Московский Государственный Университет имени М.В.Ломоносова
Факультет вычислительной математики и кибернетики

Отчет по практическому заданию 2 в рамках курса
«Суперкомпьютерное моделирование и технологии»

Решение краевой задачи для уравнения Пуассона с потенциалом методом конечных разностей

Выполнил студент 610 группы
Афанасьев Виталий Игоревич

1 Постановка задачи

В прямоугольнике $\Pi = \{(x, y) : A_1 <= x <= A_2, B_1 <= y <= B_2\}$, граница Γ состоит из отрезков:

$$\gamma_R = (A_2, y) : B_1 <= y <= B_2,$$
$$\gamma_L = (A_1, y) : B_1 <= y <= B_2,$$
$$\gamma_T = (x, B_2) : A_1 <= x <= A_2,$$
$$\gamma_B = (x, B_1) : A_1 <= x <= A_2,$$

рассматривается дифференциальное уравнение Пуассона с потенциалом:

$$-\Delta u + q(x, y)u = F(x, y),$$

в котором оператор Лапласа имеет вид:

$$\Delta u = \frac{\partial}{\partial x}\Big(k(x, y)\frac{\partial u}{\partial x}\Big) + \frac{\partial}{\partial y}\Big(k(x, y)\frac{\partial u}{\partial y}\Big)$$

Для выделения единственного решения уравнение дополняется граничными условиями первого рода:

$$u(x, y) = \varphi(x, y)$$

В данном варианте предлагается решить данное уравнение для функций:

$$u(x, y) = exp\Big(1 - (x + y)^2\Big), \quad \Pi = [-1, 2][-2, 2],$$
$$q(x, y) = (x + y)^2,$$
$$k(x, y) = 4 + x,$$

Подстановкой предложенных функций нетрудно получить функцию F:

$$F(x, y) = u(x, y)\Big(6x + 2y + 16 - (x + y)^2(8x + 31)\Big);$$

2 Разностная схема

Для решения предложенной задачи составим разностную схему:

$$
\begin{aligned}
q_{ij}u_{ij} - \frac{1}{h_x}\big(k(x_i+0.5h_x,y_j)\frac{u_{i+1j}-u_{ij}}{h_x} - k(x_i-0.5h_x,y_j)\frac{u_{ij}-u_{i-1j}}{h_x}\big) \\
- \frac{1}{h_y}\big(k(x_i,y_j+0.5h_y)\frac{u_{ij+1}-u_{ij}}{h_y} - k(x_i,y_j-0.5h_y)\frac{u_{ij}-u_{ij-1}}{h_y}\big) \\
= F_{ij} \quad i=\overline{2,M-2}, j=\overline{2,N-2}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
q_{1j}u_{1j} - \frac{1}{h_x}\big(k(x_1+0.5h_x,y_j)\frac{u_{2j}-u_{1j}}{h_x} - k(x_1-0.5h_x,y_j)\frac{u_{1j}}{h_x}\big) \\
- \frac{1}{h_y}\big(k(x_1,y_j+0.5h_y)\frac{u_{1j+1}-u_{1j}}{h_y} - k(x_1,y_j-0.5h_y)\frac{u_{1j}-u_{1j-1}}{h_y}\big) \\
= F_{1j} + k(x_1-0.5h_x,y_j)\frac{u_{0j}}{h_x^2}, \quad j=\overline{2,N-2}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
q_{M-1j}u_{M-1j} - \frac{1}{h_x}\big(-k(x_{M-1}+0.5h_x,y_j)\frac{u_{M-1j}}{h_x} - k(x_{M-1}-0.5h_x,y_j)\frac{u_{M-1j}-u_{M-2j}}{h_x}\big) \\
- \frac{1}{h_y}\big(k(x_{M-1},y_j+0.5h_y)\frac{u_{M-1j+1}-u_{M-1j}}{h_y} - k(x_{M-1},y_j-0.5h_y)\frac{u_{M-1j}-u_{M-1j-1}}{h_y}\big) \\
= F_{M-1j} + k(x_{M-1}+0.5h_x,y_j)\frac{u_{Mj}}{h_x^2}, \quad j=\overline{2,N-2}
\end{aligned}
$$

$$q_{i1}u_{i1} - \frac{1}{h_x}\big(k(x_i + 0.5h_x, y_1)\frac{u_{i+11} - u_{i1}}{h_x} - k(x_i - 0.5h_x, y_1)\frac{u_{i1} - u_{i-11}}{h_x}\big)$$
$$- \frac{1}{h_y}\big(k(x_i, y_1 + 0.5h_y)\frac{u_{i2} - u_{i1}}{h_y} - k(x_i, y_1 - 0.5h_y)\frac{u_{i1}}{h_y}\big)$$
$$= F_{i1} + k(x_i, y_1 - 0.5h_y)\frac{u_{i0}}{h_y^2}, \quad i = \overline{2, M-2}$$

