

Дослідження операцій  
Домашня робота №3

Демедюк Віталій

6 жовтня 2020 р.

## Зміст

<b>1</b>	<b>ЗЗЛП <math>\rightarrow</math> КЗЛП</b>	<b>3</b>
1.1	ЗЗЛП . . . . .	3
1.2	ЗЗЛП $\rightarrow$ СЗЛП . . . . .	3
1.3	СЗЛП $\rightarrow$ КЗЛП (М-задача) . . . . .	3
<b>2</b>	<b>Модифікований симплекс-метод</b>	<b>5</b>
2.1	Розв'язок М-задачі модифікованим симплекс-методом . . .	5
2.1.1	Допоміжна таблиця . . . . .	5
2.1.2	Основна таблиця. Крок №1 . . . . .	5
2.1.3	Основна таблиця. Крок №2 . . . . .	6
2.1.4	Основна таблиця. Крок №3 . . . . .	7
2.1.5	Основна таблиця. Крок №4 . . . . .	7
2.1.6	Основна таблиця. Крок №5 . . . . .	8
2.1.7	Відповідь . . . . .	8

## 1 ЗЗЛП $\rightarrow$ КЗЛП

### 1.1 ЗЗЛП

Цільова функція:

$$L = 2x_1 + x_2 \rightarrow \max$$

Обмеження:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 7, \\ 5x_1 + 7x_2 \geq 4, \\ 3x_1 - 2x_2 \leq 10, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

### 1.2 ЗЗЛП $\rightarrow$ СЗЛП

Цільова функція:

$$L = -2x_1 - x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 \rightarrow \min$$

Обмеження:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 & & = 7, \\ 5x_1 + 7x_2 & - x_4 & = 4, \\ 3x_1 - 2x_2 & & + x_5 = 10. \end{cases}$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$$

### 1.3 СЗЛП $\rightarrow$ КЗЛП (М-задача)

Запишемо СЗЛП у векторній формі

$$\bar{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)^T - \text{вектор-стовпець змінних}$$

$$\bar{c} = (c_1, c_2, c_3, c_4, c_5) = (-2, -1, 0, 0, 0) - \text{вектор коефіцієнтів у функції } L$$

$$L = \bar{c}\bar{x} \rightarrow \min$$

$A$  – матриця коефіцієнтів системи обмежень

$$A = \|a_{ij}\| = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 7 & 0 & -1 & 0 \\ 3 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\bar{b}$  – вектор, що  $A\bar{x} = \bar{b}$

$$\bar{b} = (7, 4, 10)^T$$

В КЗЛП повинні виконуватися наступні умови:

$\bar{b} \geq \bar{0}$ ,  $\bar{x} \geq \bar{0}$ ,  $A\bar{x} = \bar{b}$ ,  $A$  – містить одиничну підматрицю

Можемо побачити, що у нас не виконується остання умова, тому скористаємося М-методом, щоб додати штучний базис та отримати М-задачу з початковим базисним роз’язком

$$L' = -2x_1 - x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 + M(y_1) \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 & & = 7, \\ 5x_1 + 7x_2 & - x_4 & + y_1 = 4, \\ 3x_1 - 2x_2 & & + x_5 = 10. \end{cases}$$

Векторна форма

$$\bar{x}' = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, y_1)^T$$

$$\bar{c}' = (c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6) = (-2, -1, 0, 0, 0, M)$$

$$L' = \bar{c}'\bar{x}' \rightarrow \min$$

$$A' = \|a_{ij}\| = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 7 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 3 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\bar{b} = (7, 4, 10)^T$$

