Математический анализ

Виталий Сергеевич Ерошин

Сентябрь 2021

Содержание

1 Предварительные сведения.

1.1 Математическая логика.

$A, B, \dots$ - высказывания
$\neg A$ - отрицание
$A \wedge B$ - конъюнкция (логическое и)
$A \vee B$ - дизъюнкция (логическое или)
$A \implies B$ - импликация (A - необходимое условие, B - достаточное условие)
$A \iff B$ - эквивалентность (тогда и только тогда)
$A(x, y)$ - предикат (высказывание, зависящее от переменных)
$\forall$ - квантор общности (для любого...)
$\exists$ - квантор существования (найдется, существует)
$\exists!$ - существует при том единственное

1.2 "Наивная"теория множеств

$A, B, \dots$ - множества
$a \in A$ - элемент a принадлежит множеству A. $(\neg(a \in A)) \iff (a \notin A)$
$A \cup B = \{x : (x \in A) \vee (x \in B)\}$ - объединение множеств
$A \cap B = \{x : (x \in A) \wedge (x \in B)\}$ - пересечение множеств
$B \setminus A = C_B A = \{x : (x \in B) \vee (x \notin A)\}$ - разность множеств
$A\delta B = (B \setminus A) \cup (A \setminus B)$ - симметрическая разность

1.2.1 Свойства

1. Коммутативность $\quad A \cup B = B \cup A \quad A \cap B = B \cap A$
2. Ассоциативность $\quad A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C \quad A \cap (B \cap C) = (A \cup B) \cup C$
3. Дистрибутивность $\quad A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \quad A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
4. Идемпотентность $\quad A \cup A = A \quad A \cap A = A$
5. Универсальное множество $U : U \cap A = A;\ U \cup A = U;\ A \subset U;\ C_U A = A^C$
6. Двойственность (де Моргана) $\quad (A \cup B)^C = A^C \cap B^C \quad (A \cap B)^C = A^C \cup B^C$

1.3 Отображения

Отображение из X в Y:

$$(f : X \to Y) \iff ((\forall x\ inX)(\exists! y \in Y) y = f(x)$$

x - область отображения f
$f(x)$ - область значений f
$f(x) = \{y \in Y (\exists x \in X) f(x) = y\}$
f инъективное (инъекция, взаимная однозначность)

$$(f(x_1) = f(x_2)) \iff (x_1 = x_2)$$

f сюръективное (сюръекция, отображение на)

$$f(X) = Y \iff (\forall y \in Y)(\exists x\ inX : f(x) = y)$$

f биективное (биекция), если f инъективное и сюръективное.
$f^{-1}(y) = \{x \in X : f(x) = y\}$ - прообраз

1.4 Отношения

Опр. Бинарное отношение $\mathcal{R}$ - это подмножество $X \times X = X^2 =$
$= \{(x, y) : (x \in X) \wedge (y \in X)\}$ (декартов квадрат)

$$((x, y) \in \mathcal{R}) \iff x\mathcal{R}y$$

Опр. Отношение порядка на X - это бинарное отношение $\mathcal{R}$, удволетворяющее следующим свойствам:
1) рефлексивность:

$$(\forall x \in X) x\mathcal{R}x$$

2) антисимметричность:

$$(\forall x, y \in X)(x\mathcal{R}y) \wedge (y\mathcal{R}x) \implies x = y$$

3) транзитивность:

$$(\forall x, y, z \in X)((x\mathcal{R}y) \wedge (y\mathcal{R}z)) \implies (x\mathcal{R}y)$$

Пример 1. $A \subset B$ (частично упорядоченное)
Пример 2. $x \leq y$
Пример 3. $X \in \mathbb{R}$
Пример 4. $(\forall x, y \in X)(x\mathcal{R}y) \vee (y\mathcal{R}x)$ (Линейно упорядоченное)
Определение. Отношение эквивалентности на X - это бинарное отношение $\mathcal{R}$, удволетворяющее следующим свойствам:
1) рефлексивность (см. выше)
2) симметричность $(\forall x, y \in X)(x\mathcal{R}y) \implies (y\mathcal{R}x)$
3) транзитивность
Теорема. Если на X задано отношение эквивалентности $\mathcal{R}$, то X может быть разбито на классы эквивалентности, то есть непересекающиеся множества, каждое из которых состоит из взаимноэквивалентных элементов:

$$X = \cup_{\alpha \in A} X_\alpha : \alpha_1 \neq \alpha_2 \implies X_{\alpha_1} \cap X_{\alpha_2} = \varnothing$$

$$(\forall \alpha \in A)(x_1, x_2 \in X_\alpha) x_1 \mathcal{R} x_2$$

$$(\forall \alpha \neq \beta)(\forall x_1 \in X_\alpha)(\forall x_2 \in X_\beta) \neg x_1 \mathcal{R} x_2$$

2 О числах

2.1 Натуральные числа

2.1.1 Аксиомы (Пеано):

I. 1 есть натуральное число
II. $(\forall n \in \mathbb{N})(\exists Sc(n) \in \mathbb{N}$
III. $(\forall n \in \mathbb{N})(1 \neq Sc(n))$
IV. $(Sc(n) = Sc(m)) \implies (n = m)$
V. (аксиома индукции)

$$(\forall \mathfrak{M} \subset \mathbb{N})((1 \in \mathfrak{M}) \wedge (n \in \mathfrak{M})) \implies Sc(n) \in \mathfrak{M} \implies \mathfrak{M} = \mathbb{N}$$

