1 Счетность множества рациональных чисел, несчетность множества действительных чисел

Утверждение Множество рациональных чисел $\mathbb{Q}$ счетно.
◀ Рациональное число имеет вид $\frac{m}{n}$, где $m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}$. Запишем все рациональные числа в таблицу:

	0	**1**	**-1**	**2**	**...**
1	$\frac{0}{1}$	$\frac{1}{1}$	$\frac{-1}{1}$	$\frac{2}{1}$	...
2	$\frac{0}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{-1}{2}$	$\frac{2}{2}$	...
3	$\frac{0}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{-1}{3}$	$\frac{2}{3}$	...
...	...	...	...	...	...

Будем нумеровать рациональные числа в таблице, идя по диагоналям и пропуская те числа, которым уже присвоен номер. Так мы присвоим каждому рациональному числу натуральный номер $\Rightarrow$ построим биекцию из $\mathbb{Q}$ в $\mathbb{N}$. Значит $\mathbb{Q}$ счетно. ▶

Утверждение Множество действительных чисел $\mathbb{R}$ несчетно.
◀ Покажем, что уже множество точек отрезка $[0, 1]$ несчетно. Предположим, что оно счетно, т.е. может быть записано в виде последовательности $x_1, x_2, ..., x_n, ...$ Возьмем точку x_1 и на отрезке $[0, 1] = I_0$ фиксируем отрезок I_1 ненулевой длины, не содержащий точку x_1. В отрезке I_1 строим отрезок I_2, не содержащий x_2, и если уже построен I_n, то, поскольку $|I_n| > 0$, в нем мы можем построить отрезок I_{n+1} так, что $x_{n+1} \notin I_{n+1}$ и $|I_{n+1}| > 0$. По теореме Кантора о вложенных отрезках найдется точка C, принадлежащая всем отрезкам $I_0, I_1, ..., I_n, ...$ Но эта точка отрезка $I_0 = [0, 1]$ по построению не может совпадать ни с одной из точек последовательности $x_1, x_2, ..., x_n, ...$ Значит множество точек отрезка $[0, 1]$ несчетно $\Rightarrow$ $\mathbb{R}$ несчетно. ▶

2 Теорема о существовании точной верхней(нижней) грани множества

Теорема Каждое непустое ограниченное сверху(снизу) множество $A \subset \mathbb{R}$ имеет точную верхнюю(нижнюю) грань.

◀ Пусть A ограничено сверху, B — множество верхних граней множества A, тогда:

$$\forall a \in A \ \forall b \in B \ \ (a \leq b)$$

В силу свойства полноты множества действительных чисел:

$$\exists c : \forall a \in A \ \forall b \in B \ \ (a \leq c \leq b)$$

Тогда c ограничивает множество A сверху $\Rightarrow$ принадлежит множеству B, причем является его минимальным элементом. Таким образом, c — точная верхняя грань множества A. (Случай с нижней гранью доказывается аналогично). ▶

3 Бесконечно малые последовательности и их свойства

Теорема $\{x_n\} \subset \mathbb{R} \setminus \{0\}$ — бесконечно малая последовательность $\Leftrightarrow \left\{\frac{1}{x_n}\right\}$ — бесконечно большая последовательность.
◀ По определению предела:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} : \forall n > N \ \ (|x_n| < \varepsilon) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} : \forall n > N \ \ \left(\left|\frac{1}{x_n}\right| > \frac{1}{\varepsilon}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} : \forall n > N \ \ \left(\left|\frac{1}{x_n}\right| \in U_\varepsilon(\infty)\right)$$

Значит $\left\{\frac{1}{x_n}\right\}$ бесконечно большая. ▶

Теорема Сумма конечного числа бесконечно малых последовательностей есть бесконечно малая последовательность.
◀ Пусть $\{x_n\}, \{y_n\}$ — бесконечно малые последовательности, тогда:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N_1 \in \mathbb{N} : \forall n > N_1 \ \ (|x_n - 0| < \frac{\varepsilon}{2})$$

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N_2 \in \mathbb{N} : \forall n > N_2 \ \ (|y_n - 0| < \frac{\varepsilon}{2})$$

