

# Дослідження операцій

## Домашня робота №2

Демедюк Віталій

29 вересня 2020 р.

## Зміст

<b>1</b>	<b>ЗЗЛП <math>\rightarrow</math> КЗЛП</b>	<b>3</b>
1.1	ЗЗЛП . . . . .	3
1.2	ЗЗЛП $\rightarrow$ СЗЛП . . . . .	3
1.3	СЗЛП $\rightarrow$ КЗЛП (М-задача) . . . . .	3
<b>2</b>	<b>Симплекс-метод</b>	<b>5</b>
2.1	Розв'язок М-задачі симплекс-методом . . . . .	5
2.1.1	Крок №1 . . . . .	5
2.1.2	Крок №2 . . . . .	5
2.1.3	Крок №3 . . . . .	6
2.1.4	Крок №4 . . . . .	7
2.1.5	Крок №5 . . . . .	7
2.1.6	Відповідь . . . . .	8

## 1 ЗЗЛП $\rightarrow$ КЗЛП

### 1.1 ЗЗЛП

Цільова функція:

$$L = 2x_1 + x_2 \rightarrow \max$$

Обмеження:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 7, \\ 5x_1 + 7x_2 \geq 4, \\ 3x_1 - 2x_2 \leq 10, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

### 1.2 ЗЗЛП $\rightarrow$ СЗЛП

Цільова функція:

$$L = -2x_1 - x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 \rightarrow \min$$

Обмеження:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 & & = 7, \\ 5x_1 + 7x_2 & - x_4 & = 4, \\ 3x_1 - 2x_2 & & + x_5 = 10. \end{cases}$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$$

### 1.3 СЗЛП $\rightarrow$ КЗЛП (М-задача)

Запишемо СЗЛП у векторній формі

$$\bar{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)^T - \text{вектор-стовпець змінних}$$

$$\bar{c} = (c_1, c_2, c_3, c_4, c_5) = (-2, -1, 0, 0, 0) - \text{вектор коефіцієнтів у функції } L$$

$$L = \bar{c}\bar{x} \rightarrow \min$$

$A$  – матриця коефіцієнтів системи обмежень

$$A = \|a_{ij}\| = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 7 & 0 & -1 & 0 \\ 3 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\bar{b}$  – вектор, що  $A\bar{x} = \bar{b}$

$$\bar{b} = (7, 4, 10)^T$$

В КЗЛП повинні виконуватися наступні умови:

$\bar{b} \geq \bar{0}$ ,  $\bar{x} \geq \bar{0}$ ,  $A\bar{x} = \bar{b}$ ,  $A$  – містить одиничну підматрицю

Можемо побачити, що у нас не виконується остання умова, тому скористаємося М-методом, щоб додати штучний базис та отримати М-задачу з початковим базисним роз’язком

$$L' = -2x_1 - x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 + M(y_1) \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 & & = 7, \\ 5x_1 + 7x_2 & - x_4 & + y_1 = 4, \\ 3x_1 - 2x_2 & & + x_5 = 10. \end{cases}$$

Векторна форма

$$\bar{x}' = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, y_1)^T$$

$$\bar{c}' = (c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6) = (-2, -1, 0, 0, 0, M)$$

$$L' = \bar{c}'\bar{x}' \rightarrow \min$$

$$A' = \|a_{ij}\| = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 7 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 3 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\bar{b} = (7, 4, 10)^T$$

$$A'\bar{x}' = \bar{b}$$

## 2 Симплекс-метод

### 2.1 Розв'язок М-задачі симплекс-методом

#### 2.1.1 Крок №1

		$c_1$	$c_2$	$c_3$	$c_4$	$c_5$	$c_6$		
		-2	-1	0	0	0	M		
$c_6$	$X_6$	$A_1$	$A_2$	$A_3$	$A_4$	$A_5$	$A_6$	$b$	$\Theta$
0	$x_3$	1	2	1	0	0	0	7	7/2
M	$x_6$	5	7	0	-1	0	1	4	4/7
0	$x_5$	3	-2	0	0	1	0	10	
	$\Delta_j$	-2-5M	-1-7M	0	M	0	0		

$$\Delta_j = c_j - \sum_{i=1}^3 c_{6i} \alpha_{ij}$$

$$\Delta_k = \min_{j=1\dots 6} \Delta_j = \Delta_2 = -1 - 7M$$

$$\Theta_t = \min_{i:\Theta_i \geq 0} \Theta_i = \Theta_2 = \frac{4}{7}$$

$$\Theta_t = \frac{b_t}{c_{bt}} = \frac{b_t}{c_l} = \frac{b_2}{c_{b2}} = \frac{b_2}{c_6}$$

$t = 2$  - ведучий рядок

$k = 2$  - ведучий стовпець

$a_{tk} = a_{22}$  - ведучий елемент

$l = 6$

$l$ -у змінну виводимо з базису і вводимо  $k$ -у.

