

Математический анализ

Виталий Сергеевич Ерошин

Сентябрь 2021

Содержание

1	Предварительные сведения.	3
1.1	Математическая логика.	3
1.2	"Наивная" теория множеств	3
1.2.1	Свойства	3
1.3	Отображения	3
1.4	Отношения	4
2	О числах	5
2.1	Натуральные числа	5
2.1.1	Аксиомы (Пeano):	5
2.1.2	Модель Фреге-Рассела	5
2.2	Целые числа	6
2.3	Рациональные числа	6
2.4	Действительные числа	7
2.5	Комплексные числа	9
3	Пределы	10
3.1	Доп. свойства действительных чисел	10
3.2	Предел последовательности	10
3.3	Предел функции	15
3.4	Сравнение функций	17
4	Дифференциальное исчисление функций одной переменной	18
4.1	Определение производной	18
4.2	20
4.3	Производные и дифференциалы высших порядков	22
4.4	Свойства производных	24

1 Предварительные сведения.

1.1 Математическая логика.

A, B, \dots - высказывания

$\neg A$ - отрицание

$A \wedge B$ - конъюнкция (логическое и)

$A \vee B$ - дизъюнкция (логическое или)

$A \implies B$ - импликация (A - необходимое условие, B - достаточное условие)

$A \iff B$ - эквивалентность (тогда и только тогда)

$A(x, y)$ - предикат (высказывание, зависящее от переменных)

\forall - квантор общности (для любого...)

\exists - квантор существования (найдется, существует)

$\exists!$ - существует при том единственное

1.2 "Наивная" теория множеств

A, B, \dots - множества

$a \in A$ - элемент a принадлежит множеству A . $(\neg(a \in A)) \iff (a \notin A)$

$A \cup B = \{x : (x \in A) \vee (x \in B)\}$ - объединение множеств

$A \cap B = \{x : (x \in A) \wedge (x \in B)\}$ - пересечение множеств

$B \setminus A = C_B A = \{x : (x \in B) \vee (x \notin A)\}$ - разность множеств

$A \delta B = (B \setminus A) \cup (A \setminus B)$ - симметрическая разность

1.2.1 Свойства

$$1. \text{ Коммутативность } A \cup B = B \cup A \quad A \cap B = B \cap A$$

$$2. \text{ Ассоциативность } A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C \quad A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$$

$$3. \text{ Дистрибутивность } A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \quad A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

$$4. \text{ Идемпотентность } A \cup A = A \quad A \cap A = A$$

$$5. \text{ Универсальное множество } U : U \cap A = A; U \cup A = U; A \subset U; C_U A = A^C$$

$$6. \text{ Двойственность (де Моргана) } (A \cup B)^C = A^C \cap B^C \quad (A \cap B)^C = A^C \cup B^C$$

1.3 Отображения

Отображение из X в Y :

$$(f : X \rightarrow Y) \iff ((\forall x \text{ in } X)(\exists! y \in Y)y = f(x))$$

x - область отображения f

$f(x)$ - область значений f

$$f(x) = \{y \in Y(\exists x \in X)f(x) = y\}$$

f инъективное (инъекция, взаимная однозначность)

$$(f(x_1) = f(x_2)) \iff (x_1 = x_2)$$

f сюръективное (сюръекция, отображение на)

$$f(X) = Y \iff (\forall y \in Y)(\exists x \in X : f(x) = y)$$

f биективное (биекция), если f инъективное и сюръективное.

$f^{-1}(y) = \{x \in X : f(x) = y\}$ - прообраз

1.4 Отношения

Опр. Бинарное отношение \mathcal{R} - это подмножество $X \times X = X^2 =$

$= \{(x, y) : (x \in X) \wedge (y \in X)\}$ (декартов квадрат)

$$((x, y) \in \mathcal{R}) \iff x\mathcal{R}y$$

Опр. Отношение порядка на X - это бинарное отношение \mathcal{R} , удовлетворяющее следующим свойствам:

1) рефлексивность:

$$(\forall x \in X)x\mathcal{R}x$$

2) антисимметричность:

$$(\forall x, y \in X)(x\mathcal{R}y) \wedge (y\mathcal{R}x) \implies x = y$$

3) транзитивность:

$$(\forall x, y, z \in X)((x\mathcal{R}y) \wedge (y\mathcal{R}z)) \implies (x\mathcal{R}z)$$

Пример 1. $A \subset B$ (частично упорядоченное)

Пример 2. $x \leq y$

Пример 3. $X \in \mathbb{R}$

Пример 4. $(\forall x, y \in X)(x\mathcal{R}y) \vee (y\mathcal{R}x)$ (Линейно упорядоченное)

Определение. Отношение эквивалентности на X - это бинарное отношение \mathcal{R} , удовлетворяющее следующим свойствам:

1) рефлексивность (см. выше)

2) симметричность $(\forall x, y \in X)(x\mathcal{R}y) \implies (y\mathcal{R}x)$

3) транзитивность

Теорема. Если на X задано отношение эквивалентности \mathcal{R} , то X может быть разбито на классы эквивалентности, то есть непересекающиеся множества, каждое из которых состоит из взаимноэквивалентных элементов:

$$X = \cup_{\alpha \in A} X_{\alpha} : \alpha_1 \neq \alpha_2 \implies X_{\alpha_1} \cap X_{\alpha_2} = \emptyset$$

$$(\forall \alpha \in A)(x_1, x_2 \in X_{\alpha})x_1\mathcal{R}x_2$$

$$(\forall \alpha \neq \beta)(\forall x_1 \in X_{\alpha})(\forall x_2 \in X_{\beta})\neg x_1\mathcal{R}x_2$$

2 О числах

2.1 Натуральные числа

2.1.1 Аксиомы (Пeano):

I. 1 есть натуральное число

II. $(\forall n \in \mathbb{N})(\exists Sc(n) \in \mathbb{N})$

III. $(\forall n \in \mathbb{N})(1 \neq Sc(n))$

IV. $(Sc(n) = Sc(m)) \implies (n = m)$

V. (аксиома индукции)

$$(\forall \mathfrak{M} \subset \mathbb{N})((1 \in \mathfrak{M}) \wedge (n \in \mathfrak{M}) \implies Sc(n) \in \mathfrak{M}) \implies \mathfrak{M} = \mathbb{N}$$

2.1.2 Модель Фреге-Рассела

$$\{\emptyset\} = 1$$

$$Sc(n) := n \cup \{n\}$$

$$2 = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$$

$$3 = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$$

...

Определение. $m + n$

$$m + 1 := Sc(m)$$

$$m + Sc(n) := Sc(m + n)$$

Определение. $m \cdot n$

$$m \cdot 1 := m$$

$$m \cdot Sc(n) = m \cdot n + m$$

Определение.

$$m \leq n \iff (m = n) \vee ((\exists p \in \mathbb{N})(n = m + p))$$

Теорема.

Iа. (Коммутативность сложения)

$$m + n = n + m$$

Iб. (Ассоциативность сложения)

$$(m + n) + p = m + (n + p)$$

IIа. (Коммутативность умножения)

$$m \cdot n = n \cdot m$$

IIб. (Ассоциативность умножения)

$$(m \cdot n) \cdot p = m \cdot (n \cdot p)$$

Пв. (Единица)

$$1 \cdot n = n$$

I-II. (Дистрибутивность)

$$m \cdot (n + p) = m \cdot n + m \cdot p$$

IIIa. $m \leq m$

IIIб. $(m \leq n) \wedge (n \leq m) \implies (m = n)$

IIIв. $(m \leq n) \wedge (n \leq p) \implies (m \leq p)$

IIIг. $(m \leq n) \vee (n \leq m)$

I-III. $(m \leq n) \implies (m + p) \leq (n + p)$

II-III. $(m \leq n) \implies m \cdot p \leq n \cdot p$

IV. (Свойство Архимеда)

$$m \leq p \implies (\exists n) m \cdot n \geq p$$

2.2 Целые числа

$$\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup \{0\} \cup \{-n : n \in \mathbb{N}\}$$

$$(m, n \in \mathbb{N}) m + (-n) := (p \in \mathbb{N}, n + p = m, m > n), (0, m = n), (-p, p \in \mathbb{N}, m + p = n, n > m)$$

Теорема.