Тогда при $N = \max\{N_1, N_2\}$:

$$\forall n > N \ \ \left(\left(|x_n| < \frac{\varepsilon}{2}\right) \wedge \left(|y_n| < \frac{\varepsilon}{2}\right)\right)$$

$$\forall n > N \ \ (|x_n + y_n| \leq |x_n| + |y_n| < \varepsilon)$$

Откуда следует, что $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n + y_n) = 0$. (Аналогично доказывается для любого конечного числа последовательностей). ▶

Теорема Произведение бесконечно малой последовательности на ограниченную есть бесконечно малая последовательность.
◀ Пусть $\{x_n\}$ — бесконечно малая, $\{y_n\}$ — ограниченная, тогда:

$$\exists M > 0 : \forall n \in \mathbb{N} \ \ (|y_n| < M)$$

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} : \forall n > N \ \ \left(|x_n| < \frac{\varepsilon}{M}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |x_n y_n| < |x_n| M < \varepsilon$$

Значит $\lim\limits_{n\to\infty} x_n y_n = 0$. ▶

4 Свойства пределов, связанные с неравенствами

Теорема Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} z_n = A$, причем $\exists N \in \mathbb{N} : \forall n > N \ (x_n \le y_n \le z_n)$, тогда $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = A$.
◀ По определению предела:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N_1 \in \mathbb{N} : \forall n > N_1 \ (|x_n - A| < \varepsilon)$$

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N_2 \in \mathbb{N} : \forall n > N_2 \ (|z_n - A| < \varepsilon)$$

Пусть $N' = \max\{N, N_1, N_2\}$, тогда:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \forall n > N' \ (x_n \in U_\varepsilon(A) \land z_n \in U_\varepsilon(A))$$

Причем $x_n \le y_z \le z_n \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \forall n > N' \ (y_n \in U_\varepsilon(A))$. Значит $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = A$. ▶

Теорема Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$ и $\exists B \in \mathbb{R} : \exists N \in \mathbb{N} : \forall n > N \ (x_n \le B)$, тогда $A \le B$.
◀ По определению предела:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} : \forall n > N \ (|x_n - A| < \varepsilon)$$

Предположим, что $A > B$. Пусть $\varepsilon = A - B > 0$, тогда:

$$\exists N \in \mathbb{N} : \forall n > N \ (|x_n - A| < A - B) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \exists N \in \mathbb{N} : \forall n > N \ (B < x_n < 2A - B)$$

То есть все x_n, начиная с некоторого n, больше, чем B, но это противоречит условию. Значит $A \le B$. ▶

Теорема Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = B$ и $\forall n \in \mathbb{N} \ (x_n \le y_n)$, то $A \le B$.
◀ Предположим, что $A > B$. Пусть $\varepsilon = \frac{A-B}{2} > 0$, тогда:

$$\exists N_1 \in \mathbb{N} : \forall n > N_1(|x_n - A| < \varepsilon)$$

$$\exists N_2 \in \mathbb{N} : \forall n > N_2(|y_n - B| < \varepsilon)$$

Тогда:

$$\forall n > \max\{N_1, N_2\} \ \ (\frac{B-A}{2} < x_n - A < \frac{A-B}{2})$$

$$\forall n > \max\{N_1, N_2\} \ \ (\frac{A+B}{2} < x_n < \frac{3A-B}{2})$$

Аналогично:

$$\forall n > \max\{N_1, N_2\} \ \ (\frac{3B-A}{2} < y_n < \frac{A+B}{2})$$

Тогда:

$$\forall n > \max\{N_1, N_2\} \ \ \left(y_n < \frac{A+B}{2} < x_n\right)$$

Противоречие. Значит $A \le B$. ▶

5 Арифметические операции со сходящимися последовательностями

Теорема Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = B$, тогда:

1. $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n + y_n) = A + B$
2. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n y_n = AB$
3. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{A}{B}$, если $\forall n \in \mathbb{N}\ (y_n \neq 0)$ и $B \neq 0$

1. По определению предела:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N_1 \in \mathbb{N} : \forall n > N_1\ \ \left(|x_n - A| < \frac{\varepsilon}{2}\right)$$

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N_2 \in \mathbb{N} : \forall n > N_2\ \ \left(|y_n - B| < \frac{\varepsilon}{2}\right)$$

Тогда:

$$\forall n > \max\{N_1, N_2\}\ \ (|(x_n + y_n) - (A + B)| = |(x_n - A) + (y_n - B)| \leq |x_n - A| + |y_n - B| < \varepsilon)$$

Значит $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n + y_n) = A + B$.

