



МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ ТА НАУКИ, МОЛОДІ ТА СПОРТУ УКРАЇНИ  
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ  
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ»

Системи реального часу

## **МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ**

до виконання лабораторних робіт

Для студентів напряму підготовки  
6.050102 “Комп’ютерна інженерія”  
кафедри обчислювальної техніки  
всіх форм навчання

*Рекомендовано  
Вченою радою факультету  
інформатики та обчислювальної  
техніки НТУУ “КПІ”  
Протокол N \_\_\_\_ від  
\_\_\_\_.\_\_\_\_.2012*

Київ  
НТУУ “КПІ”  
2012

Системи реального часу. Методичні вказівки до лабораторних занять. [Текст]  
/ Уклад.: В.Є. Мухін, А.М. Волокита – К.: НТУУ «КПІ», 2012. – ХХ с.

Методичні вказівки призначені для студентів напряму підготовки  
6.050102 «Комп'ютерна інженерія» кафедри обчислювальної техніки всіх  
форм навчання. В посібнику наведена тематика лабораторних занять,  
теоретичні відомості, список літератури, контрольні питання.

Укладачі В.Є. Мухін, к.т.н., доцент  
А.М. Волокита, к.т.н., доцент

Відповідальний редактор

В.П.Широчин, д.т.н., професор

Рецензент

Полторак В.П., к.т.н., доцент  
кафедри автоматики та  
управління в технічних системах

*За редакцією укладачів*

## **Вступ**

Кредитний модуль “Системи реального часу” призначений для вивчення методів та засобів побудови апаратно-програмного забезпечення сучасних систем реального часу.

Метою проведення циклу лабораторних робіт є придбання студентами необхідних практичних навиків розробки та аналізу методів та засобів швидкої, в тому числі, паралельної обробки інформації в реальному часі.

Лабораторні роботи виконуються на сучасних персональних комп'ютерах із застосуванням сучасних компіляторів та відповідних оболонок.

В посібнику до кожної лабораторної роботи подано ґрунтовні, теоретичні відомості, зміст та обсяг яких достатній для підготовки, виконання та захисту виконаної роботи. Крім того, посібник містить завдання на лабораторні роботи, зміст звіту та контрольні запитаннями. Для поглибленого вивчення матеріалу необхідно звернутися до рекомендованої літератури.

Заключний етап лабораторної роботи – оформлення звіту, який подається на аркушах паперу формату А4 з урахуванням вимог стандартів.

## Лабораторна робота N 1

ДОСЛІДЖЕННЯ І РОЗРОБКА МОДЕЛЕЙ ВИПАДКОВИХ  
СИГНАЛІВ. АНАЛІЗ ЇХ ХАРАКТЕРИСТИК

**Мета роботи** - ознайомлення з принципами генерації випадкових сигналів, вивчення та дослідження їх основних параметрів з використанням засобів моделювання і сучасних програмних оболонок.

## 1.1. Основні теоретичні відомості

СРЧ обов'язково пов'язані з деякою зовнішнім середовищем. СРЧ забезпечує контроль за зміною параметрів зовнішнього середовища і в ряді випадків забезпечує управління параметрами середовища через деякі впливи на неї. Параметри середовища представляються деякою зміною фізичного середовища. При вимірах фізичного параметра ми отримуємо певний електричний сигнал на вході вимірювального датчика. Для подання такого електричного сигналу можна використовувати різні моделі. Найкращою моделлю досліджуваного сигналу є відповідна математична інтерпретація випадкового процесу. Випадковий сигнал або процес завжди представляється деякою функцією часу  $x(t)$ , значення якої не можна передбачити з точністю засобів вимірювання або обчислень, які б кошти моделі ми не використовували.

Для випадкового процесу його значення можна передбачити лише основні його характеристики: математичне сподівання  $M_x(t)$ , дисперсію  $D_x(t)$ , автокореляційну функцію  $R_{xx}(t, \tau), R_{xy}(t, \tau)$ .

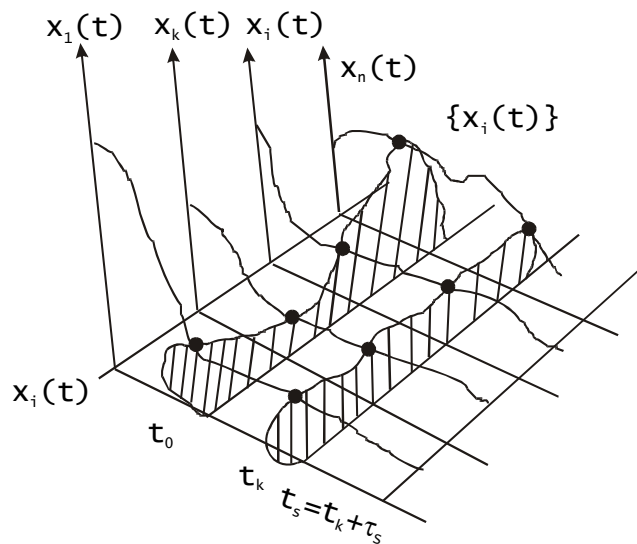
Ці характеристики для випадкового нестационарного процесу теж є функціями часу, але вони детерміновані. Для оцінки цих характеристик використовуються СРВ, які повинні обробити значну кількість інформації; для отримання їх при нестационарному процесі необхідно мати безліч реалізацій цього процесу.

При наявності такого ансамблю реалізації можуть бути обчислені значення  $M_x(t)$  та інші для кожного конкретного часу  $t_k$

Математичне сподівання  $M_x(t)$  для конкретного часу  $t_k$  визначається першим початковим моментом, випадкової величини  $x(t_k)$ , ка називається перерізом

випадкового процесу, її значення представлені у відповідному перерізі, усереднення проводиться по ансамблю:

$$M_x(t_k) = \lim_{N \rightarrow \infty} \cdot \frac{1}{N} \cdot \sum_{i=1}^N x_i(t_k)$$



Аналогічним способом обчислюється і дисперсія  $D_x(t)$ , у якій конкретне  $t_k$  оцінюється 2-м центральним моментом у відповідності з  $x(t_k)$ .

#### Властивість ергодичності стаціонарного випадкового процесу

Багато досліджуваних випадкових процесів та сигналів є стаціонарними, тобто вони з плином часу не згасають і не розгойдуються, тобто можна виділити  $x_{\max}$  і  $x_{\min}$ , що є детермінантами. Випадковий процес  $x(t)$  називається стаціонарним, якщо його основні характеристики  $M_x(t)$ ,  $D_x(t)$ ,  $R_{xx}(t, \tau)$  не залежать від часу їх зміни.

