

Дослідження операцій

Домашня робота №1

Демедюк Віталій

15 вересня 2020 р.

Зміст

1	Графічний метод	3
1.1	Умова	3
1.2	Попередні розрахунки	3
1.3	Графік	4
2	Стандартна задача лінійного програмування	4
2.1	ЗЗЛП \rightarrow СЗЛП	4
2.2	Розв'язання СЗЛП	5
2.2.1	Базис $\langle A_1, A_2, A_3 \rangle$	5
2.2.2	Базис $\langle A_1, A_2, A_4 \rangle$	5
2.2.3	Базис $\langle A_1, A_2, A_5 \rangle$	6
2.2.4	Базис $\langle A_1, A_3, A_4 \rangle$	6
2.2.5	Базис $\langle A_1, A_3, A_5 \rangle$	6
2.2.6	Базис $\langle A_1, A_4, A_5 \rangle$	7
2.2.7	Базис $\langle A_2, A_3, A_4 \rangle$	7
2.2.8	Базис $\langle A_2, A_3, A_5 \rangle$	7
2.2.9	Базис $\langle A_2, A_4, A_5 \rangle$	8
2.2.10	Базис $\langle A_3, A_4, A_5 \rangle$	8
2.2.11	Перевірка допустимих розв'язків	8

1 Графічний метод

1.1 Умова

Цільова функція:

$$L = 2x_1 + x_2 \rightarrow \max \quad (1)$$

Обмеження:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 7, \\ 5x_1 + 7x_2 \geq 4, \\ 3x_1 - 2x_2 \leq 10, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases} \quad (2)$$

1.2 Попередні розрахунки

$$1) \ x_1 + 2x_2 \leq 7 \iff x_2 \leq \frac{7}{2} - \frac{x_1}{2}$$

$\left(0, \frac{7}{2}\right), (7, 0)$ - точки, через які проходить функція $x_2 = \frac{7}{2} - \frac{x_1}{2}$

$$2) \ 5x_1 + 7x_2 \geq 4 \iff x_2 \geq \frac{4}{7} - \frac{5x_1}{7}$$

$\left(0, \frac{4}{7}\right), \left(\frac{4}{5}, 0\right)$ - точки, через які проходить функція $x_2 = \frac{4}{7} - \frac{5x_1}{7}$

$$3) \ 3x_1 - 2x_2 \leq 10 \iff x_2 \geq \frac{3x_1}{2} - 5$$

$(0, -5), \left(\frac{10}{3}, 0\right)$ - точки, через які проходить функція $x_2 = \frac{3x_1}{2} - 5$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 7, \\ 3x_1 - 2x_2 = 10. \end{cases} \iff \begin{cases} x_2 = \frac{7}{2} - \frac{x_1}{2}, \\ x_2 = \frac{3x_1}{2} - 5. \end{cases} \iff (x_1, x_2) = \left(\frac{17}{4}, \frac{11}{8}\right) - \text{точка перетину}$$

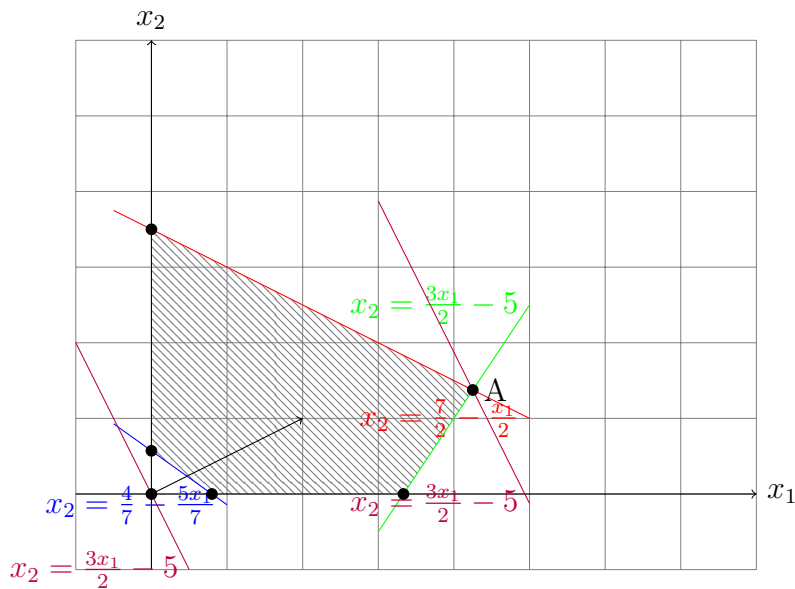
$$4) 2x_1 + x_2 = a \iff x_2 = -2x_1 + a$$

$a = 0, x_2 = -2x_1, (0, 0), (-1, 2)$ - точки, через які проходить функція

$$x_2 = -2x_1 + a, \text{ при } (x_1, x_2) = \left(\frac{17}{4}, \frac{11}{8}\right) \quad a = \frac{79}{8}$$

$$\left(\frac{\partial L}{\partial x_1}, \frac{\partial L}{\partial x_2}\right) = (2, 1) \text{ - градієнт (вектор нормалі)}$$

1.3 Графік



В точці A функція L досягає свого максимуму. $L\left(\frac{17}{4}, \frac{11}{8}\right) = \frac{79}{8}$.

