Чисельні методи
Лабораторна робота №4
Варіант №5

Демедюк Віталій

31 травня 2021 р.

Зміст

1 Задача №1 **3**
1.1 Умова . . . 3
1.2 Теоретичні відомості . . . 3
1.3 Необхідні обчислення . . . 3
1.4 Результат роботи програми . . . 4

2 Задача №2 **5**
2.1 Умова . . . 5
2.2 Теоретичні відомості . . . 5
2.3 Необхідні обчислення . . . 5

3 Задача №3 **6**
3.1 Умова . . . 6
3.2 Теоретичні відомості . . . 6
3.3 Необхідні обчислення . . . 6
3.4 Результат роботи програми . . . 6

1 Задача №1

1.1 Умова

Формулою трапецій знайти інтеграл з точністю 0.001:

$$\int_0^{2.5} (x^4 + 2x^2 + x)\,dx$$

1.2 Теоретичні відомості

Якщо у квадратурній формулі замкненого типу взяти $n = 1$, то отримаємо формулу трапеції.

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{f(a) + f(b)}{2}(b - a),$$

з оцінкою залишкового члена:

$$|R(f)| \leq \frac{M_2(b-a)^3}{12}$$

Тоді складена формула з оцінкою залишкового члена:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx h(\frac{f(x_0)}{2} + f(x_1) + \cdots + f(x_{n-1}) + \frac{f(x_n)}{2}))),$$

$$|R(f)| \leq \frac{M_2(b-a)h^2}{12}$$

Алгебраїчний степінь точності квадратурної формули дорівнює 1. Порядок точності складеної формули трапеції – 2, а на одному проміжку – 3.

1.3 Необхідні обчислення

$$\varepsilon = 0.001$$

$$f(x) = x^4 + 2x^2 + x$$

$$f''(x) = 12x^2 + 4$$

$$M_2 = \max_{x \in [0;2.5]} |12 * x^2 + 4| = 79$$

$$h \le \sqrt{\frac{12\varepsilon}{M_2(b-a)}} = \sqrt{\frac{12 \cdot 0.001}{79 \cdot 2.5}} \approx 0.00779 \text{ – оцінка кроку}$$

$$\left\lceil \frac{b-a}{h} \right\rceil = \left\lceil \frac{2.5}{0.0779} \right\rceil = 321 = n \text{ – кількість інтервалів}$$

Візьмемо із запасом $n = 50$.

1.4 Результат роботи програми

Вивід програми:

```
Trapezoidal rule:
Integral of x^4 + 2*x^2 + x from 0 to 2.5 equal 33.0733
```

2 Задача №2

2.1 Умова

Методом простої ітерації розв'язати систему рівнянь:

$$\begin{cases} \sin(x) + 2y = 1.6, \\ \cos(y-1) = 1; \end{cases}$$

2.2 Теоретичні відомості

Метод Ньютона.

Ліанерізуючи рівняння $\overline{F}(\overline{x}) = 0$ в околі наближення до розв'язку $\overline{x}$, отримаємо систему лінійних рівнянь відносно нового наближення $\overline{x}^{k+1}$:

$$\overline{F}\left(\overline{x}^k\right) + \overline{F'}\left(\overline{x}^k\right)\left(\overline{x}^{k+1} - \overline{x}^k\right) = \overline{0}.$$

Алгоритм розв'язання рівняння:

1) задаємо початкове наближення $\overline{x}^0$;

2) обчислимо матрицю Якобі $A_k\overline{z}^k = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_i}(\overline{x}^k)\right)_{i,j=1}^n$;

3) розв'язати СЛАР $A_k\overline{z}^k = \overline{F}\left(\overline{x}^k\right)$;

4) обчислити нове наближення $\overline{x}^{k+1} = \overline{x}^k - \overline{z}^k$;

5) перевірити умову $||\overline{z}^k|| < \varepsilon$; якщо її виконано, припинити процес, а ні, то повторити обчислення, починаючи з п.2).

2.3 Необхідні обчислення

$$\overline{F}(\overline{x}) = \begin{pmatrix} \sin(x) + 2y - 1.6 \\ \cos(y-1) - 1 \end{pmatrix}$$

$$A_k = \begin{pmatrix} \cos(x) & 2 \\ 0 & -sin(y-1) \end{pmatrix}$$

$$\overline{x}^0 = (1, 0)$$

Вивід програми:

```
Solve equation system {sin(x) + 2*y - 1.6 = 0, cos(y - 1) - 1 = 0}
x = -0.411516
y = 1
```

3 Задача №3

3.1 Умова

Степеневим методом із точністю 10^{-3} знайти максимальні власні значення матриці:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

3.2 Теоретичні відомості

Алгоритм відшукання λ_1 – найбільшого власного значення, $\overline{x}_1$ степеневим методом за формулою скалярних добутків із нормуванням $\overline{x}^n$ має такий вигляд:

1) задати $\overline{x}^0$;

2) для $k = 0, 1 \cdots$ обчислити $\overline{e}^k = \frac{\overline{x}^k}{\|\overline{x}^k\|}, \overline{x}^{k+1} = A\overline{e}^k$,
$\mu_k = \left(\overline{x}^{k+1}, \overline{e}^k\right)$

3) продовжити процес до виконання умови $|\mu_N - \mu_{N-1}| < \varepsilon$, де ε – задана точність.

Тоді $\lambda_1 \approx \mu_N, \overline{x}_1 \approx \overline{e}^N$.

3.3 Необхідні обчислення

$\overline{x}^0 = (0, 0, 0)$

3.4 Результат роботи програми

Вивід програми:

```
Maximal eigenvalues:
1 2 3
2 3 4
3 4 5
Maximal eigenvalues equal 9.62348
```