$$A'\bar{x}' = \bar{b}$$

## 2 Модифікований симплекс-метод

### 2.1 Розв'язок М-задачі модифікованим симплекс-методом

#### 2.1.1 Допоміжна таблиця

	$c_1$	$c_2$	$c_3$	$c_4$	$c_5$	$c_6$					
	-2	-1	0	0	0	M					
$b$	$A_1$	$A_2$	$A_3$	$A_4$	$A_5$	$A_6$	$U^0$	$U^1$	$U^2$	$U^3$	$U^4$
7	1	2	1	0	0	0	0	0	0	0	-7/8
4	5	7	0	-1	0	1	M	-1/7	-2/5	0	0
10	3	-2	0	0	1	0	0	0	0	-2/3	-3/8
$\Delta_j^0$	-2-5M	-1-7M	0	M	0	0					
$\Delta_j^1$	-9/7	0	0	-1/7	0	-1/7					
$\Delta_j^2$	0	9/5	0	-3	0	3					
$\Delta_j^3$	0	-7/3	0	0	2/3	0					
$\Delta_j^4$	0	0	7/8	0	3/8	M					

#### 2.1.2 Основна таблиця. Крок №1

$c_6$	$X_6$	$b$	$B_1^{-1}(0)$	$B_2^{-1}(0)$	$B_3^{-1}(0)$	$A_2$	$\alpha_2^0$	$\Theta^0$
0	$x_3$	7	1	0	0	2	2	7/2
M	$x_6$	4	0	1	0	7	7	4/7
0	$x_5$	10	0	0	1	-2	-2	
		$U^0$	0	M	0			

$$U^0 = c_6^T B^{-1}(0)$$

$$\Delta_j^0 = c_j - U^0 A_j$$

$$\Delta_k^0 = \min_{j=1\dots 6} \Delta_j^0 = \Delta_2^0 = -1 - 7M$$

$$\alpha_2^0 = B^{-1}(0) A_k$$

$$\Theta_t^0 = \min_{i: \Theta_i^0 \geq 0} \Theta_i^0 = \Theta_2^0 = \frac{4}{7}$$

$$\Theta_t^0 = \frac{b_t}{c_{bt}} = \frac{b_t}{c_l} = \frac{b_2}{c_{b2}} = \frac{b_2}{c_6}$$

$t = 2$  - ведучий рядок  
 $k = 2$  - ведучий стовпець  
 $a_{tk} = a_{22}$  - ведучий елемент  
 $l = 6$   
 $l$ -у змінну виводимо з базису і вводимо  $k$ -у.

### 2.1.3 Основна таблиця. Крок №2

$c_6$	$X_6$	$b$	$B_1^{-1}(1)$	$B_2^{-1}(1)$	$B_3^{-1}(1)$	$A_1$	$\alpha_1^1$	$\Theta^1$
0	$x_3$	41/7	1	-2/7	0	1	-3/7	
-1	$x_2$	4/7	0	1/7	0	5	5/7	4/5
0	$x_5$	78/7	0	2/7	1	3	31/7	78/31
		$U^1$	0	-1/7	0			

$$U^1 = c_6^T B^{-1}(1)$$

$$\Delta_j^1 = c_j - U^1 A_j$$

$$\Delta_k^1 = \min_{j=1\dots 6} \Delta_j^1 = \Delta_1^1 = -\frac{9}{7}$$

$$\alpha_1^1 = B^{-1}(1) A_k$$

$$\Theta_t^1 = \min_{i: \Theta_i^1 \geq 0} \Theta_i^1 = \Theta_2^1 = \frac{4}{5}$$

$$\Theta_t^1 = \frac{b_t}{c_{bt}} = \frac{b_t}{c_l} = \frac{b_2}{c_{b2}} = \frac{b_2}{c_2}$$

$t = 2$  - ведучий рядок  
 $k = 1$  - ведучий стовпець  
 $a_{tk} = a_{21}$  - ведучий елемент  
 $l = 2$   
 $l$ -у змінну виводимо з базису і вводимо  $k$ -у.