Для стаціонарного випадкового процесу  $M_x = \text{const}$ ,  $D_x = \text{const}$ , а  $R_{xx}(\tau)$  - залежить тільки від  $\tau$ . Для доказу того, що процес є стаціонарним зазвичай використовується вимірювання автокореляційної функції. Вона має вигляд:

$$R_{xx}(0) = D_x$$

Якщо  $R_x(\tau) \rightarrow 0$ , то це свідчить про те, що процес стаціонарний, має властивість ергодичності (інваріантності) або збереження енергії по відношенню до схеми обчислення його характеристик, тобто для стаціонарного сигналу можемо перейти при обчисленні характеристик від усереднення по ансамблю до усереднення за часом.

$$M_x = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \cdot \sum_{i=1}^N x_i(t_k) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^n x_i(t_k)$$

для  $x(t_k)$  перетину (одного перетину)

в межах  $x_i(t)$

(однієї  $i$ -тої реалізації)

$$D_x = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (x_i(t_k) - M_x)^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n-1} \cdot \sum_{k=0}^n (x_i(t_k) - M_x)^2 \geq 0$$

в межах перетину  $x(t_k)$

для однієї  $x_i(t)$  реалізації

## 1.2. Завдання на лабораторну роботу

Згенерувати випадковий сигнал по співвідношенню (див. нижче) відповідно варіантом по таблицею (Додаток 1) і розрахувати його математичне сподівання і дисперсію. Розробити відповідну програму і вивести отримані значення і графіки відповідних параметрів.

Генератор стаціонарного випадкового сигналу представлений як:

$$x(t) = \sum_{p=0}^m A_p \cdot \sin(w_p \cdot t + \varphi_p)$$

$p \rightarrow W_p$  - спектральні складові сигналу з частотою  $W_p$ , що змінюється від

$p = 0, m$ ,  $W_m$  - верхня частотна складова; кількість складових від 6 до 10.

$A_p$  - *random* - амплітуда;

$\varphi_p$  - *random* - фаза.

Далі отриманий випадковий сигнал  $x(t)$  представляється послідовністю дискретних відліків:

$$x(t) \rightarrow \{x(t_k)\}, k = \overline{0, N}$$

$$t \rightarrow t_k \rightarrow k \cdot \Delta t \rightarrow k$$

$\Delta t$  + вибирається як:

$$\Delta t = \frac{1}{k_{зан} \cdot f_{вн}} \quad k_{зан} = 3 - 5$$

### **1.3. Зміст звіту**

Звіт по лабораторній роботі повинен містити такі матеріали:

1. Титульний лист.
2. Основні теоретичні відомості, необхідні для виконання лабораторної роботи.
3. Умови завдання для варіанту бригади.
4. Лістинг програми із заданими умовами завдання.
5. Результати виконання кожної програми.
6. Висновки щодо виконання лабораторної роботи.

### **1.4. Контрольні питання**

1. Випадкові сигнали та процеси. Принципи генерації.
2. Методи та засоби обчислення параметрів випадкових сигналів в реальному часі.
3. Стаціонарні випадкові процеси.
4. Ергодичні випадкові процеси.

## ДОСЛІДЖЕННЯ АВТОКОРЕЛЯЦІЙНОЇ І ВЗАЄМНОЮ-КОРЕЛЯЦІЙНОЇ ФУНКЦІЙ ВИПАДКОВИХ СИГНАЛІВ

**Мета роботи** - ознайомлення з принципами побудови автокореляційної і взаємної кореляційної функцій, вивчення та дослідження їх основних параметрів з використанням засобів моделювання і сучасних програмних оболонок.

### 2.1. Основні теоретичні відомості

Значення автокореляційної функції фізично представляє зв'язок між значенням однієї і тієї ж величини, тобто для конкретних моментів  $t_k, \tau_s$ , значення  $R_{xx}(t, \tau)$  оцінюється друге змішаним центральним моментом 2-х перетинів випадкових процесів  $x(t_k), x(t_k + \tau_s)$

$$R_{xx}(t, \tau_s) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N \overbrace{(x_i(t_k) - M_x(t_k))}^{x(t_k)} \cdot \overbrace{(x_i(t_k + \tau_s) - M_x(t_k + \tau_s))}^{x(t_k + \tau_s)}$$

для кожного конкретного інтервалу потрібно проходити по всім  $t_k$  (перетинах).

Центральні значення можна замінити:

$$\overline{x(t_k)}, \overline{x(t_k, \tau_s)}, \text{ тобто їх } M_x = 0$$

$$\left[ \begin{array}{l} R_{xx}(t, \tau) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N \overline{x_i(t)} \cdot \overline{x_i(t + \tau)} \\ R_{xx}(t, \tau) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N \overline{x_i(t)} \cdot \overline{x_i(t + \tau)} \end{array} \right]$$

Обчислення кореляційної функції  $R_{xx}(t, \tau)$  є відносно складним, оскільки необхідно попереднє обчислення математичного очікування  $M_x$  для виконання кількісної оцінки, іноді виповнюється ковариационною функцією:

$$C_{xx}(t, \tau) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N x_i(t) \cdot x_i(t + \tau)$$

У завданнях управління частіше використовується нормована кореляційна функція:



$$S_{xx}(t, \tau) = \frac{R_{xx}(t, \tau)}{D_x(t)} < 1$$

Дослідження нестандартних випадкових сигналів вимагає значних обсягів пам'яті, тому в більшості наукових досліджень приймається гіпотеза про стаціонарності випадкового сигналу на інтервалі  $(t_0 \dots t_1)$ .

Кореляційна функція для стаціонарного сигналу:

$$\begin{aligned} R_x(\tau_s) &= \lim_{N \rightarrow 0} \cdot \frac{1}{N-1} \cdot \sum_{i=1}^N \underbrace{(x_i(t_k) - M_x)}_{X(t_k)} \cdot \underbrace{(x_i(t_k + \tau_s) - M_x)}_{x(t_s)} = \\ &= \lim_{n \rightarrow 0} \cdot \frac{1}{n-1} \cdot (x_i(t_k) - M_x) \cdot (x_i(t_k + \tau_s) - M_x) \end{aligned}$$

$x(t)$  в межах однієї реалізації показує наскільки швидко змінюється сигнал.

Коваріаційна функція для стаціонарного сигналу:

$$C_{xx}(\tau) = \lim_{N \rightarrow 0} \cdot \frac{1}{n-1} \cdot \sum_{k=1}^n Lx(t_k) \cdot x(t_k + \tau)$$

показує ступінь зв'язності між значеннями одного і того ж сигналу.

Таким чином для стаціонарних і ергодичні процесів обчислення параметрів сигналів реалізуються шляхом усереднення за часом у межах однієї реалізації.