$$q_{iN-1}u_{iN-1} - \frac{1}{h_x}\big(k(x_i + 0.5h_x, y_{N-1})\frac{u_{i+1N-1} - u_{iN-1}}{h_x} - k(x_i - 0.5h_x, y_N - 1)\frac{u_{iN-1} - u_{i-1N-1}}{h_x}\big)$$
$$- \frac{1}{h_y}\big(- k(x_i, y_{N-1} + 0.5h_y)\frac{u_{iN-1}}{h_y} - k(x_i, y_{N-1} - 0.5h_y)\frac{u_{iN-1} - u_{iN-2}}{h_y}\big)$$
$$= F_{iN-1} + k(x_i, y_{N-1} + 0.5h_y)\frac{u_{iN}}{h_y^2}, \quad i = \overline{2, M-2}$$

$$q_{11}u_{11} - \frac{1}{h_x}\big(k(x_1 + 0.5h_x, y_1)\frac{u_{21} - u_{11}}{h_x} - k(x_1 - 0.5h_x, y_1)\frac{u_{11}}{h_x}\big)$$
$$- \frac{1}{h_y}\big(k(x_i, y_j + 0.5h_y)\frac{u_{12} - u_{11}}{h_y} - k(x_1, y_1 - 0.5h_y)\frac{u_{11}}{h_y}\big)$$
$$= F_{11} + k(x_1 - 0.5h_x, y_1)\frac{u_{01}}{h_x^2} + k(x_1, y_1 - 0.5h_y)\frac{u_{10}}{h_y^2}$$

$$q_{M-11}u_{M-11} - \frac{1}{h_x}\big(-k(x_{M-1} + 0.5h_x, y_1)\frac{u_{M-11}}{h_x} - k(x_{M-1} - 0.5h_x, y_1)\frac{u_{M-11} - u_{M-21}}{h_x}\big)$$
$$- \frac{1}{h_y}\big(k(x_{M-1}, y_1 + 0.5h_y)\frac{u_{M-12} - u_{M-11}}{h_y} - k(x_{M-1}, y_1 - 0.5h_y)\frac{u_{M-11}}{h_y}\big)$$
$$= F_{M-11} + k(x_{M-1}, y_1 - 0.5h_y)\frac{u_{M-10}}{h_y^2} + k(x_{M-1} + 0.5h_x, y_1)\frac{u_{M1}}{h_x^2}$$

$$
\begin{aligned}
&q_{1N-1}u_{1N-1}\\
&\quad-\frac{1}{h_x}\big(k(x_1+0.5h_x,y_{N-1})\frac{u_{2N-1}-u_{1N-1}}{h_x}-k(x_1-0.5h_x,y_{N-1})\frac{u_{1N-1}}{h_x}\big)\\
&\quad-\frac{1}{h_y}\big(-k(x_1,y_{N-1}+0.5h_y)\frac{u_{1N-1}}{h_y}-k(x_1,y_{N-1}-0.5h_y)\frac{u_{1N-1}-u_{1N-2}}{h_y}\big)\\
&\quad=F_{1N-1}+k(x_1-0.5h_x,y_{N-1})\frac{u_{0N-1}}{h_x^2}+k(x_1,y_{N-1}+0.5h_y)\frac{u_{1N}}{h_y^2}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&q_{M-1N-1}u_{M-1N-1}\\
&-\frac{1}{h_x}\big(-k(x_{M-1}+0.5h_x,y_{N-1})\frac{u_{M-1N-1}}{h_x}-k(x_{M-1}-0.5h_x,y_{N-1})\frac{u_{M-1N-1}-u_{M-2N-1}}{h_x}\big)\\
&-\frac{1}{h_y}\big(-k(x_{M-1},y_{N-1}+0.5h_y)\frac{u_{M-1N-1}}{h_y}-k(x_{M-1},y_{N-1}-0.5h_y)\frac{u_{M-1N-1}-u_{M-1N-2}}{h_y}\big)\\
&\quad=F_{M-1N-1}+k(x_{M-1}+0.5h_x,y_{N-1})\frac{u_{MN-1}}{h_x^2}+k(x_{N-1},y_{N-1}+0.5h_y)\frac{u_{M-1N}}{h_y^2}
\end{aligned}
$$

3 Оценка точности разностной схемы

Для оценки точности реализован последовательный алгоритм для приближенного решения методом наименьших невязок.