2.1.2 Модель Фреге-Рассела

$\{\varnothing\} = 1$
$Sc(n) := n \cup \{n\}$
$2 = \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$
$3 = \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}$
...
Определение. $m + n$

$$m + 1 := Sc(m)$$

$$m + Sc(n) := Sc(m + n)$$

Определение. $m \cdot n$

$$m \cdot 1 := m$$

$$m \cdot Sc(n) = m \cdot n + m$$

Определение.

$$m \leq n \iff (m = n) \vee ((\exists p \in \mathbb{N})(n = m + p))$$

Теорема.
Ia. (Коммутативность сложения)

$$m + n = n + m$$

Iб. (Ассоциативность сложения)

$$(m+n)+p = m+(n+p)$$

IIa. (Коммутативность умножения)

$$m \cdot n = n \cdot m$$

IIб. (Ассоциативность умножения)

$$(m \cdot n) \cdot p = m \cdot (n \cdot p)$$

IIв. (Единица)

$$1 \cdot n = n$$

I-II. (Дистрибутивность)

$$m \cdot (n+p) = m \cdot n + m \cdot p$$

IIIa. $m \leq m$
IIIб. $(m \leq n) \wedge (n \leq m) \implies (m = n)$
IIIв. $(m \leq n) \wedge (n \leq p) \implies (m \leq p)$
IIIг. $(m \leq n) \vee (n \leq m)$
I-III. $(m \leq n) \implies (m+p) \leq (n+p)$
II-III. $(m \leq n) \implies m \cdot p \leq n \cdot p$
IV. (Свойство Архимеда)

$$m \leq p \implies (\exists n) m \cdot n \geq p$$

2.2 Целые числа

$$\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup \{0\} \cup \{-n : n \in \mathbb{N}\}$$

$$(m, n \in \mathbb{N}) m + (-n) := (p \in \mathbb{N}, n+p = m, m > n), (0, m = n), (-p, p \in \mathbb{N}, m+p = n, n > m)$$

Теорема.
I-IV (II-IV c $p \in \mathbb{N}$)
Iв. (Нуль) $0 + n = n$
Iг. (Противоположный элемент) $\exists (-m) \in \mathbb{Z}) m + (-m) = 0$

2.3 Рациональные числа

$$\mathbb{N}^2 (m,n) \mathcal{R} (p,q) \iff m \cdot q = n \cdot p$$

1) $(m,n)\mathcal{R}(m,n) m \cdot n = n \cdot m$
2) $(m,n)\mathcal{R}(p,q) \implies (p,q)\mathcal{R}(m,n)$; $m \cdot q = n \cdot p$; $p \cdot n = q \cdot m$
3) $(m,n)\mathcal{R}(p,q) \wedge (p,q)\mathcal{R}(r,s) \implies (m,n)\mathcal{R}(r,s)$
$\mathbb{Q}_+$ - множество классов эквивалентности дробей ($\mathbb{N}^2$) по $\mathcal{R}$. (Положительные рациональные числа)

$$\mathbb{Q} := \mathbb{Q}_+ \cup \{\varnothing\} \cup \{-r : r \in \mathbb{Q}_+\}$$

Теорема I-IV (II-III c $p > 0$, IV c $m \neq 0$)
IIг. (Обратный элемент)

$$(\forall r \in \mathbb{Q}\{0\})(\exists r^{-1} \in \mathbb{Q})\ r \times r^{-1} = r^{-1} \times r = 1$$

Теорема 2 Каждое положительное рациональное число представимо бесконечной периодической десятичной дробью, и наоборот, каждая бесконечная периодическая десятичная дробь представима в виде положительного рационального числа.

2.4 Действительные числа

Определение Последовательностью рациональных чисел называется отображение из $\mathbb{N}$ в $\mathbb{Q}$ $\{r_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{Q}$

Определение Рациональным отрезком называется $\{r \in \mathbb{Q} : p \leq r \leq q\} = [p,q]_{\mathbb{Q}}\ p, q \in \mathbb{Q}$

Определение Система $\{[p_n, q_n]\}_{n=1}^{\infty}$ называется системой вложенных рациональных отрезков если $(\forall n \in \mathbb{N})\ [p_{n+1}, q_{n+1}]_{\mathbb{Q}} \subset [p_n, q_n]_{\mathbb{Q}}$

Определение Система вложенных рациональных отрезков называется стягивающей, если $(\forall \epsilon \in \mathbb{Q}_+)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n > N)\ q_n - p_n < \epsilon$

Определение Если $\{[p_n, q_n]_{\mathbb{Q}}\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{[r_n, s_n]_{\mathbb{Q}}\}_{n=1}^{\infty}$ эквивалентные, если $\{[min(p_n, r_n), min(q_n, s_n)]_{\mathbb{Q}}\}_{n=1}^{\infty}$ -

стягивающая.

Теорема 1 Введенное отношение является отношением эквивалентности на множестве всех систем стягивающихся рациональных отрезков.

Определение Действительным числом называется класс эквивалентности систем стягивающихся рациональных отрезков.