I-IV (II-IV с $p \in \mathbb{N}$)

Iв. (Нуль) $0 + n = n$

Iг. (Противоположный элемент) $\exists(-m) \in \mathbb{Z}) m + (-m) = 0$

2.3 Рациональные числа

$$\mathbb{N}^2(m, n) \mathcal{R}(p, q) \iff m \cdot q = n \cdot p$$

1) $(m, n) \mathcal{R}(m, n) m \cdot n = n \cdot m$

2) $(m, n) \mathcal{R}(p, q) \implies (p, q) \mathcal{R}(m, n); m \cdot q = n \cdot p; p \cdot n = q \cdot m$

3) $(m, n) \mathcal{R}(p, q) \wedge (p, q) \mathcal{R}(r, s) \implies (m, n) \mathcal{R}(r, s)$

\mathbb{Q}_+ - множество классов эквивалентности дробей (\mathbb{N}^2) по \mathcal{R} . (Положительные рациональные числа)

$$\mathbb{Q} := \mathbb{Q}_+ \cup \{\emptyset\} \cup \{-r : r \in \mathbb{Q}_+\}$$

Теорема I-IV (II-III с $p > 0$, IV с $m \neq 0$)

IIг. (Обратный элемент)

$$(\forall r \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}) (\exists r^{-1} \in \mathbb{Q}) r \times r^{-1} = r^{-1} \times r = 1$$

Теорема 2 Каждое положительное рациональное число представимо бесконечной периодической десятичной дробью, и наоборот, каждая бесконечная периодическая десятичная дробь представима в виде положительного рационального числа.

2.4 Действительные числа

Определение Последовательностью рациональных чисел называется отображение из \mathbb{N} в \mathbb{Q} $\{r_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{Q}$

Определение Рациональным отрезком называется $\{r \in \mathbb{Q} : p \leq r \leq q\} = [p, q]_{\mathbb{Q}}$ $p, q \in \mathbb{Q}$

Определение Система $\{[p_n, q_n]\}_{n=1}^{\infty}$ называется системой вложенных рациональных отрезков если $(\forall n \in \mathbb{N}) [p_{n+1}, q_{n+1}]_{\mathbb{Q}} \subset [p_n, q_n]_{\mathbb{Q}}$

Определение Система вложенных рациональных отрезков называется стягивающей, если $(\forall \epsilon \in \mathbb{Q}_+)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n > N) q_n - p_n < \epsilon$

Определение Если $\{[p_n, q_n]_{\mathbb{Q}}\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{[r_n, s_n]_{\mathbb{Q}}\}_{n=1}^{\infty}$ эквивалентны, если $\{[\min(p_n, r_n), \min(q_n, s_n)]_{\mathbb{Q}}\}_{n=1}^{\infty}$ - стягивающая.

Теорема 1 Введенное отношение является отношением эквивалентности на множестве всех систем стягивающихся рациональных отрезков.

Определение Действительным числом называется класс эквивалентности систем стягивающихся рациональных отрезков.

Определение Суммой двух действительных чисел с представителями $\{[p_n, q_n]_{\mathbb{Q}}\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{[r_n, s_n]_{\mathbb{Q}}\}_{n=1}^{\infty}$ называется число с представителем $\{[p_n + r_n, q_n + s_n]_{\mathbb{Q}}\}_{n=1}^{\infty}$

Теорема 2 Определение корректно и сложение удовлетворяет свойствам:

Ia) $(\forall x, y \in \mathbb{R}) x + y = y + x$

Iб) $(\forall x, y, z \in \mathbb{R}) x + (y + z) = (x + y) + z$

Iв) $(\forall x \in \mathbb{R}) x + 0 = x$

Iг) $(\forall x \in \mathbb{R}) x + (-x) = 0$

Если x представить $\{[p_n, q_n]_{\mathbb{Q}}\}_{n=1}^{\infty}$

Определение Действительное число a называется положительным, если для некоторой представляющей его системы рациональных отрезков $\{[p_n, q_n]_{\mathbb{Q}}\}_{n=1}^{\infty}$ для некоторых $n \in \mathbb{N}$ $p_n > 0$

Теорема 3 \mathbb{R} называется линейно упорядоченным множеством относительно отношения \leq .

Лемма Если система $\{[p_n, q_n]_{\mathbb{Q}}\}_{n=1}^{\infty}$ представляет число $c \in \mathbb{R}$, то $(\forall n \in \mathbb{N}) p_n \leq c \leq q_n$.

Замечание Системы стягивающих рациональных отрезков $\{[p_n, q_n]_{\mathbb{Q}}\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{[p_n, q_n]_{\mathbb{Q}}\}_{n=m}^{\infty}$ эквивалентны $\forall m \in \mathbb{N}$

Определение Произведением положительных действительных чисел a, b представляемых системами стягивающих рациональных отрезков $\{[p_n, q_n]_{\mathbb{Q}}\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{[r_n, s_n]_{\mathbb{Q}}\}_{n=1}^{\infty}$ соответственно с $p_1 > 0$, $r_1 > 0$ называется действительное число, представляемое системой $\{[p_n r_n, q_n s_n]_{\mathbb{Q}}\}_{n=1}^{\infty}$

1. $(\forall a \in \mathbb{R}) a \times 0 = 0 \times a := 0$

$$2. (\forall a > 0)(\forall b < 0) a \times b = b \times a := -(a \times (-b))$$

$$3. (\forall a < 0)(\forall b < 0) a \times b = b \times a := (-a) \times (-b)$$

Теорема 4 Операция произведения действительных чисел корректна и удовлетворяет свойствам:

$$\text{IIa)} (\forall x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R}) xy = yx$$

$$\text{IIб)} (\forall x, y, z \in \mathbb{R}) x(yz) = (xy)z$$

$$\text{IIc)} (\forall x \in \mathbb{R}) x \times 1 = x$$

Определение Если $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$ представляется системой $\{[p_n, q_n]_{\mathbb{Q}}\}_{n=1}^{\infty}$, $p_1 > 0$, то обратным $\frac{1}{a}$ называется число, представимое $\{[\frac{1}{q_n}, \frac{1}{p_n}]_{\mathbb{Q}}\}_{n=1}^{\infty}$

$$a < 0 : \quad \frac{1}{a} := -\left(\frac{1}{-a}\right)$$

$$\frac{1}{p_n} - \frac{1}{q_n} = \frac{q_n - p_n}{p_n q_n} \leq \frac{q_n - p_n}{p_n^2}$$

Теорема 5

$$\text{I-II } (\forall x, y, z \in \mathbb{R}) x(y + z) = xy + xz$$

$$\text{I-III } (\forall x, y \in \mathbb{R})(\forall z \in \mathbb{R}, z > 0)(x \leq y) \implies xz \leq yz$$

$$\text{IIг } (\forall x \in \mathbb{R}, x \neq 0) x \times \frac{1}{x} = 1$$

$$\text{IV } (\forall x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R}, y \neq 0)(\exists n \in \mathbb{Z}) ny \geq x$$

Теорема 6 (Свойство полноты действительных чисел) $(\forall A, B \subset \mathbb{R})$ таких, что $A \cup B = \mathbb{R}$, $A \cap B = \emptyset$, $(\forall a \in A)(\forall b \in B) a < b$
 $(\exists c \in \mathbb{R})$ такое, что $(\forall a \in A)(\forall b \in B) a \leq c \leq b$

Определение Множество A действительных чисел называется ограниченным сверху [снизу], если

$$(\forall M \in \mathbb{R})[\exists M \in \mathbb{R}](\forall x \in A) x \leq M [x \geq m]$$

2.5 Комплексные числа

$$\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$

$$(a, b) + (c, d) := (a + c, b + d)$$

$$(a, b) \times (c, d) := (ac - bd, ad + bc)$$

$$(a, 0) =: a$$

$$(0, 1) =: i \text{ (мнимая единица)} \quad i^2 = -1$$

$$(a, b) = a + bi \text{ (алгебраическая форма комплексного числа)} \quad |z| = \sqrt{a^2 + b^2} \quad a = \operatorname{Re}(z) \quad b = \operatorname{Im}(z)$$

