Д.В. Беклемишев

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ

ИЗ КУРСА АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ И ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ

МОСКВА
ФИЗМАТЛИТ®
2014

УДК 514
ББК 22.151
Б 42

Беклемишев Д.В. **Решение задач из курса аналитической геометрии и линейной алгебры.** — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2014. — 192 с. — ISBN 978-5-9221-1480-6.

В пособии представлены решения задач из «Курса аналитической геометрии и линейной алгебры» Д.В. Беклемишева. Расположение задач соответствует главам и параграфам учебника, в решениях используются только сведения, изложенные в соответствующих разделах учебника.

Для студентов высших учебных заведений.

Учебное издание

БЕКЛЕМИШЕВ Дмитрий Владимирович

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ
ИЗ КУРСА АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ И ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ

Редактор *Н.Б. Бартошевич-Жагель*
Оригинал-макет: *Д.В. Горбачев*
Оформление переплета: *Д.Б. Белуха*

Подписано в печать 14.10.2013. Формат 60×90/16. Бумага офсетная. Печать офсетная. Усл. печ. л. 12. Уч.-изд. л. 13,2. Тираж 500 экз. Заказ №

Издательская фирма «Физико-математическая литература»
МАИК «Наука/Интерпериодика»
117997, Москва, ул. Профсоюзная, 90
E-mail: fizmat@maik.ru, fmlsale@maik.ru;
http://www.fml.ru

Отпечатано с электронных носителей
в ГУП Чувашской Республики «ИПК «Чувашия»,
Мининформполитики Чувашии,
428019 г. Чебоксары, пр-т И. Яковлева, 13

ISBN 978-5-9221-1480-6

9 785922 114806

ISBN 978-5-9221-1480-6

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

В этом пособии представлены решения задач из моего учебника «Курс аналитической геометрии и линейной алгебры», а также немногих других задач, которые мне показались полезными. Эти задачи отмечены звездочками.

Расположение задач соответствует главам и параграфам учебника, и в решениях используются только те сведения, которые изложены в соответствующих разделах. Поэтому читатель в ряде случаев сможет заметить, что, используя более продвинутые методы, можно существенно улучшить решение.

Все необходимые факты используются в том виде, в котором они приведены в учебнике. Кроме того, выражение «как известно» или любое эквивалентное можно рассматривать как неявную ссылку на учебник. Ссылки на теоремы или формулы, которые отсылают к учебнику, начинаются с буквы «К».

Людмила Анатольевна Беклемишева и Тамара Харитоновна Яковлева прочитали рукопись. Я очень благодарен им за сделанные замечания.

Глава I § 1

1. *Укажите на плоскости три таких вектора, по которым любой вектор этой плоскости может быть разложен с положительными коэффициентами.*

Р е ш е н и е. Выберем векторы $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ одинаковыми по длине и такими, чтобы каждый из них составлял с остальными углы, равные $2\pi/3$.

Нетрудно проверить, что $\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}=\mathbf{0}$. Тогда, если $\mathbf{x} = \alpha\mathbf{a}+\beta\mathbf{b}+\gamma\mathbf{c}$ — какое-либо разложение вектора $\mathbf{x}$, то верно и равенство $\mathbf{x} = \alpha\mathbf{a}+\beta\mathbf{b}+\gamma\mathbf{c}+\lambda(\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c})$ при любом λ. Ясно, что при $\lambda > \max\{|\alpha|, |\beta|, |\gamma|\}$ коэффициенты последнего разложения будут положительными. Таким образом, каждый вектор (в том числе и нулевой) может быть разложен с положительными коэффициентами.

Здесь видно также и условие, при котором по какой-либо тройке векторов можно разложить любой вектор с положительными коэффициентами. Именно, необходимо и достаточно, чтобы она была линейно зависимой и коэффициенты нулевой линейной комбинации были положительными.

2. *Докажите, что точка C лежит на отрезке AB тогда и только тогда, когда существует число $\lambda \in [0, 1]$, такое что для любой точки O выполнено $\overrightarrow{OC} = \lambda\overrightarrow{OB} + (1-\lambda)\overrightarrow{OA}$. Если λ дано, то в каком отношении точка C делит отрезок?*

Р е ш е н и е. Точка C лежит на отрезке AB тогда и только тогда, когда $\overrightarrow{AC} = \lambda\overrightarrow{AB}$, где $\lambda \in [0, 1]$. Выберем какую-нибудь точку O. Тогда $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \lambda\overrightarrow{AB}$, а $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$. Поэтому $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \lambda(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA})$. Это равносильно доказываемому равенству.

Ясно, что $\overrightarrow{CB} = (1-\lambda)\overrightarrow{AB}$. Значение $\lambda = 1$ соответствует $C = B$. При $\lambda \neq 1$

$$\frac{|AC|}{|CB|} = \frac{\lambda|\overrightarrow{AB}|}{(1-\lambda)|\overrightarrow{AB}|} = \frac{\lambda}{1-\lambda}.$$

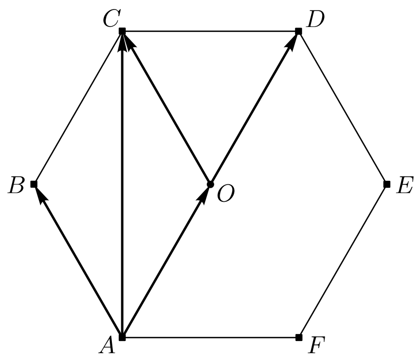

Рис. 1

3. *Дан правильный шестиугольник* $ABCDEF$, $|AB| = 2$. *Найдите координаты вектора* $\overrightarrow{AC}$ *в базисе* $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$.

Решение. Пусть точка O — центр шестиугольника. Как видно из рис. 1, $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB}$. Следовательно, искомые координаты $\left(1, \frac{1}{2}\right)$.

Обратим внимание на то, что результат не зависит от длины стороны шестиугольника. Координаты никогда не зависят от выбора единицы измерения длин.

4. *В некотором базисе на плоскости заданы координаты векторов* $\mathbf{a}(1, 2)$, $\mathbf{b}(2, 3)$ *и* $\mathbf{c}(-1, 1)$. *Проверьте, что* $\mathbf{a}$ *и* $\mathbf{b}$ *линейно независимы. Найдите координаты* $\mathbf{c}$ *в базисе* $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$.

Решение. Рассмотрим линейную комбинацию векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$, равную нулевому вектору: $\alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b} = \mathbf{0}$. Это векторное равенство равносильно двум равенствам, связывающим их координаты: $\alpha\,1 + \beta\,2 = 0$ и $\alpha\,2 + \beta\,3 = 0$. Умножим первое равенство на 2 и вычтем из второго. Так мы найдем, что $\beta = 0$. Подставляя это в первое равенство, видим, что и $\alpha = 0$. Таким образом, из обращения в нуль линейной комбинации следует, что ее коэффициенты равны нулю. Векторы линейно независимы.

Пусть $\mathbf{c} = x\mathbf{a} + y\mathbf{b}$. Это равенство равносильно системе линейных уравнений с неизвестными x и y:

$$x + 2y = -1,$$
$$2x + 3y = 1.$$

Подставим $x = -1 - 2y$ из первого уравнения во второе и найдем, что $y = -3$. Следовательно, решение системы $x = 5$; $y = -3$, и $\mathbf{c} = 5\mathbf{a} - 3\mathbf{b}$.

5. *Даны три точки A, B и C. Найдите такую точку O, что $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \mathbf{0}$. Решив аналогичную задачу для четырех точек, докажите, что в треугольной пирамиде отрезки, соединяющие вершины с центрами тяжести противоположных граней, пересекаются в одной точке.*

Решение. Пусть такая точка O существует. Тогда для произвольной точки P выполнено равенство

$$\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} = 3\overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 3\overrightarrow{PO}. \qquad (1)$$

Положив $P = A$, мы получим

$$\overrightarrow{AO} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right), \qquad (2)$$

откуда следует, что такой точкой O может быть только точка пересечения медиан $\triangle ABC$.

С другой стороны, если O — центр тяжести $\triangle ABC$, то $\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 2\overrightarrow{OD}$, где D — середина стороны BC. Но и $\overrightarrow{AO} = 2\overrightarrow{OD}$. Отсюда $\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OA} = \mathbf{0}$. Таким образом, точка O пересечения медиан $\triangle ABC$ — единственная точка, удовлетворяющая условию задачи.

Теперь пусть даны четыре точки A, B, C и D. Если Q — центр тяжести $\triangle ABC$, то, полагая в равенстве (1) $P = D$ (и $O = Q$), мы получим

$$\overrightarrow{DQ} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC}\right).$$

Допустим, что существует точка O, для которой

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \mathbf{0}. \qquad (3)$$

Тогда аналогично формуле (2) находим, что

$$\overrightarrow{DO} = \frac{1}{4}\left(\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC}\right). \qquad (4)$$

Поэтому $\overrightarrow{DO} = (3/4)\overrightarrow{DQ}$, и такой точкой O может быть только точка на отрезке DQ, делящая его в отношении $3:1$.

С другой стороны, пусть O — это точка на отрезке DQ, делящая его в отношении $3:1$, т.е. $\overrightarrow{DO} = (3/4)\overrightarrow{DQ}$. Тогда O

удовлетворяет равенству (4). Подставим в него $\overrightarrow{DA} = \overrightarrow{DO} + \overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{DO} + \overrightarrow{OB}$ и $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{DO} + \overrightarrow{OC}$. Мы получим

$$4\overrightarrow{DO} = 3\overrightarrow{DO} + \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}.$$

Это равносильно доказываемому равенству (3).

В равенство (3), однозначно определяющее точку O, все четыре исходные точки входят симметрично. Это означает, что O лежит на всех отрезках, соединяющих вершины тетраэдра с центрами тяжести противолежащих граней и делит каждый из них в отношении $3:1$.

Глава I § 2

1. *Дан параллелограмм $OABC$. В нем $|\overrightarrow{OA}| = 2$, $|\overrightarrow{OC}| = 3$, угол AOC равен $\pi/3$. Найдите координаты точки B в системе координат O, $\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OA}$.*

Решение. $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OA}$. Поэтому точка B имеет координаты $(1, 1)$ независимо от длин векторов и угла между ними.

2. *Даны три точки $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$. Найдите координаты вершины D параллелограмма $ABCD$.*

Решение. Для того чтобы из точки A попасть в точку D, нужно от A отложить вектор $\overrightarrow{BC}$. Координаты вектора равны разностям координат конца и начала вектора, а значит, $\overrightarrow{BC}$ имеет координаты $(x_3 - x_2, y_3 - y_2)$. Таким образом, координаты точки D равны $x_1 + x_3 - x_2$ и $y_1 + y_3 - y_2$.

3. *Нарисуйте на плоскости множества точек, полярные координаты которых связаны соотношениями* а) $r = 2/\cos\varphi$, б) $r = 2\cos\varphi$.

Решение. а) Если $\cos\varphi \leqslant 0$, то радиус не определен и кривая не имеет точек при $\varphi \in [\pi/2, 3\pi/2]$. Согласно уравнению $r\cos\varphi = 2$ длина радиуса такова, что его проекция на полярную ось постоянна и равна 2. Таким образом, множество точек — прямая линия, перпендикулярная полярной оси и пересекающая ее в точке 2.

б) Если $\cos\varphi < 0$, то радиус не определен и кривая не имеет точек при $\varphi \in (\pi/2, 3\pi/2)$. При φ, равном $\pi/2$ или $3\pi/2$, кривая входит в полюс O. При $\varphi = 0$ точка кривой A расположена на полярной оси на расстоянии 2 от полюса (рис. 2). Величина

$r = 2\cos\varphi$ — длина катета прямоугольного треугольника с гипотенузой длины 2 и углом φ. Поэтому в общем случае точка кривой M — вершина прямого угла, составленного радиусом OM и отрезком AM. Отсюда следует, что кривая — окружность с диаметром OA.

4. *Пусть O, l, $\mathbf{n}$ — сферическая система координат. Введем декартову прямоугольную систему координат O, $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{n}$, где $\mathbf{e}_1$ направлен вдоль l, а угол $\pi/2$ от $\mathbf{e}_1$ к $\mathbf{e}_2$ отсчитывается в сторону возрастания полярного угла. Напишите формулы, выражающие декартовы координаты через сферические.*

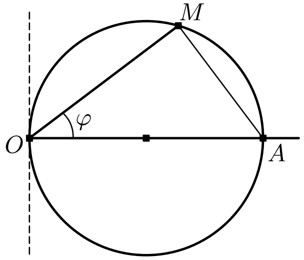

Рис. 2

Р е ш е н и е. Пусть M — точка со сферическими координатами r, φ и θ, а ее декартовы координаты (x, y, z). Тогда проекция M' точки M на плоскость $O\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2$ имеет сферические координаты $(r\cos\theta, \varphi, 0)$. Первые две из них — полярные координаты M' в полярной системе координат O, l в плоскости $O\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2$. Следовательно, $x = (r\cos\theta)\cos\varphi$ и $y = (r\cos\theta)\sin\varphi$. Координата z равна проекции $\overrightarrow{OM}$ на ось с направляющим вектором $\mathbf{n}$, т. е. $z = r\cos(\pi/2 - \theta) = r\sin\theta$. Итак,

$$x = r\cos\theta\cos\varphi,$$

$$y = r\cos\theta\sin\varphi,$$

$$z = r\sin\theta.$$

Глава I § 3

1. *Выведите формулы замены базиса и замены системы координат на прямой линии. Как меняются координаты точек прямой, если при неизменном начале координат длина базисного вектора увеличивается вдвое?*

Р е ш е н и е. Пусть O, $\mathbf{e}$ и O', $\mathbf{e}'$ — две системы координат на прямой линии и $\mathbf{e}' = \alpha\mathbf{e}$, а точка O' имеет координату β в системе координат O, $\mathbf{e}$. Последнее означает, что $\overrightarrow{OO'} = \beta\mathbf{e}$.

Произвольный вектор $\mathbf{a}$ на прямой раскладывается по базисам $\mathbf{e}$ и $\mathbf{e}'$ соответственно как $\mathbf{a} = a\mathbf{e}$ и $\mathbf{a} = a'\mathbf{e}'$. Значит, $a\mathbf{e} = a'\mathbf{e}' = a'\alpha\mathbf{e}$. Отсюда следует связь координат вектора в двух базисах: $a = \alpha a'$.

Рассмотрим произвольную точку M, имеющую координаты x и x' в этих системах координат. Мы имеем $\overrightarrow{OM} = x\mathbf{e}$, а с другой стороны

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M} = \beta\mathbf{e} + x'\mathbf{e}' = \beta\mathbf{e} + x'\alpha\mathbf{e}.$$

Отсюда получается ответ:

$$x = \alpha x' + \beta.$$

Если при неизменном начале координат длина базисного вектора увеличивается вдвое, то $\beta = 0$, а $\alpha = 2$ и, как мы видели, $x = 2x'$. Это означает, что координаты всех точек уменьшились вдвое: $x' = (1/2)x$.

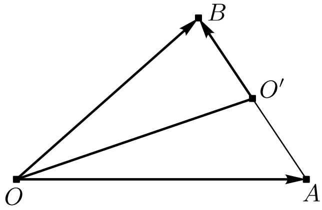

Рис. 3

2. *Пусть O' — середина стороны AB треугольника OAB. Напишите формулы перехода от системы координат O, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OA}$ к системе координат O', $\overrightarrow{O'O}$, $\overrightarrow{O'B}$.*

Р е ш е н и е. Координаты точки O' в исходной системе координат — это компоненты $\overrightarrow{OO'}$ в базисе $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OA}$. Они равны $(1/2,\ 1/2)$ (рис. 3). В соответствии с этим, координаты $\overrightarrow{O'O}$ равны $(-1/2,\ -1/2)$. Далее, $\overrightarrow{O'B} = \overrightarrow{O'O} + \overrightarrow{OB}$. Отсюда мы получаем $\overrightarrow{O'B}(1/2,\ -1/2)$.

Теперь можно выписать формулы перехода:

$$x = -\frac{1}{2}\,x' + \frac{1}{2}\,y' + \frac{1}{2},$$

$$y = -\frac{1}{2}\,x' - \frac{1}{2}\,y' + \frac{1}{2}.$$

3. *Дана декартова система координат* O, $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$. *Как расположена относительно нее система координат* O', $\mathbf{e}'_1$, $\mathbf{e}'_2$, $\mathbf{e}'_3$, *если формулы перехода имеют вид* $x = 1 - y' - z'$, $y = 1 - x' - z'$, $z = 1 - x' - y'$.

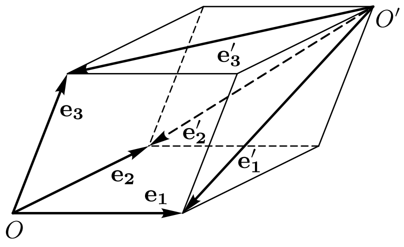

Рис. 4

Решение. Свободные члены в правых частях равенств $(1,\ 1,\ 1)$. Следовательно, начало новой системы координат — та вершина параллелепипеда, построенного на векторах $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$, которая не лежит ни на одной координатной плоскости. Координаты новых базисных векторов: $\mathbf{e}'_1(0,\ -1,\ -1)$, $\mathbf{e}'_2(-1,\ 0,\ -1)$ и $\mathbf{e}'_3(-1,\ -1,\ 0)$. Это означает, что векторы $\mathbf{e}'_1$, $\mathbf{e}'_2$, $\mathbf{e}'_3$ направлены из O' по диагоналям граней параллелепипеда, сходящимся в вершине O' таким образом, что совпадают концы векторов $\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{e}'_1$, $\mathbf{e}_2$ и $\mathbf{e}'_2$, а также $\mathbf{e}_3$ и $\mathbf{e}'_3$ (рис. 4).

Глава I § 4

1. *Пусть в некотором базисе скалярное произведение вычисляется по формуле* $(\mathbf{a},\mathbf{b}) = \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3$. *Докажите, что базис ортонормированный.*

Решение. Вычислим по этой формуле скалярный квадрат вектора $\mathbf{e}_1$. Его координаты $(1,\ 0,\ 0)$, и $|\mathbf{e}_1|^2 = 1$. Аналогично проверяется, что длины $\mathbf{e}_2$ и $\mathbf{e}_3$ равны 1. Скалярное произведение векторов $\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{e}_2$, вычисленное по той же формуле, равно $1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0 = 0$. Эти векторы ортогональны. Точно также проверяется ортогональность остальных пар векторов.

2. *Используя свойства скалярного умножения, докажите, что высоты произвольного треугольника пересекаются в одной точке.*

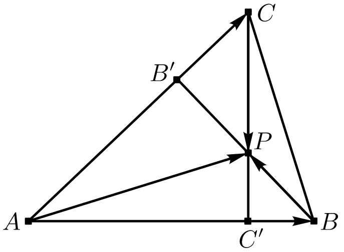

Рис. 5

Решение. Пусть BB' и CC' — высоты $\triangle ABC$, а P — точка их пересечения (рис. 5). Вектор $\overrightarrow{AP}$ можно представить как $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BP}$ и как $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CP}$. Умножим скалярно первое из равенств на $\overrightarrow{AC}$, а второе на $\overrightarrow{AB}$. Так как $(\overrightarrow{BP}, \overrightarrow{AC}) = 0$ и $(\overrightarrow{CP}, \overrightarrow{AB}) = 0$, мы получим $(\overrightarrow{AP}, \overrightarrow{AC}) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ и $(\overrightarrow{AP}, \overrightarrow{AB}) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$. Вычтем одно из этих равенств из другого:

$$(\overrightarrow{AP}, \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = 0.$$

Это означает, что $\overrightarrow{AP}$ перпендикулярен стороне BC, т. е. прямая, проходящая через вершину A и точку пересечения высот BB' и CC', также является высотой. Это и требовалось доказать.

3. *Нарисуйте правильный треугольник ABC и примите длину его стороны за* 1. *Нарисуйте на том же чертеже базис, биортогональный базису $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$.*

Решение. Вектор $\mathbf{e}_1^*$ ортогонален вектору $\mathbf{e}_2$. Так как $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1^*) = 1 > 0$, вектор $\mathbf{e}_1^*$ направлен так, что угол между $\mathbf{e}_1^*$ и $\mathbf{e}_1$ острый. Легко видеть, что этот угол равен $\pi/6$ (рис. 6). Итак, $|\mathbf{e}_1|\,|\mathbf{e}_1^*| \cos(\pi/6) = 1$. Поэтому $|\mathbf{e}_1^*| = 2/\sqrt{3}$, примерно 1,15. Аналогично строится и $\mathbf{e}_2^*$.

4. *Найдите сумму векторных проекций вектора* $\mathbf{a}$ *на стороны заданного правильного треугольника.*

Решение. Направим базисные векторы по двум сторонам треугольника: $\mathbf{e}_1 = \overrightarrow{AB}$, $\mathbf{e}_2 = \overrightarrow{AC}$, и пусть $\mathbf{a} = \alpha_1\mathbf{e}_1 + \alpha_2\mathbf{e}_2$. Проекция суммы векторов равна сумме их проекций, и проекция

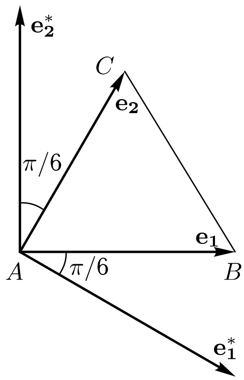

Рис. 6

произведения вектора на число равна произведению проекции этого вектора на то же число. Поэтому мы можем написать

$$\mathbf{Пр}_{\mathbf{e}_1}\mathbf{a} = \alpha_1 \mathbf{Пр}_{\mathbf{e}_1}\mathbf{e}_1 + \alpha_2 \mathbf{Пр}_{\mathbf{e}_1}\mathbf{e}_2,$$
$$\mathbf{Пр}_{\mathbf{e}_2}\mathbf{a} = \alpha_1 \mathbf{Пр}_{\mathbf{e}_2}\mathbf{e}_1 + \alpha_2 \mathbf{Пр}_{\mathbf{e}_2}\mathbf{e}_2.$$

Вектор $\mathbf{e} = \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_1$ направлен вдоль третьей стороны треугольника. Для него $\mathbf{Пр}_{\mathbf{e}}\mathbf{a} = \alpha_1 \mathbf{Пр}_{\mathbf{e}}\mathbf{e}_1 + \alpha_2 \mathbf{Пр}_{\mathbf{e}}\mathbf{e}_2$. Складывая все три равенства, мы увидим, что искомая сумма проекций $\vec{s}(\mathbf{a})$ равна

$$\vec{s}(\mathbf{a}) = \alpha_1 \vec{s}(\mathbf{e}_1) + \alpha_2 \vec{s}(\mathbf{e}_2), \tag{5}$$

и задача сводится к нахождению суммы проекций на все стороны треугольника для векторов $\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{e}_2$.

Легко видеть, что $\mathbf{Пр}_{\mathbf{e}_1}\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_1$. Векторные проекции вектора на две параллельные прямые — равные векторы. Поэтому, сдвинув одну из сторон треугольника, мы можем считать, что длина стороны равна 1. Тогда $\mathbf{Пр}_{\mathbf{e}_2}\mathbf{e}_1 = (\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1)\mathbf{e}_2 = \dfrac{1}{2}\,\mathbf{e}_2$, и $\mathbf{Пр}_{\mathbf{e}}\mathbf{e}_1 = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_1)\mathbf{e} = -\dfrac{1}{2}\,\mathbf{e} = \dfrac{1}{2}\,\mathbf{e}_1 - \dfrac{1}{2}\,\mathbf{e}_2$. Складывая полученные проекции, мы видим, что $\vec{s}(\mathbf{e}_1) = \dfrac{3}{2}\,\mathbf{e}_1$. Аналогично, $\vec{s}(\mathbf{e}_2) = \dfrac{3}{2}\,\mathbf{e}_2$.

Подставляя этот результат в равенство (5), мы приходим к результату

$$\vec{s}(\mathbf{a}) = \frac{3}{2}\,\mathbf{a}.$$

Глава I § 5

1. *Построены векторы, перпендикулярные граням произвольного тетраэдра, равные по длине площадям этих граней и направленные в сторону вершин, противоположных граням. Докажите, что сумма этих векторов равна* $\mathbf{0}$.

Решение. Примем за базисные векторы $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$, направленные по ребрам тетраэдра, исходящим из одной вершины. Тогда три из интересующих нас векторов можно выразить следующим образом: $\mathbf{p} = \frac{1}{2}[\mathbf{b}, \mathbf{a}]$, $\mathbf{q} = \frac{1}{2}[\mathbf{c}, \mathbf{b}]$ и $\mathbf{r} = \frac{1}{2}[\mathbf{a}, \mathbf{c}]$. Четвертая грань построена на ребрах $\mathbf{c} - \mathbf{a}$ и $\mathbf{b} - \mathbf{a}$, и соответствующий вектор равен

$$\mathbf{s} = \frac{1}{2}[\mathbf{b} - \mathbf{a}, \mathbf{c} - \mathbf{a}] = \frac{1}{2}([\mathbf{b}, \mathbf{c}] - [\mathbf{a}, \mathbf{c}] - [\mathbf{b}, \mathbf{a}]).$$

Складывая полученные векторы, мы приходим к требуемому результату.

2. *Дан трехгранный угол. Используя свойства векторного произведения, найдите выражение какого-либо из его двугранных углов через плоские углы.*

Решение. Обозначим через $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ направляющие векторы ребер трехгранного угла. Длины этих векторов будем считать равными 1. Через α, β и γ обозначим плоские углы в гранях, противолежащих соответственно $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$. Найдем двугранный угол φ с ребром $\mathbf{a}$. Он равен углу между нормалями к граням, причем если одна из нормалей направлена внутрь трехгранного угла, то вторая должна быть направлена во внешнюю область. Поэтому направляющими векторами нормалей будут $\mathbf{p} = [\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ и $\mathbf{q} = [\mathbf{a}, \mathbf{c}]$. Очевидно, что $|\mathbf{p}| = \sin\gamma$, а $|\mathbf{q}| = \sin\beta$.

Найдем скалярное произведение $(\mathbf{p}, \mathbf{q})$. Речь идет о преобразовании скалярного произведения двух векторных произведений. Ввиду того что это преобразование полезно и в других задачах, выполним его для четырех произвольных векторов. Произведение $([\mathbf{a}, \mathbf{b}], [\mathbf{c}, \mathbf{d}])$ можно рассматривать как смешанное произведение $([\mathbf{a}, \mathbf{b}], \mathbf{c}, \mathbf{d}) = (\mathbf{c}, \mathbf{d}, [\mathbf{a}, \mathbf{b}])$ и потому как скалярное произведение $(\mathbf{c}, [\mathbf{d}, [\mathbf{a}, \mathbf{b}]])$. Здесь двойное векторное произведение можно преобразовать по соответствующей формуле

$$[\mathbf{d}, [\mathbf{a}, \mathbf{b}]] = \mathbf{a}(\mathbf{b}, \mathbf{d}) - \mathbf{b}(\mathbf{a}, \mathbf{d}).$$

После умножения на $\mathbf{c}$ мы получаем

$$([\mathbf{a},\,\mathbf{b}],\,[\mathbf{c},\,\mathbf{d}]) = (\mathbf{a},\,\mathbf{c})(\mathbf{b},\,\mathbf{d}) - (\mathbf{b},\,\mathbf{c})(\mathbf{a},\,\mathbf{d}) = \begin{vmatrix} (\mathbf{a},\,\mathbf{c}) & (\mathbf{a},\,\mathbf{d}) \\ (\mathbf{b},\,\mathbf{c}) & (\mathbf{b},\,\mathbf{d}) \end{vmatrix}.$$

Применяя полученный результат к нашей задаче, нужно положить во втором сомножителе $\mathbf{c} = \mathbf{a}$ и $\mathbf{d} = \mathbf{c}$. Мы получим

$$(\mathbf{p},\,\mathbf{q}) = |\mathbf{a}|^2(\mathbf{b},\,\mathbf{c}) - (\mathbf{a},\,\mathbf{b})(\mathbf{a},\,\mathbf{c}) = \cos\alpha - \cos\beta\cos\gamma,$$

и окончательный результат

$$\cos\varphi = \frac{\cos\alpha - \cos\beta\cos\gamma}{\sin\gamma\,\sin\beta}.$$

3. *Пусть на ориентированной плоскости дан положительный базис, такой что* $|\mathbf{e}_1| = 2$, $|\mathbf{e}_2| = 3$ *и* $(\mathbf{e}_1,\,\mathbf{e}_2) = 2$. *Найдите площадь ориентированного параллелограмма, построенного на векторах* $\mathbf{a}(1,\,2)$ *и* $\mathbf{b}(2,\,1)$.

Решение. По формуле для площади ориентированного параллелограмма имеем

$$S_{\pm}(\mathbf{a},\,\mathbf{b}) = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}\; S_{\pm}(\mathbf{e}_1,\,\mathbf{e}_2).$$

Так как базис положительный,

$$S_{\pm}(\mathbf{e}_1,\,\mathbf{e}_2) = \sqrt{|\mathbf{e}_1|^2|\mathbf{e}_2|^2 - (\mathbf{e}_1,\,\mathbf{e}_2)^2} = \sqrt{36-4} = 4\sqrt{2}\,.$$

Таким образом, $S_{\pm}(\mathbf{a},\,\mathbf{b}) = -12\sqrt{2}\,$.

4. *При каком условии на матрицу перехода от одного базиса к другому оба базиса ориентированы одинаково? Вопрос поставлен как для плоскости, так и для пространства.*

Решение. Матрица перехода — это матрица, столбцы которой состоят из координат новых базисных векторов в старом базисе. Пусть $\mathbf{e}'_1 = \alpha_1\mathbf{e}_1 + \beta_1\mathbf{e}_2$ и $\mathbf{e}'_2 = \alpha_2\mathbf{e}_1 + \beta_2\mathbf{e}_2$. Тогда матрицей перехода будет матрица

$$\begin{Vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{Vmatrix}.$$

Напишем формулу для площади ориентированного параллелограмма, построенного на $\mathbf{e}'_1$ и $\mathbf{e}'_2$:

$$S_{\pm}(\mathbf{e}'_1,\,\mathbf{e}'_2) = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{vmatrix} S_{\pm}(\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2).$$

Из нее следует, что обе пары векторов ориентированы одинаково тогда и только тогда, когда детерминант матрицы перехода положителен.

Тот же результат мы получим и для пространства, если напишем выражение для смешанного произведения $(\mathbf{e}'_1,\, \mathbf{e}'_2,\, \mathbf{e}'_3)$ по координатам этих векторов в базисе $(\mathbf{e}_1,\, \mathbf{e}_2,\, \mathbf{e}_3)$:

$$(\mathbf{e}'_1,\, \mathbf{e}'_2,\, \mathbf{e}'_3) = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix} (\mathbf{e}_1,\, \mathbf{e}_2,\, \mathbf{e}_3).$$

5. *Какова размерность векторов взаимного базиса* $\mathbf{e}^*_1, \mathbf{e}^*_2, \mathbf{e}^*_3$, *если векторы базиса* $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ *измеряются в сантиметрах?*

Решение. При этом условии $(\mathbf{e}_1,\, \mathbf{e}_2,\, \mathbf{e}_3)$ измеряется в см^3, а векторные произведения $[\mathbf{e}_2,\, \mathbf{e}_3]$, $[\mathbf{e}_3,\, \mathbf{e}_1]$ и $[\mathbf{e}_1,\, \mathbf{e}_2]$ — в см^2. Поэтому ответ: см$^{-1}$.

6. *Пусть стороны треугольника* $P_1P_2P_3$ *равны медианам треугольника* $A_1A_2A_3$. *Нужно найти отношение площадей этих треугольников.*

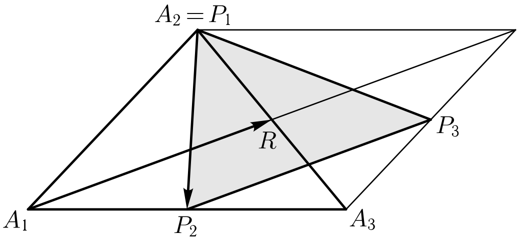

Рис. 7

Решение. Ответ 3/4. Его можно непосредственно получить из рисунка, но нас сейчас интересует не ответ, а способы аналитического решения задачи. Пусть R — основание медианы, исходящей из вершины A_1, а основание медианы, исходящей из $A_2 = P_1$, есть P_2. Выберем в качестве базисных векторы $\mathbf{e}_1 = \overrightarrow{A_1A_2}$ и $\mathbf{e}_2 = \overrightarrow{A_1A_3}$

Тогда векторы $\mathbf{p} = \overrightarrow{A_1R}$ и $\mathbf{q} = \overrightarrow{A_2P_2}$ имеют координаты соответственно

$$\left(\frac{1}{2},\, \frac{1}{2}\right) \quad \text{и} \quad \left(-1,\, \frac{1}{2}\right).$$

Доказывалась формула для площади ориентированного параллелограмма на плоскости

$$S_{\pm}(\mathbf{p},\, \mathbf{q}) = \begin{vmatrix} p_1 & p_2 \\ q_1 & q_2 \end{vmatrix} S_{\pm}(\mathbf{e}_1,\, \mathbf{e}_2),$$

в которой детерминант составлен из координат векторов $\mathbf{p}$ и $\mathbf{q}$ в базисе $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$. Согласно этой формуле, отношение площадей параллелограммов, а с ним и площадей данных треугольников, равно абсолютной величине детерминанта

$$\begin{vmatrix} 1/2 & 1/2 \\ -1 & 1/2 \end{vmatrix},$$

т. е. $3/4$.

Это решение не длиннее геометрического, так как для объяснения последнего тоже потребовалось бы несколько строчек. Однако аналитическое решение имеет то преимущество, что не требует воображения, необходимого для того, чтобы сделать подходящий рисунок.

Собственно, именно к этому стремился Декарт, создавая аналитический метод.

Глава II § 1

1. *В декартовой прямоугольной системе координат даны точки $A(1,0)$ и $B(4,0)$. Напишите уравнение множества точек, отстоящих от B вдвое дальше, чем от A.*

Решение. Пусть (x, y) — координаты произвольной точки M. Точка принадлежит множеству тогда и только тогда, когда $|MB| = 2|AM|$. В координатах это условие выражается равенством $(x-4)^2 + y^2 = 4[(x-1)^2 + y^2]$. Раскроем скобки: $x^2 - 8x + 16 + y^2 - 4x^2 + 8x - 4 - 4y^2 = 0$ и приведем подобные члены: $-3x^2 - 3y^2 + 12 = 0$. Уравнение принимает вид $x^2 + y^2 = 4$.

Исследуемое множество — окружность радиуса 2 с центром в начале координат. Она пересекает ось Ox в точках с координатами $(2, 0)$ и $(-2, 0)$, которые делят отрезок AB в отношении $1:2$.

2. *Каждое из двух уравнений системы $(x-2)^2 + y^2 = r^2$, $(x+2)^2 + y^2 = r^2$ в декартовой прямоугольной системе координат определяет окружность. Вычитая одно уравнение из другого, мы получим следствие этой системы: $x = 0$. Как геометрически истолковать этот результат? Рассмотрите случаи $r = 3$ и $r = 1$.*

Решение. Заданная система уравнений — уравнение множества точек пересечения двух окружностей: пары точек при $r = 3$ и пустого множества при $r = 1$. Разность уравнений — следствие системы. Оно определяет множество, содержащее точки пересечения окружностей. При $r = 3$ точки лежат на оси Oy и прямая, их содержащая, является этой осью.

При $r = 1$ придется вспомнить, что пустое множество является подмножеством любого множества, оси ординат в частности.

3. *Составьте уравнение цилиндра с направляющей, заданной системой уравнений*

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1, \quad x + y + z = 1, \tag{1}$$

и образующей, параллельной вектору $\mathbf{e}_3$.

Р е ш е н и е. Уравнение множества — это формулировка определения этого множества в терминах координат его точек. Пусть $M(X, Y, Z)$ — произвольная точка. Эта точка принадлежит цилиндру тогда и только тогда, когда она лежит на какой-либо его образующей, т. е. прямая, проходящая через эту точку в направлении вектора $\mathbf{e}_3$, пересекает направляющую. Сдвигая точку по образующей вдоль вектора $\mathbf{e}_3$, мы меняем только ее третью координату. Следовательно, точка с координатами (x, y, z) лежит на прямой, проходящей через M в направлении $\mathbf{e}_3$, тогда и только тогда, когда существует такое t, что

$$x = X; \quad y = Y; \quad z = Z + t. \tag{2}$$

Прямая пересекает направляющую тогда и только тогда, когда при некотором t координаты (x, y, z) удовлетворяют уравнениям направляющей, т. е. система (1), (2) из пяти уравнений с семью переменными t, x, y, z, X, Y, Z имеет решение или, как говорят, совместна. Исследование на совместность производится *исключением* переменных: решаем какие-нибудь четыре уравнения относительно четырех переменных и подставляем решение в пятое уравнение. В результате получится равенство, связывающее оставшиеся три переменные. Для наших целей «оставшимися» должны быть X, Y, Z. Получаемое равенство и есть необходимое и достаточное условие совместности системы: если оно выполнено для каких-то X, Y, Z, то вместе с теми x, y, z, t, которые вычисляются по ним, они составляют решение всей системы. Если это условие не может быть выполнено, то из системы уравнений вытекает невозможное следствие, и она не может иметь решения.

Итак, подстановкой мы получаем:

$$X^2 + Y^2 + (Z + t)^2 = 1 \quad \text{и} \quad Z + t = 1 - X - Y,$$

откуда окончательно

$$X^2 + Y^2 + (1 - X - Y)^2 = 1.$$

Как и следовало ожидать, в уравнение цилиндра не входит переменная Z.

Это обстоятельство служит основой для следующего рассуждения. Цилиндр содержит свою направляющую, значит его уравнение — следствие системы (1). Поэтому нам достаточно найти такое следствие этой системы, которое не содержало бы переменной z. Оно получается исключением z из этой системы.

Мы получаем то же уравнение. Однако с его обоснованием возникает некоторая трудность: из этого рассуждения следует, что координаты всех точек цилиндра удовлетворяют уравнению, но неясно, не найдется ли точек, не принадлежащих цилиндру, хотя и удовлетворяющих уравнению. Доказательство возвращает нас к первому решению.

4. *Напишите уравнение конуса с вершиной в начале координат и с направляющей, заданной системой уравнений* $x^2 + y^2 = 4$, $z = 1$.

Решение. Точка $M(X, Y, Z)$ принадлежит конусу тогда и только тогда, когда проходящая через нее и начало координат прямая пересекает направляющую, иначе говоря, на направляющей существует такая точка $N(x, y, z)$, что векторы $\overrightarrow{OM}$ и $\overrightarrow{ON}$ коллинеарны. Запишем это условие: $X = tx$; $Y = ty$; $Z = tz$ (здесь используется то, что $\overrightarrow{ON} \neq \mathbf{0}$ — направляющая не проходит через вершину). Как и в предыдущей задаче, мы должны исключить из системы все переменные, кроме X, Y и Z.

Напишем: $X^2 + Y^2 = t^2(x^2 + y^2) = 4t^2$ и $Z = tz = t$. Объединяя эти равенства, получаем уравнение конуса

$$X^2 + Y^2 = 4Z^2.$$

Как и следовало ожидать, левая часть уравнения — однородный многочлен.

5. *Какая отличительная особенность уравнения конуса в сферической системе координат, центр которой находится в вершине конуса?*

Решение. Если точка M принадлежит конусу, и ее координаты в такой системе координат (r, φ, θ), то при произвольном сдвиге по прямой, проходящей через начало координат O, она остается на конусе. Если она сдвигается по лучу OM, то меняется r, а углы φ и θ остаются неизменными. Это означает, что левая часть уравнения конуса $F(r, \varphi, \theta) = 0$ не зависит от r, т. е. имеет вид $\Phi(\varphi, \theta)$.

Если же точка сдвигается в противоположную сторону (по лучу с направляющим вектором $-\overrightarrow{OM}$), то φ и θ меняются: φ увеличивается на π, а θ меняет знак. Поэтому на плоскости переменных φ и θ кривая $\Phi(\varphi, \theta) = 0$ симметрична относительно оси θ и периодична по φ с периодом π.

Глава II § 2

1. *Найдите параметрические уравнения прямой, заданной уравнениями*

$$x + y + z = 4,$$
$$x - y + 3z = 0.$$

Р е ш е н и е. Посмотрим на коэффициенты при переменных в обоих уравнениях:

$$\left\|\begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{matrix}\right\|.$$

Видно, что детерминант матрицы из коэффициентов при x и y

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}$$

не равен нулю, и, следовательно, система уравнений разрешима относительно x и y при любом z.

Для нахождения координат начальной точки выберем какое-либо z, например, положим $z = 0$, и решим полученную систему уравнений. Найдем, что $x_0 = y_0 = 2$. Точка $M_0(2,\, 2,\, 0)$ лежит на прямой и будет принята за начальную точку.

Известно, что в любой декартовой системе координат компоненты направляющего вектора прямой равны следующим детерминантам, составленным из коэффициентов при переменных:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}.$$

Детерминанты равны соответственно 4, -2, -2. Любая пропорциональная тройка чисел, например $(-2,\, 1,\, 1)$, может быть принята за компоненты направляющего вектора.

Мы получаем следующие параметрические уравнения:

$$x = 2 - 2t; \quad y = 2 + t; \quad z = t.$$

То же по существу решение может быть оформлено иначе. Заметив, что система уравнений прямой разрешима относительно x и y при произвольном z, *примем z за параметр* и выразим x и y через z. Складывая уравнения, мы находим, что $2x = 4 - 4z$, а вычитая второе из первого, находим, что $2y = 4 + 2z$. Если переобозначить $z = t$, мы получим в точности найденные выше уравнения.

2. *Найдите параметрические уравнения плоскости* $x - 2y + 3z = 1$.

Решение. В данном уравнении коэффициент при x отличен от нуля, и, следовательно, уравнение разрешимо относительно x при любых y и z. Для нахождения координат начальной точки выберем произвольно y и z, например, положим их равными нулю, и найдем $x_0 = 1$. Точка $M_0(1,\ 0,\ 0)$ лежит в плоскости и может быть принята за начальную точку.

Компоненты направляющих векторов плоскости удовлетворяют уравнению $\alpha - 2\beta + 3\gamma = 0$. Мы можем произвольно задавать β и γ и находить соответствующие значения α. Нам нужны два непропорциональных решения этого уравнения. Зададим $\beta_1 = 1$ и $\gamma_1 = 0$. Вместе с соответствующим значением $\alpha_1 = 2$ они составят компоненты первого направляющего вектора $\mathbf{a}_1(2,\ 1,\ 0)$. Затем зададим $\beta_2 = 0$ и $\gamma_2 = 1$ и найдем $\alpha_2 = -3$. Это даст нам второй направляющий вектор $\mathbf{a}_2(-3,\ 0,\ 1)$. Теперь мы можем написать параметрические уравнения плоскости:

$$x = 1 + 2u - 3v; \quad y = u; \quad z = v.$$

Как и в предыдущей задаче, мы можем сократить рассуждение, *приняв y и z за параметры* и выразив x через y и z: $x = 1 + 2y - 3z$. Если переобозначить $y = u$, $z = v$, то мы получим найденные выше параметрические уравнения.

3. *Найдите координаты точки пересечения прямых с уравнениями*: $x = 1 - t$, $y = 1 + t$, $z = 1 - t$ *и* $x = 3t - 1$, $y = 2t - 2$, $z = 1 + t$. *Какое значение параметра соответствует этой точке на каждой из прямых? Как установить, что прямые пересекаются, не находя точки пересечения?*

Решение. Исключив параметр t из первого и третьего уравнений первой прямой, мы получаем уравнение $x = z$. Это линейное уравнение, являющееся следствием уравнений первой прямой, и потому определяет плоскость, проходящую через первую прямую. Значение параметра на второй прямой, соответствующее точке пересечения второй прямой с плоскостью, удовлетворяет уравнению $x(t) = z(t)$, т.е. $3t - 1 = 1 + t$ и, следовательно, равно 1. Следовательно, вторая прямая пересекает плоскость в единственной точке, и если прямые пересекаются, то точка их пересечения является точкой пересечения плоскости и второй прямой.

Подставляя $t = 1$ в уравнения второй прямой, мы находим координаты точки $P(2,\,0,\,2)$. Эта точка является точкой пересечения прямых, только если прямые пересекаются. Поэтому необходима проверка. Подставим координаты P в уравнения первой прямой: $2 = 1 - t$; $0 = 1 + t$; $2 = 1 - t$. Все три равенства выполнены при $t = -1$. Прямые пересекаются в точке $P(2,\,0,\,2)$.

Стоит обратить внимание на то, что значения параметров, соответствующих точке пересечения на каждой из прямых, различны. Хотя параметр в уравнениях прямых и обозначен одной буквой, следует помнить, что значение параметра — это координата точки во внутренней системе координат на прямой. Естественно, что координаты P в двух различных системах координат различны. Поэтому является *грубо ошибочным* следующее «решение», которое, к сожалению, встречается. Приравнивая t из первого уравнения первой прямой и первого уравнения второй, находим $1 - x = (x - 1)/3$, откуда $x = 1$. Аналогично «вычисляются» и остальные координаты. Никакого отношения к задаче такой результат, конечно, не имеет.

Установить, что прямые пересекаются, не находя точки пересечения, несложно. Прямые $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + \mathbf{a}_1 t$ и $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 + \mathbf{a}_2 t$ пересекаются, если они непараллельны и лежат в одной плоскости. В нашем случае очевидно, что направляющие векторы прямых $\mathbf{a}_1(-1,\,1,\,-1)$ и $\mathbf{a}_2(3,\,2,\,1)$ неколлинеарны. Прямые лежат в одной плоскости тогда и только тогда, когда начальная точка второй прямой лежит в плоскости, проходящей через первую прямую параллельно второй, т. е. если $(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1,\,\mathbf{a}_1,\,\mathbf{a}_2) = 0$. В нашем случае это проверяется так: $\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$ имеет координаты $(-2,\,-3,\,0)$ и

$$\begin{vmatrix} -2 & -3 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Для того чтобы в этом убедиться, достаточно прибавить первую и вторую строки к третьей — получится нулевая строка.

4. *Напишите уравнение плоскости, в которой лежат прямые упражнения* 3.

Р е ш е н и е. Примем за начальную точку плоскости начальную точку первой прямой $M_0(1,\,1,\,1)$. Направляющие векторы прямых лежат в этой плоскости и, поскольку они неколлинеарны, могут быть приняты за ее направляющие векторы. Итак, уравнение плоскости

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Вычисляя детерминант, получаем: $3(x-1)-2(y-1)-5(z-1) = 0$ или

$$3x-2y-5z+4=0.$$

5. *Напишите параметрические уравнения прямых, заданных векторными уравнениями*

а) $[\mathbf{r},\, \mathbf{a}] = \mathbf{b}$, $(\mathbf{a},\, \mathbf{b}) = 0$, $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$.

б) $(\mathbf{r},\, \mathbf{n}_1) + D_1 = 0$, $(\mathbf{r},\, \mathbf{n}_2) + D_2 = 0$, $[\mathbf{n}_1,\, \mathbf{n}_2] \neq \mathbf{0}$.

В задаче (б) *легче получить решение при условии* $(\mathbf{n}_1,\, \mathbf{n}_2) = 0$.

Решение. а) Если $\mathbf{b} = \mathbf{0}$, то уравнение выражает коллинеарность векторов $\mathbf{r}$ и $\mathbf{a}$, и, следовательно, уравнение равносильно $\mathbf{r} = t\mathbf{a}$ — параметрическому уравнению прямой, проходящей через начало координат в направлении вектора $\mathbf{a}$.

Если $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$, то $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ неколлинеарны, а значит, $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $[\mathbf{a},\, \mathbf{b}]$ линейно независимы. Примем эти векторы за базис и будем искать компоненты вектора $\mathbf{r}$.

Пусть $\mathbf{r} = \alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b} + \gamma[\mathbf{a},\, \mathbf{b}]$. Тогда $[\mathbf{r},\, \mathbf{a}] = \beta[\mathbf{b},\, \mathbf{a}] + \gamma[[\mathbf{a},\, \mathbf{b}], \mathbf{a}] = \mathbf{b}$. По формуле двойного векторного произведения $[[\mathbf{a},\, \mathbf{b}], \mathbf{a}] = [\mathbf{a},\, [\mathbf{b}, \mathbf{a}]] = \mathbf{b}|\mathbf{a}|^2 - \mathbf{a}(\mathbf{a},\, \mathbf{b})$. Так как $(\mathbf{a},\, \mathbf{b}) = 0$, получаем $-\beta[\mathbf{a},\, \mathbf{b}] + \gamma\mathbf{b}|\mathbf{a}|^2 = \mathbf{b}$. Приравнивая координаты правой и левой части равенства, получаем: $\beta = 0$ и $\gamma = |\mathbf{a}|^{-2}$.

Таким образом, каждый вектор $\mathbf{r}$, удовлетворяющий уравнению $[\mathbf{r},\, \mathbf{a}] = \mathbf{b}$, имеет разложение

$$\mathbf{r} = \alpha\mathbf{a} + \frac{[\mathbf{a},\, \mathbf{b}]}{|\mathbf{a}|^2}.$$

На α никаких ограничений не накладывается. Это разложение может быть истолковано как векторное параметрическое уравнение прямой с радиусом-вектором начальной точки

$$\mathbf{r}_0 = \frac{[\mathbf{a},\, \mathbf{b}]}{|\mathbf{a}|^2}, \tag{3}$$

направляющим вектором $\mathbf{a}$ и параметром α.

б) Очевидно, что направляющим вектором прямой будет вектор, перпендикулярный нормальным векторам плоскостей, в которых она лежит, т. е. $\mathbf{a} = [\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2]$. Нам дано, что $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$. Имея в виду решение части (а) этой задачи, рассмотрим произведение $[\mathbf{r}, \mathbf{a}]$ для радиус-векторов точек прямой. По формуле двойного векторного произведения мы находим

$$[\mathbf{r}, [\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2]] = \mathbf{n}_1(\mathbf{r}, \mathbf{n}_2) - \mathbf{n}_2(\mathbf{r}, \mathbf{n}_1) = -D_2\mathbf{n}_1 + D_1\mathbf{n}_2.$$

Как мы видели, радиус-вектор начальной точки прямой может быть получен по формуле (3):

$$\mathbf{r}_0 = \frac{[[\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2], D_1\mathbf{n}_2 - D_2\mathbf{n}_1]}{|[\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2]|^2}.$$

Возможные преобразования правой части этого равенства ее не упрощают.

К тому же результату приводит и следующее рассуждение. Будем искать начальную точку прямой как точку пересечения этой прямой с плоскостью, проходящей через начало координат и векторы $\mathbf{n}_1$ и $\mathbf{n}_2$ (плоскость и прямая перпендикулярны).

Радиус-вектор $\mathbf{r}_0$ этой точки должен раскладываться по $\mathbf{n}_1$ и $\mathbf{n}_2$. Чтобы найти его компоненты по этим векторам, умножим равенство $\mathbf{r}_0 = x\mathbf{n}_1 + y\mathbf{n}_2$ скалярно сначала на $\mathbf{n}_1$, а потом на $\mathbf{n}_2$. Мы получим систему уравнений:

$$\begin{cases} x|\mathbf{n}_1|^2 + y(\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2) = (\mathbf{n}_1, \mathbf{r}_0) = -D_1, \\ x(\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2) + y|\mathbf{n}_2|^2 = (\mathbf{n}_2, \mathbf{r}_0) = -D_2. \end{cases} \tag{4}$$

Решая систему по правилу Крамера, находим, что

$$x = -\frac{D_1|\mathbf{n}_2|^2 - D_2(\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2)}{|\mathbf{n}_1|^2|\mathbf{n}_2|^2 - (\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2)^2},$$

$$y = -\frac{D_2|\mathbf{n}_1|^2 - D_1(\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2)}{|\mathbf{n}_1|^2|\mathbf{n}_2|^2 - (\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2)^2},$$

Таким образом,

$$\mathbf{r}_0 = -\frac{D_1|\mathbf{n}_2|^2 - D_2(\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2)}{|[\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2]|^2}\mathbf{n}_1 - \frac{D_2|\mathbf{n}_1|^2 - D_1(\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2)}{|[\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2]|^2}\mathbf{n}_2.$$

Легко проверить, что эта формула равносильна полученной выше.