Число точек сетки MxN	Максимальная ошибка
20x20	0.01619
40x40	0.00386
80x80	0.00115
160x160	0.15238

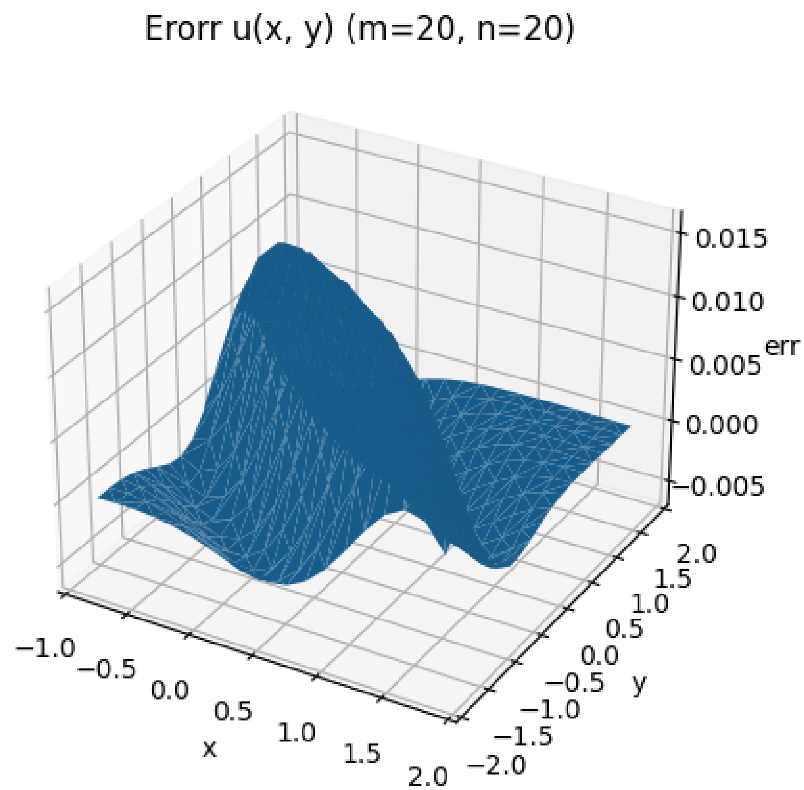

Рис. 1: Ошибка численного решение на сетки 20x20

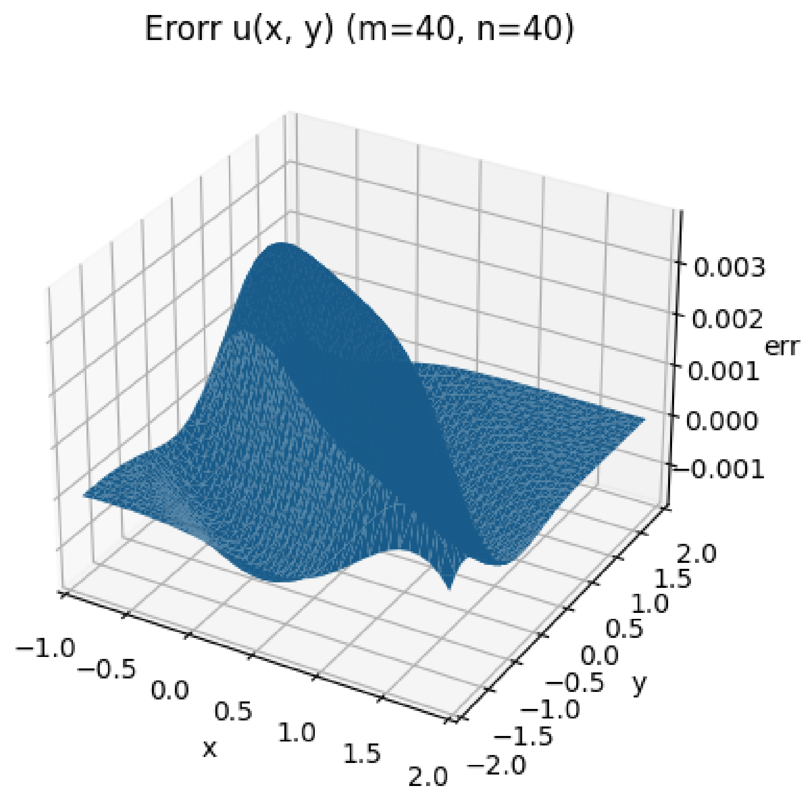

Рис. 2: Ошибка численного решение на сетки 40x40

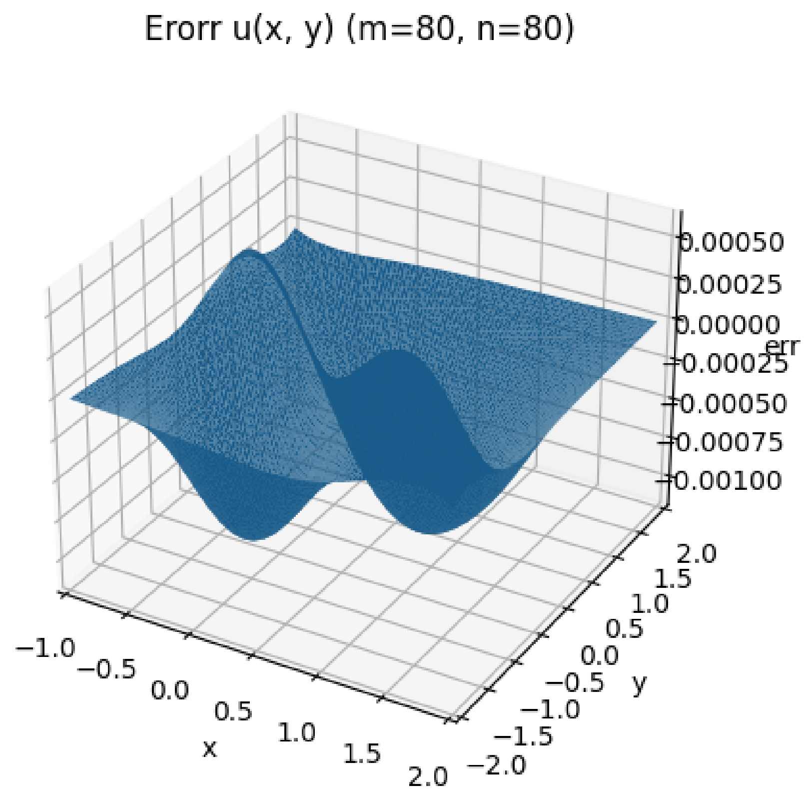

Рис. 3: Ошибка численного решение на сетки 80x80

