Дослідження операцій
Домашня робота №2

Демедюк Віталій

5 жовтня 2020 р.

Зміст

1 ЗЗЛП $\to$ КЗЛП

1.1 ЗЗЛП

Цільова функція:

$$L = 2x_1 + x_2 \to \max$$

Обмеження:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 7, \\ 5x_1 + 7x_2 \geq 4, \\ 3x_1 - 2x_2 \leq 10, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

1.2 ЗЗЛП $\to$ СЗЛП

Цільова функція:

$$L = -2x_1 - x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 \to \min$$

Обмеження:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 & & = 7, \\ 5x_1 + 7x_2 & - x_4 & = 4, \\ 3x_1 - 2x_2 & & + x_5 = 10. \end{cases}$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$$

1.3 СЗЛП $\to$ КЗЛП (М-задача)

Запишемо СЗЛП у векторній формі

$$\overline{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)^T \text{ – вектор-стовпець змінних}$$

$$\overline{c} = (c_1, c_2, c_3, c_4, c_5) = (-2, -1, 0, 0, 0) \text{ – вектор коефіцієнтів у фунції } L$$

$$L = \overline{cx} \to \min$$

A – матриця коефіцієнтів системи обмежень

$$A = \|a_{ij}\| = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 7 & 0 & -1 & 0 \\ 3 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\overline{b}$ – вектор, що $A\overline{x} = \overline{b}$

$$\overline{b} = (7, 4, 10)^T$$

В КЗЛП повинні виконуватися наступні умови:
$\overline{b} \geqslant \overline{0}$, $\overline{x} \geqslant \overline{0}$, $A\overline{x} = \overline{b}$, A – містить одиничну підматрицю

Можемо побачити, що у нас не виконується остання умова, тому скористаємся М-методом, щоб добавити штучний базис та отримати М-задачу з початковим базисним роз'язком

$$L' = -2x_1 - x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 + M(y_1) \to \min$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 & & & & = 7, \\ 5x_1 + 7x_2 & - x_4 & & + y_1 & = 4, \\ 3x_1 - 2x_2 & & + x_5 & & = 10. \end{cases}$$

Векторна форма

$$\overline{x'} = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, y_1)^T$$

$$\overline{c'} = (c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6) = (-2, -1, 0, 0, 0, M)$$

$$L' = \overline{c'x'} \to \min$$

$$A' = \|a_{ij}\| = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 7 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 3 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\overline{b} = (7, 4, 10)^T$$

$$A'\overline{x'} = \overline{b}$$

2 Симплекс-метод

2.1 Розв'язок M-задачі симплекс-методом

2.1.1 Крок №1

		c_1	c_2	c_3	c_4	c_5	c_6		
		-2	-1	0	0	0	M		
$c_б$	$X_б$	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	b	Θ
0	x_3	1	2	1	0	0	0	7	7/2
M	x_6	5	7	0	-1	0	1	4	4/7
0	x_5	3	-2	0	0	1	0	10	
	Δ_j	-2-5M	-1-7M	0	M	0	0		

$$\Delta_j = c_j - \sum_{i=1}^{3} c_{\text{бi}} \alpha_{ij}$$

$$\Delta_k = \min_{j=1...6} \Delta_j = \Delta_2 = -1 - 7M$$

$$\Theta_t = \min_{i:\Theta_i \geqslant 0} \Theta_i = \Theta_2 = \frac{4}{7}$$

$$\Theta_t = \frac{b_t}{c_{\text{bt}}} = \frac{b_t}{c_l} = \frac{b_2}{c_{\text{b2}}} = \frac{b_2}{c_6}$$

$t = 2$ - ведучий рядок
$k = 2$ - ведучий стовпець
$a_{tk} = a_{22}$ - ведучий елемент
$l = 6$
l-у змінну виводимо з базису і вводимо k-у.

2.1.2 Крок №2

Перерахуємо симплекс-таблицю і отримаємо:

		c_1	c_2	c_3	c_4	c_5	c_6		
		-2	-1	0	0	0	M		
$c_б$	$X_б$	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	b	Θ
0	x_3	-3/7	0	1	2/7	0	-2/7	41/7	
-1	x_2	5/7	1	0	-1/7	0	1/7	4/7	4/5
0	x_5	31/7	0	0	-2/7	1	2/7	78/7	78/31
	Δ_j	-9/7	0	0	-1/7	0	1/7		

$$\Delta_j = c_j - \sum_{i=1}^{3} c_{\text{бi}} \alpha_{ij}$$

$$\Delta_k = \min_{j=1...6} \Delta_j = \Delta_1 = -\frac{9}{7}$$

$$\Theta_t = \min_{i:\Theta_i \geqslant 0} \Theta_i = \Theta_2 = \frac{4}{5}$$

$$\Theta_t = \frac{b_t}{c_{\text{bt}}} = \frac{b_t}{c_l} = \frac{b_2}{c_{\text{b2}}} = \frac{b_2}{c_2}$$

$t = 2$ - ведучий рядок
$k = 1$ - ведучий стовпець
$a_{tk} = a_{21}$ - ведучий елемент
$l = 2$
l-у змінну виводимо з базису і вводимо k-у.