### 2.1.4 Основна таблиця. Крок №3

$c_6$	$X_6$	$b$	$B_1^{-1}(2)$	$B_2^{-1}(2)$	$B_3^{-1}(2)$	$A_4$	$\alpha_4^2$	$\Theta^2$
0	$x_3$	$31/5$	1	$-1/5$	0	0	$1/5$	31
-2	$x_1$	$4/5$	0	$1/5$	0	-1	$-1/5$	
0	$x_5$	$38/5$	0	$-3/5$	1	0	$3/5$	$38/3$
		$U^2$	0	$-2/5$	0			

$$U^2 = c_6^T B^{-1}(2)$$

$$\Delta_j^2 = c_j - U^2 A_j$$

$$\Delta_k^2 = \min_{j=1\dots 6} \Delta_j^2 = \Delta_4^2 = -3$$

$$\alpha_4^2 = B^{-1}(2) A_4$$

$$\Theta_t^2 = \min_{i: \Theta_i^2 \geq 0} \Theta_i^2 = \Theta_3^2 = \frac{38}{3}$$

$$\Theta_t^2 = \frac{b_t}{c_{bt}} = \frac{b_t}{c_l} = \frac{b_3}{c_{b3}} = \frac{b_3}{c_5}$$

$t = 3$  - ведучий рядок

$k = 4$  - ведучий стовпець

$a_{tk} = a_{34}$  - ведучий елемент

$l = 5$

$l$ -у змінну виводимо з базису і вводимо  $k$ -у.

### 2.1.5 Основна таблиця. Крок №4

$c_6$	$X_6$	$b$	$B_1^{-1}(3)$	$B_2^{-1}(3)$	$B_3^{-1}(3)$	$A_2$	$\alpha_2^3$	$\Theta^3$
0	$x_3$	$11/3$	1	0	$-1/3$	2	$8/3$	$11/8$
-2	$x_1$	$10/3$	0	0	$1/3$	7	$-2/3$	
0	$x_4$	$38/3$	0	-1	$5/3$	-2	$-31/3$	
		$U^3$	0	0	$-2/3$			

$$U^3 = c_6^T B^{-1}(3)$$

$$\Delta_j^3 = c_j - U^3 A_j$$

$$\Delta_k^3 = \min_{j=1\dots 6} \Delta_j^3 = \Delta_2^3 = -\frac{7}{3}$$

$$\alpha_2^3 = B^{-1}(3)A_2$$

$$\Theta_t^3 = \min_{i: \Theta_i^3 \geq 0} \Theta_i^3 = \Theta_3^3 = \frac{11}{8}$$

$$\Theta_t^3 = \frac{b_t}{c_{bt}} = \frac{b_t}{c_l} = \frac{b_1}{c_{b1}} = \frac{b_1}{c_3}$$

$t = 1$  - ведучий рядок

$k = 2$  - ведучий стовпець

$a_{tk} = a_{12}$  - ведучий елемент

$l = 3$

$l$ -у змінну виводимо з базису і вводимо  $k$ -у.

### 2.1.6 Основна таблиця. Крок №5

$c_6$	$X_6$	$b$	$B_1^{-1}(4)$	$B_2^{-1}(4)$	$B_3^{-1}(4)$
-1	$x_2$	11/8	3/8	0	-1/8
-2	$x_1$	17/4	1/4	0	1/4
0	$x_4$	215/8	31/8	-1	3/8
		$U^4$	-7/8	0	-3/8

$$U^4 = c_6^T B^{-1}(4)$$

$$\Delta_j^4 = c_j - U^4 A_j$$

$$\Delta_k^4 = \min_{j=1\dots 6} \Delta_j^4 = \Delta_2^4 = -\frac{7}{3}$$

Оскільки  $\min_{j=1\dots 6} \Delta_j^4 \geq 0$ , ми можемо завершити симплекс-метод

### 2.1.7 Відповідь

$$\text{При } \overline{x'} = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, y_1) = \left( \frac{17}{4}, \frac{11}{8}, 0, \frac{215}{8}, 0, 0 \right)$$

функція  $L' = -2x_1 - x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 + M(y_1) \rightarrow \min$ ,

$$\text{отже } L = -2x_1 - x_2 \rightarrow \min, \text{ при } x_1 = \frac{17}{4}, x_2 = \frac{11}{8}$$