Статистичне вимірювання зв'язків між двома стаціонарними випадковими процесами

Дуже важливим виявляється не тільки обчислення автокореляційної функції  $R_{xx}(\tau)$ , але і обчислення взаємної кореляційної функції  $R_{xy}(\tau)$  для двох випадкових процесів  $x(y)$ ,  $y(t)$ , для якої не можна на основі зовнішнього спостереження сказати, чи є залежність між ними. Для розрахунку взаємної кореляційної функції:

$$R_{xy}(\tau) = \lim_{n \rightarrow 0} \cdot \frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^n \underbrace{(x_i(t_k) - M_x)}_{X(t_k)} \cdot \underbrace{(y(t_k + \tau) - M_y)}_{y(t_k - \tau)} =$$

$\tau$  - випробувальний інтервал, на конкретному значенні якого досліджується взаємний вплив.

## 2.2. Завдання на лабораторну роботу

Для згенерованого випадкового сигналу з Лабораторної роботи N 1 відповідно до заданого варіантом (Додаток 1) розрахувати його автокореляційної функцію.

Згенерувати копію даного сигналу і розрахувати взаємнокореляційну функцію для 2-х сигналів. Розробити відповідну програму і вивести отримані значення і графіки відповідних параметрів.

### **2.3. Зміст звіту.**

Звіт по лабораторній роботі повинен містити такі матеріали:

1. Титульний лист.
2. Основні теоретичні відомості, необхідні для виконання лабораторної роботи.
3. Умови завдання для варіанту бригади.
4. Лістинг програми із заданими умовами завдання.
5. Результати виконання кожної програми.
6. Висновки щодо виконання лабораторної роботи.

### **2.4. Контрольні питання**

1. Статистичне вимірювання зв'язків між випадковими процесами.
2. Автокореляційна функція і її властивості.
3. Взаємно-кореляційна функція і її властивості.
4. Коваріаційна функція. Особливості її розрахунку в реальному часі.

## ДОСЛІДЖЕННЯ ПАРАМЕТРІВ АЛГОРИТМУ ДИСКРЕТНОГО ПЕРЕТВОРЕННЯ ФУР'Є

Мета роботи - ознайомлення з принципами реалізації спектрального аналізу випадкових сигналів на основі алгоритму перетворення Фур'є, вивчення та дослідження особливостей даного алгоритму з використанням засобів моделювання і сучасних програмних оболонок.

### 3.1. Основні теоретичні відомості

В основі спектрального аналізу використовується реалізація так званого дискретного перетворювача Фур'є (ДПФ) з неформальним (не формульним) поданням сигналів, тобто досліджувані сигнали представляються послідовністю відліків  $x(k)$

$$F_x(p) = \sum_{k=0}^{N-1} x(k) \cdot e^{-jk\Delta t p \Delta \omega}$$

$$\omega \rightarrow \omega_p \rightarrow p\Delta\omega \rightarrow p \quad \Delta\omega = \frac{2\pi}{T}$$

На всьому інтервалі подання сигналів  $T$ ,  $2\pi$  - один період низьких частот. Щоб підвищити точність треба збільшити інтервал  $T$ .

$$t \rightarrow t_k \rightarrow k\Delta t \rightarrow k; \quad \Delta t = \frac{T}{N} = \frac{1}{k_{zan}} \cdot f'_{cp}.$$

ДПФ - проста обчислювальна процедура типу зв'язки (тобто  $\Sigma$ -е парних множень), яка за складністю також має оцінку  $N^2 + N$ . Для реалізації ДПФ необхідно реалізувати поворотні коефіцієнти ДПФ:

$$W_N^{pk} = e^{-jk\Delta t \Delta \omega p}$$

Ці поворотні коефіцієнти записуються в ПЗУ, тобто є константами.

$$W_N^{pk} = e^{-jk \frac{T}{N} p \frac{2\pi}{T}} = e^{-j \frac{2\pi}{N} pk}$$

$W_N^{pk}$  не залежать від  $T$ , а лише від розмірності перетворення  $N$ . Ці коефіцієнти подаються не в експоненційній формі, а в тригонометричній.

$$W_N^{pk} = \cos\left(\frac{2\pi}{N}pk\right) - j\sin\left(\frac{2\pi}{N}pk\right)$$

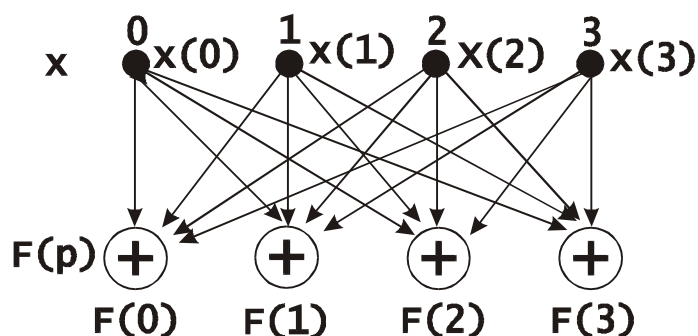
Ці коефіцієнти повторюються (тому і  $p$  до  $N-1$ , і  $k$  до  $N-1$ , а  $(N-1) \cdot (N-1)$  з періодом  $N(2\pi)$ .. Т.ч. в ПЗУ треба зберігати  $N$  коефіцієнтів дійсних і уявних частин. Якщо винести знак коефіцієнта можна зберігати  $N/2$  коефіцієнтів.

$2\pi/N$ - деякий мінімальний кут, на який повертаються ці коефіцієнти. У ПЗУ окремо зберігаються дійсні та уявні частини компілюють коефіцієнтів. Більш загальна форма ДПФ представляється як:

$$F_x(p) = \sum_{k=0}^{N-1} x(k) \cdot W_N^{pk}$$

ДПФ дуже зручно представити у вигляді відповідного графа.

Приклад: граф 4-х точкового ДПФ. ( $k = \overline{0,3}$ ;  $p = \overline{0,3}$ )



Коефіцієнти зручно представити у вигляді таблиці:

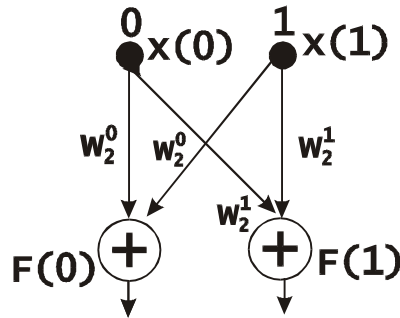
$\begin{smallmatrix} p \\ k \end{smallmatrix}$	0	1	2	3
0	$W_4^0$	$W_4^0$	$W_4^0$	$W_4^0$
1	$W_4^0$	$W_4^1$	$W_4^2$	$W_4^3$
2	$W_4^0$	$W_4^2$	$W_4^0$	$W_4^2$
3	$W_4^0$	$W_4^3$	$W_4^2$	$W_4^1$

Різних тут всього 4 коефіцієнта:

$$W_4^0 = \cos\left(\frac{2\pi}{4} \cdot 0\right) - j\sin\left(\frac{2\pi}{4} \cdot 0\right) = 1 \quad (W_4^1 = -j; W_4^2 = -1; W_4^3 = +j)$$

Можна в пам'яті зберігати тільки 2, а решта брати з "-", якщо  $\frac{N}{2} - 1 < pk$ . 4 ДПФ це вироджені перетворення, по модулю ці коефіцієнти = 1 і всі 4 ДПФ можуть реалізуватися на 24-х суматора. Це буде далі використовуватися в реалізації ШПФ з основою 4.