Определение Суммой двух действительных чисел с представителями $\{[p_n, q_n]_{\mathbb{Q}}\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{[r_n, s_n]_{\mathbb{Q}}\}_{n=1}^{\infty}$ называется число с представителем $\{[p_n + r_n, q_n + s_n]_{\mathbb{Q}}\}_{n=1}^{\infty}$

Теорема 2 Определение корректно и сложение удволетворяет свойствам:
Iа) $(\forall x, y \in \mathbb{R})\ x + y = y + x$
Iб) $(\forall x, yz \in \mathbb{R})\ x + (y + z) = (x + y) + z$
Iв) $(\forall x \in \mathbb{R})\ x + 0 = x$
Iг) $(\forall x \in \mathbb{R})\ x + (-x) = 0$
Если x представить $\{[p_n, q_n]_{\mathbb{Q}}\}_{n=1}^{\infty}$

Определение Действительное число a называется положительным, если для некоторой представляющей его системы рациональных отрезков $\{[p_n, q_n]_{\mathbb{Q}}\}_{n=1}^{\infty}$ для некоторых $n \in \mathbb{N}$ $p_n > 0$

Теорема 3 $\mathbb{R}$ называется линейно упорядоченным множеством относительно отношения $\leq$.

Лемма Если система $\{[p_n, q_n]_{\mathbb{Q}}\}_{n=1}^{\infty}$ представляет число $c \in \mathbb{R}$, то $(\forall n \in \mathbb{N})\ p_n \leq c \leq q_n$.

Замечание Системы стягивающих рациональных отрезков $\{[p_n, q_n]_{\mathbb{Q}}\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{[p_n, q_n]_{\mathbb{Q}}\}_{n=m}^{\infty}$ эквивалентны $\forall m \in \mathbb{N}$

Определение Произведением положительных действительных чисел a, b представляемых системами стягивающих рациональных отрезков $\{[p_n, q_n]_{\mathbb{Q}}\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{[r_n, s_n]_{\mathbb{Q}}\}_{n=1}^{\infty}$ соответственно с $p_1 > 0,\ r_1 > 0$ называется действительное число, представляемое системой $\{[p_n r_n, q_n s_n]_{\mathbb{Q}}\}_{n=1}^{\infty}$

1. $(\forall a \in \mathbb{R})\ a \times 0 = 0 \times a := 0$
2. $(\forall a > 0)(\forall b < 0)\ a \times b = b \times a := -(a \times (-b))$
3. $(\forall a < 0)(\forall b < 0)\ a \times b = b \times a := (-a) \times (-b)$

Теорема 4 Операция произведения действительных чисел корректна и удволетворяет свойствам:
IIа) $(\forall x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R})\ xy = yx$
IIб) $(\forall x, y, z \in \mathbb{R})\ x(yz) = (xy)z$
IIс) $(\forall x \in \mathbb{R}) x \times 1 = x$

Определение Если $a \in \mathbb{R},\ a > 0$ представляется системой $\{[p_n, q_n]_{\mathbb{Q}}\}_{n=1}^{\infty},\ p_1 > 0$, то оборатным $\frac{1}{a}$ называется число, представимое $\{[\frac{1}{q_n}, \frac{1}{p_n}]_{\mathbb{Q}}\}_{n=1}^{\infty}$

$$a < 0: \quad \frac{1}{a} := -(\frac{1}{-a})$$

$$\frac{1}{p_n} - \frac{1}{q_n} = \frac{q_n - p_n}{p_n q_n} \leq \frac{q_n - p_n}{p_n^2}$$

Теорема 5
I-II $(\forall x, y, z \in \mathbb{R})\ x(y + z) = xy + xz$
I-III $(\forall x, y \in \mathbb{R})(\forall z \in \mathbb{R},\ z > 0)(x \leq y) \implies xz \leq yz$
IIг $(\forall x \in \mathbb{R},\ x \neq 0)\ x \times \frac{1}{x} = 1$
IV $(\forall x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R},\ y \neq 0)(\exists n \in \mathbb{Z})\ ny \geq x$

Теорема 6 (Свойство полноты действительных чисел) $(\forall A, B \subset \mathbb{R})$ таких, что $A \cup B = \mathbb{R},\ A \cap B = \varnothing,\ (\forall a \in A)(\forall b \in B)\ a < b$
$(\exists c \in \mathbb{R})$ такое, что $(\forall a \in A)(\forall b \in B)\ a \leq c \leq b$

Определение Множество A действительных чисел называется ограниченным сверху [снизу], если

$$(\forall M \in \mathbb{R})[\exists M \in \mathbb{R}](\forall x \in A)\ x \leq M\ [x \geq m]$$

2.5 Комплексные числа

$\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$
$(a, b) + (c, d) := (a + c, b + d)$
$(a, b) \times (c, d) := (ac - bd, ad + bc)$
$(a, 0) =: a$
$(0, 1) =: i$ (мнимая единица) $i^2 = -1$
$(a, b) = a + bi$ (алгебраическая форма комплексного числа) $|z| = \sqrt{a^2 + b^2} \quad a = Re(z) \quad b = Im(z)$
Неравенство треугольника:

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$$

$$|z_1 - z_2| \geq ||z_1| - |z_2||$$

Определение Комплексно сопряженным к $z = c + di$ называется $\bar{z} = c - di$
Аргумент $z = arg(z) = \varphi + 2k\pi$

$$a = |z|(cos(\phi)),\ b = |z|(sin(\phi))$$

Тригонометрическая форма:

$$z = |z|(cos\varphi + isin\varphi)$$

$$w = |w|(cos\psi + isin\psi)$$

$$z \times w = |z||w|(cos\varphi cos\psi - sin\varphi sin\psi + (cos\varphi sin\psi + sin\varphi cos\psi)i = |z||w|(cos(\varphi + \psi) + sin(\varphi + \psi)i)$$

$$arg(zw) = arg(z) + arg(w)$$

$$cos\varphi + isin\varphi = cis\varphi =: e^{i\varphi}$$

$z = |z|e^{i\varphi}$ - показательная форма записи (формула Эйлера)

$$cos\varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2}$$

$$sin\varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i}$$

$$e^{i\pi} = -1$$

$z^n = |z|^n(cosn\varphi + isinn\varphi) = (|z|(cos\varphi + isin\varphi))^n$ - формула Муавра.
$(cos\varphi + i\sin\varphi)^n = cosn\varphi + isinn\varphi, n \in \mathbb{Z}$
$z^n = w \quad w = 0 \implies z = 0$
$w \neq 0 \implies w = |w|(cos\psi + isin\psi) \qquad z = |z|(cos\varphi + isin\varphi$
$|z| = \sqrt[n]{|w|}$
$n\varphi = \psi + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$
$\phi = \frac{\psi}{n} + \frac{2\pi k}{n},\ k = 0, 1, 2, \dots, n - 1$

3 Пределы

3.1 Доп. свойства действительных чисел

Теорема 1 (Плотность множества рациональных чисел в множестве действительных)

$$(\forall a, b \in \mathbb{R}; a < b)(\exists r \in \mathbb{Q})\ a < r < b$$

Определение Множества A и B называются равномощными, если существет биекция A на B.

Определение Множество A называется счетным, если оно равномощно $\mathbb{N}$ или несчетным, если оно не конечное и не счетное.

Теорема 2 (Кантор) $\mathbb{Q}$ - счетно, $\mathbb{R}$ - несчетно

Определение Если A - ограниченное сверху множество действительных чисел, то число b такое, что $(\forall a \in A)\ a \leq b$ называется верхней гранью множества A.
Наименьшим из множетсва верхних граней называется точной верхней гранью и обозначается $sup(a)$ - супремум. Аналогично нижняя грань $inf(A)$ - инфинум.

3.2 Предел последовательности

Определение Число $l \in \mathbb{R}$ называется пределом последовательности
$\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ если

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n > N)\ |x_n - l| < \epsilon$$

($\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ сходится к l, $\lim_{x\to\infty} x_n = l$, $x_n \to l\ n \to \infty$
$(\exists l \in \mathbb{R}) \lim_{x\to\infty} x_n = l \iff \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ сходится, иначе расходится

Теорема 1 (Единственность предела) Числовая последовательность может иметь не более, чем один предел.

Теорема 2 (Свойства предела a, связанные с неравенствами)

1. (Ограниченность последовательности) Если последовательность сходится, то она ограничена
2. (Отедлимость от нуля и сохранение знака)
   Если последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ сходися к $l \neq 0$, то $(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n > N)(sign(x_n) = sign(l)) \wedge |x_n| > \frac{|l|}{2}$
3. (Переход к пределу в неравенствах)
   Если $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0, \lim_{n\to\infty} y_n = y_0$ и $(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n \geq N)\ x_n \leq y_n$, то $x_0 \leq y_0$
4. (Теорема о промежуточной последовательности)
   Если $\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{x\to\infty} z_n = l$ и $(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n \geq N)\ x_n \leq y_n \leq z_n$, то $\lim_{n\to\infty} y_n = l$

Теорема 3 (Арифметические операции со сходящимися последовательностями)
Пусть $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0, \lim_{n\to\infty} y_n = y_0$, тогда:

1. $\lim_{x\to\infty}(x_n + y_n) = x_0 + y_0$
2. $\lim_{x\to\infty}(x_n - y_n) = x_0 - y_0$
3. $\lim_{x\to\infty}(x_n y_n) = x_0 y_0$
4. Если $((\forall n \in \mathbb{N})(y_n \neq 0)) \wedge y_0 = 0$, то $\lim_{x\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{x_0}{y_0}$

Определение Последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ называется бесконечно малой, если ее $\lim_{x\to\infty} x_n = 0$

Теорема 4 (Произведение бесконечно малой и ограниченной последовательностей) Если $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ - бесконечно малая, а $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ ограниченная, то $\{x_n y_n\}_{n=1}^{\infty}$ бесконечно малая.