2. Рассмотрим $|x_n y_n - AB| = |(x_n y_n - x_n B) + (x_n B - AB)| \leq |x_n||y_n - B| + |B||x_n - A|$. Последовательность $\{x_n\}$ ограничена, значит $\exists C > 0 : \forall n \in \mathbb{N}\ (|x_n| < C)$. Если $B \neq 0$, то:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N_1 \in \mathbb{N} : \forall n > N_1\ \ \left(|x_n - A| < \frac{\varepsilon}{2|B|}\right)$$

$$\exists N_2 \in \mathbb{N} : \forall n > N_2\ \ \left(|y_n - B| < \frac{\varepsilon}{2C}\right)$$

Тогда:

$$|x_n y_n - AB| < C\frac{\varepsilon}{2C} + |B|\frac{\varepsilon}{2|B|} = \varepsilon$$

Значит $\lim\limits_{n\to\infty} x_n y_n = AB$. Если $B = 0$, то $\{y_n\}$ бесконечно малая $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_n y_n = 0 = AB$.

3. $\exists N \in \mathbb{N} : \forall n > N\ \ (|y_n| > \left|\frac{B}{2}\right|) \Leftrightarrow (\frac{1}{|y_n|} < \frac{2}{|B|})$. При этом:

$$\frac{x_n}{y_n} - \frac{A}{B} = \frac{x_n B - y_n A + AB - AB}{y_n B} = \frac{B(x_n - A) - A(y_n - B)}{y_n B}$$

Числитель дроби является бесконечно малой последовательностью, причем:

$$\left|\frac{1}{y_n B}\right| = \frac{1}{|y_n||B|} < \frac{2}{|B|^2}$$

Значит $\left\{\frac{1}{y_n B}\right\}$ ограничена $\Rightarrow \left\{\frac{x_n}{y_n} - \frac{A}{B}\right\}$ бесконечно малая $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{A}{B}$. ▶

6 Теорема о пределе ограниченной монотонной последовательности

Теорема Каждая неубывающая(невозрастающая) ограниченная сверху(снизу) последовательность имеет предел, причем он равен точной верхней(нижней) грани.
◀ Пусть $\{x_n\}$ неубывающая, ограничена сверху, тогда $\exists \sup\{x_n\} = M$. Значит:

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \forall n \in \mathbb{N} \;\; (x_n \leq M < M + \varepsilon)$$

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists N \in \mathbb{N} : (M - \varepsilon < x_N)$$

$$\forall n > N \;\; (x_n \geq x_{n-1} \geq ... \geq x_N > M - \varepsilon)$$

Тогда $M - \varepsilon < x_n < M + \varepsilon \Rightarrow \lim\limits_{n \to \infty} x_n = M$. (Для невозрастающей последовательности доказывается аналогично). ▶

7 Число e

Теорема Последовательность $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$ сходится, и ее предел называется числом e.

◀ Пусть $y_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$. Для $n \geq 2$:

$$\frac{y_{n-1}}{y_n} = \frac{\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}} = \frac{n^{2n}}{(n^2-1)^n}\frac{n}{n+1} = \left(1+\frac{1}{n^2-1}\right)^n \frac{n}{n+1} \geq$$

$$\geq \left(1+\frac{n}{n^2-1}\right)\frac{n}{n+1} > \left(1+\frac{1}{n}\right)\frac{n}{n+1} = 1$$

Поскольку все члены последовательности положительны, по теореме Вейерштрасса существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} y_n$. Но тогда:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-1} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

Значит $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$ сходится. ▶

8 Теорема Кантора о вложенных отрезках

Теорема Каждая система вложенных отрезков $\{[a_n, b_n]\}, [a_n, b_n] \supset [a_{n+1}, b_{n+1}]$ $\forall n \in \mathbb{N}$ имеет непустое пересечение. Если, кроме того, длины отрезков стремятся к нулю, то это пересечение — точка.

◀ Непустое пересечение. $\forall n \in \mathbb{N}\ \ ((a_n \leq a_{n+1}) \wedge (b_{n+1} \leq b_n) \wedge (a_n \leq b_n))$. Значит $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \sup\{a_n\} = A$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \inf\{b_n\} = B$, $A \leq B$. Тогда $[A, B] \subset \bigcap_{n=1}^{\infty}[a_n, b_n]$.