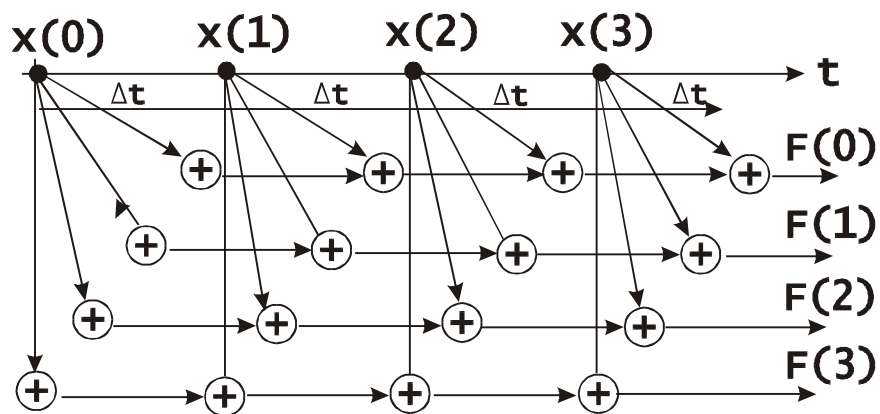
2ДПФ реалізується ще простіше:



$$(W_2^0 = +1; W_2^1 = -1)$$

#### Спеціальна схема реалізації ДПФ з активним використанням пауз між відліками

При реалізації ДПФ можна організувати обробку в темпі надходження даних. Реалізація схеми в БПФ з активним використанням пауз на 4-х точках виглядає так:



Ця схема сильно залежить от  $\Delta t$  и  $N$ .

### **3.2. Завдання на лабораторну роботу**

Для згенерованого випадкового сигналу з Лабораторної роботи N 1 відповідно до заданого варіантом (Додаток 1) побудувати його спектр, використовуючи процедуру дискретного перетворення Фур'є. Розробити відповідну програму і вивести отримані значення і графіки відповідних параметрів.

### **3.3. Зміст звіту**

Звіт по лабораторній роботі повинен містити такі матеріали:

1. Титульний лист.
2. Основні теоретичні відомості, необхідні для виконання лабораторної роботи.
3. Умови завдання для варіанту бригади.
4. Лістинг програми із заданими умовами завдання.
5. Результати виконання кожної програми.
6. Висновки щодо виконання лабораторної роботи.

### **3.4. Контрольні питання**

1. Імпульсний спектр і спектр потужності. Пряме і зворотне перетворення Фур'є.
2. Спектральна щільність і взаємно-спектральна щільність.
3. Зв'язки між спектральною потужністю і кореляційною функцією.
4. Спектр енергії.
5. Ортогональні і парціальні складові спектрів. Функція когерентності.
6. Особливості організації дискретного перетворення Фур'є (ДПФ). Схема ДПФ з активним використанням пауз між відліками

## ДОСЛІДЖЕННЯ АЛГОРИТМУ ШВИДКОГО ПЕРЕТВОРЕННЯ ФУР'Є З ПРОРІДЖУВАННЯМ ВІДЛІКІВ СИГНАЛІВ У ЧАСІ

**Мета роботи** - ознайомлення з принципами реалізації прискореного спектрального аналізу випадкових сигналів на основі алгоритму швидкого перетворення Фур'є, вивчення та дослідження особливостей даного алгоритму з використанням засобів моделювання і сучасних програмних оболонок.

### 4.1. Основні теоретичні відомості

Швидкі алгоритми ПФ отримали назву схеми Кулі-Тьюкі. Всі ці алгоритми використовують регулярність самої процедури ДПФ і те, що будь-який складний коефіцієнт  $W_N^{pk}$  можна розкласти на прості комплексні коефіцієнти.

$$W_N^{pk} = W_N^1 W_N^2 W_N^3$$

Для стану таких груп коефіцієнтів процедура ДПФ повинна стати багаторівневою, не порушуючи загальних функціональних зв'язків графа процедури ДПФ.

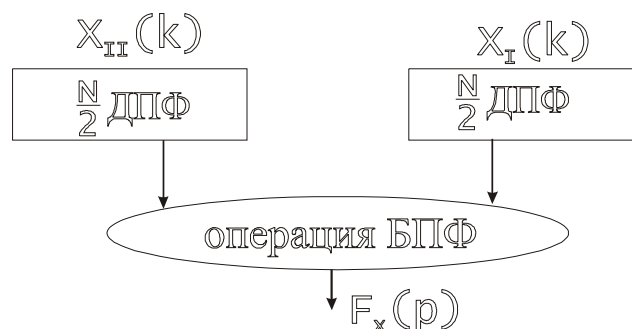
Існують формальні підходи для отримання регулярних графів ДПФ. Всі отримані алгоритми поділяються на 2 класи:

- 1) На основі реалізації принципу зрізжені за часом  $X_k$
- 2) на основі реалізації принципу зрізжені відліків шуканого спектру  $F(p)$ .

Найпростіший принцип зрізжені - поділу на парні/непарні пів-послідовності, які потім обробляють паралельно. А потім знаходять алгоритм, як отримати шуканий спектр.

Якщо нам вдасться ефективно розділити, а потім алгоритм отримання спектра, то ми можемо перейти від  $N$  ДПФ до  $N/2$  ДПФ.

$$X(k) \begin{cases} \rightarrow X_{II}(k) \\ \rightarrow X_I(k) \end{cases}$$



Розглянемо формальний висновок алгоритму ШПФ, який реалізує в одноразовому застосуванні принцип проріджування по часу:

$$F_x(p) = \sum_{k=0}^{N-1} X(k) W_N^{pk} = \sum_{k=0}^{N-2} X_{II}(k) W_N^{pk} + \sum_{k=1}^{N-2} X_I(k) W_N^{pk}$$

$$X_{II}(k) \rightarrow X(2k^*); \quad X_I(k) \rightarrow X(2k^*+1); \quad k^* = 0; \frac{N}{2} - 1$$

$$F_x(p) = \sum_{k^*=0}^{\frac{N}{2}-1} X(2k^*) W_N^{pk^*} + \sum_{k^*=0}^{\frac{N}{2}-1} X(2k^*+1) W_N^{p(2k^*+1)}$$

$$W_N^{p2k^*} = e^{-j \frac{2\pi}{N} p 2k^*} = e^{-j \frac{2\pi}{N/2} p k^*} = W_{\frac{N}{2}}^{p k^*}$$

У цій першій сумі з'явилися коефіцієнти в 2 рази менше.

