

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ФАКУЛЬТЕТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

Домашняя работа №2
студента 2 курса 2 группы
Царика Виталия Александровича

Преподаватель
Дайняк Виктор
Владимирович

Минск 2019

1 162-169

Можно ли в нормированном пространстве \mathbb{R} принять за норму элемента x :

162. $f(x) = \sqrt{x}$

$f(x)$ неопределена для всех $x \in \mathbb{R}$

Ответ: нет

163. $f(x) = \sqrt{|x|}$

$$||\lambda x|| = \sqrt{|\lambda x|} = \sqrt{|\lambda|} \sqrt{|x|} = \sqrt{|\lambda|} ||x|| \neq |\lambda| ||x||$$

не выполнена вторая аксиома

Ответ: нет

164. $f(x) = |x - 1|$

$$||0|| = |0 - 1| = 1 \neq 0$$

не выполнена первая аксиома

Ответ: нет

165. $f(x) = \sqrt{x^2}$

$$f(x) = \sqrt{x^2} = |x|$$

$f(x) = |x|$ - стандартная норма пространства действительных чисел

Ответ: да

166. $f(x) = 5|x|$

$$1) ||x|| = 0 \Leftrightarrow 5|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

$$2) ||\lambda x|| = 5|\lambda x| = |\lambda| 5|x| = |\lambda| ||x||$$

$$3) ||x + y|| = 5|x + y| \leq 5|x| + 5|y| = ||x|| + ||y||$$

Ответ: да

167. $f(x) = x^2$

$$||\lambda x|| = (\lambda x)^2 = \lambda^2 x^2 = \lambda^2 ||x|| \neq |\lambda| ||x||$$

не выполнена вторая аксиома

Ответ: нет

168. $f(x) = |\arctan x|$

$$||2 * 1|| = |\arctan 2| = 0.4142... \neq \frac{\pi}{2} = |2| |\arctan 1| = |2| ||1||$$

не выполнена вторая аксиома

Ответ: нет

169. $f(x) = \ln |x|$

$$||1|| = \ln 1 = 0$$

не выполнена первая аксиома

Ответ: нет

2 170-175

Можно ли в нормированном пространстве векторов на плоскости принять за норму элемента $a = (x, y)$:

170. $f(a) = \sqrt{|xy|}$

$$a = (0, 1)$$

$$||a|| = \sqrt{|0 * 1|} = 0$$

не выполнена первая аксиома

Ответ: нет

171. $f(a) = |x| + |y|$

1) $||a|| = 0 \Leftrightarrow |x| + |y| = 0 \Leftrightarrow a = (0, 0)$

2) $||\lambda a|| = |\lambda x| + |\lambda y| = |\lambda|(|x| + |y|) = |\lambda| ||a||$

3) $||a + b|| = |x_1 + x_2| + |y_1 + y_2| \leq |x_1| + |x_2| + |y_1| + |y_2| = ||a|| + ||b||$

Ответ: да

172. $f(a) = \max(|x|, |y|)$

$$a = (3, 2), b = (2, 1)$$

$$||a + b|| = ||(5, 3)|| = 5$$

$$||a|| + ||b|| = 3 + 2 = 5$$

не выполнена третья аксиома

Ответ: нет

173. $f(a) = \sqrt{x^2 + y^2} + \sqrt{xy}$

Не определена для все векторов. Например, для $a = (1, -1)$

Ответ: нет

174. $f(a) = |x^2 - y^2|$

$$||(1, 1)|| = |1 - 1| = 0$$

Не выполнена первая аксиома

Ответ: нет

3 176-180

Можно ли в линейном пространстве дифференцируемых на $[a, b]$ функций принять за норму элемента $x(t)$:

176. $\max_{t \in [a, b]} |x(t)|$

1) $\max_{t \in [a, b]} |x(t)| = 0 \Leftrightarrow |x(t)| \leq 0 \Leftrightarrow x(t) = 0$

2) $||\lambda x(t)|| = \max_{t \in [a, b]} |\lambda x(t)| = |\lambda| \max_{t \in [a, b]} |x(t)| = |\lambda| ||x(t)||$

3) $||x(t) + y(t)|| = \max_{t \in [a, b]} |x(t) + y(t)| \leq \max_{t \in [a, b]} |x(t)| + \max_{t \in [a, b]} |y(t)| = ||x(t)|| + ||y(t)||$

Ответ: да

177. $\max_{t \in [a, b]} |x'(t)|$

$$x(t) = 1$$

$$||x(t)|| = \max_{t \in [a, b]} |0| = 0$$

Не выполнена первая теорема

Ответ: нет

$$178. |x(b) - x(a)| + \max_{t \in [a, b]} |x'(t)|$$

$$x(t) = 1$$

$$||x(t)|| = |1 - 1| + \max_{t \in [a, b]} |0| = 0$$

не выполнена первая аксиома

Ответ: нет

$$179. |x(b) - x(a)| + \max_{t \in [a, b]} |x'(t)|$$

$$x(t) = 1$$

$$||x(t)|| = |1 - 1| + \max_{t \in [a, b]} |0| = 0$$

Ответ: нет

$$180. |x(a)| + \max_{t \in [a, b]} |x'(t)|$$

$$||\lambda x(t)|| = |x(a)| + \max_{t \in [a, b]} |(\lambda x(t))'| = |x(a)| + |\lambda| \max_{t \in [a, b]} |x(t)'| \neq |\lambda| (|x(a)| + \max_{t \in [a, b]} |x(t)'|) = |\lambda| ||x(t)||$$

Не выполнена вторая аксиома

Ответ: нет