6. Задача 15.7 вариант 38

$$I(y) = \int_0^{\ln 2} (y_x^2 + 2y^2 + 2y)e^{-x}dx \to min$$

$$y(0) = y(\ln 2) = 0$$

Решение

$$(4y+2)e^{-x} - \frac{d}{dx}(2y_x e^{-x}) = 2(2y+1)e^{-x} - 2(y_{xx} - y_x)e^{-x} = 0$$

$$y_{xx} - y_x - 2y = 1$$

$$\lambda^2 - \lambda - 2 = 0$$

$$\lambda_1 = -1$$

$$\lambda_2 = 2$$

$$y_{\text{общ}} = C_1 e^{-x} + C_2 e^{2x}$$

$$y_{\text{част}} = -\frac{1}{2}$$

$$y(x) = C_1 e^{-x} + C_2 e^{2x} - \frac{1}{2}$$

$$\begin{cases} y(0) = C_1 + C_2 - \frac{1}{2} = 0 \\ y(\ln 2) = C_1 \frac{1}{2} + C_2 4 - \frac{1}{2} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_1 = \frac{3}{7} \\ C_2 = \frac{1}{14} \end{cases}$$

$$y_0(x) = \frac{3}{7}e^{-x} + \frac{1}{14}e^{2x} - \frac{1}{2}$$

Условие Лежандра-Клемба:

$$\frac{\partial^2 F(x, y_0, y_{0x})}{\partial y_x^2} = 2e^{-x} > 0 \implies \text{выполняется строгое}$$

Условие Якоби:

$$2e^{-x}y_{xx} - 2e^{-x}y_x = 0$$
$$y(0) = 0$$

$$y_{xx} - y_x = 0$$

$$y(x) = C_1e^x + C_2$$

$$y(0) = C_1 + C_2 = 0 \implies C_1 = -C_2$$

$$y(x) = C_2(1 - e^x) \neq 0, \forall x \in (0, \ln 2], \text{если } C_2 \neq 0$$

Любое решение уравнения Якоби, кроме тривиального, не орбащается в ноль на $(0, \ln 2]$. Значит условие Якоби выполняется.

Ответ: $y_0(x) = \frac{3}{7}e^{-x} + \frac{1}{14}e^{2x} - \frac{1}{2}$ — минималь