У другій сумі з'явився множник, який не залежить від  $k^*$  тобто він може бути винесений за знак суми.

$$W_N^{p(2k^*+1)} = W_N^{p2k^*} \cdot W_N^p = W_{\frac{N}{2}}^{p k^*} W_{\frac{N}{2}}^p$$

$$F_x(p) = \underbrace{\sum_{k^*=0}^{\frac{N}{2}-1} X(2k^*) W_{\frac{N}{2}}^{p k^*}}_{F_{II}(p^*)} + W_{\frac{N}{2}}^p \underbrace{\sum_{k^*=0}^{\frac{N}{2}-1} X(2k^*+1) W_{\frac{N}{2}}^{p k^*}}_{F_I(p^*)}$$

Ми бачимо, що всі вирази можна розділити на 2 частини, які обчислюються паралельно.

$F_I(p^*)$  - проміжний спектр, побудований на парних відліку. У цьому алгоритмі передбачається, щоб отримати спектр  $F(p)$  треба виконати 2 незалежних  $N/2$  ШПФ.

$$1) \quad F_{II}(p^*) = \sum_{k^*=0}^{\frac{N}{2}-1} X(2k^*) W_{\frac{N}{2}}^{p k^*} \quad p^* = 0, \frac{N}{2} - 1$$

$$2) \quad F_I(p^*) = \sum_{k^*=0}^{\frac{N}{2}-1} X(2k^*+1) W_{\frac{N}{2}}^{p k^*}$$

А на наступному кроці буде реалізована швидка збірка, тобто ШПФ з зрідженим за часом за формулою:

$$F_\tau(p^*) = F_{II}(p^*) + W_{\frac{N}{2}}^{p^*} F_I(p^*)$$



Але в цьому виразі різні  $p$  для зв'язку їх

Якщо  $p < N/2$ , то  $p = p^*$  1-а половина спектру

Якщо  $p \geq N/2$ , то  $p = p^* + N/2$  2-а половина спектру

В алгоритмі БПФ вже використовуються 2 рівня

$$F_x(p^*) = F_{II}(p^*) + W_N^{p^*} F_I(p^*)$$

$$F_x\left(p^* + \frac{N}{2}\right) = F_{II}(p^*) - W_N^{p^*} F_I(p^*)$$

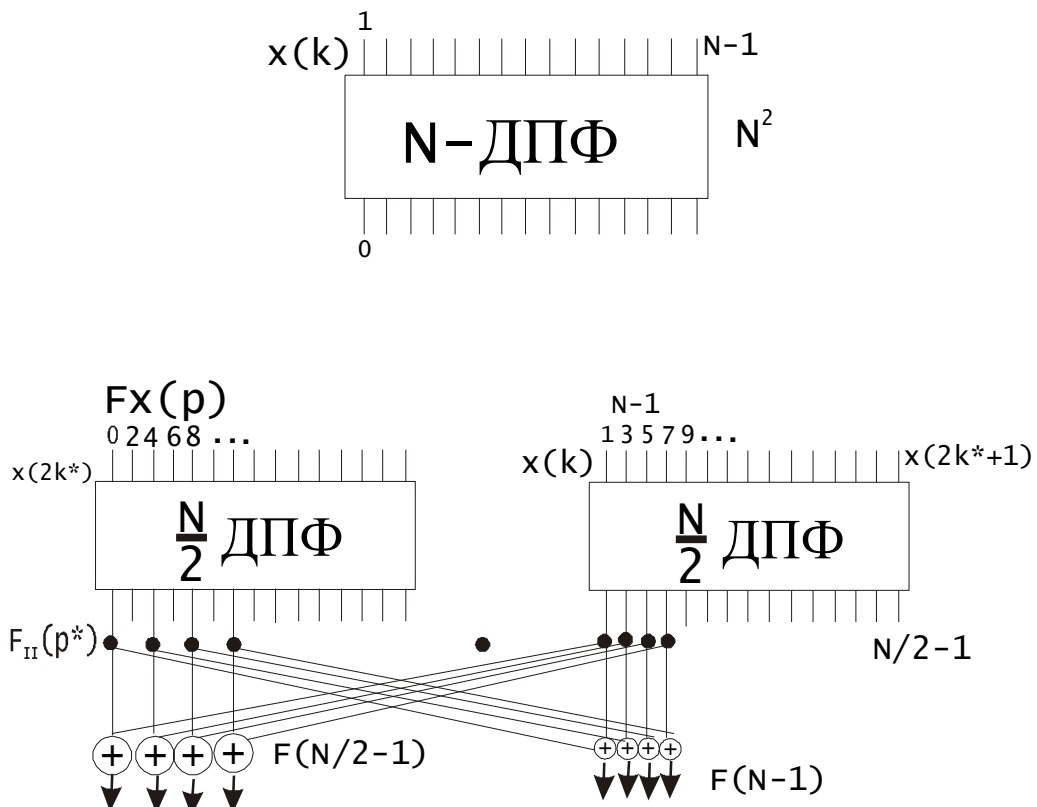
Алгоритм ШПФ з зрідженням по часу:

$$F_x(p^*) = F_{II}(p^*) + W_N^{p^*} F_I(p^*) \quad p^* = 0, \frac{N}{2} - 1$$

$$F_x\left(p^* + \frac{N}{2}\right) = F_{II}(p^*) - W_N^{p^*} F_I(p^*) \quad W_N^{p^*}$$

$\frac{N}{2}$  помножений на комплексний коефіцієнт.

Загальна схема самого ДПФ змінилася замість однорівневого перетворення.



Буде потрібно:  $\frac{N^2}{2} + \frac{N}{2}$  множень. Точно такий же прийом можна виконати і

для  $\frac{N}{2}$  ДПФ перетворень:

$$X(2k^*) \begin{cases} \rightarrow X_{II}(2k^*) \\ \rightarrow X_I(2k^*) \end{cases}$$

тоді

$$X(2 \cdot 2k^*) \rightarrow X(4k^{**}), X(2 \cdot (2k^* + 1)) \rightarrow X(4k^* + 2)$$

