Дослідження операцій
Домашня робота №2

Демедюк Віталій

20 жовтня 2020 р.

Зміст

1 Пряма задача $\to$ двоїста задача

1.1 Пряма задача

Цільова функція:

$$L = 2x_1 + x_2 \to \max$$

Обмеження:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 7, \\ 5x_1 + 7x_2 \ge 4, \\ 3x_1 - 2x_2 \le 10, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 7, \\ -5x_1 - 7x_2 \le -4, \\ 3x_1 - 2x_2 \le 10, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

1.2 Двоїста задача

Цільова функція:

$$F = 7y_1 - 4y_2 + 10y_3 \to \min$$

Обмеження:

$$\begin{cases} y_1 - 5y_2 + 3y_3 \ge 2, \\ 2y_1 - 7y_2 - 2y_3 \ge 1, \\ y_1 \ge 0, y_2 \ge 0, y_3 \ge 0. \end{cases}$$

2 Двоїста ЗЗЛП $\to$ двоїста КЗЛП

2.1 Двоїста ЗЗЛП $\to$ двоїста СЗЛП

Цільова функція:

$$F = 7y_1 - 4y_2 + 10y_3 + 0y_4 + 0y_5 \to \min$$

Обмеження:

$$\begin{cases} y_1 - 5y_2 + 3y_3 - y_4 = 2, \\ 2y_1 - 7y_2 - 2y_3 - y_5 = 1. \end{cases}$$

$$y_1, y_2, y_3, y_4, y_5 \ge 0$$

2.2 Двоїста СЗЛП $\to$ двоїста КЗЛП (М-задача)

Запишемо СЗЛП у векторній формі

$$\overline{y} = (y_1, y_2, y_3, y_4, y_5)^T \text{ – вектор-стовпець змінних}$$

$$\overline{b} = (b_1, b_2, b_3, b_4, b_5) = (7, -4, 10, 0, 0) \text{ – вектор коефіцієнтів у фунції } F$$

$$F = \overline{b}\overline{y} \to \min$$

A^T – матриця коефіцієнтів системи обмежень

$$A^T = \|a_{ji}\| = \begin{pmatrix} 1 & -5 & 3 & -1 & 0 \\ 2 & -7 & -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$\overline{c}$ – вектор, що $A^T\overline{y} = \overline{c}$

$$\overline{c} = (2, 1)^T$$

В КЗЛП повинні виконуватися наступні умови:
$\overline{c} \geqslant \overline{0}$, $\overline{y} \geqslant \overline{0}$, $A^T\overline{y} = \overline{c}$, A^T – містить одиничну підматрицю

Можемо побачити, що у нас не виконується остання умова, тому скористаємся М-методом, щоб добавити штучний базис та отримати М-задачу з початковим базисним роз'язком

$$F' = 7y_1 - 4y_2 + 10y_3 + 0y_4 + 0y_5 + M(w_1 + w_2) \to \min$$

$$\begin{cases} y_1 - 5y_2 + 3y_3 - y_4 + w_1 = 2, \\ 2y_1 - 7y_2 - 2y_3 - y_5 + w_2 = 1. \end{cases}$$

Векторна форма

$$\overline{y'} = (y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, w_1, w_2)^T$$

$$\overline{b'} = (b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6, b_7) = (7, -4, 10, 0, 0, M, M)$$

$$F' = \overline{b'}\overline{y'} \to \min$$

$$A^{T\prime} = \|a_{ji}\| = \begin{pmatrix} 1 & -5 & 3 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -7 & -2 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\overline{c} = (2,1)^T$$

$$A^{T\prime}\overline{y'} = \overline{c}$$

3 Симплекс-метод

3.1 Розв'язок М-задачі симплекс-методом

3.1.1 Крок №1

		b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	b_7		
		7	-4	10	0	0	M	M		
$b_б$	$y'_б$	${A^{T\prime}}_1$	${A^{T\prime}}_2$	${A^{T\prime}}_3$	${A^{T\prime}}_4$	${A^{T\prime}}_5$	${A^{T\prime}}_6$	${A^{T\prime}}_7$	c	Θ
M	w_1	1	-5	3	-1	0	1	0	2	2
M	w_2	2	-7	-2	0	-1	0	1	1	1/2
	Δ_i	7-3M	-4+12M	10-M	M	M	0	0		