Неравенство треугольника:

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$$

$$|z_1 - z_2| \geq ||z_1| - |z_2||$$

Определение Комплексно сопряженным к $z = c + di$ называется $\bar{z} = c - di$

Аргумент $z = \arg(z) = \varphi + 2k\pi$

$$a = |z|(\cos(\phi)), \quad b = |z|(\sin(\phi))$$

Тригонометрическая форма:

$$z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

$$w = |w|(\cos\psi + i\sin\psi)$$

$$z \times w = |z||w|(\cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi + (\cos\varphi\sin\psi + \sin\varphi\cos\psi)i = |z||w|(\cos(\varphi+\psi) + \sin(\varphi+\psi)i)$$

$$\arg(zw) = \arg(z) + \arg(w)$$

$$\cos\varphi + i\sin\varphi = \operatorname{cis}\varphi =: e^{i\varphi}$$

$z = |z|e^{i\varphi}$ - показательная форма записи (формула Эйлера)

$$\cos\varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2}$$

$$\sin\varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i}$$

$$e^{i\pi} = -1$$

$z^n = |z|^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi) = (|z|(\cos\varphi + i\sin\varphi))^n$ - формула Муавра.

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi, n \in \mathbb{Z}$$

$$z^n = w \quad w = 0 \implies z = 0$$

$$w \neq 0 \implies w = |w|(\cos\psi + i\sin\psi) \quad z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi$$

$$|z| = \sqrt[n]{|w|}$$

$$n\varphi = \psi + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\phi = \frac{\psi}{n} + \frac{2\pi k}{n}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n-1$$

3 Пределы

3.1 Доп. свойства действительных чисел

Теорема 1 (Плотность множества рациональных чисел в множестве действительных)

$$(\forall a, b \in \mathbb{R}; a < b)(\exists r \in \mathbb{Q}) a < r < b$$

Определение Множества A и B называются равномошными, если существует биекция A на B .

Определение Множество A называется счетным, если оно равномошно \mathbb{N} или несчетным, если оно не конечное и не счетное.

Теорема 2 (Кантор) \mathbb{Q} - счетно, \mathbb{R} - несчетно

Определение Если A - ограниченное сверху множество действительных чисел, то число b такое, что $(\forall a \in A) a \leq b$ называется верхней гранью множества A .

Наименьшим из множества верхних граней называется точной верхней гранью и обозначается $\sup(a)$ - супремум. Аналогично нижняя грань $\inf(A)$ - инфинум.

3.2 Предел последовательности

Определение Число $l \in \mathbb{R}$ называется пределом последовательности

$\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ если

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n > N) |x_n - l| < \epsilon$$

$(\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ сходится к l , $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = l$, $x_n \rightarrow l$ $n \rightarrow \infty$

$(\exists l \in \mathbb{R}) \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = l \iff \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ сходится, иначе расходится

Теорема 1 (Единственность предела) Числовая последовательность может иметь не более, чем один предел.

Теорема 2 (Свойства предела a , связанные с неравенствами)

1. (Ограниченность последовательности) Если последовательность сходится, то она ограничена

2. (Отделимость от нуля и сохранение знака)

Если последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ сходится к $l \neq 0$, то $(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n > N)(\text{sign}(x_n) = \text{sign}(l)) \wedge |x_n| > \frac{|l|}{2}$

3. (Переход к пределу в неравенствах)

Если $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y_0$ и $(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n \geq N) x_n \leq y_n$, то $x_0 \leq y_0$

4. (Теорема о промежуточной последовательности)

Если $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = l$ и $(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n \geq N) x_n \leq y_n \leq z_n$, то $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = l$

Теорема 3 (Арифметические операции со сходящимися последовательностями)

Пусть $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y_0$, тогда:

1. $\lim_{x \rightarrow \infty} (x_n + y_n) = x_0 + y_0$
2. $\lim_{x \rightarrow \infty} (x_n - y_n) = x_0 - y_0$
3. $\lim_{x \rightarrow \infty} (x_n y_n) = x_0 y_0$
4. Если $((\forall n \in \mathbb{N})(y_n \neq 0)) \wedge y_0 = 0$, то $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{x_0}{y_0}$

Определение Последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ называется бесконечно малой, если ее $\lim_{x \rightarrow \infty} x_n = 0$

Теорема 4 (Произведение бесконечно малой и ограниченной последовательностей) Если $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ - бесконечно малая, а $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ ограниченная, то $\{x_n y_n\}_{n=1}^{\infty}$ бесконечно малая.

Определение ϵ -окрестностью числа $l \in \mathbb{R}$ называется $U_{\epsilon}(l) := (l - \epsilon, l + \epsilon)$ ($\epsilon > 0$)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x_n = l \iff (\forall \epsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n > N) x_n \in U_{\epsilon}(l)$$

(Определение предела последовательности на языке окрестностей)

$$\mathbb{R} = (-\infty, +\infty) \quad -\infty : (\forall x \in \mathbb{R}) -\infty < x \quad +\infty : (\forall x \in \mathbb{R}) x < +\infty$$

$$\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\} = \bar{\mathbb{R}}; \quad \mathbb{R} \cup \{\infty\} = \hat{\mathbb{R}}$$

Определение ϵ -окрестность: ($\epsilon > 0$)

1. $-\infty : (-\infty, -\frac{1}{\epsilon})$
2. $+\infty : (\frac{1}{\epsilon}, +\infty)$
3. $\infty : (-\infty, -\frac{1}{\epsilon}) \cup (\frac{1}{\epsilon}, +\infty)$

Определение Последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ называется бесконечно большой, если $\lim_{x \rightarrow \infty} x_n$ есть одно из $+\infty, -\infty, \infty$

Теорема 5 (Связь бесконечно малых и бесконечно больших последовательностей) Если $x_n \neq 0 \forall n \in \mathbb{N}$, то $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ - бесконечно малая $\iff \{\frac{1}{x_n}\}_{n=1}^{\infty}$ - бесконечно большая.

Определение Последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ называется неубывающей $(\forall n \in \mathbb{N}) x_n \leq x_{n+1}$, невозрастающей $(\forall n \in \mathbb{N}) x_{n+1} \leq x_n$, убывающей $(\forall n \in \mathbb{N}) x_n > x_{n+1}$, возрастающей $(\forall n \in \mathbb{N}) x_n < x_{n+1}$

Последовательность монотонна, если она неубывающая, невозрастающая, убывающая или возрастающая.

Последовательность строго монотонна, если она убывающая или возрастающая.

Теорема 6 (Вейерштрасса о монотонных последовательностях) Если $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ ограниченная неубывающая последовательность, то $\exists \lim_{x \rightarrow \infty} x_n = \sup\{x_n\}$, если невозрастающая, то $\exists \lim_{x \rightarrow \infty} x_n = \inf\{x_n\}$

Доказательство

$$l := \sup\{x_n\} \iff \begin{cases} (\forall n \in \mathbb{N}) x_n \leq l \\ (\forall \epsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N}) l - \epsilon < x_N \leq l \end{cases}$$

$$(\forall n > N) l \geq x_n \geq x_{n-1} \geq x_N > l - \epsilon \implies |x_n - l| < \epsilon$$

Теорема 7 (Принцип Кантора вложенных отрезков) Каждая система вложенных отрезков имеет непустое пересечение.

Доказательство: $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n] \implies ((a_n \leq a_{n+1}) \ \& \ (b_n \geq b_{n+1}))$

$$a_n \leq b_n \leq b_1 \ \exists a = \lim_{x \rightarrow \infty} a_n = \sup\{a_n\}$$

$$a_n \leq a \ \exists b = \lim_{x \rightarrow \infty} b_n = \inf\{b_n\} \implies b \leq b_n \implies [a, b] \subset [a_n, b_n]$$

Определение Стягивающейся системой отрезков называется система вложенных отрезков, длины которых образуют бесконечно малую последовательность.