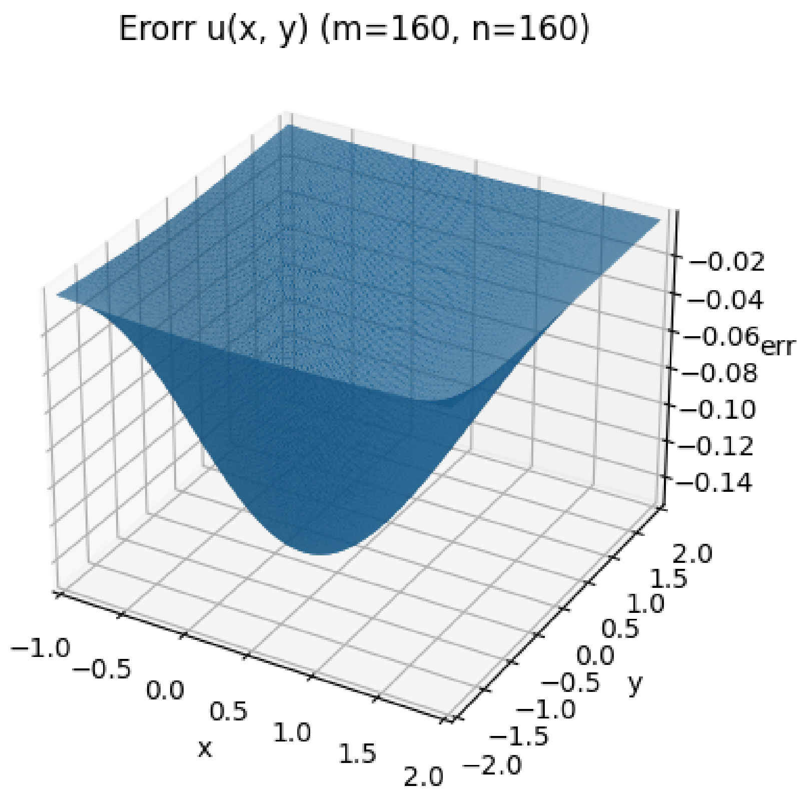

Рис. 4: Ошибка численного решение на сетки 160x160

4 Описание параллельного алгоритма

Параллельная реализация алгоритма:

1. Разбиваем расчетную область П на подобласти, так чтобы количество узлов по переменным x и y в каждой подобласти принадлежало диапазону $[0.5, 2]$ и количество узлов по переменным x и y любых двух подобластей отличалось не более, чем на единицу.

