2. Задача 5.21 вариант 24

Записать уравнение гиперплоскости, опорной к множеству $X = \{x : \frac{x_1^2}{4} + \frac{x_2^2}{9} + \frac{x_3^2}{25} \leq 1\}$ в точке $x^* = (1, \frac{3\sqrt{3}}{2}, 0)$. Если точка $x^* \notin X$, то выписать уравнение отделяющей гиперплоскости.

Решение

$$\frac{1^2}{4} + \frac{\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2}{9} + \frac{0^2}{25} = 1 \implies x^* \in X$$

$$f(x) = \frac{x_1^2}{4} + \frac{x_2^2}{9} + \frac{x_3^2}{25} - 1$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \begin{pmatrix} \frac{x_1}{2} \\ \frac{2}{9}x_2 \\ \frac{2}{25}x_3 \end{pmatrix}$$

Опорная гиперплоскость:

$$\frac{\partial^T f(x^*)}{\partial x}(x - x^*) = 0$$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 - 1 \\ x_2 - \frac{3\sqrt{3}}{2} \\ x_3 \end{pmatrix} = \frac{x_1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{3}}x_2 - \frac{3}{2} = \frac{x_1}{2} + \frac{1}{\sqrt{3}}x_2 - 2 = 0$$

Ответ: $\frac{x_1}{2} + \frac{1}{\sqrt{3}}x_2 - 2 = 0$