Дополнение к принципу Кантора Система стягивающихся отрезков имеет пересечение, состоящее из одной точки.

$$a_n \leq a \leq b \leq b_n \implies 0 \leq b - a \leq b_n - a_n = 0 \ (n \rightarrow \infty)$$

Определение Подпоследовательностью последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ называется последовательность $\{x_{n_k}\}_{n=1}^{\infty}$, где $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ - возрастающая последовательность натуральных чисел.

Определение Частичным пределом последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ называется предел ее подпоследовательности.

Теорема 8 (Эквивалентное определение частичного предела) Число $l \in \mathbb{R}$ является частичным пределом $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \iff (\forall \epsilon > 0)(\forall N \in \mathbb{N}) |x_n - l| < \epsilon$

Доказательство

1)

$$l - \text{частичный предел } l = \lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} \iff (\forall \epsilon > 0)(\exists K \in \mathbb{N})(\forall k > K) |x_{n_k} - l| < \epsilon$$

$$(\forall N \in \mathbb{N})(\{n_k\} \nearrow) \exists K_1 \in \mathbb{N} \ n_{K_1} > N \ \forall k > \max(K, K_1) |x_{n_k} - l| < \epsilon$$

2)

$$\begin{aligned} \epsilon &:= 1 \quad N := 1 \quad n_1 \in \mathbb{N} \quad |x_{n_1} - l| < 1 \\ \epsilon &:= \frac{1}{2} \quad N := n_1 \quad n_2 \in \mathbb{N} \quad |x_{n_2} - l| < \frac{1}{2} \\ \epsilon &:= \frac{1}{k} \quad N := n_{k-1} \quad n_k \in \mathbb{N} \quad |x_{n_k} - l| < \frac{1}{k} \\ 0 &\leq |x_{n_k} - l| < \frac{1}{k} \end{aligned}$$

Теорема 9 (Больцано-Вейерштрасс) Из каждой ограниченной последовательности можно выделить сходящуюся подпоследовательность.

Доказательство $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ - ограниченная $\exists [a_1, b_1] \supset \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$

$[a_2, b_2]$ - та из половин $[a_1, b_1]$, которая содержит бесконечно много элементов последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$. Продолжая, получим последовательность вложенных отрезков $\{[a_n, b_n]\}_{n=1}^{\infty}$, так как $b_n - a_n = \frac{b_1 - a_1}{2^{n-1}}$. Следовательно, $\{[a_n, b_n]\}_{n=1}^{\infty}$ - стягивающаяся, $\{C\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n]$. Докажем, что C - частичный предел

$$x_{n_1} := x_1; x_{n_2} \in [a_2, b_2], x_{n_k} \in [a_k, b_k]; 0 \leq |C - x_{n_k}| \leq \frac{b_1 - a_1}{2^{k-1}}$$

Дополнение $\forall \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \exists \{x_{n_k}\}_{n=1}^{\infty} \lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = l \in \bar{\mathbb{R}}$

Доказательство Предположим $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ неограниченная сверху.

$$n_1 : x_{n_1} > 1$$

$$n_2 > n_1 : x_{n_2} > 2$$

$$n_k > n_{k-1} : x_{n_k} > k$$

$$x_{n_k} > k \iff - < \frac{1}{x_{n_k}} < \frac{1}{k} \quad \lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = +\infty$$

Определение Верхним пределом последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ называется наибольший из ее частичных пределов ($\lim_{x \rightarrow \infty} x_n$ с чертой сверху) Нижним пределом называется наименьший из ее частичных пределов ($\lim_{x \rightarrow \infty} x_n$ с чертой снизу).

Теорема 10 (Три определения верхнего и нижнего пределов) Для любой ограниченной последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ существуют ее верхний и нижний предел (L и l). Для них справедливы следующие утверждения:

1. $(\forall \epsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n > N) x_n < L + \epsilon \wedge (\forall \epsilon > 0)(\forall N \in \mathbb{N})(\exists n > N) x_n > L - \epsilon$
 $(\forall \epsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n > N) x_n > l - \epsilon \wedge (\forall \epsilon > 0)(\forall N \in \mathbb{N})(\exists n > N) x_n < l + \epsilon$
2. $L = \lim_{x \rightarrow \infty} \sup\{x_n, x_{n+1}, \dots\}; l = \lim_{x \rightarrow \infty} \inf\{x_n, x_{n+1}, \dots\}$
 $\limsup_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{x \rightarrow \infty} \bar{x}_n$ (с чертой) $\liminf_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{x \rightarrow \infty} x_n$ (Подчеркнуто)

Доказательство $s_n = \sup\{x_n, x_{n+1}, \dots\} \geq s_{n+1} = \sup\{x_{n+1}, x_{n+2}, \dots\}$

$\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ - невозрастающая последовательность $m \leq x_n \leq M \implies m \leq s_n \leq M$

$L = \lim_{x \rightarrow \infty} s_n \implies (\forall \epsilon > 0)(\exists N_1 \in \mathbb{N})(\forall n > N_1) |L - s_n| < \epsilon \implies s_n < L + \epsilon \implies x_n < L + \epsilon$

$s_{N_2+1} = \sup\{x_{N_2+1}, x_{N_2+2}, \dots\} \quad s_{N_2+1} > L - \epsilon \quad (\exists n > N_2) x_n > L - \epsilon$

$(\forall N \in \mathbb{N}) N_2 > \max(N_1, N)$

1) $\implies L = \liminf_{n \rightarrow \infty} x_n$ L - частичный предел $\implies (\forall \epsilon > 0)(\forall N \in \mathbb{N})(\exists n > N) |x_n - L| < \epsilon \iff L - \epsilon < x_n < L + \epsilon$

1) $\implies (\forall \epsilon > 0)(\exists N_1 \in \mathbb{N})(\forall n > N_1) x_n < L + \epsilon \quad n > \max(N_1, N)$

Пусть s - частичный предел $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \implies \{x_{n_i}\}_{n=1}^{\infty} \lim_{n_i \rightarrow \infty} x_{n_i} = s \iff (\forall \epsilon > 0)(\exists I \in \mathbb{N})(\forall i < I) |x_{n_i} - s| < \epsilon$

$\forall i > \max(I, I_1) I_1 n_{i_1} > N \quad s - \epsilon < x_{n_i} < L + \epsilon \implies s - \epsilon < L + \epsilon \implies s < L + 2\epsilon \implies s \leq L$

Определение Последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ называется фундаментальной (или последовательностью Коши), если $(\forall \epsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n > N)(\forall p \in \mathbb{N}) |x_{n+p} - x_n| < \epsilon \iff$

$$(\forall m, n > N) |x_m - x_n| < \epsilon$$

Теорема 11 (Критерий Коши) Последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ сходится $\iff \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ фундаментальна.

Доказательство 1) Сходимость \implies фундаментальность

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = l \implies (\forall \epsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n > N) |x_n - l| < \frac{\epsilon}{2}$$

$$(\forall p \in \mathbb{N}) n + p > N \implies |x_{n+p} - l| < \frac{\epsilon}{2}$$

$$|x_{n+p} - x_n| = |x_{n+p} - l + l - x_n| \implies |x_{n+p} - l| + |l - x_n| < \epsilon$$

2) Фундаментальность \implies ограниченность

$$\epsilon := 1 \quad n := N + 1 \quad (\forall p \in \mathbb{N}) |x_{N+1+p} - x_{N+1}| < 1 \implies x_{N+1} - 1 < x_{N+1+p} < x_{N+1} + 1$$

$$\min(x_1, x_{N+1} - 1) < x_n < \max(x_1, x_{N+1} + 1) \quad (\forall n \in \mathbb{N})$$

3) Фундаментальность \implies сходимость \implies (Б. В.) $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}, \lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = l \iff (\forall \epsilon > 0)(\exists K \in \mathbb{N})(\forall k > K) |x_{n_k} - l| < \epsilon$

если фундаментальная последовательность имеет сходящуюся подпоследовательность, то она сходится.

$$N_1 := \max(N, n_{K+1}) \quad n_K := n_K > \max(N, n) = n+p \quad (\forall n < N_1) |x_n - l| \leq |x_n - x_{n_K} + x_{n_K} - l| < \epsilon$$

Теорема 12 (Число e) Последовательность $\{x_n = (1 + \frac{1}{n})^n\}_{n=1}^{\infty}$ сходится. Ее предел называется числом e

