

# Математический анализ

Виталий Сергеевич Ерошин

Сентябрь 2021

# Содержание

<b>1</b>	<b>Предварительные сведения.</b>	<b>3</b>
1.1	Математическая логика. . . . .	3
1.2	"Наивная" теория множеств . . . . .	3
1.2.1	Свойства . . . . .	3
1.3	Отображения . . . . .	3
1.4	Отношения . . . . .	3
<b>2</b>	<b>О числах</b>	<b>4</b>
2.1	Натуральные числа . . . . .	4
2.1.1	Аксиомы (Пeano): . . . . .	4
2.1.2	Модель Фреге-Рассела . . . . .	4
2.2	Целые числа . . . . .	5
2.3	Рациональные числа . . . . .	5
2.4	Действительные числа . . . . .	5
2.5	Комплексные числа . . . . .	7
<b>3</b>	<b>Пределы</b>	<b>7</b>
3.1	Доп. свойства действительных чисел . . . . .	7
3.2	Предел последовательности . . . . .	8
3.3	Предел функции . . . . .	11
3.4	Сравнение функций . . . . .	13
<b>4</b>	<b>Дифференциальное исчисление функций одной переменной</b>	<b>13</b>
4.1	Определение производной . . . . .	13

# 1 Предварительные сведения.

## 1.1 Математическая логика.

$A, B, \dots$  - высказывания

$\neg A$  - отрицание

$A \wedge B$  - конъюнкция (логическое и)

$A \vee B$  - дизъюнкция (логическое или)

$A \implies B$  - импликация ( $A$  - необходимое условие,  $B$  - достаточное условие)

$A \iff B$  - эквивалентность (тогда и только тогда)

$A(x, y)$  - предикат (высказывание, зависящее от переменных)

$\forall$  - квантор общности (для любого...)

$\exists$  - квантор существования (найдется, существует)

$\exists!$  - существует при том единственное

## 1.2 "Наивная" теория множеств

$A, B, \dots$  - множества

$a \in A$  - элемент  $a$  принадлежит множеству  $A$ .  $(\neg(a \in A)) \iff (a \notin A)$

$A \cup B = \{x : (x \in A) \vee (x \in B)\}$  - объединение множеств

$A \cap B = \{x : (x \in A) \wedge (x \in B)\}$  - пересечение множеств

$B \setminus A = C_B A = \{x : (x \in B) \vee (x \notin A)\}$  - разность множеств

$A \delta B = (B \setminus A) \cup (A \setminus B)$  - симметрическая разность

### 1.2.1 Свойства

1. Коммутативность  $A \cup B = B \cup A$   $A \cap B = B \cap A$
2. Ассоциативность  $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$   $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
3. Дистрибутивность  $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$   $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
4. Идемпотентность  $A \cup A = A$   $A \cap A = A$
5. Универсальное множество  $U : U \cap A = A; U \cup A = U; A \subset U; C_U A = A^C$
6. Двойственность (де Моргана)  $(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$   $(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$

## 1.3 Отображения

Отображение из  $X$  в  $Y$ :

$$(f : X \rightarrow Y) \iff ((\forall x \text{ in } X)(\exists! y \in Y)y = f(x))$$

$x$  - область отображения  $f$

$f(x)$  - область значений  $f$

$f(x) = \{y \in Y(\exists x \in X)f(x) = y\}$

$f$  инъективное (инъекция, взаимная однозначность)

$$(f(x_1) = f(x_2)) \iff (x_1 = x_2)$$

$f$  сюръективное (сюръекция, отображение на)

$$f(X) = Y \iff (\forall y \in Y)(\exists x \text{ in } X : f(x) = y)$$

$f$  биективное (биекция), если  $f$  инъективное и сюръективное.

$f^{-1}(y) = \{x \in X : f(x) = y\}$  - прообраз

## 1.4 Отношения

**Опр.** Бинарное отношение  $\mathcal{R}$  - это подмножество  $X \times X = X^2 = \{(x, y) : (x \in X) \wedge (y \in X)\}$  (декартов квадрат)

$$((x, y) \in \mathcal{R}) \iff x\mathcal{R}y$$

**Опр.** Отношение порядка на  $X$  - это бинарное отношение  $\mathcal{R}$ , удовлетворяющее следующим свойствам:

1) рефлексивность:

$$(\forall x \in X) x\mathcal{R}x$$

2) антисимметричность:

$$(\forall x, y \in X)(x\mathcal{R}y) \wedge (y\mathcal{R}x) \implies x = y$$

3) транзитивность:

$$(\forall x, y, z \in X)((x\mathcal{R}y) \wedge (y\mathcal{R}z)) \implies (x\mathcal{R}y)$$

*Пример 1.*  $A \subset B$  (частично упорядоченное)

*Пример 2.*  $x \leq y$

*Пример 3.*  $X \in \mathbb{R}$

*Пример 4.*  $(\forall x, y \in X)(x\mathcal{R}y) \vee (y\mathcal{R}x)$  (Линейно упорядоченное)

**Определение.** Отношение эквивалентности на  $X$  - это бинарное отношение  $\mathcal{R}$ , удовлетворяющее следующим свойствам:

1) рефлексивность (см. выше)

2) симметричность  $(\forall x, y \in X)(x\mathcal{R}y) \implies (y\mathcal{R}x)$

3) транзитивность

**Теорема.** Если на  $X$  задано отношение эквивалентности  $\mathcal{R}$ , то  $X$  может быть разбито на классы эквивалентности, то есть непересекающиеся множества, каждое из которых состоит из взаимноэквивалентных элементов:

$$X = \cup_{\alpha \in A} X_{\alpha} : \alpha_1 \neq \alpha_2 \implies X_{\alpha_1} \cap X_{\alpha_2} = \emptyset$$

$$(\forall \alpha \in A)(x_1, x_2 \in X_{\alpha}) x_1 \mathcal{R} x_2$$

$$(\forall \alpha \neq \beta)(\forall x_1 \in X_{\alpha})(\forall x_2 \in X_{\beta}) \neg x_1 \mathcal{R} x_2$$