2 Стандартна задача лінійного програмування

2.1 ЗЗЛП \rightarrow СЗЛП

Цільова функція:

$$L = -2x_1 - x_2 \rightarrow \min \quad (3)$$

Обмеження:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 & = 7, \\ 5x_1 + 7x_2 & - x_4 = 4, \\ 3x_1 - 2x_2 & + x_5 = 10. \end{cases}$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$$

2.2 Розв'язання СЗЛП

$$\begin{pmatrix} A_1 & A_2 & A_3 & A_4 & A_5 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 7 & 0 & -1 & 0 \\ 3 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ 10 \end{pmatrix}$$

2.2.1 Базис $\langle A_1, A_2, A_3 \rangle$

$$x_4 = 0, x_5 = 0$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} A_1 & A_2 & A_3 & & & \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 7 \\ 5 & 7 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 3 & -2 & 0 & 0 & 0 & 10 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} A_1 & A_2 & A_3 & & & \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{78}{31} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{-38}{31} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{215}{31} \end{array} \right)$$

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = \left(\frac{78}{31}, \frac{-38}{31}, \frac{215}{31}, 0, 0 \right) \text{ (Псевдобазис)}$$

2.2.2 Базис $\langle A_1, A_2, A_4 \rangle$

$$x_3 = 0, x_5 = 0$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} A_1 & A_2 & & A_4 & & \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 7 \\ 5 & 7 & 0 & -1 & 0 & 4 \\ 3 & -2 & 0 & 0 & 0 & 10 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} A_1 & A_2 & & A_4 & & \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{17}{4} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{11}{8} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{215}{8} \end{array} \right)$$

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = \left(\frac{17}{4}, \frac{11}{8}, 0, \frac{215}{8}, 0 \right) \text{ (Допустимий базисний розв'язок)}$$

2.2.3 Базис $\langle A_1, A_2, A_5 \rangle$

$$x_3 = 0, x_4 = 0$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} A_1 & A_2 & & & A_5 & \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 7 \\ 5 & 7 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 3 & -2 & 0 & 0 & 1 & 10 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} A_1 & A_2 & & & A_5 & \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-41}{3} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{31}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{215}{3} \end{array} \right)$$

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = \left(\frac{-41}{3}, \frac{31}{3}, 0, 0, \frac{215}{3} \right) \text{ (Псевдобазис)}$$

2.2.4 Базис $\langle A_1, A_3, A_4 \rangle$

$$x_2 = 0, x_5 = 0$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} A_1 & & A_3 & A_4 & & \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 7 \\ 5 & 0 & 0 & -1 & 0 & 4 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 10 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} A_1 & & A_3 & A_4 & & \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{10}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{11}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{38}{3} \end{array} \right)$$

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = \left(\frac{10}{3}, 0, \frac{11}{3}, \frac{38}{3}, 0 \right) \text{ (Допустимий базисний розв'язок)}$$

2.2.5 Базис $\langle A_1, A_3, A_5 \rangle$

$$x_2 = 0, x_4 = 0$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} A_1 & & A_3 & & A_5 & \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 7 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 10 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} A_1 & & A_3 & & A_5 & \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{4}{5} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{31}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{38}{5} \end{array} \right)$$

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = \left(\frac{4}{5}, 0, \frac{31}{5}, 0, \frac{38}{5} \right) \text{ (Допустимий базисний розв'язок)}$$

2.2.6 Базис $\langle A_1, A_4, A_5 \rangle$

$$x_2 = 0, x_3 = 0$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} A_1 & & & A_4 & A_5 & \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7 \\ 5 & 0 & 0 & -1 & 0 & 4 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 10 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} A_1 & & & A_4 & A_5 & \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 31 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -11 \end{array} \right)$$

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (7, 0, 0, 31, -11) \text{ (Псевдобазис)}$$

2.2.7 Базис $\langle A_2, A_3, A_4 \rangle$

$$x_1 = 0, x_5 = 0$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} & A_2 & A_3 & A_4 & \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 7 & 0 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 10 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} & A_2 & A_3 & A_4 & \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 17 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -39 \end{array} \right)$$

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (0, -5, 17, -39, 0) \text{ (Псевдобазис)}$$

2.2.8 Базис $\langle A_2, A_3, A_5 \rangle$

$$x_1 = 0, x_4 = 0$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} & A_2 & A_3 & & A_5 & \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 7 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 1 & 10 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} & A_2 & & A_4 & A_5 & \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{4}{7} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{41}{7} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{78}{7} \end{array} \right)$$

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = \left(0, \frac{4}{7}, 0, \frac{41}{7}, \frac{78}{7} \right) \text{ (Допустимый базисный розв'язок)}$$

2.2.9 Базис $\langle A_2, A_4, A_5 \rangle$

$$x_1 = 0, x_3 = 0$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} & A_2 & & A_4 & A_5 & \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 7 & 0 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 1 & 10 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} & A_2 & & A_4 & A_5 & \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{7}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{41}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 17 \end{array} \right)$$

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = \left(0, \frac{7}{2}, 0, \frac{41}{2}, 17 \right) \text{ (Допустимий базисний розв'язок)}$$

2.2.10 Базис $\langle A_3, A_4, A_5 \rangle$

$$x_1 = 0, x_2 = 0$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} & A_3 & A_4 & A_5 & & \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 10 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} & A_3 & A_4 & A_5 & & \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 10 \end{array} \right)$$

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (0, 0, 7, -4, 10) \text{ (Псевдобазис)}$$

2.2.11 Перевірка допустимих розв'язків

$$L(x_1, x_2) = -2x_1 - x_2 \longrightarrow \min$$

$$1) L\left(\frac{17}{4}, \frac{11}{8}\right) = \frac{-79}{8}$$

$$2) L\left(\frac{10}{3}, 0\right) = \frac{-20}{3}$$

$$3) L\left(\frac{4}{5}, 0\right) = \frac{-8}{5}$$

$$4) L\left(0, \frac{4}{7}\right) = \frac{-4}{7}$$

$$5) L\left(0, \frac{7}{2}\right) = \frac{-7}{2}$$

$$\text{Відповідь: } (x_1^*, x_2^*) = \left(\frac{17}{4}, \frac{11}{8}\right)$$