1 Счетность множества рациональных чисел, несчетность множества действительных чисел

Утверждение. Множество $\mathbb{Q}$ счетно, $\mathbb{R}$ - несчетно.

Доказательство. Докажем, что $\mathbb{Q}$ счетно. Каждое число из $\mathbb{Q}$ представимо в виде несократимой десятичной дроби $\frac{p}{q}$, где $p \in \mathbb{Z}$, а $q \in \mathbb{N}$. Составим таблицу таких чисел следующим образом:

	0	1	-1	2	-2	...
1	$\frac{0}{1}$	$\frac{1}{1}$	$-\frac{1}{1}$	$\frac{2}{1}$	$-\frac{2}{1}$	...
2	$\frac{0}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{2}{2}$	$-\frac{2}{2}$	...
3	$\frac{0}{3}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$-\frac{2}{3}$	...
...	...	...	...	...	...	$\ddots$

Теперь пойдем снизу вверх по диагоналям и будем присваивать дробям номера по порядку: $\frac{0}{1}$ присваиваем 1, $\frac{1}{1}$ присваиваем 2, $\frac{0}{2}$ - было, значит пропускаем, $-\frac{1}{1}$ - 3 и так далее. Таким образом мы строим биекцию между натуральными и рациональными числами, а значит $\mathbb{Q} \cong \mathbb{N}$, следовательно $\mathbb{Q}$ - счетно.

Теперь докажем несчетность $\mathbb{R}$ от противного. Предположим, что $\mathbb{R}$ счетно, а значит и отрезок $[0, 1] \subset \mathbb{R}$. Тогда мы можем выписать все числа из отрезка $[0, 1]$ в таблицу и пронумеровать их:

1	$0, \alpha_{1_1}\alpha_{1_2}\alpha_{1_3}\ldots$
2	$0, \alpha_{2_1}\alpha_{2_2}\alpha_{2_3}\ldots$
3	$0, \alpha_{3_1}\alpha_{3_2}\alpha_{3_3}\ldots$
...	...

Тогда составим такое число $0, \delta_1\delta_2\delta_3\ldots$, что

$$\delta_i = \begin{cases} 0, \text{ если } \alpha_{i_i} = 9 \\ \alpha_{i_i} + 1, \text{ иначе} \end{cases}$$

Тогда полученное число будет отличаться от i-того в i-й цифре, поэтому его в таблице не будет. Противоречие. Таким образом $\mathbb{R}$ несчетно.

■

2 Теорема о существовании точной верхней (нижней) грани множества

Теорема. Каждое непустое множество $X \subset \mathbb{R}$, ограниченное сверху (снизу) имеет точную верхнюю (нижнюю грань)

Доказательство. Пусть $S \subset \mathbb{R}$ - множество всех верхних граней множества X, тогда

$$\forall x \in X,\ \forall s \in S : x \leq s$$

Пользуясь теоремой о полноте действительных чисел, получаем, что

$$\exists c \in \mathbb{R} : \forall x \in X,\ \forall s \in S : x \leq c \leq s$$

Тогда c - искомая *точная* верхняя грань. Существование точной нижней грани доказывается аналогично.

■

3 Бесконечно малые последовательности их свойства. Арифметические операции со сходящимися последовательностями

Определение. Последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ называется бесконечно малой тогда и только тогда, когда $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ (последовательность сходится к нулю)

Теорема. Если $\{x_n\}$ - бесконечно малая последовательность, то последовательность $\{\frac{1}{x_n}\}$ - бесконечно большая.

Доказательство. Пусть $\{x_n\}$ - бесконечно малая последовательность, тогда:

$$\forall \epsilon > 0 \, \exists N \in \mathbb{N} \, \forall n > N : |x_n| < \epsilon$$

$$|x_n| < \epsilon \Leftrightarrow |\frac{1}{x_n}| > \frac{1}{\epsilon}$$

Значит

$$\forall \epsilon > 0 \, \exists N \in \mathbb{N} \, \forall n > N : |\frac{1}{x_n}| > \frac{1}{\epsilon} \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{1}{x_n} = +\infty$$

Из этого следует, что $\{\frac{1}{x_n}\}$ - бесконечно большая. ■

Теорема. Сумма бесконечно малых последовательностей есть бесконечно малая последовательность.

Доказательство. Пусть $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ - бесконечно малые последовательности. Тогда

$$\forall \epsilon > 0 \, \exists N_1 \in \mathbb{N} \, \forall n > N_1 : |x_n| < \frac{\epsilon}{2}$$

$$\forall \epsilon > 0 \, \exists N_2 \in \mathbb{N} \, \forall n > N_2 : |y_n| < \frac{\epsilon}{2}$$

Тогда

$$\forall \epsilon > 0 \, \exists N = max(N_1, N_2) \, \forall n > N : |x_n + y_n| \leq_{(\text{неравенство треугольника})} |x_n| + |y_n| < \epsilon$$

Это означает, что последовательность $\{x_n + y_n\}$ является бесконечно малой ■

Теорема. Произведение бесконечно малой последовательности на ограниченную есть бесконечно малая последовательность.

