

# Двоичная куча (heap, пирамида)

Булгаков Илья, Гусев Илья

Московский физико-технический институт

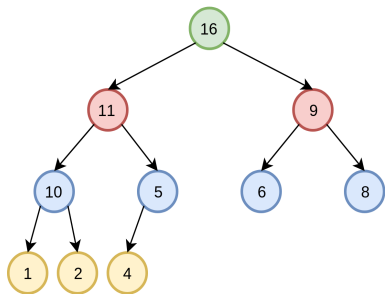
Москва, 2020

# Содержание

1 Двоичная куча

2 Библиотечные функции для работы с кучей

# Двоичная куча (heap, пирамида)



- 1 Двоичное дерево (связный ациклический граф, у которого у любой вершины не больше 2 потомков)
- 2 Если узел  $B$  является потомком узла  $A$ , то  $A.key \geq B.key$  (max-куча). Для min-кучи наоборот.
- 3 Глубина всех листьев (расстояние до корня) отличается не более чем на 1 слой.
- 4 Последний слой заполняется слева направо без «дырок».

# Двоичная куча

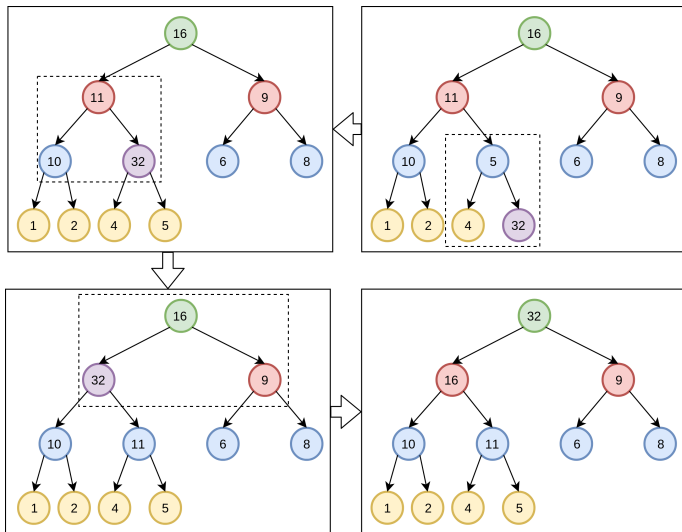
## Реализация

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
16	11	9	10	5	6	8	1	2	4

- $A[0]$  - корень
- $\forall i \ A[2i + 1]$  - левый потомок  $A[i]$
- $\forall i \ A[2i + 2]$  - правый потомок  $A[i]$

# Двоичная куча

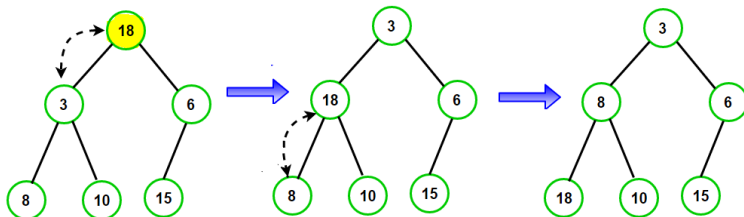
## Подъем элемента в куче



# Двоичная куча

## Просеивание (heapify)

- Применяется, если корень не удовлетворяет свойству кучи
- Правое и левое поддеревы удовлетворяют
- Итеративно меняем местами с любым потомком, пока свойство кучи не будет восстановлено



# Двоичная куча

## Действия и сложность

- 1 Добавить элемент в кучу: добавить в конец и осуществить подъем. Сложность  $O(\log n)$
- 2 Исключить максимальный элемент из кучи: поставить последний элемент в корень, уменьшить количество элементов, выполнить `heapify`. Время работы  $O(\log n)$
- 3 Изменить значение любого элемента. Время работы  $O(\log n)$
- Превратить неупорядоченный массив элементов в кучу. Сложность  $O(n)$



# Двоичная куча

Построение за  $\mathcal{O}(n)$

$\lceil \frac{n}{2^{h+1}} \rceil$  - максимум количества элементов на уровне  $h$

$\mathcal{O}(h)$  - сложность вставки элемента на уровень  $h$

$\lfloor \lg(n) \rfloor$  - высота  $n$ -элементной пирамиды

$$\sum_{h=0}^{\lfloor \lg(n) \rfloor} \lceil \frac{n}{2^{h+1}} \rceil \mathcal{O}(h) = \mathcal{O}(n \sum_{h=0}^{\lfloor \lg(n) \rfloor} \frac{h}{2^h})$$

$$\sum_{h=0}^{\infty} \frac{h}{2^h} = \frac{1/2}{(1 - 1/2)^2} = 2$$

$$\mathcal{O}(n \sum_{h=0}^{\lfloor \lg(n) \rfloor} \frac{h}{2^h}) = \mathcal{O}(n \sum_{h=0}^{\infty} \frac{h}{2^h}) = \mathcal{O}(2n) = \mathcal{O}(n)$$



# Двоичная куча

## Маленькая лемма

$$\sum_{h=0}^{\infty} x^h = \frac{1}{1-x}$$

$$\left(\sum_{h=0}^{\infty} x^h\right)' = \left(\frac{1}{1-x}\right)'$$

$$\sum_{h=0}^{\infty} h x^{h-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$$

$$\sum_{h=0}^{\infty} h x^h = \frac{x}{(1-x)^2}$$

$$k = h, x = \frac{1}{2}$$

# Библиотечные функции для работы с кучей

- 1 `std::make_heap` - метод построения кучи  
Объявлен в заголовочном файле `<algorithm>`

```
#include <algorithm>
int main() {
    std::vector<int> v { 3, 2, 4, 1, 5, 9 };
    std::make_heap(v.begin(), v.end());
    std::pop_heap(v.begin(), v.end());
}
```

# Полезные ссылки I



Т.Кормен, Ч.Лейзерсон, Р.Ривест, К.Штайн - Алгоритмы.  
Построение и анализ. Глава 6

<https://bit.ly/2wFzphU>



Lecture Slides for Algorithm Design

<https://algs4.cs.princeton.edu/lectures/>