Определение ϵ-окрестностью числа $l \in \mathbb{R}$ называется $U_\epsilon(l) := (l - \epsilon, l + \epsilon\ (\epsilon > 0)$

$$\lim_{x\to\infty} x_n = l \iff (\forall \epsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n > N)\ x_n \in U_\epsilon(l)$$

(Определение предела последовательности на языке окрестностей)

$$\mathbb{R} = (-\infty, +\infty) \quad -\infty : (\forall x \in \mathbb{R}) - \infty < x\ \ +\infty : (\forall x \in \mathbb{R})\ x < +\infty$$

$$\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\} = \bar{\mathbb{R}}; \quad \mathbb{R} \cup \{\infty\} = \hat{\mathbb{R}}$$

Определние ϵ-окрестность: $(\epsilon > 0)$

1. $-\infty : (-\infty, -\frac{1}{\epsilon})$
2. $+\infty : (\frac{1}{\epsilon}, +\infty)$
3. $\infty : (-\infty, -\frac{1}{\epsilon} \cup (\frac{1}{\epsilon}, +\infty)$

Определение Последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ называется бесконечно большой, если $\lim_{x\to\infty} x_n$ есть одно из $+\infty, -\infty, \infty$

Теорема 5 (Связь бесконечно малых и бесконечно больших последовательностей) Если $x_n \neq 0\ \forall n \in \mathbb{N}$, то $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ - бесконечно малая $\iff \{\frac{1}{x_n}\}_{n=1}^{\infty}$ - бесконечно большая.

Определение Последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ называется неубывающей $(\forall n \in \mathbb{N}) x_n \leq x_{n+1}$, невозрастающей $(\forall n \in \mathbb{N}) x_{n+1} \leq x_n$, убывающей $(\forall n \in \mathbb{N}) x_n > x_{n+1}$, возрастающей $(\forall n \in \mathbb{N}) x_n < x_{n+1}$
Последовательность монотонна, если она неубывающая, невозрастающая, убывающая или возрастающая.
Последовательность строго монотонна, если она убывающая или возрастающая.

Теорема 6 (Вейерштрасса о монотонных последовательностях) Если $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ ограниченная неубывающая последовательнсоть, то $\exists \lim_{x\to\infty} x_n = sup\{x_n\}$, если невозрастающая, то $\exists \lim_{x\to\infty} x_n = inf\{x_n\}$
Доказательство

$$l := sup\{x_n\} \iff \begin{cases} (\forall n \in \mathbb{N})\ x_n \leq l \\ (\forall \epsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})\ l - \epsilon < x_N \leq l \end{cases}$$

$$(\forall n > N)\ l \geq x_n \geq x_{n-1} \geq x_N > l - \epsilon \implies |x_n - l| < \epsilon$$

Теорема 7 (Принцип Кантора вложенных отрезков) Каждая система вложенных отрезков имеет непустое пересечение.
Доказательство: $[a_{n+1}, b_{n+1} \subset [a_n, b_n] \implies ((a_n \leq a_{n+1})\ \&\ (b_n \geq b_{n+1}))$

$$a_n \leq b_n \leq b_1\ \ \exists a = \lim_{x\to\infty} a_n = sup\{a_n\}$$

$$a_n \leq a\ \ \exists b = \lim_{x\to\infty} b_n = inf\{b_n\} \implies b \leq b_n \implies [a, b] \subset [a_n, b_n]$$

Определение Стягивающейся системой отрезков называется система вложенных отрезков, длины которых образуют бесконечно малую последовательность.

Дополнение к принципу Кантора Система стягивающихся отрезков имеет пересечение, состоящее из одной точки.

$$a_n \leq a \leq b \leq b_n \implies 0 \leq b - a \leq b_n - a_n = 0\ (n \to \infty)$$

Определение Подпоследовательностью последовательнсоти $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ называется последовательность $\{x_{n_k}\}_{n=1}^{\infty}$, где $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ - возрастающая последовательность натуральных чисел.

Определение Частичным пределом последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ называется предел ее подпоследовательности.

Теорема 8 (Эквивалентное определение частичного предела) Число $l \in \mathbb{R}$ является частичным пределом $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \iff (\forall \epsilon > 0)(\forall N \in \mathbb{N})\ |x_n - l| < \epsilon$
Доказательство
1)
l - частичный предел $l = \lim k \to \infty x_{n_k} \iff (\forall \epsilon > 0)(\exists K \in \mathbb{N})(\forall k > K)\ |x_{n_k} - l| < \epsilon$

$$(\forall N \in \mathbb{N})(\{n_k\} \nearrow)\ \exists K_1 \in \mathbb{N}\ \ n_{K_1} > N\ \ \forall k > max(K, K_1)\ |x_{n_k} - l| < \epsilon$$

2)

$$\epsilon := 1\ \ N := 1\ \ n_1 \in \mathbb{N}\ \ |x_{n_1} - l| < 1$$

$$\epsilon := \frac{1}{2}\ \ N := n_1\ \ n_2 \in \mathbb{N}\ \ |x_{n_2} - l| < \frac{1}{2}$$

$$\epsilon := \frac{1}{k}\ \ N := n_{k-1}\ \ n_k \in \mathbb{N}\ \ |x_{n_k} - l| < \frac{1}{k}$$

$$0 \leq |x_{n_k} - l| < \frac{1}{k}$$

Теорема 9 (Больцано-Вейерштрасс) Из каждой ограниченной последовательности можно выделить сходящуюся подпоследовательность.
Доказательство $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ - ограниченная $\exists [a_1, b_1] \supset \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$
$[a_2, b_2]$ - та из половин $[a_1, b_1]$, которая содержит бесконечно много элементов последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$. Продолжая, получим последовательность вложенных отрезков $\{[a_n, b_n]\}_{n=1}^{\infty}$, так как $b_n - a_n = \frac{b_1 - a_1}{2^{n-1}}$. Следовательно, $\{[a_n, b_n]\}_{n=1}^{\infty}$ - стягивающаяся, $\{C\} = \cap_{n=1}^{\infty}[a_n, b_n]$. Докажем, что C - частичный предел

$$x_{n_1} := x_1; x_{n_2} \in [a_2, b_2],\ x_{n_k} \in [a_k, b_k];\ 0 \leq |C - x_{n_k}| \leq \frac{b_1 - a_1}{2^{k-1}}$$