$$\Delta_i = b_i - \sum_{j=1}^{2} b_{бj}\alpha_{ji}$$

$$\Delta_k = \min_{i=1...7} \Delta_i = \Delta_1 = 7 - 3M$$

$$\Theta_t = \min_{j:\Theta_j \geqslant 0} \Theta_j = \Theta_2 = \frac{4}{7}$$

$$\Theta_t = \frac{b_t}{{A^{T\prime}}_{kt}} = \frac{b_2}{{A^{T\prime}}_{k2}}$$

$t = 2$ - ведучий рядок
$k = 1$ - ведучий стовпець
$a_{tk} = a_{21}$ - ведучий елемент
$l = 7$
l-у змінну виводимо з базису і вводимо k-у.

3.1.2 Крок №2

		b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	b_7		
		7	-4	10	0	0	M	M		
$b_б$	$y'_б$	$A^{T\prime}{}_1$	$A^{T\prime}{}_2$	$A^{T\prime}{}_3$	$A^{T\prime}{}_4$	$A^{T\prime}{}_5$	$A^{T\prime}{}_6$	$A^{T\prime}{}_7$	c	Θ
M	w_1	0	-3/2	4	-1	1/2	1	-1/2	3/2	3/8
7	y_1	1	-7/2	-1	0	-1/2	0	1/2	1/2	
	Δ_i	0	41/2 + 3M/2	17-4M	M	7/2 - M/2	0	3M/2 - 7/2		

$$\Delta_i = b_i - \sum_{j=1}^{2} b_{бj}\alpha_{ji}$$

$$\Delta_k = \min_{i=1...7} \Delta_i = \Delta_3 = 17 - 4M$$

$$\Theta_t = \min_{j:\Theta_j \geqslant 0} \Theta_j = \Theta_2 = \frac{4}{7}$$

$$\Theta_t = \frac{b_t}{A^{T\prime}{}_{kt}} = \frac{b_2}{A^{T\prime}{}_{k1}}$$

$t = 1$ - ведучий рядок
$k = 3$ - ведучий стовпець
$a_{tk} = a_{13}$ - ведучий елемент
$l = 6$
l-у змінну виводимо з базису і вводимо k-у.

3.1.3 Крок №3

		b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	b_7		
		7	-4	10	0	0	M	M		
$b_б$	$y'_б$	$A^{T\prime}{}_1$	$A^{T\prime}{}_2$	$A^{T\prime}{}_3$	$A^{T\prime}{}_4$	$A^{T\prime}{}_5$	$A^{T\prime}{}_6$	$A^{T\prime}{}_7$	c	Θ
10	y_3	0	-3/8	1	-1/4	1/8	1/4	-1/8	3/8	
7	y_1	1	-31/8	0	-1/4	-3/8	1/4	3/8	7/8	
	Δ_i	0	303/8	0	45/4	67/8	39/4	45/8		

Оскільки $\min_{i=1...6} \Delta_i \geqslant 0$, ми можемо завершити симплекс-метод

3.1.4 Результат застосування симплекс-метода до двоїстоої задачі

$$\text{При } \overline{y'} = (y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, w_1, w2) = \left(\frac{7}{8}, 0, \frac{3}{8}, 0, 0, 0, 0\right)$$

$$\text{функція } F' = 7y_1 - 4y_2 + 10y_3 + 0y_4 + 0y_5 + M(w_1 + w_2) \to \min,$$

$$\text{отже } F = 7y_1 - 4y_2 + 10y_3 \to \min\text{, при } y_1 = \frac{7}{8}, y_2 = 0, y_1 = \frac{3}{8}$$

3.2 Перехід від розв'язку двоїстої ЗЛП до розв'язку прямої ЗЛП

$$B = \left({A^{T}}'_3, {A^{T}}'_1\right) = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{1}{8} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{8} \end{pmatrix}$$

$$x^* = (x_1, x_2) \text{ – розв'язок прямої ЗЛП.}$$

$$x^* = b_б B^{-1} = (10, 7) \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{1}{8} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{8} \end{pmatrix} = \left(\frac{17}{4}, \frac{11}{8}\right)$$