Если $(\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2) = 0$, то результат упрощается. Его можно получить, находя компоненты $\mathbf{r}_0$ по известным формулам для ортогонального базиса:

$$\mathbf{r}_0 = -\frac{D_1\mathbf{n}_1}{|\mathbf{n}_1|^2} - \frac{D_2\mathbf{n}_2}{|\mathbf{n}_2|^2}.$$

Стоит заметить, что здесь мы фактически решили следующую общую задачу: найти координаты вектора в базисе $\mathbf{n}_1$, $\mathbf{n}_2$, если даны $(\mathbf{r}_0, \mathbf{n}_1)$ и $(\mathbf{r}_0, \mathbf{n}_2)$ — его ковариантные координаты (т. е. его координаты в биортогональном базисе $\mathbf{n}_1^*$, $\mathbf{n}_2^*$).

Матрица системы (4)

$$\begin{Vmatrix} |\mathbf{n}_1|^2 & (\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2) \\ (\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2) & |\mathbf{n}_2|^2 \end{Vmatrix}$$

является матрицей перехода от базиса $\mathbf{n}_1^*$, $\mathbf{n}_2^*$ к базису $\mathbf{n}_1$, $\mathbf{n}_2$.

Глава II § 3

1. *В декартовой прямоугольной системе координат даны координаты вершин треугольника*: $A(20, -15)$, $B(-16, 0)$ *и* $C(-8, 6)$. *Найдите координаты центра и радиус окружности, вписанной в треугольник.*

Решение. Параллелограмм, построенный на двух равных по длине векторах — ромб, и его диагональ — биссектриса угла. Значит, направляющим вектором биссектрисы угла BAC будет $\mathbf{p} = \overrightarrow{AB}/|\overrightarrow{AB}| + \overrightarrow{AC}/|\overrightarrow{AC}|$.

$\overrightarrow{AB}(-36, 15)$, и $|AB| = 39$. Поэтому $\overrightarrow{AB}/|\overrightarrow{AB}|$ имеет координаты $(-12/13, 5/13)$.

$\overrightarrow{AC}(-28, 21)$, и $|AC| = 35$. Поэтому $\overrightarrow{AC}/|\overrightarrow{AC}|$ имеет координаты $(-4/5, 3/5)$.

Складывая, видим, что $\mathbf{p}$ коллинеарен вектору $\mathbf{p}'(-7, 4)$. Таким образом, биссектриса угла BAC имеет параметрические уравнения

$$x = 20 - 7t; \quad y = -15 + 4t.$$

Аналогично для угла ABC.

$\overrightarrow{BC}(8, 6)$, и $|BC| = 10$. Поэтому $\overrightarrow{BC}/|\overrightarrow{BC}|$ имеет координаты $(4/5, 3/5)$.

Ясно, что $\overrightarrow{BA}/|\overrightarrow{BA}|$ имеет координаты $(12/13, -5/13)$.

Складывая, видим, что вектор $\mathbf{q} = \overrightarrow{BC}/|\overrightarrow{BC}| + \overrightarrow{BA}/|\overrightarrow{BA}|$ коллинеарен вектору $\mathbf{q}'(8,\ 1)$. Таким образом, биссектриса угла ABC имеет параметрические уравнения $x = -16 + 8t$; $y = t$, и, следовательно, линейное уравнение

$$x - 8y + 16 = 0.$$

Центр вписанной окружности — точка пересечения биссектрис. Соответствующее ему значение параметра t на первой из них должно удовлетворять равенству $(20 - 7t) - 8(-15 + 4t) + 16 = 0$ и потому равно 4. Таким образом, центр вписанной окружности находится в точке

$$O(-8,\ 1).$$

Радиус окружности равен расстоянию от ее центра до какой-либо стороны. Сторона BC имеет уравнение $(x + 16)/4 = y/3$, или $3x - 4y + 48 = 0$. По формуле расстояния от точки до прямой радиус равен

$$r = \frac{|3(-8) - 4 + 48|}{5} = 4.$$

Для проверки можно найти расстояния от O до остальных сторон.

2. *Начало координат лежит в одном из углов, образованных прямыми с уравнениями $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ в декартовой прямоугольной системе координат. При каком необходимом и достаточном условии на коэффициенты уравнений этот угол острый?*

Решение. Когда прямая задана линейным уравнением в декартовой системе координат, то плоскость разделяется на две полуплоскости, определяемые этим уравнением: положительную и отрицательную. Точка принадлежит положительной полуплоскости, если результат подстановки ее координат в уравнение положителен. Таким образом, если свободный член уравнения прямой положителен, то начало координат лежит в положительной полуплоскости, определяемой данным уравнением.

Знаки свободных членов C_1 и C_2 нам неизвестны, поэтому постараемся умножить оба уравнения на такие множители, чтобы свободные члены оказались положительными. Очевидно, что достаточно умножить каждое уравнение на его свободный член (C_1 и $C_2 \neq 0$, иначе начало координат лежало бы на одной из прямых). Уравнения принимают вид

$$A_1C_1x + B_1C_1y + C_1^2 = 0, \quad A_2C_2x + B_2C_2y + C_2^2 = 0.$$

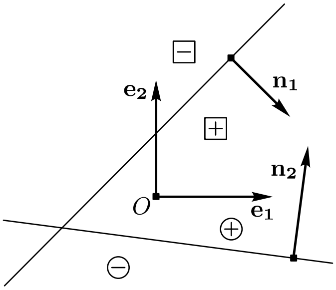

Рис. 8

Так как система координат декартова прямоугольная, векторы $\mathbf{n}_1(A_1C_1,\, B_1C_1)$ и $\mathbf{n}_2(A_2C_2,\, B_2C_2)$ — нормальные векторы прямых. Каждый из этих векторов направлен в соответствующую положительную полуплоскость (рис. 8). Действительно, если точка (x_0, y_0) лежит на прямой с уравнением $ax + by + c = 0$, то точка $(x_0 + a,\, y_0 + b)$ лежит в положительной полуплоскости: $a(x_0 + a) + b(y_0 + b) + c = a^2 + b^2 > 0$.

В нашем случае угол, в котором лежит начало координат, — пересечение обеих положительных полуплоскостей. Для того чтобы угол, составленный двумя лучами, был острым, нужно, чтобы угол между перпендикулярными к ним векторами, направленными внутрь угла, был тупым, т. е. $(\mathbf{n}_1,\, \mathbf{n}_2) < 0$. В координатах это условие запишется как

$$(A_1A_2 + B_1B_2)C_1C_2 < 0.$$

Обратите внимание на то, что знак левой части неравенства не меняется при умножении какого-либо из уравнений прямых на постоянный множитель.

3. *Составьте уравнение прямой, проходящей через начало координат и пересекающей прямые с уравнениями* $x = 1 + 2t$, $y = 2 + 3t$, $z = -t$ *и* $x = 4t$, $y = 5 - 5t$, $z = 3 + 2t$.

Решение. При решении подобных задач полезно предварительно представить себе, как бы вы построили прямую, если бы реально выполняли построение в пространстве. Вам нужно провести прямую p, пересекающую прямые l и m. Через начало координат вы можете провести некоторую прямую, пересекающую l, а затем сдвигать ее до тех пор, пока она не пересечет m. При сдвиге ваша прямая движется по плоскости, проходящей через начало координат и прямую l, до тех пор пока не попадет в плоскость, проходящую через начало координат и m.

Понятно, что прямая p — пересечение двух выше описанных плоскостей, а их уравнения написать несложно. Если $\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{r}_2$ — радиус-векторы начальных точек прямых l и m, а $\mathbf{a}_1$ и $\mathbf{a}_2$ — направляющие векторы этих прямых, то векторные уравнения плоскостей

$$(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1, \mathbf{a}_1) = 0, \qquad (\mathbf{r}, \mathbf{r}_2, \mathbf{a}_2) = 0.$$

Эта система уравнений определяет искомую прямую p. В координатной форме уравнения плоскостей таковы:

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = -2x + y - z = 0$$

и

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 0 & 5 & 3 \\ 4 & -5 & 2 \end{vmatrix} = 25x + 12y - 20z = 0.$$

Таким образом, ответ

$$\begin{cases} 2x - y + z = 0, \\ 25x + 12y - 20z = 0. \end{cases}$$

Если результат нужен в какой-либо другой форме, его можно преобразовать обычными приемами. Например, решим систему относительно y и z:

$$y = \frac{65}{8}x; \quad z = \frac{49}{8}x.$$

Параметрические уравнения прямой могут быть написаны в виде

$$x = 8t; \quad y = 65t; \quad z = 49t.$$

4. *Найти радиус и координаты центра сферы, проходящей через точку* $A(0, 1, 0)$ *и касающейся плоскостей с уравнениями*

$$x + y = 0, \qquad x - y = 0, \qquad x + y + 4z = 0.$$

Система координат — декартова прямоугольная.

Решение. Как принято при решении задач на построение при помощи циркуля и линейки, ослабим условия. Отбросим временно требование того, чтобы сфера проходила через точку A. Центры всех сфер, касающихся трех плоскостей, находятся на прямых, которые лежат на пересечении биссекторных плоскостей двугранных углов, образуемых данными плоскостями. Нас, естественно, интересует та из этих прямых, которая проходит внутри того же трехгранного угла, в котором лежит точка A. Найдем ее уравнение.

Множество точек, равноудаленных от первых двух плоскостей, описывается уравнением

$$\frac{x+y}{\sqrt{2}} = \pm\frac{x-y}{\sqrt{2}}.$$

Для точки A результат подстановки координат в первое уравнение положителен, а во второе — отрицателен. Следовательно, нужная нам биссекторная плоскость имеет уравнение $x + y = -(x - y)$, т. е. $x = 0$.

Аналогично, для первой и третьей плоскостей находим

$$\frac{x+y}{\sqrt{2}} = \pm\frac{x+y+4z}{\sqrt{18}},$$

причем результат подстановки координат A в обе части равенства положителен. Следовательно, вторая биссекторная плоскость имеет уравнение $3x + 3y = x + y + 4z$, или $x + y - 2z = 0$.

Таким образом, центр сферы лежит на прямой с уравнениями $x = 0$, $x + y - 2z = 0$. Приняв z за параметр, сразу получаем параметрические уравнения этой прямой:

$$x = 0, \quad y = 2t, \quad z = t.$$

Если центр искомой сферы находится в точке $O(t)$ с координатами $(0,\ 2t,\ t)$, то квадрат радиуса сферы $|AO(t)|$ должен равняться квадрату расстояния до каждой из плоскостей, но достаточно потребовать этого равенства только для какой-нибудь одной плоскости, скажем $x + y = 0$.

Итак, значение параметра t, соответствующее центру сферы, должно удовлетворять уравнению

$$(2t-1)^2 + t^2 = \frac{(2t)^2}{2}.$$

Упростим его. $4t^2 - 4t + 1 + t^2 - 2t^2 = 3t^2 - 4t + 1 = 0$. Корни этого уравнения $t_1 = 1$ и $t_2 = 1/3$.

Задача имеет два решения — одна сфера вписана в трехгранный угол, проходит через A и лежит дальше от вершины, чем A, а другая — ближе к вершине, чем A. Центры этих сфер в точках $O_1(0,\ 2,\ 1)$ и $O_2(0,\ 2/3,\ 1/3)$. Их радиусы соответственно $r_1 = \sqrt{2}$ и $r_2 = (\sqrt{2}\,)/3$.

Можно заметить, что радиус меньшей сферы втрое меньше радиуса бо́льшей, так же как и расстояние от вершины угла (0, 0, 0) до центра сферы. Так и должно быть в силу подобия соответствующих треугольников.

5. *В декартовой прямоугольной системе координат даны координаты вершин треугольника* $A(1,\,2,\,3)$, $B(1,\,5,\,-1)$ *и* $C(5,\,3,\,-5)$. *Найдите координаты центра окружности, описанной около треугольника.*

Решение. Эта задача легко может быть сведена к аналогичной задаче на плоскости. Именно, точка A и векторы $\mathbf{p} = \overrightarrow{AB}$ и $\mathbf{q} = \overrightarrow{AC}$ образуют внутреннюю систему координат на плоскости, содержащей треугольник. Видно, что $\mathbf{p}(0,\,3,\,-4)$, а $\mathbf{q} = (4,\,1,\,-8)$. Поэтому параметрические уравнения плоскости

$$x = 1 + 4v; \quad y = 2 + 3u + v; \quad z = 3 - 4u - 8v.$$

Эти уравнения можно рассматривать как формулы перехода от внутренней системы координат на плоскости к исходной системе координат в пространстве.

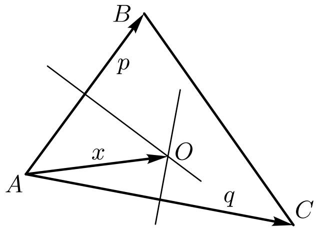

Рис. 9

Если O — искомый центр описанной окружности, то вектор $\mathbf{x} = \overrightarrow{AO}$ характеризуется тем, что (рис. 9)

$$\mathbf{Пр}_\mathbf{p}\mathbf{x} = \frac{(\mathbf{p},\,\mathbf{x})}{|\mathbf{p}|} = \frac{1}{2}\,|\mathbf{p}| \quad \text{и} \quad \mathbf{Пр}_\mathbf{q}\mathbf{x} = \frac{(\mathbf{q},\,\mathbf{x})}{|\mathbf{q}|} = \frac{1}{2}\,|\mathbf{q}|.$$

Если $\mathbf{x} = u\mathbf{p} + v\mathbf{q}$, то эти равенства перепишутся так:

$$u|\mathbf{p}|^2 + v(\mathbf{p},\,\mathbf{q}) = \frac{1}{2}\,|\mathbf{p}|^2, \quad u(\mathbf{p},\,\mathbf{q}) + v|\mathbf{q}|^2 = \frac{1}{2}\,|\mathbf{q}|^2.$$

Подставляя сюда $|\mathbf{p}|^2 = 25$, $(\mathbf{p},\,\mathbf{q}) = 35$, $|\mathbf{q}|^2 = 81$, получаем систему

$$50u + 70v = 25; \quad 70u + 162v = 81.$$

Решая эту систему, мы находим, что $u = -81/160$ и $v = 23/32$. Это координаты центра O во внутренней системе координат. Остается подставить их в параметрические уравнения плоскости, для того чтобы получить ее координаты в исходной системе координат:

$$x = 1 + 4 \cdot \frac{23}{32} = \frac{31}{8},$$
$$y = 2 - 3 \cdot \frac{81}{160} + \frac{23}{32} = \frac{6}{5},$$
$$z = 3 + 4 \cdot \frac{81}{160} - 8 \cdot \frac{23}{32} = -\frac{29}{40}.$$

6. *Напишите уравнения прямой, которая параллельна прямой* $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{a}_0 t$ *и пересекает прямые* $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + \mathbf{a}_1 t$ *и* $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 + \mathbf{a}_2 t$. *Дано, что векторы* $\mathbf{a}_0$, $\mathbf{a}_1$ *и* $\mathbf{a}_2$ *не компланарны.*

Решение. Задача похожа на задачу 3. Искомая прямая является пересечением двух плоскостей, каждая из которых проходит через одну из данных прямых и содержит вектор $\mathbf{a}_0$. Уравнения этих плоскостей следующие:

$$(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1,\, \mathbf{a}_1,\, \mathbf{a}_0) = 0; \qquad (\mathbf{r} - \mathbf{r}_2,\, \mathbf{a}_2,\, \mathbf{a}_0) = 0.$$

Это можно рассматривать как ответ, но попробуем получить параметрические уравнения. Поскольку направляющий вектор $\mathbf{a}_0$ нам известен, требуется только найти начальную точку.

Примем за начальную точку точку пересечения искомой прямой с плоскостью, которая проходит через начало координат с направляющими векторами $\mathbf{a}_1$ и $\mathbf{a}_2$. Радиус-вектор этой точки имеет вид $\mathbf{v}_0 = v_1\mathbf{a}_1 + v_2\mathbf{a}_2$. Подстановка в уравнения плоскостей дает

$$(v_1\mathbf{a}_1 + v_2\mathbf{a}_2 - \mathbf{r}_1,\, \mathbf{a}_1,\, \mathbf{a}_0) = v_2(\mathbf{a}_2,\, \mathbf{a}_1,\, \mathbf{a}_0) - (\mathbf{r}_1,\, \mathbf{a}_1,\, \mathbf{a}_0) = 0$$

и

$$(v_1\mathbf{a}_1 + v_2\mathbf{a}_2 - \mathbf{r}_2,\, \mathbf{a}_2,\, \mathbf{a}_0) = v_1(\mathbf{a}_1,\, \mathbf{a}_2,\, \mathbf{a}_0) - (\mathbf{r}_2,\, \mathbf{a}_2,\, \mathbf{a}_0) = 0.$$

Отсюда находим v_1 и v_2 и векторное параметрическое уравнение прямой

$$\mathbf{r} = \frac{(\mathbf{r}_2,\, \mathbf{a}_2,\, \mathbf{a}_0)}{(\mathbf{a}_1,\, \mathbf{a}_2,\, \mathbf{a}_0)}\mathbf{a}_1 + \frac{(\mathbf{r}_1,\, \mathbf{a}_1,\, \mathbf{a}_0)}{(\mathbf{a}_2,\, \mathbf{a}_1,\, \mathbf{a}_0)}\mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_0 t.$$

К другому по форме ответу мы придем, если примем за начальную точку точку пересечения прямой $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + \mathbf{a}_1 t$ с плоскостью $(\mathbf{r} - \mathbf{r}_2,\, \mathbf{a}_2,\, \mathbf{a}_0) = 0$. Значение параметра t этой точки должно удовлетворять уравнению $(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2 + \mathbf{a}_1 t,\ \mathbf{a}_2,\ \mathbf{a}_0) = 0$. Отсюда $t = (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1,\ \mathbf{a}_2,\ \mathbf{a}_0)/(\mathbf{a}_1,\ \mathbf{a}_2,\ \mathbf{a}_0)$, и мы можем написать уравнение искомой прямой в виде

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + \mathbf{a}_1 \frac{(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1,\ \mathbf{a}_2,\ \mathbf{a}_0)}{(\mathbf{a}_0,\ \mathbf{a}_1,\ \mathbf{a}_2)} + \mathbf{a}_0 t.$$

7*. *Напишите параметрические уравнения прямой, являющейся пересечением плоскостей с уравнениями* $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + u\mathbf{a} + v\mathbf{b}$ *и* $(\mathbf{r} - \mathbf{r}_2,\ \mathbf{n}) = 0$.

Решение. Нормальные векторы плоскостей нам известны. Это соответственно $[\mathbf{a},\ \mathbf{b}]$ и $\mathbf{n}$. Поэтому направляющий вектор прямой $\mathbf{p} = [\mathbf{n},\ [\mathbf{a},\ \mathbf{b}]]$.

Найдем начальную точку прямой. Точка первой плоскости со значениями параметров u и v лежит во второй плоскости тогда и только тогда, когда $(\mathbf{r}_1 + u\mathbf{a} + v\mathbf{b} - \mathbf{r}_2,\ \mathbf{n}) = 0$, т. е.

$$(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2,\ \mathbf{n}) + (\mathbf{a},\ \mathbf{n})u + (\mathbf{b},\ \mathbf{n})v = 0.$$

Это уравнение есть уравнение прямой во внутренней системе координат первой плоскости. Его можно использовать, чтобы обычным путем найти внутренние координаты начальной точки прямой:

$$u_0 = \frac{(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1,\ \mathbf{n})(\mathbf{a},\ \mathbf{n})}{(\mathbf{a},\ \mathbf{n})^2 + (\mathbf{b},\ \mathbf{n})^2}, \qquad v_0 = \frac{(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1,\ \mathbf{n})(\mathbf{b},\ \mathbf{n})}{(\mathbf{a},\ \mathbf{n})^2 + (\mathbf{b},\ \mathbf{n})^2}.$$

Теперь, подставляя эти координаты в уравнение первой плоскости, получим радиус-вектор начальной точки:

$$\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}_1 + \frac{(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1,\ \mathbf{n})\{\mathbf{a}(\mathbf{a},\ \mathbf{n}) + \mathbf{b}(\mathbf{b},\ \mathbf{n})\}}{(\mathbf{a},\ \mathbf{n})^2 + (\mathbf{b},\ \mathbf{n})^2}.$$

Решение, конечно, упрощается при дополнительных предположениях. Например, если $(\mathbf{a},\ \mathbf{n}) \neq 0$, то можно положить $v_0 = 0$ и $u_0 = (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)/(\mathbf{a},\ \mathbf{n})$.

Глава III § 1

1. *Привести к каноническому виду уравнение*

$$3x^2 + 10xy + 3y^2 - 2x + 2y - 9 = 0.$$

Р е ш е н и е. Обозначим $\sin\varphi = s$, а $\cos\varphi = c$. Тогда преобразование поворота системы координат на угол φ запишется формулами $x = cx' - sy'$; $y = sx' + cy'$. Подставим выражение старых координат через новые в заданное уравнение:

$$3(cx' - sy')^2 + 10(cx' - sy')(sx' + cy') + 3(sx' + cy')^2 - \\ - 2(cx' - sy') + 2(sx' + cy') - 9 = 0.$$

Коэффициент при произведении $x'y'$ в этом уравнении равен

$$-6cs + 10(c^2 - s^2) + 6cs = 10(c^2 - s^2).$$

Приравнивая этот коэффициент нулю, находим, что можно положить $c = s = 1/\sqrt{2}$ и $\varphi = \pi/4$, о чем нетрудно было догадаться, исходя из того, что члены второй степени в уравнении симметричны относительно x и y. Без члена с произведением $x'y'$ уравнение принимает вид

$$(3c^2 + 10cs + 3s^2)x'^2 + (3s^2 - 10cs + 3c^2)y'^2 + \\ + 2(s - c)x' + 2(s + c)y' - 9 = 0.$$

Подставляя $c = s = 1/\sqrt{2}$, получаем

$$8x'^2 - 2y'^2 + 2\sqrt{2}\,y' - 9 = 0.$$

Уберем линейный член с помощью переноса начала координат. Для этого перепишем уравнение в виде

$$8x'^2 - 2\left(y'^2 - 2\,\frac{1}{\sqrt{2}}\,y' + \frac{1}{2}\right) + 1 - 9 = 0,$$

или

$$8x'^2 - 2\left(y' - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 - 8 = 0.$$

Полагая $y'' = y' - 1/\sqrt{2}$, $x'' = x'$, получаем каноническое уравнение

$$x''^2 - \frac{y''^2}{4} = 1.$$

Мы перенесли начало координат в точку с координатами $x' = 0$, $y' = 1/\sqrt{2}$. Исходные координаты этой точки — центра гиперболы: $x = -1/2$, $y = 1/2$. Поэтому исходные координаты произвольной точки выражаются через ее координаты в канонической системе координат формулами

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}}\,(x'' - y'') - \frac{1}{2},$$
$$y = \frac{1}{\sqrt{2}}\,(x'' + y'') + \frac{1}{2}.$$

2. *Приведите к каноническому виду уравнение*

$$9x^2 - 24xy + 16y^2 - 34x - 38y - 9 = 0.$$

Решение. Здесь, как можно заметить, члены второй степени — квадрат линейного двучлена: $9x^2 - 24xy + 16y^2 = (3x - 4y)^2$. Возникает желание сделать замену переменных $y' = 3x - 4y$, но такая замена соответствует переходу к непрямоугольной системе координат. Однако можно перейти к прямоугольной системе координат по формулам

$$x' = \frac{4}{5}\,x + \frac{3}{5}\,y,$$
$$y' = -\frac{3}{5}\,x + \frac{4}{5}\,y.$$

Выражая старые координаты через новые, мы находим, что повернули систему координат на $\arccos(4/5)$:

$$x = \frac{4}{5}\,x' - \frac{3}{5}\,y',$$
$$y = \frac{3}{5}\,x' + \frac{4}{5}\,y'.$$

После подстановки и приведения подобных членов уравнение становится таким:

$$25y'^2 - 50x' - 10y' - 9 = 0.$$

С помощью переноса начала координат можно убрать член с первой степенью y' и свободный член:

$$25\left(y'^2 - 2\,\frac{1}{5}\,y' + \frac{1}{25}\right) - 1 - 9 - 50x' = 0.$$

Следовательно, если положить

$$x'' = x' + \frac{1}{5}; \qquad y'' = y' - \frac{1}{5},$$

уравнение примет канонический вид

$$y''^2 = 2x''.$$

Начало координат перенесено в точку (вершину параболы) с координатами $x' = -1/5$, $y' = +1/5$. Исходные координаты произвольной точки связаны с ее координатами в канонической системе координат формулами

$$\begin{aligned} x'' &= (4x + 3y + 1)/5, \\ y'' &= (-3x + 4y'' - 1)/5, \end{aligned} \qquad \text{или} \qquad \begin{aligned} x &= (20x'' - 15y'' - 7)/25, \\ y &= (15x'' + 20y'' + 1)/25. \end{aligned}$$

3. *Какого класса линию может определять уравнение второго порядка, если его левая часть раскладывается в произведение линейных многочленов*?

Решение. Произведение равно нулю тогда и только тогда, когда равен нулю хотя бы один из сомножителей. Поэтому точка принадлежит линии тогда и только тогда, когда она принадлежит хотя бы одной из прямых, определяемых обращением в нуль сомножителей. Линия может быть или парой пересекающихся прямых, или парой параллельных прямых, или парой совпавших прямых.

4. *При каком необходимом и достаточном условии на его коэффициенты уравнение второго порядка в декартовой прямоугольной системе координат является уравнением окружности*?

Пусть окружность задана общим уравнением второго порядка в декартовой прямоугольной системе координат. Каждая прямая, проходящая через центр окружности, является ее осью симметрии. Поэтому уравнение для определения направления осей симметрии

$$(A - C)\sin 2\varphi = 2B\cos 2\varphi$$

выполнено для любого φ. Это означает, что для того, чтобы уравнение определяло окружность, необходимо, чтобы $A = C$ и $B = 0$.

Этого, однако, не достаточно. Действительно, эти условия выполнены и для уравнений $x^2 + y^2 + 1 = 0$ или $x^2 + y^2 = 0$. Рассмотрим произвольное уравнение, удовлетворяющее этим условиям:

$$Ax^2 + Ay^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0.$$

Перенесем начало координат, с тем чтобы уничтожить линейные члены:

$$A\left(x^2 + 2\,\frac{D}{A}\,x + \frac{D^2}{A^2}\right) - \frac{D^2}{A} + A\left(y^2 + 2\,\frac{E}{A}\,y + \frac{E^2}{A^2}\right) - \frac{E^2}{A} + F = 0.$$

Уравнение примет вид $Ax'^2 + Ay'^2 + F' = 0$, где

$$F' = F - \frac{D^2}{A} - \frac{E^2}{A}.$$

Для того чтобы множество, определяемое уравнением, содержало две различные точки, необходимо, чтобы F' было отрицательным. Умножив неравенство $F' < 0$ на положительный множитель A^2, мы получим окончательные условия

$$A = C, \quad B = 0, \quad AD^2 + AE^2 > A^2F.$$

Нетрудно проверить, что эти условия являются достаточными: при их выполнении общее уравнение линии второго порядка в декартовой прямоугольной системе координат приводится к виду $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ при $a = -D/A$, $b = -E/A$ и $r > 0$.

5. *Система координат удовлетворяет условиям* $|\mathbf{e}_1| = |\mathbf{e}_2| = 5$, $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) = 7$. *Какая линия определяется в этой системе координат уравнением* $x^2 + y^2 = 1$?

Р е ш е н и е. Линия ограничена, так как координаты точек по модулю не больше единицы. Она содержит две различные точки (например, точки с координатами $(1, 0)$ и $(0, 1)$). Только эллипсы удовлетворяют этим условиям. Следовательно, данная линия — эллипс. Для получения его канонического уравнения придется преобразовать систему координат.

Сначала перейдем к декартовой прямоугольной системе. Базисные векторы равны по длине, а следовательно, векторы $\mathbf{f}_1 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2$ и $\mathbf{f}_2 = \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2$ ортогональны. $|\mathbf{f}_1| = 8$, а $|\mathbf{f}_2| = 6$.

Поэтому базис $\mathbf{h}_1 = \frac{1}{8}(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2)$, $\mathbf{h}_2 = \frac{1}{6}(\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2)$ является ортонормированным и формулы

$$x = \frac{1}{8}x' + \frac{1}{6}y',$$
$$y = \frac{1}{8}x' - \frac{1}{6}y'$$

задают переход к декартовой прямоугольной системе координат. В ней уравнение линии имеет вид

$$\left(\frac{1}{8}x' + \frac{1}{6}y'\right)^2 + \left(\frac{1}{8}x' - \frac{1}{6}y'\right)^2 = 1.$$

После приведения подобных членов мы получаем каноническое уравнение эллипса

$$\frac{x'^2}{32} + \frac{y'^2}{18} = 1.$$

6. *Докажите, что сумма коэффициентов $A + C$ в общем уравнении второго порядка не меняется при переходе от одной декартовой прямоугольной системы координат к другой такой же системе.*

Решение. Пусть переход к новой декартовой системе координат задается формулами

$$x = cx' \mp sy' + a,$$
$$y = sx' \pm cy' + b,$$

где $c = \cos\varphi$, а $s = \sin\varphi$. Подставим выражения старых координат через новые в общее уравнение второго порядка:

$$A(cx' \mp sy' + a)^2 + 2B(cx' \mp sy' + a)(sx' \pm cy' + b) + \\ + C(sx' \pm cy' + b)^2 + \ldots = 0.$$

Квадраты координат могут войти только из выписанных здесь членов. Соберем коэффициенты при квадратах:

$$A' = Ac^2 + 2Bcs + Cs^2,$$
$$C' = As^2 - 2Bcs + Cc^2.$$

Складывая эти уравнения, мы получим требуемое равенство $A' + C' = A + C$.

Глава III § 2

1. *Докажите, что вершины гиперболы и точки пересечения ее асимптот с директрисами лежат на одной окружности.*

Решение. Одна из точек пересечения директрис с асимптотами в канонической системе координат имеет координаты $(a/\varepsilon,\ b/\varepsilon)$. (У остальных координаты отличаются знаками.) Найдем расстояние от этой точки до начала координат:

$$\rho^2 = \frac{a^2}{\varepsilon^2} + \frac{b^2}{\varepsilon^2} = \frac{a^2+b^2}{\varepsilon^2} = \frac{c^2}{\varepsilon^2}.$$

Но $\varepsilon^2 = c^2/a^2$. Таким образом, $\rho = a$, откуда прямо следует доказываемое.

2. *Фокус эллипса (гиперболы или параболы) делит проходящую через него хорду на отрезки длины u и v. Докажите, что сумма $1/u + 1/v$ постоянна.*

Решение. Хорда, проходящая через фокус, имеет уравнение $x = c + \alpha t$, $y = \beta t$. Будем считать, что $\alpha^2 + \beta^2 = 1$, тогда длина отрезка от фокуса до точки со значением параметра t будет равна $|t|$.

В случае эллипса значения параметра t_1 и t_2, соответствующие концам хорды, удовлетворяют уравнению $b^2(c+\alpha t)^2 + a^2\beta^2 t^2 = a^2 b^2$, или $-b^4 + 2b^2 c\alpha t + (b^2\alpha^2 + a^2\beta^2)t^2 = 0$, а обратные величины: $z_1 = t_1^{-1}$ и $z_2 = t_2^{-1}$ — уравнению

$$b^4 z^2 - 2b^2 c\alpha z - (b^2\alpha^2 + a^2\beta^2) = 0.$$

Отсюда

$$z = \frac{1}{b^2}\,(\alpha c \pm a\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\,).$$

Так как корни имеют разные знаки (фокус расположен между концами хорды), сумма модулей корней равна модулю их разности, т. е.

$$\frac{1}{u} + \frac{1}{v} = |z_1| + |z_2| = \frac{\alpha c + a}{b^2} - \frac{\alpha c - a}{b^2} = \frac{2a}{b^2}.$$

Это заканчивает доказательство в случае эллипса. Для гиперболы и параболы доказательства аналогичны.

3. *Выведите уравнения эллипса, гиперболы и параболы в полярной системе координат, приняв за полюс фокус, а за полярную ось — луч, лежащий на оси симметрии и не пересекающий директрису, соответствующую данному фокусу.*

Решение. 1) *Эллипс.* В канонической системе координат расстояние от левого фокуса до точки $M(x, y)$ на эллипсе, как мы знаем, равно $r = a + \varepsilon x$. Если полюс помещен в левый фокус и φ — полярный угол, то $x = r\cos\varphi - c$, и мы имеем: $r(1 - \varepsilon\cos\varphi) = a - \varepsilon c$. Величина $p = a - \varepsilon c$ равна $r(\pi/2)$ — расстоянию от левого фокуса до точки на эллипсе, имеющей абсциссу $-c$, т. е. точки $P(-c, p)$. Итак, уравнение эллипса в полярных координатах

$$r = \frac{p}{1 - \varepsilon\cos\varphi}.$$

2) *Гипербола.* В канонической системе координат расстояние от правого фокуса до точки $M(x, y)$ на правой ветви гиперболы, как мы знаем, равно $r = \varepsilon x - a$. Если полюс помещен в правый фокус и φ — полярный угол, то $x = r\cos\varphi + c$, и мы имеем: $r(1 - \varepsilon\cos\varphi) = \varepsilon c - a$. Величина $p = \varepsilon c - a = r(\pi/2)$ — ордината точки $P(c, p)$, лежащей на гиперболе над правым фокусом. Итак, уравнение правой ветви гиперболы в полярных координатах

$$r = \frac{p}{1 - \varepsilon\cos\varphi}.$$

Для точки $M(x, y)$ на левой ветви гиперболы расстояние до правого фокуса равно $r = a - \varepsilon x$, а $x = r\cos\varphi + c$, и мы имеем $r(1 + \varepsilon\cos\varphi) = -\varepsilon c + a$. Итак, уравнение левой ветви гиперболы в полярных координатах

$$r = \frac{-p}{1 + \varepsilon\cos\varphi}.$$

3) *Парабола.* Если парабола задана каноническим уравнением $y^2 = 2px$, то расстояние от точки $M(x, y)$ до фокуса равно $r = x + p/2$. Пусть полюс помещен в фокус параболы, а полярный угол отсчитывается от положительного направления оси Ox. Тогда $x = r\cos\varphi + p/2$. Поэтому $r = r\cos\varphi + p$, и уравнение параболы в полярных координатах

$$r = \frac{p}{1 - \cos\varphi}.$$

Заметим, что и для параболы коэффициент p — ордината точки $P(p/2, p)$, лежащей на параболе над фокусом.

4. *На плоскости нарисованы эллипс и парабола вместе с их осями симметрии. Как с помощью циркуля и линейки построить их фокусы и директрисы? Тот же вопрос относительно гиперболы, у которой нарисованы асимптоты.* (*Задача построения осей симметрии и асимптот решается на основании материала § 3.*)

Решение. 1) *Эллипс.* Фокусы эллипса имеют координаты $(c, 0)$ и $(-c, 0)$, где $c^2 = a^2 - b^2$. Поэтому они — точки пересечения большой оси эллипса и окружности с центром в конце B малой оси эллипса, имеющей радиус, равный большой полуоси a (рис. 10).

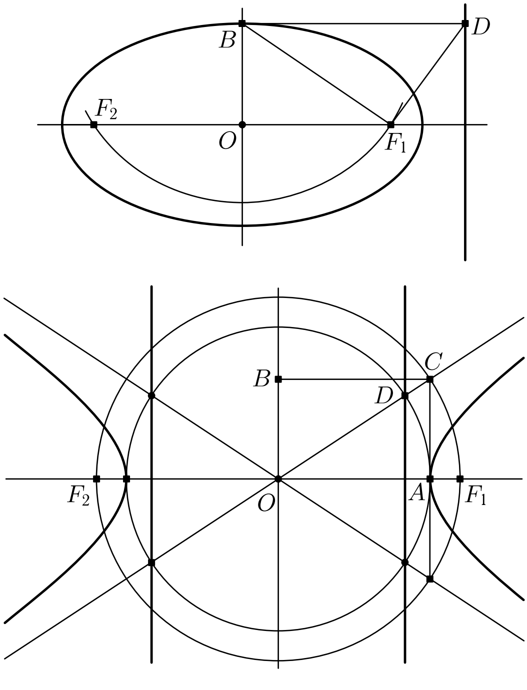

Рис. 10

Строим в фокусе F_1 перпендикуляр к отрезу BF_1 и его пересечение D с прямой, проходящей через B параллельно большой оси эллипса. Точка D лежит на директрисе, так как из подобия треугольников BF_1D и BOF_1 следует, что

$$\frac{|BF_1|}{|DB|} = \frac{|OF_1|}{|BF_1|} = \frac{c}{a} = \varepsilon.$$

2) *Гипербола.* Решение основывается на результате решения задачи 1. Окружность с центром в центре гиперболы и радиусом $|OA| = a$ пересекает асимптоты в точках, лежащих на директрисах.

Построим в вершине гиперболы перпендикуляр к ее вещественной оси и точку C его пересечения с асимптотой. Так как $|OC|^2 = a^2 + b^2$, достаточно отложить от O на вещественной оси отрезки OF_1 и OF_2, равные OC. Полученные точки — фокусы гиперболы.

3) *Парабола.* Если парабола задана каноническим уравнением $y^2 = 2px$, то фокус имеет координаты $(p/2, 0)$, а точка $P(p/2, p)$ лежит на параболе. Отсюда вытекает следующее построение: построим произвольный прямоугольник $OABC$ с отношением сторон $1 : 2$, стороны которого лежат на осях канонической системы координат. Его диагональ пересечет параболу в точке P, и для построения фокуса остается опустить перпендикуляр PF.

Для нахождения точки D на директрисе достаточно отложить $OD = OF$. Заметим, что $FPQD$ — квадрат.

5. *Пусть u и v — длины двух взаимно перпендикулярных радиусов эллипса. Найдите сумму $1/u^2 + 1/v^2$.*

Решение. Пусть $(\cos\varphi, \sin\varphi)$ — компоненты направляющего вектора одного из радиусов эллипса. Длина радиуса равна u, если точка с координатами $(u\cos\varphi, u\sin\varphi)$ лежит на эллипсе, т. е.

$$\frac{u^2\cos^2\varphi}{a^2} + \frac{u^2\sin^2\varphi}{b^2} = 1.$$

Отсюда

$$\frac{1}{u^2} = \frac{b^2\cos^2\varphi + a^2\sin^2\varphi}{a^2b^2}.$$

Аналогичное вычисление для перпендикулярного радиуса с направляющим вектором $(-\sin\varphi, \cos\varphi)$ даст

$$\frac{1}{v^2} = \frac{b^2\sin^2\varphi + a^2\cos^2\varphi}{a^2b^2}.$$

Поэтому

$$\frac{1}{u^2} + \frac{1}{v^2} = \frac{a^2 + b^2}{a^2b^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}.$$

Приведем еще одно, не столь естественное, решение. Пусть указаны какие-то два взаимно перпендикулярных радиуса эллипса. Повернем каноническую систему координат эллипса так, чтобы ее оси были направлены по указанным радиусам. Так как в формулы замены координат при повороте системы не входят свободные члены, членов с первыми степенями в уравнении появиться не может. Таким образом, уравнение эллипса имеет вид $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + F = 0$. Заметим, что $F \neq 0$, так как эллипс не проходит через свой центр. Разделив на $-F$, мы приведем уравнение к виду $A'x^2 + 2B'xy + C'y^2 = 1$.

Пусть эллипс пересекает оси координат в точках $U(u, 0)$ и $V(0, v)$. Тогда $A'u^2 = 1$ и $C'v^2 = 1$. В силу результата задачи 6 § 1 сумма $A' + C' = 1/u^2 + 1/v^2$ постоянна и не зависит от выбора системы координат (при условии, что уравнение не умножается на число). Для канонической системы координат $A + C = 1/a^2 + 1/b^2$, и мы приходим к полученному выше результату.

6. *Найдите кратчайшее расстояние от параболы $y^2 = 12x$ до прямой $x - y + 7 = 0$.*

Р е ш е н и е. Оно состоит в том, чтобы провести касательную к параболе, параллельную данной прямой, и найти расстояние от точки касания до прямой. Все остальные точки параболы будут дальше от прямой, так как парабола вся лежит по одну сторону от касательной.

Итак, будем искать уравнение касательной в виде $x - y + c = 0$. С этой целью решим это уравнение совместно с уравнением параболы $y^2 = 12x$. Исключение переменной x приводит к уравнению $y^2 - 12y + 12c = 0$. Найдем c так, чтобы уравнение имело кратные корни. Для этого дискриминант $36 - 12c$ должен быть равен нулю, т. е. $c = 3$. Следовательно, уравнение касательной $x - y + 3 = 0$. Возьмем точку на касательной, например $A(0, 3)$, и найдем расстояние от A до прямой $x - y + 7 = 0$. Оно совпадает с расстоянием от точки касания и равно

$$\frac{|-3+7|}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}\,.$$

Может возникнуть вопрос, не слишком ли мы полагаемся на наглядные представления, когда утверждаем, что парабола лежит по одну сторону от любой своей касательной. Проверим это утверждение аналитически. Уравнение касательной к параболе $yy_0 - p(x + x_0) = 0$, причем точка (x_0, y_0) лежит на параболе: $x_0 = y_0^2/2p$. Подставим в уравнение касательной координаты

$(y^2/2p, y)$ произвольной точки параболы. Мы получим

$$yy_0 - p\left(\frac{y^2}{2p} + \frac{y_0^2}{2p}\right) = -\frac{1}{2}\left(y^2 - 2yy_0 + y_0^2\right) \leqslant 0.$$

Итак, результат подстановки отрицателен для всех $y \neq y_0$, что говорит о том, что парабола лежит по одну сторону от касательной.

Проверим, что прямая $x - y + 7 = 0$, не пересекающая параболу, лежит по другую сторону от касательной, чем парабола. Для этого возьмем точку, скажем $N_1(1,\ 8)$, на этой прямой и подставим ее координаты в уравнение касательной $x - y + 3 = 0$. Результат $1 - 8 + 3$ меньше нуля. Теперь возьмем точку $N_2(2,\ \sqrt{24}\,)$ на параболе и подставим в уравнение касательной ее координаты. Результат $2 - \sqrt{24} + 3$ больше нуля. Это решает вопрос.

7. *Докажите, что отрезок касательной, заключенный между асимптотами гиперболы, делится пополам точкой касания.*

Пусть к гиперболе, заданной каноническим уравнением, проведена касательная в точке $M_0(x_0, y_0)$. Решим ее уравнение $b^2x_0x - a^2y_0y = a^2b^2$ совместно с уравнением $b^2x^2 - a^2y^2 = 0$, которому удовлетворяют обе асимптоты. Если мы найдем bx из первого уравнения и подставим во второе, после упрощения получим равенство $a^2(b^2 + y_0y)^2 - b^2x_0^2y^2 = 0$, которое сводится к $y^2 - 2y_0y - b^2 = 0$. Отсюда видно, что корни этого уравнения удовлетворяют условию

$$\frac{y_1 + y_2}{2} = y_0.$$

Так как точки пересечения касательной с асимптотами M_1, M_2 и точка касания M_0 лежат на одной прямой, этого достаточно, чтобы заключить, что M_0 — середина отрезка M_1M_2.

8. *В уравнение касательной к эллипсу в канонической системе координат вместо координат точки касания x_0 и y_0 подставлены координаты точки, лежащей не на эллипсе, а вне эллипса. Как расположена получившаяся прямая?*

Р е ш е н и е. Поставим себе задачу провести через точку $M_0(x_0, y_0)$ касательную к эллипсу. Для этого будем искать такую точку $M(x, y)$ на эллипсе, касательная в которой проходит через M_0. Координаты искомой точки должны удовлетворять системе уравнений

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \qquad \frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1.$$

Второе уравнение — как раз уравнение той прямой, которую нам нужно исследовать. Решения системы удовлетворяют этому уравнению. Поэтому прямая с таким уравнением проходит через точки касания касательных, проведенных к эллипсу из точки M_0.

9. *Из точки на директрисе проведены две касательные к параболе. Докажите, что они взаимно перпендикулярны и отрезок, соединяющий точки касания, проходит через фокус.*

Решение. Рассмотрим на параболе $y^2 = 2px$ две точки, $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$. Касательные к параболе, проведенные в этих точках, $yy_1 = p(x + x_1)$ и $yy_2 = p(x + x_2)$, перпендикулярны тогда и только тогда, когда $y_1y_2 + p^2 = 0$.

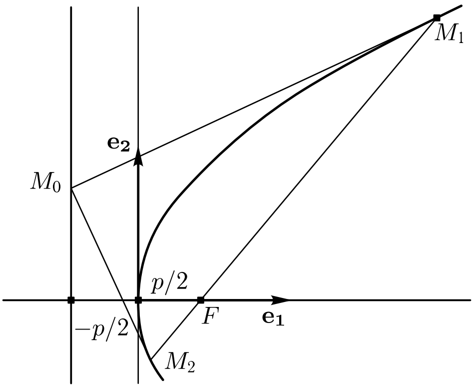

Рис. 11

Выберем произвольную точку $M_0(-p/2,\, y_0)$ на директрисе. Если касательная к параболе в точке $M(X, Y)$ проходит через точку M_0, то $y_0Y = p(X - p/2)$. Учтем, что $Y^2 = 2pX$, и получим

$$\frac{Y^2}{2} - y_0Y - \frac{p^2}{2} = 0.$$

Корни этого уравнения — ординаты точек касания касательных, проведенных из точки M_0, т. е. точек M_1 и M_2. По теореме Виета произведение корней равно $-p^2$, т. е. они удовлетворяют условию перпендикулярности $Y_1Y_2 + p^2 = 0$.

Координаты точек касания мы находили из системы уравнений

$$Y^2 = 2pX; \quad y_0Y = p(X - p/2).$$

В частности, они удовлетворяют второму уравнению системы. Геометрически это означает, что прямая с уравнением $y_0Y = p(X - p/2)$ проходит через обе точки касания. Ясно, что координаты фокуса параболы $X = p/2$, $Y = 0$ удовлетворяют уравнению, а значит, прямая проходит через фокус.

Глава III § 3

1. *Линия описана около параллелограмма, если его вершины лежат на линии, а остальные точки на ней не лежат. Докажите, что такая линия второго порядка обязательно центральная, и центр ее совпадает с центром параллелограмма.*

Решение. Две противоположные стороны параллелограмма — пара параллельных хорд, а прямая, соединяющая их середины, — сопряженный им диаметр — проходит через центр параллелограмма. То же верно и относительно второй пары сторон, параллельных указанному диаметру.

2. *На плоскости нарисованы эллипс, гипербола и парабола. Как с помощью циркуля и линейки построить их оси симметрии и асимптоты гиперболы?*

Решение. 1. *Гипербола.*

а. *Строим центр.* Проводим две параллельные хорды, AB и $A'B'$. Через их середины проходит диаметр CC'. Центр гиперболы O — середина хорды DD', лежащей на диаметре (рис. 12).

б. *Строим оси симметрии.* Точки E, E', G, G' — точки пересечения гиперболы с окружностью, центр которой в центре гиперболы O. Они симметричны относительно осей гиперболы, так как при симметрии относительно этих осей и гипербола, и окружность остаются на месте. Поэтому оси симметрии — биссектрисы углов между прямыми EG' и $E'G$ (рис. 13).

в. *Находим мнимую полуось b.* Строим диаметр, сопряженный уже построенному. Для этого проводим хорды $A'K$ и $B'K'$, параллельные уже построенному диаметру. Искомый диаметр соединяет их середины M и M' (рис. 14). Нам потребуется вершина гиперболы U.

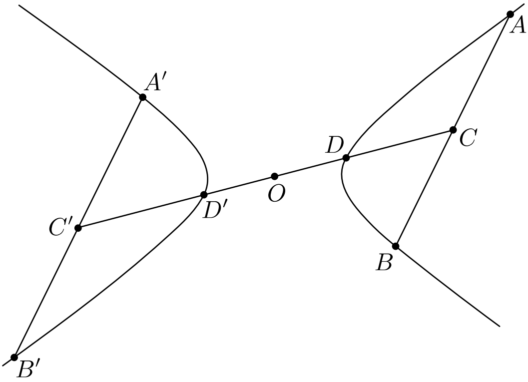

Рис. 12

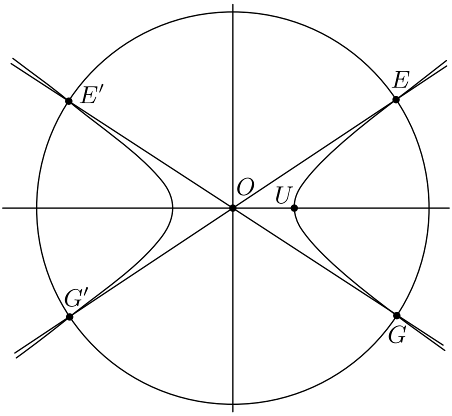

Рис. 13

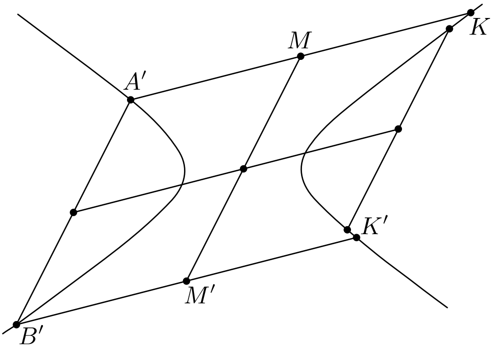

Рис. 14

Угловые коэффициенты двух сопряженных диаметров гиперболы в канонической системе координат удовлетворяют условию

$$\frac{1}{a^2} - k_1 k_2 \frac{1}{b^2} = 0,$$

или $(ak_1)(ak_2) = b^2$. Следовательно, отрезок длины b может быть построен как среднее пропорциональное отрезков длин ak_1 и ak_2. Построение среднего пропорционального — хорошо известный прием. Проводим перпендикуляр к вещественной оси гиперболы в ее вершине U (рис. 15). Если V и W — точки его пересечения с сопряженными диаметрами, то отрезки UV и UW имеют длины ak_1 и ak_2. Строим окружность с диаметром UW и ее пересечение S с перпендикуляром, проведенным в точке V к этому диаметру. Длина отрезка VS равна мнимой полуоси гиперболы b.

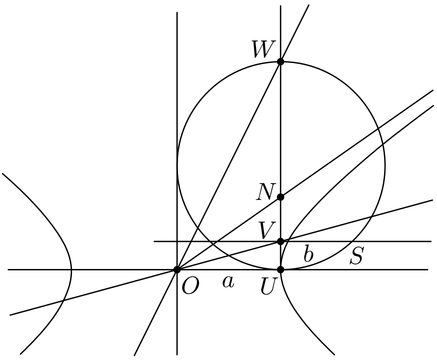

Рис. 15

г. *Построение асимптот.* Остается отложить на луче UW отрезок $UN = VS$ и провести асимптоту ON.

2. *Эллипс.* Построение центра и осей симметрии эллипса производится так же, как для гиперболы.

3. *Парабола.* У параболы необходимо построить только ось симметрии. Для этого проводим пару параллельных хорд и соединяем их середины. Полученная прямая имеет асимптотическое направление, т. е. параллельна оси параболы. Ось делит пополам перпендикулярные ей хорды и, значит, перпендикулярна тому направлению, которому сопряжена. Поэтому проводим пару хорд, перпендикулярных асимптотическому направлению. Прямая, соединяющая их середины, и есть ось параболы.

3. *Докажите, что сумма квадратов длин хорд, лежащих на сопряженных диаметрах эллипса, постоянна.*

Решение. Зададим эллипс каноническим уравнением. Пусть (x, y) — координаты точки M пересечения прямой $y = kx$ с эллипсом. Тогда квадрат длины радиуса OM равен

$$x^2 + y^2 = \frac{a^2b^2(1+k^2)}{b^2 + a^2k^2}.$$

Угловые коэффициенты двух сопряженных направлений связаны равенством $kk' = -b^2/a^2$. Поэтому квадрат длины радиуса OM' сопряженного направления равен

$$x'^2 + y'^2 = \frac{a^2b^2(1 + b^4/(a^4k^2))}{b^2 + b^4/(a^2k^2)} = \frac{a^4k^2 + b^4}{a^2k^2 + b^2}.$$

После упрощения сумма $x^2 + y^2 + x'^2 + y'^2$ оказывается равной $a^2 + b^2$. Поэтому сумма квадратов длин хорд равна $4(a^2 + b^2)$.