Доказательство Рассмотрим $y_n := (1 + \frac{1}{n})^{n+1}$. Доказать, что y_0 убывает

$$\frac{y_{n-1}}{y_n} = \frac{(1 + \frac{1}{n-1})^n}{(1 + \frac{1}{n})^{n+1}} = (\frac{\frac{n}{n-1}}{\frac{n+1}{n}})^n \times \frac{1}{1 + \frac{1}{n}} = (\frac{n^2}{n^2 - 1})^n \frac{1}{1 + \frac{1}{n}} = (1 + \frac{1}{n^2 - 1})^n \frac{n}{n+1} \geq (1 + \frac{n}{n^2 + 1}) \frac{n}{n+1} = \frac{(n^2 - 1) - n}{(n^2 + 1) - n} = \frac{n^2 - n - 1}{n^2 + 1 - n}$$

$$x_n = \frac{y_n}{1 + \frac{1}{n}} \rightarrow_{(n \rightarrow \infty)} e$$

Дополнение $e > 2$

$$x_n \nearrow \quad \frac{x_n + 1}{x_n} = \frac{(1 + \frac{1}{n+1})^{n+1}}{(1 + \frac{1}{n})^n} = (1 - \frac{1}{(n+1)^2})^n \frac{n+2}{n+1} \geq (1 - \frac{n}{(n+1)^2}) \frac{n+2}{n+1} = \frac{n^3 + 3n^2 + 3n + 2}{n^2 + 3n^2 + 3n + 1} > 1$$

$$2 = x_1 < x_n < y_n \quad e = 2,718281828 \dots$$

Пример 2 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$

$$\sqrt[n]{n} > 1 \quad \sqrt[n]{n} =: 1 + \alpha_n, \quad \alpha_n > 0$$

$$n = (1 + \alpha_n)^n \geq 1 + n\alpha_n + \frac{n(n-1)}{2} \alpha_n^2 > 1$$

$$\frac{1}{n-1} \geq \frac{1}{n(n-1)} + \frac{\alpha_n}{n-1} + \frac{\alpha_n}{2} > \frac{1}{n(n-1)} \implies \alpha_n^2 \rightarrow 0 \implies \alpha_n \rightarrow 0$$

3.3 Предел функции

Определение Проколотой δ -окрестностью точки $a \in \mathbb{R}$ называется множество

$$U_\delta^o(a) = (a - \delta, a) \cup (a, a + \delta)$$

$$U_\delta^o((\pm)\infty) = U_\delta((\pm)\infty)$$

Определение (Коши) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A \iff (\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in U_\delta^o(a)) f(x) \in U_\epsilon^o(A)$

Определение (Гейне) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A \iff (\forall \{x_n\} \subset X \setminus \{a\}, \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a) \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A$

Теорема 1 Определение предела функции по Коши и по Гейне эквивалентны.

Доказательство

1) $K \implies G$

$$(\forall x_n \in X \setminus a, \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a) \iff (\forall \delta > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n > N) x_n \in U_\delta^o(a) \implies^K f(x_n) \in U_\delta(A)$$

2) $G \implies K$ (от противного)

$$(\forall \epsilon > 0)(\forall \delta > 0)(\exists x \in U_\delta^o(a)) f(x) \notin U_{\epsilon_0}(A)$$

$$1. \delta := 1 \quad x_1 \in U_1^o(a) \quad f(x_1) \notin U_{\epsilon_0}(A)$$

$$2. \delta := 1/2 \quad x_2 \in U_{1/2}^o(a) \quad f(x_2) \notin U_{\epsilon_0}(A)$$

3. ...

$$4. \delta := 1/n \quad x_n \in U_{1/n}^o(a) \quad f(x_n) \notin U_{\epsilon_0}(A)$$

$$\{x_n\}_{n=1}^\infty \quad (\forall \epsilon > 0)(\exists N = [\frac{1}{\epsilon}] + 1)(\forall n > N) x_n \in U_\epsilon(a) \implies \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A$$

$a, A \in \mathbb{R}$

$$\text{Коши: } \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A \iff (\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x : 0 < |x - a| < \delta) |f(x) - A| < \epsilon$$

Пример 1

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)(x + 1)}{(x - 1)} = \lim_{x \rightarrow 1} (x + 1) = 2$$

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x : 0 < |x - 1| < \delta) \left| \frac{x^2 - 1}{x - 1} - 2 \right| < \epsilon$$

$$\delta = \epsilon \quad 0 < |x - 1| < \epsilon \implies \frac{x^2 - 1 - 2x + 2}{x - 1} = \frac{(x - 1)^2}{(x - 1)} = (x - 1)$$

Пример 2 (Функция Дирихле)

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) \neg \exists (\forall a \in \mathbb{R})$$

1) $a \in \mathbb{Q}$

$$1. x'_n = a - \frac{1}{n} \in \mathbb{Q} \quad f(x'_n) = 1 \rightarrow_{n \rightarrow \infty} 1$$

$$2. x''_n = a - \frac{\sqrt{2}}{n} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \quad f(x''_n) = 0 \rightarrow_{n \rightarrow \infty} 0$$

$$2) a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$$

$$1. x'_n = a - \frac{1}{n} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \quad f(x'_n) = 0 \rightarrow_{n \rightarrow \infty} 0$$

$$2. x''_n = (a)_n \in \mathbb{Q} \quad f(x''_n) = 1 \rightarrow_{n \rightarrow \infty} 1$$

Теорема 2 (Свойства предела функции, связанные с неравенствами)

1. (Ограниченность) Если $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A \in \mathbb{R}$, то $f(x)$ ограничена в ... проколотой окрестности точки a , т. е. множество значений функции $f(x)$ ограничено.
2. (Отделимость от нуля и сохранение знака) Если $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A \in \bar{\mathbb{R}}$, то $(\exists C > 0)$ такое, что в
3. О трех функциях. Если $(\exists \delta > 0)(\forall x \in U_\delta^o(a)) f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ и $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} h(x) = A \in \bar{\mathbb{R}} \implies \lim_{x \rightarrow a} g(x) = A$

Доказательство

1.

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in U_\delta^o(a)) |f(x) - A| < \epsilon$$

$$\epsilon := 1 \quad (\exists \delta > 0)(\forall x \in U_\delta^o(a)) A - 1 < f(x) < A + 1$$

2.

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in U_\delta^o(a)) f(x) \in U_\epsilon(A)$$

$$A = \pm\infty \quad \epsilon := 1 \quad f(x) \in U_1(\pm\infty) \quad \text{sign} f(x) = \pm 1 \quad |f(x)| > 1$$

$$A \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \quad \epsilon := \frac{|A|}{2} > 0 \quad f(x) \in U_{\frac{|A|}{2}}(A) \iff |f(x) - A| < \frac{|A|}{2}$$

Теорема 3 (Свойства предела функции, связанные с арифметическими операциями)

Пусть $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$, $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = B$, $A, B \in \mathbb{R}$, тогда

$$1. \lim_{x \rightarrow a} (f \pm g)(x) = A \pm B$$

$$2. \lim_{x \rightarrow a} (f \times g)(x) = A \times B$$

$$3. \text{ Если } B \neq 0, \text{ то } \lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{A}{B}$$

Доказательство 3)

$$B \neq 0 \implies \text{Th2(2)} (\exists \delta > 0)(\forall x \in U_\delta^o(a)) g(x) \neq 0$$

$$(\forall \{x_n\}_{n=1}^\infty x_n \neq 0, \lim_{x \rightarrow \infty} x_n = a$$

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow \infty} f(x_n) = A \\ \lim_{x \rightarrow \infty} g(x_n) = B \end{cases} \implies \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x_n)}{g(x_n)} = \frac{A}{B}$$

Теорема 4 (Критерий Коши, существование предела функции)

$$\exists \lim_{x \rightarrow a} f(x) \in \mathbb{R} \iff (\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x_1, x_2 \in U_\delta^o(a)) |f(x_1) - f(x_2)| < \epsilon$$