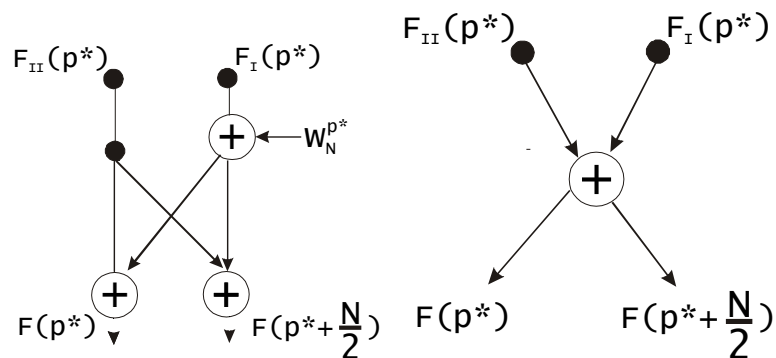
$$X_I(2k^* + 1) \rightarrow X(2 \cdot 2k^{**} + 1) = X(4k^{**} + 1);$$

$$\rightarrow X(2 \cdot (2k^* + 1) + 1) = X(4k^{**} + 3);$$

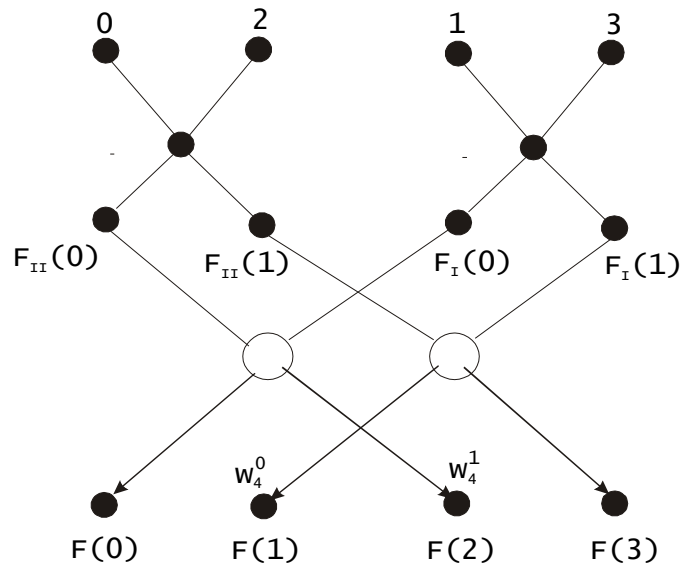
### Особливості апаратної реалізації базової операції БПФ з проріджуванням за часом.

В процесорах цифрової обробки сигналів спеціальне АЛУ орієнтоване на виконання реалізації ШПФ або за часом, або по частоті. Функції, реалізовані базовими операціями БПФ, визначаються базовими алгоритмами. Операнди представлені як комплексні величини. Особливість операції - 2 операнда на вході, на виході так само 2 результату.

Графічно базову операцію БПФ описують так:



Цю базову операцію називають метеликом через форми графа. Для спрощеного аналізу процедури БПФ використовують символічне зображення.



### Приклад: 4БПФ

При переході до процедури БПФ з зрідженням за часом від класичного ДПФ вже з'являється кілька рівнів перетворення даних і на кожному рівні ми в деякій послідовності поділяємо знову на парні і непарні відліки. У БПФ з зрідженням за часом розмірність змінних перетворень ДПФ знизу вгору.

1	16	N/16 ДПФ
2	8	N/8 ДПФ
3	4	N/4 ДПФ
4	2	N/2 ДПФ
5	1	N ДПФ

Загальна кількість рівнів заміщення в БПФ:  $m = \log_2 N$ ,  $N$ -ціла ступінь 2.

Тут мова йде про найпростішому БПФ з основою 2, тобто в базові операції є 2-х точкове БПФ. На кожному рівні БПФ з зрідженням за часом треба здійснити додаткову перестановку відліків на парні і непарні, що призводить до загального недоліку алгоритму - необхідність спеціальної перестановки відліків досліджуваного сигналу перед перетворенням.

Для реалізації ШПФ з зрідженням за часом треба здійснювати двійкову інверсую перестановку відліків або просто обчислити адреси.

Для визначення № чергового відліку в 2-во інверсній перестановці використовується спеціальна схема, роботу якої можна представити у вигляді таблиці:

Двійковий код	№	Двійковий інверсний код	Номер відліку
0000	0	0000	0 }
	1	1000	8 }
	2	0100	4 }
	3	1100	12 }
	4	0010	2 }
	5	1010	10 }
.....	.....	.....	.....
	14	0111	7 }
	15	1111	15 }

Обчислювальна складність ДПФ з зрізаним за часом  $N/2$  базових перетворень на кожному рівні.

$\frac{N}{2} \log_2 N$  - Загальна кількість реалізованих базових операцій і на кожному рівні є одне комплексне множення .. В CPU ШПФ створюється деякий спеціальне АЛУ, яке призначене для швидкої і ефективної реалізації ШПФ типу "метелик".

Ідея реалізації:

спочатку + на коефіцієнт, а потім + ( $\pm$  комплексні числа, тобто 2 ДПФ)

$F_I$  - проміжний спектр при перетворенні тільки непарних відліків.

$F_{II}$  - парних.

Всі дані тут комплексні, тоді нехай:

$$F_{II}(p) = a(p) + jb(p); F_I(p) = c(p) + jd(p); X_{II}(k^*) = X_I(k^*) + X_2(k^* + \frac{N}{2});$$

$$\left. \begin{array}{l} R_e F(p), I_m F(p) \\ R_e F(p + N/2), I_m F(p + N/2) \end{array} \right\} \text{Повинні отримати на виході АЛУ}$$

$$Re F(p) = a(p) + (\alpha(p) \cdot c(p) - \beta(p) \cdot d(p))$$

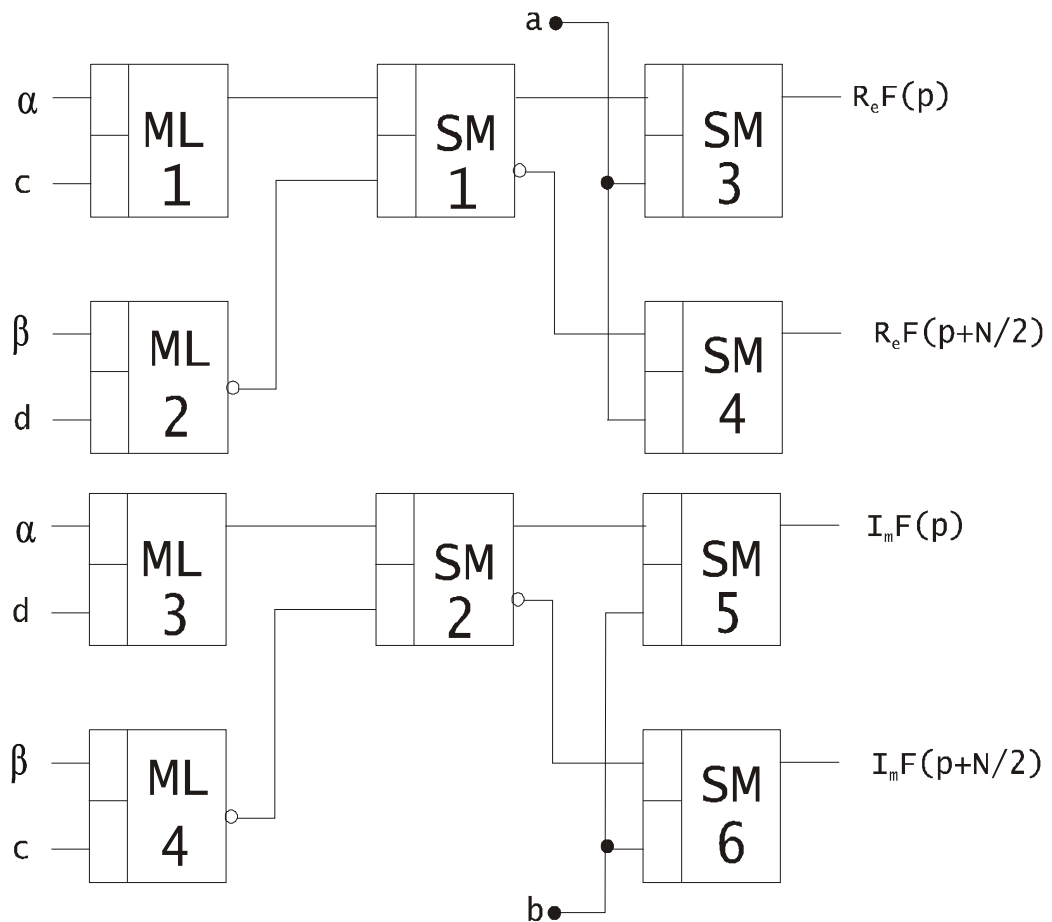
$$Re F(p + N/2) = a(p) - (\alpha(p) \cdot c(p) - \beta(p) \cdot d(p))$$