4. *Не приводя уравнение к каноническому виду, найдите центр и асимптоты гиперболы*

$$3x^2 + 10xy + 3y^2 - 2x + 2y - 9 = 0.$$

Решение. Координаты центра гиперболы находятся из системы уравнений

$$3x + 5y - 1 = 0,$$
$$5x + 3y + 1 = 0$$

и равны $(-1/2,\ 1/2)$. Асимптотические направления находятся из уравнения

$$3\alpha^2 + 10\alpha\beta + 3\beta^2 = 0.$$

Их угловые коэффициенты равны $\beta_1/\alpha_1 = -3$ и $\beta_2/\alpha_2 = -1/3$. Поэтому уравнения асимптот

$$\left(y - \frac{1}{2}\right) = -3\left(x + \frac{1}{2}\right) \quad \text{и} \quad \left(y - \frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{3}\left(x + \frac{1}{2}\right),$$

или, после упрощений,

$$3x + y + 1 = 0 \quad \text{и} \quad x + 3y - 1 = 0.$$

5. *Не приводя уравнение к каноническому виду, скажите, как называется линия с уравнением*

$$3x^2 + 10xy + 3y^2 - 2x + 2y - 1 = 0.$$

Р е ш е н и е. Подсчитаем значения инвариантов:

$$\delta = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = -16 < 0$$

и

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 5 & -1 \\ 5 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0.$$

Таким образом, линия — пара пересекающихся прямых.

6. *Как разложить на множители левую часть уравнения из задачи 5?*

Р е ш е н и е. Прямые, составляющие пару пересекающихся прямых, — это прямые асимптотических направлений, проходящие через центр линии. В вычислениях координат центра и угловых коэффициентов асимптотических направлений свободный член уравнения линии не участвует. Поэтому эти величины такие же, как и для гиперболы в задаче 4. В результате прямые, на которые распадается линия из задачи 5, — это асимптоты гиперболы из задачи 4. Мы получаем следующее разложение на множители:

$$3x^2 + 10xy + 3y^2 - 2x + 2y - 1 = (3x + y + 1)(x + 3y - 1).$$

7. *Напишите уравнение касательной к линии* $x^2 - 2xy + 3y^2 = 3$ *в точке* $M_0(0,\ 1)$.

Р е ш е н и е. В соответствии с общим уравнением касательной к линии второго порядка, касательная в точке с координатами $(x_0,\ y_0)$ имеет уравнение $xx_0 - (xy_0 + x_0y) + 3yy_0 = 3$. Подставляя сюда данные нам координаты точки касания, получаем

$$-x + 3y = 3.$$

8. *Определите, к какому классу линий второго порядка относится линия с уравнением*

$$x^2 + 3xy + y^2 + 7x + 8y = 11$$

в декартовой системе координат.

Р е ш е н и е. Возникает желание начать с приведения уравнения к каноническому виду, без оснований допустив, что система координат прямоугольная. Между тем, именно общая декартова система координат в условии задачи служит косвенным указанием на то, что следует поискать другой путь.

Посмотрим на определитель

$$\delta = \begin{vmatrix} 1 & \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} & 1 \end{vmatrix}.$$

Он меньше нуля, и, следовательно, линия принадлежит гиперболическому типу. Гипербола или пара пересекающихся прямых? На этот вопрос ответить можно несколькими путями.

1) Можно заметить, что при $x = -y$ уравнение принимает вид: $-x^2 - x - 11 = 0$. Это означает, что исследуемая линия не пересекается с прямой $x + y = 0$. Между тем, пара пересекающихся прямых пересекается с любой прямой. Следовательно, линия — гипербола.

2) Это отлично, но как быть, если такой прямой заметить не удалось? Более универсальный способ опирается на следующее: гипербола, в отличие от пары прямых, не содержит своего центра. Центр линии находится из простой системы линейных уравнений, которая в нашем случае после умножения уравнений на 2 может быть записана так:

$$\begin{cases} 2x + 3y + 7 = 0, \\ 3x + 2y + 8 = 0. \end{cases}$$

Ее решение $x = -2$, $y = -1$ не удовлетворяет уравнению линии.

3) Можно вычислить определитель третьего порядка

$$\begin{vmatrix} 1 & 3/2 & 7/2 \\ 3/2 & 1 & 4 \\ 7/2 & 4 & -11 \end{vmatrix},$$

обращение которого в нуль для центральной линии равносильно существованию особой точки (т. е. центра, принадлежащего линии). Его отличие от нуля говорит о том, что линия — гипербола.

Глава III § 4

1. *Докажите, что линия пересечения поверхности второго порядка с плоскостью, которая целиком на ней не лежит, есть алгебраическая линия не выше второго порядка. Сколько общих точек могут иметь прямая и поверхность второго порядка?*

Р е ш е н и е. Пусть $\Phi(x, y, z) = 0$ — уравнение поверхности в декартовой системе координат. Подставим в него выражения для координат точки, взятые из параметрических уравнений плоскости:

$$x = x_0 + up_1 + vq_1, \quad y = y_0 + up_2 + vq_2, \quad z = z_0 + up_3 + vq_3.$$

Мы получим уравнение $F(u, v) = 0$ относительно параметров, левая часть которого будет многочленом степени не выше второй. Вспомним, что значения параметров, соответствующие какой-либо точке M на плоскости — это координаты M во внутренней системе координат плоскости $M_0, \mathbf{p}, \mathbf{q}$. Теперь утверждение становится очевидным.

Аналогично доказывается, что прямая линия может иметь одну или две общие точки с поверхностью или лежит на ней целиком. Может, конечно, и не иметь общих точек с ней.

2. *Найдите уравнение и определите вид поверхности, получаемой вращением вокруг оси аппликат прямой линии*:

а) $x = 1 + t, \ \ y = 3 + t, \ \ z = 3 + t;$

б) $x = 1 + t, \ \ y = 1 + t, \ \ z = 3 + t.$

Р е ш е н и е. а) Точка $M(x, y, z)$ — принадлежит поверхности тогда и только тогда, когда она находится на таком же расстоянии от оси Oz, что и точка $M_1(x_1, y_1, z)$ на прямой, имеющая то же самое значение z. Это условие выражается равенством $|MN| = |M_1N|$, где $N(0, 0, z)$ — основание перпендикуляра, опущенного из M на Oz, т. е. равенством $x^2 + y^2 = x_1^2 + y_1^2$. Выразим x_1 и y_1 через z исходя из уравнения прямой: $x_1 = z - 2$, $y_1 = z$. В результате уравнение поверхности можно записать так:

$$x^2 + y^2 = (z - 2)^2 + z^2.$$

Это уравнение можно преобразовать к виду $x^2 + y^2 - 2z^2 + 4z = 4$, или

$$x^2 + y^2 - 2(z^2 - 2z + 1) = 2.$$

Переносом начала координат в точку с координатами (0, 0, 1) уравнение преобразуется в виду

$$\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} - z'^2 = 1$$

— каноническому уравнению однополостного гиперболоида.

б) Повторяя те же рассуждения, получим $x_1 = y_1 = z - 2$. При этом равенство $|MN| = |M_1N|$ запишется как

$$x^2 + y^2 - 2(z-2)^2 = 0.$$

Это уравнение становится каноническим уравнением конуса, если перенести начало координат в точку $O'(0, 0, 2)$.

3. *Докажите, что прямолинейные образующие гиперболического параболоида, принадлежащие одному семейству, все параллельны некоторой плоскости.*

Решение. Пусть гиперболический параболоид задан каноническим уравнением $b^2x^2 - a^2y^2 = 2a^2b^2z$. Выпишем систему уравнений, задающую произвольную прямолинейную образующую одного из семейств:

$$\begin{cases} \lambda(bx + ay) = 2\mu ab, \\ \mu(bx - ay) = \lambda abz. \end{cases}$$

Компоненты направляющего вектора этой прямой — детерминанты

$$\begin{vmatrix} \lambda a & 0 \\ -\mu a & -\lambda ab \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} 0 & \lambda b \\ -\lambda ab & \mu b \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} \lambda b & \lambda a \\ \mu b & -\mu a \end{vmatrix},$$

т. е. $(-\lambda^2a^2b,\ \lambda^2ab^2,\ -2\lambda\mu ab)$.

При $\lambda = 0$ все компоненты равны нулю, но из первого уравнения образующей видно, что в этом случае и $\mu = 0$, а оба параметра в нуль обращаться не должны. Таким образом, в качестве направляющего вектора прямолинейной образующей может быть выбран вектор с координатами $(-a,\ b,\ -2\mu/\lambda)$, $\lambda\mu \neq 0$.

Теперь видно, что при любых ненулевых λ и μ направляющий вектор образующей ортогонален вектору $\mathbf{n}(b,\ a,\ 0)$ и потому параллелен плоскости с нормальным вектором $\mathbf{n}$.

Результат можно описать так. Плоскость $z = 0$ пересекает поверхность по паре прямых $b^2x^2 - a^2y^2 = 0$. Эти прямые, конечно, прямолинейные образующие. Плоскость, проходящая через одну из этих прямых и ось Oz, обладает тем свойством, что ей параллельны все прямолинейные образующие из того же семейства, что и образующая, через которую проведена плоскость.

Особенно нагляден результат в случае $a = b$, когда образующие в плоскости $z = 0$ взаимно перпендикулярны. Рассмотрим две перпендикулярные прямые (рис. 16) и будем передвигать одну из них вдоль другой, одновременно поворачивая на подходящий угол вокруг той же прямой. (При этом она будет оставаться перпендикулярной оси поворота.)

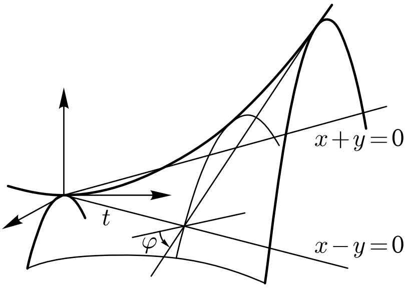

Рис. 16

Как должны быть связаны сдвиг t и угол поворота φ? Рассмотрим точку M на образующей $x=y$; $z=0$, отстоящую на t от начала координат. Ее координаты $(l,\ l,\ 0)$, где $l = t/\sqrt{2}$. Вторая образующая, проходящая через эту точку, принадлежит семейству $\lambda(x+y) = 2\mu a$; $\mu(x-y) = \lambda a z$. Подставляя координаты M, находим, что для этой образующей $\lambda/\mu = a/l$. Используя найденное выше выражение для компонент направляющего вектора образующей, получаем для данной образующей вектор, коллинеарный $(a^2,\ -a^2,\ 2l)$. Тангенс угла φ_t этого вектора с плоскостью $z=0$ равен $2l/(a^2\sqrt{2})$, или

$$\operatorname{tg}\varphi_t = \frac{t}{a^2}.$$

Сдвигая образующую $x+y=z=0$ от начала координат на t, мы должны поворачивать ее на $\operatorname{arctg}(t/a^2)$.

Поверхность, составленная из прямых линий, пересекающих фиксированную прямую (ось), называется *коноидом*. Гиперболический параболоид — один из коноидов. Каждая его образующая является осью: ее пересекают все образующие того семейства, к которому она не принадлежит.

4. *На гиперболическом параболоиде с уравнением*

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2z$$

лежат параболы: $y=0$, $x^2 = 2a^2z$ *и* $x=0$, $y^2 = -2b^2z$. *Пусть точки* A_1 *и* B_1 *на первой параболе и точки* A_2 *и* B_2 *на второй все находятся на одинаковом расстоянии от плоскости* $z=0$.

Докажите, что прямые A_1B_2, A_1A_2, B_1A_2 и B_1B_2 являются прямолинейными образующими.

Р е ш е н и е. Пусть точки находятся на расстоянии h^2 от плоскости $z = 0$. Тогда точка A_1 имеет координаты $(\sqrt{2}\,ah,\, 0, h^2)$, а B_2 — координаты $(0,\, -\sqrt{2}\,bh,\, -h^2)$. Примем A_1 за начальную точку прямой, а вектор $\overrightarrow{A_1B_2}$ — за направляющий. Уравнения прямой A_1B_2 будут следующими:

$$x = \sqrt{2}\,ah(1-t); \quad y = -\sqrt{2}\,bht; \quad z = h^2(1-2t).$$

Подставим эти значения в уравнение гиперболического параболоида:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2h^2(1-t)^2 - 2h^2t^2 = 2h^2(1-2t) = 2z.$$

Мы видим, что при любом t координаты точки на прямой удовлетворяют уравнению поверхности, т. е. прямая целиком принадлежит поверхности.

Остальные прямые лежат на поверхности в силу ее симметрии относительно плоскостей $x = 0$ и $y = 0$.

5. *Найдите проекцию линии пересечения двуполостного гиперболоида $-x^2 + y^2 - z^2 = 1$ и конуса $5x^2 - 3y^2 + 4z^2 = 0$ на плоскость $z = 0$.*

Р е ш е н и е. Линия пересечения определяется системой

$$5x^2 - 3y^2 + 4z^2 = 0, \qquad -x^2 + y^2 - z^2 = 1.$$

Если мы исключим z, т. е. найдем его из второго уравнения и подставим в первое, то получим уравнение $x^2 + y^2 = 4$. Это уравнение — следствие системы и потому определяет множество, содержащее линию пересечения. Так как в уравнение не входит z, это множество — цилиндр с образующими, параллельными вектору $\mathbf{e}_3$. Пересекая цилиндр плоскостью $z = 0$, мы получим уравнение окружности $z = 0$, $x^2 + y^2 = 4$, на которой лежит проекция. Однако проекция не совпадает с окружностью. Исключая z, мы должны были запомнить условие $z^2 = -x^2 + y^2 - 1 \geqslant 0$. Итак, проекция — две дуги окружности $x^2 + y^2 = 4$, $y^2 - x^2 \geqslant 1$ на плоскости $z = 0$.

6. *Докажите, что никакая плоскость не пересекает эллиптический параболоид по гиперболе.*

Эллиптический параболоид с уравнением
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2z$$
лежит в полупространстве, уравнение которого в канонической системе координат $z \geqslant 0$. Плоскости с уравнениями $z = c$ $(c > 0)$ пересекают параболоид по эллипсам. Плоскость $z = 0$ — по паре мнимых пересекающихся прямых. Если же плоскость не параллельна плоскости $z = 0$, то в полупространстве $z \geqslant 0$ лежит только ее полуплоскость. В этом случае линия пересечения эллиптического параболоида с плоскостью должна умещаться в полуплоскости. Гипербола, однако, в полуплоскость не помещается, так как любая прямая либо ее пересекает, либо проходит между ветвями гиперболы.

Аналитическое доказательство можно получить так: запишем уравнение параболоида в виде $b^2x^2 + a^2y^2 = 2a^2b^2z$ и подставим в это уравнение координаты точки произвольной плоскости, заданной параметрическим уравнением
$$x = x_0 + up_1 + vq_1; \quad y = y_0 + up_2 + vq_2; \quad z = z_0 + up_3 + vq_3.$$
Мы получим уравнение на параметры u и v, которое определяет линию пересечения поверхности с плоскостью во внутренней системе координат плоскости:
$$b^2(x_0 + up_1 + vq_1)^2 + a^2(y_0 + up_2 + vq_2)^2 = 2a^2b^2(z_0 + up_3 + vq_3).$$
В этом уравнении нам понадобятся только члены со вторыми степенями u и v. Выпишем эти члены:
$$u^2(b^2p_1^2 + a^2p_2^2) + 2uv(b^2p_1q_1 + a^2p_2q_2) + v^2(b^2q_1^2 + a^2q_2^2).$$
Теперь можно составить детерминант δ, определяющий тип линии:
$$\delta = \begin{vmatrix} b^2p_1^2 + a^2p_2^2 & b^2p_1q_1 + a^2p_2q_2 \\ b^2p_1q_1 + a^2p_2q_2 & b^2q_1^2 + a^2q_2^2 \end{vmatrix} = a^2b^2(p_1q_2 - p_2q_1)^2.$$
Детерминант неотрицателен, следовательно, линия пересечения не может быть линией гиперболического типа.

Глава IV § 1

1. *Нарисуйте три крестика и четыре нолика.* а) *Как должны идти стрелки от крестиков к ноликам, чтобы получилось отображение множества крестиков в множество ноликов? Пусть стрелки определяют отображение.* б) *Можно ли провести их так, чтобы каждый образ имел единственный прообраз?* в) *Можно ли провести их так, чтобы каждый нолик имел прообраз?* г) *Ответьте на те же вопросы, если крестиков — четыре, а ноликов — три.* д) *При каком числе ноликов возможно взаимно однозначное отображение множества из трех крестиков?*

Р е ш е н и е. а) По определению отображения в каждом крестике должна начинаться одна и только одна стрелка. Например, так

$$\begin{array}{cccccc} \times & & \times & & \times & \\ & \searrow & \downarrow & \swarrow & & \\ \circ & & \circ & & \circ & \circ \end{array}$$

б) Да. Никакие две стрелки не должны иметь общего конца (отображение инъективно):

$$\begin{array}{ccccc} \times & \times & \times & & \\ \downarrow & \downarrow & & \searrow & \\ \circ & \circ & \circ & & \circ \end{array}$$

в) Нет, так как крестиков меньше, а две стрелки не могут иметь общего начала.

г) Если крестиков — четыре, а ноликов — три, то отображение не может быть инъективным, но может быть сюръективным, например, таким:

$$\begin{array}{ccccc} \times & \times & \times & & \times \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \swarrow & \\ \circ & \circ & \circ & & \end{array}$$

д) При трех ноликах.

$$\begin{array}{ccc} \times & \times & \times \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \circ & \circ & \circ \end{array}$$

2. *Пусть преобразования* f, g *и* h *имеют обратные. Найдите преобразование, обратное к их произведению* fgh.

Решение.

$$(\mathsf{fgh})^{-1} = (\mathsf{f}(\mathsf{gh}))^{-1} = (\mathsf{gh})^{-1}\mathsf{f}^{-1} = \mathsf{h}^{-1}\mathsf{g}^{-1}\mathsf{f}^{-1}.$$

3. *Напишите формулы, задающие осевую симметрию относительно прямой, имеющей уравнение* $x + y = 5$ *в декартовой прямоугольной системе координат.*

Решение. Выберем на прямой начальную точку $M_0(5, 0)$ и нормальный вектор $\mathbf{n}(1,\ 1)$. Найдем координаты образа M^* точки $M(x, y)$. Для этого возьмем проекцию вектора $\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OM_0}$ на вектор $\mathbf{n}$. Так как координаты этого вектора равны $x - 5$ и y, мы находим

$$\mathbf{Пр}_{\mathbf{n}}(\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OM_0}) = \frac{(\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OM_0},\ \mathbf{n})}{|\mathbf{n}|^2}\mathbf{n} = \frac{x - 5 + y}{2}\mathbf{n}.$$

Точка M^* имеет радиус-вектор

$$\overrightarrow{OM^*} = \overrightarrow{OM} - 2\mathbf{Пр}_{\mathbf{n}}(\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OM_0}).$$

Поэтому координаты точки M^* вычисляются так:

$$x^* = x - (x + y - 5) = 5 - y,$$
$$y^* = y - (x + y - 5) = 5 - x.$$

Это и есть ответ.

Глава IV § 2

1. *Являются ли аффинными преобразования, задаваемые формулами*

а) $\begin{aligned} x^* &= x + y - 1, \\ y^* &= x - y + 1, \end{aligned}$ б) $\begin{aligned} x^* &= x - y - 1, \\ y^* &= -x + y + 1. \end{aligned}$

Р е ш е н и е. Дело сводится к вычислению детерминантов, составленных из коэффициентов формул, задающих преобразования.

а)
$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0.$$

Следовательно, преобразование аффинное.

б) Аналогично, для второго преобразования

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Следовательно, преобразование не является аффинным.

2. *Найдите образ прямой $x - y = 2$ при преобразовании* (а) *из задачи* 1.

Р е ш е н и е. Общий способ решения подобных задач состоит в следующем. Решаем уравнения, задающие преобразование, относительно координат x и y исходной точки M и подставляем результат в уравнение той линии, образ которой мы хотим найти. В результате мы получаем условие на координаты x^* и y^* образа точки M, равносильное тому, что M лежит на линии. Это и есть уравнение образа линии.

Однако в данном случае ответ можно получить проще: представим уравнение прямой в виде $x - y + 1 = 3$ и заметим, что это равносильно условию $y^* = 3$.

3. *Докажите, не прибегая к координатой записи, что ортогональное преобразование взаимно однозначно.*

Р е ш е н и е. Нам нужно доказать, что при ортогональном преобразовании f каждая точка плоскости имеет единственный прообраз. Пусть точка A — вершина прямого угла прямоугольного треугольника ABC, а $A^* = \mathsf{f}(A)$, $B^* = \mathsf{f}(B)$ и $C^* = \mathsf{f}(C)$.

Рассмотрим произвольную точку M. Ее расположение относительно точек A^*, B^* и C^* однозначно определяется длиной отрезка A^*M и углами $\angle B^*A^*M$ и $\angle C^*A^*M$. Определим точку N следующими условиями: $|AN| = |A^*M|$, $\angle BAN = \angle B^*A^*M$ и $\angle CAN = \angle C^*A^*M$. При ортогональном преобразовании сохраняются не только длины отрезков, но и величины углов. Поэтому точка N перейдет в точку M, иначе говоря, точка M имеет прообраз N.

Ясно, что прообраз может быть только один. Действительно, какова бы ни была точка N_1, отличная от N, ее образ $\mathsf{f}(N_1)$

должен быть на отличном от нуля расстоянии $|NN_1|$ от точки $M = \mathsf{f}(N)$ и не может совпадать с M.

4. *Точка A называется неподвижной точкой преобразования* f, *если* $\mathsf{f}(A) = A$. *Найдите неподвижные точки преобразования* (*а*) *из задачи 1*.

Р е ш е н и е. Координаты неподвижной точки должны удовлетворять условиям

$$x = x + y - 1, \quad y = x - y + 1.$$

Поэтому $y = 1$ и $x = y = 1$. Преобразование имеет единственную неподвижную точку с координатами $(1, 1)$.

5. *Докажите, что линейное преобразование, не являющееся тождественным, либо имеет одну единственную неподвижную точку, либо имеет прямую, состоящую из неподвижных точек, либо не имеет их совсем.*

Р е ш е н и е. Координаты неподвижных точек должны удовлетворять системе линейных уравнений $x = a_1x + b_1y + c_1$, $y = a_2x + b_2y + c_2$, т. е.

$$(a_1 - 1)x + b_1y + c_1 = 0, \quad a_2x + (b_2 - 1)y + c_2 = 0.$$

Поэтому результат зависит от детерминанта

$$\begin{vmatrix} a_1 - 1 & b_1 \\ a_2 & b_2 - 1 \end{vmatrix}.$$

Если он не равен нулю, то преобразование имеет единственную неподвижную точку, В противном случае, если система несовместна, неподвижных точек нет. Если же детерминант равен нулю и система совместна, то (поскольку для нетождественного преобразования хоть один из коэффициентов $a_1 - 1, b_1, a_2$ или $b_2 - 1$ отличен от нуля) система равносильна одному из составляющих ее уравнений, и все неподвижные точки заполняют прямую линию.

Все эти возможности действительно осуществляются: поворот плоскости имеет одну единственную неподвижную точку, параллельный перенос неподвижных точек не имеет, а при сжатии к прямой линии все ее точки и только они неподвижны.

6. *Как изменятся формулы, задающие линейное преобразование, если начало координат перенести в неподвижную точку, не меняя базисных векторов?*

Решение. Поскольку базисные векторы не меняются, не меняются и их образы, а значит, коэффициенты a_1, b_1, a_2 и b_2 остаются неизменными. Образ начала координат теперь совпадает с началом координат, следовательно, в новой системе координат $c_1 = c_2 = 0$.

7. *Линейное преобразование в системе координат* O, $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ *задано формулами*

$$x^* = a_1x + b_1y + c_1, \quad y^* = a_2x + b_2y + c_2.$$

Какими формулами оно задается в системе координат а) O, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_1$; б) O, $\mathbf{e}_1$, $2\mathbf{e}_2$.

Решение. а) Если базисные векторы меняются местами, то меняются местами их образы, а, кроме того, у всех векторов меняются местами координаты. Поэтому в новой системе координат формулы будут следующими:

$$x^* = b_2x + a_2y + c_2, \quad y^* = b_1x + a_1y + c_1.$$

б) При умножении второго базисного вектора на 2 его образ также умножается на 2. Кроме того, при этом у каждого вектора вторая координата уменьшается вдвое. Поэтому в новой системе координат формулы будут следующими:

$$x^* = a_1x + 2b_1y + c_1, \quad y^* = \frac{1}{2}\,a_2x + b_2y + \frac{1}{2}\,c_2.$$

8. *Докажите, что линейное преобразование, задаваемое в декартовой прямоугольной системе координат формулами*

$$x^* = x\,\cos\varphi + y\,\sin\varphi, \quad y^* = x\,\sin\varphi - y\,\cos\varphi,$$

— осевая симметрия. Найдите уравнение оси симметрии.

Решение. Ось симметрии — прямая из неподвижных точек. Проверим, существует ли такая прямая у данного преобразования. Воспользуемся для этого системой уравнений, полученной при решении задачи 5. В нашем случае система имеет вид

$$(\cos\varphi - 1)\,x + \sin\varphi\,y = 0, \quad \sin\varphi\,x - (\cos\varphi + 1)\,y = 0,$$

или

$$-2\sin^2\frac{\varphi}{2}\,x + 2\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}\,y = 0, \quad 2\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}\,x - 2\cos^2\frac{\varphi}{2}\,y = 0.$$

Мы видим, что оба уравнения пропорциональны уравнению

$$\sin\frac{\varphi}{2}\,x - \cos\frac{\varphi}{2}\,y = 0,$$

которое и есть уравнение прямой, состоящей из неподвижных точек. Это прямая, проходящая через начало координат с направляющим вектором $\left(\cos\dfrac{\varphi}{2}, \sin\dfrac{\varphi}{2}\right)$.

Рассмотрим точку A на перпендикуляре к найденной прямой, проходящем через начало координат, находящуюся на расстоянии 1 от прямой: $A\left(-\sin\dfrac{\varphi}{2}, \cos\dfrac{\varphi}{2}\right)$. При рассматриваемом преобразовании она перейдет в точку A^* с координатами

$$x^* = -\sin\frac{\varphi}{2}\cos\varphi + \cos\frac{\varphi}{2}\sin\varphi = \sin\left(\varphi - \frac{\varphi}{2}\right) = \sin\frac{\varphi}{2},$$

$$y^* = -\sin\frac{\varphi}{2}\sin\varphi - \cos\frac{\varphi}{2}\cos\varphi = -\cos\left(\varphi - \frac{\varphi}{2}\right) = -\cos\frac{\varphi}{2}.$$

Мы видим, что точка A^* лежит на том же перпендикуляре к прямой, состоящей из неподвижных точек, на расстоянии 1 от нее, т. е. симметрична с точкой A относительно этой прямой.

Теперь, на основании того что образы трех точек, не лежащих на одной прямой, определяют аффинное преобразование однозначно, мы можем утверждать, что это преобразование — действительно осевая симметрия относительно найденной прямой.

9. *Может ли случиться, что произведение двух линейных преобразований — аффинное, если одно из них — не аффинное?*

Р е ш е н и е. Не может. Действительно, пусть f — линейное, но не аффинное преобразование. Тогда образы базисных векторов коллинеарны, и, как нетрудно проверить, образы всех точек плоскости лежат на прямой, проходящей через образ начала координат с направляющим вектором, коллинеарным образам базисных векторов. (Может, конечно, быть, что f переводит все точки плоскости в одну, но и в этом случае тоже образы всех точек лежат на прямой.) Поэтому, каковы бы ни были преобразования g и h, при преобразованиях gf и fh образы всех точек плоскости лежат на некоторой прямой линии, что невозможно для аффинного преобразования.

10. *Пусть аффинное преобразование в декартовой прямоугольной системе координат задано формулами*

$$x^* = x + by + c_1, \quad y^* = ax + c_2.$$

Найдите векторы, ортогональные их образам.

Р е ш е н и е. Если вектор перпендикулярен своему образу, то его координаты α, β удовлетворяют равенству $\alpha\alpha^* + \beta\beta^* = 0$. В нашем случае это приводит к уравнению $\alpha(\alpha + b\beta) + \beta(a\alpha) =$

$= 0$ или $\alpha^2 + (a+b)\alpha\beta = 0$. Это уравнение удовлетворяется при $\alpha = 0$ и любом β, и значит, условию удовлетворяют все векторы с координатами $(0, \beta)$. Если же $a + b \neq 0$, решениями также будут векторы с координатами $(\beta(a+b),\ -\beta)$.

11. *Дан треугольник с вершинами* $A(1,\,0)$, $B\left(-\frac{1}{2},\,1\right)$ *и* $C\left(-\frac{1}{2},\,-1\right)$. *Найдите линейное преобразование, переводящее каждую вершину в середину противоположной стороны.*

Решение. Иначе говоря, каждая вершина переходит в основание медианы, начинающейся в этой вершине. Пусть точка P — точка пересечения медиан $\triangle ABC$. Она определяется равенством $\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} = \mathbf{0}$, из которого следует, что при любом аффинном преобразовании $\overrightarrow{P^*A^*} + \overrightarrow{P^*B^*} + \overrightarrow{P^*C^*} = \mathbf{0}$. Отсюда видно, что точка пересечения медиан треугольника переходит в точку пересечения медиан его образа. Если A^*, B^* и C^* — середины сторон $\triangle ABC$, то точки пресечения медиан треугольников $\triangle ABC$ и $\triangle A^*B^*C^*$ совпадают. Поэтому точка P при искомом преобразовании остается неподвижной: $P^* = P$, и два неколлинеарных вектора $\mathbf{a} = \overrightarrow{PA}$ и $\mathbf{b} = \overrightarrow{PB}$ отображаются в $\mathbf{a}^* = \overrightarrow{PA^*} = -\frac{1}{2}\,\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}^* = \overrightarrow{PB^*} = -\frac{1}{2}\,\mathbf{b}$. Отсюда следует, что таким же образом преобразуются радиус-векторы всех точек, и преобразование — гомотетия с коэффициентом $-\frac{1}{2}$ и центром P.

Для данного в задаче треугольника точка P совпадает с началом координат O, так как $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \mathbf{0}$. Следовательно, нужная нам гомотетия задается уравнениями

$$\mathbf{x}^* = -\frac{1}{2}\,x; \qquad y^* = -\frac{1}{2}\,y.$$

12. *Докажите, что преобразование из задачи 8 есть произведение* gf *осевой симметрии* f *относительно оси абсцисс и поворота* g *на угол* φ *вокруг начала координат. Какое преобразование получится, если* f *и* g *перемножить в другом порядке?*

Решение. Осевая симметрия f переводит точку $M(x, y)$ в точку M^* с координатами

$$x^* = x, \qquad y^* = -y,$$

а поворот g переводит M^* в точку M^{**} с координатами

$$x^{**} = x^* \cos\varphi - y^* \sin\varphi, \quad y^{**} = x^* \sin\varphi + y^* \cos\varphi.$$

После подстановки мы получаем зависимость координат M^{**} от координат M:

$$x^{**} = x\cos\varphi + y\sin\varphi, \quad y^{**} = x\sin\varphi - y\cos\varphi.$$

Это как раз формулы, задающие преобразование из задачи 8.

Произведение fg определяется формулами, получаемыми подстановкой

$$x^* = x\cos\varphi - y\sin\varphi, \quad y^* = x\sin\varphi + y\cos\varphi$$

в

$$x^{**} = x^*, \qquad y^{**} = -y^*.$$

Результат будет таким:

$$x^{**} = x\cos\varphi - y\sin\varphi, \quad y^{**} = -x\sin\varphi - y\cos\varphi.$$

Заменяя φ на $-\varphi$, мы с помощью результата задачи 8 увидим, что fg — осевая симметрия относительно прямой с уравнением

$$-x\sin\frac{\varphi}{2} - y\cos\frac{\varphi}{2} = 0,$$

составляющей с осью абсцисс угол $-\varphi/2$.

13. *Пусть аффинное преобразование имеет одну единственную неподвижную точку. Докажите, что в этом случае каждая инвариантная прямая (если такие прямые существуют) проходит через эту точку.*

Решение. Для доказательства подумаем, обязательно ли на инвариантной прямой есть неподвижная точка и сколько их может быть. Пусть прямая задана векторным параметрическим уравнением $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_0} + \mathbf{a}t$. Образ точки M удовлетворяет уравнению $\overrightarrow{O^*M^*} = \overrightarrow{O^*M_0^*} + \mathbf{a}^*t$. Прибавляя $\overrightarrow{OO^*}$ к обеим частям равенства, мы получим векторное параметрическое уравнение образа прямой относительно начала O:

$$\overrightarrow{OM^*} = \overrightarrow{OM_0^*} + \mathbf{a}^*t.$$

Если прямая инвариантна, то M^* — точка этой же прямой, и существует значение параметра $t = \mu$, при котором

$\overrightarrow{OM_0^*} = \overrightarrow{OM_0} + \mu\mathbf{a}$. Кроме того, $\mathbf{a}^*$ коллинеарен $\mathbf{a}$, и существует коэффициент λ, при котором $\mathbf{a}^* = \lambda\mathbf{a}$. Таким образом,

$$\overrightarrow{OM^*} = \overrightarrow{OM_0} + (\mu + \lambda t)\mathbf{a},$$

т. е. образ $M^*(t^*)$ точки $M(t)$ определяется на прямой значением параметра

$$t^* = \mu + \lambda t.$$

Теперь ясно, что значения параметра неподвижных точек на инвариантной прямой должны удовлетворять уравнению

$$(1 - \lambda)t = \mu.$$

Если $\lambda \neq 1$, то на прямой существует одна единственная неподвижная точка. Если $\lambda = 1$, то при $\mu = 0$ все точки прямой неподвижны, а при $\mu \neq 0$ неподвижных точек нет.

Может ли в нашем случае оказаться, что $\lambda = 1$? Иначе говоря, если на плоскости одна и только одна неподвижная точка, то может ли найтись вектор $\mathbf{a}$, такой что $\mathbf{a}^* = \mathbf{a}$? Очевидно, что нет. Действительно, вся прямая, проходящая через неподвижную точку в направлении такого вектора, должна состоять из неподвижных точек.

В результате, если неподвижная точка на плоскости только одна, то каждая инвариантная прямая содержит неподвижную точку и потому все инвариантные прямые проходят через единственную неподвижную точку плоскости.

Глава IV § 3

1. *Найдите площадь треугольника, если его стороны лежат на прямых с уравнениями $x + y = 1$, $x - y = -1$ и $2x + y = 2$ в декартовой прямоугольной системе координат.*

Р е ш е н и е. Сделаем аффинное преобразование, которое переведет две из заданных прямых в оси координат:

$$x^* = x - y + 1, \quad y^* = x + y - 1.$$

Найдем уравнение образа третьей прямой. Для этого подставим в ее уравнение выражения координат точки $M(x, y)$ через координаты ее образа:

$$\mathbf{x} = \frac{1}{2}\,(x^* + y^*), \quad y = \frac{1}{2}\,(-x^* + y^*) + 1.$$

Мы получим уравнение $x^* + 3y^* = 2$. Эта прямая пересекает оси координат в точках $A\left(0, \dfrac{2}{3}\right)$ и $(2, 0)$. Площадь треугольника AOB (где O — начало координат) равна

$$S^* = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} \end{vmatrix} = \frac{2}{3}.$$

Нам нужна площадь S прообраза этого треугольника. Вспомним, что

$$\frac{S^*}{S} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2.$$

Следовательно, $S = \dfrac{1}{3}$.

2. *Пусть при аффинном преобразовании точки A, B и C перешли в точки A^*, B^* и C^*. Докажите, что точка пересечения медиан $\triangle ABC$ перейдет в точку пересечения медиан $\triangle A^*B^*C^*$.*

Решение. Середины сторон треугольника ABC переходят в середины сторон его образа. Поэтому медианы треугольника $A^*B^*C^*$ — образы медиан $\triangle ABC$.

В задаче 11 § 2 решался фактически тот же вопрос. Но там наши средства были ограничены, и решение получилось более длинным.

3. *Будем говорить, что аффинное преобразование растягивает вектор* $\mathbf{a}$ *в* α *раз, если* $|\mathbf{a}^*| = \alpha|\mathbf{a}|$. *Для преобразования, заданного в декартовой прямоугольной системе координат формулами*

$$x^* = 4x + 7y, \quad y^* = 8x + y,$$

найдите векторы, для которых растяжение а) *максимально,* б) *минимально.*

Решение. Все коллинеарные между собой векторы растягиваются в одном и том же отношении, поэтому достаточно сравнить между собой отношения, в которые растягиваются всевозможные векторы длины 1. При аффинном преобразовании окружность радиуса 1 преобразуется в эллипс с полуосями a и b. При этом очевидно, что в максимальное число раз a растянется тот из радиусов окружности, который перейдет в большую полуось эллипса, а минимальное растяжение b будет у того радиуса, который перейдет в малую полуось. Как было показано при доказательстве предложения 7 (см. К. § 3 гл. V), эти радиусы перпендикулярны. Следовательно, нам следует искать два перпендикулярных направления α, β и $-\beta, \alpha$, которые после преобразования перейдут во взаимно перпендикулярные направления.

При заданном нам преобразовании вектор $\mathbf{a}(\alpha, \beta)$ перейдет в вектор $\mathbf{a}^*$ с координатами $4\alpha + 7\beta$ и $8\alpha + \beta$, а вектор $\mathbf{b}(-\beta, \alpha)$ перейдет в $\mathbf{b}^*$, имеющий координаты $-4\beta + 7\alpha$ и $-8\beta + \alpha$. Поэтому условие $(\mathbf{a}^*, \mathbf{b}^*) = 0$ запишется равенством

$$(4\alpha + 7\beta)(-4\beta + 7\alpha) + (8\alpha + \beta)(-8\beta + \alpha) = \\ = 36\alpha^2 - 30\alpha\beta - 36\beta^2 = 0.$$

Угловые коэффициенты прямых, направленных вдоль $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$, удовлетворяют уравнению

$$6k^2 + 5k - 6 = 0,$$

корни которого $k_1 = 2/3$ и $k_2 = -3/2$. Итак, компоненты векторов, получающих минимальное и максимальное растяжение, равны $(3, 2)$ и $(-2, 3)$. Для того чтобы выяснить, какому из них соответствует максимальное растяжение, а какому — минимальное, нужно найти величины этих растяжений. Дробь

$$\frac{(4\alpha + 7\beta)^2 + (8\alpha + \beta)^2}{\alpha^2 + \beta^2}$$

для первого вектора равна 104, а для второго — 26. Таким образом, вектор $\mathbf{a}(3, 2)$ растягивается в $\sqrt{104} = 2\sqrt{26}$ раз, а вектор $\mathbf{b}(-2, 3)$ — в $\sqrt{26}$ раз.

4. *Пусть прямая касается линии второго порядка. Докажите, что при произвольном аффинном преобразовании образ прямой касается образа линии.*

Р е ш е н и е. Очевидно, что вопрос имеет смысл только для нераспадающихся линий — эллипса, гиперболы и параболы. Для остальных линий, если касательная определена, она совпадает с прямой, входящей в состав линии.

Направления, сопряженные относительно линии второго порядка, переходят в направления, сопряженные относительно ее образа. Асимптотические направления не имеют сопряженных, поэтому неасимптотическое направление не может перейти в асимптотическое. Касательная — это прямая неасимптотического направления, имеющая с линией единственную общую точку. Поэтому она должна перейти в прямую, касающуюся образа линии.

5. *Докажите, что вершины ромба, описанного около эллипса, лежат на его осях симметрии.*

Р е ш е н и е. Переведем каким-либо аффинным преобразованием эллипс в окружность. Центр эллипса перейдет в центр окружности, и диаметры эллипса — в диаметры окружности. Ромб, как и всякий параллелограмм, перейдет в параллелограмм. Этот параллелограмм, в силу результата задачи 4, будет описан около окружности и, следовательно, тоже будет ромбом. Диагонали ромба, описанного около окружности, — два ее перпендикулярных (и потому сопряженных) диаметра. Поэтому их прообразы — диагонали исходного ромба — сопряженные диаметры эллипса. Но они, кроме того, перпендикулярны. Следовательно они являются осями симметрии эллипса.

6. *Представьте как произведение двух осевых симметрий* а) *параллельный перенос на вектор* **a**, б) *поворот на угол* φ *вокруг точки* O.

Р е ш е н и е. а) Произведение осевых симметрий, оси которых непараллельны, имеет неподвижную точку. Следовательно, если параллельный перенос представлен как произведение осевых симметрий, оси их параллельны. В каждой из осевых симметрий точка сдвигается в направлении, перпендикулярном оси. Поэтому оси должны быть перпендикулярны вектору **a**.

Выберем декартову прямоугольную систему координат, ось абсцисс которой сонаправлена с **a**, и рассмотрим произведение осевых симметрий относительно оси ординат и относительно прямой $x = h$, $h > 0$. Они задаются соответственно уравнениями

$$x' = -x, \quad y' = y \quad \text{и} \quad x'' = 2h - x', \quad y'' = y.$$

Действительно, при втором преобразовании $(x'' + x')/2 = h$. Произведение этих симметрий будет преобразованием $x'' = x + 2h$, $y'' = y$, которое является параллельным переносом на $2h$ вдоль оси абсцисс. При $|\mathbf{a}| = 2h$ это преобразование — параллельный перенос на **a**.

Осью ординат здесь может быть произвольная прямая, перпендикулярная **a**. Поэтому мы можем заключить, что параллельный перенос на **a** — произведение симметрий относительно любых двух прямых, которые перпендикулярны **a** и расположены на расстоянии $|\mathbf{a}|/2$ одна от другой. При этом предполагается, что ось второй симметрии сдвинута относительно оси первой в направлении **a**.

б) При повороте вокруг точки O эта точка остается неподвижной. Следовательно, если поворот представлен как произведение осевых симметрий, оси должны пересекаться в точке O. Выберем декартову прямоугольную систему координат с началом в точке O и рассмотрим произведение осевой симметрии относительно оси абсцисс и осевой симметрии относительно прямой, составляющей с осью абсцисс угол θ. Первая задается уравнениями $x' = x$, $y' = -y$. При симметрии относительно прямой $x \sin\theta - y\cos\theta = 0$ точка $M'(x', y')$ перейдет точку $M''(x'', y'')$, такую что

$$\overrightarrow{OM''} = \overrightarrow{OM'} - 2\mathbf{Пр}_{\mathbf{n}}\overrightarrow{OM'},$$

где $\mathbf{n}$ — нормальный вектор прямой с координатами $(\sin\theta, -\cos\theta)$. Вычислим

$$\mathbf{Пр}_{\mathbf{n}}\overrightarrow{OM'} = (x'\sin\theta - y'\cos\theta)\mathbf{n}.$$

Теперь видно, что наша осевая симметрия задается уравнениями

$$x'' = x' - 2(x'\sin\theta - y'\cos\theta)\sin\theta = x'(1 - 2\sin^2\theta) + y'(2\cos\theta\sin\theta),$$
$$y'' = y' + 2(x'\sin\theta - y'\cos\theta)\cos\theta = x'(2\cos\theta\sin\theta) + y'(1 - 2\cos^2\theta),$$

или

$$x'' = x'\cos 2\theta + y'\sin 2\theta, \qquad y'' = x'\sin 2\theta - y'\cos 2\theta.$$

Произведение симметрий записывается уравнениями

$$x'' = x\cos 2\theta - y\sin 2\theta, \qquad y'' = x\sin 2\theta + y\cos 2\theta,$$

т. е. является поворотом на угол 2θ. Вспомним, что прямоугольная система координат выбиралась с единственным условием — чтобы начало координат было в точке O. Направления осей были выбраны произвольною Отсюда мы можем сделать вывод, что поворот плоскости на угол φ вокруг точки O может быть представлен как произведение двух осевых симметрий, оси которых пересекаются в точке O под углом $\theta = \varphi/2$, при том условии, что угол от оси первой симметрии до оси второй отсчитывается в ту же сторону, что и угол φ.

Другое решение этой задачи мы получим, если вспомним задачи 8 и 12 § 2. Там осевая симметрия h была разложена в произведение gf осевой симметрии f относительно оси абсцисс и поворота g на угол φ вокруг начала координат. Но из $\mathsf{h} = \mathsf{gf}$ следует $\mathsf{g} = \mathsf{hf}^{-1}$ или $\mathsf{g} = \mathsf{hf}$ (поскольку для осевой симметрии

$\mathsf{f}^{-1} = \mathsf{f}$). Это и есть разложение поворота в произведение двух осевых симметрий.

7. *Представьте сжатие к оси абсцисс декартовой прямоугольной системы координат как произведение параллельного переноса на* $\mathbf{a}(0, a)$ *и сжатия к другой прямой.*

Решение. Нам нужно исходное сжатие h в отношении λ к оси абсцисс представить как произведение gf, где f — параллельный перенос, а g — сжатие к прямой. Заметим, что преобразование g однозначно определено, поскольку f имеет обратное и $\mathsf{g} = \mathsf{hf}^{-1}$. Итак, найдем g.

Преобразования f^{-1} и h задаются соответственно формулами

$$x' = x, \quad y' = y - a, \quad \text{и} \quad x'' = x', \quad y'' = \lambda y'.$$

Подставляя, получаем координатную запись преобразования g:

$$x'' = x, \quad y'' = \lambda(y - a) = \lambda y - \lambda a.$$

Выясним его геометрический смысл. Для этого рассмотрим сжатие к прямой $y = c$ в отношении λ:

$$x^* = x, \quad y^* - c = \lambda(y - c).$$

Преобразуем второе уравнение: $y^* = \lambda y + (1 - \lambda)c$. Это совпадает с написанным выше уравнением для h, если $\lambda a = (\lambda - 1)c$. Для каждого a найдется такое $c = \lambda a/(\lambda - 1)$, так как мы можем считать, что $\lambda \neq 1$.

Итак, сжатие к оси абсцисс в отношении λ представлено как произведение параллельного переноса на a вдоль оси ординат и сжатия в том же отношении λ к прямой $y = \lambda a/(\lambda - 1)$.

8. *Может ли произведение двух поворотов плоскости быть параллельным переносом?*

Решение. Да, конечно. Поворот на нулевой угол — это параллельный перенос на нулевой вектор. Но этот случай мы оставим в стороне. Если мы хотим, чтобы произведение двух поворотов было ненулевым параллельным переносом, то нужно, чтобы, во-первых, повороты производились вокруг различных точек (иначе у произведения будет неподвижная точка), а во-вторых, сумма углов первого и второго поворотов должна быть равна нулю. Посмотрим, достаточно ли этих условий.

Выберем декартову прямоугольную систему координат и рассмотрим поворот вокруг точки $Q(a, b)$ на угол φ и поворот вокруг начала координат на угол $-\varphi$. Получим координатную запись первого поворота. Для этого заметим, что базисные векторы поворачиваются на φ независимо от того, вокруг какой точки осуществляется поворот. Поэтому преобразование будет записано формулами

$$x^* = x\cos\varphi - y\sin\varphi + c_1; \qquad y^* = x\sin\varphi + y\cos\varphi + c_2$$

при каких-то c_1 и c_2. Теперь вспомним, что преобразование имеет неподвижную точку $Q(a,\, b)$, и потому $a = a\cos\varphi - b\sin\varphi + c_1$, а $b = a\sin\varphi + b\cos\varphi + c_2$. Отсюда

$$c_1 = a(1-\cos\varphi) + b\sin\varphi; \quad c_2 = b(1-\cos\varphi) - a\sin\varphi. \tag{1}$$

Выполним сначала поворот на угол $-\varphi$ вокруг начала координат:

$$x' = x\cos\varphi + y\sin\varphi, \quad y' = -x\sin\varphi + y\cos\varphi,$$

а затем поворот на φ вокруг Q:

$$x^* = x'\cos\varphi - y'\sin\varphi + c_1, \quad y^* = x'\sin\varphi + y'\cos\varphi + c_2.$$

После подстановки и упрощения получаем

$$x^* = x + c_1, \quad y^* = y + c_2,$$

что является записью параллельного переноса на вектор $\mathbf{p}$ с координатами

$$(c_1,\, c_2) = (a - a\cos\varphi + b\sin\varphi,\, b - a\sin\varphi - b\cos\varphi).$$

Заметим, что компоненты $\mathbf{p}$ можно найти также и следующим образом: при повороте на угол $-\varphi$ вокруг начала координат O точка O остается на месте, а при повороте на угол φ вокруг Q точка O перемещается в точку O^* с координатами $(c_1,\, c_2)$.

Стоит подумать над таким вопросом: пусть расстояние $|OQ|$ фиксировано. При каком значении φ получается максимальный по модулю перенос?

Глава V § 1

1. *Дана матрица*

$$\begin{Vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{Vmatrix}.$$

а) *Выпишите подматрицу, расположенную в строках* 1 *и* 3 *и столбцах* 1 *и* 3. б) *Сколько квадратных подматриц второго порядка имеет данная матрица*? в) *Сколько всего подматриц она имеет*?

Р е ш е н и е. а)

$$\begin{Vmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 9 \end{Vmatrix}.$$

б) Вы можете вычеркнуть любую строку из трех и независимо от этого любой столбец из трех. Таким образом, имеется всего $3 \times 3 = 9$ возможностей.

в) 48, не считая ее самой. Действительно, имеются

$$\begin{array}{lll}
9 & \text{подматриц размеров} & 1 \times 1, \\
9 & \text{подматриц размеров} & 1 \times 2, \\
9 & \text{подматриц размеров} & 2 \times 1, \\
9 & \text{подматриц размеров} & 2 \times 2, \\
3 & \text{подматрицы размеров} & 2 \times 3, \\
3 & \text{подматрицы размеров} & 3 \times 2, \\
3 & \text{подматрицы размеров} & 3 \times 1, \\
3 & \text{подматрицы размеров} & 1 \times 3.
\end{array}$$

Более общим образом можно рассуждать так. Подматрица может иметь 1, 2 или 3 строки. Поэтому, если C_3^i обозначает число сочетаний из 3 по i, то строки подматрицы можно выбрать $\mathrm{C}_3^1 + \mathrm{C}_3^2 + \mathrm{C}_3^3$ способами. Независимо тем же числом способов можно выбрать столбцы. Поэтому общее число подматриц равно $(\mathrm{C}_3^1 + \mathrm{C}_3^2 + \mathrm{C}_3^3)^2 = 49$. Это число следует уменьшить на 1, если мы не будем относить матрицу к числу ее подматриц.

2. *Даны матрицы*

$$A = \begin{Vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{Vmatrix}, \quad B = \begin{Vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{Vmatrix}.$$

Можно ли сложить матрицы а) A *и* B, б) A^T *и* B, в) A *и* B^T, г) A^T *и* B^T?

Решение. Слагаемые должны иметь одинаковое число строк и одинаковое число столбцов. Поэтому ответ а) Нет, б) Да, в) Да, г) Нет.

3. *Даны матрицы*

$$A = \begin{Vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{Vmatrix}, \quad B = \begin{Vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{Vmatrix}, \quad C = \begin{Vmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 5 \end{Vmatrix}.$$

Вычислите матрицу $2A + 3B - C$.

Решение.

$$\begin{Vmatrix} 2\cdot 1 + 3\cdot 2 - 4 & 2\cdot 1 + 3\cdot 1 - 3 \\ 2\cdot 1 - 3\cdot 1 - 1 & 2\cdot 2 + 3\cdot 1 - 5 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 4 & 2 \\ -2 & 2 \end{Vmatrix} = 2B.$$

4. *С какими коэффициентами раскладывается матрица*

$$D = \begin{Vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{Vmatrix}$$

по матрицам A *и* B *и* C *из предыдущей задачи*?

Решение. Обозначим искомые коэффициенты через x, y и z. Тогда для четырех элементов матрицы мы должны написать уравнения

$$\begin{aligned} &x + 2y + 4z = 1, \\ &x + y + 3z = 2, \\ &x - y + z = 4, \\ &2x + y + 5z = 5. \end{aligned}$$

Здесь видно, что четвертое уравнение совпадает с суммой первого и третьего и по этой причине может быть отброшено. Нам достаточно решить систему из трех первых уравнений. Вычислим детерминант матрицы из коэффициентов этой системы:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Это означает, что нормальные векторы трех плоскостей, соответствующих уравнениям системы, компланарны. Поэтому либо плоскости не имеют общей точки, а система — решения, либо все три плоскости имеют общую прямую.