Доказательство

Необходимость

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} f(x) = A \in \mathbb{R} &\iff (\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in U_\delta^o(a)) |f(x) - A| < \frac{\epsilon}{2} \\ |f(x_1) - f(x_2)| &\leq |f(x_1) - A| + |A - f(x_2)| < \epsilon \end{aligned}$$

Достаточность

$$(\forall \{x_n\}_{n=1}^\infty \subset X \setminus \{a\}, \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A \in \mathbb{R}$$

$$(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n > N) x_n \in U_\delta^o(a) \quad (\forall p \in \mathbb{N}) |f(x_{n+p}) - f(x_n)| < \epsilon \implies \{f(x_n)\}_{n=1}^\infty \text{ фундаментальна} \implies$$

3.4 Сравнение функций

Определение. Пусть $f(x) = \lambda(x)g(x)$ в проколотовой окрестности точки a

1. Если $\lambda(x)$ ограничена в некоторой проколотовой окрестности, то $f(x) = O(g(x))$, $x \rightarrow a$
2. Если $\lim_{x \rightarrow a} \lambda(x) = 0$, то $f(x) = o(g(x))$, $x \rightarrow a$
3. Если $\lim_{x \rightarrow a} \lambda(x) = 1$, то $f(x) \sim g(x)$, $x \rightarrow a$

Теорема 1. Если $g(x) \neq 0$ в некоторой проколотовой окрестности точки a , то

1. $\frac{f(x)}{g(x)}$ ограничена в некоторой проколотовой окрестности точки $a \implies f(x) = O(g(x))$, $x \rightarrow a$
2. $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0 \implies f(x) = o(g(x))$, $x \rightarrow a$
3. $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1 \implies f(x) \sim o(g(x))$, $x \rightarrow a$

Пример

$$\sin x \sin \frac{1}{x} = \sin \frac{1}{x} = O(\sin \frac{1}{x}), \quad x \rightarrow 0$$

$$x \sin \frac{1}{x} = o(\sin \frac{1}{x}), \quad x \rightarrow 0$$

$$\sin x \sin \frac{1}{x} \sim x \sin \frac{1}{x}, \quad x \rightarrow 0$$

Теорема 2. $f(x) \sim g(x)$, $x \rightarrow a \iff f(x) - g(x) = o(g(x))$, $x \rightarrow a$

Доказательство.

$$f(x) \sim g(x), \quad x \rightarrow a \implies f(x) = \lambda(x)g(x), \quad \lim_{x \rightarrow a} \lambda(x) = 1 \implies f(x) - g(x) = (\lambda(x) - 1)g(x), \quad \lim_{x \rightarrow a} (\lambda(x) - 1) = 0$$

Теорема 3. (Использование эквивалентных при вычислении пределов)

Если $f_1(x) \sim f_2(x)$, $x \rightarrow a$, то $\lim_{x \rightarrow a} f_1(x)g(x) = \lim_{x \rightarrow a} f_2(x)g(x)$ и $\lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x)}{f_1(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x)}{f_2(x)}$ при условии, что хотя бы один из пределов в каждом равенстве существует.

4 Дифференциальное исчисление функций одной переменной

4.1 Определение производной

Определение. Пусть $y = f(x)$ определена в некоторой окрестности точки $a \in \mathbb{R}$. Приращением Δy этой функции в точке a , соответствующим приращению аргумента Δx , называется $\Delta y = f(a + \Delta x) - f(a)$. Производной функции $y = f(x)$ в точке a называется предел (если он существует и конечен) $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} =: f'(a)$

Теорема 1. Если функция имеет производную в точке a , то она непрерывна в a .

Доказательство:

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(x) + \alpha(x), \quad \lim_{x \rightarrow a} \alpha(x) = 0 \implies f(x) - f(a) = f'(a)(x - a) + \alpha(x)(x - a)$$

Теорема 2. (Арифметические операции и производная)

Если $\exists f'(a)$ и $g'(a)$, то

$$(f \pm g)'(a) = f'(a) \pm g'(a) \quad (1)$$

$$(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a) \quad (2)$$

$$\text{Если } g(a) \neq 0, \text{ то } \left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g^2(a)} \quad (3)$$

Доказательство

1.

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}, \quad g'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x) - g(a)}{x - a}$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{(f(x) \pm g(x)) - (f(a) \pm g(a))}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \pm \lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x) - g(a)}{x - a}$$

2.

$$\frac{(fg)(x) - (fg)(a)}{x - a} = \frac{f(a)g(x) - f(a)g(a)}{x - a} + \frac{f(x)g(a) - f(a)g(a)}{x - a} = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} g(a) + f(a) \frac{g(x) - g(a)}{x - a}$$

$$f'(a)g(a) + f(a)g'(a) \text{ при } x \rightarrow a$$

3.

$$\frac{\frac{f}{g}(x) - \frac{f}{g}(a)}{x - a} = \frac{f(x)g(a) - f(a)g(x)}{g(x)g(a)(x - a)} = \frac{f(x)g(a) - f(a)g(a)}{g(x)g(a)(x - a)} + \frac{f(a)g(a) - f(a)g(x)}{g(x)g(a)(x - a)}$$

$$\frac{g(a)f'(a)}{g^2(a)} - \frac{f(a)g'(a)}{g^2(a)} \text{ при } x \rightarrow a$$

Теорема 3 (Произведение элементарных функций)

Для всех a из области определения соответствующих функций справедливы равенства:

$$1. (\sin x)'|_{x=a} = \cos a$$

$$2. (\cos x)'|_{x=a} = -\sin a$$

$$3. (\operatorname{tg} x)'|_{x=a} = \frac{1}{\cos^2(a)} = \sec^2 a$$

$$4. (\operatorname{ctg} x)'|_{x=a} = -\frac{1}{\sin^2(a)} = -\operatorname{cosec}^2 a$$

$$5. (x^b)'|_{x=a} = ba^{b-1} \quad (a > 0 \text{ для } b \notin \mathbb{Z}, a \neq 0 \text{ для } b \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N})$$

$$6. (b^x)'|_{x=a} = b^a \ln b$$

$$7. (\operatorname{sh} x)'|_{x=a} = \operatorname{ch} a$$

$$8. (\operatorname{ch} x)'|_{x=a} = \operatorname{sh} a$$

$$9. (\operatorname{th} x)'|_{x=a} = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 a}$$

$$10. (\operatorname{ch} x)'|_{x=a} = -\frac{1}{\operatorname{th}^2 a}$$

Доказательство.

1)

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin x - \sin a}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{2 \sin \frac{x-a}{2} \cos \frac{x+a}{2}}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \cos \frac{x+a}{2} = \cos a$$

2)

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\cos x - \cos a}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{-2 \sin \frac{x-a}{2} \sin \frac{x+a}{2}}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} (-\sin \frac{x+a}{2}) = -\sin a$$

5)

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^b - a^b}{x - a} = a^b \lim_{x \rightarrow a} \frac{(\frac{x}{a})^b - 1}{\frac{x}{a} - 1} = a^b \lim_{x \rightarrow a} \frac{e^{b \ln \frac{x}{a}} - 1}{\frac{x}{a} - 1} = a^b \lim_{x \rightarrow a} \frac{b \ln \frac{x}{a}}{\frac{x}{a} - 1} = a^b b \lim_{x \rightarrow a} \frac{\ln(a + \frac{x-a}{a})}{\frac{x}{a} - 1} = a^b b \lim_{x \rightarrow a} \frac{x - a}{a(x - a)}.$$

6)

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{b^x - b^a}{x - a} = b^a \lim_{x \rightarrow a} \frac{b^{x-a} - 1}{x - a} = b^a \ln b$$

7)

$$(\operatorname{sh} x)' = (\frac{e^x - e^{-x}}{2})' = \frac{1}{2}(e^x - (\frac{1}{e^x})') = \frac{1}{2}(e^x - \frac{-e^x}{e^{2x}}) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \operatorname{ch} x$$

10)

$$(\operatorname{cth} x)' = (\frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x})' = \frac{(\operatorname{ch} x)' \operatorname{sh} x - \operatorname{ch} x (\operatorname{sh} x)'}{\operatorname{sh}^2 x} = \frac{\operatorname{sh}^2 x - \operatorname{ch}^2 x}{\operatorname{sh}^2 x} = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$$