2. Цикл пока не достигнута точность делать шаги 3,4,5

3. Обмен значений на граничных узлах между соседними подобластями

4. Расчет невязки

5. Обмен значений невязки на граничных узлах между соседними подобластями

6. Рассчитывается итерационный параметр, для расчета скалярного произведения используется MPI_ALLREDUCE

5 Результаты

Число процессов	Число точек сетки MxN	Время решения T	Ускорение S
4	500x500	344.21	1.0
8	500x500	122.71	2.8
16	500x500	54.19	6.3
32	500x500	31.33	10.9
4	500x1000	474.90	1.0
8	500x1000	199.40	2.3
16	500x1000	120.47	3.9
32	500x1000	59.42	7.9

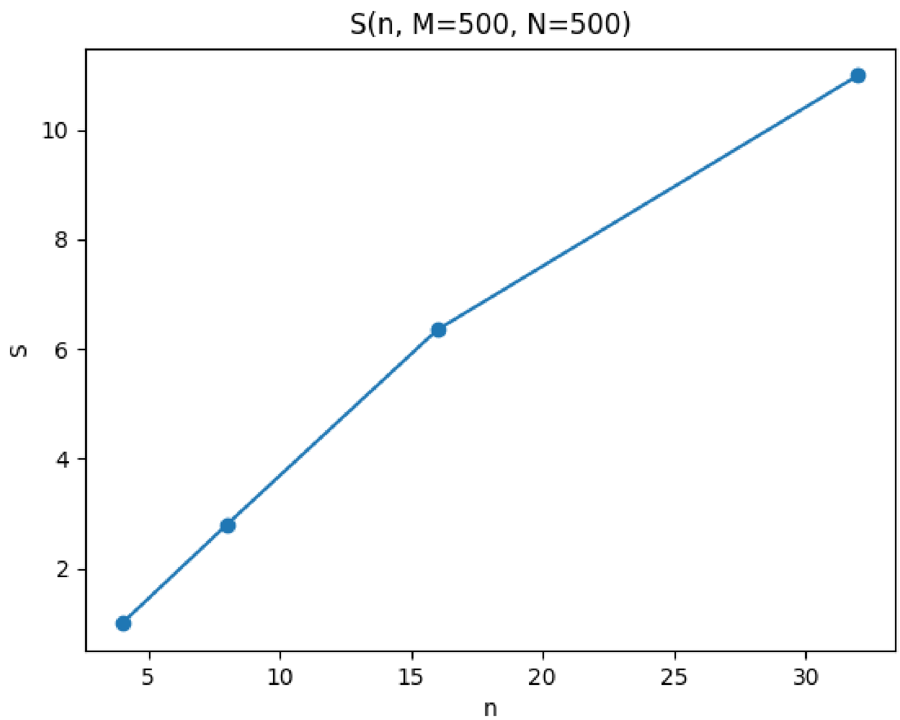

Рис. 5: Ускорение на сетки 500x500 на Polus

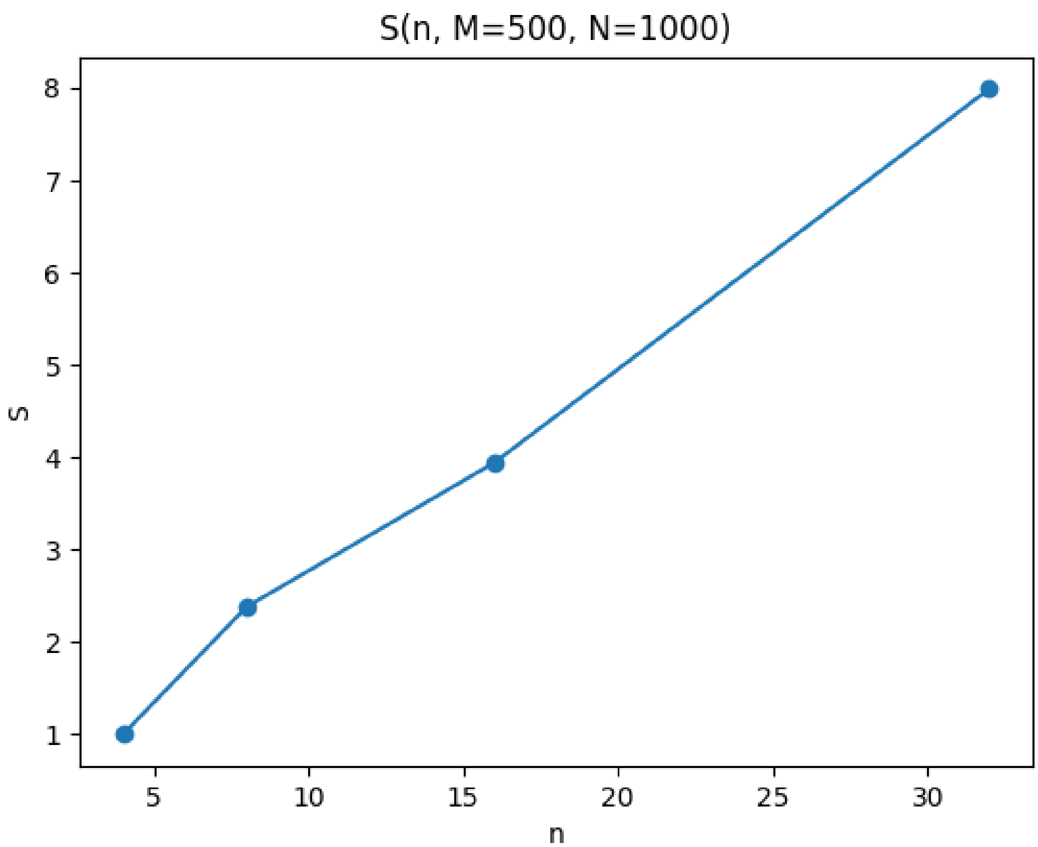

Рис. 6: Ускорение на сетки 500x1000 на Polus

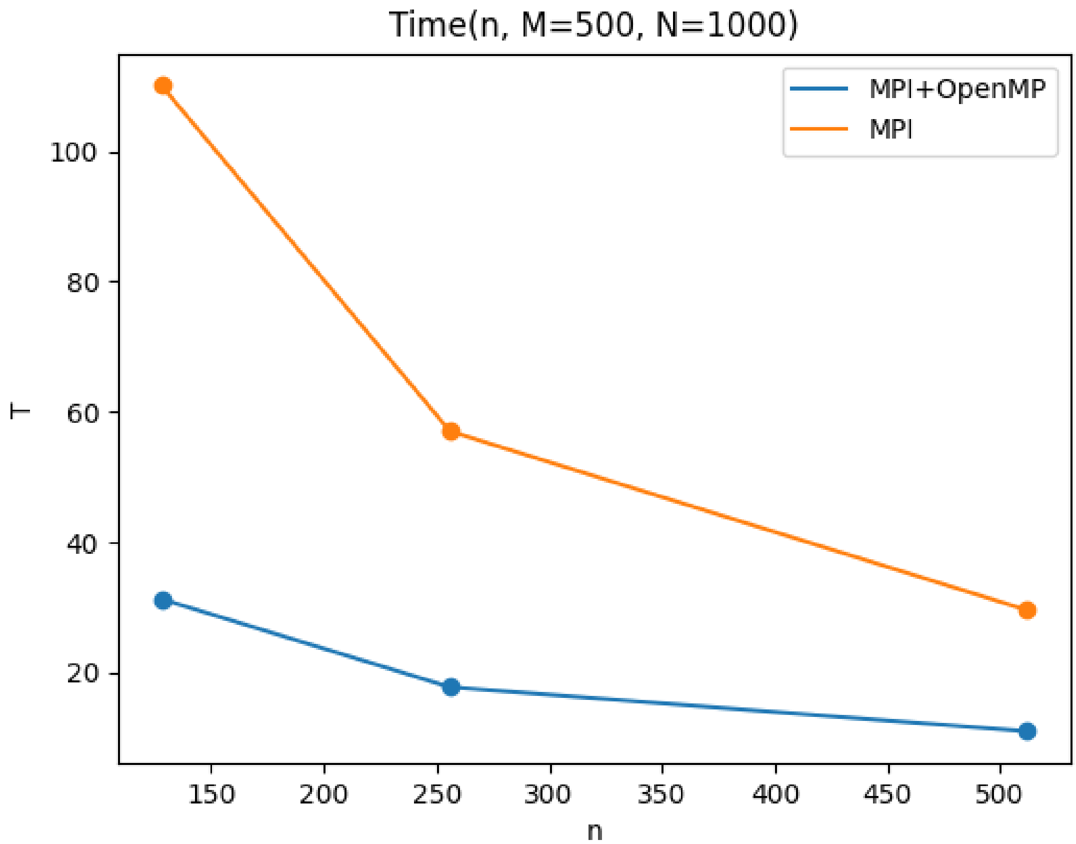

Рис. 7: Время выполнения на сетки 500x1000 на BlueGene/P MPI и MPI+OpenMP реализации