#### 2.1.2 Крок №2

Перерахуємо симплекс-таблицю і отримаємо:

		$c_1$	$c_2$	$c_3$	$c_4$	$c_5$	$c_6$		
		-2	-1	0	0	0	M		
$c_6$	$X_6$	$A_1$	$A_2$	$A_3$	$A_4$	$A_5$	$A_6$	$b$	$\Theta$
0	$x_3$	-3/7	0	1	2/7	0	-2/7	41/7	
-1	$x_2$	5/7	1	0	-1/7	0	1/7	4/7	4/5
0	$x_5$	31/7	0	0	-2/7	1	2/7	78/7	78/31
	$\Delta_j$	-9/7	0	0	-1/7	0	1/7		

$$\Delta_j = c_j - \sum_{i=1}^3 c_{6i} \alpha_{ij}$$

$$\Delta_k = \min_{j=1..6} \Delta_j = \Delta_1 = -\frac{9}{7}$$

$$\Theta_t = \min_{i:\Theta_i \geq 0} \Theta_i = \Theta_2 = \frac{4}{5}$$

$$\Theta_t = \frac{b_t}{c_{bt}} = \frac{b_t}{c_l} = \frac{b_2}{c_{b2}} = \frac{b_2}{c_2}$$

$t = 2$  - ведучий рядок

$k = 1$  - ведучий стовпець

$a_{tk} = a_{21}$  - ведучий елемент

$l = 2$

$l$ -у змінну виводимо з базису і вводимо  $k$ -у.

### 2.1.3 Крок №3

Перерахуємо симплекс-таблицю і отримаємо:

		$c_1$	$c_2$	$c_3$	$c_4$	$c_5$	$c_6$		
		-2	-1	0	0	0	M		
$c_6$	$X_6$	$A_1$	$A_2$	$A_3$	$A_4$	$A_5$	$A_6$	$b$	$\Theta$
0	$x_3$	0	3/5	1	1/5	0	-1/5	31/5	31
-2	$x_1$	1	7/5	0	-1/5	0	1/5	4/5	
0	$x_5$	0	-31/5	0	3/5	1	-3/5	38/5	38/3
	$\Delta_j$	0	9/5	0	-3	0	3		

$$\Delta_j = c_j - \sum_{i=1}^3 c_{6i} \alpha_{ij}$$

$$\Delta_k = \min_{j=1..6} \Delta_j = \Delta_4 = -3$$

$$\Theta_t = \min_{i:\Theta_i \geq 0} \Theta_i = \Theta_3 = \frac{38}{3}$$

$$\Theta_t = \frac{b_t}{c_{bt}} = \frac{b_t}{c_l} = \frac{b_3}{c_{b3}} = \frac{b_3}{c_5}$$

$t = 3$  - ведучий рядок

$k = 4$  - ведучий стовпець

$a_{tk} = a_{34}$  - ведучий елемент

$l = 5$

$l$ -у змінну виводимо з базису і вводимо  $k$ -у.

#### 2.1.4 Крок №4

Перерахуємо симплекс-таблицю і отримаємо:

		$c_1$	$c_2$	$c_3$	$c_4$	$c_5$	$c_6$		
		-2	-1	0	0	0	M		
$c_6$	$X_6$	$A_1$	$A_2$	$A_3$	$A_4$	$A_5$	$A_6$	$b$	$\Theta$
0	$x_3$	0	8/3	1	0	-1/3	0	11/3	11/8
-2	$x_1$	1	-2/3	0	0	1/3	0	10/3	
0	$x_4$	0	-31/3	0	1	5/3	-1	38/3	
	$\Delta_j$	0	-7/3	0	0	2/3	0		

$$\Delta_j = c_j - \sum_{i=1}^3 c_{6i} \alpha_{ij}$$

$$\Delta_k = \min_{j=1\dots 6} \Delta_j = \Delta_2 = -\frac{7}{3}$$

$$\Theta_t = \min_{i: \Theta_i \geq 0} \Theta_i = \Theta_3 = \frac{11}{8}$$

$$\Theta_t = \frac{b_t}{c_{bt}} = \frac{b_t}{c_l} = \frac{b_1}{c_{b1}} = \frac{b_1}{c_3}$$

$t = 1$  - ведучий рядок

$k = 2$  - ведучий стовпець

$a_{tk} = a_{12}$  - ведучий елемент

$l = 3$

$l$ -у змінну виводимо з базису і вводимо  $k$ -у.

#### 2.1.5 Крок №5

Перерахуємо симплекс-таблицю і отримаємо:

		$c_1$	$c_2$	$c_3$	$c_4$	$c_5$	$c_6$		
		-2	-1	0	0	0	M		
$c_6$	$X_6$	$A_1$	$A_2$	$A_3$	$A_4$	$A_5$	$A_6$	$b$	$\Theta$
-1	$x_2$	0	1	$3/8$	0	$-1/8$	0	$11/8$	
-2	$x_1$	1	0	$1/4$	0	$1/4$	0	$17/4$	
0	$x_4$	0	0	$31/8$	1	$3/8$	$-8/3$	$215/8$	
	$\Delta_j$	0	0	$7/8$	0	$3/8$	M		

$$\Delta_j = c_j - \sum_{i=1}^3 c_{6i} \alpha_{ij}$$

$$\Delta_k = \min_{j=1\dots 6} \Delta_j = \Delta_2 = -\frac{7}{3}$$

Оскільки  $\min_{j=1\dots 6} \Delta_j \geq 0$ , ми можемо завершити симплекс-метод

### 2.1.6 Відповідь

$$\text{При } \overline{x'} = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, y_1) = \left( \frac{17}{4}, \frac{11}{8}, 0, \frac{215}{8}, 0, 0 \right)$$

функція  $L' = -2x_1 - x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 + M(y_1) \rightarrow \min$ ,

$$\text{отже } L = -2x_1 - x_2 \rightarrow \min, \text{ при } x_1 = \frac{17}{4}, x_2 = \frac{11}{8}$$