Теорема 4. (Производная обратной функции)

Если $f(x)$ непрерывна и строго монотонна на $U_\delta(a)$ и $\exists f'(a) \neq 0$, то обратная функция f^{-1} имеет производную в точке $f(a)$, равную $\frac{1}{f'(a)}$ ($= (f^{-1})'(f(a))$)

Доказательство. Обратная функция определена, непрерывна на интервале $f(U_\delta(a))$ и строго монотонна, $\Phi = f^{-1}$, рассмотрим $[a - \delta, a + \delta]$. Для определенности, $f \nearrow$. Тогда Φ определена на $[f(a - \delta), f(a + \delta)] \rightarrow y$

$$\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Phi(f(a) + \Delta y) - \Phi(f(a))}{\Delta y} = \frac{1}{\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}} = \frac{1}{f'(a)}$$

Следствие. (Производная обратных тригонометрических и логарифмических функций)

Для всех a из интервалов, входящих в область определения справедливы равенства:

$$(\arcsin x)'|_{x=a} = \frac{1}{\sqrt{1-a^2}}$$

$$(\arccos x)'|_{x=a} = -\frac{1}{\sqrt{1-a^2}}$$

$$(\operatorname{arctg} x)'|_{x=a} = \frac{1}{1+a^2}$$

$$(\operatorname{arcctg} x)'|_{x=a} = -\frac{1}{1+a^2}$$

$$(\log_b x)'|_{x=a} = -\frac{1}{a \ln b}, \quad b \in (0, 1) \cup (1, +\infty)$$

Доказательство.

$$(\arcsin x)'|_{x=a} = \frac{1}{(\sin y)|_{y=\arcsin a}} = \frac{1}{\cos(\arcsin a)} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2(\arcsin a)}} = \frac{1}{\sqrt{1-a^2}}$$

$$(\operatorname{arctg} x)'|_{x=a} = \frac{1}{(\operatorname{tg} y)|_{y=\operatorname{arctg} a}} = \cos^2(\operatorname{arctg} a) = \frac{1}{\operatorname{tg}^2(\operatorname{arctg} a) + 1} = \frac{1}{1+a^2}$$

$$(\log_b x)'|_{x=a} = \frac{1}{(b^y)'|_{y=\log_b a}} = \frac{1}{b^{\log_b a} \ln b} = \frac{1}{a \ln b}$$

Замечание Предположение непрерывности функции в окрестности, то есть существенно.

$$y = f(x) \quad f\left(\frac{1}{n}\right) := \frac{1}{2n-1}, \quad n \in \mathbb{N} \quad f\left(\frac{1}{n} + 0\right) := f\left(\frac{1}{n}\right) \quad f\left(\frac{1}{n} - 0\right) := \frac{1}{2n}$$

$$f(0) := 0 \quad f(-x) := -f(x), \quad x \in [0, 1]$$

$$\Delta x \in \left[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right] \quad \Delta y = f(0 + \Delta x) - f(0) = f(\Delta x) \quad \frac{\frac{1}{2n} + 1}{\frac{1}{n}} \leq \frac{\Delta x}{\Delta y} \leq \frac{\frac{1}{2n}}{\frac{1}{n+1}}$$

$$f([-1, 1]) = [-1, 1] \cup_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2n}, \frac{1}{2n-1}\right) \cup \left(-\frac{1}{2n-1}, -\frac{1}{2n}\right)$$

4.2

Определение. Функция $y = f(x)$, определенная в некоторой окрестности точки называется дифференцируемой в точке $a \in \mathbb{R}$, если ее приращение в этой точке может быть записано в виде $\Delta y = A\Delta x + o(x\Delta x)$, $\Delta x \rightarrow 0$, где $A \in \mathbb{R}$. Выражение $A\Delta x$ из определения дифференцируемости называется дифференциалом, если $y = f(x)$ в точке a ($dy = A\Delta x$).

Теорема 1. (Дифференцируемость и производная) Функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке тогда и только тогда, когда она имеет производную в точке a . При этом $A = f'(a)$.

Доказательство. Пусть f дифференцируема в точке a .

$$\Delta y = A\Delta x + o(\Delta x), \quad \Delta x \rightarrow 0$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = A + o(1), \quad \Delta x \rightarrow 0$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = A = f'(a)$$

Следствие. Если f дифференцируема в точке a , то она непрерывна в точке a .

Пример 1.

$$y = |x| \quad \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = 0, \quad \Delta y = |\Delta x|$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0+} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0+} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1 \quad \lim_{\Delta x \rightarrow 0-} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0-} \frac{-\Delta x}{\Delta x} = -1$$

Пример 2.

$$y = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{\Delta x}$$

Теорема 2. (Дифференцируемость сложных функций) Если $u = f(y)$ дифференцируема в точке $g(a)$, функция $y = g(x)$ дифференцируема в точке a , то функция $u = h(x) = f(g(x))$ дифференцируема в точке a , причем $h'(a) = f'(g(a))g'(a)$

Доказательство.

$$\Delta u = f'(g(a))\Delta y + o(\Delta y), \quad \Delta y \rightarrow 0, \quad (\Delta u = f(g(a) + \Delta y) - f(g(a)))$$

$$\Delta u = g'(a)\Delta x + o(\Delta x), \quad \Delta x \rightarrow 0, \quad (\Delta y = g(a + \Delta x) - g(a))$$

$$\Delta u = f(g(a) + g(a + \Delta x) - g(a)) - f(g(a)) = h(a + \Delta x) - h(a)$$

$$\Delta u = f'(g(a))g'(a)\Delta x + f'(g(a))o(\Delta x) + o(g(a + \Delta x) - g(a)), \quad \Delta x \rightarrow 0$$

$$\boxed{dx := \Delta x \quad dy = f'(a)dx \quad y' = \frac{dy}{dx}}$$

Следствие. (Инвариантность формы первого дифференциала) Формула для дифференциала $dy = f'(a)dx$ справедлива как в случае, когда x - независимая переменная, так и когда x является функцией от другой переменной.

Доказательство.

$$f = g(t) \quad y = f(x) = f(g(t)) = h(t) \quad a = g(b)$$

$$h'(b) = f'(a)g'(b) \quad dy = h'(b)dt = f'(a)g'(b)dt = f'(a)dx$$

Определение. Касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке $(a, f(a))$ называется предельное положение секущей, то есть прямой, проходящей через точки $(a, f(a))$ и $(a + \Delta x, f(a + \Delta x))$, при $\Delta x \rightarrow 0$. **Уравнение секущей.**

$$\frac{y - f(a)}{x - a} = \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x}, \text{ то есть } y = f(a) + \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x}(x - a)$$

Определение. Если $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x} = +\infty$ или $-\infty$ и $f(X)$ непрерывна в точке a , то будем говорить, что $f'(a)$ равна $+\infty$ или $-\infty$ соответственно.

Пример

$$f(x) = \sqrt[3]{x} \quad f'(0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{\Delta x}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt[3]{(\Delta x)^2}} = +\infty \quad \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \infty$$

Теорема 3. (Геометрический смысл производной и дифференциала) Пусть $f(x)$ непрерывна в некоторой окрестности точки a . Тогда касательная к графику $y = f(x)$ в точке $(a, f(a))$ существует тогда и только тогда, когда $\exists \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \in \bar{\mathbb{R}}$. При этом уравнение касательной в случае дифференцируемости в точке a :

$$y = f(a) + f'(a)(x - a)$$

А в случае бесконечной производной в точке a : $x = a$. Дифференциал представлен приращением ординаты касательной соответствующей приращению Δx .

4.3 Производные и дифференциалы высших порядков

$$\begin{aligned}(f'(x))'|_{x=a} &=: f''(a) \\ (f^{(n-1)}(x))'|_{x=a} &=: f^{(n)}(x)\end{aligned}$$

Пример.