Рассмотрим прямую, определяемую вторым и третьим уравнениями. Примем z за параметр, $z = t$, и решим второе и третье уравнения $x + y = 2 - 3t$, $x - y = 4 - t$ относительно x и y. Мы получим $x = 3 - 2t$, $y = -1 - t$. Таким образом, параметрические уравнения прямой

$$x = 3 - 2t, \quad y = -1 - t, \quad z = t. \tag{1}$$

Необходимо проверить, удовлетворяют ли точки прямой первому уравнению. Результат подстановки координат произвольной точки прямой в левую часть первого уравнения $3 - 2t - 2(1 + t) + 4t$ действительно для всех t равен 1. Следовательно, формулы (1) дают решение системы из четырех уравнений при любом t. Мы получаем ответ:

$$D = (3 - 2t)A - (1 + t)B + tC = 3A - B - (2A + B - C)t,$$

где t произвольно.

Это и неудивительно: матрицы A, B и C линейно зависимы: из результата задачи 3 видно, что $2A + B - C = O$. Поэтому, каково бы ни было t, к правой части равенства $D = 3A - B$ фактически прибавляется O.

5. *Можно ли разложить матрицу* $\begin{Vmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 9 \end{Vmatrix}$ *по матрицам* а) *A и B из задачи* 3, б) *A и B и C из задачи* 3?

Р е ш е н и е. а) Как и в предыдущих задачах, вопрос сводится к тому, имеет ли решение система линейных уравнений

$$x + 2y = 1, \quad x + y = 3, \quad x - y = 7, \quad 2x + y = 9.$$

Проверить это проще всего так: подсистема из второго и третьего уравнений явно имеет единственное решение $x = 5$, $y = -2$. Если оно удовлетворяет остальным уравнениям, это и есть решение всей системы, если нет, то решения не существует. Итак, подставим эти числа в последнее уравнение, и получим $8 = 9$. Решения не существует.

б) Добавление матрицы C ничего изменить не может, так как мы видели, что $C = 2A + B$. Если бы матрицу можно было разложить по A, B и C, то она раскладывалась бы и по A и B.

6. *Являются ли линейно независимыми строки*

$$\mathbf{a} = \begin{Vmatrix}1 & 2 & 3 & 4\end{Vmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{Vmatrix}2 & 3 & 4 & 5\end{Vmatrix}, \quad \mathbf{c} = \begin{Vmatrix}3 & 4 & 5 & 6\end{Vmatrix}?$$

Решение. Элементы строк таковы, что для любого номера i выполнены равенства $b_i = a_i + 1$, и $c_i = a_i + 2$. Постараемся получить отсюда равенство, в которое входили бы только элементы строк. Нетрудно заметить, что таким равенством будет $2b_i = c_i + a_i$. Итак, вторая строка раскладывается по остальным: $2\mathbf{b} = \mathbf{a} + \mathbf{c}$. Строки линейно зависимы.

Глава V § 2

1. *Пусть аффинные преобразования* f *и* g *в некоторой системе координат записаны соответственно формулами*

$$\begin{cases} x^* = a_1 x + b_1 y, \\ y^* = a_2 x + b_2 y, \end{cases}$$

и

$$\begin{cases} x^* = c_1 x + d_1 y, \\ y^* = c_2 x + d_2 y. \end{cases}$$

Докажите, что произведение $\mathsf{g} \cdot \mathsf{f}$ *запишется такими же формулами, причем матрица коэффициентов будет равна*

$$\begin{Vmatrix} c_1 & d_1 \\ c_2 & d_2 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{Vmatrix}.$$

Решение. Обозначим матрицы преобразований f и g соответственно A и C. Тогда столбец $\mathbf{x}^*$ из координат точки $M^* = \mathsf{f}(M)$ выразится через столбец $\mathbf{x}$ из координат M равенством $\mathbf{x}^* = A\mathbf{x}$. А столбец $\mathbf{x}^{**}$ из координат точки $\mathsf{gf}(M) = \mathsf{g}(\mathsf{f}(M)) = \mathsf{g}(M^*)$ выразится как $\mathbf{x}^{**} = C\mathbf{x}^* = C(A\mathbf{x}) = (CA)\mathbf{x}$.

Конечно, тот же результат будет получен, если мы подставим x^* и y^* из первой системы уравнений в правую часть второй системы и приведем подобные члены.

2. *Пусть* $\|2\|$ *— матрица размеров* 1×1 *с элементом* 2. *Верно ли, что*

$$\text{а)}\ \ \|2\| \begin{Vmatrix}1\\2\\3\end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix}2\\4\\6\end{Vmatrix}, \qquad \text{б)}\ \ \begin{Vmatrix}1\\2\\3\end{Vmatrix} \|2\| = \begin{Vmatrix}2\\4\\6\end{Vmatrix}?$$

Р е ш е н и е. а) Столбец — матрица размеров 3×1. Ее нельзя умножить слева на матрицу размеров 1×1, так как при этом длина строки 1 первого сомножителя не равна высоте столбца 3.

б) Столбец можно умножить справа на матрицу размеров 1×1, так как в этом случае длина строки 1 первого сомножителя равна высоте столбца 1 второго сомножителя.

3. *Пусть* $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ — *столбцы матрицы* A, *а* $\mathbf{b}^1, \ldots, \mathbf{b}^n$ — *строки матрицы* B. *Убедитесь, что*

$$AB = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{a}_i \mathbf{b}^i.$$

Р е ш е н и е. Сумма в правой части равенства — это сумма матриц, каждая из которых — произведение столбца на строку. Выпишем i-е слагаемое:

$$V_i = \begin{Vmatrix} a_{1i} \\ \vdots \\ a_{ki} \\ \vdots \\ a_{mi} \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} b_{i1} & \ldots & b_{il} & \ldots & b_{ip} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} a_{1i}b_{i1} & \ldots & a_{1i}b_{il} & \ldots & a_{1i}b_{ip} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{ki}b_{i1} & \ldots & a_{ki}b_{il} & \ldots & a_{ki}b_{ip} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{mi}b_{i1} & \ldots & a_{mi}b_{il} & \ldots & a_{mi}b_{ip} \end{Vmatrix}.$$

Рассмотрим элемент суммы $V_1 + \ldots + V_n$, стоящий в k-й строке и в l-м столбце. Он равен $\sum\limits_{i=1}^{n} a_{ki}b_{il}$, т. е. элементу AB, стоящему на соответствующем месте.

4. *Верно ли, что для любых двух квадратных матриц одного и того же порядка*

а) $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$,

б) $(A+B)^2 + (A-B)^2 = 2(A^2+B^2)$?

Р е ш е н и е. а) Выпишем подробнее $(A+B)^2 = (A+B) \times (A+B)$, пользуясь дистрибутивностью умножения матриц: $(A+B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2$. Поэтому разность правой и левой частей равенства (а) равна $BA - AB$. Это означает, что равенство выполнено не всегда, а тогда и только тогда, когда матрицы коммутативны.

б) Точно так же выпишем подробнее левую часть равенства (б):

$$(A+B)^2 + (A-B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2 + A^2 - AB - BA + B^2.$$

Приводя подобные члены, мы получим правую часть равенства. Таким образом, равенство выполнено для любых матриц.

5. *Рассмотрим матричное уравнение* $X^2 + E = O$.

а) *Проверьте, что матрица*

$$I = \begin{Vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix}$$

удовлетворяет этому уравнению. Как объяснить это в терминах задачи 1?

б) *Найдите все решения этого уравнения среди вещественных матриц второго порядка.*

а) Аффинное преобразование, которое в декартовой прямоугольной системе координат записывается формулами $x^* = -y$; $y^* = x$, является поворотом на угол $\pi/2$. Его квадрат — поворот плоскости на π, т. е. центральная симметрия относительно начала координат. Это преобразование имеет матрицу $-E$.

б) Если $X = \begin{Vmatrix} a & b \\ c & d \end{Vmatrix}$, то нам нужно решить систему уравнений

$$a^2 + bc = -1; \quad b(a+d) = 0; \quad c(a+d) = 0; \quad d^2 + bc = -1.$$

Ясно, что b и c не могут быть равны нулю, иначе первое и четвертое уравнения не могут быть выполнены. Следовательно, $a = -d$. Для того чтобы нашлись a и d, необходимо, чтобы $bc + 1 \leqslant 0$. При любых b и c, удовлетворяющих этому условию, и $a = -d = \pm\sqrt{-(bc+1)}$ матрица X удовлетворяет уравнению $X^2 + E = O$.

Ответ можно сформулировать и так:

$$X = \begin{Vmatrix} \pm\sqrt{-(bc+1)} & b \\ c & \mp\sqrt{-(bc+1)} \end{Vmatrix},$$

где b и c удовлетворяют условию $bc + 1 \leqslant 0$, а в остальном произвольны.

6. *Поставим в соответствие каждому комплексному числу* $z = a + bi$ *матрицу*

$$A(z) = \begin{Vmatrix} a & -b \\ b & a \end{Vmatrix}.$$

Проверьте, что выполнены равенства $A(z_1) + A(z_2) = A(z_1 + z_2)$; $A(\bar{z}) = A^T(z)$; $|z|^2 = \det A$; $A(z_1)A(z_2) = A(z_1 z_2)$; $A(z^{-1}) = A^{-1}(z)$.

Р е ш е н и е. Все равенства нетрудно проверить непосредственно. Но можно заметить, что

$$\begin{Vmatrix} a & -b \\ b & a \end{Vmatrix} = aE + bI,$$

где I — матрица, определенная в задаче 5. Тогда, например, четвертое равенство проверяется так:

$$(a_1E + b_1I)(a_2E + b_2I) = (a_1a_2 - b_1b_2)E + (a_1b_2 + a_2b_1)I.$$

Для проверки последнего равенства напишем $A(z^{-1})$. Так как $z^{-1} = (a - bi)/(a^2 + b^2)$,

$$A(z^{-1}) = \frac{1}{a^2 + b^2} \begin{Vmatrix} a & b \\ -b & a \end{Vmatrix}.$$

Умножая на $A(z)$, убеждаемся, что эта матрица совпадает с $A^{-1}(z)$.

7. *Найдите обратную для матрицы*

$$\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{Vmatrix}.$$

Р е ш е н и е. Составим матрицу

$$D = \left\Vert\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right\Vert.$$

и вычтем вторую строку из третьей. Мы получим

$$\left\Vert\begin{array}{ccc|rrr} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right\Vert.$$

Теперь удвоенную третью строку из второй:

$$\left\Vert\begin{array}{ccc|rrr} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right\Vert$$

и, наконец, первую строку из второй:

$$\left\|\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right\|.$$

Обратной матрицей будет матрица

$$\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \end{Vmatrix}.$$

8. *Разложите матрицу из упражнения 7 в произведение элементарных.*

Решение. Левая половина матрицы D в решении упражнения 7 совпадает с заданной матрицей A. Элементарными преобразованиями строк мы превратили эту матрицу в единичную. Это равносильно умножению матрицы слева на последовательность элементарных матриц. Выпишем эти матрицы:

$$\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{Vmatrix} \cdot A = E.$$

Здесь произведение трех элементарных матриц равно матрице A^{-1}, это ее разложение в произведение элементарных матриц. Чтобы получить разложение матрицы A, следует выписать произведение матриц обратных операций (иначе говоря, матриц, обратных к элементарным) в обратном порядке. Мы получим

$$A = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}.$$

Здесь матрицу

$$\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix},$$

соответствующую прибавлению удвоенной третьей строки ко второй, мы посчитали элементарной, хотя она раскладывается в произведение «более элементарных» матриц:

$$\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{Vmatrix},$$

т. е. умножение третьей строки на 2, прибавление третьей строки ко второй и умножение третьей строки на 1/2.

Необходимо добавить, что разложение невырожденной матрицы в произведение элементарных матриц неединственно. Другим путем можно получить совсем другое разложение той же матрицы.

Глава V § 3

1. *Дана матрица*

$$A = \begin{Vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{Vmatrix}.$$

а) *Найдите ее ранг и какую-либо базисную подматрицу.*

б) *Найдите коэффициенты разложения небазисной строки по базисным строкам и небазисного столбца по базисным столбцам.*

в) *Прибавьте в матрице вторую строку к первой и убедитесь, что линейная зависимость между столбцами осталась прежней.*

г) *Сколько всего базисных подматриц в этой матрице*?

Решение. Матрица достаточно проста, и ответы на некоторые или все вопросы можно усмотреть без вычислений. Но посмотрим, как следует действовать в общем случае. Приведем матрицу к упрощенному виду. Для этого вычтем из второй строки матрицы первую строку, умноженную на 4, и из третьей вычтем первую строку, умноженную на 7. Результат будет следующим:

$$A' = \begin{Vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & -12 \end{Vmatrix}.$$

Видно, что третья строка вычитанием удвоенной второй может быть обращена в нулевую. Вместе с тем подматрица

$$\begin{Vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -3 \end{Vmatrix} \tag{2}$$

матрицы A' невырождена. Следовательно первая и вторая строки этой матрицы линейно независимы. Теперь можно ответить на вопрос (а): $\operatorname{Rg} A = \operatorname{Rg} A' = 2$, а подматрица матрицы A, расположенная в строках и столбцах с номерами 1 и 2, может быть принята за базисную.

б) Для того чтобы найти линейные зависимости между столбцами, продолжим упрощение матрицы. Делим вторую строку на -3

$$\begin{Vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -6 & -12 \end{Vmatrix}$$

и после этого из первой строки вычитаем удвоенную вторую, а к третьей прибавим вторую строку, умноженную на 6. Получим упрощенный вид матрицы.

$$A'' = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}.$$

Теперь видна линейная зависимость между столбцами матрицы. В упрощенной матрице $\mathbf{a}''_3 = (-1)\mathbf{a}''_1 + 2\mathbf{a}''_2$. Линейные зависимости между столбцами матрицы не меняются при элементарных преобразованиях строк, поэтому и в исходной матрице $\mathbf{a}_1 - 2\mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3 = \mathbf{o}$. Первый и второй столбцы могут быть приняты за базисные.

Для того чтобы найти линейную зависимость строк, вспомним, что в матрице A' вторая и третья строки пропорциональны: $\mathbf{a}^3 - 2\mathbf{a}^2 = \mathbf{o}$. Но эти строки — линейные комбинации строк исходной матрицы $\mathbf{a}'^3 = \mathbf{a}^3 - 7\mathbf{a}^1$, а $2\mathbf{a}'^2 = 2\mathbf{a}^2 - 8\mathbf{a}^1$. Поэтому $\mathbf{a}'^3 - 2\mathbf{a}'^2 = \mathbf{a}^3 - 2\mathbf{a}^2 + \mathbf{a}^1 = \mathbf{o}$. Мы получили линейную зависимость строк матрицы A. Первая и вторая строки могут быть приняты за базисные, а третья раскладывается по ним: $\mathbf{a}_3 = 2\mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_1$.

в) Прибавляя вторую строку к первой, получаем

$$B = \begin{Vmatrix} 5 & 7 & 9 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{Vmatrix}.$$

Составим для этой матрицы линейную комбинацию столбцов с коэффициентами 1, -2 и 1. Это произведение

$$\begin{Vmatrix} 5 & 7 & 9 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{Vmatrix}.$$

Оно равно $\mathbf{o}$, что подтверждает линейную зависимость столбцов B.

г) 9, так как все подматрицы второго порядка невырождены и потому могут быть приняты за базисные.

2. *Квадратная матрица порядка n имеет нулевую подматрицу порядка $n-1$. Оцените ранг матрицы.*

Решение. Ранг матрицы не меняется при перестановках строк и столбцов. Поэтому, не уменьшая общности, можно считать, что нулевую подматрицу не пересекают только первая строка и первый столбец. В этом случае ранг подматрицы, составленной строками с номерами $2, \ldots, n$, не больше 1. Действительно, в ней только первый столбец может быть отличен от нулевого. Приписывая к этой подматрице первую строку, мы увеличиваем ранг не больше чем на 1. Таким образом, ответ: $\operatorname{Rg} A \leqslant 2$.

3. *Матрица A порядка n содержит нулевую подматрицу размеров $m \times k$, причем $m + k > n$. Докажите, что A вырождена.*

Решение. Ранг матрицы не меняется при перестановках столбцов и строк. Поэтому, не уменьшая общности, можно считать, что нулевая подматрица расположена на пересечении последних m строк и последних k столбцов. Оценим ранг подматрицы, составленной последними m строками. Он не превосходит числа ненулевых столбцов, т.е. $n-k$. Добавляя сверху еще $n-m$ строк, мы увеличиваем ранг не более чем на $n-m$. Поэтому $\operatorname{Rg} A \leqslant n-k+n-m = 2n-(m+k) < n$. Это равносильно доказываемому утверждению.

4. а) *При помощи элементарных преобразований строк приведите к упрощенному виду матрицу*

$$\begin{Vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \end{Vmatrix}.$$

б) *Разложите пятый столбец этой матрицы по первому и второму столбцам.*

Решение. а) Вычтем из второй строки первую строку, умноженную на 3, а из третьей строки — первую, умноженную на 5. Мы получим матрицу

$$\begin{Vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -2 & -4 & -6 & -8 \\ 0 & -4 & -8 & -12 & -16 \end{Vmatrix}.$$

Теперь вторую строку прибавим к первой, а из третьей строки вычтем удвоенную вторую:

$$\begin{Vmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & -2 & -4 & -6 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}.$$

Осталось разделить вторую строку на -2, и мы получаем упрощенную матрицу

$$\begin{Vmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}.$$

б) В упрощенной матрице пятый столбец раскладывается по первому и второму столбцам: $\mathbf{a}_5 = -3\mathbf{a}_1 + 4\mathbf{a}_2$. При элементарных преобразованиях строк линейные зависимости между столбцами не меняются. Поэтому в исходной матрице разложение пятого столбца по двум первым такое же.

5. *Пусть A — матрица с элементами a_{ij}, $i = 1, \ldots, m$; $j = 1, \ldots, n$ и $\mathrm{Rg}\, A = 1$. Докажите, что найдутся ненулевой столбец $\mathbf{a} = \|\alpha_1, \ldots, \alpha_m\|$ и ненулевая строка $\mathbf{b} = \|\beta_1, \ldots, \beta_n\|$, такие что $a_{ij} = \alpha_i \beta_j$ для всех i и j.*

Решение. В матрице ранга 1 обязательно есть ненулевой столбец и каждый ненулевой столбец является базисным. Примем за числа $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ элементы базисного столбца $\mathbf{a}_{j_0}$.

Любой столбец отличается от базисного числовым множителем: $\mathbf{a}_j = \beta_j \mathbf{a}_{j_0}$. Для i-го элемента столбца это означает, что $a_{ij} = \beta_j \alpha_i$. Это заканчивает доказательство.

Заметим еще, что результат задачи означает, что каждая матрица ранга 1 может быть представлена как произведение ненулевого столбца на ненулевую строку: $A = \mathbf{a}_{j_0}\mathbf{b}$, где $\mathbf{b} = \|\beta_1, \ldots, \beta_n\|$. Верно, конечно, и обратное: ранг произведения столбца на строку не превосходит рангов сомножителей, т. е. единицы. Нулем он быть не может, так как и строка и столбец имеют хотя бы по одному ненулевому элементу, а элементами матрицы являются все произведения $\alpha_i \beta_j$, в том числе и произведение ненулевых элементов.

6. *В матрице ранга r отмечены r линейно независимых строк и r линейно независимых столбцов. Докажите, что на их пересечении стоит минор, отличный от нуля. Покажите на примере, что утверждение неверно, если число отмеченных строк меньше r.*

Р е ш е н и е. r линейно независимых строк в матрице ранга r — базисные строки, и каждая из остальных строк — их линейная комбинация. Вычтем из каждой небазисной строки ту линейную комбинацию базисных, которая ей равна. Это сводится к последовательности элементарных преобразований и не меняет ранга. Поэтому результатом будет матрица того же ранга r, у которой выбранные строки остались без изменения, а остальные заменились нулевыми. Выбранные столбцы остались линейно независимыми. Следовательно, в них должна содержаться невырожденная подматрица порядка r. Такой подматрицей может быть только подматрица, стоящая на пересечении выбранных строк и выбранных столбцов. При преобразованиях она не менялась.

Условие равенства числа строк и столбцов рангу, конечно, существенно. За примером далеко ходить не надо. Возьмем единичную матрицу порядка 2 и выберем в ней первую строку и второй столбец.

7. *Докажите, что для любых матриц A и B одинаковых размеров ранг суммы не больше суммы рангов.*

Р е ш е н и е. Для доказательства создадим матрицу D, приписав матрицу B под матрицей A:

$$D = \left\| \frac{A}{B} \right\|.$$

Пусть r и s — ранги матриц A и B, и $\mathbf{a}_{i_1}, \ldots, \mathbf{a}_{i_r}$ — базисные строки A, а $\mathbf{b}_{j_1}, \ldots, \mathbf{b}_{j_s}$ — базисные строки B. Тогда каждая строка матрицы D раскладывается по системе строк $\mathbf{a}_{i_1}, \ldots, \mathbf{a}_{i_r}, \mathbf{b}_{j_1}, \ldots, \mathbf{b}_{j_s}$. Ранг подматрицы, составленной из этих строк, не больше их числа $r+s$, а добавление остальных строк не увеличивает ранга. Следовательно, $\operatorname{Rg} D \leqslant r+s$.

С другой стороны, $\operatorname{Rg} D$ равен рангу матрицы

$$D' = \left\| \frac{A}{A+B} \right\|,$$

так как ее можно получить из D элементарными операциями. $A+B$ — подматрица в D', и значит, $\operatorname{Rg}(A+B) \leqslant \operatorname{Rg} D' = \operatorname{Rg} D \leqslant r+s$. Это нам и требовалось доказать.

8. *Пусть столбцы матрицы A размеров $m \times n$ линейно независимы и определено произведение AB. Докажите, что* $\operatorname{Rg} AB = \operatorname{Rg} B$.

Р е ш е н и е. Из условия вытекает, что $m \geqslant n$ и что матрица B имеет n строк. Если $m = n$, то утверждение — хорошо известный факт. Пусть $m > n$. Тогда элементарными операциями со строками можно привести матрицу A к виду $A' = \left\| \begin{matrix} E_n \\ O \end{matrix} \right\|$, где E_n — единичная матрица порядка n, а O — нулевая матрица размеров $(m-n) \times n$. Это означает, что существует невырожденная матрица S, такая что $A = SA'$ Таким образом, $\operatorname{Rg} AB = \operatorname{Rg} SA'B = \operatorname{Rg} A'B$. С другой стороны, произведение $A'B$ представляет собой матрицу B, дополненную снизу $m-n$ нулевыми строками, и значит $\operatorname{Rg} A'B = \operatorname{Rg} B$. Это заканчивает доказательство.

Глава V § 4

1. *Пусть A — квадратная матрица порядка n. Выразите* $\det \alpha A$ *через* $\det A$.

Р е ш е н и е. Когда умножают матрицу A на число α, на это число умножается каждая строка матрицы. Умножение любой строки на число (в силу линейности детерминанта по строке) равносильно умножению детерминанта на это число. По этой причине при умножении всех строк на α детерминант умножается на α^n:

$$\det(\alpha A) = \alpha^n \det A.$$

2. *Пусть A — квадратная матрица порядка $2n+1$, и $A^T = -A$. Докажите, что* $\det A = 0$.

Решение. $\det A = \det A^T = \det(-A)$. В силу результата задачи 1 для матрицы порядка $2n+1$ имеем: $\det(-A) = (-1)^{2n+1}\det A$. В итоге, $\det A = -\det A$, т.е. $\det A = 0$.

3. *Докажите, что детерминант любой треугольной матрицы равен произведению ее диагональных элементов.*

Решение. Рассмотрим верхнюю треугольную матрицу A. В ее первом столбце отличен от нуля только элемент a_{11}. Поэтому разложение $\det A$ по первому столбцу будет состоять из одного члена: $\det A = (-1)^{1+1}a_{11}d_{11}$, где d_{11} — детерминант подматрицы A_1, получаемой из A вычеркиванием первого столбца и первой строки.

A_1 — также верхняя треугольная матрица, и, раскладывая ее детерминант по первому столбцу, мы получаем $\det A = a_{11}a_{22}d_{22}$, где d_{22} — детерминант подматрицы A_2, получаемой из A вычеркиванием двух первых столбцов и двух первых строк. Продолжая раскладывать детерминанты возникающих дополнительных подматриц по первому столбцу, мы в конце придем к равенству $\det A = a_{11}a_{22}a_{33}\ldots a_{n-1\,n-1}d_{nn}$, где d_{nn} — детерминант подматрицы порядка 1, состоящей из последнего элемента последней строки, т.е. $d_{nn} = a_{nn}$. Это заканчивает доказательство.

4. *Вычислите*

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 8 & 1 \\ 1 & 4 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 9 & 3 \\ 1 & 5 & 4 & 1 \end{vmatrix}.$$

Решение. Переставим четвертую строку на второе место:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 8 & 1 \\ 1 & 5 & 4 & 1 \\ 1 & 4 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 9 & 3 \end{vmatrix}.$$

Теперь вычтем третью строку из второй:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 8 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & -2 \\ 1 & 4 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 9 & 3 \end{vmatrix}.$$

Далее, вычтем первую строку из третьей и удвоенную первую строку из четвертой:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 8 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & -2 \\ 0 & 4 & -8 & 2 \\ 0 & 0 & -7 & 1 \end{vmatrix}.$$

Осталось вычесть из третьей строки вторую строку, умноженную на 4:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 8 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & -24 & 10 \\ 0 & 0 & -7 & 1 \end{vmatrix}.$$

Теперь, раскладывая детерминант по первому и по второму столбцам, получаем

$$\Delta = \begin{vmatrix} -24 & 10 \\ -7 & 1 \end{vmatrix} = 46.$$

5. *К каждому элементу матрицы A прибавлено одно и то же число t. Докажите, что детерминант получившейся матрицы — линейная функция от t.*

Решение. Для сокращения записи будем считать, что порядок матрицы равен 3. Будет видно, что доказательство не зависит от порядка матрицы. Пусть дана матрица

$$A(t) = \begin{Vmatrix} a_{11}+t & a_{12}+t & a_{13}+t \\ a_{21}+t & a_{22}+t & a_{23}+t \\ a_{31}+t & a_{32}+t & a33+t \end{Vmatrix}.$$

Припишем к ней слева столбец из нулей, а к полученной матрице сверху строку из единиц:

$$B(t) = \begin{Vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & a_{11}+t & a_{12}+t & a_{13}+t \\ 0 & a_{21}+t & a_{22}+t & a_{23}+t \\ 0 & a_{31}+t & a_{32}+t & a33+t \end{Vmatrix}.$$

Очевидно, что $\det B(t) = \det A(t)$. Теперь в матрице $B(t)$ вычтем первую строку, умноженную на t, из всех нижележащих строк:

$$\det A(t) = \det B(t) = \det \begin{Vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -t & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ -t & a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ -t & a_{31} & a_{32} & a33 \end{Vmatrix}.$$

Из разложения последнего детерминанта по первому столбцу очевидно, что $\det A(t)$ — линейный многочлен от t:

$$\det A(t) = \det A + \sum_{i=2}^{4} (-1)^{i+1}(-t)d_{1i} = a + bt,$$

где $b = \sum\limits_{i=2}^{4} (-1)^i d_{1i}$ не зависит от t.

6. *Вычислите детерминант порядка* n:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ -1 & 2 & 1 & \ldots & 1 \\ \multicolumn{5}{c}{\dotfill} \\ -1 & -1 & \ldots & 2 & 1 \\ -1 & -1 & \ldots & -1 & 2 \end{vmatrix}.$$

Р е ш е н и е. Воспользуемся результатом задачи 5. Если мы прибавим к каждому элементу матрицы 1, то получим верхнюю треугольную матрицу, все диагональные элементы которой равны 3. Таким образом, $\det A(1) = 3^n$. Аналогично, прибавив -1, мы получим нижнюю треугольную матрицу с единицами на главной диагонали. Значит, $\det A(-1) = 1$. Для линейной функции $f(t) = a + bt$ значение $f(0)$ равно $(f(1) + f(-1))/2 = (a + b + {}$ ${} + a - b)/2 = a$. Поэтому $\det A = (3^n + 1)/2$.

7. *Два квадратных многочлена* $ax^2 + bx + c$ *и* $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$, $(a, \alpha \neq 0)$ *имеют общий корень. Докажите, что*

$$\begin{vmatrix} a & b & c & 0 \\ 0 & a & b & c \\ \alpha & \beta & \gamma & 0 \\ 0 & \alpha & \beta & \gamma \end{vmatrix} = 0.$$

Р е ш е н и е. Пусть общий корень t. Умножим первый столбец на t^3, второй — на t^2, третий — на t и все прибавим к четвертому столбцу. Это преобразование не изменит детерминанта, но обратит четвертый столбец в **o**.

З а м е ч а н и е. Можно доказать, что и обратно, из равенства нулю детерминанта следует существование общего корня. Аналогичный детерминант с тем же свойством может быть составлен для двух любых многочленов. Он называется их *результантом*.

8. *Докажите, что уравнение* $X^2 + E = O$ *не имеет решений среди вещественных матриц нечетного порядка.*

Р е ш е н и е. Пусть матрица X порядка $2k+1$ удовлетворяет этому уравнению. Тогда $(\det X)^2 = \det X^2 = \det(-E) = (-1)^{2k+1} = -1$ — равенство, невозможное для вещественной матрицы.

9. *Сколько нарушений порядка в перестановке* $(5, 4, 3, 2, 1)$?

Р е ш е н и е. Число 5 стоит перед четырьмя меньшими и, следовательно, виновно в 4 нарушениях порядка. Аналогично, 4 виновно в трех, 3 — в двух и 2 — в одном нарушении порядка. Всего нарушений порядка 10.

10. *Пусть матрица* P *порядка* n *имеет вид*

$$\left\|\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline O & C \end{array}\right\|,$$

где A *и* C *— квадратные подматрицы порядков* k *и* $n-k$, *а* O *— нулевая подматрица. При помощи формулы полного разложения докажите, что* $\det P = \det A \det C$.

Р е ш е н и е. Рассмотрим одно слагаемое из формулы полного разложения

$$(-1)^{N(i_1 \ldots i_k i_{k+1} \ldots i_n)} p_{1i_1} \ldots p_{ki_k} p_{k+1\, i_{k+1}} \ldots p_{ni_n}.$$

Основой доказательства является следующее соображение: если этот член отличен от нуля, то все $i_{k+1}, \ldots, i_n$ больше k, и, следовательно, $i_1, \ldots, i_k$ не превосходят k. Действительно, в противном случае в произведение должен войти сомножитель p_{si_s} с $s > k$ и $i_s \leqslant k$, т. е. из нулевой подматрицы.

Кроме того, если $i_1, \ldots, i_k \leqslant k$, то $N(i_1 \ldots i_k i_{k+1} \ldots i_n) = N(i_1 \ldots i_k) + N(i_{k+1} \ldots i_n)$, так как каждое число из первой группы меньше каждого числа из второй группы и не создает с ним нарушения порядка. Таким образом, каждое слагаемое в формуле полного разложения, не обязательно равное нулю, можно представить в виде произведения двух сомножителей

$$[(-1)^{N(i_1 \ldots i_k)} p_{1i_1} \ldots p_{ki_k}] \cdot [(-1)^{N(i_{k+1} \ldots i_n)} p_{k+1\, i_{k+1}} \ldots p_{ni_n}].$$

Первый сомножитель — слагаемое в формуле полного разложения $\det A$, так как $p_{ij} = a_{ij}$ для всех $i, j \leqslant k$. Точно так же, второй сомножитель — слагаемое в формуле полного разложения $\det C$, так как $p_{ij} = c_{i-k,j-k}$ для всех $i, j \geqslant k+1$ и $N(i_{k+1} \ldots i_n) = N(i_{k+1} - k \ldots i_n - k)$.

Когда мы перемножаем две суммы, мы должны умножить каждый член первого сомножителя на каждый член второго. Поэтому, перемножая полные разложения $\det A$ и $\det C$, мы получим сумму всех необязательно нулевых слагаемых в полном разложении $\det P$. Это заканчивает доказательство.

Глава V § 5

1. *Пусть числа x_1, x_2, x_3 попарно различны. Докажите, что при любых y_1, y_2, y_3 найдется единственный многочлен степени $\leqslant 2$, график которого проходит через точки с координатами (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3).*

Решение. График многочлена $y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$ проходит через указанные точки, если выполнены равенства

$$a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 = y_1,$$
$$a_0 + a_1 x_2 + a_2 x_2^2 = y_2,$$
$$a_0 + a_1 x_3 + a_2 x_3^2 = y_3.$$

Рассматриваем их как систему уравнений для нахождения коэффициентов многочлена. Вычислим детерминант матрицы системы:

$$V = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \\ 1 & x_3 & x_3^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 0 & x_2 - x_1 & x_2^2 - x_1^2 \\ 0 & x_3 - x_1 & x_3^2 - x_1^2 \end{vmatrix} =$$
$$= (x_2 - x_1)(x_3 - x_1) \begin{vmatrix} 1 & x_2 + x_1 \\ 1 & x_3 + x_1 \end{vmatrix},$$

и окончательно: $V = (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)$. Это означает, что $V \neq 0$ тогда и только тогда, когда числа x_1, x_2, x_3 попарно различны. Следовательно, система имеет единственное решение при любых значениях y_1, y_2 и y_3. Это и требовалось доказать.

Подчеркнем, что в общем случае нет никакой гарантии того, что $a_2 \neq 0$, т. е. многочлен может оказаться линейным или даже константой. Так оно и будет, если заданные точки лежат на прямой линии. Геометрически полученный результат можно сформулировать так: направление оси параболы и три точки на ней однозначно определяют параболу.

Аналогично доказывается, что для любых n точек на координатной плоскости, абсциссы которых попарно различны, найдется единственный многочлен степени, не большей чем $n-1$, график которого проходит через эти точки. Он называется *интерполяционным многочленом Лагранжа.*

2. *Пользуясь формулами для элементов обратной матрицы, найдите обратную для матрицы*

$$\begin{Vmatrix} a & b \\ c & d \end{Vmatrix}.$$

Решение. Согласно этим формулам, элемент x_{ij} матрицы A^{-1} равен $(\det A)^{-1}(-1)^{i+j}d_{ji}$, где d_{ji} — дополнительный минор элемента, симметричного с элементом a_{ij} матрицы A, стоящим на таком же месте, что и вычисляемый элемент x_{ij}.

В нашем случае для элемента a симметричный он же, а его дополнительный минор равен d. Для элемента b симметричным является c, а дополнительный минор c — это b. Следовательно, $x_{11} = (ad-bc)^{-1}d$, а $x_{12} = -(ad-bc)^{-1}b$. Аналогично вычисляются и остальные элементы:

$$\begin{Vmatrix} a & b \\ c & d \end{Vmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{Vmatrix} d & -b \\ -c & a \end{Vmatrix}.$$

Глава V § 6

1. *Система линейных уравнений с матрицей A совместна при любом столбце свободных членов тогда и только тогда, когда строки матрицы A линейно независимы. Докажите это* а) *пользуясь теоремой Кронекера–Капелли*, б) *пользуясь теоремой Фредгольма.*

Решение. а) Достаточность условия прямо следует из того, что при линейно независимых строках ранг A равен числу строк m и не может увеличиться при добавлении столбца. Обратно, то, что строки A линейно зависимы, означает, что существует ненулевой столбец $\mathbf{y}$ высоты m, такой что $\mathbf{y}^T A = \mathbf{o}$. Составим расширенную матрицу $A^* = \|A|\mathbf{y}\|$. Ее ранг больше ранга A. Действительно, пусть $\mathbf{y}$ раскладывается по столбцам A: $\alpha_1\mathbf{a}_1 + \ldots + \alpha_n\mathbf{a}_n = \mathbf{y}$. Умножая это равенство слева на $\mathbf{y}^T$, мы получим равенство $0 = \mathbf{y}^T\mathbf{y}$, из которого следует, что $\mathbf{y} = \mathbf{o}$ вопреки предположению.

б) Если строки A линейно независимы, система $A^T\mathbf{y} = \mathbf{o}$ имеет только нулевое решение, а значит, $\mathbf{y}^T\mathbf{b} = 0$ при любом $\mathbf{b}$. Отсюда следует, что исходная система совместна при любом столбце свободных членов $\mathbf{b}$.

Обратно, если система уравнений $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ совместна при любом столбце свободных членов, то согласно теореме Фредгольма каждое решение $\mathbf{y}$ сопряженной однородной системы $A^T\mathbf{y} = \mathbf{o}$ вместе с любым столбцом $\mathbf{b}$ удовлетворяет равенству $\mathbf{y}^T\mathbf{b} = 0$. Это возможно только при $\mathbf{y} = \mathbf{o}$ (иначе равенство не выполнялось бы, например, при $\mathbf{b} = \mathbf{y}$). С другой стороны, то, что система $A^T\mathbf{y} = \mathbf{o}$ имеет только нулевое решение, означает, что столбцы матрицы A^T — строки матрицы A — линейно независимы.

2. *Даны векторы* $\mathbf{a}$ *и* $\mathbf{b}$, $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$. *При помощи теоремы Фредгольма докажите, что уравнение* $[\mathbf{a}, \mathbf{x}] = \mathbf{b}$ *имеет решение тогда и только тогда, когда* $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = 0$.

Р е ш е н и е. Пусть $\|a_1 \quad a_2 \quad a_3\|^T$ и $\|x_1 \quad x_2 \quad x_3\|^T$ — координаты векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{x}$ в декартовой прямоугольной системе координат. Тогда векторное уравнение сводится к системе из трех линейных уравнений

$$\begin{aligned} -a_3x_2 + a_2x_3 &= b_1, \\ a_3x_1 \qquad\quad - a_1x_3 &= b_2, \\ -a_2x_1 + a_1x_2 \qquad\quad &= b_3, \end{aligned}$$

где $\|b_1 \quad b_2 \quad b_3\|^T$ — координаты вектора $\mathbf{b}$. Матрица этой системы кососимметрична: $A^T = -A$. Поэтому сопряженная однородная система имеет те же решения, что и исходная система при $\mathbf{b} = \mathbf{0}$, т. е. ее решения — координаты векторов, коллинеарных $\mathbf{a}$. Условие совместности системы, таким образом, может быть записано как $a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = 0$, а это координатная запись равенства $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = 0$.

3. *Найдите фундаментальную матрицу для системы с матрицей* $\|1 \quad 1 \quad 1\|$.

Р е ш е н и е. В системе $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ переменная x_1 может быть принята за базисную. Придадим небазисным переменным значения $x_2 = 1$, $x_3 = 0$ и найдем из системы, что $x_1 = -1$. Для второй серии значений $x_2 = 0$, $x_3 = 1$ значение x_1 снова равно -1. Таким образом, найдены два линейно независимых решения $\|-1\ \ 1\ \ 0\|^T$ и $\|-1\ \ 0\ \ 1\|^T$, которые являются столбцами фундаментальной матрицы

$$\left\|\begin{matrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}\right\|.$$

4. *Пусть* $\|E_r \mid B\|$ *— упрощенный вид матрицы однородной системы уравнений с* n *неизвестными. Найдите фундаментальную матрицу системы.*

Р е ш е н и е. Докажем, что фундаментальной матрицей будет матрица

$$F = \left\|\begin{array}{c} -B \\ \hline E_{n-r} \end{array}\right\|.$$

Во-первых, матрица F имеет $n-r$ линейно независимых столбцов, как и должно быть в искомой матрице.

Во-вторых,

$$\|E_r \mid B\| \ \left\|\begin{array}{c} -B \\ \hline E_{n-r} \end{array}\right\| = O.$$

Действительно, произведение i-й строки первой матрицы на j-й столбец второй равно сумме произведения i-й строки E_r на j-й столбец $-B$ (т. е. числа $-b_{ij}$) и произведения i-й строки B на j-й столбец E_{n-r} (т. е. числа b_{ij}).

5. *Пусть* F *— фундаментальная матрица системы линейных уравнений* $A\mathbf{x} = \mathbf{o}$ *с* n *неизвестными и строки* A *линейно независимы. Какая будет фундаментальная матрица у системы а)* $F\mathbf{y} = \mathbf{o}$, *б)* $F^T\mathbf{z} = \mathbf{o}$?

Р е ш е н и е. а) Столбцы фундаментальной матрицы по определению линейно независимы. Следовательно, система $F\mathbf{y} = \mathbf{o}$ имеет единственное (нулевое) решение, а значит, фундаментальной матрицы у нее нет.

б) В определение фундаментальной матрицы системы $A\mathbf{x} = \mathbf{o}$ входит равенство $AF = O$, которое равносильно $F^TA^T = O$. Кроме того, столбцы A^T — строки A — линейно независимы и $\operatorname{Rg} A^T = \operatorname{Rg} A = n - \operatorname{Rg} F$. Тем самым A^T удовлетворяет определению фундаментальной матрицы для системы $F^T\mathbf{z} = \mathbf{o}$.

6. *Напишите общее решение системы с расширенной матрицей*

$$\left\|\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & 6 & 1 \\ 7 & 8 & 9 & 1 \end{array}\right\|.$$

Р е ш е н и е. Как нам известно из решения задачи 1 § 3, ранг матрицы системы равен 2, а строки матрицы связаны линейной зависимостью $\mathbf{a}_1 - 2\mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3 = \mathbf{o}$. Следовательно, $\mathbf{y} = \|1 \quad -2 \quad 1\|^T$ — решение сопряженной однородной системы, а все остальные ее решения ему пропорциональны. Очевидно, что $\mathbf{y}^T\mathbf{b} = 0$, и система совместна по теореме Фредгольма. Поэтому ранг расширенной матрицы также равен 2, и одно из уравнений может быть отброшено без изменения множества решений.

Теперь нам следует найти упрощенный вид матрицы

$$\left\|\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & 6 & 1 \end{array}\right\|.$$

Вычтем из второй строки первую, умноженную на 4:

$$\left\|\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & -6 & -3 \end{array}\right\|.$$

Делим вторую строку на -3 и после этого вычитаем удвоенную вторую из первой:

$$\left\|\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right\|.$$

Это и есть упрощенный вид, в котором переменные x_1 и x_2 базисные.

Система уравнений

$$x_1 - x_3 = -1, \quad x_2 + 2x_3 = 1$$

эквивалентна заданной. Полагая $x_3 = 0$, находим $x_1 = -1$, $x_2 = 1$. Таким образом, $\|-1 \quad 1 \quad 0\|^T$ — частное решение неоднородной системы. Далее, заменим свободные члены нулями и положим $x_3 = 1$. Это даст нам ненулевое решение однородной системы — единственный столбец фундаментальной матрицы $\|1 \quad -2 \quad 1\|^T$. Итак, общее решение системы может быть записано равенством

$$\left\|\begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{matrix}\right\| = \left\|\begin{array}{r} -1 \\ 1 \\ 0 \end{array}\right\| + \left\|\begin{array}{r} 1 \\ -2 \\ 1 \end{array}\right\| c,$$

или $x_1 = -1 + c$; $x_2 = 1 - 2c$; $x_3 = c$.

7. *Пусть матрица F размеров $n \times p$ — фундаментальная матрица некоторой системы уравнений. Докажите, что F' будет фундаментальной матрицей той же системы тогда и только тогда, когда найдется невырожденная матрица Q порядка p, такая что $F' = FQ$.*

1. Пусть $F' = FQ$ при невырожденной матрице Q. Тогда $AF' = A(FQ) = (AF)Q = O$. Кроме того, $\mathrm{Rg}\, F' = \mathrm{Rg}\, F = p$ — столбцы F' линейно независимы и их число равно p. Это означает, что F' удовлетворяет определению фундаментальной матрицы.

2. Пусть F' и F — фундаментальные матрицы. Каждый столбец F' — решение системы и потому представим в виде $\mathbf{f}'_i = F\mathbf{c}_i$, $i = 1, \ldots, p$. Это равносильно матричному равенству $F' = FQ$, где $Q = \|\mathbf{c}_1 \ldots \mathbf{c}_p\|$. Так как все $\mathbf{c}_i$ — столбцы высоты p, Q — квадратная матрица порядка p. Докажем, что она невырождена. Действительно, $\mathrm{Rg}\, F' = \mathrm{Rg}\, FQ \leqslant \mathrm{Rg}\, Q$. Следовательно, $\mathrm{Rg}\, Q \geqslant \mathrm{Rg}\, F' = p$.

8. *Рассматривается система из трех уравнений с двумя неизвестными. Убедитесь, что применение теоремы Фредгольма к этой системе равносильно такому (геометрически очевидному) утверждению: вектор $\mathbf{b}$ раскладывается по векторам $\mathbf{a}_1$ и $\mathbf{a}_2$ тогда и только тогда, когда он ортогонален каждому вектору $\mathbf{y}$, ортогональному этим векторам.*

Р е ш е н и е. Пусть задана система линейных уравнений

$$\begin{Vmatrix} a_1^1 & a_2^1 \\ a_1^2 & a_2^2 \\ a_1^3 & a_2^3 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{Vmatrix}.$$

Выберем в пространстве декартову прямоугольную систему координат. Тогда x_1 и x_2 можно рассматривать как коэффициенты разложения вектора $\mathbf{b}(b_1\ b_2\ b_3)$ по векторам $\mathbf{a}_1(a_1^1\ a_1^2\ a_1^3)$ и $\mathbf{a}_2(a_2^1\ a_2^2\ a_2^3)$. В частности, $\mathbf{b}$ раскладывается по $\mathbf{a}_1$ и $\mathbf{a}_2$ тогда и только тогда, когда система совместна.

Рассмотрим сопряженную однородную систему уравнений

$$\begin{Vmatrix} a_1^1 & a_1^2 & a_1^3 \\ a_2^1 & a_2^2 & a_2^3 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{Vmatrix} = \mathbf{o}.$$

Координаты вектора $\mathbf{y}(y_1\ \ y_2\ \ y_3)$ удовлетворяют этой системе тогда и только тогда, когда $\mathbf{y}$ ортогонален обоим векторам $\mathbf{a}_1$ и $\mathbf{a}_2$.

По теореме Фредгольма для совместности системы необходимо и достаточно, чтобы для любого решения $\mathbf{y}$ выполнялось равенство $y_1b_1 + y_2b_2 + y_3b_3 = 0$, равносильное ортогональности $\mathbf{b}$ и $\mathbf{y}$. Это нам и требовалось доказать.

9*. *Пусть система уравнений $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ совместна. Докажите, что уравнение $\mathbf{ax} = \beta$ является следствием этой системы тогда и только тогда, когда оно — линейная комбинация ее уравнений.*

Р е ш е н и е. В одну сторону утверждение очевидно: линейная комбинация уравнений системы является ее следствием.

Обратно, пусть существует такой столбец $\mathbf{x}_0$, что $A\mathbf{x}_0 = \mathbf{b}$, и для любого решения $\mathbf{x}$ системы $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ выполнено уравнение $\mathbf{ax} = \beta$. Докажем, что найдется столбец $\mathbf{y}$, такой что $\mathbf{y}^T A = \mathbf{a}$ и $\mathbf{y}^T\mathbf{b} = \beta$.

Для однородной системы ($\mathbf{b} = \mathbf{0}$, $\beta = 0$) — это просто терема Фредгольма. Действительно, совместность системы $A^T\mathbf{y} = \mathbf{a}^T$ равносильна тому, что для каждого решения системы $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ выполнено $\mathbf{ax} = 0$.

Рассмотрим неоднородную систему. Она может быть написана в виде $A\mathbf{x} = A\mathbf{x}_0$ или $A(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) = \mathbf{0}$. Если для любого ее решения $\mathbf{ax} = \beta$, то $\mathbf{ax} = \mathbf{ax}_0 = \beta$ и $\mathbf{a}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) = 0$. Таким образом, $\mathbf{a}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) = 0$ — следствие системы $A(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) = \mathbf{0}$, и по доказанному существует столбец $\mathbf{y}$, такой что $\mathbf{y}^T A = \mathbf{a}$.

Для этого столбца $\mathbf{y}^T\mathbf{b} = \mathbf{y}^T A\mathbf{x}_0 = \mathbf{ax}_0 = \beta$. Существование такого столбца мы и доказывали.

Глава VI § 1

1. *Обозначим через E_{ij} матрицу размеров $m \times n$, у которой элемент на пересечении i-й строки и j-го столбца равен 1, а остальные элементы равны нулю. Убедитесь, что эти mn матриц образуют базис в линейном пространстве матриц размеров $m \times n$. (Этот базис называется стандартным базисом данного пространства.) Каковы координаты матрицы A с элементами a_{ij} в стандартном базисе?*

Решение. Пусть

$$A = \sum_{i,j} a_{ij} E_{ij} \quad (i = 1, \ldots, m; \quad j = 1, \ldots, n)$$

— линейная комбинация матриц стандартного базиса. Тогда по определению линейных операций с матрицами

$$A = \begin{Vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} \end{Vmatrix}.$$

Это означает, что каждая матрица размеров $m \times n$ (в том числе и нулевая) раскладывается по указанным матрицам. Если в некоторой линейной комбинации этих матриц коэффициент a_{kl} при E_{kl} не равен нулю, то линейная комбинация не может быть нулевой: в остальных членах комбинации соответствующий элемент равен нулю. Отсюда вытекает, что матрицы E_{ij} линейно независимы и образуют базис в пространстве матриц размеров $m \times n$. Отсюда же видно, что координаты матрицы A в стандартном базисе равны ее соответствующим элементам (координата по E_{ij} равна a_{ij}).

2. *Докажите, что верхние треугольные матрицы порядка n образуют линейное пространство по отношению к обычным операциям с матрицами. Найдите размерность этого пространства и какой-нибудь базис в нем.*

Решение. Напомним, что матрица с элементами a_{ij} называется верхней треугольной, если $a_{ij} = 0$ при $i > j$. Пусть матрицы A и B — верхние треугольные. Тогда $a_{ij} + b_{ij} = 0$ при $i > j$. Но сумма этих элементов — соответствующий элемент суммы матриц $A + B$. Таким образом, сумма верхних треугольных матриц также верхняя треугольная. Нулевая матрица, конечно, является верхней треугольной. Кроме того, если A — верхняя треугольная то и $-A$ также верхняя треугольная. Аксиомы, входящие в определение линейного пространства, проверять необходимости нет, так как они выполнены для любых квадратных матриц порядка n, в том числе и для верхних треугольных.

Очевидно, что каждая верхняя треугольная матрица раскладывается по тем матрицам стандартного базиса, которые являются верхними треугольными. Этих матриц столько, сколько в квадратной матрице порядка n есть элементов не ниже главной диагонали, т. е. $n(n+1)/2$, и они линейно независимы. Это означает, что матрицы E_{kl} при $k < l$ составляют базис в пространстве верхних треугольных матриц и размерность этого пространства равна $n(n+1)/2$.