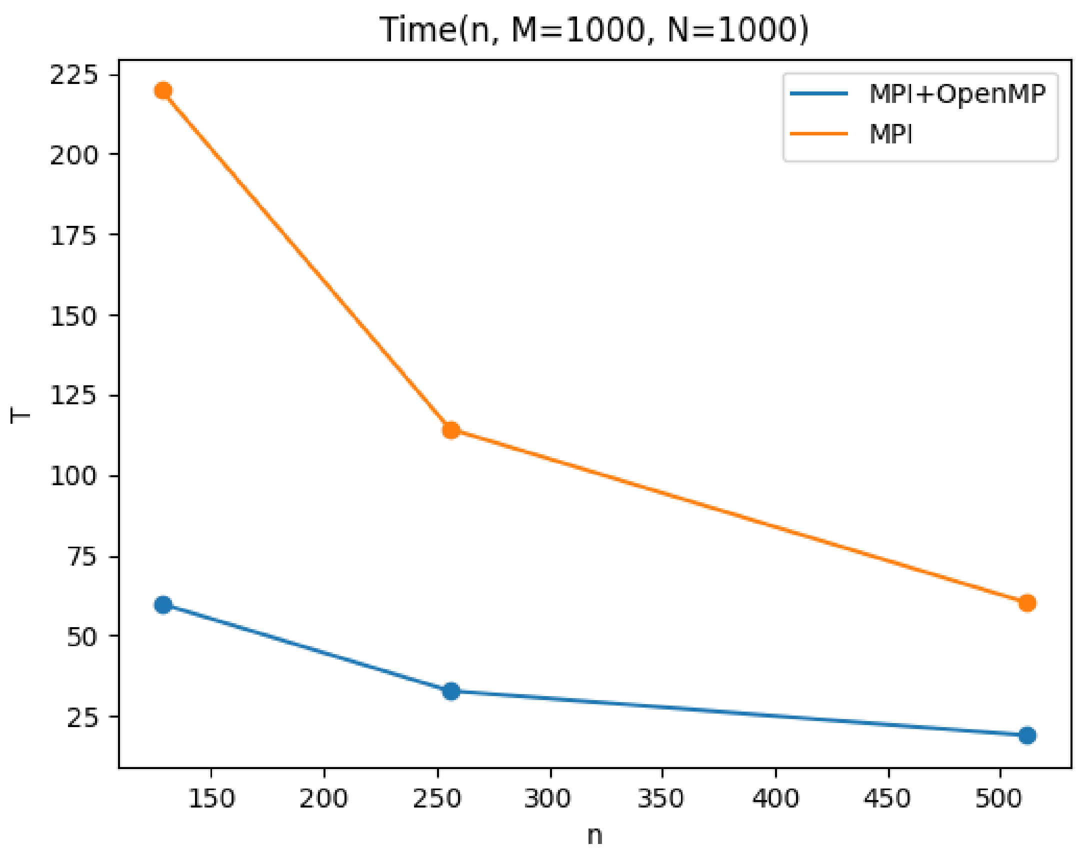

Рис. 8: Время выполнения на сетки 1000x1000 на BlueGene/P MPI и MPI+OpenMP реализации