Дополнение $\forall \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \exists \{x_{n_k}\}_{n=1}^{\infty} \lim_{k\to\infty} x_{n_k} = l \in \bar{\mathbb{R}}$

Доказательство Предположим $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ неограниченная сверху.

$$n_1 : x_{n_1} > 1$$

$$n_2 > n_1 : x_{n_2} > 2$$

$$n_k > n_{k-1} : x_{n_k} > k$$

$$x_{n_k} > k \iff - < \frac{1}{x_{n_k}} < \frac{1}{k} \quad \lim_{k\to\infty} x_{n_k} = +\infty$$

Определение Верхним пределом последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ называется наибольший из ее частичных пределов ($\lim_{x\to\infty} x_n$. с чертой сверху) Нижним пределом называется наименьший из ее частичных пределов($\lim_{x\to\infty} x_n$ с чертой снизу).

Теорема 10 (Три определения верхнего и нижнего пределов) Для любой ограниченной последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ существуют ее верхний и нижний предел (L и l). Для них справедливы следующие утверждения:

1. $(\forall\epsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n > N)\ x_n < L\epsilon\ \wedge (\forall\epsilon > 0)(\forall N \in \mathbb{N})(\exists n > N)\ x_n > L - \epsilon$
   $(\forall\epsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n > N)\ x_n > l - \epsilon\ \wedge (\forall\epsilon > 0)(\forall N \in \mathbb{N})(\exists n > N)\ x_n < l + \epsilon$

2. $L = \lim_{x\to\infty} sup\{x_n, x_{\underline{n}+1} \ldots\};\ l = \lim_{x\to\infty} inf(\{x_n, x_{n+1}, \ldots\}$
   $\limsup_{n\to\infty} x_n = \lim_{x\to\infty} x_n$(С чертой) $\quad \liminf_{n\to\infty} x_n = \lim_{x\to\infty} x_n$ (Подчеркнуто)

Доказательство $s_n = sup\{x_n, x_{n+1}, \ldots\} \geq s_{n+1} = sup\{x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots\}$
$\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ - невозрастающая последовательность $m \leq x_n \leq M \implies m \leq s_n \leq M$
$L = \lim_{x\to\infty} s_n \implies (\forall\epsilon > 0)(\exists N_1 \in \mathbb{N})(\forall n > N_1)\ |L - s_n| < \epsilon \implies s_n < L + \epsilon \implies x_n < L + \epsilon$
$s_{N_2+1} = sup\{x_{N_2+1}, x_{N_2+2}, \ldots\} \quad s_{N_2+1} > L - \epsilon \quad (\exists n > N_2)\ x_n > L - \epsilon$
$(\forall N \in \mathbb{N})\ N_2 > max(N_1, N)$
1) $\implies L = \liminf_{n\to\infty} x_n \quad L$ - частичный предел $\implies (\forall\epsilon > 0)(\forall N \in \mathbb{N})(\exists n > N)\ |x_n - L| < \epsilon \iff L - \epsilon < x_n < L + \epsilon$
1) $\implies (\forall\epsilon > 0)(\exists N_1 \in \mathbb{N})(\forall n > N_1)\ x_n < L + \epsilon \quad n > max(N_1, N)$
Пусть s - частичный предел $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \implies \{x_{n_i}\}_{n=1}^{\infty}\ \lim_{n_i\to\infty} x_{n_i} = s \iff (\forall\epsilon > 0)(\exists I \in \mathbb{N})(\forall i < I)|x_{n_i} - \epsilon|$
$\forall i > max(I, I_1)\ I_1 n_{i_1} > N \qquad s - \epsilon < x_{n_i} < L + \epsilon \implies s - \epsilon < L + \epsilon \implies s < L + 2\epsilon \implies s \leq L$

Определение Последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ называется фундаментальной (или последовательностью Коши), если $(\forall\epsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n > N)(\forall p \in \mathbb{N})\ |x_{n+p} - x_n| < \epsilon \iff (\forall m, n > N)\ |x_m - x_n| < \epsilon$

Теорема 11 (Критерий Коши) Последовательнсоть $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ сходится $\iff \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ фундаментальна.