Единственность точки. Пусть существуют две различные точки C и C', принадлежащие всем отрезкам, тогда:

$$\forall n \in \mathbb{N}\ \ (|C - C'| \leq b_n - a_n)$$

$$\forall \varepsilon > 0\ \ \exists N \in \mathbb{N} : \forall n > N\ \ (b_n - a_n < \varepsilon)$$

Взяв $\varepsilon = \frac{1}{2}|C - C'|$, получим:

$$|C - C'| < \frac{1}{2}|C - C'|$$

Противоречие. Значит общая точка всех отрезков единственна. ▶

9 Подпоследовательности и частичные пределы. Теорема о трех определениях верхнего и нижнего пределов

Определение Если $\{n_k\}$ — возрастающая последовательность натуральных чисел, то $\{x_{n_k}\}$ называется подпоследовательностью последовательности $\{x_n\}$.

Определение Если существует $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = A$, то A называется частичным пределом последовательности $\{x_n\}$.

Определение Верхним(нижним) пределом числовой последовательности называется наибольший(наименьший) из ее частичных пределов.

Теорема Каждая ограниченная последовательность $\{x_n\}$ имеет конечные верхний и нижний пределы $L = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n, l = \underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n$. Справедливы следующие утверждения:

1. $(\forall\varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} : \forall n > N \ \ (x_n < L + \varepsilon)) \wedge (\forall\varepsilon > 0 \ \ \forall N \in \mathbb{N} \ \exists n > N : (x_n > L - \varepsilon))$
   $(\forall\varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} : \forall n > N \ \ (x_n > l - \varepsilon)) \wedge (\forall\varepsilon > 0 \ \ \forall N \in \mathbb{N} \ \exists n > N : (x_n < l + \varepsilon))$

2. $L = \lim\limits_{n\to\infty} \sup\{x_n, x_{n+1}, ...\}$
   $l = \lim\limits_{n\to\infty} \inf\{x_n, x_{n+1}, ...\}$

◀ 1. Рассмотрим последовательность $s_n = \sup\{x_n, x_{n+1}, ...\}$, причем $s_n \geq s_{n+1} \Rightarrow \{s_n\}$ невозрастающая. $s_n \geq \inf\{x_1, x_2, ...\}$. По теореме Вейерштрасса у $\{s_n\}$ есть предел $L = \lim\limits_{n\to\infty} s_n$. Поскольку последовательность невозрастающая, $L = \inf\{s_n\}$. По определению предела:

$$\forall\varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} : \forall n > N \ \ (L - \varepsilon < s_n < L + \varepsilon)$$

Из $s_n < L + \varepsilon \Rightarrow x_n < L + \varepsilon$. Зафиксируем произвольное $\varepsilon > 0$.

$$\forall N \in \mathbb{N} \ \ (s_{N+1} = \sup\{x_{N+1}, x_{N+2}, ...\} \geq L)$$

$$\exists n > N \ \ (x_n > s_{N+1} - \varepsilon \geq L - \varepsilon)$$

2. Пусть $\varepsilon = 1$, тогда:

$$\exists N_1 \in \mathbb{N} : \forall n > N_1 \ \ (x_n < L + 1)$$

Причем:

$$\exists n_1 > N_1 + 1 : (x_{n_1} > L - 1)$$

Значит $|x_{n_1} - L| < 1$. Пусть теперь $\varepsilon = \frac{1}{2}$, тогда:

$$\exists N_2 \in \mathbb{N} : \forall n > N_2 \ \ \left(x_n < L + \frac{1}{2}\right)$$

Причем:

$$\exists n_2 > \max\{N_2 + 1, n_1\} : \left(x_{n_2} > L - \frac{1}{2}\right)$$

Значит $|x_{n_2} - L| < \frac{1}{2}$. Продолжим действовать по такому же принципу. Получим последовательность $\{x_{n_k}\}$ такую, что $\forall k \in \mathbb{N}\ \left(|x_{n_k} - L| < \frac{1}{k}\right)$. То есть $L - \frac{1}{k} < x_n < L + \frac{1}{k}$. По теореме о промежуточной последовательности $x_{n_k} \to L$ при $k \to \infty$. Значит L является частичным пределом $\{x_n\}$.

