i = \overline{2, n-1} \\ a_nx_{n-1} + b_nx_n = d_n \end{cases}$$

У матричному вигляді система має такий вигляд:

$$\begin{pmatrix} b_1 & c_1 & 0 & 0 & .... & 0 & 0 & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 & 0 & .... & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & b_2 & c_2 & .... & 0 & 0 & 0 \\ . & . & . & . & .... & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & .... & a_{n-1} & b_{n-1} & c_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & .... & 0 & a_n & b_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ ... \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ ... \\ d_{n-1} \\ d_n \end{pmatrix}$$

Розв'язок проводиться в два кроки, як і в методі Гауса, прямому, та зворотному. В прямому ході ми обчислюємо:

$$c'_i = \begin{cases} \dfrac{c_i}{b_i}; i = 1 \\ \dfrac{c_i}{b_i - a_ic'_{i-1}}; i = \overline{2, n-1} \end{cases}$$

$$d'_i = \begin{cases} \dfrac{d_i}{b_i}; i = 1 \\ \dfrac{d_i - a_id'_{i-1}}{b_i - a_ic'_{i-1}}; i = \overline{2, n-1} \end{cases}$$

Тепер розв'язок знаходимо зворотнім ходом:

$$x_n = d'_n$$

$$x_i = \frac{d_i - c_i x_{i+1}}{b_i}$$

2.3 Необхідні обчислення

$$detA = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 4 & 1 & 5 \\ 0 & 5 & 2 \end{vmatrix} = -78$$

$detA \neq 0$, отже система має єдиний розв'язок.

2.4 Результат роботи програми

Вивід програми:

```
Tridiagonal matrix algorithm
2x_1 + 4x_2 = 18
4x_1 + x_2 + 5x_3 = 33
5x_2 + 2x_3 = 30
Result:
x_1 = 1 , x_2 = 4 , x_3 = 5.
```