Чисельні методи
Лабораторна робота №1
Варіант №5

Демедюк Віталій

28 лютого 2021 р.

Зміст

1 Задача №1

1.1 Умова

Знайти мінімальний від'ємний розв'язок $x^3-6x^2+5x+12=0$ методом релаксації.

1.2 Теоретичні відомості

Якщо в методі простої ітерації вибрати $\Psi(x) = \tau = const$, то ми отримаємо метод релаксації, формула якого має вигляд $x_{n+1} = x_n + \tau f(x_n)$, $n = 0, 1, 2, \cdots$

Цей метод збігається, якщо $-2 < \tau f'(x) < 0$.

Якщо в якомусь околі кореня виконуються умови $f'(x) < 0$, $0 < m_1 < |f'(x)| < M_1$, то метод релаксації збігається для $\tau \epsilon \left(0; \frac{2}{M_1}\right)$.

Збіжність найкраща за умови:

$$\tau = \tau_{\text{опт}} = \frac{2}{m_1 + M_1}$$

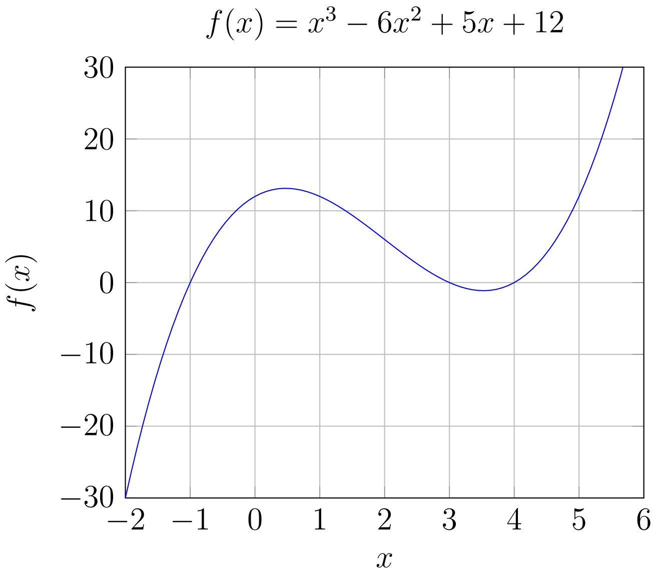
З такого вибору τ для похибки $z_n = x_n - x^*$ правдива оцінка $|z_n| < q^n |z_0|, n = 0, 1, 2, \cdots$, де $q = \frac{M_1 - m_1}{M_1 + m_1}$.

Кількість ітерацій, які потрібно виконати для відшукання розв'язку з точністю ε, можна визначити з нерівності:

$$n \geqslant \left[\frac{\ln\left(\frac{|z_0|}{\varepsilon}\right)}{\ln\left(\frac{1}{q}\right)} \right] + 1$$

Якщо виконується умова $f'(x) > 0$, то формулу ітераційного методу потрібно записати у вигляді $x_{n+1} = x_n - \tau f(x_n)$

1.3 Графік функції



1.4 Необхідні обчислення

$f'(x) = (x^3 - 6x^2 + 5x + 12)' = 3x^2 - 12x + 5$

На графіку функції $f(x)$ бачимо, що рівняння має 3 розв'язки. Перший в околі $(-2, 0)$, другий в околі $(2, 3.5)$ та третій в околі $(3.6, 5)$.

Перший корінь: в околі $(-2, 0)$ $f'(x) > 0$ та $0 < 5 < |f'(x)| < 41$. За формулою:

$$\tau = \tau_{\text{опт}} = -\frac{2}{5 + 41} = -\frac{2}{46} \approx -0.043$$

. Виберемо $x_0 = 0$.

Другий корінь: в околі $(2, 3.5)$ $f'(x) < 0$ та $0 < 0.25 < |f'(x)| < 7$. За формулою:

$$\tau = \tau_{\text{опт}} = \frac{2}{0.25 + 7} = \frac{2}{7.25} \approx 0.28$$

. Виберемо $x_0 = 2$.

Третій корінь: в околі $(3.6, 5)$ $f'(x) > 0$ та $0 < 0.68 < |f'(x)| < 20$. За формулою:

$$\tau = \tau_{\text{опт}} = -\frac{2}{0.68 + 20} = -\frac{2}{20.68} \approx -0.097$$

. Виберемо $x_0 = 5$.

