МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ФАКУЛЬТЕТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

Домашняя работа
студента 2 курса 2 группы
Царика Виталия Александровича

Преподаватель
Дайняк Виктор Владимирович

Минск 2019

1 №1.8

$$a = 1, b = 1, x(t) = \lambda \int_{-1}^{1} (t^2 - 1) s x(s) ds + t$$

$F(x) = \lambda \int_{-1}^{1} (t^2 - 1) s x(s) ds + t$

- $C[-1, 1]:$

$max_{t\in[-1,1]}|F(x) - F(y)| = max_{t\in[-1,1]} \left| \int_{-1}^{1} (t^2 - 1) s (x(s) - y(s) ds \right| \leq$
$\leq |\lambda| \int_{-1}^{1} |s| * max_{s\in[-1,1]}|x(s) - y(s)| ds = \lambda\ max_{s\in[-1,1]}|(x(s) - y(s)| = \lambda||x(s) - y(s)||$
$\alpha = |\lambda| < 1$
Пусть$\lambda = \frac{1}{14}$
$||x_n - a|| \leq \frac{\alpha^n}{1-\alpha} ||x_0 - x_1||$
$x_0 = 0$
$x_1 = F(x_0) = t$
$\alpha = \frac{1}{14}$
$||x_0 - x_1|| = max_{t\in[-1,1]}|t - 0| = 1$
$\left(\frac{1}{14}\right)^n \frac{14}{13} < 0.001$
$n > \left(\frac{\ln \frac{13}{14} * 0.001}{\ln 14}\right) \approx 2.645$
$n = 3$
$x_2 = F(x_1) = F(t) = \frac{1}{14}(t^2 - 1) \int_{-1}^{1} s^2 ds + t = \frac{1}{14}(t^2 - 1) \left[\frac{s^3}{3}\right]_{-1}^{1} + t = \frac{1}{21}(t^2 - 1) + t$
$x_3 = F(x_2) = F\left(\frac{1}{21}(t^2 - 1) + s\right) = \frac{1}{14}(t^2 - 1) \int_{-1}^{1} s \left(\frac{1}{21}(s^2 - 1) + t\right) ds = \frac{1}{21 * 14}(t^2 - 1) \left[\frac{s^4}{4} - \frac{s^2}{2} + 21\frac{s^3}{3}\right]_{-1}^{1} \Rightarrow$
$x_3 = \frac{1}{21}(t^2 - 1) + t$
Точное решение:
$x(t) = \lambda(t^2 - 1) \int_{-1}^{1} s x(s) ds + t$
$c = \int_{-1}^{1} s x(s) ds \Rightarrow$
$x(t) = \lambda(t^2 - 1)c + t$
$c = \int_{-1}^{1} s \left(\lambda(s^2 - 1)c + s\right) ds = \left[c\lambda\frac{s^4}{4} - c\lambda\frac{s^2}{2} + \frac{s^3}{3}\right]_{-1}^{1} = \frac{2}{3} \Rightarrow$
$x(t) = \frac{1}{14}(t^2 - 1)\frac{2}{3} + t = \frac{1}{21}(t^2 - 1) + t$
$||x - x_3|| = max_{t\in[-1,1]} \left(\frac{1}{21}(t^2 - 1) + t - \frac{1}{21}(t^2 - 1) - t\right) = 0$

- $L_2[-1, 1]:$

$K(t, s) = \lambda(t^2 - 1)s$
$\int_{-1}^{1} \int_{-1}^{1} |K(t, s)|^2 dsdt = \lambda^2 \int_{-1}^{1} \int_{-1}^{1} (t^2 - 1)^2 s^2 dsdt = \lambda^2\ \int_{-1}^{1} (t^2 - 1)^2 dt \int_{-1}^{1} s^2 ds = \frac{2}{3}\lambda^2 * \frac{16}{15} = \frac{32}{45}\lambda^2 < +\infty$
F(x) является сжимающим, если $\frac{4\sqrt{2}|\lambda|}{3\sqrt{3}} < 1 \Rightarrow |\lambda| < \frac{3\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}$
Пусть $\lambda = \frac{1}{14}$
$\frac{\left(\frac{4\sqrt{2}}{3\sqrt{3}} \frac{1}{14}\right)^n}{1 - \frac{4\sqrt{2}}{3\sqrt{3}} \frac{1}{14}} \left(\int_{-1}^{1} (x_1(t) - x_0(t))^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} < 0.001 \Rightarrow$
$\frac{\left(\frac{2\sqrt{2}}{21\sqrt{3}} \frac{1}{14}\right)^n}{1 - \frac{2\sqrt{2}}{21\sqrt{3}} \frac{1}{14}} * \sqrt{\frac{2}{3}} < 0.001$
$n > 2.486$
$n = 3$