2.1.3 Крок №3

Перерахуємо симплекс-таблицю і отримаємо:

		c_1	c_2	c_3	c_4	c_5	c_6		
		-2	-1	0	0	0	M		
$c_б$	$X_б$	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	b	Θ
0	x_3	0	3/5	1	1/5	0	-1/5	31/5	31
-2	x_1	1	7/5	0	-1/5	0	1/5	4/5	
0	x_5	0	-31/5	0	3/5	1	-3/5	38/5	38/3
	Δ_j	0	9/5	0	-3	0	3		

$$\Delta_j = c_j - \sum_{i=1}^{3} c_{\text{бi}} \alpha_{ij}$$

$$\Delta_k = \min_{j=1...6} \Delta_j = \Delta_4 = -3$$

$$\Theta_t = \min_{i:\Theta_i \geqslant 0} \Theta_i = \Theta_3 = \frac{38}{3}$$

$$\Theta_t = \frac{b_t}{c_{\text{bt}}} = \frac{b_t}{c_l} = \frac{b_3}{c_{\text{b3}}} = \frac{b_3}{c_5}$$

$t = 3$ - ведучий рядок

$k = 4$ - ведучий стовпець
$a_{tk} = a_{34}$ - ведучий елемент
$l = 5$
l-у змінну виводимо з базису і вводимо k-у.

2.1.4 Крок №4

Перерахуємо симплекс-таблицю і отримаємо:

		c_1	c_2	c_3	c_4	c_5	c_6		
		-2	-1	0	0	0	M		
$c_б$	$X_б$	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	b	Θ
0	x_3	0	8/3	1	0	-1/3	0	11/3	11/8
-2	x_1	1	-2/3	0	0	1/3	0	10/3	
0	x_4	0	-31/3	0	1	5/3	-1	38/3	
	Δ_j	0	-7/3	0	0	2/3	0		

$$\Delta_j = c_j - \sum_{i=1}^{3} c_{\text{бi}} \alpha_{ij}$$

$$\Delta_k = \min_{j=1\ldots6} \Delta_j = \Delta_2 = -\frac{7}{3}$$

$$\Theta_t = \min_{i:\Theta_i \geqslant 0} \Theta_i = \Theta_3 = \frac{11}{8}$$

$$\Theta_t = \frac{b_t}{c_{\text{bt}}} = \frac{b_t}{c_l} = \frac{b_1}{c_{\text{b1}}} = \frac{b_1}{c_3}$$

$t = 1$ - ведучий рядок
$k = 2$ - ведучий стовпець
$a_{tk} = a_{12}$ - ведучий елемент
$l = 3$
l-у змінну виводимо з базису і вводимо k-у.

2.1.5 Крок №5

Перерахуємо симплекс-таблицю і отримаємо:

		c_1	c_2	c_3	c_4	c_5	c_6		
		-2	-1	0	0	0	M		
$c_б$	$X_б$	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	b	Θ
-1	x_2	0	1	3/8	0	-1/8	0	11/8	
-2	x_1	1	0	1/4	0	1/4	0	17/4	
0	x_4	0	0	31/8	1	3/8	-8/3	215/8	
	Δ_j	0	0	7/8	0	3/8	M		

$$\Delta_j = c_j - \sum_{i=1}^{3} c_{\text{бi}} \alpha_{ij}$$

$$\Delta_k = \min_{j=1...6} \Delta_j = \Delta_2 = -\frac{7}{3}$$

Оскільки $\min_{j=1...6} \Delta_j \geqslant 0$, ми можемо завершити симплекс-метод

2.1.6 Відповідь

$$\text{При } \overline{x'} = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, y_1) = \left(\frac{17}{4}, \frac{11}{8}, 0, \frac{215}{8}, 0, 0\right)$$

$$\text{функція } L' = -2x_1 - x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 + M(y_1) \to \min,$$

$$\text{отже } L = -2x_1 - x_2 \to \min\text{, при } x_1 = \frac{17}{4}, x_2 = \frac{11}{8}$$