3. *В линейном пространстве многочленов степени* $\leqslant 3$ *от переменной* t *заданы два базиса*: 1, t, t^2, t^3 *и* 1, $t-a$, $(t-a)^2$, $(t-a)^3$. *Найдите матрицу перехода от первого базиса ко второму и с ее помощью разложение многочлена* $p(t)$ *по второму базису.*

Решение. Столбцы матрицы перехода — координатные столбцы новых базисных векторов в старом базисе. Координаты многочлена в стандартном базисе 1, t, t^2, t^3 — это его коэффициенты. Поэтому достаточно выписать в столбцах матрицы коэффициенты многочленов 1, $t-a$, $(t-a)^2$, $(t-a)^3$:

$$S = \begin{Vmatrix} 1 & -a & a^2 & -a^3 \\ 0 & 1 & -2a & 3a^2 \\ 0 & 0 & 1 & -3a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}.$$

Пусть многочлен p имеет координаты $\mathbf{p} = \|\pi_0, \ldots, \pi_3\|^T$ в первом базисе и $\mathbf{p}' = \|\pi'_0, \ldots, \pi'_3\|^T$ во втором. Тогда $\mathbf{p} = S\mathbf{p}'$, и для того, чтобы найти разложение многочлена $p(t)$ по второму базису $\mathbf{p}' = S^{-1}\mathbf{p}$, нужно составить обратную матрицу S^{-1}. Для этого составим и преобразуем матрицу размеров 4×8:

$$D = \left\| \begin{array}{cccc|cccc} 1 & -a & a^2 & -a^3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2a & 3a^2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3a & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right\|.$$

Последнюю строку умножим на $3a$ и прибавим к третьей, ее же умножим на $-3a^2$, прибавим ко второй, а затем, умножив на a^3, прибавим к первой. Это превратит последний столбец левой части D в последний столбец единичной матрицы. Матрица примет вид

$$D' = \left\| \begin{array}{cccc|cccc} 1 & -a & a^2 & 0 & 1 & 0 & 0 & a^3 \\ 0 & 1 & -2a & 0 & 0 & 1 & 0 & -3a^2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3a \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right\|.$$

Теперь третью строку умножаем на $2a$ и прибавляем ко второй, а затем умножаем на $-a^2$ и прибавляем к первой. Это приведет третий столбец к нужному виду

$$D'' = \left\| \begin{array}{cccc|cccc} 1 & -a & 0 & 0 & 1 & 0 & -a^2 & -2a^3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2a & 3a^2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3a \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right\|.$$

Осталось умножить вторую строку на a и прибавить к первой. Левая половина матрицы превратится в единичную матрицу, а правая в

$$S^{-1} = \left\| \begin{array}{cccc} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 0 & 1 & 2a & 3a^2 \\ 0 & 0 & 1 & 3a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right\|.$$

Пусть дан многочлен $p(t) = \pi_0 + \pi_1 t + \pi_2 t^2 + \pi_3 t^3$. Его координатный столбец в первом базисе $\mathbf{p} = \|\pi_0\ \pi_1\ \pi_2\ \pi_3\|^T$, а во втором базисе $\mathbf{p}' = S^{-1}\mathbf{p}$, т. е.

$$\left\| \begin{array}{c} \pi'_0 \\ \pi'_1 \\ \pi'_2 \\ \pi'_3 \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{cccc} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 0 & 1 & 2a & 3a^2 \\ 0 & 0 & 1 & 3a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right\| \cdot \left\| \begin{array}{c} \pi_0 \\ \pi_1 \\ \pi_2 \\ \pi_3 \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{r} \pi_0 + a\pi_1 + a^2\pi_2 + a^3\pi_3 \\ \pi_1 + 2a\pi_2 + 3a^2\pi_3 \\ \pi_2 + 3a\pi_3 \\ \pi_3 \end{array} \right\|. \quad (1)$$

Так выглядит решение с точки зрения линейной алгебры. Однако если от этой точки зрения отойти, то легко заметить, что переход к новому базису — это замена переменной t на переменную $u = t - a$. Следовательно, обратный переход — замена u на $t = u + a$. Это объясняет вид матрицы S^{-1}.

Кроме того, представление многочлена по степеням двучлена $t - a$ — это его разложение по формуле Тейлора в точке a. Поэтому

$$p(t) = p(a) + p'(a)(t-a) + \frac{1}{2}\,p''(a)(t-a)^2 + \frac{1}{6}\,p'''(a)(t-a)^3,$$

где штрих означает дифференцирование по t. Это позволяет проверить правую часть формулы (1).

Стоит заметить также, что обратную матрицу мы вычисляли потому, что это требовалось в условии задачи. Решение системы линейных уравнений $S\mathbf{a}' = \mathbf{a}$ потребовало бы меньшего числа алгебраических операций. Действительно, вычисляя обратную матрицу, мы должны преобразовывать всю правую половину матрицы $\|S|E\|$, а решая систему уравнений, мы преобразуем вместо этого только столбец свободных членов системы.

4. *Как расположены друг относительно друга два базиса* $e_1, \ldots, e_n$ *и* $f_1, \ldots, f_n$, *если матрица перехода от* $\mathbf{e}$ *к* $\mathbf{f}$ *— верхняя треугольная? Докажите из этих соображений, что обратная к верхней треугольной матрице — также верхняя треугольная.*

Р е ш е н и е. Выберем произвольный номер базисного вектора k. Столбец матрицы перехода с номером k содержит координаты вектора f_k в базисе $\mathbf{e}$. В этом столбце могут быть отличными от нуля только первые k элементов. Это означает, что для всех k вектор f_k принадлежит подпространству, натянутому на $e_1, \ldots, e_k$. Ясно, что это условие является как необходимым, так и достаточным для того, чтобы матрица перехода была верхней треугольной.

Нетрудно заметить, что $f_1, \ldots, f_k$ составляют базис в линейной оболочке $e_1, \ldots, e_k$. Поэтому для всех k вектор e_k раскладывается по $f_1, \ldots, f_k$. Это означает, что матрица обратного перехода — верхняя треугольная.

5. *Как ориентированы друг относительно друга два базиса, если* $f_1 = e_1 + e_2$; $f_2 = e_2 + e_3$; $f_3 = e_3 + e_4$; $f_4 = e_4 - e_1$?

Р е ш е н и е. Составим матрицу перехода

$$\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{Vmatrix}.$$

Раскладывая ее определитель по первой строке, видим, что он равен 2. Базисы ориентированы одинаково, так как $2 > 0$.

Глава VI § 2

1. *В линейном пространстве $\mathcal{L}$ заданы векторы a_1, a_2 и a_3 с координатными столбцами*

$$\begin{Vmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{Vmatrix} \quad \begin{Vmatrix} 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{Vmatrix} \quad \begin{Vmatrix} 9 \\ 10 \\ 11 \\ 12 \end{Vmatrix}$$

в базисе e_1, e_2, e_3, e_4. Найдите базис их линейной оболочки $\mathcal{L}'$.

Р е ш е н и е. Обозначим столбцы $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ и $\mathbf{a}_3$ и запишем их координаты в строки матрицы, с тем чтобы элементарные операции производились над строками.

$$\begin{array}{c} \begin{Vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{Vmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \\ \mathbf{a}_3 \end{array}.$$

Вычтем из третьей строки удвоенную вторую строку

$$\begin{array}{c} \begin{Vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ -1 & -2 & -3 & -4 \end{Vmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \\ \mathbf{a}_3 - 2\mathbf{a}_2 \end{array}.$$

Мы видим, что $\mathbf{a}_3 - 2\mathbf{a}_2 = -\mathbf{a}_1$, т. е. $\mathbf{a}_3$ раскладывается по $\mathbf{a}_2$ и $\mathbf{a}_1$ как $\mathbf{a}_3 = 2\mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_1$. Следовательно, по этим векторам раскладывается любая линейная комбинация вида $\alpha_1\mathbf{a}_1 + \alpha_2\mathbf{a}_2 + \alpha_3\mathbf{a}_3$. Действительно, $\alpha_1\mathbf{a}_1 + \alpha_2\mathbf{a}_2 + \alpha_3\mathbf{a}_3 = \alpha_1\mathbf{a}_1 + \alpha_2\mathbf{a}_2 + \alpha_3(2\mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_1)$. Вместе с тем $\mathbf{a}_1$ и $\mathbf{a}_2$ линейно независимы: в этих строках нетрудно усмотреть не равный нулю минор порядка 2. Таким образом, $\mathbf{a}_1$ и $\mathbf{a}_2$ составляют базис $\mathcal{L}'$.

2. *Найдите систему уравнений, задающую подпространство $\mathcal{L}'$ из задачи* 1.

Решение. Вектор $x \in \mathcal{L}'$ тогда и только тогда, когда его координатный столбец раскладывается по $\mathbf{a}_1$ и $\mathbf{a}_2$, т. е. совместна система линейных уравнений

$$\begin{Vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 6 \\ 3 & 7 \\ 4 & 8 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} z_1 \\ z_2 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{Vmatrix} \tag{2}$$

с неизвестными z_1 и z_2. Условие совместности, накладываемое на столбец свободных членов $\mathbf{x}$, является уравнением подпространства $\mathcal{L}'$.

Условие совместности можно получать различными способами. Используем теорему Фредгольма. Сопряженная однородная система имеет матрицу

$$A^T = \begin{Vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{Vmatrix}. \tag{3}$$

Для того чтобы привести ее к упрощенному виду, сначала вычтем из второй строки первую, умноженную на 5. Затем в полученной матрице разделим вторую строку на (-4), а после этого вычтем из первой строки удвоенную вторую:

$$\begin{Vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{Vmatrix} \mapsto \begin{Vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -4 & -8 & -12 \end{Vmatrix} \mapsto \begin{Vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{Vmatrix} \mapsto$$
$$\to \begin{Vmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{Vmatrix}.$$

Теперь мы можем написать фундаментальную матрицу сопряженной однородной системы:

$$F = \begin{Vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -3 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}.$$

Исходная система с неизвестными z_1 и z_2 совместна тогда и только тогда, когда для любого решения $\mathbf{y} = \|y_1 \ y_2 \ y_3 \ y_4\|^T$ сопряженной однородной системы выполнено условие $\mathbf{y}^T\mathbf{x} = 0$. Разумеется, необходимо, чтобы этому условию удовлетворяли столбцы фундаментальной матрицы. Этого также и достаточно, поскольку каждое решение $\mathbf{y}$ раскладывается в линейную комбинацию столбцов фундаментальной матрицы.

Итак, система уравнений подпространства $\mathcal{L}'$ имеет вид

$$F^T\mathbf{x} = \begin{Vmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 0 & 1 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{Vmatrix} = \mathbf{0},$$

или

$$x_1 - 2x_2 + x_3 = 0,$$
$$2x_1 - 3x_2 + x_4 = 0.$$

3. *Найдите какое-нибудь подпространство $\mathcal{M}'$, которое вместе с подпространством $\mathcal{L}'$ из задачи 1 удовлетворяет условию $\mathcal{L} = \mathcal{L}' \oplus \mathcal{M}'$.*

Р е ш е н и е. $\dim \mathcal{L}' + \dim \mathcal{M}' = 4$. Как мы установили, $\dim \mathcal{L}' = 2$, значит, подпространство $\mathcal{M}'$ должно иметь размерность 2. Обозначим через A матрицу системы (2). Ее столбцы — координатные столбцы векторов базиса в пространстве $\mathcal{L}'$. В переводе на матричный язык требование задачи означает, что нужно найти такие два столбца высоты 4, которые вместе со столбцами матрицы A составляли бы линейно независимую систему, могли бы быть объединены в невырожденную матрицу порядка 4. Сделать это нетрудно.

Заметим, что минор матрицы A, расположенный в ее первых двух строках, отличен от нуля, и составим матрицу

$$B = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \\ 1 & 0 & 3 & 7 \\ 0 & 1 & 4 & 8 \end{Vmatrix}.$$

Раскладывая определитель B по первому и второму столбцам, убеждаемся, что он отличен от нуля.

Итак, в качестве $\mathcal{M}'$ можно взять линейную оболочку векторов с координатами $\|0\ 0\ 1\ 0\|^T$ и $\|0\ 0\ 0\ 1\|^T$. Эти векторы вместе с базисом в $\mathcal{L}'$ составляют базис четырехмерного пространства $\mathcal{L}$.

4. *Подпространство $\mathcal{L}'$ определено в задаче* 1, *подпространство $\mathcal{L}''$ натянуто на векторы b_1 и b_2 с координатами* 1, 1, 1, 2 *и* 2, 2, 2, 5. *Найдите* а) *базис в $\mathcal{L}' + \mathcal{L}''$*, б) *базис в $\mathcal{L}' \bigcap \mathcal{L}''$.*

Р е ш е н и е. Начнем с того, что составим матрицу из координатных столбцов всех данных нам векторов. Левая часть матрицы — столбцы $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ и $\mathbf{a}_3$, а правая — столбцы $\mathbf{b}_1$ и $\mathbf{b}_2$:

$$\left\|\begin{array}{rrr|rr} 1 & 5 & 9 & 1 & 2 \\ 2 & 6 & 10 & 1 & 2 \\ 3 & 7 & 11 & 1 & 2 \\ 4 & 8 & 12 & 2 & 5 \end{array}\right\|.$$

Элементарные операции со строками этой матрицы равносильны умножению матрицы слева на соответствующие элементарные матрицы, что, в свою очередь, равносильно умножению на эти элементарные матрицы каждого столбца. Координатный столбец вектора, умноженный слева на элементарную матрицу S, является координатным столбцом того же вектора в некотором другом базисе.

Если элементарными преобразованиями со строками мы приведем эту матрицу к упрощенному виду, то тем самым мы перейдем к такому базису, в который входят те векторы, координатные столбцы которых являются базисными. Итак, для начала из четвертой строки вычтем третью, из третьей — вторую и из второй первую строку:

$$\left\|\begin{array}{rrr|rr} 1 & 5 & 9 & 1 & 2 \\ 2 & 6 & 10 & 1 & 2 \\ 3 & 7 & 11 & 1 & 2 \\ 4 & 8 & 12 & 2 & 5 \end{array}\right\| \mapsto \left\|\begin{array}{rrr|rr} 1 & 5 & 9 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right\|.$$

Теперь переставим строки и вычтем первую строку из всех остальных:

$$\left\|\begin{array}{rrr|rr} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 9 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right\| \mapsto \left\|\begin{array}{rrr|rr} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 8 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right\|.$$

Вычтем третью строку из второй и разделим вторую строку на 4:

$$\left\|\begin{array}{rrr|rr} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 8 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right\| \mapsto \left\|\begin{array}{rrr|rr} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 8 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right\| \mapsto \left\|\begin{array}{rrr|lc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & -1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right\|.$$

Осталось вычесть вторую строку из первой:

$$\left\|\begin{array}{ccr|cc} 1 & 0 & -1 & 0 & 1/4 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & -1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right\|.$$

Теперь видно следующее: ранг матрицы равен 3, а значит $\dim(\mathcal{L}' + \mathcal{L}'') = 3$.

Первый, второй и четвертый столбцы являются базисными, следовательно, в $\mathcal{L}' + \mathcal{L}''$ можно выбрать базис a_1, a_2, b_1.

$\dim \mathcal{L}' = 2$ (Это, впрочем, ясно из результата задачи 1, и, используя этот результат, можно было бы не вставлять в матрицу столбец $\mathbf{a}_3$.) $\dim \mathcal{L}'' = 2$. Сумма размерностей равна 4, а размерность суммы равна 3. Следовательно, $\dim(\mathcal{L}' \cap \mathcal{L}'') = 1$.

Осталось найти базис в $\mathcal{L}' \cap \mathcal{L}''$. Для этого заметим, что какая-либо линейная зависимость между столбцами матрицы определяет вектор в пересечении, если эта зависимость связывает векторы из обеих частей матрицы. Именно, нашем случае, в преобразованной матрице

$$\mathbf{b}_2' = 3\mathbf{b}_1' + (1/4)\mathbf{a}_1' - (1/4)\mathbf{a}_2'.$$

Та же самая зависимость имеет место и между соответствующими векторами, и между столбцами непреобразованной матрицы $\mathbf{b}_2 = 3\mathbf{b}_1 + (1/4)\mathbf{a}_1 - (1/4)\mathbf{a}_2$. Этому равенству можно придать вид

$$3\mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_2 = (1/4)\mathbf{a}_2 - (1/4)\mathbf{a}_1.$$

Обозначим обе части полученного равенства через $\mathbf{z}$:

$$\mathbf{z} = 3\mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_2.$$

Вектор z с координатным столбцом $\mathbf{z}$ раскладывается как по a_1 и a_2, так и по b_1 и b_2, и потому $z \in \mathcal{L}' \cap \mathcal{L}''$. Он не нулевой, так как b_1 и b_2 линейно независимы. Следовательно, $z = 3b_1 - b_2$ может быть принят за базис в $\mathcal{L}' \cap \mathcal{L}''$. Его координатный столбец $3\mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_2$ равен $\|1,\ 1,\ 1,\ 1\|^T$.

5. *В четырехмерном пространстве заданы* а) *четыре подпространства*, б) *пять подпространств*, в) *пять ненулевых подпространств. Может ли их сумма быть прямой*?

Р е ш е н и е. а) Может. Действительно, рассмотрим линейно независимую систему из четырех векторов. Каждый из них — базис в одномерном подпространстве, а вместе они составляют базис четырехмерного пространства. Сумма таких одномерных подпространств является прямой суммой.

б) Может, если хоть одно из подпространств нулевое. Остальные можно выбрать так же, как в пункте (а).

в) Не может. Размерность ненулевого подпространства не меньше 1, и для пяти ненулевых подпространств сумма размерностей больше чем 4.

Глава VI § 3

1. *Все квадратные матрицы порядка* 2 *умножаются справа на матрицу*

$$C = \begin{Vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \end{Vmatrix}.$$

Этим определено отображение A *пространства матриц порядка* 2 *в пространство матриц размеров* 2×3. а) *Найдите матрицу этого отображения в стандартных базисах* (*задача 1 § 1*). б) *Найдите базис в* $\operatorname{Ker} \mathsf{A}$. в) *Найдите базис в* $\operatorname{Im} \mathsf{A}$.

Решение. По определению матрицы линейного отображения ее столбцы — координатные столбцы образов базисных векторов. Поэтому сначала найдем образы векторов стандартного базиса в пространстве $\mathcal{M}_{2\times 2}$ квадратных матриц второго порядка:

$$P_1 = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix};$$

$$P_2 = \begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix};$$

$$P_3 = \begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{Vmatrix};$$

$$P_4 = \begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 6 \end{Vmatrix}.$$

Разложим эти образы по стандартному базису в $M_{2\times 3}$:

$$P_1 = \begin{Vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix} = 1 \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix} + 2 \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix} + 3 \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix} = \\ = 1E_{1,1} + 2E_{1,2} + 3E_{1,3}.$$

Аналогично,

$$P_2 = 2E_{1,1} + 4E_{1,2} + 6E_{1,3};$$

$$P_3 = 1E_{2,1} + 2E_{2,2} + 3E_{2,3};$$
$$P_4 = 2E_{2,1} + 4E_{2,2} + 6E_{2,3}.$$

Теперь несложно выписать матрицу отображения:

$$A = \begin{Vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 0 \\ 3 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 6 \end{Vmatrix}.$$

Второй и четвертый столбцы этой матрицы пропорциональны соответственно первому и третьему. Первый и третий столбцы линейно независимы. Поэтому $\dim \operatorname{Im} \mathsf{A} = \operatorname{Rg} \mathsf{A} = 2$.

б) Ядро A определяется однородной системой линейных уравнений с матрицей A. В качестве фундаментальной матрицы этой системы, как легко видеть, можно выбрать матрицу

$$\begin{Vmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 0 & -1 \end{Vmatrix}.$$

Ее столбцы — координатные столбцы матриц, составляющих базис в $\operatorname{Ker} \mathsf{A}$. Значит, этот базис состоит из матриц

$$\begin{Vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ 2 & -1 \end{Vmatrix}.$$

в) В матрице отображения можно принять первый и третий столбцы за базисные. Это координатные столбцы матриц

$$\begin{Vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{Vmatrix},$$

составляющих базис в множестве значений.

2. *Какому условию должна удовлетворять матрица* C *размеров* 2×3, *для того чтобы отображение* A, *определенное в задаче* 1, *было инъективным*? *Может ли оно быть сюръективным*?

Решение. Если вернуться к матрице A из решения задачи 1, то видно, что пропорциональность ее столбцов вызвана пропорциональностью строк C. При $\operatorname{Rg} C = 2$ как в верхней половине A, так и в ее нижней половине найдется минор второго порядка, отличный от нуля, а значит, $\operatorname{Rg} A$ будет равен 4. Ясно, что условие $\operatorname{Rg} C = 2$ является также и необходимым. Для инъективности отображения необходимо и достаточно, чтобы столбцы его матрицы были линейно независимы, а следовательно, необходимо и достаточно, чтобы $\operatorname{Rg} C = 2$.

Сюръективным такое отображение быть не может, так как $\dim \operatorname{Im} \mathsf{A} \leqslant \dim \mathcal{M}_{2\times 2} = 4$, а $\dim \mathcal{M}_{2\times 3} = 6 > 4$.

3. *Пусть* $\mathcal{C}^k$ — *линейное пространство функций, имеющих* $k > 1$ *непрерывных производных на отрезке* $[0, 1]$. *Дифференцирование отображает* $\mathcal{C}^k$ *в* $\mathcal{C}^{k-1}$. *Проверьте, что это линейное отображение. Будет ли оно* а) *инъективным*, б) *сюръективным*?

Решение. Если f, $g \in \mathcal{C}^k$, то

$$\frac{d}{dx}(f+g) = \frac{df}{dx} + \frac{dg}{dx}.$$

Кроме того, для любого числа c

$$\frac{d}{dx}(cf) = c\,\frac{df}{dx}.$$

Этим устанавливается линейность отображения.

а) Отображение не будет инъективным, так как при любом числе c

$$\frac{d}{dx}(f+c) = \frac{df}{dx}.$$

б) Отображение будет сюръективным, так как каждая непрерывная на отрезке функция имеет первообразную.

4. *Пусть* $\mathsf{A} : \mathcal{L} \to \overline{\mathcal{L}}$ *и* $\mathcal{M} = \mathsf{A}(\mathcal{L})$. *Определим отображение* $\mathsf{A}' : \mathcal{L} \to \mathcal{M}$ *равенством* $\mathsf{A}'(x) = \mathsf{A}(x)$. *Докажите, что* а) $\operatorname{Ker} \mathsf{A}' = \operatorname{Ker} \mathsf{A}$, б) $\operatorname{Rg} \mathsf{A}' = \operatorname{Rg} \mathsf{A}$, в) A' *сюръективно*.

Решение. а) $\operatorname{Ker} \mathsf{A}' = \operatorname{Ker} \mathsf{A}$ следует из того, что в силу $\mathsf{A}'(x) = \mathsf{A}(x)$ равенство $\mathsf{A}(x) = o$ равносильно $\mathsf{A}'(x) = o$.

б) Оба отображения имеют одно и то же множество значений $\operatorname{Im} \mathsf{A}' = \operatorname{Im} \mathsf{A} = \mathcal{M}$, а ранг отображения — это размерность его множества значений.

в) A' сюръективно, так как его множество значений совпадает с тем пространством, в которое A' отображает $\mathcal{L}$.

5. *Пусть* $\mathcal{L} = \mathcal{L}_1 \oplus \mathcal{L}_2$ *и* $x = x_1 + x_2$, $x_1 \in \mathcal{L}_1$, $x_2 \in \mathcal{L}_2$. *Определим преобразования* P_1 *и* P_2 *пространства* $\mathcal{L}$ *формулами*:

$\mathsf{P}_1(x) = x_1$ *и* $\mathsf{P}_2(x) = x_2$ (*такие преобразования называются проектированиями*). *Докажите, что*

$$\mathsf{P}_1 + \mathsf{P}_2 = \mathsf{E}, \quad \mathsf{P}_1\mathsf{P}_2 = \mathsf{P}_2\mathsf{P}_1 = \mathsf{O}, \quad \mathsf{P}_i^2 = \mathsf{P}_i \quad (i = 1, 2),$$

где O — *нулевое, а* E — *тождественное преобразования.*

Решение. а) По определению суммы преобразований $(\mathsf{P}_1 + \mathsf{P}_2)(x) = \mathsf{P}_1(x) + \mathsf{P}_2(x)$. Поэтому $(\mathsf{P}_1 + \mathsf{P}_2)(x) = x_1 + x_2 = x$, как и требовалось.

б) Разложение произвольного вектора $x = x_1 + x_2$ единственно, а следовательно, вектор $x_1 \in \mathcal{L}_1$ раскладывается как $x_1 = x_1 + o$. Поэтому для любого вектора x выполнено $\mathsf{P}_2\mathsf{P}_1(x) = \mathsf{P}_2(x_1) = o$. Таким образом, $\mathsf{P}_2\mathsf{P}_1 = \mathsf{O}$. Аналогично доказывается, что $\mathsf{P}_1\mathsf{P}_2 = \mathsf{O}$.

в) Для любого вектора x выполнено $\mathsf{P}_1^2(x) = \mathsf{P}_1(\mathsf{P}_1(x)) = \mathsf{P}_1(x_1) = x_1$. Поэтому $\mathsf{P}_1^2(x)$ совпадает с P_1. Второе равенство доказывается так же.

6. *Для любого линейного отображения* $\mathsf{A} : \mathcal{L} \to \overline{\mathcal{L}}$ *найдутся такие базисы в* $\mathcal{L}$ *и* $\overline{\mathcal{L}}$, *что* A *будет иметь матрицу*

$$A' = \left\| \begin{array}{c|c} E_r & O \\ \hline O & O \end{array} \right\| \tag{4}$$

(E_r — *единичная подматрица порядка* r, *остальные элементы, если они есть, равны нулю.*) *Докажите эту теорему, приводя матрицу линейного отображения элементарными преобразованиями строк и столбцов к виду* (4).

Решение. Пусть в некоторой паре базисов отображение $\mathsf{A} : \mathcal{L} \to \overline{\mathcal{L}}$ задается матрицей A размеров $m \times n$.

Известно, что произвольную матрицу A элементарными преобразованиями строк можно привести к матрице A_1 упрощенного вида. Это равносильно умножению A слева на невырожденную матрицу Q, так что $QA = A_1$.

Теперь к матрице A_1 будем применять элементарные преобразования столбцов: переставим все базисные столбцы на первые $r = \operatorname{Rg} A$ мест, а из каждого небазисного столбца вычтем ту линейную комбинацию базисных столбцов, в которую он раскладывается. Эти преобразования равносильны умножению матрицы A_1 справа на невырожденную матрицу S и приводят A_1 к нужному нам виду A'.

Итак, нашлись невырожденная матрица Q порядка m и невырожденная матрица S порядка n, такие что $A' = QAS$. Обозначив Q^{-1} через P, мы получаем

$$A' = P^{-1}AS.$$

Это означает, что сделав замену базисов в пространствах $\mathcal{L}$ и $\overline{\mathcal{L}}$ с матрицами перехода соответственно S и P, мы придем к базисам, в которых отображение A задается матрицей A'.

7. *Пусть* A — *линейное отображение. Верно ли, что* а) $\mathsf{A}(\mathcal{L}' \cap \mathcal{L}'') = \mathsf{A}(\mathcal{L}') \cap \mathsf{A}(\mathcal{L}'')$, б) $\mathsf{A}(\mathcal{L}' \cap \mathcal{L}'') \subseteq \mathsf{A}(\mathcal{L}') \cap \mathsf{A}(\mathcal{L}'')$?

Решение. Начнем со включения (б). Пусть $x \in \mathcal{L}' \cap \mathcal{L}''$. Так как $x \in \mathcal{L}'$, имеем $\mathsf{A}(x) \in \mathsf{A}(\mathcal{L}')$. Точно так же $\mathsf{A}(x) \in \mathsf{A}(\mathcal{L}'')$. Следовательно, включение $\mathsf{A}(\mathcal{L}' \cap \mathcal{L}'') \subseteq \mathsf{A}(\mathcal{L}') \cap \mathsf{A}(\mathcal{L}'')$ справедливо во всех случаях.

а) Равенство (а) может быть неверно. В качестве примера возьмем двумерное арифметическое пространство R^2 и его отображение в R, задаваемое формулой

$$\mathsf{A}\left(\begin{Vmatrix} x \\ y \end{Vmatrix}\right) = x.$$

Рассмотрим подпространство $\mathcal{L}'$, состоящее из столбцов вида $\|x \ x\|^T$, и подпространство $\mathcal{L}''$ из столбцов вида $\|x \ \ -x\|^T$. Ясно, что $\mathsf{A}(\mathcal{L}') = \mathsf{R}$ и $\mathsf{A}(\mathcal{L}'') = \mathsf{R}$, и потому $\mathsf{A}(\mathcal{L}') \cap \mathsf{A}(\mathcal{L}'') = \mathsf{R}$. Но $\mathcal{L}' \cap \cap \mathcal{L}'' = \{o\}$, а значит, $\mathsf{A}(\mathcal{L}' \cap \mathcal{L}'') = \{o\}$.

8. *Докажите, что ранг произведения отображений не превосходит рангов этих отображений. (Это будет еще одним доказательством оценки ранга произведения матриц из § 3 гл. V.)*

Решение. Рассмотрим линейные отображения $\mathsf{A}\colon \mathcal{L} \to \mathcal{L}'$ и $\mathsf{B}\colon \mathcal{L}' \to \mathcal{L}''$. Вспомним, что ранг отображения — это размерность его множества значений. Множество значений произведения BA есть $\mathsf{B}(\operatorname{Im}\mathsf{A})$, и его размерность не превосходит размерности $\operatorname{Im}\mathsf{A}$. Поэтому $\operatorname{Rg}\mathsf{BA} \leqslant \operatorname{Rg}\mathsf{A}$.

С другой стороны, $\mathsf{B}(\operatorname{Im}\mathsf{A}) \subseteq \mathsf{B}(\mathcal{L}')$, а размерность подпространства не превосходит размерности пространства. Это означает, что $\operatorname{Rg}\mathsf{BA} \leqslant \operatorname{Rg}\mathsf{B}$.

9. *Пусть* B *инъективно. Докажите, что для любого* A *выполнено* $\operatorname{Rg}\mathsf{BA} = \operatorname{Rg}\mathsf{A}$.

Решение. Воспользуемся обозначениями задачи 8. Инъективное отображение переводит линейно независимую систему векторов в линейно независимую. Следовательно, $\dim \mathsf{B}(\mathcal{M}) = \dim \mathcal{M}$ для любого подпространства $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{L}'$. В частности, $\dim \mathsf{B}(\operatorname{Im} \mathsf{A}) = \dim \operatorname{Im} \mathsf{A}$, а это другая запись доказываемого равенства.

Это еще одно решение задачи 8 § 3 гл. V.

Глава VI § 4

1. *Докажите, что каждое подпространство* $\mathcal{L}'$, *лежащее в* $\operatorname{Ker} \mathsf{A}$, *и каждое подпространство* $\mathcal{L}''$, *содержащее* $\operatorname{Im} \mathsf{A}$, *инвариантны относительно* A.

Решение. Инвариантность подпространств $\mathcal{L}'$ и $\mathcal{L}''$ означает, что $\mathsf{A}(\mathcal{L}') \subseteq \mathcal{L}'$ и $\mathsf{A}(\mathcal{L}'') \subseteq \mathcal{L}''$.

а) Пусть $\mathcal{L}' \subseteq \operatorname{Ker} \mathsf{A}$. Тогда $\mathsf{A}(\mathcal{L}') = \{o\} \in \mathcal{L}'$.

б) Пусть $\operatorname{Im} \mathsf{A} \subseteq \mathcal{L}''$. Тогда $\mathsf{A}(\mathcal{L}'') \subseteq \operatorname{Im} \mathsf{A} \subseteq \mathcal{L}''$.

2. *Докажите, что сумма и пересечение инвариантных подпространств инвариантны.*

Решение. а) Пусть $\mathcal{L}'$ и $\mathcal{L}''$ инвариантны относительно A и $x \in \mathcal{L}' + \mathcal{L}''$. Тогда $x = x' + x''$, где $x' \in \mathcal{L}'$ и $x'' \in \mathcal{L}''$. Поэтому $\mathsf{A}(x) = \mathsf{A}(x') + \mathsf{A}(x'')$. В силу инвариантности подпространств $\mathsf{A}(x') \in \mathcal{L}'$ и $\mathsf{A}(x'') \in \mathcal{L}''$. Отсюда следует, что $\mathsf{A}(x) \in \mathcal{L}' + \mathcal{L}''$ и

$$\mathsf{A}(\mathcal{L}' + \mathcal{L}'') \subseteq \mathcal{L}' + \mathcal{L}''.$$

б) Пусть $\mathcal{L}'$ и $\mathcal{L}''$ инвариантны относительно A и $x \in \mathcal{L}' \cap \mathcal{L}''$. Это означает, что $x \in \mathcal{L}'$ и потому $\mathsf{A}(x) \in \mathcal{L}'$, а также что $x \in \mathcal{L}''$ и потому $\mathsf{A}(x) \in \mathcal{L}''$. Таким образом, $\mathsf{A}(x) \in \mathcal{L}' \cap \mathcal{L}''$.

3. *Пусть* A — *линейное преобразование вещественного пространства,* λ — *комплексный корень его характеристического многочлена,* $p = (\lambda + \bar{\lambda})/2$ *и* $q = \lambda\bar{\lambda}$. *Докажите, что размерность подпространства* $\mathcal{L}' = \operatorname{Ker} (\mathsf{A}^2 - pA + qE)$ — *четное число.*

Решение. Известно, что в $\mathcal{L}'$ не содержится ни одного собственного вектора. Допустим, что размерность $\mathcal{L}'$ нечетная. Тогда ограничение A на $\mathcal{L}'$ имеет характеристический многочлен нечетной степени и, следовательно, вещественное характеристическое число. Поэтому в подпространстве $\mathcal{L}'$ содержится собственный вектор, и наше предположение приводит к противоречию.

4. *Пусть* $\mathsf{A}\colon \mathcal{L} \to \mathcal{L}$. *Докажите, что* $\mathcal{L} = \operatorname{Ker} \mathsf{A} \oplus \operatorname{Im} \mathsf{A}$ *тогда и только тогда, когда* $\operatorname{Ker} \mathsf{A}^2 = \operatorname{Ker} \mathsf{A}$.

Р е ш е н и е. Если $\mathsf{A}(x) = o$, то и $\mathsf{A}^2(x) = o$. Это означает, что $\operatorname{Ker}\mathsf{A} \subseteq \operatorname{Ker}\mathsf{A}^2$. Если $\operatorname{Ker}\mathsf{A} \neq \operatorname{Ker}\mathsf{A}^2$, то найдется вектор z, для которого $\mathsf{A}^2(z) = o$, но $\mathsf{A}(z) \neq o$. Образ такого вектора $w = \mathsf{A}(z) \in \in \operatorname{Ker}\mathsf{A}$ и $w \in \operatorname{Im}\mathsf{A}$. Поскольку $w \neq o$, мы можем заключить, что $\operatorname{Ker}\mathsf{A} \cap \operatorname{Im}\mathsf{A} \neq \{o\}$, и сумма этих подпространств не является прямой.

Обратное доказывается аналогично. Если сумма не прямая, существует ненулевой вектор $w \in \operatorname{Ker}\mathsf{A} \cap \operatorname{Im}\mathsf{A}$. Так как $w \in \operatorname{Im}\mathsf{A}$, найдется вектор z, такой что $w = \mathsf{A}(z)$. Так как $w \in \operatorname{Ker}\mathsf{A}$, для вектора z выполнено $\mathsf{A}^2(z) = o$, т. е. $z \in \operatorname{Ker}\mathsf{A}^2$. Но $w \neq o$, а значит, $z \notin \operatorname{Ker}\mathsf{A}$. В результате $\operatorname{Ker}\mathsf{A}^2 \neq \operatorname{Ker}\mathsf{A}$.

5. *Пусть* $\mathcal{L} = \operatorname{Ker}\mathsf{A} \oplus \operatorname{Im}\mathsf{A}$. *Какой вид имеет матрица преобразования* A *в базисе* $\mathbf{e}$, *если* $e_1, \ldots, e_r \in \operatorname{Im}\mathsf{A}$, *а* $e_{r+1}, \ldots \ldots, e_n \in \operatorname{Ker}\mathsf{A}$?

Р е ш е н и е. Матрица преобразования состоит из координатных столбцов образов базисных векторов. Во-первых, если $e_{r+1}, \ldots, e_n \in \operatorname{Ker}\mathsf{A}$, то эти векторы переходят в нулевой, и последние $n - r$ столбцов матрицы нулевые.

Во-вторых, образы векторов $e_1, \ldots, e_r$ лежат в $\operatorname{Im}\mathsf{A}$ (как и образы вообще всех векторов) и потому раскладываются по базису этого подпространства, т. е. их компоненты по $e_{r+1}, \ldots, e_n$ равны нулю.

Таким образом, в матрице могут отличаться от нуля только элементы квадратной клетки A' порядка r, расположенной в левом верхнем углу. Так как $\operatorname{Rg} A' = \operatorname{Rg} A = r$, подматрица A' невырождена.

Возводя в квадрат матрицу такого вида, нетрудно получить еще одно решение задачи 4.

6. *В некотором базисе преобразование задано матрицей*

$$A = \begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix}.$$

Существует ли базис, в котором его матрица диагональная? Если да, то найдите этот базис.

Р е ш е н и е. Составим и решим характеристическое уравнение:

$$\det \begin{Vmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{Vmatrix} = \lambda^2 - 1 = 0.$$

Отсюда собственные значения $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$.

Система уравнений $(A - \lambda_1 E)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ равносильна уравнению $\|-1\ 1\|\mathbf{x} = 0$ и имеет фундаментальную матрицу из одного столбца $\mathbf{f}_1 = \|1\ 1\|^T$. При $\alpha \neq 0$ любой вектор с координатным столбцом вида $\alpha\mathbf{f}_1$ является собственным вектором, принадлежащим собственному значению $\lambda_1 = 1$.

Аналогично для собственного значения $\lambda_2 = -1$ находим, что базисный вектор в соответствующем собственном подпространстве имеет координатный столбец $\mathbf{f}_2 = \|1\ \ -1\|$.

Найденные собственные векторы составляют базис, в котором матрица преобразования имеет диагональный вид. Проверим это. Матрица перехода к этому базису

$$S = \begin{Vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{Vmatrix}, \quad \text{а ее обратная} \quad S^{-1} = \frac{1}{2}\begin{Vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{Vmatrix}.$$

Вычислим

$$S^{-1}AS = \frac{1}{2}\begin{Vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{Vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2}\begin{Vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{Vmatrix}.$$

7. *Найдите собственные значения и собственные подпространства преобразования, заданного матрицей*

$$\begin{Vmatrix} 3 & -2 & 6 \\ -2 & 6 & 3 \\ 6 & 3 & -2 \end{Vmatrix}.$$

Р е ш е н и е. Составим характеристическое уравнение:

$$\det\begin{Vmatrix} 3-\lambda & -2 & 6 \\ -2 & 6-\lambda & 3 \\ 6 & 3 & -2-\lambda \end{Vmatrix} = 0.$$

Прибавим вторую и третью строку к первой и вынесем общий множитель из получившейся строки за знак детерминанта:

$$(7-\lambda)\det\begin{Vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 6-\lambda & 3 \\ 6 & 3 & -2-\lambda \end{Vmatrix} = 0.$$

Отсюда находим собственное значение $\lambda_1 = 7$. Далее множитель $(7 - \lambda)$ можно отбросить. В оставшейся матрице ко второй строке прибавим удвоенную первую, а из третьей строки вычтем первую, умноженную на 6. Мы получим

$$\det \begin{Vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 8-\lambda & 5 \\ 0 & -3 & -8-\lambda \end{Vmatrix} = \det \begin{Vmatrix} 8-\lambda & 5 \\ -3 & -8-\lambda \end{Vmatrix} = \lambda^2 - 49 = 0.$$

Итак, преобразование имеет кратное собственное значение $\lambda_1 = 7$ и собственное значение $\lambda_2 = -7$.

Составим матрицу $A - 7E$:

$$\begin{Vmatrix} -4 & -2 & 6 \\ -2 & -1 & 3 \\ 6 & 3 & -9 \end{Vmatrix}.$$

Ее строки пропорциональны, и, следовательно, $\mathrm{Rg}\,(A - 7E) = 1$. Система $(A - 7E)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ эквивалентна системе $\|2 \;\; 1 \;\; -3\|\mathbf{x} = \mathbf{0}$ и имеет фундаментальную матрицу

$$F_1 = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 3 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}.$$

Это означает, что собственное подпространство, соответствующее $\lambda_1 = 7$, — линейная оболочка векторов с координатными столбцами $\|1 \;\; -2 \;\; 0\|^T$ и $\|0 \;\; 3 \;\; 1\|^T$.

Составим матрицу $A + 7E$:

$$\begin{Vmatrix} 10 & -2 & 6 \\ -2 & 13 & 3 \\ 6 & 3 & 5 \end{Vmatrix}.$$

Если кратность корня равна 1, то размерность собственного пространства тоже 1 и, значит, $\mathrm{Rg}\,(A + 7E) = 2$. Поэтому, если мы уверены в вычислениях, можем без проверки взять любые две непропорциональные строки матрицы:

$$\begin{Vmatrix} 6 & 3 & 5 \\ 10 & -2 & 6 \end{Vmatrix}.$$

Сначала вычтем первую строку из второй, затем полученную вторую строку умножим на 5 и вычтем из первой. Разделим полученную первую строку на -14:

$$\begin{Vmatrix} 6 & 3 & 5 \\ 4 & -5 & 1 \end{Vmatrix} \mapsto \begin{Vmatrix} -14 & 28 & 0 \\ 4 & -5 & 1 \end{Vmatrix} \mapsto \begin{Vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 4 & -5 & 1 \end{Vmatrix}.$$

И, наконец, множим первую строку на 4 и вычитаем из второй:

$$\begin{Vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{Vmatrix}.$$

Система $(A+7E)\mathbf{x}=\mathbf{0}$ эквивалентна системе с такой матрицей и имеет фундаментальную матрицу F_2 из одного столбца $F_2 = \|2\ 1\ \ -3\|^T$. Это означает, что собственное подпространство, соответствующее $\lambda_1=-7$, натянуто на вектор с координатным столбцом $\|2\ 1\ \ -3\|^T$.

8. *Каждой квадратной матрице порядка n ставится в соответствие ее транспонированная матрица. Этим определено преобразование T пространства матриц. Найдите его собственные значения и собственные подпространства. Докажите из этих соображений, что каждая матрица однозначно представляется как сумма симметричной и кососимметричной.*

Решение. Для произвольной матрицы A выполнено равенство $(A^T)^T = A$, или, в другой записи, $\mathsf{T}^2(A)=A$. Это означает, что многочлен t^2-1 является аннулирующим для преобразования T — результат подстановки преобразования в данный многочлен есть нулевое преобразование O.

Все собственные значения преобразования являются корнями любого его аннулирующего многочлена. Действительно, пусть $f(t)=a_0+a_1t=\ldots+a_kt^k$ — аннулирующий многочлен преобразования A. Тогда из $\mathsf{A}(x)=\lambda x$ следует, что

$$f(\mathsf{A})(x) = a_0x + a_1\mathsf{A}(x)+\ldots+a_k\mathsf{A}^k(x) = \\ = (a_0+a_1\lambda+\ldots+a_k\lambda^k)x = f(\lambda)x = o.$$

Если x — собственный вектор, то он отличен от нуля и необходимо, чтобы $f(\lambda)=0$.

Итак, преобразование T не может иметь собственных значений, отличных от 1 и -1. Легко проверить, что эти числа действительно являются собственными значениями: для симметричной матрицы $\mathsf{T}(A)=A$, а для кососимметричной $\mathsf{T}(A)=-A$. Обратно, если матрица A принадлежит собственному подпространству с собственным значением 1, то она является симметричной, а если принадлежит собственному подпространству с собственным значением -1, то кососимметричной. Поэтому собственными подпространствами являются подпространство симметричных матриц (размерности $n(n+1)/2$) и подпространство кососимметричных матриц (размерности $n(n-1)/2$).

Сумма собственных подпространств всегда прямая, размерность их суммы равна сумме размерностей. В нашем случае сумма размерностей равна n, и мы видим, что все пространство — прямая сумма собственных подпространств, а значит, любая квадратная матрица однозначно раскладывается в сумму симметричной и кососимметричной матриц.

9. *Пусть* A — *поворот трехмерного векторного пространства вокруг некоторой оси на угол* α *и* A — *матрица этого поворота в некотором базисе. Выразите* α *через элементы* A.

Р е ш е н и е. Выберем ортонормированный базис, связанный с данным поворотом пространства: вектор $\vec{e}_3$ направим вдоль оси вращения так, чтобы с его конца вращение в плоскости векторов $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ было видно против часовой стрелки. В таком базисе поворот будет иметь матрицу

$$A' = \begin{Vmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}.$$

След этой матрицы равен $\operatorname{tr} A' = 2\cos\alpha + 1$, откуда $\cos\alpha = \frac{1}{2}(\operatorname{tr} A' - 1)$. Вспомним, что след матрицы линейного преобразования инвариантен — он один и тот же, в каком бы базисе мы ни написали матрицу преобразования. Поэтому $\operatorname{tr} A = \operatorname{tr} A'$ и

$$\cos\alpha = \frac{1}{2}(\operatorname{tr} A - 1).$$

10. *Пусть* A *диагонализуемо. Докажите, что ограничение* A *на любом инвариантном подпространстве также диагонализуемо.*

Р е ш е н и е. Пусть A' — ограничение линейного преобразования A на каком-либо инвариантном подпространстве. Доказано (К. терема 4 § 4 гл. VI), что преобразование A диагонализуемо тогда и только тогда, когда оно удовлетворяет уравнению $r(\mathsf{A}) = \mathsf{O}$, где $r(t)$ — некоторый многочлен без кратных (а для вещественного пространства и комплексных) корней. Если $r(t)$ — такой многочлен и $r(\mathsf{A}) = \mathsf{O}$, то очевидно, что и $r(\mathsf{A}') = \mathsf{O}$. Отсюда прямо следует требуемое заключение.

11. *Преобразование* A *задано матрицей*

$$A = \begin{Vmatrix} -2 & 4 & -1 \\ -5 & 8 & -2 \\ -9 & 13 & -3 \end{Vmatrix}.$$

Найдите матрицу перехода к какому-нибудь базису, в котором его матрица верхняя треугольная, а также матрицу преобразования в этом базисе.

Р е ш е н и е. Выпишем $\det(A - \lambda E)$ и прибавим в нем второй и третий столбцы к первому:

$$\begin{vmatrix} -2-\lambda & 4 & -1 \\ -5 & 8-\lambda & -2 \\ -9 & 13 & -3-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 4 & -1 \\ 1-\lambda & 8-\lambda & -2 \\ 1-\lambda & 13 & -3-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (1-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 1 & 8-\lambda & -2 \\ 1 & 13 & -3-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Это позволяет указать один из корней: $\lambda = 1$. В оставшемся детерминанте вычтем первую строку из второй и третьей и после этого разложим детерминант по первому столбцу. Мы получим

$$\begin{vmatrix} 4-\lambda & -1 \\ 9 & -2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0.$$

Таким образом, найденный нами корень $\lambda = 1$ имеет кратность 3.

Первый вектор искомого базиса должен быть собственным. Найдем собственное подпространство $\operatorname{Ker}(\mathsf{A} - \mathsf{E})$:

$$A - E = \begin{Vmatrix} -3 & 4 & -1 \\ -5 & 7 & -2 \\ -9 & 13 & -4 \end{Vmatrix}.$$

Любые две строки этой матрицы линейно независимы. Возьмем подматрицу, состоящую из двух первых строк, и приведем ее к упрощенному виду:

$$\begin{Vmatrix} -3 & 4 & -1 \\ -5 & 7 & -2 \end{Vmatrix} \mapsto \begin{Vmatrix} -3 & 4 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{Vmatrix} \mapsto \begin{Vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{Vmatrix} \mapsto \begin{Vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{Vmatrix}.$$

Фундаментальной матрицей системы $(A - E)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ будет $\|1\ 1\ 1\|^T$, и за первый базисный вектор может быть принят вектор e_1 с координатным столбцом $\|1\ 1\ 1\|^T$.

Как видно из доказательства теоремы, два первых вектора искомого базиса должны лежать в $\operatorname{Im}(\mathsf{A}-\mathsf{E})$. Координатные столбцы векторов из $\operatorname{Im}(\mathsf{A}-\mathsf{E})$ составляют линейную оболочку столбцов матрицы $A-E$. Так как $\dim\operatorname{Im}(\mathsf{A}-\mathsf{E}) = \operatorname{Rg}(A-E) = 2$, базисными являются любые два столбца матрицы, скажем первый и третий (с обратными знаками): $\|3\quad 5\quad 9\|^T$ и $\|1\quad 2\quad 4\|^T$. Вычитая удвоенный третий из первого, убеждаемся, что $e_1 \in \operatorname{Im}(\mathsf{A}-\mathsf{E})$. В качестве второго базисного вектора можно взять e_2 с координатным столбцом $\|1\ 2\ 4\|^T$.

Базисный вектор e_3 выбираем произвольно, лишь бы все три вектора были линейно независимы. Например, можно оставить базисным третий вектор исходного базиса. Тогда матрицей перехода к искомому базису будет матрица

$$S = \begin{Vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \end{Vmatrix}.$$

Для того чтобы получить матрицу преобразования A в новом базисе (и заодно проверить результат), вычислим матрицу $S^{-1}AS$:

$$\begin{Vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 1 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} -2 & 4 & -1 \\ -5 & 8 & -2 \\ -9 & 13 & -3 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}.$$

12. *Пусть матрица A невырождена. Представьте матрицу A^{-1} как многочлен от A.*

Р е ш е н и е. Пусть $p(t) = a_0 + a_1 t + \ldots + a_n t^n$ — характеристический многочлен матрицы A. В нем $a_0 = \det A$, а значит, для невырожденной матрицы $a_0 \neq 0$. Согласно теореме Гамильтона–Кэли $a_0 E + a_1 A + \ldots + a_n A^n = O$. Перенесем член $a_0 E$ в правую часть равенства, а в левой вынесем множитель A за скобки:

$$A(a_1 E + a_2 A + \ldots + a_n A^{n-1}) = -a_0 E.$$

Осталось разделить равенство на $-a_0$, для того чтобы убедиться, что

$$A^{-1} = -\frac{1}{a_0}\,(a_1 E + a_2 A + \ldots + a_n A^{n-1}).$$

13. *Пусть преобразование* A *удовлетворяет соотношению* $\mathsf{A}^2 = \mathsf{A}$. *Докажите, что* $\operatorname{Rg}\mathsf{A} = \operatorname{tr}\mathsf{A}$.

Р е ш е н и е. A удовлетворяет уравнению $t^2 - t = 0$, имеющему некратные корни 0 и 1. По теореме 4 (К. § 4 гл. VI) оно диагонализуемо и не может иметь собственных значений, отличных от 0 и 1. Значит, существует базис, в котором матрица A преобразования диагональная и имеет на диагонали r единиц и $n - r$ нулей, причем r может принимать значения от 0 до n. Для такой матрицы и ранг, и след равны числу единиц r. Поскольку ранг и след матрицы не зависят от базиса, мы получаем требуемое равенство.

14*. *Пусть в некотором базисе n-мерного пространства $\mathcal{L}$ линейное преобразование A задано матрицей A, а $(n-1)$-мерное подпространство $\mathcal{L}'$ — уравнением $\mathbf{u}^T\mathbf{x} = 0$. Докажите, что $\mathcal{L}'$ инвариантно относительно A тогда и только тогда, когда существует такой множитель λ, что $A^T\mathbf{u} = \lambda\mathbf{u}$.*

Р е ш е н и е. Инвариантность подпространства $\mathcal{L}'$ означает, что для любого вектора x из $\mathcal{L}'$ образ $\mathsf{A}(x)$ принадлежит $\mathcal{L}'$, или, подробнее, для любого столбца $\mathbf{x}$, удовлетворяющего уравнению $\mathbf{u}^T\mathbf{x} = 0$, выполнено $\mathbf{u}^T A\mathbf{x} = 0$.

Рассмотрим равенство $\lambda\mathbf{u} = A^T\mathbf{u}$ как систему из n линейных уравнений с одной неизвестной λ. По теореме Фредгольма решение существует тогда и только тогда, когда для каждого решения $\mathbf{x}$ транспонированной однородной системы $\mathbf{u}^T\mathbf{x} = 0$ выполнено равенство $(A^T\mathbf{u})^T\mathbf{x} = 0$, или $\mathbf{u}^T A\mathbf{x} = 0$. Это и есть доказываемое утверждение.

Глава VI § 5

1. *Может ли для линейной функции на линейном пространстве $\mathcal{L}$ для всех $x \in \mathcal{L}$ выполняться неравенство* а) $\mathsf{f}(x) > 0$, б) $\mathsf{f}(x) \geqslant 0$?

Р е ш е н и е. а) Нет. Для любой линейной функции $\mathsf{f}(o) = 0$. б) Возможно только для нулевой функции, так как если $\mathsf{f}(x) > 0$, то $\mathsf{f}(-x) < 0$.

2. *Пусть $\vec{a}$ — фиксированный вектор плоскости. Поставим в соответствие каждому вектору $\vec{x}$ площадь ориентированного параллелограмма, построенного на $\vec{x}$ и $\vec{a}$, или 0, если векторы коллинеарны. Проверьте, что эта функция линейна, и найдите строку ее коэффициентов в базисе $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, если $\vec{a} = \alpha\vec{e}_1 + \beta\vec{e}_2$.*

Р е ш е н и е. Заданная в задаче функция выражается через координаты вектора $\vec{x}$ формулой

$$\mathsf{f}(\vec{x}) = \begin{vmatrix} \xi_1 & \xi_2 \\ \alpha & \beta \end{vmatrix} \sigma = \beta\sigma\xi_1 - \alpha\sigma\xi_2,$$

где σ — площадь ориентированного параллелограмма, построенного на $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$. Правая часть равенства — линейный многочлен от ξ_1 и ξ_2, и потому функция — линейная со строкой коэффициентов $\|\beta\sigma \quad -\alpha\sigma\|$.