Пусть $t = \lim\limits_{i\to\infty} x_{m_i}$. $\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N} : \forall n > N\ \ (x_n < L + \varepsilon)$. Поскольку $\{m_i\}$ возрастает, $\exists I \in \mathbb{N} : \forall i > I\ \ (m_i > N) \Rightarrow x_{m_i} < L + \varepsilon$. Значит $t \leq L + \varepsilon$.
Тогда $\forall \varepsilon > 0\ \ (t \leq L + \varepsilon) \Rightarrow t \leq L$. Таким образом, L — наибольший из всех частичных пределов $\Rightarrow$ верхний предел. ▶

10 Теорема Больцано-Вейерштрасса

Теорема Каждая ограниченная последовательность содержит сходящуюся подпоследовательность.
◀ Пусть $\{x_n\}$ — ограниченная последовательность, тогда $\exists A_1, B_1 \in \mathbb{R} : \forall n \in \mathbb{N}$ $(A_1 \leq x_n \leq B_1)$. Рассмотрим отрезки $\left[A_1, \frac{A_1+B_1}{2}\right], \left[\frac{A_1+B_1}{2}, B_1\right]$ и выберем из них тот отрезок $[A_2, B_2]$, который содержит бесконечно много членов последовательности. Продолжим выбирать отрезки по такому же принципу. Тогда $\{[A_n, B_n]\}_{n=1}^{\infty}$ — последовательность стягивающихся вложенных отрезков, причем:

$$0 < B_n - A_n = \frac{B_1 - A_1}{2^n} < \frac{B_1 - A_1}{n}$$

По теореме о промежуточной последовательности $\lim\limits_{n\to\infty}(B_n - A_n) = 0$. По теореме Кантора о вложенных отрезках $\bigcap_{n=1}^{\infty}[A_n, B_n] = \{C\}$.

Составим подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$ последовательности $\{x_n\}$ по следующему принципу:

$$x_{n_1} = x_1$$

$$x_{n_2} \in [A_2, B_2], n_2 > n_1$$

$$x_{n_k} \in [A_k, B_k], n_k > n_{k-1}$$

Тогда:

$$0 \leq |x_{n_k} - C| \leq B_k - A_k = \frac{B_1 - A_1}{2^k}$$

По теореме о промежуточной последовательности $\lim\limits_{n\to\infty} x_{n_k} = C \Rightarrow \{x_{n_k}\}$ — искомая подпоследовательность. ▶

11 Критерий Коши сходимости числовой последовательности

Теорема Числовая последовательность сходится тогда и только тогда, когда она фундаментальна.

◀ Сходится ⇒ фундаментальна. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$, тогда $\forall\varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N} : \forall n > N$ $(|x_n - A| < \frac{\varepsilon}{2})$. Тогда:

$$\forall p \in \mathbb{N}\ \left(|x_{n+p} - A| < \frac{\varepsilon}{2}\right)$$

$$|x_{n+p} - x_n| \le |x_{n+p} - A| + |x_n - A| < \varepsilon$$

Фундаментальна ⇒ сходится. Пусть $\varepsilon = 1$, тогда:

$$\exists N \in \mathbb{N} : \forall n > N\ \ \forall p \in \mathbb{N}\ \ (|x_{n+p} - x_n| < 1)$$

$$\forall n > N\ \ (x_{N+1} - 1 \le x_n \le x_{N+1} + 1)$$

Значит последовательность ограничена. Тогда по теореме Больцано-Вейерштрасса:

$$\exists A \in \mathbb{R} : \forall\varepsilon > 0\ \exists K \in \mathbb{N} : \forall n_k > n_K\ \ \left(|x_{n_k} - A| < \frac{\varepsilon}{2}\right)$$

По определению фундаментальной последовательности:

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N} : \forall n > N\ \ \forall p \in \mathbb{N}\ \ \left(|x_{n+p} - x_n| < \frac{\varepsilon}{2}\right)$$

Тогда:

$$\forall m > \max\{N, K\}\ \ (|x_m - A| \le |x_m - x_{n_m}| + |x_{n_m} - A| < \varepsilon)$$

Значит $\{x_n\}$ сходится. ▶

12 Определение предела функции в точке в терминах окрестностей(по Коши) и в терминах последовательностей(по Гейне), их эквивалентность

Определение Пусть функция f определена в некоторой проколотой окрестности точки $x_0 \in \hat{\mathbb{R}}$. Число $A \in \hat{\mathbb{R}}$ называется пределом функции f в точке x_0, если:

1. (По Коши) $\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta > 0 : \forall x \in \mathring{U}_\delta(x_0) \;\; (f(x) \in U_\varepsilon(A))$.