$$I_m F(p) = b(p) + (\alpha(p) \cdot d(p) + \beta(p) \cdot c(p))$$

$$I_m F(p + N/2) = b(p) - (\alpha(p) \cdot d(p) + \beta(p) \cdot c(p))$$

Очевидно, що в такому спеціальному АЛУ треба використовувати 4 помножувача і 6 суматорів, які зазвичай мають декілька буферних регістрів.

Схема АЛУ:



Базова операція БПФ може виконуватися в один такт по паралельній схемі з 4-ма множниками; в 2 такти по послідовно-паралельною схемою з 2 множниками; в 4 такти по послідовній схемі з одним помножувачем і декількома регістрами.

#### 4.2. Завдання на лабораторну роботу

Для згенерованого випадкового сигналу з Лабораторної роботи N 1 відповідно до заданого варіантом (Додаток 1) побудувати його спектр, використовуючи процедуру швидкого перетворення Фур'є з проріджуванням відліків сигналу за часом. Розробити відповідну програму і вивести отримані значення і графіки відповідних параметрів.

#### 4.3. Зміст звіту

Звіт по лабораторній роботі повинен містити такі матеріали:

1. Титульний лист.

2. Основні теоретичні відомості, необхідні для виконання лабораторної роботи.
3. Умови завдання для варіанту бригади.
4. Лістинг програми із заданими умовами завдання.
5. Результати виконання кожної програми.
6. Висновки щодо виконання лабораторної роботи.

#### **4.4. Контрольні питання**

1. Особливості організації швидкого перетворення Фур'є (ШПФ) з проріджуванням відліків сигналів (з проріджуванням у часі).
2. Алгоритм і базова операція БПФ з проріджують у часі.
3. Апаратна реалізація БПФ з проріджуванням в часі.
4. Спеціалізовані арифметико-логічні пристрої і процесори ШПФ.
5. Організація БПФ з заміщення або без заміщення відліків в оперативній пам'яті процесора.

## ДОСЛІДЖЕННЯ АЛГОРИТМУ ШВИДКОГО ПЕРЕТВОРЕННЯ ФУР'Є З ОСНОВОЮ 4

**Мета роботи** - ознайомлення з принципами реалізації прискореного спектрального аналізу випадкових сигналів на основі алгоритму швидкого перетворення Фур'є з основою 4, вивчення та дослідження особливостей даного алгоритму з використанням засобів моделювання і сучасних програмних оболонок.

### 5.1. Основні теоретичні відомості

В якості основи розглянемо реалізацію принципу з зрізженим по частоті.

На вхід графа надходять відліки, які відстоять на  $\frac{N}{4}$

$$\left( p, p + \frac{N}{4}, p + \frac{N}{2}, p + \frac{3N}{4} \right), p = \overline{0,3}$$

На 2 рівні 4 групи базових операцій (БО) - по одній БО. Вони відповідають  $\frac{N}{16}$  ДПФ.

Для організації N-точкового ШПФ з основою доцільно ввести поняття групи БО.

Аналізуючи граф БПФ з зрізженим по частоті і підставою 4, можна зауважити, що на першому рівні еквівалентно N-точкове перетворення, на першому рівні з'являється:

1 рівень – 1 група	$p = 0, \overline{\frac{N}{4} - 1}$
2 рівень – 4 групи	$p = 0, \overline{\frac{N}{16} - 1}$
3 рівень – 16 груп	$p = 0, \overline{\frac{N}{64} - 1}$

На виході процедури БПФ відліки спектру представляються в деякої спеціальної послідовності, тобто після перестановок "по 4".

Ця послідовність називається четвертинної-інверсної. Тобто для визначення номерів відліку спектра треба 2-ий код номера виходу. Переставити симетрично по 2 біти.

№ виходу	2-ий код	4-но інверсн.	№ вих.
0	0000	0000	0
1	0001	0100	4
2	0010	1000	8
3	0011	1100	12
4	0100	0001	1
5	0101	0101	5
6	0110	1001	9
7	0111	1101	13
8	1000	0010	2
9	1001	0110	6
10	1010	1010	10
11	1011	1110	14
12	1100	0011	3
13	1101	0111	7

#### Особливості апаратної реалізації базової операції БПФ з основою 4.

Особливість реалізації БО в тому, що 4 ДПФ можна виконати тільки на суматора, без додаткових множень. При будь-якому іншому підставі (крім 2) всередині ДПФ треба ще помножити.

Розглянемо більш докладно схему АЛП для реалізації 4 ДПФ.

$$\text{В загальному вигляді: } Fx(p) = \sum_{k=0}^{N-1} x(k) \cdot W_N^{pk}, \quad \frac{N}{16}$$

$$\text{В нашому випадку } N = 4, \quad p = \overline{0,3}, \quad k = \overline{0,3}$$

$$F(0) = x(0)W_4^0 + x(1)W_4^0 + x(2)W_4^0 + x(3)W_4^0$$

$$F(1) = x(0)W_4^0 + x(1)W_4^1 + x(2)W_4^2 + x(3)W_4^3$$

$$F(2) = x(0)W_4^0 + x(1)W_4^2 + x(2)W_4^0 + x(3)W_4^2$$

$$F(3) = x(0)W_4^0 + x(1)W_4^3 + x(2)W_4^2 + x(3)W_4^1$$

$$W_4^0 = 1, W_4^1 = -j, W_4^2 = -1, W_4^3 = j$$



$$\begin{cases} F(0) = x(0) + x(1) + x(2) + x(3) \\ F(1) = x(0) - jx(1) - x(2) + jx(3) \\ F(2) = x(0) - x(1) + x(2) - x(3) \\ F(3) = x(0) + jx(1) - x(2) - jx(3) \end{cases}$$