3. *Пусть k — натуральное число. Сопоставим каждому многочлену степени не выше n значение его k-й производной в точке a. Проверьте, что этим определена линейная функция. Найдите ее координатную строку в базисах* а) $1, t, t^2, \ldots, t^n$, б) $1, (t-a)$, $(t-a)^2$, $\ldots, (t-a)^n$.

Р е ш е н и е. Линейность указанной функции прямо следует из свойств операции дифференцирования: если $p(t)$ и $q(t)$ — многочлены степени не выше n, то $(p(t)+q(t))^{(k)} = p^{(k)}(t) + q^{(k)}(t)$ и $(\alpha p(t))^{(k)} = \alpha p^{(k)}(t)$ для любого α. Эти равенства верны для всех значений t, в том числе и для $t = a$.

Элемент с номером m координатной строки линейной функции в некотором базисе равен значению функции на m-м базисном векторе, в нашем случае значению k-й производной многочлена t^m $(m = 0, 1, \ldots, n)$ в точке a:

$$\varphi_m = \frac{dt^m}{dt^k}\bigg|_{t=a} = \begin{cases} 0 & m < k \\ k!, & m = k, \\ m(m-1)\ldots(m-k+1)a^{m-k} & m > k. \end{cases}$$

Отсюда видно, что координатной строкой функции в стандартном базисе будет строка

$$\|\overbrace{0\ \ldots\ 0}^{k} \quad k! \quad [(k+1)k\ldots 2]a \quad \ldots \quad [n(n-1)\ldots(n-k+1)]a^{n-k}\|.$$

Найдем значение интересующей нас линейной функции на каждом из базисных векторов базиса (б). Производная по t равна

$$[(t-a)^m]^{(k)} = m(m-1)\ldots(m-k+1)(t-a)^{m-k} \quad (m = k, \ldots, n)$$

и нулю при $m = 0, 1, \ldots, k-1$. Значение этой производной в точке a при $m > k$ также, очевидно, равно нулю. Поэтому координатная строка функции в базисе (б) равна $k!\mathbf{e}_{k+1}$, где $\mathbf{e}_{k+1}$ — $k+1$-я строка единичной матрицы порядка n.

4. *Пусть* $e_1, \ldots, e_n \in \mathcal{L}$ *и* $\mathsf{e}^{*1}, \ldots, \mathsf{e}^{*n} \in \mathcal{L}^*$ *— пара биортогональных базисов. Убедитесь, что для любого* $x \in \mathcal{L}$ *и для любого* $\mathsf{f} \in \mathcal{L}^*$ *выполнены равенства* а) $x = \mathsf{e}^{*1}(x)e_1 + \ldots + \mathsf{e}^{*n}(x)e_n$ *и б)* $\mathsf{f} = \mathsf{f}(e_1)\mathsf{e}^{*1} + \ldots + \mathsf{f}(e_n)\mathsf{e}^{*n}$.

Решение. а) Возьмем произвольное значение индекса i и вычислим значение $\mathsf{e}^{*i}(x)$, заменив x его разложением по базису $e_1, \ldots, e_n$:

$$\mathsf{e}^{*i}(x) = \xi_1\mathsf{e}^{*i}(e_1) + \ldots + \xi_i\mathsf{e}^{*i}(e_i) + \ldots + \xi_n\mathsf{e}^{*i}(e_n) = \xi_i,$$

так как $\mathsf{e}^{*i}(e_k) = 0$ при всех $k \neq i$, а $\mathsf{e}^{*i}(e_i) = 1$ по определению биортогонального базиса. Таким образом, правая часть формулы (а) совпадает с разложением x по базису.

б) Коэффициенты разложения в правой части формулы (б) — элементы координатной строки функции f в базисе $e_1, \ldots, e_n$. Они же являются коэффициентами разложения этой функции по базису $\mathsf{e}^{*1}, \ldots, \mathsf{e}^{*n}$, в чем нетрудно убедиться, подействовав обеими частями равенства $\mathsf{f} = \varphi_1\mathsf{e}^{*1} + \ldots + \varphi_n\mathsf{e}^{*n}$ на векторы базиса $e_1, \ldots, e_n$.

Глава VI § 6

1. *Значение билинейной функции* b *в некотором базисе записано как многочлен от координат* ξ^i *и* η^j *векторов* x *и* y:

$$\mathsf{b}(x, y) = \xi^1\eta^1 + \xi^1\eta^2 - 2\xi^2\eta^1 + 4\xi^2\eta^2 + 3\xi^1\eta^3 + \xi^3\eta^3.$$

Напишите матрицу этой билинейной функции, если пространство а) *трехмерное*, б) *четырехмерное*.

Решение. По определению матрицы билинейной функции ее элемент b_{ij} равен значению функции $\mathsf{b}(e_i,\ e_j)$. Это же число — коэффициент при $\xi^i\eta^j$ в представлении $\mathsf{b}(x,\ y)$ многочленом от координат x и y. Поэтому в случае (а) матрицей билинейной функции будет

$$B = \begin{Vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}.$$

В случае (б) векторы x и y имеют по четыре координаты, но их последние координаты ξ^4 и η^4 входят в многочлен с нулевыми коэффициентами. Поэтому матрица будет такой:

$$\begin{Vmatrix} 1 & 1 & 3 & 0 \\ -2 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}.$$

2. *Как изменится матрица билинейной функции из задачи 1* (a), *если перейти к базису* $e_1' = e_1 + e_2$, $e_2' = e_2 + e_3$, $e_3' = e_3$?

Решение. В этом случае матрицей перехода будет матрица

$$S = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{Vmatrix}.$$

В новом базисе матрица билинейной функции равна $S^T BS$, т. е.

$$\begin{Vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix} \cdot S = \begin{Vmatrix} -1 & 5 & 3 \\ -2 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 4 & 8 & 3 \\ 2 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{Vmatrix}.$$

3. *Напишите матрицу квадратичной формы* $(\xi^1)^2 + \xi^1\xi^2 + (\xi^2)^2$.

Решение. В матрице квадратичной формы диагональные элементы равны коэффициентам при квадратах координат вектора, а недиагональные — половинам коэффициентов при произведении соответствующих координат. Поэтому матрицей данной квадратичной формы является матрица

$$\begin{Vmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{Vmatrix}.$$

Конечно, здесь предполагается, что пространство двумерное.

4. *Приведите к каноническому виду квадратичную форму с матрицей*

$$\text{а)} \begin{Vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 8 \end{Vmatrix}, \qquad \text{б)} \begin{Vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 9 \end{Vmatrix}$$

и найдите матрицу перехода к каноническому базису.

Р е ш е н и е. а) В матрице квадратичной формы вычтем из второго столбца удвоенный первый, а из третьего столбца — утроенный первый:

$$\begin{Vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 8 \end{Vmatrix} \mapsto \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & -1 \end{Vmatrix}.$$

Как мы помним, нужно проделать те же элементарные преобразования со строками матрицы. Это сделает ее симметричной:

$$\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{Vmatrix}.$$

Для построения матрицы перехода следует проделать те же элементарные преобразования со столбцами единичной матрицы:

$$\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix} \mapsto \begin{Vmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix} = S'.$$

На следующем шагу в преобразованной матрице квадратичной формы вычтем третий столбец из второго и третью строку из второй:

$$\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{Vmatrix} \mapsto \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{Vmatrix} \mapsto \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{Vmatrix}.$$

Это канонический вид матрицы. Матрица перехода к каноническому базису получится из матрицы S' вычитанием третьего столбца из второго:

$$\begin{Vmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix} \mapsto \begin{Vmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{Vmatrix} = S.$$

б) Для этой матрицы преобразования первого шага те же, что и для матрицы (а). Они приводят ее к виду

$$\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{Vmatrix}.$$

Таким образом, возникает особый случай: в той подматрице, которая должна быть преобразована на втором шагу, все диагональные элементы равны нулю. Делаем вспомогательное преобразование — прибавляем третий столбец ко второму и третью строку ко второй:

$$\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{Vmatrix} \mapsto \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{Vmatrix}.$$

В полученной на первом шаге матрице перехода S' следует прибавить третий столбец ко второму:

$$\begin{Vmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix} \mapsto \begin{Vmatrix} 1 & -5 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{Vmatrix} = S''.$$

Далее вычитаем из третьего столбца половину второго и из третьей строки половину второй:

$$\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{Vmatrix} \mapsto \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & \frac{1}{2} \end{Vmatrix} \mapsto \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{Vmatrix}.$$

Матрица перехода S'' при этом преобразуется в

$$S''' = \begin{Vmatrix} 1 & -5 & -1/2 \\ 0 & 1 & -1/2 \\ 0 & 1 & 1/2 \end{Vmatrix}.$$

Мы получили диагональный вид матрицы квадратичной формы. Для получения канонического вида осталось умножить второй и третий базисные векторы на подходящие множители $1/\sqrt{2}$ и $\sqrt{2}$ соответственно. Это преобразует матрицу S''' в матрицу

$$S = \begin{Vmatrix} 1 & -5/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 0 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{Vmatrix},$$

а матрицу квадратичной формы к каноническому виду

$$\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}.$$

5. *Нуль-пространством симметричной билинейной функции* b *называется множество векторов* x, *таких что для любых* y *выполнено* $\mathsf{b}(x, y) = 0$. *Проверьте, что это линейное подпространство. Как связана его размерность* s *с рангом* b? *Какой будет матрица функции* b *в базисе, последние* s *векторов которого лежат в нуль-пространстве*?

Решение. Равенство $\mathsf{b}(x, y) = 0$ в координатах записывается как $\mathbf{x}^T B\mathbf{y} = 0$, где $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ — координатные столбцы векторов x и y, а B — матрица билинейной функции. Если это равенство выполнено для всех $\mathbf{y}$, то строка $\mathbf{x}^T B$ нулевая. Это равносильно равенству $B\mathbf{x} = \mathbf{0}$, которое является матричной записью однородной системы линейных уравнений с матрицей B. Отсюда следует, что нуль-пространство симметричной билинейной функции в n-мерном пространстве действительно является подпространством, и его размерность равна $s = n - \operatorname{Rg} B$.

Для ответа на второй вопрос нужно вспомнить, что элементы матрицы билинейной функции равны ее значениям на соответствующих парах базисных векторов: $b_{ij} = \mathsf{b}(e_i, e_j)$. Это означает, что элементы матрицы функции b в базисе, последние s векторов которого лежат в нуль-пространстве, равны нулю, если $j > n - s$. В силу симметрии матрицы мы можем сказать, что элемент матрицы равен нулю, если значение хотя бы одного из его индексов больше, чем $n - s$. Иначе говоря, равны нулю все элементы в последних s строках и последних s столбцах.

6. *В* n-*мерном пространстве заданы* m *квадратичных форм. При каком условии существует базис, в котором они все могут быть представлены как многочлены от первых* $k < n$ *координат вектора*?

Решение. Квадратичная форма представлена как многочлен от первых $k < n$ координат вектора, если в данном базисе последние $n - k$ столбцов и последние $n - k$ строк ее матрицы нулевые. Таким образом, решение этой задачи вытекает из решения предыдущей.

Для того чтобы матрицы m квадратичных форм в некотором базисе имели нули в последних $n - k$ столбцах и строках, необходимо и достаточно, чтобы последние $n - k$ базисных векторов лежали в пересечении нуль-пространств всех билинейных функций, соответствующих данным формам. Их можно выбрать таким образом тогда и только тогда, когда размерность пересечения нуль-пространств не меньше, чем $n - k$.

Пусть билинейные функции в некотором базисе имеют матрицы B_α, $\alpha = 1, \ldots, m$. Их нуль-пространства определяются системами уравнений $B_\alpha \mathbf{x} = \mathbf{0}$, а их пересечение — объединением этих систем. Получается система линейных уравнений с матрицей W размеров $mn \times n$, составленной из всех строк всех матриц B_α. Такая система уравнений определяет подпространство размерности $n - \operatorname{Rg} W$.

Поэтому ответ на поставленный в задаче вопрос можно сформулировать так. Составим матрицу W, написав все матрицы B_α, $\alpha = 1, \ldots, m$, одну под другой. Условием существования требуемого базиса является неравенство $\operatorname{Rg} W \leqslant k$.

7. *Пусть A — квадратная матрица порядка n и ранга r. У квадратичной формы с матрицей $A^T A$ определите* а) *ранг*, б) *индекс*.

Р е ш е н и е. а) Из известной оценки ранга произведения матриц следует, что $\operatorname{Rg} A^T A \leqslant \operatorname{Rg} A$. Докажем, что на самом деле эти ранги равны.

Действительно, равенство $\mathbf{x}^T(A^T A\mathbf{x}) = 0$ является следствием системы линейных уравнений $A^T A\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Его можно записать как $(\mathbf{x}^T A^T)(A\mathbf{x}) = (A\mathbf{x})^T(A\mathbf{x}) = 0$. Для любого столбца $\mathbf{p} = \|p_1 \ \ldots \ p_n\|^T$ произведение $\mathbf{p}^T\mathbf{p}$ равно $p_1^2 + \ldots + p_n^2$ и равенство $\mathbf{p}^T\mathbf{p} = 0$ равносильно $\mathbf{p} = \mathbf{0}$. Таким образом, мы можем заключить, что из равенства $A^T A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ следует $A\mathbf{x} = 0$.

Пусть $\operatorname{Rg} A^T A = s$. Тогда система линейных уравнений $A^T A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ имеет систему из $n - s$ линейно независимых решений, и все эти решения должны удовлетворять системе $A\mathbf{x} = 0$. Отсюда следует, что $n - s \leqslant n - r$ т. е. $s \geqslant r$. Вместе с полученным выше неравенством это означает, что

$$\operatorname{Rg} A^T A = \operatorname{Rg} A = r.$$

б) Пусть k — квадратичная форма с матрицей $A^T A$. Тогда $\mathsf{k}(x) = \mathbf{x}^T(A^T A)\mathbf{x}$. Как мы видели, выражение в правой части равенства — сумма квадратов элементов столбца $A\mathbf{x}$, и потому она не может принимать отрицательных значений. Квадратичная форма k положительно полуопределенная, ее индекс равен нулю.

8. *Квадратичная форма с матрицей B положительно определена тогда и только тогда, когда найдется невырожденная верхняя треугольная матрица R, такая что $B = R^T R$. Докажите это.*

Р е ш е н и е. Из результата задачи 7 видно, что произведение $R^T R$, где матрица R невырождена, является матрицей положительно определенной квадратичной формы (даже независимо от того, треугольная матрица R или нет). Нам остается доказать обратное, что для матрицы B положительно определенной квадратичной формы найдется невырожденная верхняя треугольная матрица R, такая что $B = R^T R$.

Все главные миноры матрицы B положительны в силу критерия Сильвестра. Поэтому при приведении матрицы B к каноническому виду особый случай не возникнет (см. доказательство критерия Сильвестра) и матрица перехода к каноническому базису будет треугольной. Обозначим ее S. Тогда выполнено равенство $S^T BS = E$, которое равносильно $B = (S^T)^{-1} ES^{-1} = R^T R$, если обозначить S^{-1} через R. Матрица R невырожденная и верхняя треугольная. Именно такая матрица нам и требовалась.

9. *Дана квадратичная форма* k. *При каком условии найдется ненулевой вектор* x, *для которого* $\mathsf{k}(x) = 0$?

Р е ш е н и е. Один случай очевиден: если ранг квадратичной формы меньше размерности пространства, то она принимает нулевые значения на ненулевых векторах (см., например, задачу 5). Рассмотрим квадратичные формы полного ранга.

Положительно определенные и отрицательно определенные квадратичные формы на векторах, отличных от нулевого, нулевых значений не принимают. Поэтому очевидно, что ненулевой вектор x, для которого $\mathsf{k}(x) = 0$, может существовать только тогда, когда она принимает значения разных знаков. Докажем, что это условие является достаточным.

Пусть существуют два вектора y и z, такие что $\mathsf{k}(y) > 0$, а $\mathsf{k}(z) < 0$. Рассмотрим вектор $x = z + \alpha y$ и будем искать α так, чтобы $\mathsf{k}(z + \alpha y) = 0$. Если b — симметричная билинейная функция, соответствующая k, то

$$\mathsf{k}(z+\alpha y) = \mathsf{b}(z+\alpha y,\ z+\alpha y) = \mathsf{b}(z, z) + 2\alpha \mathsf{b}(z, y) + \alpha^2 \mathsf{b}(y, y) = 0.$$

Так как $\mathsf{b}(z, z) = \mathsf{k}(z) < 0$, а $\mathsf{b}(y, y) = \mathsf{k}(y) > 0$, дискриминант квадратного уравнения относительно α неотрицателен, и оно имеет вещественный корень. Это и требовалось.

Итак, ответ следующий: не обращаются в нуль на векторах, отличных от нуля, только положительно определенные и отрицательно определенные квадратичные формы.

10. *Какому необходимому и достаточному условию должны удовлетворять главные миноры отрицательно определенной квадратичной формы*?

Р е ш е н и е. Если форма k отрицательно определена, то квадратичная форма $\mathsf{k}' = -\mathsf{k}$ положительно определенная. Матрицы этих квадратичных форм связаны равенством $B' = -B$. При умножении матрицы порядка k на (-1) все ее элементы умножаются на (-1), а детерминант — на $(-1)^k$. Поэтому главные миноры матриц B и B' связаны равенствами $M'_k = (-1)^k M_k$, где k — порядок минора. Согласно критерию Сильвестра главные миноры M'_k матрицы B' положительны. Отсюда вытекает следующий ответ: у матрицы отрицательно определенной квадратичной формы главные миноры четного порядка положительны, а нечетного порядка — отрицательны.

Глава VI § 7

1. *Сколько существует жордановых матриц, отличающихся кратностями характеристических чисел, числом и размерами клеток, среди матриц* а) *второго порядка*, б) *третьего порядка*, в) *четвертого порядка*?

Р е ш е н и е. а) Возможно: две различные диагональные клетки первого порядка, две одинаковые диагональные клетки первого порядка, жорданова клетка второго порядка — всего три возможности.

б) Характеристическое уравнение может иметь:

1) Три различных корня. В этом случае одна возможность — диагональная матрица с различными диагональными элементами.

2) Два различных корня. В этом случае один из корней простой, а второй кратности два. Простому корню соответствует диагональная клетка первого порядка, а кратному — либо две одинаковые диагональные клетки, либо жорданова клетка второго порядка.

3) Один корень кратности 3. Здесь возможны: диагональная матрица с равными элементами, диагональная клетка первого порядка и жорданова клетка второго порядка с тем же собственным значением, жорданова клетка третьего порядка.

Всего имеется шесть возможностей.

в) Характеристическое уравнение может иметь:

1) Четыре различных корня. В этом случае одна возможность — диагональная матрица с различными диагональными элементами.

2) Три различных корня. В этом случае два корня простых, а один корень кратности два. Простым корням соответствуют

различные диагональные клетки первого порядка, а кратному — либо две одинаковые диагональные клетки первого порядка, либо жорданова клетка второго порядка.

3) Два различных корня. Каждый из них может иметь кратность два, и тогда каждому из них соответствуют либо две одинаковые диагональные клетки, либо жорданова клетка второго порядка. Отсюда видны три возможности: две пары одинаковых клеток первого порядка, пара одинаковых клеток первого порядка и клетка второго порядка, две клетки второго порядка.

Один из корней может быть простым, а второй тогда будет иметь кратность три. В матрице будет диагональная клетка первого порядка, а для остальных элементов представляются все три возможности из пункта (б3).

4) Один корень кратности 4. Если есть диагональная клетка первого порядка, то для остальных клеток представляются все три возможности из пункта (б3)(собственные значения всех клеток одинаковы). Если же диагональной клетки первого порядка нет, то возможны: две жордановы клетки второго порядка с одинаковыми собственными значениями и жорданова клетка четвертого порядка.

Тут всего 14 возможностей.

2. *Найдите жорданову форму матрицы и матрицу перехода к жорданову базису для преобразования, заданного в исходном базисе матрицей*

$$\text{а)}\ \begin{Vmatrix} 3 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{Vmatrix}, \qquad \text{б)}\ \begin{Vmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}.$$

Решение. а) Детерминант клеточно треугольной матрицы равен произведению детерминантов диагональных клеток. Поэтому

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = (\lambda-2)^2(\lambda-1)^2.$$

1) Рассмотрим корень $\lambda = 1$.

$$A - E = \begin{Vmatrix} 2 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{Vmatrix}.$$

Ранг этой матрицы равен 3, и потому собственное подпространство одномерное. Нетрудно заметить, что сумма элементов каждой строки равна нулю. Значит, произведение матрицы на столбец $\mathbf{s}_1 = \|1\ 1\ 1\ 1\|^T$ равно нулю и вектор e_1 с таким координатным столбцом является собственным.

Собственное подпространство имеет размерность 1, а размерность корневого подпространства (кратность корня) равна 2. Это значит, что должна быть жорданова цепочка из двух векторов. Проблемы с определением ее начала не возникает, так как собственный вектор один. Ищем присоединенный вектор. Для этого решаем неоднородную систему уравнений $(A - E)\mathbf{x} = \mathbf{s}_1$.

Расширенная матрица этой системы имеет вид

$$\left\|\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right\|$$

(последнюю строку писать необходимости нет, так как она совпадает с третьей). Одно решение системы $\mathbf{s}_2 = \|0\ 0\ 0\ -1\|^T$ очевидно: столбец свободных членов только знаком отличается от четвертого столбца матрицы. Следует помнить, что здесь, решая системы линейных уравнений, мы ограничиваемся нахождением одного частного решения. Поэтому в действительности ответ не однозначен: вместо вектора e_1 мог бы быть взят вектор αe_1 при любом $\alpha \neq 0$, а вместо вектора e_2 — вектор $e_2 + \beta e_1$ при любом β, например $\|1\ 1\ 1\ 0\|^T$.

2) Рассмотрим корень $\lambda = 2$.

$$A - 2E = \left\|\begin{array}{cccc} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right\|.$$

Ранг этой матрицы равен 3, и собственное подпространство одномерное. Нетрудно заметить, что сумма двух первых столбцов равна нулю. Значит, произведение матрицы на столбец $\mathbf{s}_3 = \|1\ \ 1\ \ 0\ \ 0\|^T$ равно нулю, и вектор e_3 с координатным столбцом $\mathbf{s}_3$ является собственным. Как и в предыдущем случае, должен существовать один присоединенный вектор, координаты которого находятся из системы $(A - 2E)\mathbf{x} = \mathbf{s}_3$. Напишем расширенную матрицу этой системы, отбросив в ней первую строку, которая совпадает со второй:

$$\left\|\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right\|.$$

Легко заметить, что первый столбец матрицы совпадает со столбцом свободных членов. Поэтому решение системы $\mathbf{s}_4 = \|1\ 0\ 0\ 0\|$. Следовательно, присоединенным вектором является вектор e_4 с координатным столбцом $\mathbf{s}_4$.

3) Сформулируем результат: переходя к базису e_1, e_2, e_3, e_4 с помощью матрицы перехода

$$S = \|\mathbf{s}_1\ \mathbf{s}_2\ \mathbf{s}_3\ \mathbf{s}_4\| = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{Vmatrix},$$

мы приведем матрицу данного нам линейного преобразования к жордановой форме

$$\begin{Vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{Vmatrix}.$$

б) Как и в случае (а), матрица клеточно треугольная, и характеристический многочлен $\det(A - \lambda E)$ распадается на два множителя:

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & 0 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1/2 \\ 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (1-\lambda)^3(1-\lambda)^2 = (1-\lambda)^5.$$

Таким образом, все пространство является корневым для корня $\lambda = 1$.

Напишем матрицу $A - E$:

$$A - E = \begin{Vmatrix} 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}.$$

Для нахождения собственного подпространства $\operatorname{Ker}(\mathsf{A}-\mathsf{E})$ решаем однородную систему $(A-E)\mathbf{x}=\mathbf{0}$. Выписывая матрицу системы, мы можем отбросить первую и последнюю строки:

$$\begin{Vmatrix}1&0&1&0&1/2\\0&1&0&1&0\\0&0&0&0&1/2\end{Vmatrix}\mapsto\begin{Vmatrix}1&0&1&0&0\\0&1&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{Vmatrix}.$$

После очевидного преобразования мы имеем упрощенный вид матрицы, в котором первые две переменные небазисные. Это позволяет написать фундаментальную матрицу

$$\|\mathbf{f}_1\ \mathbf{f}_2\|=\begin{Vmatrix}1&0\\0&1\\-1&0\\0&-1\\0&0\end{Vmatrix}.$$

Итак, $\dim\operatorname{Ker}(\mathsf{A}-\mathsf{E})=2$, и должны существовать две цепочки, сумма длин которых равна пяти. Цепочки начинаются с векторов, принадлежащих $\operatorname{Ker}(\mathsf{A}-\mathsf{E})\cap\operatorname{Im}(\mathsf{A}-\mathsf{E})$, поэтому посмотрим на это пересечение. $\operatorname{Im}(\mathsf{A}-\mathsf{E})$ натянуто на векторы, координаты которых — столбцы матрицы $A-E$, а $\operatorname{Ker}(\mathsf{A}-\mathsf{E})$ — на векторы f_1 и f_2 с координатными столбцами $\mathbf{f}_1$ и $\mathbf{f}_2$. Составим матрицу из всех этих столбцов, пропустив первый и второй столбцы $A-E$, которые повторяются:

$$\|\mathbf{b}_3\ \mathbf{b}_4\ \mathbf{b}_5\,|\,\mathbf{f}_1\ \mathbf{f}_2\|=\left\|\begin{array}{rrr|rr}0&-1&0&1&0\\1&0&1/2&0&1\\0&1&0&-1&0\\0&0&1/2&0&-1\\0&0&0&0&0\end{array}\right\|.$$

Для того чтобы найти линейные зависимости между столбцами (или убедиться в их отсутствии), следовало бы привести матрицу к упрощенному виду, но в первых трех столбцах нетрудно усмотреть треугольную подматрицу с определителем, равным $1/2$. Значит, $\mathbf{b}_3$, $\mathbf{b}_4$, $\mathbf{b}_5$ линейно независимы. Кроме того, $\mathbf{f}_1=-\mathbf{b}_4$, а $\mathbf{f}_2=2(\mathbf{b}_3-\mathbf{b}_5)$. Таким образом, $\operatorname{Ker}(\mathsf{A}-\mathsf{E})\subset\operatorname{Im}(\mathsf{A}-\mathsf{E})$, и с каждого собственного вектора начинается цепочка длины >1. Цепочек длины 1, как мы видим, нет, а значит, одна цепочка должна быть длины 2, а другая — длины 3. Посмотрим, с какого вектора начинается последняя. Для этого напишем матрицу $(A-E)^2$:

$$\begin{Vmatrix} 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} -1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}.$$

Здесь видно, что $\mathrm{Im}\,(\mathsf{A}-\mathsf{E})^2$, натянутое на векторы, координаты которых — столбцы $(A-E)^2$, совпадает с линейной оболочкой f_1. Поэтому цепочка длины 3 начинается с этого вектора. Найдем ее.

Вектор, присоединенный к f_1, находится из системы $(A-E)\mathbf{x} = \mathbf{f}_1$. Напишем расширенную матрицу этой системы:

$$\left\Vert\begin{array}{ccccc|c} 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right\Vert.$$

В этой матрице, как легко заметить, четвертый столбец только знаком отличается от столбца свободных членов. Поэтому одним из решений этой системы является столбец $\mathbf{f}_1' = \Vert 0\ 0\ 0\ -1\ 0\Vert^T$, а вектор f_1' с таким координатным столбцом — первый присоединенный к вектору f_1.

Второй присоединенный вектор находится из системы линейных уравнений $(A-E)\mathbf{x} = \mathbf{f}_1'$. Расширенная матрица этой системы имеет вид

$$\left\Vert\begin{array}{ccccc|c} 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right\Vert.$$

В этой матрице можно заметить, что столбец свободных членов $\mathbf{f}_1'$ равен разности третьего столбца и удвоенного пятого, и, следовательно, одним из решений будет $\mathbf{f}_1'' = \Vert 0\ 0\ 1\ 0\ -2\Vert^T$. Вторым присоединенным вектором будет вектор f_1'' с координатным столбцом $\mathbf{f}_1''$.

Цепочку длины 2 можно начать с любого вектора (кроме, конечно, f_1). Начнем ее с f_2. Вектор, присоединенный к f_2, находится из системы $(A-E)\mathbf{x} = \mathbf{f}_2$. В расширенной матрице этой системы первая строка отличается знаком от третьей, а пятая — нулевая. Напишем матрицу из остальных строк:

$$\left\|\begin{array}{ccccc|r} 1 & 0 & 1 & 0 & 1/2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & -1 \end{array}\right\| \mapsto \left\|\begin{array}{ccccc|r} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right\|$$

(Мы вычли третью строку из первой, после чего умножили третью строку на 2.) Первые две переменные небазисные, положим их равными нулю и получим решение $\mathbf{f}'_2 = \|0 \ \ 0 \ \ 2 \ \ 0 \ \ -2\|^T$.

Итак, жорданов базис преобразования A построен. Сформулируем результат. Переходя к базису f_1, f'_1, f''_1, f_2, f'_2 с помощью матрицы перехода

$$F = \|\mathbf{f}_1,\, \mathbf{f}'_1,\, \mathbf{f}''_1,\, \mathbf{f}_2,\, \mathbf{f}'_2\| = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & -2 \end{Vmatrix},$$

мы приведем матрицу преобразования к жордановой форме

$$\begin{Vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}.$$

Глава VII § 1

1. *Проверьте, что в пространстве многочленов степени* $\leqslant 2$ *скалярное произведение можно определить формулой*

$$(p,\, q) = \int\limits_{-1}^{1} p(t)q(t)\, dt.$$

а) *Составьте матрицу Грама базиса* $1,\ t,\ t^2$. б) *С помощью матрицы перехода найдите матрицу Грама базиса* 1, $(t-1)$, $(t-1)^2$. в) *Найдите угол между многочленами* t^2+1 *и* $t+1$.

Решение. Проверим определение, для того чтобы убедиться, что данная формула действительно определяет скалярное произведение. Коммутативность следует из коммутативности умножения многочленов, линейность по первому сомножителю — из линейности определенного интеграла.

Интеграл от квадрата многочлена — неотрицательной функции — неотрицателен. Далее, если интеграл от неотрицательной непрерывной функции равен нулю, то эта функция тождественно равна нулю. Поэтому из

$$(p,\, p) = \int\limits_{-1}^{1} (p(t))^2\, dt = 0$$

следует $(p(t))^2 = 0$ для всех $t \in [-1,\, 1]$. Но если многочлен обращается в нуль на целом отрезке, то он — нулевой. Поэтому нулевым является и многочлен p.

а) По определению элемент матрицы Грама базиса e_1, e_2, e_3 равен $g_{ij} = (e_i,\, e_j)$. В нашем случае базис состоит из многочленов 1, t и t^2, и нам нужно проинтегрировать все их попарные произведения от -1 до 1. Учтем, что интеграл от нечетной функции по симметричному отрезку равен нулю. Кроме того,

$$\int\limits_{-1}^{1} dt = 2, \qquad \int\limits_{-1}^{1} t^2\, dt = \frac{2}{3}, \qquad \int\limits_{-1}^{1} t^4\, dt = \frac{2}{5}.$$

Таким образом, матрица Грама стандартного базиса равна

$$\Gamma = \begin{Vmatrix} 2 & 0 & 2/3 \\ 0 & 2/3 & 0 \\ 2/3 & 0 & 2/5 \end{Vmatrix}.$$

б) Матрица перехода к базису 1, $(t-1)$, $(t-1)^2$ имеет вид

$$S = \begin{Vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}$$

(см. задачу 3 § 1 гл. VI). Поэтому

$$\Gamma' = S^T \Gamma S = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 2 & 0 & 2/3 \\ 0 & 2/3 & 0 \\ 2/3 & 0 & 2/5 \end{Vmatrix} S =$$

$$= \begin{Vmatrix} 2 & 0 & 2/3 \\ -2 & 2/3 & -2/3 \\ 8/3 & -4/3 & 16/15 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 2 & -2 & 8/3 \\ -2 & 8/3 & -4 \\ 8/3 & -4 & 32/5 \end{Vmatrix}.$$

в) В стандартном базисе многочлены $p(t) = t^2 + 1$ и $q(t) = t + 1$ имеют соответственно координатные столбцы $\mathbf{p} = \|1 \ \ 0 \ \ 1\|^T$ и $\mathbf{q} = \|1 \ \ 1 \ \ 0\|^T$. Для нахождения угла нам необходимо знать $(p,\, q) = \mathbf{p}^T \Gamma \mathbf{q}$, а также $(p,\, p) = \mathbf{p}^T \Gamma \mathbf{p}$ и $(q,\, q) = \mathbf{q}^T \Gamma \mathbf{q}$. Для сокращения записи мы напишем так:

$$\begin{Vmatrix} (\mathbf{p},\, \mathbf{p}) & (\mathbf{p},\, \mathbf{q}) \\ (\mathbf{q},\, \mathbf{p}) & (\mathbf{q},\, \mathbf{q}) \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 2 & 0 & 2/3 \\ 0 & 2/3 & 0 \\ 2/3 & 0 & 2/5 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix} =$$

$$= \begin{Vmatrix} 56/15 & 8/3 \\ 8/3 & 8/3 \end{Vmatrix}.$$

Теперь мы можем вычислить

$$\cos\varphi = \frac{(p,\, q)}{\sqrt{(p,\, p)(q,\, q)}} = \sqrt{\frac{5}{7}}\,.$$

2. *Подпространство евклидова пространства задано в ортонормированном базисе уравнением* $\xi^1 + \xi^2 + \xi^3 + \xi^4 = 0$. *Найдите ортонормированный базис в этом подпространстве.*

Решение. Прежде всего найдем какой-либо базис в данном подпространстве, а затем применим к этому базису процесс ортогонализации. Напишем фундаментальную матрицу уравнения, задающего подпространство:

$$F = \|\mathbf{f}_1 \quad \mathbf{f}_2 \quad \mathbf{f}_3\| = \begin{Vmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}.$$

Столбцы этой матрицы — координатные столбцы векторов f_1, f_2 и f_3, составляющих базис в подпространстве. Ортогонализуем их.

Построим вектор f_2', ортогональный f_1.

$$\mathbf{f}_2 - \frac{(f_1, f_2)}{|f_1|^2}\mathbf{f}_1 = \begin{Vmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{Vmatrix} - \frac{1}{2}\begin{Vmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{Vmatrix} = -\frac{1}{2}\begin{Vmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \end{Vmatrix}.$$

Примем за f_2' вектор с координатным столбцом $\mathbf{f}_2' = \|1 \;\; 1 \;\; -2 \;\; 0\|^T$.

Теперь построим вектор f_3', ортогональный f_1 и f_2'. Его координатный столбец

$$\mathbf{f}_3 - \frac{(f_3, f_1)}{|f_1|^2}\mathbf{f}_1 - \frac{(f_3, f_2')}{|f_2'|^2}\mathbf{f}_2' = \begin{Vmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{Vmatrix} - \frac{1}{2}\begin{Vmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{Vmatrix} + \frac{1}{6}\begin{Vmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \end{Vmatrix} = -\frac{1}{3}\begin{Vmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -3 \end{Vmatrix}.$$

Примем за f_3' вектор с координатным столбцом $\mathbf{f}_3' = \|1 \;\; 1 \;\; 1 \;\; -3\|^T$.

Осталось пронормировать полученные векторы, и мы получаем ответ: базис h_1, h_2, h_3 из векторов с координатными столбцами

$$\mathbf{h}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{Vmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{Vmatrix}; \quad \mathbf{h}_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{Vmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \end{Vmatrix}; \quad \mathbf{h}_3 = \frac{1}{2\sqrt{3}}\begin{Vmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -3 \end{Vmatrix}.$$

Остальные решения этой задачи — ортонормированные базисы в данном пространстве — получаются из найденного с помощью ортогональной матрицы перехода. Одно из таких решений будет получено ниже в задаче 4.

3. *Пусть* $\dim \mathcal{E} = 4$ *и* $\mathcal{E}' \subseteq \mathcal{E}$ *задано в ортонормированном базисе системой*

$$\xi_1 + \xi_2 + \xi_3 = 0,\ \xi_2 + \xi_3 + \xi_4 = 0.$$

Найдите: а) *базис в* $\mathcal{E}'^{\perp}$, б) *ортогональную проекцию на* $\mathcal{E}'$ *вектора* a *с координатами* $\mathbf{a} = \|1,\ 2,\ 3,\ 4\|^T$.

Р е ш е н и е. а) Уравнение $\xi_1 + \xi_2 + \xi_3 = 0$ можно рассматривать как запись ортогональности векторов с координатами $\|1\quad 1\quad 1\quad 0\|^T$ и $\|\xi_1\quad \xi_2\quad \xi_3\quad \xi_4\|^T$. Аналогично можно истолковать и второе уравнение. Поэтому линейно независимые векторы n_1 и n_2 с координатными столбцами $\mathbf{n}_1 = \|1\quad 1\quad 1\quad 0\|^T$ и $\mathbf{n}_2 = \|0\quad 1\quad 1\quad 1\|^T$ лежат в ортогональном дополнении $\mathcal{E}'^{\perp}$ подпространства $\mathcal{E}'$. Так как ранг системы равен двум, $\dim \mathcal{E}' = \dim \mathcal{E}'^{\perp} = 2$, а значит, n_1 и n_2 — базис в $\mathcal{E}'^{\perp}$.

б) Так как этот базис уже известен, не будем искать базис в $\mathcal{E}'$ и по нему проекцию на $\mathcal{E}'$, а найдем проекцию вектора a на $\mathcal{E}'^{\perp}$. Проекция вектора на двумерное подпространство равна сумме его проекций на какие-нибудь два *ортогональных* вектора из этого подпространства. Поэтому нам нужно ортогонализовать базис n_1, n_2:

$$\mathbf{n}_2' = \mathbf{n}_2 - \frac{\mathbf{n}_2^T\,\mathbf{n}_1}{\mathbf{n}_1^T\,\mathbf{n}_1}\mathbf{n}_1 = \left\|\begin{matrix}0\\1\\1\\1\end{matrix}\right\| - \frac{2}{3}\left\|\begin{matrix}1\\1\\1\\0\end{matrix}\right\| = \frac{1}{3}\left\|\begin{matrix}-2\\1\\1\\3\end{matrix}\right\|.$$

Теперь мы можем найти проекцию вектора на $\mathcal{E}'^{\perp}$. Ее координатный столбец

$$\mathbf{a}'' = \frac{\mathbf{a}^T\mathbf{n}_1}{\mathbf{n}_1^T\,\mathbf{n}_1}\mathbf{n}_1 + \frac{\mathbf{a}^T\mathbf{n}_2'}{(\mathbf{n}_2')^T\mathbf{n}_2'}\mathbf{n}_2' = \frac{6}{3}\left\|\begin{matrix}1\\1\\1\\0\end{matrix}\right\| + \frac{15}{15}\left\|\begin{matrix}-2\\1\\1\\3\end{matrix}\right\| = \left\|\begin{matrix}0\\3\\3\\3\end{matrix}\right\|.$$

Осталось получить ответ:

$$\mathbf{a}' = \mathbf{a} - \mathbf{a}'' = \left\|\begin{matrix}1\\2\\2\\4\end{matrix}\right\| - \left\|\begin{matrix}0\\3\\3\\3\end{matrix}\right\| = \left\|\begin{matrix}1\\-1\\0\\1\end{matrix}\right\|.$$

Заметим, что этот результат можно было бы получить и иначе.

Матрица системы

$$\begin{Vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{Vmatrix}$$

имеет упрощенный вид, и мы можем сразу написать ее фундаментальную матрицу

$$F = \|\mathbf{f}_1 \quad \mathbf{f}_2\| = \begin{Vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{Vmatrix}.$$

Векторы f_1 и f_2 с координатными столбцами $\mathbf{f}_1$ и $\mathbf{f}_2$ составляют базис в $\mathcal{E}'$.

Для того чтобы найти ортогональную проекцию вектора на подпространство $\mathcal{E}'$, достаточно разложить этот вектор по базису n_1, n_2, f_1, f_2: если $a = \alpha_1 n_1 + \alpha_2 n_2 + \beta_1 f_1 + \beta_2 f_2$, то искомая проекция есть $a' = \beta_1 f_1 + \beta_2 f_2$. Однако это решение связано с необходимостью решать систему из четырех уравнений с четырьмя неизвестными.

Можно обойтись решением системы из двух уравнений с двумя неизвестными. Для этого разложим $\mathbf{a}$ в сумму $\mathbf{a}' + \mathbf{a}''$, где $\mathbf{a}' \in \mathcal{E}'$, а $\mathbf{a}'' \in \mathcal{E}'^{\perp}$. Таким образом, $\mathbf{a}'' = \alpha\mathbf{n}_1 + \beta\mathbf{n}_2$, а $\mathbf{n}_1^T\mathbf{a}' = \mathbf{n}_2^T\mathbf{a}' = 0$. Умножая равенство $\mathbf{a} = \mathbf{a}' + \mathbf{a}''$ слева на $\mathbf{n}_1^T$ и $\mathbf{n}_2^T$, мы получаем систему уравнений

$$\mathbf{n}_1^T\mathbf{a} = \alpha\mathbf{n}_1^T\mathbf{n}_1 + \beta\mathbf{n}_1^T\mathbf{n}_2; \quad \mathbf{n}_2^T\mathbf{a} = \alpha\mathbf{n}_2^T\mathbf{n}_1 + \beta\mathbf{n}_2^T\mathbf{n}_2.$$

Детерминант этой системы отличен от нуля, так как матрица системы — матрица Грама базиса n_1, n_2. Находим α и β, а по ним $\mathbf{a}''$ и $\mathbf{a}'$. В нашей задаче решение системы

$$6 = 3\alpha + 2\beta, \quad 9 = 2\alpha + 3\beta$$

$\alpha = 0$, $\beta = 3$, и мы приходим к знакомому нам решению.

4. *Допустим, что все элементы ортогональной матрицы порядка n равны между собой по абсолютной величине.*

а) *Чему равна абсолютная величина элемента такой матрицы?* б) *Докажите, что такие матрицы существуют, если $n = 2^k$, где k — натуральное число.*

Решение. а) Сумма квадратов элементов одного столбца ортогональной матрицы порядка n равна 1. Если квадраты элементов равны, то квадрат элемента равен $1/n$, а его модуль $1/\sqrt{n}$.

б) Основой доказательства служит следующее утверждение: если P — ортогональная матрица порядка n, то матрица порядка $2n$

$$Q = \frac{1}{\sqrt{2}} \left\| \begin{array}{c|r} P & -P \\ \hline P & P \end{array} \right\|$$

также является ортогональной. Для доказательства проверим условие на столбцы матрицы Q, необходимое и достаточное для ортогональности матрицы.

Сумма произведений соответствующих элементов двух столбцов равна нулю. Напишем проверку, например для столбцов с номерами j и $n+j$:

$$\sum_{k=1}^{n} q_{kj} q_{k\,n+j} + \sum_{k=n+1}^{2n} q_{kj} q_{k\,n+j} =$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} p_{kj} p_{k\,j} + \frac{1}{2} \sum_{k=n+1}^{2n} p_{k-n\,j}(-p_{k-n\,j}) = \frac{1}{2}(1-1) = 0.$$

Аналогично проверяется, что сумма квадратов элементов столбца Q равна 1.

Далее затруднений нет. Хорошо известно, что матрица

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \left\| \begin{matrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{matrix} \right\|$$

является ортогональной. Исходя из нее можно получить ортогональную матрицу четвертого порядка

$$\frac{1}{2} \left\| \begin{matrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{matrix} \right\|.$$

Затем точно так же получаем матрицу восьмого порядка, и вообще любого порядка $n = 2^k$.

Обратите внимание на то, что последние три столбца матрицы четвертого порядка представляют собой еще одно решение задачи 2.

5. *Найдите QR-разложение матрицы*

а) $A = \begin{Vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{Vmatrix}$, б) $B = \begin{Vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & -3 \\ 1 & 1 & -1 \end{Vmatrix}$.

Р е ш е н и е. а) Ортогонализуем столбцы матрицы. Для этого вычтем из второго столбца его проекцию на первый.

$$\mathbf{a}_2' = \mathbf{a}_2 - \frac{\mathbf{a}_2^T\mathbf{a}_1}{\mathbf{a}_1^T\mathbf{a}_1}\mathbf{a}_1 = \begin{Vmatrix} 1 \\ 3 \end{Vmatrix} - \frac{7}{5}\begin{Vmatrix} 1 \\ 2 \end{Vmatrix} = \frac{1}{5}\begin{Vmatrix} -2 \\ 1 \end{Vmatrix}.$$

Нормируем столбцы $\mathbf{a}_1$ и $\mathbf{a}_2'$. Столбец $\mathbf{a}_1$ нужно разделить на $\sqrt{5}$, а $\mathbf{a}_2'$ — умножить на $\sqrt{5}$. Составим из полученных столбцов матрицу

$$Q = \|\mathbf{q}_1,\, \mathbf{q}_2\| = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{Vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{Vmatrix}.$$

Это ортогональная матрица. Ее столбцы

$$\mathbf{q}_1 = (1/\sqrt{5}\,)\mathbf{a}_1; \qquad \mathbf{q}_2 = \sqrt{5}\,(\mathbf{a}_2 - (7/5)\mathbf{a}_1).$$

Отсюда

$$\mathbf{a}_1 = \sqrt{5}\,\mathbf{q}_1; \qquad \mathbf{a}_2 = (1/\sqrt{5}\,)\mathbf{q}_2 + (7/\sqrt{5}\,)\mathbf{q}_1.$$

Составим матрицу R, в столбцах которой стоят коэффициенты последних разложений:

$$R = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{Vmatrix} 5 & 7 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}.$$

Столбец произведения QR есть линейная комбинация столбцов Q с коэффициентами из соответствующего столбца R. Поэтому выполнено равенство $QR = A$.

б) Ход решения не отличается от примененного выше. Сначала ортогонализуем столбцы B:

$$\mathbf{b}_2' = \mathbf{b}_2 - \frac{\mathbf{b}_2^T\mathbf{b}_1}{\mathbf{b}_1^T\mathbf{b}_1}\mathbf{b}_1 = \begin{Vmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{Vmatrix} - \frac{12}{6}\begin{Vmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{Vmatrix}.$$

Далее

$$\mathbf{b}_3' = \mathbf{b}_3 - \frac{\mathbf{b}_3^T\mathbf{b}_1}{\mathbf{b}_1^T\mathbf{b}_1}\mathbf{b}_1 - \frac{\mathbf{b}_3^T\mathbf{b}_2'}{(\mathbf{b}_2')^T\mathbf{b}_2'}\mathbf{b}_2' = \begin{Vmatrix} 1 \\ -3 \\ -1 \end{Vmatrix} + \frac{6}{6}\begin{Vmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{Vmatrix} - \frac{2}{2}\begin{Vmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{Vmatrix}.$$

Столбцы $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2'$ и $\mathbf{b}_3'$ необходимо нормировать, разделив соответственно на $\sqrt{6}$, $\sqrt{2}$ и $\sqrt{3}$. Из полученных столбцов можно составить ортогональную матрицу

$$Q = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{Vmatrix} 1 & \sqrt{3} & \sqrt{2} \\ 2 & 0 & -\sqrt{2} \\ 1 & -\sqrt{3} & \sqrt{2} \end{Vmatrix}.$$

Столбцы Q раскладываются следующим образом:

$$\mathbf{q}_1 = (1/\sqrt{6})\mathbf{b}_1; \quad \mathbf{q}_2 = (1/\sqrt{2})(\mathbf{b}_2 - 2\mathbf{b}_1);$$
$$\mathbf{q}_3 = (1/\sqrt{3})(\mathbf{b}_3 + \mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_2') = (1/\sqrt{3})(\mathbf{b}_3 + 3\mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_2).$$

Используем эти равенства, чтобы выразить $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$ и $\mathbf{b}_3$ через $\mathbf{q}_1$, $\mathbf{q}_2$ и $\mathbf{q}_3$:

$$\mathbf{b}_1 = \sqrt{6}\,\mathbf{q}_1; \quad \mathbf{b}_2 = \sqrt{2}\,\mathbf{q}_2 + 2\sqrt{6}\,\mathbf{q}_1;$$
$$\mathbf{b}_3 = \sqrt{3}\,\mathbf{q}_3 - \sqrt{6}\,\mathbf{q}_1 + \sqrt{2}\,\mathbf{q}_2.$$

Составим матрицу R, в столбцах которой стоят коэффициенты этих разложений:

$$R = \begin{Vmatrix} \sqrt{6} & 2\sqrt{6} & -\sqrt{6} \\ 0 & \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & \sqrt{3} \end{Vmatrix}.$$

Как и в задаче (а), мы убеждаемся, что выполнено равенство $B = QR$.

6. *Докажите, что QR-разложение матрицы единственно.*

Решение. Пусть некоторая невырожденная матрица A двумя способами разложена в произведение ортогональной матрицы и верхней треугольной матрицы с положительными диагональными элементами: $A = Q_1R_1 = Q_2R_2$. Тогда имеет место равенство $Q_2^TQ_1 = R_2R_1^{-1}$. В левой части этого равенства ортогональная матрица, а в правой — верхняя треугольная. Действительно, как мы помним, обратная к верхней треугольной — верхняя треугольная, и произведение треугольных матриц также треугольная матрица. Значит, матрица $Q = Q_2^TQ_1$ и ортогональная, и верхняя треугольная. Отсюда следует, что она диагональная.

В самом деле, ее обратная $Q^{-1} = Q^T$ нижняя треугольная, но обратная к верхней треугольной должна быть верхней треугольной. Поэтому все недиагональные элементы Q равны нулю.

Если ортогональная матрица диагональная, то ее диагональные элементы равны ± 1. Для любого i диагональный элемент

r'_{ii} матрицы R_1^{-1} равен r_{ii}^{-1}, где r_{ii} — диагональный элемент R_1. Поэтому $r'_{ii} > 0$. Положительными будут также диагональные элементы Q, так как при умножении треугольных матриц их диагональные элементы перемножаются. Таким образом, Q — единичная матрица. Из $Q_2^T Q_1 = R_2 R_1^{-1} = E$ сразу следует: $Q_1 = Q_2$ и $R_1 = R_2$.

7. *В четырехмерном евклидовом пространстве трехмерный параллелепипед построен на векторах, имеющих в ортонормированном базисе координатные столбцы* $\|1,\ 1,\ -1,\ 0\|^T$, $\|1,\ 1,\ 1,\ -1\|^T$ *и* $\|1,\ 1,\ 1,\ 1\|^T$. *Найдите объем параллелепипеда.*

Р е ш е н и е. Составим матрицу Грама из трех заданных векторов и найдем ее детерминант:

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 32.$$

Объем равен $V = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$.

Иначе его можно было бы вычислить так. Построим четвертый вектор h, ортогональный трем заданным. Его координатный столбец должен быть решением однородной системы линейных уравнений с матрицей

$$\begin{Vmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{Vmatrix}.$$

Ранг этой матрицы равен трем. Очевидна одна линейная зависимость между столбцами: равны первые два столбца. Поэтому все решения системы пропорциональны столбцу $\mathbf{h} = \|1 \ \ {-1} \ \ 0 \ \ 0\|^T$.

Найдем объем четырехмерного параллелепипеда, построенного на всех четырех векторах. Он равен абсолютной величине детерминанта

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -8.$$

Разделим этот объем на длину $\sqrt{2}$ высоты h и получим ответ: $V = 4\sqrt{2}$.

Глава VII § 2

1. *В базисе* $\mathbf{e}$ *с матрицей Грама* Γ *преобразование* A *имеет матрицу* A. а) *Найдите матрицу сопряженного преобразования. Найдите собственные подпространства* б) *преобразования* A, в) *преобразования* A^*

$$A = \begin{Vmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 4 \end{Vmatrix}, \qquad \Gamma = \begin{Vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{Vmatrix}.$$

Решение. а) Матрица A^* сопряженного преобразования A^* получается по формуле $A^* = \Gamma^{-1}A^T\Gamma$:

$$\Gamma^{-1} = \begin{Vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{Vmatrix};$$

$$A^* = \begin{Vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 4 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}.$$

б) Матрица A^* треугольная, на диагонали стоят собственные значения A^*: $\lambda_1 = 1$ и $\lambda_2 = 2$. Они же являются собственными значениями преобразования A. Напишем матрицы

$$A - E = \begin{Vmatrix} -2 & -2 \\ 3 & 3 \end{Vmatrix} \quad \text{и} \quad A - 2E = \begin{Vmatrix} -3 & -2 \\ 3 & 2 \end{Vmatrix}.$$

Мы видим, что собственные подпространства натянуты на векторы f_1 и f_2 с координатными столбцами $\mathbf{f}_1 = \|1 \ \ -1\|^T$ и $\mathbf{f}_2 = \|-2 \ \ 3\|^T$.