2. (По Гейне) $\forall \{x_n\} \subset D(f) \setminus \{x_0\}, \lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0 \;\; (\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = A)$.

Теорема Определения по Коши и по Гейне эквивалентны.
◀ Коши $\Rightarrow$ Гейне. Пусть $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$ по Коши. Возьмем любую последовательность, сходящуюся к x_0, все члены которой лежат в некоторой проколотой окрестности точки x_0. Тогда начиная с некоторого номера элементы $\{x_n\}$ будут попадать в $\mathring{U}_\delta(x_0)$, а по определению по Коши $f(x_n)$ будут попадать в $U_\varepsilon(A)$. Значит в $U_\varepsilon(A)$ лежит бесконечное число элементов $\{f(x_n)\} \Rightarrow \{f(x_n)\}$ сходится к A.

Гейне $\Rightarrow$ Коши. Пусть $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$ по Гейне. Предположим, что A не является пределом по Коши, тогда:

$$\exists \varepsilon > 0 : \forall \delta > 0 \;\; \exists x \in \mathring{U}_\delta(x_0) : (f(x) \notin U_\varepsilon(A))$$

Функция f определена в некоторой $\mathring{U}_{\delta_0}(x_0), \delta_0 > 0$. Возьмем $\delta = \frac{\delta_0}{n}, n \in \mathbb{N}$. Тогда:

$$\forall n \in \mathbb{N} \;\; \exists x_n \in \mathring{U}_{\frac{\delta_0}{n}}(x_0) \Rightarrow \lim_{n\to\infty} x_n = x_0$$

$$\forall n \in \mathbb{N} \;\; (f(x_n) \notin U_\varepsilon(A)) \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(x_n) \neq A$$

Противоречие. Значит A является пределом по Коши. ▶

13 Критерий Коши существования предела функции

Теорема Конечный предел $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ функции f существует тогда и только тогда, когда $\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0 : \forall x', x'' \in \mathring{U}_\delta(x_0)\ \ (|f(x') - f(x'')| < \varepsilon)$
◀ $\Rightarrow$ Пусть $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A \in \mathbb{R}$, тогда:

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0 : \forall x \in \mathring{U}_\delta(x_0)\ \ (|f(x) - A| < \frac{\varepsilon}{2})$$

Тогда:

$$\forall x', x'' \in \mathring{U}_\delta(x_0)\ \ (|f(x') - f(x'')| \le |f(x') - A| + |f(x'') - A| < \varepsilon)$$

$\Leftarrow$ Зафиксируем $\varepsilon > 0$, тогда:

$$\exists\delta > 0 : \forall x', x'' \in \mathring{U}_\delta(x_0)\ \ (|f(x') - f(x'')| < \varepsilon)$$

Возьмем любую последовательность $\{x_n\} \subset D(f)\setminus\{x_0\} : \lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$, тогда:

$$\exists N \in \mathbb{N} : \forall n, m > N\ \ ((x_n \in \mathring{U}_\delta(x_0)) \wedge (x_m \in \mathring{U}_\delta(x_0))) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |f(x_n) - f(x_m)| < \varepsilon$$

Значит $\{f(x_n)\}$ фундаментальна $\Rightarrow$ сходится к некоторому числу A.

Докажем, что все такие последовательности сходятся к одному числу. Предположим что $\{f(x_n)\}$ сходится к A, $\{f(x'_n)\}$ сходится к A'. Рассмотрим новую последовательность $x_1, x'_1, x_2, x'_2, ..., x_n, x'_n, ...$ Она сходится к x_0. В силу доказанного выше, последовательность $f(x_1), f(x'_1), ..., f(x_n), f(x'_n), ...$ сходится к некоторому числу A''. Но тогда любая подпоследовательность этой последовательности должна сходиться к A''. Значит $f(x_1), f(x_2), ..., f(x_n), ...$ сходится к A'' и $f(x'_1), f(x'_2), ..., f(x'_n), ...$ сходится к A''. Значит $A = A' = A''$. ▶

14 Существование односторонних пределов у монотонных функций

Теорема Если функция f определена и монотонна на интервале (a, b), то в каждой точке $x_0 \in (a, b)$ она имеет конечные пределы слева и справа.