Доказательство. Пусть $\{x_n\}$ - бесконечно малая, а $\{y_n\}$ - ограниченная. Тогда

$$\exists M \in \mathbb{R} : \forall n \in \mathbb{N} \, x_n \leq M$$

$$\forall \epsilon > 0 \, \exists N_1 \in \mathbb{N} \, \forall n > N_1 : |x_n| < \frac{\epsilon}{M}$$

Тогда

$$\forall \epsilon > 0, \, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n > N : |x_n \cdot y_n| = |x_n| \cdot |y_n| < \frac{\epsilon}{M} \cdot M = \epsilon$$

Это означает, что последовательность $\{x_n \cdot y_n\}$ является бесконечно малой ■

Теорема. (Арифметические свойства сходящихся последовательностей) Пусть $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ сходящиеся последовательности, а $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ и $\lim_{n\to\infty} y_n = b$, то справедливы следующие равенства:

1. $\lim_{n\to\infty}(x_n + y_n) = a + b$
2. $\lim_{n\to\infty}(x_n - y_n) = a - b$
3. $\lim_{n\to\infty}(x_n \cdot y_n) = a \cdot b$
4. $\lim_{n\to\infty}(\frac{x_n}{y_n}) = \frac{a}{b}$ (только если $\forall n \in \mathbb{N} : y_n \neq 0 \land b \neq 0$)

Доказательство.
1) Из условия следует, что

$$\forall \epsilon > 0, \exists N_1 \in \mathbb{N}, \forall n > N_1 : |x_n - a| < \frac{\epsilon}{2}$$

$$\forall \epsilon > 0, \exists N_2 \in \mathbb{N}, \forall n > N_1 : |y_n - b| < \frac{\epsilon}{2}$$

тогда,

$$\forall \epsilon > 0, \exists N = max(N1, N2) \in \mathbb{N}, \forall n > N : |x_n + y_n - a - b| \leq |x_n - a| + |y_n - b| < \epsilon$$

$$\lim_{n\to\infty}(x_n + y_n) = a + b$$

3) Аналогично, переход:

$$|x_n \cdot y_n - a \cdot b| = |x_n \cdot y_n - a \cdot y_n + a \cdot y_n - a \cdot b| \leq |y_n||x_n - a| + |a||y_n - b|$$

$$y_n \text{ ограниченна числом } M \Rightarrow |x_n \cdot y_n - a \cdot b| \leq |M||x_n - a| + |a||y_n - b|$$

При $N = max(N_1(\frac{\epsilon}{2|M|}), N_2(\frac{\epsilon}{2|a|}))$ получаем:

$$|x_n \cdot y_n - a \cdot b| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

■

4 Свойства пределов, связанные с неравенствами

Теорема. (О зажатой последовательности) Если $\{x_n\}, \{y_n\}, \{z_n\}$ - сходящиеся последовательности, причем $\forall n : x_n \leq y_n \leq z_n$ и $\lim_{x\to\infty} x_n = \lim_{x\to\infty} z_n = l$, то $\lim_{x\to\infty} y_n = l$

Доказательство.

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n > N : |x_n - l| < \epsilon \Leftrightarrow \epsilon - l < x_n < \epsilon + l$$

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n > N : |z_n - l| < \epsilon \Leftrightarrow \epsilon - l < z_n < \epsilon + l$$

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n > N : \epsilon - l < x_n \leq y_n \leq z_n < \epsilon + l \Leftrightarrow |y_n - l| < \epsilon$$

■

Теорема. Если последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ имеют пределы $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ и $\lim_{n\to\infty} y_n = b$ соответственно, то если $\exists N$, $\forall n > N : x_n \leq y_n$, то $a \leq b$

Доказательство. От противного. Пусть $a > b$, тогда из определения предела:

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists N_1 \in \mathbb{N}, \forall n > N_1 : \epsilon - a < x_n < \epsilon + a$$

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists N_2 \in \mathbb{N}, \forall n > N_2 : \epsilon - b < y_n < \epsilon + b$$

Тогда зафиксируем $\epsilon = \frac{a-b}{2} > 0$:

$$\exists N = max(N_1, N_2),\ \forall n > N : y_n < b + \frac{a-b}{2} = a - \frac{a-b}{2} < x_n$$

Противоречие.