в) Составим матрицы

$$A^* - E = \begin{Vmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix} \quad \text{и} \quad A^* - 2E = \begin{Vmatrix} 0 & 4 \\ 0 & -1 \end{Vmatrix}.$$

Собственные подпространства натянуты на векторы g_1 и g_2 с координатными столбцами $\mathbf{g}_1 = \|-4 \ \ 1\|^T$ и $\mathbf{g}_2 = \|1 \ \ 0\|^T$.

Проверим, что $(f_1, g_2) = (f_2, g_1) = 0$. Действительно,

$$\mathbf{f}_1^T\Gamma\mathbf{g}_2 = \|1 \ \ -1\| \begin{Vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} 1 \\ 0 \end{Vmatrix} = \|0 \ \ -1\| \begin{Vmatrix} 1 \\ 0 \end{Vmatrix} = 0$$

и

$$\mathbf{f}_2^T\Gamma\mathbf{g}_1 = \|-2 \ \ 3\| \begin{Vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} -4 \\ 1 \end{Vmatrix} = \|1 \ \ 4\| \begin{Vmatrix} -4 \\ 1 \end{Vmatrix} = 0.$$

2. *Пусть преобразование* A *вещественного линейного пространства* $\mathcal{L}$ *в некотором базисе* $\mathbf{e}$ *имеет симметричную матрицу. Докажите, что оно диагонализуемо.*

Решение. Мы можем ввести в рассматриваемом линейном пространстве скалярное произведение, назначив по определению базис $\mathbf{e}$ ортонормированным. Действительно, в этом случае каждой паре векторов x и y будет поставлено в соответствие число $(x\ y) = \mathbf{x}^T\mathbf{y}$, где $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ — координатные столбцы векторов в базисе $\mathbf{e}$. Определение скалярного произведения без труда проверяется.

Так как матрица преобразования A в базисе $\mathbf{e}$ симметрична, преобразование будет самосопряженным относительно введенного скалярного произведения, и будет существовать базис $\mathbf{e}' = \mathbf{e}S$, в котором матрица $A' = S^{-1}AS$ преобразования A диагональная. Это означает, что преобразование A диагонализуемо — свойство, не зависящее от наличия скалярного произведения.

3. *Найдите все линейные преобразования, которые являются как ортогональными, так и самосопряженными.*

Решение. Пусть преобразование A является как самосопряженным, так и ортогональным. Тогда существует ортонормированный базис, в котором его матрица диагональная и ортогональная. Если матрица обладает этими двумя свойствами, то все ее диагональные элементы равны 1 или (-1). Мы можем считать базисные векторы упорядоченными так, что на диагонали первые k элементов равны 1, а остальные $n-k$ равны (-1). Ясно, что и обратно, преобразование с такой матрицей в ортонормированном базисе является и ортогональным, и самосопряженным.

Геометрический смысл такого преобразования очевиден: оно переводит вектор x с координатами $\xi_1, \ldots, \xi_k, \xi_{k+1}, \ldots, \xi_n$ в вектор $\mathsf{A}(x)$ с координатами $\xi_1, \ldots, \xi_k, -\xi_{k+1}, \ldots, -\xi_n$, т. е. может быть описано как отражение в подпространстве, натянутом на первые k базисных векторов. Это описание не охватывает только преобразования с матрицами E и $-E$ — тождественное преобразование и центральную симметрию, которые, конечно, также являются ортогональными и самосопряженными.

4. *Сколько существует ортонормированных базисов из собственных векторов данного самосопряженного преобразования n-мерного пространства, если у его характеристического многочлена* а) *нет кратных корней*, б) *есть кратные* *корни? Возможен ли неортогональный базис из собственных векторов самосопряженного преобразования?*

Решение. а) Если у характеристического многочлена нет кратных корней, то преобразование имеет n различных собственных значений и, следовательно, пространство есть прямая сумма n ортогональных одномерных собственных подпространств. Ортонормированный базис из собственных векторов должен быть объединением единичных векторов, выбранных по одному из каждого подпространства. В каждом одномерном подпространстве есть два единичных вектора (различающиеся направлением).

Возможные базисы из собственных векторов различаются, во первых, порядком, в котором мы выбираем подпространства: каждой перестановке $i_1, \ldots, i_n$ номеров подпространств соответствует порядок, в котором расположены векторы в базисе: первым базисным вектором будет вектор из i_1-го подпространства и т. д. Существует $n!$ перестановок.

Во-вторых, в каждом из подпространств может быть выбран один из двух единичных векторов. Это даст 2^n возможностей для каждой перестановки. Итак, всего возможно $2^n n!$ ортонормированных базисов из собственных векторов.

б) Для самосопряженного преобразования сумма размерностей всех собственных подпространств равна n, так же как и сумма кратностей всех корней характеристического уравнения. Ни одна размерность не может быть больше кратности, поэтому каждая из размерностей равна кратности соответствующего корня. Отсюда следует, что при наличии кратных корней обязательно будет собственное подпространство размерности $\geqslant 2$, в котором ортонормированный базис выбирается произвольно.

Таким образом, при наличии кратных корней характеристического уравнения самосопряженное преобразование имеет бесконечное множество ортонормированных базисов из собственных векторов.

в) Из сказанного в пунктах (а) и (б) видно, что при отсутствии кратных корней каждый базис из собственных векторов ортогональный, а при наличии кратных корней мы получим неортогональный базис из собственных векторов, взяв неортогональный базис в собственном подпространстве размерности, большей единицы.

5. *Найдите матрицу перехода S к ортонормированному базису из собственных векторов преобразования, заданного в ортонормированном базисе матрицей A, и напишите матрицу A' преобразования в найденном базисе,*

$$A = \begin{Vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{Vmatrix}.$$

Р е ш е н и е. Нет необходимости писать характеристическое уравнение и решать его. Видно, что отняв 1 от каждого элемента на главной диагонали, мы получим матрицу

$$A - E = \begin{Vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{Vmatrix}.$$

Ранг этой матрицы равен 1. Значит, $\lambda = 1$ — корень характеристического уравнения. Не представляет труда найти фундаментальную матрицу системы уравнений $(A - E)\mathbf{x} = \mathbf{0}$:

$$\begin{Vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}.$$

Столбцы этой матрицы — координатные столбцы базисных векторов f_1 и f_2 собственного подпространства $\operatorname{Ker}(\mathsf{A} - \mathsf{E})$, но базис этот, к сожалению, не ортонормированный. Ортогонализуем и нормируем его.

$$\begin{Vmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{Vmatrix} - \frac{1}{2}\begin{Vmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} -1/2 \\ -1/2 \\ 1 \end{Vmatrix} = -\frac{1}{2}\begin{Vmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{Vmatrix}.$$

После нормирования мы получаем столбцы

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{Vmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{Vmatrix} \quad \text{и} \quad \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{Vmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{Vmatrix}.$$

Собственное подпространство двумерное, значит, как мы видели в предыдущей задаче, кратность корня равна двум. Второй корень характеристического уравнения можно установить, например, по следу матрицы, который равен сумме всех корней. У нашей матрицы след равен 6. Вычитая из него два корня, равных 1, получаем, что второй корень равен 4. Зная собственное значение, можно обычным путем найти собственный вектор, но можно поступить и иначе.

Вспомним, что векторы из найденного нами собственного подпространства удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{Vmatrix}1 & 1 & 1\end{Vmatrix}\mathbf{x} = 0.$$

Это означает, что каждый из них ортогонален вектору f_3 с координатами $\begin{Vmatrix}1 & 1 & 1\end{Vmatrix}^T$. Искомый собственный вектор, принадлежащий собственному значению 4, также должен быть ортогонален всем векторам, принадлежащим собственному значению 1, и потому коллинеарен f_3. Остается пронормировать f_3, умножив его на $1/\sqrt{3}$.

Ортонормированный базис из собственных векторов найден. Матрицу перехода к нему мы получим, составив матрицу из координатных столбцов векторов этого базиса:

$$\begin{Vmatrix}-1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3}\\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3}\\ 0 & -2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3}\end{Vmatrix}.$$

Матрица $A' = S^{-1}AS$ преобразования в базисе из собственных векторов должна быть равна

$$A = \begin{Vmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 4\end{Vmatrix}.$$

Порядок, в котором собственные значения расположены на диагонали, определяется порядком расположения столбцов в матрице перехода.

6. *Ортогональное преобразование, заданное матрицей*

$$\begin{Vmatrix}0 & 0 & 0 & -1\\ 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\end{Vmatrix}$$

в ортонормированном базисе, разложите в произведение двух вращений во взаимно перпендикулярных двумерных подпространствах.

Р е ш е н и е. Плоскости, в которых происходят вращения, — двумерные инвариантные подпространства. Для того чтобы их найти, составим характеристическое уравнение данного преобразования:

$$\det \begin{Vmatrix} -\lambda & 0 & 0 & -1 \\ 1 & -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\lambda \end{Vmatrix} = \lambda^4 + 1.$$

(Для вычисления достаточно разложить определитель по первой строке.) Чтобы разложить характеристический многочлен на множители, прибавим и вычтем $2\lambda^2$:

$$(\lambda^4 + 2\lambda^2 + 1) - 2\lambda^2 = (\lambda^2 + 1 - \sqrt{2}\,\lambda)(\lambda^2 + 1 + \sqrt{2}\,\lambda).$$

Найдем подпространства $\mathcal{L}_1 = \operatorname{Ker}(\mathsf{A}^2 + \sqrt{2}\,\mathsf{A} + \mathsf{E})$ и $\mathcal{L}_2 = \operatorname{Ker}(\mathsf{A}^2 - \sqrt{2}\,\mathsf{A} + \mathsf{E})$:

$$A^2 = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{Vmatrix}.$$

Теперь можно написать

$$A^2 + \sqrt{2}\,A + E = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & -1 & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 1 & 0 & -1 \\ 1 & \sqrt{2} & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \sqrt{2} & 1 \end{Vmatrix}.$$

Линейные зависимости между строками следующие: $\mathbf{a}_2 = \mathbf{a}_4 + \sqrt{2}\,\mathbf{a}_1$ и $\mathbf{a}_3 = \mathbf{a}_1 + \sqrt{2}\,\mathbf{a}_4$. Ранг этой матрицы равен двум. За базисные строки можно принять первую и четвертую. Таким образом,

$$\begin{Vmatrix} 1 & 0 & -1 & -\sqrt{2} \\ 0 & 1 & \sqrt{2} & 1 \end{Vmatrix}$$

— упрощенный вид матрицы системы уравнений подпространства $\mathcal{L}_1$. Фундаментальной матрицей системы является матрица

$$F = \|\mathbf{f}_1 \quad \mathbf{f}_2\| = \begin{Vmatrix} 1 & \sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}.$$

Ее столбцы — это координатные столбцы векторов f_1 и f_2 — базисных векторов в подпространстве $\mathcal{L}_1$.

Все векторы подпространства $\mathcal{L}_1$ поворачиваются на один и тот же угол. Для того чтобы определить этот угол, найдем угол между f_1 и $\mathsf{A}(f_1)$

$$A\mathbf{f}_1 = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \\ 0 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0 \\ 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{Vmatrix}.$$

Следовательно,

$$\cos\varphi_1 = \frac{(\mathsf{A}(f_1),\, f_1)}{|\mathsf{A}(f_1)|\,|f_1|} = \frac{(A\mathbf{f}_1)^T\mathbf{f}_1}{\sqrt{(A\mathbf{f}_1)^T A\mathbf{f}_1}\,\sqrt{\mathbf{f}_1^T\mathbf{f}_1}} = -\frac{2\sqrt{2}}{2\cdot 2} = -\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Таким образом, угол поворота равен $3\pi/4$. Говорить о направлении поворота имеет смысл только по отношению к какому-нибудь базису. Учтем это при выборе ортонормированного базиса в подпространстве $\mathcal{L}_1$.

Ортогонализуем базис f_1, f_2. Построим вектор f_2' с координатным столбцом

$$\mathbf{f}_2' = \mathbf{f}_2 - \frac{\mathbf{f}_2^T\mathbf{f}_1}{\mathbf{f}_1^T\mathbf{f}_1}\mathbf{f}_1 = \begin{Vmatrix} \sqrt{2} \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{Vmatrix} - \frac{2\sqrt{2}}{4} \begin{Vmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \\ 0 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ -1/\sqrt{2} \\ 1 \end{Vmatrix}.$$

Длина этого вектора равна $\sqrt{2}$, а длина вектора f_1 равна 2. Нормируя векторы, получаем в подпространстве $\mathcal{L}_1$ ортонормированный базис h_1, h_2 из векторов с координатными столбцами

$$\mathbf{h}_1 = \begin{Vmatrix} 1/2 \\ -1/\sqrt{2} \\ 1/2 \\ 0 \end{Vmatrix} \quad \text{и} \quad \mathbf{h}_2 = \begin{Vmatrix} 1/2 \\ 0 \\ -1/2 \\ 1/\sqrt{2} \end{Vmatrix}.$$

Найдем координаты вектора $\mathsf{A}(h_1) = (1/2)\mathsf{A}(f_1)$ в базисе h_1, h_2. Координаты вектора длины 1 в ортонормированном базисе равны косинусам его углов с базисными векторами. Очевидно, что косинус угла между $\mathsf{A}(h_1)$ и h_1 равен $\cos\varphi_1 = -1/\sqrt{2}$.

Косинус угла между $\mathsf{A}(h_1)$ и h_2 равен

$$\frac{(\mathsf{A}(h_1),\, h_2)}{|\mathsf{A}(h_1)||h_2|} = \begin{Vmatrix} 0 & 1/2 & -1/\sqrt{2} & 1/2 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} 1/2 \\ 0 \\ -1/2 \\ 1/\sqrt{2} \end{Vmatrix} = 1/\sqrt{2}.$$

Мы видим, что образ первого базисного вектора в этом базисе имеет координаты $-1/\sqrt{2}$ и $1/\sqrt{2}$.

Напишем матрицу ограничения преобразования A на подпространстве $\mathcal{L}_1$ в базисе h_1, h_2. Это матрица поворота плоскости, и она определяется своим первым столбцом $\|-1/\sqrt{2}\ \ 1/\sqrt{2}\,\|^T$:

$$A_1 = \begin{Vmatrix} -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{Vmatrix}.$$

Для нас существенно, что вторая координата $\mathsf{A}(h_1)$ положительна. Это означает, что выбранный нами ортонормированный базис h_1, h_2 ориентирован так, что кратчайший поворот от h_1 к h_2 производится в том же направлении, что и поворот от h_1 к $\mathsf{A}(h_1)$. Действительно, площадь ориентированного параллелограмма, построенного на векторах h_1 и $\mathsf{A}(h_1)$, имеет тот же знак, что и площадь ориентированного параллелограмма, построенного на h_1 и h_2:

$$S_{\pm}(h_1, \mathsf{A}(h_1)) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{vmatrix} S_{\pm}(h_1,\, h_2).$$

Итак, ограничение преобразования A на подпространстве $\mathcal{L}_1$ — поворот подпространства $\mathcal{L}_1$ на угол $3\pi/4$ в направлении от h_1 к h_2.

Матрицей преобразования $\mathsf{A}^2 - \sqrt{2}\,\mathsf{A} + \mathsf{E}$ будет матрица

$$A^2 - \sqrt{2}\,A + E = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & -1 & \sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -\sqrt{2} & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -\sqrt{2} & 1 \end{Vmatrix}.$$

Аналогичный подсчет показывает, что

$$F' = \|\mathbf{f}_3\ \ \mathbf{f}_4\| = \begin{Vmatrix} 1 & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}$$

— фундаментальная матрица системы уравнений подпространства $\mathcal{L}_2 = \operatorname{Ker}(\mathsf{A}^2 - \sqrt{2}\,\mathsf{A} + \mathsf{E})$. Следовательно, $\mathcal{L}_2$ натянуто на векторы f_3 и f_4 с координатными столбцами $\mathbf{f}_3$ и $\mathbf{f}_4$.

Можно заметить, что каждый из векторов f_1 и f_2 ортогонален любому из векторов f_3 и f_4.

Найдем угол поворота в подпространстве $\mathcal{L}_2$.

$$A\mathbf{f}_3 = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \\ 0 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0 \\ 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{Vmatrix},$$

и, значит,

$$\cos\varphi_2 = \frac{(\mathsf{A}(f_3),\, f_3)}{|\mathsf{A}(f_3)|\,|f_3|} = \frac{(A\mathbf{f}_3)^T\mathbf{f}_3}{\sqrt{(A\mathbf{f}_3)^T A\mathbf{f}_3}\,\sqrt{\mathbf{f}_3^T\mathbf{f}_3}} = \frac{2\sqrt{2}}{2\cdot 2} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Поэтому второе вращение — поворот на $\pi/4$ в плоскости векторов f_3 и f_4.

Ортогонализуем векторы f_3 и f_4. Построим вектор f_4' с координатным столбцом

$$\mathbf{f}_4' = \mathbf{f}_4 - \frac{\mathbf{f}_4^T\mathbf{f}_3}{\mathbf{f}_3^T\mathbf{f}_3}\mathbf{f}_3 = \begin{Vmatrix} -\sqrt{2} \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{Vmatrix} + \frac{2\sqrt{2}}{4}\begin{Vmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \\ 0 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \\ 1 \end{Vmatrix}.$$

Нормируя векторы f_3 и f_4', получаем в подпространстве $\mathcal{L}_2$ ортонормированный базис h_3, h_4 из векторов с координатными столбцами

$$\mathbf{h}_3 = \begin{Vmatrix} 1/2 \\ 1/\sqrt{2} \\ 1/2 \\ 0 \end{Vmatrix} \quad \text{и} \quad \mathbf{h}_4 = \begin{Vmatrix} -1/2 \\ 0 \\ 1/2 \\ 1/\sqrt{2} \end{Vmatrix}.$$

Разложим вектор $\mathsf{A}(h_3) = (1/2)\mathsf{A}(f_3)$ по базису h_3, h_4. Очевидно, что $(\mathsf{A}(h_3),\, h_3) = \cos\varphi_2 = 1/\sqrt{2}$, кроме того, мы подсчитаем, что $(\mathsf{A}(h_3),\, h_4) = 1/\sqrt{2}$. Следовательно, $\mathsf{A}(h_3)$ — образ первого базисного вектора — имеет координаты $1/\sqrt{2}$ и $1/\sqrt{2}$. Заметим, что вторая координата положительна. Это означает, что поворот в подпространстве $\mathcal{L}_2$ производится в направлении от первого базисного вектора ко второму. Поэтому матрицей этого ограничения в базисе h_3, h_4 будет матрица поворота на угол $\pi/4$ в направлении от первого базисного вектора ко второму:

$$A_2 = \begin{Vmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{Vmatrix}.$$

Мы можем сформулировать окончательный результат. Векторы h_1, h_2, h_3 и h_4 попарно ортогональны и нормированы. Они составляют ортонормированный базис в четырехмерном пространстве, матрица перехода к которому — ортогональная матрица

$$S = \frac{1}{2}\begin{Vmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ -\sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \end{Vmatrix}.$$

Так как базисные векторы лежат в инвариантных подпространствах, матрица A' преобразования A в базисе h_1, h_2, h_3, h_4 — клеточно диагональная, причем диагональные клетки — матрицы ограничений A на подпространствах $\mathcal{L}_1$ и $\mathcal{L}_2$:

$$A' = \left\| \begin{array}{c|c} A_1 & O \\ \hline O & A_2 \end{array} \right\| = \begin{Vmatrix} -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{Vmatrix}.$$

Для проверки можно вычислить эту матрицу, используя матрицу перехода. Поскольку она ортогональная, $S^{-1} = S^T$. Мы получим тот же результат:

$$A' = S^{-1}AS = \frac{1}{2}\begin{Vmatrix} 1 & -\sqrt{2} & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & \sqrt{2} \\ 1 & \sqrt{2} & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & \sqrt{2} \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{Vmatrix} \cdot S =$$

$$= \frac{1}{4}\begin{Vmatrix} -\sqrt{2} & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & \sqrt{2} & -1 \\ \sqrt{2} & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & \sqrt{2} & 1 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ -\sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \end{Vmatrix} =$$

$$= \begin{Vmatrix} -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{Vmatrix}.$$

7. *Найдите сингулярное разложение матрицы*

$$A = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{Vmatrix}.$$

Р е ш е н и е. Составим матрицу $A^T A$ и приведем ее к диагональному виду при помощи ортогональной матрицы перехода:

$$\begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{Vmatrix}.$$

Нетрудно подсчитать, что корни характеристического многочлена равны 2, 1 и 0, и с помощью матрицы перехода

$$Q = \begin{Vmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \end{Vmatrix}$$

матрица $A^T A$ переходит в диагональную матрицу

$$\Lambda = \begin{Vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}.$$

Нормируем ненулевые столбцы матрицы

$$AQ = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \sqrt{2} & 0 & 0 \end{Vmatrix}$$

и составим из полученных столбцов матрицу

$$P = \begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix}.$$

Составим матрицу D размеров 2×3, поместив на диагонали сингулярные числа $\sqrt{2}$ и 1 и положив остальные элементы равными нулю. Тогда очевидно, что $AQ = PD$, или

$$A = PDQ^T = \begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \end{Vmatrix}.$$

Это и есть искомое сингулярное разложение.

Можно было бы поступить иначе — найти сингулярное разложение матрицы A^T и затем транспонировать его. Матрица

$$AA^T = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{Vmatrix}$$

уже имеет диагональный вид, но собственные значения на диагонали должны стоять в убывающем порядке. Мы добьемся этого, если преобразуем эту матрицу матрицей

$$Q' = \begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix}$$

так:

$$Q'^T A A^T Q' = \begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}.$$

Теперь мы имеем

$$A^T Q' = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix}.$$

Нормируем столбцы и дополняем полученную матрицу еще одним столбцом до ортогональной матрицы

$$P' = \begin{Vmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \end{Vmatrix}.$$

Если

$$D' = \begin{Vmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix},$$

то $A^T Q' = P' D'$, и мы получаем сингулярное разложение

$$A^T = \begin{Vmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix},$$

которое отличается от полученного ранее разложения A транспонированием. (Заметим, что в этом решении, по сравнению с предыдущим, обозначения матриц P и Q поменялись: $Q' = P$, $P' = Q$, $D' = D^T$.)

7*. *Найдите сингулярное разложение матрицы*

$$A = \begin{Vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 8 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{Vmatrix}.$$

Решение. Составим матрицу

$$A^TA = \begin{Vmatrix} 72 & 18 & 18 \\ 18 & 5 & 4 \\ 18 & 4 & 5 \end{Vmatrix}.$$

Теперь нужно найти ортогональную матрицу Q, такую что $Q^T(A^TA)Q$ — диагональная матрица. Это стандартная задача: построить ортонормированный базис из собственных векторов самосопряженного преобразования с матрицей A^TA.

Видно, что в матрице A^TA первый столбец — удвоенная сумма второго и третьего. Значит, базисный вектор $\mathrm{Ker}\, A^TA$ — собственный вектор с собственным значением 0 — имеет координатный столбец $\|1 \;\; -2 \;\; -2\|^T$.

Далее, в матрице $A^TA - E$ совпадают два последних столбца. Это дает еще один собственный вектор с собственным значением 1. Его координаты $\|0 \;\; 1 \;\; -1\|^T$.

След матрицы A^TA — сумма всех характеристических чисел — равен 82. Находим, что характеристические числа 81, 1, 0 Собственный вектор, принадлежащий значению 81, ортогонален двум уже найденным собственным векторам, и потому его координаты удовлетворяют однородной системе с матрицей

$$\begin{Vmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \end{Vmatrix}.$$

Решения этой системы пропорциональны столбцу $\|4 \;\; 1 \;\; 1\|^T$. Нормируя координатные столбцы найденных векторов, составим матрицу

$$Q = \frac{1}{3\sqrt{2}} \begin{Vmatrix} 4 & 0 & -\sqrt{2} \\ 1 & 3 & 2\sqrt{2} \\ 1 & -3 & 2\sqrt{2} \end{Vmatrix}.$$

Теперь найдем

$$AQ = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{Vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 12 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \end{Vmatrix}.$$

Столбцы этой матрицы попарно ортогональны, нормы их равны сингулярным числам $9, 1, 0$. Пронормировав первые два столбца, находим матрицу

$$P_1 = \begin{Vmatrix} \dfrac{1}{3\sqrt{2}} & \dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ \dfrac{4}{3\sqrt{2}} & 0 \\ \dfrac{1}{3\sqrt{2}} & -\dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{Vmatrix}.$$

Нужен еще один ненулевой столбец, ортогональный столбцам матрицы P_1. Это нетривиальное решение однородной системы уравнений с матрицей P_1^T — столбец $\|2 \ \ -1 \ \ 2\|^T$. *)

Пронормировав столбец $\|2 \ \ -1 \ \ 2\|^T$, мы получим столбец, дополняющий P_1 до ортогональной матрицы

$$P = \begin{Vmatrix} \dfrac{1}{3\sqrt{2}} & \dfrac{1}{\sqrt{2}} & \dfrac{2}{3} \\ \dfrac{4}{3\sqrt{2}} & 0 & -\dfrac{1}{3} \\ \dfrac{1}{3\sqrt{2}} & -\dfrac{1}{\sqrt{2}} & \dfrac{2}{3} \end{Vmatrix}.$$

Рассмотрим матрицу

$$D = \begin{Vmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}.$$

Умножение матрицы P справа на D умножает 1-й, 2-й и 3-й столбцы P соответственно на 9, 1 и 0 и тем самым превращает P в AQ. Таким образом, $AQ = PD$.

Теперь нетрудно написать сингулярное разложение матрицы $A = PDQ^T$:

$$\begin{Vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 8 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \dfrac{1}{3\sqrt{2}} & \dfrac{1}{\sqrt{2}} & \dfrac{2}{3} \\ \dfrac{4}{3\sqrt{2}} & 0 & -\dfrac{1}{3} \\ \dfrac{1}{3\sqrt{2}} & -\dfrac{1}{\sqrt{2}} & \dfrac{2}{3} \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} \dfrac{4}{3\sqrt{2}} & 0 & -\dfrac{1}{3} \\ \dfrac{1}{3\sqrt{2}} & \dfrac{1}{\sqrt{2}} & \dfrac{2}{3} \\ \dfrac{1}{3\sqrt{2}} & -\dfrac{1}{\sqrt{2}} & \dfrac{2}{3} \end{Vmatrix}^T.$$

---

*) Можно заметить, что строка $\|2 \ \ -1 \ \ 2\|$ при умножении на A дает нулевую строку. Случайно ли это?

8. *Получите полярное разложение преобразования, заданного в ортонормированном базисе матрицей*

а) $A = \begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix}$, б) $B = \begin{Vmatrix} \sqrt{2} & 1 \\ 0 & \sqrt{2} \end{Vmatrix}$.

Р е ш е н и е. а) Сначала получим сингулярное разложение матрицы A:

$$A^T A = \begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}.$$

Матрица $A^T A$ уже имеет диагональный вид, только элементы на главной диагонали расположены не в порядке убывания. Умножение справа и слева на матрицу

$$Q = Q^T = \begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix}$$

переставит строки и столбцы и тем самым переставит элементы диагонали. Далее,

$$AQ = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix}.$$

Дополняя (уже нормированный) первый столбец этой матрицы до ортогональной матрицы, мы получаем матрицу $P = E$. Итак,

$$A = PDQ^T = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix}.$$

Достаточно пропустить в этом произведении единичную матрицу, чтобы получить разложение A в произведение симметричной матрицы с неотрицательными диагональными элементами и ортогональной матрицы — полярное разложение:

$$\begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix}.$$

б) С матрицей B поступаем точно так же:

$$B^T B = \begin{Vmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 1 & \sqrt{2} \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} \sqrt{2} & 1 \\ 0 & \sqrt{2} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 2 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 3 \end{Vmatrix}.$$

Характеристическое уравнение этой матрицы $\lambda^2 - 5\lambda + 4 = 0$ имеет корни $\lambda_1 = 4$ и $\lambda_2 = 1$. Соответствующие собственные векторы $\|1 \quad \sqrt{2}\,\|^T$ и $\|-\sqrt{2} \quad 1\|^T$ после нормировки составляют ортогональную матрицу

$$Q = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{Vmatrix} 1 & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 1 \end{Vmatrix}.$$

Далее,

$$BQ = \begin{Vmatrix} \sqrt{2} & 1 \\ 0 & \sqrt{2} \end{Vmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{Vmatrix} 1 & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 1 \end{Vmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{Vmatrix} 2\sqrt{2} & -1 \\ 2 & \sqrt{2} \end{Vmatrix}.$$

Нормируем столбцы этой матрицы и записываем ее как произведение ортогональной матрицы P на диагональную D:

$$BQ = PD = \begin{Vmatrix} \sqrt{2/3} & -\sqrt{1/3} \\ \sqrt{1/3} & \sqrt{2/3} \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}.$$

Полярное разложение — представление B виде произведения ортогональной матрицы $U = PQ^T$ и симметричной $S = QDQ^T$. (Напомним, что $B = PDQ^T = (PQ^T)(QDQ^T) = US$.) Выполним умножение:

$$U = \begin{Vmatrix} \sqrt{2/3} & -\sqrt{1/3} \\ \sqrt{1/3} & \sqrt{2/3} \end{Vmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{Vmatrix} 1 & \sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & 1 \end{Vmatrix} = \frac{1}{3} \begin{Vmatrix} 2\sqrt{2} & 1 \\ -1 & 2\sqrt{2} \end{Vmatrix}$$

и

$$S = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{Vmatrix} 1 & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 1 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix} \cdot Q^T =$$

$$= \frac{1}{3} \begin{Vmatrix} 2 & -\sqrt{2} \\ 2\sqrt{2} & 1 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 1 & \sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & 1 \end{Vmatrix} = \frac{1}{3} \begin{Vmatrix} 4 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 5 \end{Vmatrix}.$$

Итак, искомое полярное разложение

$$\begin{Vmatrix} \sqrt{2} & 1 \\ 0 & \sqrt{2} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 2\sqrt{2}/3 & 1/3 \\ -1/3 & 2\sqrt{2}/3 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 4/3 & \sqrt{2}/3 \\ \sqrt{2}/3 & 5/3 \end{Vmatrix}.$$

9. *Какие сингулярные числа у квадратной матрицы A порядка n, если* $\mathrm{Rg}\, A = 1$?

Решение. В сингулярном разложении матрицы $\mathrm{Rg}\, D = \mathrm{Rg}\, A = 1$. Поэтому элементы D все равны нулю, за исключением $d_{11} > 0$. Итак, только одно сингулярное число A положительно.

Матрица ранга 1 может быть представлена как произведение $\mathbf{x}\mathbf{y}^T$ ненулевого столбца $\mathbf{x}$ на ненулевую строку $\mathbf{y}^T$. Напомним, что в качестве $\mathbf{x}$ можно взять любой ненулевой (базисный) столбец матрицы, а в качестве $\mathbf{y}^T$ — строку из коэффициентов y_i, таких что i-й столбец A равен $y_i\mathbf{x}$.

Тогда $A^TA = \mathbf{y}\mathbf{x}^T\mathbf{x}\mathbf{y}^T = (\mathbf{x}^T\mathbf{x})(\mathbf{y}\mathbf{y}^T)$, т. е. произведению симметричной матрицы $\mathbf{y}\mathbf{y}^T$ ранга 1 на число $|\mathbf{x}|^2 = \mathbf{x}^T\mathbf{x}$.

У матрицы ранга 1 только одно характеристическое число отлично от нуля, а значит, оно равно следу матрицы. След матрицы $\mathbf{y}\mathbf{y}^T$ равен сумме квадратов элементов столбца $\mathbf{y}$, т. е. $|\mathbf{y}|^2$. Таким образом, единственное ненулевое характеристическое число матрицы A^TA равно $|\mathbf{x}|^2\,|\mathbf{y}|^2$, а единственное ненулевое сингулярное число A равно $|\mathbf{x}|\,|\mathbf{y}|$.

Приведем еще одно решение этой задачи. Из формулы К. (12) § 2 гл. VII следует, что максимальное сингулярное число α_1 преобразования A равно самому большому отношению, в котором может увеличиться длина вектора после преобразования:

$$\alpha_1 = \max_{\mathbf{z}\neq\mathbf{0}} \frac{|A\mathbf{z}|}{|\mathbf{z}|}. \tag{1}$$

Подсчитаем для нашего случая этот максимум.

$$|A\mathbf{z}|^2 = (A\mathbf{z})^T(A\mathbf{z}) = (\mathbf{x}\mathbf{y}^T\mathbf{z})^T(\mathbf{x}\mathbf{y}^T\mathbf{z}) = \mathbf{z}^T\mathbf{y}\mathbf{x}^T\mathbf{x}\mathbf{y}^T\mathbf{z} = \\ = (\mathbf{x}^T\mathbf{x})(\mathbf{z}^T\mathbf{y})(\mathbf{y}^T\mathbf{z}).$$

Так как $\mathbf{z}^T\mathbf{y} = \mathbf{y}^T\mathbf{z}$, мы получаем $|A\mathbf{z}|^2 = |\mathbf{x}|^2(\mathbf{y}^T\mathbf{z})^2$. Из неравенства Коши–Буняковского следует, что $\max\,(\mathbf{y}^T\mathbf{z})^2 = |\mathbf{y}|^2|\mathbf{z}|^2$. Поэтому

$$\max_{\mathbf{z}\neq\mathbf{0}} \frac{|A\mathbf{z}|^2}{|\mathbf{z}|^2} = |\mathbf{x}|^2|\mathbf{y}|^2,$$

что равносильно $\alpha_1 = |\mathbf{x}|\,|\mathbf{y}|$.

10. *Пусть α, β и γ — максимальные сингулярные числа квадратных матриц A, B и AB соответственно. Докажите, что $\gamma \leqslant \alpha\beta$.*

Решение. Как отмечалось при решении предыдущей задачи (формула (1)), для любой матрицы A наибольшее сингулярное число есть максимум (достижимая точная верхняя грань) значений отношения $|A\mathbf{x}|/|\mathbf{x}|$ для всевозможных ненулевых столбцов $\mathbf{x}$ высоты n. Для произвольного столбца $\mathbf{x}$

$$\frac{|AB\mathbf{x}|}{|\mathbf{x}|} = \frac{|A(B\mathbf{x})|}{|B\mathbf{x}|}\,\frac{|B\mathbf{x}|}{|\mathbf{x}|}.$$

Перемножая неравенства

$$\frac{|A(B\mathbf{x})|}{|B\mathbf{x}|} \leqslant \alpha \quad \text{и} \quad \frac{|B\mathbf{x}|}{|\mathbf{x}|} \leqslant \beta,$$

мы получаем, что для любого столбца $\mathbf{x}$

$$\frac{|AB\mathbf{x}|}{|\mathbf{x}|} \leqslant \alpha\beta.$$

Таким образом, произведение $\alpha\beta$ — верхняя грань отношения $|AB\mathbf{x}|/|\mathbf{x}|$ и по определению не меньше точной верхней грани γ.

11*. *Докажите, что все корни характеристического многочлена ортогонального преобразования по модулю равны единице.*

Р е ш е н и е. Вещественные корни являются собственными значениями и равны по модулю 1, так как для собственного вектора x с собственным значением λ должно быть $|\mathsf{A}(x)| = |x|$ и $|\mathsf{A}(x)| = |\lambda|\,|x|$.

Осталось проверить утверждение для комплексных (не вещественных) корней. Пусть λ такой корень. Как известно, ему соответствует двумерное инвариантное подпространство $\mathcal{E}'$, не содержащее собственных векторов A. Обозначим через A' ограничение A на $\mathcal{E}'$. Это ортогональное преобразование, а следовательно, в ортонормированном базисе его матрица A' ортогональная, и $\det A' = \pm 1$. Ортогональная матрица второго порядка с детерминантом, равным (-1), симметрична, и преобразование с такой матрицей имеет собственный вектор, чего в подпространстве $\mathcal{E}'$ быть не может. Следовательно, $\det A' = 1$

Пусть теперь базис в $\mathcal{E}'$ составляют векторы e и $\mathsf{A}(e)$. Вспомним, что $\mathcal{E}' \subseteq \operatorname{Ker}(\mathsf{A}^2 - p\mathsf{A} + q\mathsf{E})$, где $p = \lambda + \bar{\lambda}$, а $q = \lambda\bar{\lambda}$. Поскольку $\mathsf{A}(\mathsf{A}(e)) = \mathsf{A}^2(e) = p\mathsf{A}(e) - qe$, матрицей преобразования A в базисе e, $\mathsf{A}(e)$ будет матрица

$$A'' = \begin{Vmatrix} 0 & -q \\ 1 & p \end{Vmatrix},$$

$\det A'' = q$. Но детерминант матрицы линейного преобразования не зависит от базиса: $\det A'' = \det A' = 1$. Таким образом, $\lambda\bar{\lambda} = 1$, как и требовалось.

Глава VII § 3

1. *В пространстве многочленов степени* $\leqslant 3$ *скалярное произведение зададим так же, как в задаче* 1 § 1. *Линейная функция* f *ставит в соответствие многочлену* $p(t)$ *его свободный член* $p(0)$. *Найдите вектор (многочлен), присоединенный к этой линейной функции.*

Решение. Иначе задача может быть сформулирована так: найти такой многочлен q, что для любого многочлена p выполнено равенство

$$(p,\, q) = \int_{-1}^{1} p(t)q(t)\,dt = p(0).$$

Напишем интеграл подробнее, зная, что степени многочленов не превосходят трех:

$$\int_{-1}^{1} (p_0 + p_1 t + p_2 t^2 + p_3 t^3)(q_0 + q_1 t + q_2 t^2 + q_3 t^3)\,dt.$$

Так как интеграл от нечетной функции по симметричному отрезку равен нулю, достаточно проинтегрировать члены произведения, имеющие четные степени:

$$(p,\, q) = 2p_0 q_0 + \frac{2}{3}\,(p_0 q_2 + p_1 q_1 + p_2 q_0) + \frac{2}{5}\,(p_1 q_3 + p_2 q_2 + p_3 q_1) + \\ + \frac{2}{7}\,p_3 q_3 = p(0).$$

Учтем, что $p(0) = p_0$, и соберем коэффициенты в левой части равенства при p_0, p_1, p_2 и p_3:

$$\left(2q_0 + \frac{2}{3}\,q_2\right) p_0 + \left(\frac{2}{3}\,q_1 + \frac{2}{5}\,q_3\right) p_1 + \left(\frac{2}{3}\,q_0 + \frac{2}{5}\,q_2\right) p_2 + \\ + \left(\frac{2}{5}\,q_1 + \frac{2}{7}\,q_3\right) p_3 = p_0.$$

Мы получили равенство, которое должно быть выполнено при любых значениях переменных p_0, p_1, p_2 и p_3. Для этого необходимо и достаточно, чтобы были равны коэффициенты при этих переменных:

$$\begin{aligned} &2q_0 + \frac{2}{3}\,q_2 = 1, \\ &\frac{2}{3}\,q_1 + \frac{2}{5}\,q_3 = 0, \\ &\frac{2}{3}\,q_0 + \frac{2}{5}\,q_2 = 0, \\ &\frac{2}{5}\,q_1 + \frac{2}{7}\,q_3 = 0. \end{aligned}$$

Из второго и четвертого уравнений следует, что $q_1 = q_3 = 0$, а из первого и третьего — что $q_0 = 9/8$, а $q_2 = -15/8$. Итак,

$$q(t) = \frac{9 - 15t^2}{8}.$$

2. *Линейное преобразование* A *присоединено к билинейной функции* b. *К какой билинейной функции присоединено его сопряженное преобразование* A^*?

Р е ш е н и е. Вспомним определение преобразования A^*, сопряженного преобразованию A. Для любых векторов x и y должно быть выполнено равенство $(x, \mathsf{A}^*(y)) = (\mathsf{A}(x), y)$. Если b^* — билинейная функция, присоединенная к преобразованию A^*, то левая часть равенства — значение $\mathsf{b}^*(x, y)$.

Правая часть равенства в силу коммутативности скалярного произведения может быть записана как $(y, \mathsf{A}(x)) = \mathsf{b}(y, x)$, где b — билинейная функция, присоединенная к преобразованию A. Итак, b^* определяется равенством

$$\mathsf{b}^*(x, y) = \mathsf{b}(y, x).$$

3. *В базисе* $\mathbf{e}$ *билинейная функция имеет матрицу* B. *Найдите матрицу ее присоединенного преобразования, если* Γ — *матрица Грама базиса* $\mathbf{e}$:

$$B = \begin{Vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{Vmatrix}, \quad \Gamma = \begin{Vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{Vmatrix}.$$

Р е ш е н и е. Как известно, матрица билинейной функции B и матрица ее присоединенного преобразования A связаны равенством $A = \Gamma^{-1}B$. Находим

$$\Gamma^{-1} = \begin{Vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{Vmatrix} \quad \text{и} \quad A = \begin{Vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 1 \end{Vmatrix}.$$

4. *Докажите, что значение квадратичной формы* $\mathsf{k}(x)$ *на векторе* x *длины* 1 *заключено между наименьшим и наибольшим собственными значениями ее присоединенного преобразования и эти границы достигаются на соответствующих собственных векторах.*

Р е ш е н и е. Выберем ортонормированный базис, в котором матрица k имеет диагональный вид. Тогда значение формы на векторе x с компонентами $\xi_1, \ldots, \xi_n$ равно

$$\mathsf{k}(x) = \lambda_1(\xi_1)^2 + \ldots + \lambda_n(\xi_n)^2,$$

где $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ — собственные значения преобразования, присоединенного к форме k. Можно для удобства считать, что собственные значения пронумерованы в порядке убывания: $\lambda_1 \geqslant \ldots \ldots \geqslant \lambda_n$. Если в выражении для $\mathsf{k}(x)$ мы заменим все собственные значения на самое большое из них, то значение $\mathsf{k}(x)$ не уменьшится:

$$\mathsf{k}(x) \leqslant \lambda_1[(\xi_1)^2 + \ldots + (\xi_n)^2].$$

Для вектора длины 1 сумма квадратов координат равна 1, и мы видим, что $\mathsf{k}(x) \leqslant \lambda_1$. Аналогично, при замене всех собственных значений на самое малое из них $\mathsf{k}(x)$ не увеличивается, откуда следует $\mathsf{k}(x) \geqslant \lambda_n$ для вектора x длины 1.

Очевидно, что на первом векторе выбранного нами базиса значение k равно $\mathsf{k}(e_1) = \lambda_1$ и на последнем векторе значение k равно $\mathsf{k}(e_n) = \lambda_n$.

5. *Квадратичная форма задана в ортонормированном базисе многочленом*

$$3(\xi^1)^2 + 3(\xi^2)^2 + 3(\xi^3)^2 - 2\xi^1\xi^2 - 2\xi^1\xi^3 - 2\xi^2\xi^3.$$

Найдите матрицу перехода к ортонормированному базису, в котором она имеет диагональный вид, и ее вид в этом базисе.

Решение. Выпишем матрицу квадратичной формы

$$B = \begin{Vmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{Vmatrix}.$$

Поскольку базис ортонормированный, эта же матрица является матрицей присоединенного преобразования A. Найдем собственные значения и собственные векторы этого преобразования.

Очевидно, что, вычитая 4 из элементов главной диагонали, мы получим матрицу

$$B - 4E = \begin{Vmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{Vmatrix}$$

ранга 1. Столбцы соответствующей фундаментальной матрицы

$$\begin{Vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}$$

— координатные столбцы базисных векторов в собственном подпространстве $\mathrm{Ker}\,(\mathsf{A} - 4\mathsf{E})$. Эти векторы неортогональны, но равны по длине. Поэтому их сумма и разность $\|-2 \quad 1 \quad 1\|^T$ и $\|0 \quad 1 \quad -1\|^T$ — два ортогональных вектора в том же подпространстве. Остается их пронормировать:

$$\mathbf{h}_1 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{Vmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{Vmatrix}, \quad \mathbf{h}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{Vmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{Vmatrix}.$$

Эти столбцы — решения однородной системы с матрицей $\|1 \quad 1 \quad 1\|$. Поэтому векторы из $\mathrm{Ker}\,(\mathsf{A} - 4\mathsf{E})$ ортогональны вектору с координатным столбцом $\|1 \quad 1 \quad 1\|^T$. После нормирования мы получаем

$$\mathbf{h}_3 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{Vmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Vmatrix}.$$

Так как

$$\begin{Vmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Vmatrix},$$

третий собственный вектор принадлежит собственному значению 1.

Итак, матрица перехода от исходного базиса к ортонормированному базису из собственных векторов состоит из столбцов $\mathbf{h}_1$, $\mathbf{h}_2$ и $\mathbf{h}_3$:

$$S = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{Vmatrix} -2 & 0 & \sqrt{2} \\ 1 & \sqrt{3} & \sqrt{2} \\ 1 & -\sqrt{3} & \sqrt{2} \end{Vmatrix}.$$

Матрица квадратичной формы в этом базисе диагональная:

$$S^T B S = \begin{Vmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}.$$

6. *Пусть* k *и* h *— квадратичные формы и* h *положительно определена. Существует ли базис, в котором* k *имеет канонический вид, а* h *— диагональный?*

Решение. Существует. Действительно, переходя от произвольного диагонального вида к каноническому, мы только нормируем базисные векторы. Если в каком-то базисе h имеет канонический вид, а k — диагональный, то, умножив базисные векторы на подходящие множители, мы приведем k к каноническому виду. Канонический вид h, конечно, будет утрачен, но диагональный вид сохранится.

7. *Приведите пример двух квадратичных форм, которые* а) *не приводятся к диагональному виду в одном и том же базисе*, б) *приводятся к диагональному виду в одном и том же базисе, но ни одна из них не является ни положительно определенной, ни отрицательно определенной.*

Решение. а) Такими квадратичными формами являются, например, формы $\mathsf{k}(x) = \xi_1^2 - \xi_2^2$ и $\mathsf{h}(x) = 2\xi_1\xi_2$. Наводящие соображения следующие: если приравнять значения этих квадратичных форм единице, то получатся уравнения гипербол с центрами в начале координат. Левая часть уравнения гиперболы, — разность квадратов тогда и только тогда, когда базисные векторы имеют направления, сопряженные относительно гиперболы. Но два направления, сопряженные для одной гиперболы — асимптотические направления для другой. На этом пути можно было бы получить полное доказательство, но непосредственная проверка проще.

Допустим, что замена базиса с матрицей перехода S приводит обе квадратичные формы к диагональному виду, и посмотрим, какие условия это накладывает на элементы S. Обозначим матрицы квадратичных форм k и h и матрицу перехода соответственно

$$K = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{Vmatrix}, \quad H = \begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix} \quad \text{и} \quad S = \begin{Vmatrix} a & b \\ c & d \end{Vmatrix}.$$

Тогда

$$S^T K S = \begin{Vmatrix} a & c \\ b & d \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{Vmatrix} \cdot S = \begin{Vmatrix} a & -c \\ b & -d \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} a & b \\ c & d \end{Vmatrix} = \\ = \begin{Vmatrix} a^2 - c^2 & ab - cd \\ ab - cd & b^2 - d^2 \end{Vmatrix}$$

и

$$S^T H S = \begin{Vmatrix} a & c \\ b & d \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix} \cdot S = \begin{Vmatrix} c & a \\ d & b \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} a & b \\ c & d \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 2ac & ad + bc \\ ad + bc & 2bd \end{Vmatrix}.$$

Если в новом базисе матрицы диагональные, то

$$ab - cd = 0,$$
$$ad + bc = 0.$$

Докажем, что эти равенства одновременно выполнены быть не могут. Умножая первое из равенств на b, а второе на d и складывая их, мы получим $a(b^2 + d^2) = 0$. А если умножим первое равенство на d, а второе на b и вычтем, то получим $c(b^2 + d^2) = 0$. Элементы второго столбца матрицы перехода одновременно равны нулю быть не могут: $b^2 + d^2 \neq 0$. Но тогда должны одновременно равняться нулю элементы первого столбца: $a = c = 0$. В любом случае получается противоречие, показывающее, что матрица S не может быть невырожденной.

б) Можно просто написать две квадратичные формы, уже имеющие диагональный вид, ни одна из которых не является положительно определенной:

$$\mathsf{k}(x) = \xi_1^2 - \xi_2^2 \quad \text{и} \quad \mathsf{h}(x) = \xi_1^2.$$

8. *Найдите матрицу перехода к базису, в котором квадратичные формы* $\mathsf{k}(x) = (\xi^1)^2 - 2\xi^1\xi^2 + (\xi^2)^2$ *и* $\mathsf{h}(x) = 17(\xi^1)^2 + 8\xi^1\xi^2 + (\xi^2)^2$ *обе имеют диагональный вид, а также их вид в этом базисе.*

Решение. Квадратичная форма h положительно определена, и мы можем принять ее матрицу H за матрицу Грама исходного базиса $\mathbf{e}$ и тем самым ввести вспомогательное скалярное произведение. При этом скалярном произведении преобразование, присоединенное к форме k, в базисе $\mathbf{e}$ имеет матрицу $A = H^{-1}K$. Напишем его характеристический многочлен $\det(H^{-1}K - \lambda E)$ в виде $\det[H^{-1}(K - \lambda H)]$. Так как $\det H^{-1} \neq 0$, характеристическое уравнение имеет те же корни, что и уравнение $\det(K - \lambda H) = 0$. Найдем их.

$$\det(K - \lambda H) = \det\left(\begin{Vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{Vmatrix} - \lambda \begin{Vmatrix} 17 & 4 \\ 4 & 1 \end{Vmatrix}\right) = \begin{vmatrix} 1 - 17\lambda & -1 - 4\lambda \\ -1 - 4\lambda & 1 - \lambda \end{vmatrix}.$$

Мы получаем квадратное уравнение $\lambda^2 - 26\lambda = 0$, корни которого $\lambda_1 = 0$ и $\lambda_2 = 26$. Для каждого из его корней система уравнений собственного подпространства $(H^{-1}K - \lambda E)\mathbf{x} = \mathbf{o}$ эквивалентна системе $(K - \lambda H)\mathbf{x} = \mathbf{o}$. Найдем решения системы для каждого из корней. Для $\lambda_1 = 0$ имеем

$$\begin{Vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{Vmatrix} \mathbf{x} = \mathbf{o},$$

откуда следует, что $\mathbf{x}$ пропорционален столбцу $\mathbf{f}_1 = \|1 \quad 1\|^T$.

Для $\lambda_2 = 26$ система уравнений имеет матрицу

$$\begin{Vmatrix} 1 - 17\cdot 26 & -1 - 4\cdot 26 \\ -1 - 4\cdot 26 & 1 - 26 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} -441 & -105 \\ -105 & -25 \end{Vmatrix}.$$

Строки этой матрицы пропорциональны строке $\|21 \quad 5\|$, а следовательно, решения системы пропорциональны столбцу $\mathbf{f}_2 = \|-5 \quad 21\|^T$.

Найденные нами векторы f_1 и f_2 ортогональны относительно вспомогательного скалярного произведения, так как принадлежат различным собственным значениям самосопряженного преобразования. Но их следует нормировать:

$$|f_1|^2 = \mathbf{f}_1^T H \mathbf{f}_1 = \|1 \quad 1\| \cdot \begin{Vmatrix} 17 & 4 \\ 4 & 1 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 1 \\ 1 \end{Vmatrix} = \|21 \quad 5\| \cdot \begin{Vmatrix} 1 \\ 1 \end{Vmatrix} = 26$$

и

$$|f_2|^2 = \mathbf{f}_2^T H \mathbf{f}_2 = \|-5 \quad 21\| \cdot \begin{Vmatrix} 17 & 4 \\ 4 & 1 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} -5 \\ 21 \end{Vmatrix} = \|-1 \quad 1\| \cdot \begin{Vmatrix} -5 \\ 21 \end{Vmatrix} = 26.$$

Теперь можно написать матрицу перехода к новому базису $\mathbf{e}' = \mathbf{e}S$:

$$S = \frac{1}{\sqrt{26}} \|\mathbf{f}_1 \quad \mathbf{f}_2\| = \frac{1}{\sqrt{26}} \begin{Vmatrix} 1 & -5 \\ 1 & 21 \end{Vmatrix}.$$

В этом базисе $\mathsf{h}(x)$ имеет канонический вид, а $\mathsf{k}(x)$ — диагональный:

$$\mathsf{k}(x) = 26(\xi_2')^2 \quad \text{и} \quad \mathsf{h}(x) = (\xi_1')^2 + (\xi_2')^2.$$

9. *Докажите, что для того, чтобы для двух непропорциональных квадратичных форм в двумерном пространстве существовал базис, в котором они обе имеют диагональный вид, необходимо и достаточно, чтобы среди их линейных комбинаций нашлась положительно определенная форма. Насколько здесь существенно предположение о размерности пространства?*

Р е ш е н и е. 1°. Достаточность. Пусть заданы две квадратичные формы k и h, и форма $\mathsf{g} = \alpha\mathsf{k} + \beta\mathsf{h}$ положительно определенная. Мы можем считать, что $\alpha\beta \neq 0$, так как если бы один из коэффициентов равнялся нулю, одна из двух форм была бы положительно определенной, и проблемы бы не было.