◀ Пусть функция $f(x)$ монотонно возрастает на (a, b). Выберем произвольную точку $x_0 \in (a, b)$. Тогда $\forall x \in (a, x_0)\ \ (f(x) \leq f(x_0)) \Rightarrow f(x)$ ограничена сверху на $(a, x_0) \Rightarrow$
$\Rightarrow \exists \sup f(x) = M \leq f(x_0)$. Тогда:

$$\forall x \in (a, x_0)\ \ (f(x) \leq M)$$

$$\forall \varepsilon > 0\ \ \exists x_1 \in (a, x_0) : (M - \varepsilon < f(x_1))$$

Пусть $\delta = x_0 - x_1 > 0$, тогда:

$$\forall x \in (x_1, x_0) = (x_0 - \delta, x_0)\ \ (f(x_1) \leq f(x))$$

Значит:

$$\forall \varepsilon > 0\ \ \exists \delta > 0 : \forall x \in (x_0 - \delta, x_0)\ \ (M - \varepsilon < f(x_0 - \delta) \leq f(x) \leq M < M + \varepsilon)$$

Откуда следует, что $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = M$. Аналогично $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = \inf f(x), x \in (x_0, b)$. (Аналогично доказывается для монотонно убывающей функции). ▶

15 Непрерывность функции в точке. Непрерывность сложной функции

Определение Пусть функция f определена в некоторой окрестности $U_{\delta_0}(x_0), x_0 \in \mathbb{R}$, тогда f называется непрерывной в точке x_0, если $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Определение Пусть функция f определена в $(a, x_0], -\infty \leq a < x_0$, тогда f называется непрерывной в точке x_0 слева, если $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = f(x_0)$. (Аналогично для непрерывности в точке справа).

Определение Пусть функция f определена в некоторой проколотой окрестности $\overset{\circ}{U}_{\delta_0}(x_0)$. Если f не является непрерывной в точке x_0, то x_0 — точка разрыва функции.

Определение Если x_0 — точка разрыва функции f, и существуют конечные $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x)$ и $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x)$, то x_0 — точка разрыва I рода, иначе — II рода.

Определение Точка разрыва I рода функции f называется точкой устранимого разрыва, если $\lim\limits_{x \to x - 0} f(x) = \lim\limits_{x \to x + 0} f(x)$.

Определение Точка разрыва II рода функции f называется точкой бесконечного разрыва, если существует хотя бы один бесконечный левосторонний предел или правосторонний предел функции f в точке x_0.

Теорема Пусть функция f непрерывна в точке x_0, функция g непрерывна в точке $f(x_0)$, тогда в некоторой окрестности точки x_0 определена функция $g \circ f$, и она непрерывна в x_0.

◀ Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Поскольку g непрерывна в точке $f(x_0)$, существует такое $p > 0$, что $U_p(f(x_0)) \subset D(g)$ и:

$$\forall y \in U_p(f(x_0)) \ \ (g(y) \in U_\varepsilon(g(f(x_0))))$$

Поскольку f непрерывна в точке x_0, существует число $\delta > 0$ такое, что:

$$\forall x \in U_\delta(x_0) \ \ (f(x) \in U_p(f(x_0)))$$

Значит функция $g \circ f$ определена на $U_\delta(x_0)$, причем:

$$\forall x \in U_\delta(x_0) \ \ (g(f(x)) \in U_\varepsilon(g(f(x_0))))$$

Значит:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \forall x \in U_\delta(x_0) \ \ (g(f(x)) \in U_\varepsilon(g(f(x_0))))$$

Значит, в силу определения непрерывности, $g \circ f$ непрерывна в точке x_0. ▶

16 Ограниченность функции, непрерывной на отрезке

Теорема Если функция f непрерывна на отрезке $[a, b]$, то она ограничена на $[a, b]$.
◀ Пусть f не ограничена сверху, тогда:

$$\forall n \in \mathbb{N} \ \exists x_n \in [a, b] : (f(x_n) > n)$$

Поскольку $\forall n \in \mathbb{N} \ (a \leq x_n \leq b), \{x_n\}$ ограничена. Тогда по теореме Больцано-Вейерштрасса из нее можно выделить подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$, сходящуюся к точке x_0, причем $x_0 \in [a, b]$. По условию f непрерывна в точке x_0, значит:

$$\lim_{k \to \infty} f(x_{n_k}) = f(x_0)$$

С другой стороны:

$$f(x_{n_k}) > n_k \geq k \Rightarrow \lim_{k \to \infty} f(x_{n_k}) = +\infty$$

Противоречие. Значит f ограничена сверху. (Аналогично доказывается ограниченность снизу). ▶