■

5 Теорема о пределе ограниченной монотонной последовательности

Теорема. Если последовательность монотонно возрастает (убывает) и ограниченна сверху (снизу), то она имеет предел, причем он является точной верхней (нижней) гранью.

Доказательство. Если последовательность $\{x_n\}$ ограниченна сверху, то она имеет точную верхнюю грань M такую, что:

$$\forall n \in \mathbb{N} : x_n \leq M \Rightarrow \forall \epsilon > 0 : x_n < M + \epsilon$$

$$\forall \epsilon > 0, \exists N : M - \epsilon < x_N$$

Так как последовательность $\{x_n\}$ монотонно возрастает, то:

$$\forall \epsilon > 0, \exists N, \forall n > N : M - \epsilon < x_n$$

Тогда:

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n > N : |x_n - M| < \epsilon$$

Таким образом, M - предел $\{x_n\}$. Аналогично доказывается для последовательности, ограниченной снизу. ■

6 Число e

Теорема. Пределом последовательности $(1+\frac{1}{n})^n$ называется число e.

Доказательство. Возьмем последовательность $y_n = (1+\frac{1}{n})^{n+1}$. Докажем, что она монотонно убывает.

$$\frac{y_{n-1}}{y_n} = \frac{(1+\frac{1}{n-1})^n}{(1+\frac{1}{n})^{n+1}} = (\frac{n}{n-1})^n(\frac{n}{n+1})^{n+1} = \frac{n^{2n}\cdot n}{(n^2-1)^n(n+1)} =$$

$$= (\frac{n^2}{n^2-1})^n(\frac{n}{n+1}) = (1+\frac{1}{n^2-1})^n(\frac{n}{n+1}) \geq (1+\frac{1}{n^2})^n(\frac{n}{n+1}) \geq (1+\frac{1}{n})(\frac{n}{n+1}) = 1$$

Таким образом, $\{y_n\}$ монотонно убывает, при этом все ее члены неотрицательны, а значит она ограниченна снизу. Тогда по теореме Вейерштрасса она имеет предел. Тогда:

$$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n = \lim_{n\to\infty} y_n \cdot \lim_{n\to\infty}\frac{1}{(1+\frac{1}{n})} = \lim_{n\to\infty} y_n \cdot 1 = \lim_{n\to\infty} y_n = e$$

Значит $\{(1+\frac{1}{n})^n\}$ тоже сходится.

∎

7 Теорема Кантора о вложенных отрезках

Теорема. Пересечение вложенных отрезков $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n]$ всегда непустое множество. При этом если длины отрезков стремятся к нулю, то их пересечение - точка.

Доказательство. Рассмотрим монотонно возрастающую, ограниченную последовательность $\{a_n\}$ и монотонно убывающую, ограниченную последовательность $\{b_n\}$. По теореме Вейерштрасса, $\{a_n\}$ имеет точную верхнюю грань p, а $\{b_n\}$ - точную нижнюю грань q. Так как $\forall x \in \{a_n\}, \forall y \in \{b_n\} : x \leq y$, то $p \leq q$. Тогда отрезок $[p, q]$ - есть пересечение вложенных отрезков.

Предположим, что существуют две различные точки M_1 и M_2 принадлежащие пересечению вложенных отрезков, длины которых стремятся к нулю. Тогда:

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n > N : |a_n - b_n| < \epsilon$$

Зафиксируем $\epsilon = \frac{|M_1 - M_2|}{2}$, тогда существует такой вложенный отрезок, длина которого не превышает ϵ, а значит и расстояния от M_1 до M_2. Тогда, очевидно, отрезок не может покрыть обе точки одновременно.

■

8 Подпоследовательности. Два определения частичного предела

Определение. Подпоследовательностью $\{x_n\}$ называется такая последовательность $\{x_{n_k}\}$, что $\{n_k\}$ - монотонно возрастающая последовательность натуральных чисел.

Определение. Частичным пределом последовательности $\{x_n\}$ - называют предел ее подпоследовательности.

Определение. Число $l \in \mathbb{R}$ называется частичным пределом последовательности $\{x_n\} \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0, \forall N \in \mathbb{N}, \exists n > N : |x_n - l| < \epsilon$

Утверждение. Оба определения частичного предела эквивалентны.