Доказательство 1) Сходимость $\implies$ фундаментальность

$$\lim_{x\to\infty} x_n = l \implies (\forall\epsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n > N)\ |x_n - l| < \frac{\epsilon}{2}$$

$$(\forall p \in \mathbb{N})\ n + p > N \implies |x_{n+p} - l| < \frac{\epsilon}{2}$$

$$|x_{n+p} - x_n| = |x_{n+p} - l + l - x_n| \implies |x_{n+p} - l| + |l - x_n| < \epsilon$$

2) Фундаментальность $\implies$ ограниченность

$$\epsilon := 1 \quad n := N + 1 \quad (\forall p \in \mathbb{N})\ |x_{N+1+p} - x_{N+1}| < 1 \implies x_{N+1} - 1 < x_{N+1+p} < X_{N+1} + 1$$

$$min(x_1, x_{N+1} - 1 < x_n < max(x_1, x_{N+1} + 1 \qquad (\forall n \in \mathbb{N})$$

3) Фундаментальность $\implies$ сходимость $\implies$ (Б. В.) $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty},\ \lim_{k\to\infty} x_{n_k} = l \iff (\forall\epsilon > 0)(\exists K \in \mathbb{N})(\forall k > K)\ |x_{n_k} - l| < \epsilon$
если фундаменальная последовательнсоть имеет сходящуюся подпоследовательность, то она сходится.

$$N_1 := max(N, n_{K+1}) \quad n_K := n_K > max(N, n) = n + p \quad (\forall n < N_1)\ |x_n - l| \leq |x_n - x_{n_k} + x_{n_k} - l| < \epsilon$$

Теорема 12 (Число e) Последовательность $\{x_n = (1 + \frac{1}{n})^n\}_{n=1}^{\infty}$ сходится. Ее предел называется числом e
Доказательство Рассмотрим $y_n := (1 + \frac{1}{n})^{n+1}$. Доказать, что y_0 убывает

$$\frac{y_{n-1}}{y_n} = \frac{(1 + \frac{1}{n-1})^n}{(1 + \frac{1}{n})^{n+1}} = (\frac{\frac{n}{n-1}}{\frac{n+1}{n}})^n \times \frac{1}{1 + \frac{1}{n}} = (\frac{n^2}{n^2 - 1})^n \frac{1}{1 + \frac{1}{n}} = (1 + \frac{1}{n^2 - 1})^n \frac{n}{n+1} \geq (1 + \frac{n}{n^2 + 1})\frac{n}{n+1} = \frac{(n^2 + n - 1)n}{(n^2 - 1)(n+1)} =$$

$$x_n = \frac{y_n}{1 + \frac{1}{n}} \to_{(n\to\infty)} e$$

Дополнение $e > 2$

$$x_n \nearrow \qquad \frac{x_n + 1}{x_n} = \frac{(1 + \frac{1}{n+1})^{n+1}}{(1 + \frac{1}{n})^n} = (1 - \frac{1}{(n+1)^2})^n \frac{n+2}{n+1} \geq (1 - \frac{n}{(n+1)^2})\frac{n+2}{n+1} = \frac{n^3 + 3n^2 + 3n + 2}{n^2 + 3n^2 + 3n + 1} > 1$$

$$2 = x_1 < x_n < y_n \qquad e = 2,718281828\dots$$

Пример 2 $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$

$$\sqrt[n]{n} > 1 \quad \sqrt[n]{n} =: 1 + \alpha_n, \quad \alpha_n > 0$$

$$n = (1+\alpha_n)^n \geq 1 + n\alpha_n + \frac{n(n-1)}{2}\alpha_n^2 > 1$$

$$\frac{1}{n-1} \geq \frac{1}{n(n-1)} + \frac{\alpha_n}{n-1} + \frac{\alpha_n}{2} > \frac{1}{n(n-1)} \implies \alpha_n^2 \to 0 \implies \alpha_n \to 0$$

3.3 Предел функции

Определение Проколотой δ -окрестностью точки $a \in \mathbb{R}$ называется множество

$$U_\delta^o(a) = (a-\delta,\ a) \cup (a,\ a+\delta)$$

$$U_\delta^o((\pm)\infty) = U_\delta((\pm)\infty)$$

Определение (Коши) $\lim_{x\to\infty} f(x) = A \iff (\forall\epsilon > 0)(\exists\delta > 0)(\forall x \in U_\delta^o(a))\ f(x) \in U_\delta^o(A)$

Определение (Гейне) $\lim_{x\to\infty} f(x) = A \iff (\forall\{x_n\} \subset X \setminus \{a\},\ \lim_{n\to\infty} x_n = a)\ \lim_{n\to\infty} f(x_n) = A$

Теорема 1 Определение предела функции по Коши и по Гейне эквивалентны.

Доказательство
1) $K \implies G$

$$(\forall x_n \in X \setminus a,\ \lim_{x\to\infty} x_n = a) \iff (\forall\delta > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n > N)\ x_n \in U_\delta^0(a) \implies^K f(x_n) \in U_\delta(A)$$

2) $G \implies K$ (от противного)

$$(\forall\epsilon > 0)(\forall\delta > 0)(\exists x \in U_\delta^o(a))\ f(x) \notin U_{\epsilon_0}(A)$$

1. $\delta := 1 \quad x_1 \in U_1^o(a) \quad f(x_1) \notin U_{\epsilon_0}(A)$
2. $\delta := 1/2 \quad x_2 \in U_{1/2}^o(a) \quad f(x_2) \notin U_{\epsilon_0}(A)$
3. $\dots$
4. $\delta := 1/n \quad x_n \in U_{1/n}^o(a) \quad f(x_n) \notin U_{\epsilon_0}(A)$

$$\{x_n\}_{n=1}^\infty \quad (\forall\epsilon > 0)(\exists N = [\frac{1}{\epsilon}] + 1)(\forall n > N)\ x_n \in U_\epsilon(a) \implies \lim_{x\to\infty} f(x_n) = A$$