17 Достижение точной верхней и точной нижней граней функцией, непрерывной на отрезке

Теорема Если функция f непрерывна на отрезке $[a, b]$, то $\exists x', x'', \in [a, b] : f(x') = \sup_{x\in[a,b]} f(x), f(x'') = \inf_{x\in[a,b]} f(x)$.
◀ Пусть $M = \sup_{x\in[a,b]} f(x)$, тогда:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists x \in [a, b] : (M - \varepsilon < f(x) \le M)$$

Полагая $\varepsilon = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, ..., \frac{1}{n}, ...$, получим последовательность $\{x_n\} \subset [a, b]$ такую, что:

$$\forall n \in \mathbb{N} \ (M - \frac{1}{n} < f(x_n) \le M)$$

По теореме Больцано-Вейерштрасса можем выделить подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$, сходящуюся к точке x_0, причем $x_0 \in [a, b]$. По условию f непрерывна в точке x_0, значит:

$$\lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = f(x_0)$$

С другой стороны:

$$M - \frac{1}{n} < f(x_n) \le M$$

Тогда по теореме о промежуточной последовательности $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = M$. При этом $\lim\limits_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = M$. Значит $f(x_0) = M$. (Достижение нижней точной грани доказывается аналогично). ▶

18 Теорема о промежуточных значениях непрерывной функции

Теорема Пусть функция f непрерывна на отрезке $[a, b]$, тогда $\forall f(x_1) = C < D = f(x_2), x_1, x_2 \in [a, b]\ \forall E \in (C, D)\ \exists G \in [a, b] : f(G) = E$.

◀ Рассмотрим частный случай $C < E = 0 < D$. Обозначим $[a_1, b_1] = [\min\{x_1, x_2\}, \max\{x_1, x_2\}]$. Разделим $[a_1, b_1]$ пополам точкой $c_1 = \frac{a_1+b_1}{2}$. Если $f(c_1) = 0$, то теорема доказана, иначе из двух отрезков $[a_1, c_1]$ и $[c_1, b_1]$ выберем такой, что на его концах функция f принимает значения разных знаков. Это будет отрезок $[a_2, b_2] = [a_1, c_1]$, если $f(c_1) > 0$ и $[a_2, b_2] = [c_1, b_1]$ иначе. Продолжим разделять отрезки по такому же принципу. Если на i-том шаге точка $f(c_i) = 0$, то теорема доказана. Иначе получим последовательность вложенных стягивающихся отрезков $[a_n, b_n]$. По теореме Кантора о вложенных отрезках существует точка G, принадлежащая всем отрезкам. Докажем неравенство:

$$\forall n \in \mathbb{N}\ \left(f(a_n) < 0 < f(b_n)\right)$$

Применим индукцию по n. При $n = 1$ верно. Предположим, что верно для некоторого n. Обозначим $c_n = \frac{a_n+b_n}{2}$. Тогда $[a_{n+1}, b_{n+1}] = [a_n, c_n]$, если $f(c_n) > 0$, и $[a_{n+1}, b_{n+1}] = [c_n, b_n]$ иначе. Неравенство справедливо при $n+1$. Значит справедливо при всех $n \in \mathbb{N}$. Поскольку $\forall n \in \mathbb{N}\ (a_n \leq G \leq b_n)$ и $b_n - a_n \to 0$ при $n \to \infty$, то $a_n \to G$ при $n \to \infty$ и $b_n \to G$ при $n \to \infty$. Так как f непрерывна, из $f(a_n) < 0 \Rightarrow f(G) = \lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) \leq 0$. Аналогично $f(G) = \lim\limits_{n\to\infty} f(b_n) \geq 0$. Значит $f(G) = 0 = E$. Общий случай: $F(x) = f(x) - E$. ▶

19 Теорема об обратной функции

Теорема Теорема Теорема Теорема Теорема Теорема Теорема Теорема Теорема Теорема Теорема Теорема Теорема Теорема Теорема Теорема Теорема