Доказательство. (В одну сторону) Пусть

$$\lim_{x_{n_k}} = l \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists K \in \mathbb{N}, \forall k > K : |x_{n_k} - l| < \epsilon$$

Тогда $\forall N \in \mathbb{N}$ можно выбрать $K \in \mathbb{N}$ так, что $\forall k > K : n_k > N$, а это значит, что:

$$\forall \epsilon > 0, \forall N \in \mathbb{N}, \exists n > N : |x_n - l| < \epsilon$$

(В другую сторону) Пусть l - частичный предел последовательности $\{x_n\}$, тогда:

$$\forall \epsilon > 0, \forall N \in \mathbb{N}, \exists n > N : |x_n - l| < \epsilon$$

Тогда построим последовательность $\{x_{n_k}\}$ следующим образом:

$$\begin{array}{lll} \epsilon := 1 & \exists n_1 \in \mathbb{N} & |x_{n_1} - l| < 1 \\ \epsilon := 1/2 & \exists n_2 > n_1 & |x_{n_2} - l| < 1/2 \\ \dots & \dots & \dots \end{array}$$

Тогда по построению

$$\forall \epsilon > 0, \exists K \in \mathbb{N}, \forall k > K : |x_{n_k} - l| < \epsilon$$

■

9 Теорема о трёх определениях верхнего и нижнего пределов

Определение. Верхним пределом $\overline{\lim}_{n\to\infty}x_n$ называется наибольший из частичных пределов $\{x_n\}$.

Определение. Нижним пределом $\underline{\lim}_{n\to\infty}x_n$ называется наименьший из частичных пределов $\{x_n\}$.

Теорема. (3 определения нижнего и верхнего пределов) Для любой ограниченной последовательности $\{x_n\}$ существует верхний предел $L = \overline{\lim}_{n\to\infty}x_n$ и нижний предел $l = \underline{\lim}_{n\to\infty}x_n$. При этом данное определение эквивалентно следующим двум:

1.
$$(\forall\epsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n > N : x_n < L + \epsilon) \wedge (\forall\epsilon > 0\ \forall N \in \mathbb{N}\ \exists n > N : x_n > L - \epsilon)$$
$$(\forall\epsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n > N : x_n > l - \epsilon) \wedge (\forall\epsilon > 0\ \forall N \in \mathbb{N}\ \exists n > N : x_n < l + \epsilon)$$

2. $L = \overline{\lim}_{n\to\infty}sup\{x_n, x_{n+1}, \ldots\} \qquad l = \underline{\lim}_{n\to\infty}inf\{x_n, x_{n+1}, \ldots\}$

Доказательство. Пусть $s_n = sup\{x_n, x_{n+1}, \ldots\}$. Очевидно, что $s_n \leq s_{n-1}$ и что $s_n \geq inf\{x_n\}$. Тогда по теореме Вейерштрасса $\{s_n\}$ сходится.

$$L := \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} sup\{x_n, x_{n+1}, \ldots\} = inf\{s_n\}$$

Докажем справедливость первого определения.

$$\lim_{n\to\infty} s_n = L \Leftrightarrow \forall\epsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n > N : |s_n - L| < \epsilon \Leftrightarrow x_n \leq s_n < L + \epsilon$$
$$L = inf\{s_n\} \Leftrightarrow \forall N \in \mathbb{N}\ s_{N+1} = \sup\{x_{N+1}, x_{N+2}, \ldots\}$$

Так как $L = inf\{s_n\}$, то $L \leq s_{N+1}$.

$\forall\epsilon > 0\ \forall N \in \mathbb{N}\ \exists n > N : x_n = sup\{x_n, x_{n+1}, \ldots\} \geq sup\{x_{N+1}, x_{N+2}, \ldots\} = s_{N+1} > s_{N+1} - \epsilon = L - \epsilon$

Отсюда:

$$\forall\epsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n > N : x_n < L + \epsilon$$
$$\forall\epsilon > 0\ \forall N \in \mathbb{N}\ \exists n > N : x_n > L - \epsilon$$

Докажем в обратную сторону. Будем строить последовательность следующим образом ($N(\epsilon)$ - такое число N, что $\forall n > N : x_n < L + \epsilon$ - первая часть первого пункта):

$$\begin{array}{lll} \epsilon := 1 & \exists n_1 > N(1) & |x_{n_1} - L| < 1 \\ \epsilon := 1/2 & \exists N_2 = max(N(1/2), n_1) & \exists n_2 > N_2 : |x_{n_2} - L| < 1/2 \\ \ldots & \ldots & \ldots \end{array}$$

Таким образом, мы доказали, что L является частичным пределом x_n. Теперь докажем, что L является наибольшим частичным пределом. Пусть у нас есть любая подпоследовательность $\{y_n\}$ последовательности $\{x_n\}$ такая, что $\lim_{n\to\infty} y_n = t$. Из первой первой части первого пункта следует, что

$$\forall\epsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n > N : y_n < L + \epsilon \Rightarrow t \leq L + \epsilon$$

Тогда $\forall\epsilon > 0\ t \leq L + \epsilon \Rightarrow t \leq L$, а это значит, что L - наибольший из частичных пределов.

■