2 №2.8

$g(x) = 2x^2 + 8x - 3 = 0$
$x = -\frac{2x^2 - 3}{8}$
$F(x) = -\frac{2x^2 - 3}{8}$
$\alpha = max_{x\in[a;b]}|F'(x)|$

$F^{'}(x) = -\frac{4x}{8} = -\frac{x}{2}$
$|F^{'}(x)| < 1, |x| < 2$
$\begin{cases} ||x_0 - F(x_0)|| \le r(1-\alpha(r)) \\ \alpha(r) < 1 \end{cases}$
$\alpha(r) = max_{x\in[-r;r]}|F^{'}(x)| = \frac{r}{2},$
$x_1 = F(x_0) = \frac{3}{8}$
$\begin{cases} \frac{3}{8} \le r(1-\frac{r}{2}) \\ \frac{r}{2} < 1 \end{cases}$
$r = 1 \Rightarrow F-, \alpha \le \frac{1}{2}$
$||x_n - \alpha|| \le \frac{\alpha^n}{1-\alpha}||x_1 - x_0|| \le \left(\frac{1}{2}\right)^n * 2 * \frac{3}{8} \le \frac{1}{100}$
$2^{-n} \le 75^{-1}$
$n \ln 2 \ge \ln 75$
$n \ge \frac{\ln 75}{\ln 2} \approx 6,229$
$n = 7 \Rightarrow x_7$является приближённым решением уравнения с заданной точностью, равной 0,01
$||x||_p = (\int_a^b |x(t)|^p dt)^{\frac{1}{p}}, p \ge 1$

3 №3.8

$f(x)(t) = t\int_0^1 \frac{x(s)}{\sqrt[4]{s}}ds$
$f : E \to E, E = L_2[0;1]$
$||F(x) - F(y)||_{L_2[0;1]} = \left(\int_0^1 \left|t\int_0^1 \frac{x(s)-y(s)}{\sqrt[4]{s}}ds\right|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} \le \left(\int_0^1 t^2 \left(\int_0^1 |x(s)-y(s)|^2 \frac{1}{\sqrt{s}}ds\right)dt\right)^{\frac{1}{2}} \le$
$\le \left(\int_0^1 t^2 \left(\int_0^1 |x(s)-y(s)|^2 max_{s\in[0;1]} s^{\frac{1}{2}} ds\right)dt\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\int_0^1 t^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} ||x-y|| = \frac{1}{\sqrt{3}}||x-y||$
$\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$
$x_0 = 0$
$x_3 = x_2 = x_1 = F(x_0) = 0$
$||x_3 - a|| \left(\frac{\alpha^3}{1-\alpha}||x_0 - x_1||\right) = 0$

4 №4.8

$$F : X \to Y$$

$X = L_2[0;1], Y = L_2[0;1]$
$F(x) = tx(t^2) = [r = t^2] = \sqrt{r}x(r)$
$||F(x)||_{L_2[0;1]} = \left(\int_0^1 |r^{\frac{1}{2}}x(r)|^2 dr\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\int_0^1 |r||x(r)|^2 dr\right)^{\frac{1}{2}} \le \left(\int_0^1 max_{r\in[0;1]}|r||x(r)|^2 dr\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\int_0^1 |x(r)|^2 dr\right)^{\frac{1}{2}} =$
$= ||x||_{L_2[0;1]} \Rightarrow$ если $||x||_{L_2[0;1]} < \sigma$, то $||F(x)||_{L_2[0;1]} < \sigma \Rightarrow$ F непрервына в точке x_0
$\varepsilon > 0,$ покажем, что $\exists r(\varepsilon)$:
$\forall x(t), y(t) \in L_2[0;1]$ таких, что $||x-y|| = \left(\int_0^1 |x(t)-y(t)|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} < \sigma,$ выполняется:
$||F(x) - F(y)|| = \left(\int_0^1 |F(x) - F(y)|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\int_0^1 |r^{\frac{1}{2}}(x(r) - y(r))|^2 dr\right)^{\frac{1}{2}}$
$|F(x) - F(y)| = |r^{\frac{1}{2}}(x(r) - y(r))| \le |x(r) - y(r)| \Rightarrow \varepsilon \le \sigma \Rightarrow$ F равномерно непрерывна
$||F(x) - F(y)||_{L_2[0;1]} \le c||x-y||_{L_2[0;1]}$
$||F(x) - F(y)||_{L_2[0;1]} = \left(\int_0^1 |r^{\frac{1}{2}}(x(r) - y(r))|^2 dr\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\int_0^1 |r||x(r) - y(r)|^2 dr\right)^{\frac{1}{2}} \le$
$\le \left(\int_0^1 max_{z\in[0;1]}|r||x(r) - y(r)|^2 dr\right)^{\frac{1}{2}} = ||x-y||,$
где с=1, таким образом F удовелтворяет условию Липшица