1.5 Результат роботи програми

Вивід програми:

```
x*0 = -1
x*1 = 3
x*2 = 4
Min negative solution: -1
```

Лог-файл:

```
x0 = 0
x1 = -0.516000
x2 = -0.846458
x3 = -0.969536
x4 = -0.995377
x5 = -0.999345
x6 = -0.999908
x7 = -0.999987
x8 = -0.999998
x9 = -1.000000
x10 = -1.000000
------------------------------
x0 = 2.000000
x1 = 3.680000
x2 = 3.394857
x3 = 3.100821
x4 = 2.996727
x5 = 3.000402
x6 = 2.999952
x7 = 3.000006
x8 = 2.999999
x9 = 3.000000
------------------------------
x0 = 5.000000
x1 = 3.836000
x2 = 3.900314
x3 = 3.942975
x4 = 3.968757
x5 = 3.983345
x6 = 3.991262
x7 = 3.995455
```

```
x8 = 3.997647
x9 = 3.998785
x10 = 3.999374
x11 = 3.999677
x12 = 3.999834
x13 = 3.999914
x14 = 3.999956
x15 = 3.999977
x16 = 3.999988
x17 = 3.999994
x18 = 3.999997
x19 = 3.999998
x20 = 3.999999
x21 = 4.000000
x22 = 4.000000
x23 = 4.000000
```

2 Задача №2

2.1 Умова

Знайти максимальний додатний розв'язок $x^3+3x^2-x-3=0$ методом Ньютона

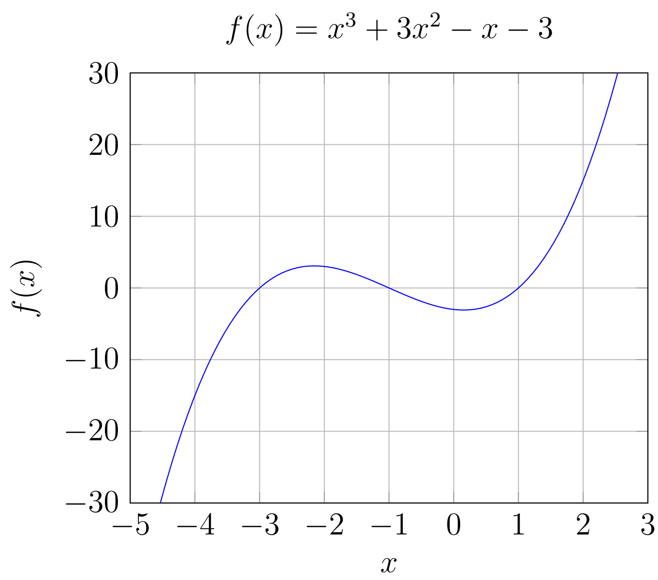
2.2 Теоретичні відомості

Метод Ньютона застосовують для розв'язання задачі $f(x)=0$ із неперервно диференційованою функцією $f(x)$. Спочатку вибирають початкове наближення x_0, а наступні наближення обчислюють за формулою:

$$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, n=0,1,2,\cdots, f'(x_n)\neq 0$$

Якщо $f(x)\epsilon C^2[a;b]$, $f(a)f(b)<0$, а $f''(x)$ не змінює знак на $[a;b]$, то для $x_0\epsilon[a;b]$, що задовільняє умові $f(x_0)f''(x_0)>0$, можна методом Ньютона обчислити єдиний корінь рівняння із будь-яким степенем точності.

2.3 Графік функції



2.4 Необхідні обчислення

Знайдемо першу і другу похідну $f(x)$:

$$f'(x) = 3x^2 + 6x - 1$$

$$f''(x) = 6x + 6$$

На графіку функції $f(x)$ бачимо, що рівняння має 3 розв'язки. Перший на проміжку $[-4; -2]$, другий на проміжку $[-2; 0]$ та третій в проміжку $[0; 3]$.

Перший проміжок: $[a; b] = [-4; -2]$, $f(x) \epsilon C^2 [-4; -2]$, $f(-4)f(-2) < 0$, та $f''(x)$ не змінює знак на $[-4; -2]$. Виберемо $x_0 = -3.5$, $x_0 \epsilon [-4; -2]$ та $f(x_0)f''(x_0) > 0$, отже методом Ньютона можна обчислити єдиниий корінь рівняння.

Другий проміжок: $[a; b] = [-2; 0]$, $f(x) \epsilon C^2 [-2; 0]$, $f(-2)f(0) < 0$, та $f''(x)$ не змінює знак на $[-2; 0]$. Виберемо $x_0 = -1.5$.