$a,\ A \in \mathbb{R}$
Коши: $\lim_{x\to\infty} f(x) = A \iff (\forall\epsilon > 0)(\exists\delta > 0)(\forall x:\ 0 < |x-a| < \delta)\ |f(x) - A| < \epsilon$

Пример 1

$$\lim_{x\to1}\frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)} = \lim_{x\to1}(x+1) = 2$$

$$(\forall\epsilon > 0)(\exists\delta > 0)(\forall x:\ 0 < |x-1| < \delta)\ |\frac{x^2-1}{x-1} - 2| < \epsilon$$

$$\delta = \epsilon \quad 0 < |x-1| < \epsilon \implies \frac{x^2-1-2x+2}{x-1} = \frac{(x-1)^2}{(x-1)} = (x-1)$$

Пример 2 (Функция Дирихле)

$$f(x) = \begin{cases} 1, x \in \mathbb{Q} \\ 0,\ x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

$$\lim_{x\to a} f(x) \neg\exists (\forall a \in \mathbb{R})$$

1) $a \in \mathbb{Q}$

1. $x_n' = a - \frac{1}{n} \in \mathbb{Q} \quad f(x_n') = 1 \to_{n\to\infty} 1$
2. $x_n'' = a - \frac{\sqrt{2}}{n} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \quad f(x_n'') = 0 \to_{n\to\infty} 0$

2) $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

1. $x'_n = a - \frac{1}{n} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \quad f(x'_n) = 0 \to_{n\to\infty} 0$
2. $x''_n = (a)_n \in \mathbb{Q} \quad f(x''_n) = 1 \to_{n\to\infty} 1$

Теорема 2 (Свойства предела функции, связанные с неравенствами)

1. (Ограниченность) Если $\lim_{x\to\infty} f(x) = A \in \mathbb{R}$, то $f(x)$ ограниченна в ... проколотой окрестности точки a, т. е множество значений функции $f(x)$ ограниченно.
2. (Отделимость от нуля и сохранение знака) Если $\lim_{x\to\infty} f(x) = A \in \mathbb{R}$, то $(\exists C > 0)$ такое, что в
3. О трех функциях. Если $(\exists \delta > 0)(\forall x in U^o_\delta(a))\ f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ и $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} h(x) = A \in \bar{\mathbb{R}} \implies \lim_{x\to a} g(x) = A$

Доказательство

1.
$$(\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in U^o_\delta(a))\ |f(x) - A| < \epsilon$$
$$\epsilon := 1 \quad (\exists \delta > 0)(\forall x < U^o_\delta(a))\ A - 1 < f(x) < A + 1$$

2.
$$(\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in U^o_\delta(a))\ f(x) \in U_\epsilon(A)$$
$$A = \pm\infty \quad \epsilon := 1 \quad f(x) \in U_1(\pm\infty) \quad sign f(x) = \pm 1\ |f(x)| > 1$$
$$A \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\ \epsilon := \frac{|A|}{2} > 0 \quad f(x) \in U_{\frac{|A|}{2}}(A) \iff |f(x) - A| < \frac{|A|}{2}$$

Теорема 3 (Свойства предела функции, связанные с арифметическими операциями)
Пусть $\lim_{x\to a} f(x) = A,\ \lim_{x\to a} g(x) = B,\ A, B \in \mathbb{R}$, тогда

1. $\lim_{x\to a}(f \pm g)(x) = A \pm B$
2. $\lim_{x\to a}(f \times g)(x) = A \times B$
3. Если $B \neq 0$, то $\lim_{x\to a}(\frac{f}{g})(x) = \frac{A}{B}$

Доказательство 3)
$$B \neq 0 \implies^{Th2(2)} (\exists \delta > 0)(\forall x \in U^o_\delta(a))\ g(x) \neq 0$$
$$(\forall \{x_n\}_{n=1}^\infty x_n \neq 0, \lim_{x\to\infty} x_n = a$$
$$\begin{cases} \lim_{x\to\infty} f(x_n) = A \\ \lim_{x\to\infty} g(x_n) = B \end{cases} \implies \lim \frac{f(x_n)}{g(x_n)} = \frac{A}{B}$$

Теорема 4 (Критерий Коши, существование предела функции)
$$\exists \lim_{x\to a} f(x) \in \mathbb{R} \iff (\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x_1, x_2 \in U^o_\delta(a))\ |f(x_1) - f(x_2)| < \epsilon$$

Доказательство
Необходимость
$$\lim_{x\to a} f(x) = A \in \mathbb{R} \iff (\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in U^o_\delta(a))|f(x) - A| < \frac{\epsilon}{2}$$
$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq |f(x_1) - A| + |A - f(x_2)| < \epsilon$$

Достаточность
$$(\forall \{x_n\}_{n=1}^\infty \subset X \setminus \{a\},\ \lim_{x\to\infty} x_n = a) \quad \lim_{x\to\infty} f(x_n) = A \in \mathbb{R}$$
$$(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n > N) x_n \in U^o_\delta(a) \qquad (\forall p \in \mathbb{N})\ |f(x_{n+p} - f(x_n)| < \epsilon \implies \{f(x_n)\}_{n=1}^\infty \implies \exists \lim_{x\to\infty} f(x_n) = A \in \mathbb{R}$$