Відліки  $x(k)$  дійсні на першому рівні, а на наступному вони вже комплексні:

$$\begin{cases} x(0) = a + jb \\ x(1) = c + jd \\ x(2) = e + jf \\ x(3) = g + jh \end{cases}$$

$F(p)$  - відліки комплексного спектра - це комплексні величини.

$$R_e F(0) = a + c + e + g$$

$$I_m F(0) = b + d + f + h$$

$$R_e F(1) = a + d - e - h$$

$$I_m F(1) = b - c - f + g$$

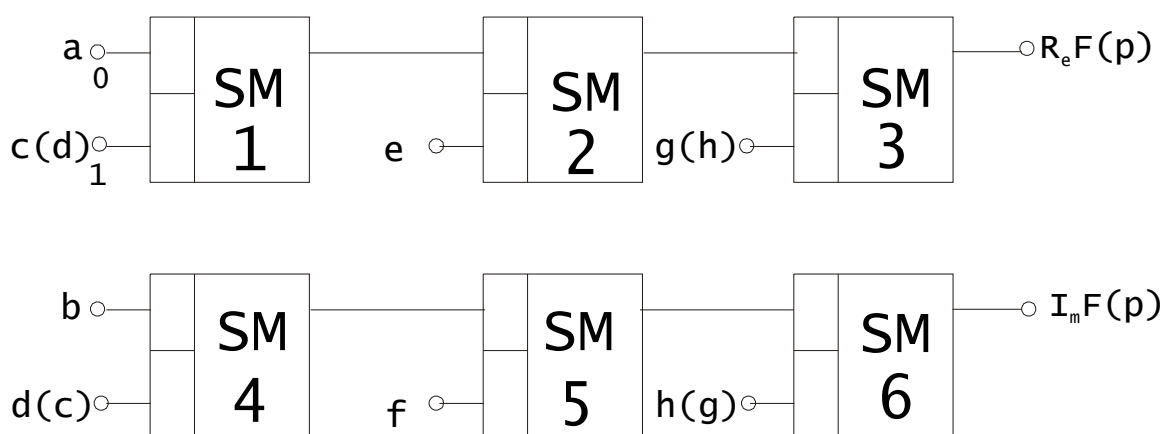
$$R_e F(2) = a - c + e - g$$

$$I_m F(2) = b - d + f - h$$

$$R_e F(3) = a - d - e + h$$

$$I_m F(3) = b + c - f - g$$

Кожний такий вираз реалізується трьома суматорами:



Шість суматорів для реалізації обчислень ( $Re$ ,  $Im$ ) тільки для одного спектра. Якщо їх 4 то в 8 ланцюжках по 3 суматора. Якщо до цих 6 суматора додати 4 помножувача як 1 комплексне множення, то БО може виконатися за 4 такту.

## **5.2. Завдання на лабораторну роботу**

Для згенерованого випадкового сигналу з Лабораторної роботи N 1 відповідно до заданого варіантом (Додаток 1) побудувати його спектр, використовуючи процедуру швидкого перетворення Фур'є з основою 4 (БПФ4). Розробити відповідну програму і вивести отримані значення і графіки відповідних параметрів.

## **5.3. Зміст звіту**

Звіт по лабораторній роботі повинен містити такі матеріали:

1. Титульний лист.
2. Основні теоретичні відомості, необхідні для виконання лабораторної роботи.
3. Умови завдання для варіанту бригади.
4. Лістинг програми із заданими умовами завдання.
5. Результати виконання кожної програми.
6. Висновки щодо виконання лабораторної роботи.

## **5.4. Контрольні питання**

1. Порівняльний аналіз організації БПФ з основою 2 (2-ДПФ) і 4 (4 ДПФ).
2. Особливості реалізації ШПФ з основою 4 і проріджуванням по частоті.
3. Граф процедури БПФ з основою 4 і переваги її організації.
4. Спеціалізовані арифметико-логічні пристрої і процесори ШПФ.

## СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. К.Ю. Богачев. Системы реального времени. М.: Изд-во ЦПИ при механико-математическом ф-те МГУ, 2001. – 200 с.
2. С.В. Назаров. Операционные среды, системы и оболочки. Основы структурной и функциональной организации: Учебное пособие. – М.:КУДИЦ-ПРЕСС, 2007. – 2007. – 504 с., ил.
3. Е. Шрюфер. Цифрова обробка дискретизованих сигналів. Киев: Либідь, 2005. - 295 с.
4. Дж. П. Мюллер, И. Чоудри. Microsoft Windows 2000. Настройка и оптимизация производительности. Пер. с англ. – М.: Издательство ЭКОМ, 2001. – 512 с.: ил.
5. Э. Таненбаум. Современные операционные системы. 2-е изд. / Спб.: Питер, 2003. – 1040 с.
6. Э. Таненбаум, В. Стен. Распределенные системы. Принципы и парадигмы. Спб.: Питер, 2003. – 877 с.: ил.
7. Д. Алексеев и др. Практика работы с QNX. М.: Издательский дом “КомБук”, 2004. – 432 с.: ил.
8. А.И. Никитин. Общее программное обеспечение систем реального времени. К: Наукова думка, 1980. - 121 с.

## ЗМІСТ

Вступ.....	3
Лабораторна робота №1. Дослідження та розробка моделей випадкових сигналів. Аналіз їх характеристик.....	4
Лабораторна робота №2. Дослідження автокореляційної та взаємнокореляційної функцій випадкових сигналів.....	8
Лабораторна робота N3. Дослідження параметрів алгоритму дискретного перетворення Фур'є.....	11
Лабораторна робота N4. Дослідження алгоритму швидкого перетворення Фур'є з прорізуванням відліків сигналів (у часі).....	15
Лабораторна робота N5. Дослідження алгоритму швидкого перетворення Фур'є з основою 4 (4-ДПФ).....	23
Список рекомендованої літератури.....	27
Додаток 1.....	29

## ДОДАТОК 1

Таблиця вибору варіантів для виконання лабораторних робіт  
Варіант вибирається за останніми двома цифрами залікової книжки

Варіант	Число гармонік в сигналі $n$	Гранична частота, $\omega_{\text{гр}}$	Кількість дискретних відліків, $N$
1	6	1200	64
2	10	900	256
3	8	1100	256
4	12	2400	1024
5	14	2000	256
6	12	1800	64
7	10	2700	256
8	6	1500	1024
9	8	2000	256
10	14	1700	64
11	10	1500	256
12	8	1200	1024
13	10	1500	256
14	6	2100	1024
15	14	2500	64
16	12	900	256
17	8	1200	1024
18	10	1500	256
19	12	1100	64
20	6	1700	1024
21	14	1800	256
22	10	1200	64
23	8	1500	1024
24	6	2100	256
25	12	2700	64