Третій проміжок: $[a; b] = [0; 3]$, $f(x) \epsilon C^2 [0; 3]$, $f(0)f(3) < 0$, та $f''(x)$ не змінює знак на $[0; 3]$. Виберемо $x_0 = 2.5$, $x_0 \epsilon [0; 3]$ та $f(x_0)f''(x_0) > 0$, отже методом Ньютона можна обчислити єдиниий корінь рівняння.

2.5 Результат роботи програми

Вивід програми:

```
x*0 = -3
x*1 = -1
x*2 = 1
Max positive solution: 1
```

Лог-файл:

```
x0 = -3.5
x1 = -3.118644
x2 = -3.009275
x3 = -3.000064
x4 = -3.000000
-----------------------------
x0 = -1.500000
x1 = -0.923077
x2 = -1.000229
x3 = -1.000000
-----------------------------
x0 = 2.500000
```

```
x1 = 1.618321
x2 = 1.167004
x3 = 1.017512
x4 = 1.000225
x5 = 1.000000
```

3 Задача №3

3.1 Умова

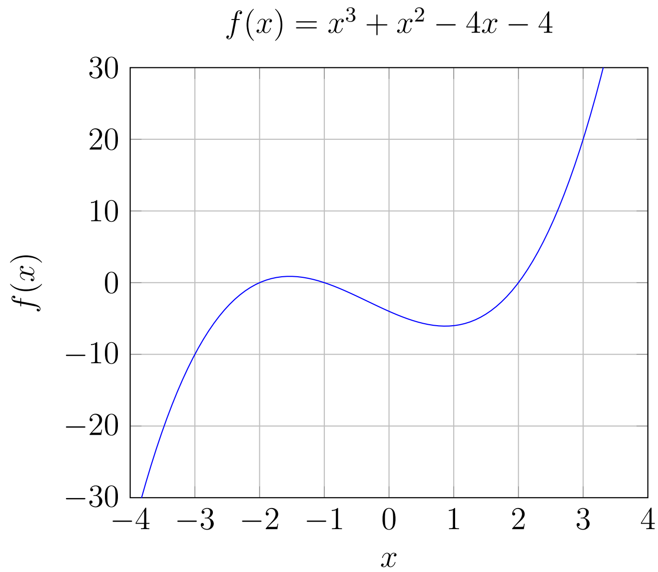
Знайти максимальний додатний розв'язок $x^3+x^2-4x-4=0$ методом січних.

3.2 Теоретичні відомості

У методі Ньютона основна обчислювальна робота полягає у відшуканні значень $f(x)$ та $f'(x)$. Замінивши похідну $f'(x)$, використовувану в методі Ньютона, різницею послідовних значень функції, віднесеною до різниці значень аргументу(тобто замінивши дотичну січною), отримаємо таку ітераційну формулу для розв'язання рівняння $f(x)=0$:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{(x_n - x_{n-1})f(x_n)}{f(x_n) - f(x_{n-1})}, n = 0, 1, 2, \cdots$$

3.3 Графік функції



3.4 Необхідні обчислення

На графіку функції $f(x)$ бачимо, що рівняння має 3 розв'язки. Перший на проміжку $[-4; -2.5]$, другий на проміжку $[-2.5; 1]$ та третій в проміжку $[1; 3]$.

Перший проміжок: Виберемо $x_0 = -4$, $x_1 = -3.5$
Другий проміжок: Виберемо $x_0 = 0.5$, $x_1 = 0$
Третій проміжок: Виберемо $x_0 = 1$, $x_1 = 1.5$

3.5 Результат роботи програми

Вивід програми:

```
x*0 = -2
x*1 = -1
x*2 = 2
Max positive solution: 2
```

Лог-файл:

```
------------------------------
x0 = -4
x1 = -3.5
x1 = -2.829268
x2 = -2.459801
x3 = -2.204508
x4 = -2.069454
x5 = -2.013794
x6 = -2.001101
x7 = -2.000019
x8 = -2.000000
------------------------------
x0 = 0.500000
x1 = 0.000000
x1 = -1.230769
x2 = -1.076433
x3 = -0.982374
x4 = -1.000964
x5 = -1.000011
x6 = -1.000000
------------------------------
x0 = 1.000000
x1 = 1.500000
x1 = 2.846154
```

```
x2 = 1.792330
x3 = 1.921289
x4 = 2.010908
x5 = 1.999484
x6 = 1.999997
x7 = 2.000000
```