- 1) $(\sin x)' = \cos x$
- 2) $(\sin x)'' = -\sin x$
- 3) $(\sin x)''' = -\cos x$
- 4) $(\sin x)^{(4)} = \sin x$

Общий случай.

$$(\sin x)^{(n)} = \sin(x + \frac{n\pi}{2}), \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\} \quad (\sin x)^{(n+1)} = ((\sin x)^{(n)})' = \cos(x + \frac{n\pi}{2}) = \sin(x + \frac{(n+1)\pi}{2})$$

$$(\cos x)^{(n)} = \cos(x + \frac{n\pi}{2}), \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

$$(a^x)^{(n)} = a^x \ln^n a$$

$$(x^a)^{(n)} = a(a-1) \dots (a-n+1)x^{a-n} = n! C_\alpha^n x^{a-n}, \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\}, a \notin \mathbb{N}$$

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n, \quad 0! = 1 \quad C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Лемма.

$$C_n^{k-1} + C_n^k = C_{n+1}^k, \quad 1 \leq k \leq n, \quad n = 1, 2, \dots$$

Доказательство.

$$\frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!} + \frac{n!}{(k)!(n-k)!} = \frac{n!(k+n-k+1)}{k!(n-k+1)!} = \frac{(n+1)!}{k!(n-k+1)!} = C_{n+1}^k$$

■

Теорема. (формула Лейбница) Если существуют коенчные произведения порядка n функций f и g в некоторой точке, то для их произведения в этой точке справедлива формула $(fg)^{(n)} = \sum_{k=1}^n f^{(k)} \cdot g^{(n-k)}$.

Доказательство. По индукции.

1)

$$n = 1, \quad (fg)' = \sum_{k=1}^1 C_1^k f^{(k)} g^{(1-k)} = fg' + f'g$$

2) n - доказано

3)

$$\begin{aligned} n+1 \quad (fg)^{(n+1)} &= ((fg)^{(n)})' = \sum_{k=0}^n C_n^k (f^{(n)} g^{(n-k)})' = \\ &= \sum_{k=0}^n C_n^k f^{(k+1)} g^{(n-k)} + \sum_{k=0}^n C_n^k f^{(k)} g^{(n+1-k)} =_{k+1:=m} \\ &= \sum_{m=1}^n C_n^{m-1} f^{(m)} g^{(n-m+1)} + C_n^n f^{(n+1)} g^{(0)} + C_n^0 f^{(0)} g^{(n+1)} + \sum_{m=1}^n C_n^m f^{(m)} g^{(n+1-m)} = \\ &= \sum_{m=1}^n C_{n+1}^m f^{(m)} g^{(n+1-m)} + C_{n+1}^{n+1} g^{(n+1)} g^{(0)} + C_{n+1}^0 f^{(0)} g^{(n+1)} = \sum_{m=0}^{n+1} C_{n+1}^m f^{(m)} g^{(n+1-m)} \end{aligned}$$

■

Следствие. (Бином Ньютона)

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k a^k b^{n-k}$$

Теорема. (Формула Фаа-ди-Бруно) Если существует производная n -порядка функции g в точке a , и f в точке $g(a)$, то

$$(f \circ g)^{(n)} = \sum_{\pi \in \Pi_n} f^{(|\pi|)} \circ g \prod_{B \in \pi} g^{(|B|)}$$

Где Π_n обозначает множество всех разбиений $1, 2, \dots, n$ на непустые подмножества, $|A|$ - число элементов множества A .

Доказательство. По индукции.

1)

$$n = 1 \quad \Pi_1 \quad \{1\} \quad \pi = \{\{1\}\} \quad B = \{1\}$$

2) n - верно

3)

$$n+1 \quad \Pi_{n+1} \quad \Pi_n \quad \{1, 2, \dots, n+1\}$$

Два варианта построить $n+1$

1. $\{n+1\}$

$$f^{(|\pi|+1)} \circ g \prod_{B \in \pi} g^{(|B|)} \cdot g'$$

2. $n + 1$ включается в какое то B .

$$f^{(|\pi|)} \circ g \prod_{\tilde{B} \in \pi, \tilde{B} \neq B} g^{(|\tilde{B}|)} \cdot g^{(|B|+1)}$$

■

Пример. $n = 4 \{1, 2, 3, 4\}$

$$\begin{array}{lll} 4 = 4 & \pi = \{\{1, 2, 3, 4\}\} & (f' \circ g)g^{(n)} \\ 4 = 3 + 1 & \pi = \{\{1\}, \{2, 3, 4\}\} & 4(f'' \circ g)g'g'' \\ 4 = 2 + 1 + 1 & \pi = \{\{1\}, \{2\}, \{3, 4\}\} & 6(f''' \circ g)(g')^2g'' \\ 4 = 2 + 2 & \pi = \{\{1, 2\}, \{3, 4\}\} & 3(f'' \circ g)(g'')^2 \\ 4 = 1 + 1 + 1 + 1 & \pi = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}\} & (f^{(4)} \circ g)(g')^4 \end{array}$$

Определение. Дифференциалом n -го порядка от $f(x)$, где x - независимая переменная, в точке a называется дифференциал от дифференциала $n - 1$ -го порядка, причем в качестве dx в каждом из дифференциалов берется одно и то же число (Δx)

$$d(d^{n-1}f) =: d^n f$$

Следствие. Если x - независимая переменная

$$d^n f(a) = f^{(n)}(a)dx^n$$

Пример. Пусть $f(x)$ - функция переменной $x = \phi(f)$, f - независимая.

$$\begin{aligned} d^2 f &= d^2 h = h'' dt^2 = ((f' \circ \phi)\phi')' \\ dt^2 &= ((f'' \circ \phi)(\phi')^2 + ((f' \circ \phi)\phi'')dt^2 = \\ &= f'' dx^2 + f' d^2 x \end{aligned}$$

4.4 Свойства производных

Определение. Точка x_0 называется точкой (строго) локального максимума функции $f(x)$, если при всех x из некоторой $U_\delta^o(x_0)$ выполняется $f(x) \leq f(x_0)$ ($f(x) < f(x_0)$). Аналогично определена точка (строго) локального минимума. В любом из этих случаев x_0 - точка локального экстремума.

Теорема. (Ферма) Если x_0 - точка локального экстремума функции f , дифференцируемой в x_0 , то $f'(x_0) = 0$.

Доказательство. Пусть x_0 - точка локального максимума.

$$\begin{aligned} f'_+(x_0) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0+} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \leq 0 \\ f'_-(x_0) &\geq 0 \\ f'(x_0) &= f'_-(x_0) = f'_+(x_0) = 0 \end{aligned}$$

■

Теорема. (Ролль) Если f - непрерывна на $[a, b]$, дифференцируема на (a, b) и $f(a) = f(b)$, то $\exists c \in (a, b) : f'(c) = 0$.

Доказательство. f - непрерывна на отрезке $[a, b]$, значит по теореме Вейерштрасса $\exists \max_{x \in [a, b]} f(x) > \min_{x \in [a, b]} f(x)$. Хотя бы одно из этих чисел (пусть \max) не совпадают с $f(a) = f(b) \Rightarrow \max_{x \in [a, b]} f(x) = f(c), c \in (a, b)$. Значит по теореме Ферма $f'(c) = 0$. ■

Теорема. (Обобщенная теорема о средних) Если f, g - непрерывны на $[a, b]$, дифференцируемы на интервале (a, b) , то

$$\exists c \in (a, b) : (f(b) - f(a))g'(c) = (g(b) - g(a))f'(c)$$

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$h(x) = (f(b) - f(a))g(x) - (g(b) - g(a))f(x)$$

$$h(a) = (f(b) - f(a))g(a) - (g(b) - g(a))f(a) = f(b)g(a) - g(b)f(a)$$

$$h(b) = ((f(b) - f(a))g(b) - (g(b) - g(a))f(b) = g(a)f(b) - f(a)g(b)$$

$h(a) = h(b)$, тогда по теореме Ролля

$$\exists c \in (a, b) : h'(c) = 0$$

Следствие. (Теорема Лагранжа о средних) Если f непрерывна на отрезке $[a, b]$, дифференцируема на (a, b) , то $\exists c \in (a, b) : \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$

Доказательство.

$$g(x) := x$$

Следствие. (Теорема Коши о среднем) Если f, g непрерывны на $[a, b]$, дифференцируемы на (a, b) , g' не обращена в нуль на (a, b) , то

$$\exists c \in (a, b) : \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$