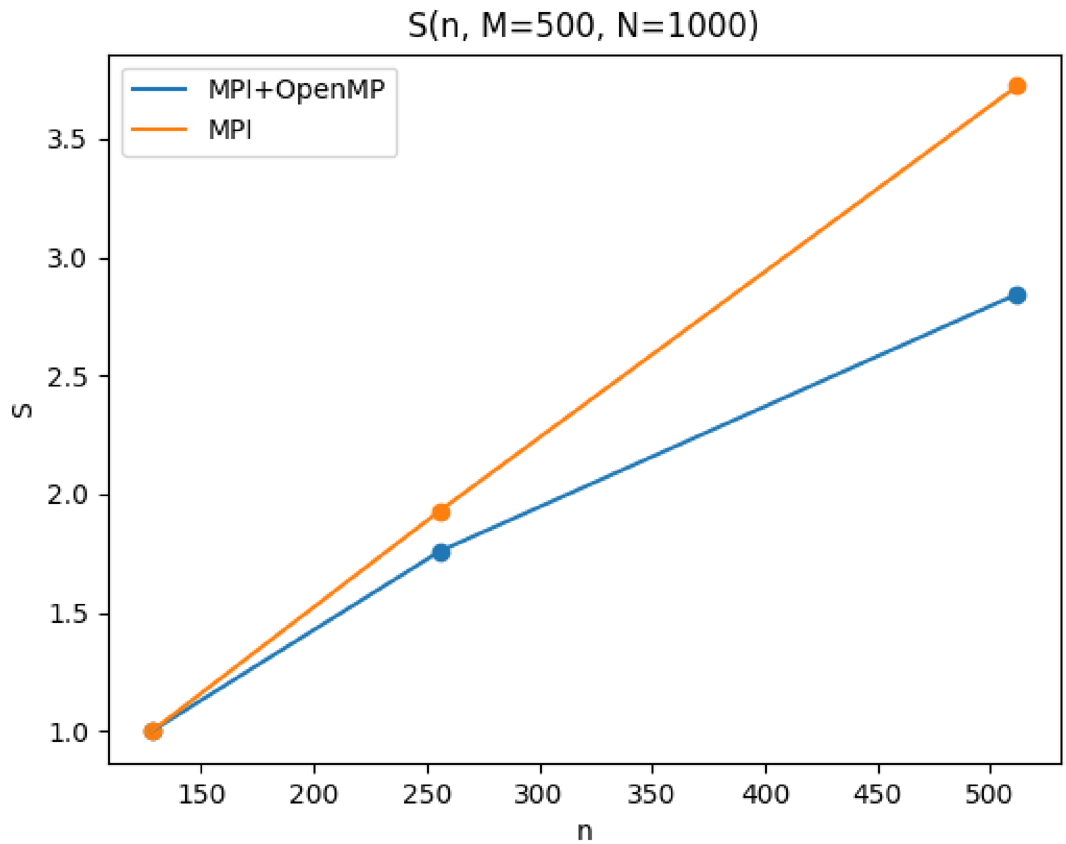

Рис. 9: Ускорение на сетки 500x1000 на BlueGene/P MPI и MPI+OpenMP реализации

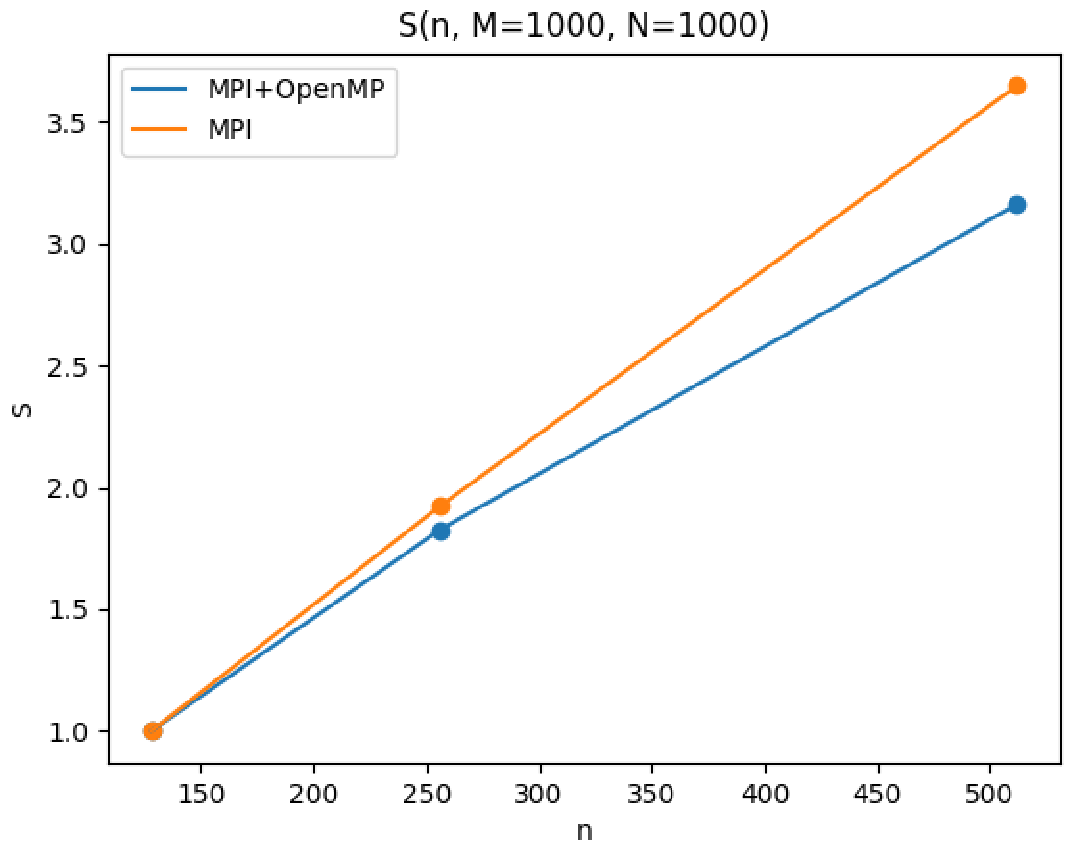

Рис. 10: Ускорение на сетки 1000x1000 на BlueGene/P MPI и MPI+OpenMP реализации

MPI реализация:

Число процессов	Число точек сетки MxN	Время решения T	Ускорение S
128	500x1000	110.11	1.0
256	500x1000	57.02	1.9
512	500x1000	29.57	3.7
128	1000x1000	219.74	1.0
256	1000x1000	114.32	1.9
512	1000x1000	60.23	3.6

MPI+OpenMP реализация:

Число процессов	Число точек сетки MxN	Время решения T	Ускорение S
128	500x1000	31.28	1.0
256	500x1000	17.77	1.7
512	500x1000	10.99	2.8
128	1000x1000	59.90	1.0
256	1000x1000	32.81	1.8
512	1000x1000	18.94	3.1

6 Вывод

В данной работе было произведено исследование алгоритма численного решения задачи Пуассона с потенциалом. Представленный алгоритм показал очень хорошие показатели масштабируемости. MPI реализация обладает лучшей масштабируемостью, но уступает по времени выполнения MPI+OpenMP реализации.