В силу теоремы две квадратичные формы h и g можно одновременно привести к диагональному виду. Но форма k является их линейной комбинацией: $\mathsf{k} = \alpha^{-1}\mathsf{g} - \alpha^{-1}\beta\mathsf{h}$. Поэтому k также имеет диагональный вид. Действительно, ее матрица — линейная комбинация двух диагональных матриц.

2°. Необходимость. Пусть две квадратичные формы в двумерном пространстве в одном базисе имеют диагональный вид:

$$\mathsf{k}(x) = \lambda_1\xi_1^2 + \lambda_2\xi_2^2 \quad \text{и} \quad \mathsf{h}(x) = \mu_1\xi_1^2 + \mu_2\xi_2^2.$$

Если формы не пропорциональны, то $\lambda_1\mu_2 - \lambda_2\mu_1 \neq 0$. Докажем, что квадратичная форма $\xi_1^2 + \xi_2^2$ является линейной комбинацией форм k и h. Действительно, это утверждение равносильно тому, что найдутся такие коэффициенты α и β, что

$$\alpha\begin{Vmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{Vmatrix} + \beta\begin{Vmatrix}\mu_1 & 0\\ 0 & \mu_2\end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{Vmatrix}.$$

Это условие равносильно системе линейных уравнений

$$\lambda_1\alpha + \mu_1\beta = 1,$$
$$\lambda_2\alpha + \mu_2\beta = 1.$$

Но детерминант этой системы отличен от нуля, и система совместна. Это заканчивает доказательство.

В доказательстве достаточности никаких предположений о размерности пространства не делалось, и условие достаточно при любой размерности. Уже при размерности пространства, равной трем, условие не является необходимым: квадратичные формы $\mathsf{k} = \xi_1^2$ и $\mathsf{h} = \xi_3^2$ обе имеют диагональный вид, но любая их линейная комбинация имеет ранг не больше 2 и потому не может быть положительно определенной.

Глава VII § 4

1. *В двумерном унитарном пространстве дан ортонормированный базис и векторы a и b, координаты которых в этом базисе соответственно $1+i$, $1-i$ и $-i$, $2-2i$.*

а) *Найдите их длины, а также косинусы углов между a и b и между b и a.*

б) *Ортогонализуйте эту пару векторов.*

Решение. а)

$$(a\,|\,a) = \mathbf{a}^T\bar{\mathbf{a}} = \|1+i,\ 1-i\| \begin{Vmatrix} 1-i \\ 1+i \end{Vmatrix} = 4, \quad |a| = 2.$$

$$(b\,|\,b) = \mathbf{b}^T\bar{\mathbf{b}} = \|-i,\ 2-2i\| \begin{Vmatrix} i \\ 2+2i \end{Vmatrix} = 9, \quad |b| = 3.$$

$$(a\,|\,b) = \mathbf{a}^T\bar{\mathbf{b}} = \|1+i,\ 1-i\| \begin{Vmatrix} i \\ 2+2i \end{Vmatrix} = 3+i, \quad \cos(\widehat{a,b}) = \frac{3+i}{6}.$$

$$(b\,|\,a) = \overline{(a\,|\,b)} = 3-i, \quad \cos(\widehat{b,a}) = \frac{3-i}{6}.$$

б) Положим $b' = b - \alpha a$ и выберем α так, чтобы $(b'|a) = 0$. Для этого умножим равенство скалярно справа на a и найдем $\alpha = (b|a)/(a|a)$. Напомним, что нужно обращать внимание на порядок сомножителей. Итак,

$$b' = \begin{Vmatrix} -i \\ 2-2i \end{Vmatrix} - \frac{3-i}{4} \begin{Vmatrix} 1+i \\ 1-i \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} -i \\ 2-2i \end{Vmatrix} - \frac{1}{4} \begin{Vmatrix} 4+2i \\ 2-4i \end{Vmatrix} = \frac{1}{2} \begin{Vmatrix} -2-3i \\ 3-2i \end{Vmatrix}.$$

Конечно, можно было умножить равенство $b' = b - \alpha a$ на a не справа, а слева:

$$(a\,|\,b') = (a\,|\,b) - (a\,|\,\alpha a) = (a\,|\,b) - \bar{\alpha}(a\,|\,a),$$

откуда $\bar{\alpha} = (a\,|\,b)/(a\,|\,a)$. Так мы находим тот же множитель α и тот же вектор b', но было бы ошибкой одно слагаемое умножать на a справа, а другое — слева.

2. *Напишите какую-нибудь невещественную эрмитову матрицу и какую-нибудь невещественную унитарную матрицу порядка* 3.

Решение. У эрмитовой матрицы элементы главной диагонали должны быть вещественны, а недиагональные элементы на симметричных местах должны быть комплексно сопряжены. Например,

$$\begin{Vmatrix} 1 & i & 1-i \\ -i & 2 & 2+i \\ 1+i & 2-i & 3 \end{Vmatrix}.$$

У унитарной матрицы столбцы должны быть ортогональны и нормированы. Не представляет труда придумать два ортогональных столбца, например: $\mathbf{h}_1 = \|i \;\; 0 \;\; -i\|$ и $\mathbf{h}_2 = \|i \;\; 1+i \;\; i\|$. Действительно, $\mathbf{h}_1^T\overline{\mathbf{h}_2} = i(-i) + (-i)(-i) = 0$. Столбец, ортогональный этим столбцам, можно получить как $\mathbf{h}_3 = \bar{\mathbf{x}}$, где $\mathbf{x}$ — решение однородной системы линейных уравнений с матрицей

$$\begin{Vmatrix} i & 0 & -i \\ i & 1+i & i \end{Vmatrix}.$$

Прибавим ко второй строке первую, поменяем строки местами, а затем разделим их соответственно на $1+i$ и $-i$:

$$\begin{Vmatrix} i & 0 & -i \\ i & 1+i & i \end{Vmatrix} \mapsto \begin{Vmatrix} i & 0 & -i \\ 2i & 1+i & 0 \end{Vmatrix} \mapsto \begin{Vmatrix} 2i & 1+i & 0 \\ i & 0 & -i \end{Vmatrix} \mapsto$$
$$\mapsto \begin{Vmatrix} 1+i & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{Vmatrix}.$$

Теперь мы можем выписать решение $\mathbf{x} = \|1 \;\; -1-i \;\; 1\|^T$ и его комплексно сопряженный столбец $\mathbf{h}_3 = \|1 \;\; -1+i \;\; 1\|^T$. Осталось пронормировать полученные столбцы:

$$\mathbf{h}_1^T\overline{\mathbf{h}_1} = i(-i) + (-i)i = 2;$$
$$\mathbf{h}_2^T\overline{\mathbf{h}_2} = i(-i) + (1+i)(1-i) + i(-i) = 4;$$
$$\mathbf{h}_3^T\overline{\mathbf{h}_3} = 1 + (-1+i)(-1-i) + 1 = 4,$$

и мы получаем матрицу

$$\begin{Vmatrix} i/\sqrt{2} & i/2 & 1/2 \\ 0 & (1+i)/2 & (-1+i)/2 \\ -i/\sqrt{2} & i/2 & 1/2 \end{Vmatrix}.$$

3. *Докажите, что корни характеристического уравнения вещественной ортогональной матрицы (в том числе и комплексные) по модулю равны* 1.

Решение. Как легко видеть, собственные значения унитарного преобразования в унитарном пространстве по модулю равны 1. Действительно, для любого собственного вектора x выполнено $(x|x) = (\mathsf{A}(x)|\mathsf{A}(x)) = (\lambda x|\lambda x) = \lambda\bar{\lambda}(x|x)$. Так как унитарная матрица в ортонормированном базисе задает унитарное преобразование, отсюда следует, что корни характеристического многочлена любой унитарной матрицы по модулю равны 1. Вещественные ортогональные матрицы являются унитарными: $A = \overline{A} = A^{-1}$. Это заканчивает доказательство.

Без использования унитарных пространств мы получили тот же результат в задаче 11* § 2.

4. *Найдите ортонормированный базис из собственных векторов и матрицу преобразования в этом базисе для преобразования* A, *заданного в ортонормированном базисе матрицей*

$$\begin{Vmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{Vmatrix}.$$

Является ли преобразование самосопряженным, унитарным?

Решение. Заданная нам матрица является и эрмитовой, и унитарной. Поскольку базис ортонормирован, преобразование является и самосопряженным, и унитарным. Найдем его собственные значения.

$$\det \begin{Vmatrix} -\lambda & i \\ -i & -\lambda \end{Vmatrix} = \lambda^2 - 1.$$

Следовательно, собственные значения $\lambda_1 = 1$ и $\lambda_2 = -1$. Решения однородных систем уравнений с матрицами

$$A - E = \begin{Vmatrix} -1 & i \\ -i & -1 \end{Vmatrix} \quad \text{и} \quad A + E = \begin{Vmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{Vmatrix}$$

пропорциональны соответственно столбцам $\mathbf{f}_1 = \|i \quad 1\|^T$ и $\mathbf{f}_2 = \|-i \quad 1\|^T$. Собственные векторы ортогональны, остается их пронормировать. Длина каждого вектора равна $\sqrt{2}$, и мы получаем унитарную матрицу перехода

$$S = \begin{Vmatrix} i/\sqrt{2} & -i/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{Vmatrix}.$$

Если изменить базис при помощи этой матрицы, матрица преобразования примет диагональный вид

$$A' = S^{-1}AS = \overline{S}^TAS = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{Vmatrix}.$$

5. *Найдите ортонормированный базис из собственных векторов унитарного преобразования, заданного в ортонормированном базисе матрицей*

$$A = \begin{Vmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{Vmatrix}.$$

Р е ш е н и е. Заданная матрица унитарная. Ее характеристическое уравнение $\lambda^2 - 2\cos\varphi\,\lambda + 1 = 0$ имеет корни $\lambda_1 = \cos\varphi + i\sin\varphi$ и $\lambda_2 = \cos\varphi - i\sin\varphi$. Решения однородных систем уравнений с матрицами

$$A - \lambda_1 E = -\sin\varphi \begin{Vmatrix} i & 1 \\ -1 & i \end{Vmatrix} \quad \text{и} \quad A - \lambda_2 E = \sin\varphi \begin{Vmatrix} i & -1 \\ 1 & i \end{Vmatrix}$$

пропорциональны соответственно столбцам $\mathbf{f}_1 = \|i \quad 1\|^T$ и $\mathbf{f}_2 = \|-i \quad 1\|^T$. Нормировав эти столбцы, мы составим из них матрицу перехода к базису из собственных векторов преобразования

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{Vmatrix} i & -i \\ 1 & 1 \end{Vmatrix}.$$

Глава VIII § 1

1. *В некоторой декартовой системе координат четырехмерного аффинного пространства плоскость задана системой уравнений*

$$\xi^1 + \ \xi^2 + \ \xi^3 + \ \xi^4 = 1,$$
$$2\xi^1 + 3\xi^2 + 4\xi^3 + 5\xi^4 = -1.$$

Напишите ее параметрические уравнения (*найдите начальную точку и базис в направляющем подпространстве*).

Р е ш е н и е. Говоря на матричном языке, требуется найти частное решение неоднородной системы уравнений и фундаментальную систему решений соответствующей однородной системы. Это делается стандартным способом. Приводим расширенную матрицу системы к упрощенному виду. Для этого вычтем удвоенную первую строку из второй, а затем вторую из первой:

$$\left\|\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & -1 \end{array}\right\| \mapsto \left\|\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & -3 \end{array}\right\| \mapsto \left\|\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & -3 \end{array}\right\|.$$

Теперь мы можем написать частное решение (координатный столбец начальной точки) $\mathbf{f}_0$ и фундаментальную матрицу (координатные столбцы базисных векторов направляющего подпространства) F:

$$\mathbf{f}_0 = \left\|\begin{array}{r} 4 \\ -3 \\ 0 \\ 0 \end{array}\right\| \quad \text{и} \quad F = \left\|\begin{array}{rr} 1 & 2 \\ -2 & -3 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{array}\right\|,$$

а также параметрические уравнения плоскости:

$$\xi_1 = 4 + u + 2v,$$
$$\xi_2 = -3 - 2u - 3v,$$
$$\xi_3 = u,$$
$$\xi_4 = v.$$

2. а) *Что может представлять собой пересечение двух плоскостей?* б) *В n-мерном аффинном пространстве оцените размерность плоскости, получаемой как пересечение плоскостей размерностей k_1 и k_2.*

Решение. а) Если плоскости заданы системами линейных уравнений, то их пересечение задается объединением этих систем. Поэтому пересечение задается системой линейных уравнений и может представлять собой: пустое множество (если система несовместна), точку (если система имеет единственное решение) или плоскость положительной размерности (в остальных случаях).

б) Плоскости любого числа измерений могут оказаться параллельными, и тогда их пересечение — пустое множество. Далее будем предполагать, что плоскости не параллельны. В n-мерном пространстве плоскости размерностей k_1 и k_2 задаются системами уравнений, матрицы которых A_1 и A_2 имеют ранги соответственно $r_1 = n - k_1$ и $r_2 = n - k_2$. Объединение систем имеет матрицу, которая получатся приписыванием матрицы A_2 под матрицей A_1. Ранг r такой матрицы не превосходит суммы рангов $r_1 + r_2$. Действительно, каждая ее строка раскладывается по объединению базисных строк A_1 и A_2. Если это объединение — линейно независимая система строк, то $r = r_1 + r_2$, а в противном случае $r < r_1 + r_2$.

Таким образом, $r \leqslant 2n - k_1 - k_2$. Следовательно, размерность пересечения $k = n - r$ не меньше, чем $k_1 + k_2 - n$. Например, в трехмерном пространстве две непараллельные плоскости $k_1 = k_2 = 2$ пересекаются по прямой линии или совпадают.

3. *Докажите, что в аффинном пространстве любые две прямые лежат в некоторой трехмерной плоскости.*

Решение. В аффинном пространстве любой размерности прямые могут быть заданы параметрическими уравнениями вида

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_1 + \mathbf{a}_1 t \quad \text{и} \quad \mathbf{x} = \mathbf{x}_2 + \mathbf{a}_2 t,$$

где $\mathbf{x}_1$ и $\mathbf{x}_2$ — координатные столбцы радиус-векторов начальных точек, а $\mathbf{a}_1$ и $\mathbf{a}_2$ — координатные столбцы направляющих векторов этих прямых.

Если трехмерная плоскость, о которой идет речь в задаче, существует, то она должна содержать начальные точки прямых и, следовательно, вектор $\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1$. Точно так же она должна содержать направляющие векторы прямых.

Рассмотрим трехмерную плоскость, заданную параметрическим уравнением

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_1 + \mathbf{a}_1 u + \mathbf{a}_2 v + (\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)w.$$

Ее внутренняя система координат имеет начало $\mathbf{x}_1$, и базис $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)$.

Легко видеть, что первая прямая лежит в этой плоскости и определяется во внутренней системе координат системой уравнений $v = 0$, $w = 0$. Вторая прямая также лежит в этой плоскости и определяется в ней системой уравнений $u = 0$, $w = 1$.

Следует добавить, что полученная плоскость может оказаться двумерной, если векторы $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ и $(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)$ линейно зависимы, или даже одномерной, если прямые совпадают. В этом случае ответом в задаче служит любая трехмерная плоскость, содержащая построенную двумерную плоскость или прямую.

Глава VIII § 2

1. *Приведите к каноническому виду уравнение*

$$2(\xi^2)^2 - 3(\xi^3)^2 - 2\sqrt{3}\,\xi^1\xi^2 - 4\xi^1\xi^3 + 4\sqrt{3}\,\xi^2\xi^3 + 50\xi^3 = 80.$$

Р е ш е н и е. Предполагается, что уравнение задано в декартовой прямоугольной системе кординат. Первый шаг — нахождение ортонормированного базиса, в котором малая квадратичная форма имеет диагональный вид. Это ортонормированный базис из собственных векторов присоединенного к ней преобразования. Для нахождения собственных значений этого преобразования мы должны решить его характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} -\lambda & -\sqrt{3} & -2 \\ -\sqrt{3} & 2-\lambda & 2\sqrt{3} \\ -2 & 2\sqrt{3} & -3-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Для вычисления детерминанта прибавим к его первому столбцу второй столбец, разделенный на $\sqrt{3}$. Это даст возможность вынести множитель $-(1+\lambda)$ из первого столбца:

$$\begin{vmatrix} -1-\lambda & -\sqrt{3} & -2 \\ -(1+\lambda)/\sqrt{3} & 2-\lambda & 2\sqrt{3} \\ 0 & 2\sqrt{3} & -3-\lambda \end{vmatrix} = -(1+\lambda)\begin{vmatrix} 1 & -\sqrt{3} & -2 \\ 1/\sqrt{3} & 2-\lambda & 2\sqrt{3} \\ 0 & 2\sqrt{3} & -3-\lambda \end{vmatrix}.$$

Вычтем из второй строки первую, разделенную на $\sqrt{3}$, и разложим детерминант по первому столбцу:

$$-(1+\lambda)\begin{vmatrix}1 & -\sqrt{3} & -2\\ 0 & 3-\lambda & 2\sqrt{3}+2/\sqrt{3}\\ 0 & 2\sqrt{3} & -3-\lambda\end{vmatrix} =$$

$$= -(1+\lambda)[(\lambda^2-9)-12-4] = -(1+\lambda)(\lambda^2-25).$$

Итак, собственные значения $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = -5$ и $\lambda_3 = 5$. Найдем соответствующие собственные векторы.

$$A+E = \begin{Vmatrix}1 & -\sqrt{3} & -2\\ -\sqrt{3} & 3 & 2\sqrt{3}\\ -2 & 2\sqrt{3} & -2\end{Vmatrix} \mapsto \begin{Vmatrix}1 & -\sqrt{3} & -2\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -6\end{Vmatrix} \mapsto \begin{Vmatrix}1 & -\sqrt{3} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{Vmatrix}.$$

Отсюда мы получаем, что нормированным собственным вектором для собственного значения $\lambda_1 = -1$ будет вектор с координатами $\mathbf{h}_1 = \|\sqrt{3}/2 \quad 1/2 \quad 0\|^T$.

Далее, в матрице $A+5E$ прибавим третью строку к первой, после чего разделим первую строку на $\sqrt{3}$, а третью на 2:

$$A+5E = \begin{Vmatrix}5 & -\sqrt{3} & -2\\ -\sqrt{3} & 7 & 2\sqrt{3}\\ -2 & 2\sqrt{3} & 2\end{Vmatrix} \mapsto \begin{Vmatrix}3 & \sqrt{3} & 0\\ -\sqrt{3} & 7 & 2\sqrt{3}\\ -2 & 2\sqrt{3} & 2\end{Vmatrix} \mapsto$$

$$\mapsto \begin{Vmatrix}\sqrt{3} & 1 & 0\\ -\sqrt{3} & 7 & 2\sqrt{3}\\ -1 & \sqrt{3} & 1\end{Vmatrix}.$$

Вторая строка матрицы — линейная комбинация первой и третьей, так как они линейно независимы, а $\det(A+5E) = 0$. Поэтому в упрощенный вид матрицы вторая строка не войдет. Преобразуем оставшиеся строки:

$$\begin{Vmatrix}\sqrt{3} & 1 & 0\\ -1 & \sqrt{3} & 1\end{Vmatrix} \mapsto \begin{Vmatrix}\sqrt{3} & 1 & 0\\ -4 & 0 & 1\end{Vmatrix},$$

$\mathbf{h}_2 = \|1/\sqrt{20} \quad -\sqrt{3}\,/\sqrt{20} \quad 2/\sqrt{5}\,\|^T$ — нормированное решение однородной системы с такой матрицей — будет координатным столбцом единичного собственного вектора, принадлежащего собственному значению $\lambda_2 = -5$.

Преобразуем матрицу

$$A - 5E = \begin{Vmatrix} -5 & -\sqrt{3} & -2 \\ -\sqrt{3} & -3 & 2\sqrt{3} \\ -2 & 2\sqrt{3} & -8 \end{Vmatrix}.$$

Разделим вторую строку на $-\sqrt{3}$, а третью на -2. После этого вычитаем вторую строку из третьей и прибавляем вторую строку, умноженную на 5, к первой:

$$\begin{Vmatrix} -5 & -\sqrt{3} & -2 \\ 1 & \sqrt{3} & -2 \\ 1 & -\sqrt{3} & 4 \end{Vmatrix} \mapsto \begin{Vmatrix} 0 & 4\sqrt{3} & -12 \\ 1 & \sqrt{3} & -2 \\ 0 & -2\sqrt{3} & 6 \end{Vmatrix} \mapsto \begin{Vmatrix} 1 & \sqrt{3} & -2 \\ 0 & 1 & -\sqrt{3} \end{Vmatrix} \mapsto$$

$$\mapsto \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -\sqrt{3} \end{Vmatrix}.$$

Нормированным собственным вектором для собственного значения $\lambda_3 = 5$ будет вектор $\mathbf{h}_3 = \|-1/\sqrt{5} \quad \sqrt{3}\,/\sqrt{5} \quad 1/\sqrt{5}\,\|^T$.

Составим матрицу перехода к базису из собственных векторов, упорядочив полученные столбцы так, чтобы в диагональном виде малой квадратичной формы первый коэффициент был положителен. Мы получаем ортогональную матрицу

$$Q = \|\mathbf{h}_3 \quad \mathbf{h}_2 \quad \mathbf{h}_1\| = \begin{Vmatrix} -1/\sqrt{5} & 1/\sqrt{20} & \sqrt{3}\,/2 \\ \sqrt{3}\,/\sqrt{5} & -\sqrt{3}\,/\sqrt{20} & 1/2 \\ 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} & 0 \end{Vmatrix}.$$

Если $\|\eta^1 \quad \eta^2 \quad \eta^3\|^T$ — координатный столбец вектора в базисе $\mathbf{h} = \mathbf{e}Q$, то

$$\begin{Vmatrix} \xi^1 \\ \xi^2 \\ \xi^3 \end{Vmatrix} = Q \begin{Vmatrix} \eta^1 \\ \eta^2 \\ \eta^3 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} -1/\sqrt{5} & 1/\sqrt{20} & \sqrt{3}\,/2 \\ \sqrt{3}\,/\sqrt{5} & -\sqrt{3}\,/\sqrt{20} & 1/2 \\ 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} & 0 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} \eta^1 \\ \eta^2 \\ \eta^3 \end{Vmatrix},$$

откуда $\xi^3 = (1/\sqrt{5}\,)\eta^1 + (2/\sqrt{5}\,)\eta^2$. Малая квадратичная форма в этом базисе запишется как $5(\eta^1)^2 - 5(\eta^2)^2 - (\eta^3)^2$. Таким образом, в преобразованной системе координат уравнение принимает вид

$$5(\eta^1)^2 - 5(\eta^2)^2 - (\eta^3)^2 + 50\,\frac{1}{\sqrt{5}}\,\eta^1 + 50\,\frac{2}{\sqrt{5}}\,\eta^2 = 80.$$

Для того чтобы переносом начала координат обратить в нуль коэффициенты при первых степенях, перегруппируем члены:

$$5((\eta^1)^2 + 2\sqrt{5}\,\eta^1 + 5) - 5((\eta^2)^2 - 4\sqrt{5}\,\eta^2 + 20) + (\eta^3)^2 = \\ = 80 + 25 - 100,$$

или

$$5(\eta^1 + \sqrt{5}\,)^2 - 5(\eta^2 - 2\sqrt{5}\,)^2 - (\eta^3)^2 = 5.$$

Произведем перенос начала координат, определяемый формулами $\zeta^1 = \eta^1 + \sqrt{5}$, $\zeta^2 = \eta^2 - 2\sqrt{5}$ и $\zeta^3 = \eta^3$. Тогда старые координаты выразятся через новые следующим образом:

$$\begin{Vmatrix}\xi^1\\ \xi^2\\ \xi^3\end{Vmatrix} = Q\begin{Vmatrix}\eta^1\\ \eta^2\\ \eta^3\end{Vmatrix} = Q\begin{Vmatrix}\zeta^1\\ \zeta^2\\ \zeta^3\end{Vmatrix} - Q\begin{Vmatrix}\sqrt{5}\\ -2\sqrt{5}\\ 0\end{Vmatrix}.$$

Подробнее,

$$\begin{aligned}
\xi^1 &= -\frac{1}{\sqrt{5}}\,\zeta^1 + \frac{1}{2\sqrt{5}}\,\zeta^2 + \frac{\sqrt{3}}{2}\,\zeta^3 - 2,\\
\xi^2 &= \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}\,\zeta^1 - \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{5}}\,\zeta^2 + \frac{1}{2}\,\zeta^3 + 2\sqrt{3}\,,\\
\xi^3 &= \frac{1}{\sqrt{5}}\,\zeta^1 + \frac{2}{\sqrt{5}}\,\zeta^2 - 3.
\end{aligned}$$

После такой замены координат уравнение примет канонический вид

$$(\zeta^1)^2 - (\zeta^2)^2 - \frac{(\zeta^3)^2}{5} = 1.$$

Это уравнение двуполостного гиперболоида.

2. *Не приводя уравнение к каноническому виду, определите, какую поверхность второго порядка оно определяет*:

$$(\xi^1)^2 + 4\xi^1\xi^2 + 6\xi^1\xi^3 - (\xi^2)^2 + 2\xi^2\xi^3 + 4(\xi^3)^2 + 2\xi^1 = 0.$$

Р е ш е н и е. Этому уравнению соответствует матрица большой квадратичной формы

$$\begin{Vmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}.$$

Раскладывая ее детерминант по последней строке и последнему столбцу, сразу видим, что он отличен от нуля и, следовательно, $R = 4$. Преобразуем матрицу малой квадратичной формы. Вычтем из второй строки удвоенную первую, а из третьей — первую, умноженную на 3, и проделаем те же элементарные операции со столбцами:

$$\begin{Vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \end{Vmatrix} \mapsto \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & -5 \\ 0 & -5 & -5 \end{Vmatrix}.$$

Теперь очевидно, что, вычтя вторую строку из третьей и второй столбец из третьего, мы получим диагональную матрицу с элементами 1, -5, 0. Это говорит о том, что ранг малой квадратичной формы $r = 2$, а ее сигнатура равна нулю.

Сигнатуру большой квадратичной формы можно не вычислять, так как в таблице есть только одна поверхность с сочетанием $R = 4$, $r = 3$, $\sigma = 0$ — это гиперболический параболоид.

3. *При каких значениях параметра a поверхность с уравнением*

$$(\xi^1)^2 + (\xi^2)^2 + (\xi^3)^2 + 2a(\xi^1\xi^2 + \xi^2\xi^3 + \xi^1\xi^3) + 4a = 0$$

является эллипсоидом?

Р е ш е н и е. Для того чтобы это уравнение было уравнением эллипсоида, есть две возможности: либо малая квадратичная форма положительно определена и $a < 0$, либо малая квадратичная форма отрицательно определена и $a > 0$. Напишем матрицу малой квадратичной формы:

$$\begin{Vmatrix} 1 & a & a \\ a & 1 & a \\ a & a & 1 \end{Vmatrix}.$$

Нам уже встречались похожие матрицы. Если мы вычтем из элементов главной диагонали число $1 - a$, то получим матрицу ранга 1, все строки которой одинаковы. Значит, число $1 - a$ — двукратный корень характеристического многочлена. Поскольку сумма всех корней равна следу матрицы, т. е. 3, последний корень должен быть равен $1 + 2a$.

Пусть $a < 0$. Тогда поверхность — эллипсоид, если малая квадратичная форма положительно определена, т. е. если все собственные значения присоединенного преобразования положительны: $1 - a > 0$ и $1 + 2a > 0$. Объединяя эти неравенства, получаем условие $-1/2 < a < 0$.

Пусть $a > 0$. Тогда малая квадратичная форма должна быть отрицательно определена, т. е. все собственные значения должны быть отрицательны: $1 - a < 0$ и $1 + 2a < 0$. Второе из этих неравенств равносильно $a < -1/2$, что противоречит условию $a > 0$. В этом случае новых значений a мы не находим.

Итак, ответ $a \in \left(-\dfrac{1}{2},\, 0\right)$.

Глава IX § 1

1. *Пусть $\mathcal{B}$ — линейное пространство билинейных функций, определенных на n-мерном линейном пространстве $\mathcal{L}$, а A — линейное преобразование пространства $\mathcal{B}$. Докажите, что A — тензор типа $(2,\ 2)$ в пространстве $\mathcal{L}$.*

Решение. Мы рассматриваем линейное пространство $\mathcal{B}$ билинейных функций, определенных на линейном пространстве $\mathcal{L}$. Если в $\mathcal{L}$ выбран базис $\mathbf{e}$, то в $\mathcal{B}$ определен соответствующий ему *стандартный* базис $\mathbf{p}$. Он состоит из билинейных функций p^{ij}, $i,\ j = 1, \ldots, n$, таких что в матрице функции p^{ij} элемент в i-й строке и j-м столбце равен 1, а остальные элементы равны нулю. На векторах x и y из $\mathcal{L}$ функция p^{ij} принимает значение $\xi^i\eta^j$ — произведение соответствующих координат векторов x и y в базисе $\mathbf{e}$.

По базису $\mathbf{p}$ билинейная функция b раскладывается как $\mathsf{b} = b_{ij}\mathsf{p}^{ij}$, где b_{ij} — элементы матрицы билинейной функции b в базисе $\mathbf{e}$.

Линейное преобразование пространства $\mathcal{B}$ базисе $\mathbf{p}$ определяется матрицей размеров $n^2 \times n^2$ с элементами A^{ij}_{kl} и ставит в соответствие билинейной функции b билинейную функцию c с компонентами

$$c_{kl} = A^{ij}_{kl} b_{ij}. \tag{1}$$

Заменим базис $\mathbf{e}$ в пространстве $\mathcal{L}$ на базис $\mathbf{e}'$. Тогда в пространстве $\mathcal{B}$ базис $\mathbf{p}$ заменяется на стандартный базис $\mathbf{p}'$, соответствующий $\mathbf{e}'$, и компоненты билинейных функций b и c меняются как элементы матриц билинейных функций

$$b'_{i'j'} = \sigma^i_{i'}\sigma^j_{j'} b_{ij} \quad \text{и} \quad c'_{k'l'} = \sigma^k_{k'}\sigma^l_{l'} c_{kl}.$$

Выразим отсюда старые компоненты через новые. Переход от нового базиса к старому осуществляется при помощи матрицы, обратной к матрице перехода. Поэтому

$$b_{ij} = \tau^{i'}_i \tau^{j'}_j b'_{i'j'} \quad \text{и} \quad c_{kl} = \tau^{k'}_k \tau^{l'}_l c'_{k'l'}.$$

Подставим эти выражения в формулу (1):

$$\tau_k^{k'}\tau_l^{l'}c'_{k'l'} = A_{kl}^{ij}\tau_i^{i'}\tau_j^{j'}b'_{i'j'}.$$

Теперь нам нужно решить эту систему уравнений относительно $c'_{k'l'}$. Для этого умножим обе части равенства на произведение $\sigma_s^k\sigma_t^l$ и просуммируем по k и l. Левая часть равенства будет равна

$$\sigma_s^k\sigma_t^l\tau_k^{k'}\tau_l^{l'}c'_{k'l'} = \delta_s^{k'}\delta_t^{l'}c'_{k'l'},$$

где $\delta_s^{k'}$ и $\delta_t^{l'}$ — символы Кронекера. Поэтому в сумме по k' равны нулю все слагаемые, в которых $k' \neq s$, а $\delta_s^{k'} = 1$ при $k' = s$. Аналогично, равны нулю все слагаемые, где $l' \neq t$, а $\delta_t^{l'} = 1$ при $l' = t$. Таким образом, левая часть равенства оказывается равной c'_{st} и равенство принимает вид

$$c'_{st} = \sigma_s^k\sigma_t^l A_{kl}^{ij}\tau_i^{i'}\tau_j^{j'}b'_{i'j'}.$$

Мы видим, что в базисе $\mathbf{p}'$ преобразование A записывается матрицей с элементами

$$A'^{i'j'}_{st} = \sigma_s^k\sigma_t^l A_{kl}^{ij}\tau_i^{i'}\tau_j^{j'}.$$

Это означает, что элементы матрицы преобразования преобразуются как компоненты тензора типа (2, 2), что нам и требовалось доказать.

2. а) *Сколько компонент имеет трехвалентный тензор в четырехмерном пространстве?* б) *Сколько слагаемых содержит выражение какой-либо его компоненты в новом базисе через компоненты в старом базисе?*

Решение. а) Компонента такого тензора имеет три индекса, i_1, i_2 и i_3, которые могут принимать по четыре значения независимо друг от друга. При каждом значении i_1 индекс i_2 может принимать четыре значения. Следовательно, для двух индексов возможны 16 комбинаций значений. При любой из этих комбинаций индекс i_3 может принимать четыре значения. Таким образом, для трех индексов возможны $4^3 = 64$ комбинаций значений. Поскольку каждой комбинации значений индексов соответствует в точности одна компонента, тензор имеет 64 компоненты.

Аналогично можно увидеть, что тензор валентности s в n-мерном пространстве имеет n^s компонент.

б) Компоненты тензора в новом базисе — линейные однородные многочлены от его компонент в старом базисе. Каждой компоненте отвечает свое слагаемое. Итак, ответ: 64 слагаемых.

3. *Тензор типа* $(0,\, n)$ *в* n*-мерном линейном пространстве в базисе* $\mathbf{e}$ *имеет компоненты* $\varepsilon_{i_1 \dots i_n} = 0$, *если среди значений* $i_1, \dots, i_n$ *есть одинаковые, и*

$$\varepsilon_{i_1 \dots i_n} = (-1)^{N(i_1, \dots, i_n)}$$

в противном случае. Найдите компоненты этого тензора в базисе $\mathbf{e}' = \mathbf{e}S$.

Р е ш е н и е. Согласно закону преобразования компонент тензора типа $(0,\, n)$

$$\varepsilon'_{i_1 \dots i_n} = \sigma^{k_1}_{i_1} \dots \sigma^{k_n}_{i_n} \varepsilon_{k_1 \dots k_n}.$$

В n-кратной сумме в правой части равенства равны нулю все слагаемые, в которых среди индексов суммирования $k_1, \dots, k_n$ есть равные. Поэтому мы можем написать эту сумму как сумму по перестановкам, подставив значение $\varepsilon_{k_1 \dots k_n}$:

$$\varepsilon'_{i_1 \dots i_n} = \sum_{(k_1, \dots, k_n)} (-1)^{N(k_1, \dots, k_n)} \sigma^{k_1}_{i_1} \dots \sigma^{k_n}_{i_n}.$$

Эта формула напоминает формулу полного разложения детерминанта, и, действительно, ее правая часть представляет собой детерминант матрицы, составленной из столбцов матрицы перехода S, имеющих номера $i_1, \dots, i_n$. Следовательно, если среди индексов $i_1, \dots, i_n$ есть равные, $\varepsilon'_{i_1 \dots i_n} = 0$. Если же эти индексы все различны, матрица отличается от S только порядком столбцов. Их можно расположить в естественном порядке с помощью $N(i_1, \dots, i_n)$ перестановок пар столбцов. Поэтому детерминант этой матрицы равен $(-1)^{N(i_1, \dots, i_n)} \det S$. Таким образом, мы можем сформулировать окончательный результат:

$$\varepsilon'_{i_1 \dots i_n} = \varepsilon_{i_1 \dots i_n} \det S.$$

4. *Линейная функция* f *задана в базисе* $\mathbf{e}$ *строкой* $\mathbf{f}$, *а вектор* a *— столбцом* $\mathbf{a}$. *Найдите матрицу тензора* $a \otimes \mathsf{f}$. *Какой геометрический смысл имеет этот тензор*?

Р е ш е н и е. Мы должны составить матрицу из всевозможных произведений вида $\alpha^j \varphi_i$ элемента столбца на элемент строки. Произведение столбца на строку $\mathbf{af}$ как раз состоит из всех этих произведений, причем верхний (первый) индекс, как и полагается, будет номером строки. Например, при $n = 2$

$$\begin{Vmatrix} \alpha^1 \\ \alpha^2 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \alpha^1 \varphi_1 & \alpha^1 \varphi_2 \\ \alpha^2 \varphi_1 & \alpha^2 \varphi_2 \end{Vmatrix}.$$

Пусть **a** и **f** отличны от нуля. Тогда $\operatorname{Rg}\mathbf{af} = 1$ и множество значений преобразования $a \otimes \mathsf{f}$ — одномерное подпространство с базисом a. Рассмотрим вектор ξ^k. Образ этого вектора имеет компоненты $\alpha^i\varphi_k\xi^k$: вектор ξ^k переходит в вектор a, умноженный на число $\varphi_k\xi^k$ — значение f на векторе ξ^k.

5. *Сколько различных тензоров можно образовать при помощи свертывания из тензора типа* (2, 2)?

Р е ш е н и е. Пусть дан тензор a^{ij}_{kl}. Свернув по одной паре индексов, можно получить четыре тензора типа $(1, 1)$: a^{ij}_{il}, a^{ij}_{ki}, a^{ij}_{jl} и a^{ij}_{kj}. Кроме того, свернув по двум парам индексов, можно получить два инварианта, a^{ij}_{ji} и a^{ij}_{ij}.

6. *Докажите, что тензор из задачи* 3 *антисимметричен по любому подмножеству множества индексов.*

Р е ш е н и е. Тензор антисимметричен по некоторому множеству индексов, если он антисимметричен по любой паре индексов из этого множества. Поэтому нам достаточно доказать, что для любых α и β

$$\varepsilon_{i_1\ldots i_\alpha\ldots i_\beta\ldots i_n} = -\varepsilon_{i_1\ldots i_\beta\ldots i_\alpha\ldots i_n},$$

т. е. две компоненты, отличающиеся порядком двух произвольно выбранных индексов, равны по абсолютной величине и имеют противоположные знаки.

Проверка нужна только для тех компонент, все индексы которых попарно различны (остальные компоненты равны нулю). Посмотрим на число нарушений порядка в перестановках индексов $i_1 \ldots i_\alpha \ldots i_\beta \ldots i_n$ и $i_1 \ldots i_\beta \ldots i_\alpha \ldots i_n$. Когда переставляются два соседних индекса ($\beta = \alpha + 1$), число нарушений порядка в перестановке меняется ровно на 1: если $i_\alpha < i_\beta$, то возникнет новое нарушение порядка, в противном случае одно нарушение порядка будет ликвидировано. Относительное расположение остальных индексов не изменится. Если между i_α и i_β стоят s индексов, то их перестановку можно осуществить последовательно переставляя соседние индексы: сначала меняем местами i_α с s индексами, стоящими правее него, затем меняем его местами с i_β, а потом переставляем i_β с s индексами, стоящими левее него. Всего потребуется нечетное число $2s + 1$ перестановок соседних индексов. Так как при каждой из них четность числа нарушений порядка в перестановке меняется, в итоге она изменится на противоположную, и

$$(-1)^{N(i_1\ldots i_\beta\ldots i_\alpha\ldots i_n)} = -(-1)^{N(i_1\ldots i_\alpha\ldots i_\beta\ldots i_n)}.$$

Отсюда прямо следует доказываемое утверждение $\varepsilon_{i_1\ldots i_\alpha\ldots i_\beta\ldots i_n} = -\varepsilon_{i_1\ldots i_\beta\ldots i_\alpha\ldots i_n}$.

7. *Докажите, что для любого тензора типа* $(1,\,1)$ *выполнены равенства*

$$a_j^{(i}a_l^{k)} = a_{(j}^i a_{l)}^k, \qquad a_j^{[i}a_l^{k]} = a_{[j}^i a_{l]}^k.$$

Р е ш е н и е. Действительно, по определению

$$a_j^{(i}a_l^{k)} = \frac{1}{2}\,(a_j^i a_l^k + a_j^k a_l^i) \quad \text{и} \quad a_{(j}^i a_{l)}^k = \frac{1}{2}\,(a_j^i a_l^k + a_l^i a_j^k).$$

Второе равенство доказывается точно так же.

Глава IX § 2

1. *В базисе* **e** *метрический тензор задан матрицей* Γ, *а тензор* a_{ij} *матрицей* A:

$$\Gamma = \begin{Vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{Vmatrix}, \quad A = \begin{Vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{Vmatrix}.$$

Найдите матрицы B, C *и* D *тензоров* $a^k_{\cdot j}$, $a_{j\cdot}^{\cdot k}$ *и* a^{jk}.

Р е ш е н и е. Элементы матрицы B — компоненты тензора $a^k_{\cdot j} = g^{ki}a_{ij}$. Правая часть этого равенства — произведение матрицы из компонент тензора g^{ki} на матрицу A. Найдем матрицу тензора g^{ki}. Это

$$\Gamma^{-1} = \begin{Vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{Vmatrix}.$$

Теперь получаем

$$B = \Gamma^{-1}A = \begin{Vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{Vmatrix}.$$

Аналогично, $a_{j\cdot}^{\cdot k} = g^{ki}a_{ji}$. В правой части удобнее переставить индексы у g^{ki} (что возможно, так как тензор симметричен) и переставить сомножители: $a_{j\cdot}^{\cdot k} = a_{ji}g^{ik}$. Теперь видно, что

$$C = A\Gamma^{-1} = \begin{Vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{Vmatrix}.$$

Наконец, $a^{jk} = g^{ij}g^{lk}a_{il} = g^{ji}a_{il}g^{lk}$. Это означает, что

$$D = \Gamma^{-1}A\Gamma^{-1} = \Gamma^{-1}C = \begin{Vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{Vmatrix}.$$

2. *Можно заметить, что в задаче* 1 *детерминанты матриц* A, B, C *и* D *совпадают, и следы* B *и* C *одинаковы. Объясните это.*

Решение. B — матрица преобразования, сопряженного преобразованию с матрицей C^T. Действительно, пусть B^* — матрица преобразования, сопряженного преобразованию с матрицей B. Тогда $B^* = \Gamma^{-1} B^T \Gamma$, откуда

$$B^* = \Gamma^{-1} A^T \Gamma^{-1} \Gamma = \Gamma^{-1} A^T = (A\Gamma^{-1})^T = C^T.$$

Детерминанты и следы матриц B, C^T и C должны быть одинаковы. Остальные детерминанты равны, так как $\det \Gamma = 1$.

3. *Упростите выражение*

$$(\delta_r^m a_{ij}^r g^{jk} + \delta_i^j a_{lj}^m g^{lk}) g_{ks} + a_{[jk]}^m g^{jk} g_{is}.$$

Решение. Начнем со второго слагаемого:

$$a_{[jk]}^m g^{jk} = \frac{1}{2}\,(a_{jk}^m - a_{kj}^m) g^{jk} = \frac{1}{2}\,(a_{jk}^m g^{jk} - a_{kj}^m g^{jk}).$$

Теперь видно, что в скобке второе слагаемое отличается от первого знаком и обозначением индексов суммирования. Следовательно, $a_{[jk]}^m g^{jk} g_{is} = 0$.

Остается только первое слагаемое. Преобразуем его. Сначала заметим, что свертка с символом Кронекера сводится к замене индекса. Действительно, например, в сумме по r $\delta_r^m a_{ij}^r$ равны нулю все слагаемые, кроме тех, в которых $r = m$, а $\delta_m^m = 1$. Поэтому $\delta_r^m a_{ij}^r = a_{ij}^m$.

Таким образом, преобразуемое выражение равно $(a_{ij}^m g^{jk} + a_{li}^m g^{lk}) g_{ks}$. Раскроем скобки и учтем, что $g^{lk} g_{ks} = \delta_s^l$ и $g^{jk} g_{ks} = \delta_s^j$. Мы увидим, что преобразуемое выражение равно $a_{is}^m + a_{si}^m$, то есть $2a_{(is)}^m$.

Глава IX § 3

1. *Функция от двух векторов в трехмерном евклидовом векторном пространстве ставит в соответствие любым двум векторам* $\mathbf{x}$ *и* $\mathbf{y}$ *смешанное произведение* $(\mathbf{a}, \mathbf{x}, \mathbf{y})$, *где* $\mathbf{a}$ — *фиксированный вектор. Докажите, что эта функция — 2-форма. Выразите ее матрицу в заданном базисе* $\mathbf{e}$ *через координаты вектора* $\mathbf{a}$.

Р е ш е н и е. То, что рассматриваемая функция — 2-форма, следует из линейности смешанного произведения по двум последним сомножителям и из того, что смешанное произведение меняет знак при перестановке двух последних сомножителей.

Смешанное произведение выражается через координаты сомножителей известной формулой

$$(\mathbf{a},\,\mathbf{x},\,\mathbf{y}) = \begin{vmatrix} a^1 & \xi^1 & \eta^1 \\ a^2 & \xi^2 & \eta^2 \\ a^3 & \xi^3 & \eta^3 \end{vmatrix} (\mathbf{e}_1,\,\mathbf{e}_2,\,\mathbf{e}_3).$$

Раскладывая определитель по первому столбцу, получаем

$$(\mathbf{a},\,\mathbf{x},\,\mathbf{y}) = (\mathbf{e}_1,\,\mathbf{e}_2,\,\mathbf{e}_3)\Big[a^1(\xi^2\eta^3 - \xi^3\eta^2) + a^2(\xi^3\eta^1 - \xi^1\eta^3) + \\ + a^3(\xi^1\eta^2 - \xi^2\eta^1)\Big].$$

Теперь мы можем написать матрицу этой билинейной функции:

$$(\mathbf{e}_1,\,\mathbf{e}_2,\,\mathbf{e}_3) \begin{vmatrix} 0 & a^3 & -a^2 \\ -a^3 & 0 & a^1 \\ a^2 & -a^1 & 0 \end{vmatrix}.$$

2. *Пусть $x_1, \ldots, x_n$ — линейно независимые векторы в n-мерном линейном пространстве $\mathcal{L}$. Докажите, что бивекторы $x_k \wedge x_l$ для всех $k < l$ составляют базис в пространстве бивекторов пространства $\mathcal{L}$.*

Р е ш е н и е. Примем векторы $x_1, \ldots, x_n$ за базис в пространстве $\mathcal{L}$. Тогда при $k < l$ бивектор $x_k \wedge x_l$ будет иметь компоненты $\delta^{ij}_{kl} = 2\delta^{[i}_k\delta^{j]}_l$. Среди этих компонент отличны от нуля только $\delta^{ij}_{kl} = 1$ при $i = k$, $j = l$ и $\delta^{ij}_{kl} = -1$ при $i = l$, $j = k$.

Только одна существенная компонента бивектора $x_k \wedge x_l$ равна 1, остальные равны нулю. Следовательно, любой бивектор раскладывается по бивекторам $x_k \wedge x_l$ для всех $k < l$ с коэффициентами, равными его компонентам в базисе $x_1, \ldots, x_n$. Это означает, что обсуждаемый набор бивекторов — полная система в пространстве бивекторов, и число бивекторов в этой системе равно $n(n-1)/2$, т. е. как раз размерности пространства бивекторов.

Отсюда следует, что данная система бивекторов линейно независима. Действительно, если бы один из бивекторов в этой системе был линейной комбинацией остальных, то, выкинув его, мы получили бы полную систему, содержащую меньше бивекторов, чем размерность пространства. Это заканчивает доказательство.

3. *Пусть* $x_1, \ldots, x_p$ — *базис подпространства* $\mathcal{L}' \subset \mathcal{L}$. *Назовем* $w = x_1 \wedge \ldots \wedge x_p$ *направляющим* p*-вектором подпространства.*

Докажите, что а) *вектор* y *лежит в* $\mathcal{L}'$ *тогда и только тогда, когда* $y \wedge w = 0$.

б) *Любые два направляющих* p*-вектора подпространства* $\mathcal{L}'$ *отличаются один от другого на числовой множитель.*

в) *Если пространство евклидово, этот множитель равен отношению объемов ориентированных параллелепипедов, построенных на соответствующих базисах.*

Р е ш е н и е. а) Вспомним предложение К.2 § 3 гл. IX, согласно которому простой p-вектор $y \wedge w = y \wedge x_1 \wedge \ldots \wedge x_p$ — нулевой тогда и только тогда, когда составляющие его векторы линейно зависимы. При линейно независимых $x_1, \ldots, x_p$ это будет в том и только том случае, когда y по ним раскладывается, т. е. принадлежит $\mathcal{L}'$.

б) Ограничимся подпространством $\mathcal{L}'$, забыв про объемлющее пространство $\mathcal{L}$. Тогда $w = x_1 \wedge \ldots \wedge x_p$ — p-вектор в p-мерном пространстве и имеет одну существенную компоненту. Значит, любые два направляющих p-вектора w и w', соответствующие разным базисам, отличаются на числовой множитель, равный отношению их существенных компонент.

в) Пусть $e_1, \ldots, e_p$ — ортонормированный базис в $\mathcal{L}'$ и w — соответствующий направляющий p-вектор.

Рассмотрим базис $f_i = \sigma_i^j e_j$. (Здесь и далее индексы принимают значения $1, \ldots, p$.) Ему соответствует направляющий p-вектор

$$v = f_1 \wedge \ldots \wedge f_p = \sigma_1^{i_1} \ldots \sigma_p^{i_p} e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_p}$$

Внешнее произведение векторов меняет знак при перестановке двух сомножителей. Отсюда нетрудно получить, что $e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_p} = (-1)^{N(i_1 \ldots i_p)} e_1 \wedge \ldots \wedge e_p = (-1)^{N(i_1 \ldots i_p)} w$, если все индексы различны, и равно нулю в остальных случаях. Учитывая это в выражении для v, мы получаем

$$v = w \sum_{(i_1, \ldots, i_p)} \sigma_1^{i_1} \ldots \sigma_p^{i_p} (-1)^{N(i_1 \ldots i_p)} = w \det S.$$

Это показывает, что множитель, на который отличается p-вектор, определяемый базисом $\mathbf{f}$, от p-вектора, определяемого ортонормированным базисом $\mathbf{e}$, равен детерминанту матрицы перехода к базису $\mathbf{f}$ и тем самым — объему p-мерного параллелепипеда, построенного на векторах базиса $\mathbf{f}$. Отсюда легко следует требуемый результат.

4. *Докажите, что в трехмерном пространстве каждый бивектор является простым.*

Решение. Как мы видели в задаче 2, каждый бивектор раскладывается по внешним произведениям базисных векторов и, следовательно, является суммой простых бивекторов. Произведение простого бивектора на число — простой бивектор: $\alpha(a \wedge b) = (\alpha a) \wedge b$. Поэтому достаточно доказать, что в трехмерном пространстве сумма простых бивекторов — также простой бивектор. Если мы проверим это для двух слагаемых, результат легко может быть перенесен на любое число слагаемых.

Итак, пусть в трехмерном пространстве заданы два простые бивектора $a \wedge b$ и $c \wedge d$. Будем считать, что a не коллинеарен b, а также c не коллинеарен d, — в противном случае доказывать нечего. Эти бивекторы являются направляющими бивекторами двумерных подпространств $\mathcal{L}_a$ и $\mathcal{L}_c$. Два двумерные подпространства трехмерного пространства имеют общий ненулевой вектор z. Бивекторы $a \wedge b$ и $a \wedge z$ — направляющие бивекторы подпространства $\mathcal{L}_a$ (если $a \wedge z = 0$, вместо него возьмем $b \wedge z$) и поэтому отличаются на числовой множитель: $a \wedge b = \alpha a \wedge z$. Аналогично, найдется множитель β, такой что $c \wedge d = \beta c \wedge z$.

Теперь остается только написать

$$a \wedge b + c \wedge d = \alpha a \wedge z + \beta c \wedge z = (\alpha a + \beta c) \wedge z,$$

и мы видим, что сумма простых бивекторов — простой бивектор.