## 2 О числах

### 2.1 Натуральные числа

#### 2.1.1 Аксиомы (Пeano):

I. 1 есть натуральное число

II.  $(\forall n \in \mathbb{N})(\exists Sc(n) \in \mathbb{N})$

III.  $(\forall n \in \mathbb{N})(1 \neq Sc(n))$

IV.  $(Sc(n) = Sc(m)) \implies (n = m)$

V. (аксиома индукции)

$$(\forall \mathfrak{M} \subset \mathbb{N})((1 \in \mathfrak{M}) \wedge (n \in \mathfrak{M}) \implies Sc(n) \in \mathfrak{M}) \implies \mathfrak{M} = \mathbb{N}$$

#### 2.1.2 Модель Фреге-Рассела

$$\{\emptyset\} = 1$$

$$Sc(n) := n \cup \{n\}$$

$$2 = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$$

$$3 = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$$

...

**Определение.**  $m + n$

$$m + 1 := Sc(m)$$

$$m + Sc(n) := Sc(m + n)$$

**Определение.**  $m \cdot n$

$$m \cdot 1 := m$$

$$m \cdot Sc(n) = m \cdot n + m$$

**Определение.**

$$m \leq n \iff (m = n) \vee ((\exists p \in \mathbb{N})(n = m + p))$$

**Теорема.**

Ia. (Коммутативность сложения)

$$m + n = n + m$$

Иб. (Ассоциативность сложения)

$$(m + n) + p = m + (n + p)$$

Па. (Коммутативность умножения)

$$m \cdot n = n \cdot m$$

Пб. (Ассоциативность умножения)

$$(m \cdot n) \cdot p = m \cdot (n \cdot p)$$

Пв. (Единица)

$$1 \cdot n = n$$

I-II. (Дистрибутивность)

$$m \cdot (n + p) = m \cdot n + m \cdot p$$

IIIa.  $m \leq m$

IIIб.  $(m \leq n) \wedge (n \leq m) \implies (m = n)$

IIIв.  $(m \leq n) \wedge (n \leq p) \implies (m \leq p)$

IIIг.  $(m \leq n) \vee (n \leq m)$

I-III.  $(m \leq n) \implies (m + p) \leq (n + p)$

II-III.  $(m \leq n) \implies m \cdot p \leq n \cdot p$

IV. (Свойство Архимеда)

$$m \leq p \implies (\exists n) m \cdot n \geq p$$

## 2.2 Целые числа

$$\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup \{0\} \cup \{-n : n \in \mathbb{N}\}$$

$$(m, n \in \mathbb{N}) m + (-n) := (p \in \mathbb{N}, n + p = m, m > n), (0, m = n), (-p, p \in \mathbb{N}, m + p = n, n > m)$$

**Теорема.**

I-IV (II-IV с  $p \in \mathbb{N}$ )

Ив. (Нуль)  $0 + n = n$

Иг. (Противоположный элемент)  $\exists(-m) \in \mathbb{Z}) m + (-m) = 0$

## 2.3 Рациональные числа

$$\mathbb{N}^2(m, n) \mathcal{R}(p, q) \iff m \cdot q = n \cdot p$$

1)  $(m, n) \mathcal{R}(m, n) m \cdot n = n \cdot m$

2)  $(m, n) \mathcal{R}(p, q) \implies (p, q) \mathcal{R}(m, n); m \cdot q = n \cdot p; p \cdot n = q \cdot m$

3)  $(m, n) \mathcal{R}(p, q) \wedge (p, q) \mathcal{R}(r, s) \implies (m, n) \mathcal{R}(r, s)$

$\mathbb{Q}_+$  - множество классов эквивалентности дробей  $(\mathbb{N}^2)$  по  $\mathcal{R}$ . (Положительные рациональные числа)

$$\mathbb{Q} := \mathbb{Q}_+ \cup \{\emptyset\} \cup \{-r : r \in \mathbb{Q}_+\}$$

**Теорема I-IV** (II-III с  $p > 0$ , IV с  $m \neq 0$ )

IIг. (Обратный элемент)

$$(\forall r \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}) (\exists r^{-1} \in \mathbb{Q}) r \times r^{-1} = r^{-1} \times r = 1$$

**Теорема 2** Каждое положительное рациональное число представимо бесконечной периодической десятичной дробью, и наоборот, каждая бесконечная периодическая десятичная дробь представима в виде положительного рационального числа.

## 2.4 Действительные числа

**Определение** Последовательностью рациональных чисел называется отображение из  $\mathbb{N}$  в  $\mathbb{Q}$   $\{r_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathbb{Q}$

**Определение** Рациональным отрезком называется  $\{r \in \mathbb{Q} : p \leq r \leq q\} = [p, q]_{\mathbb{Q}}$   $p, q \in \mathbb{Q}$

**Определение** Система  $\{[p_n, q_n]\}_{n=1}^\infty$  называется системой вложенных рациональных отрезков если  $(\forall n \in \mathbb{N}) [p_{n+1}, q_{n+1}]_{\mathbb{Q}} \subset [p_n, q_n]_{\mathbb{Q}}$

**Определение** Система вложенных рациональных отрезков называется стягивающей, если  $(\forall \epsilon \in \mathbb{Q}_+) (\exists N \in \mathbb{N}) (\forall n > N) q_n - p_n < \epsilon$

**Определение** Если  $\{[p_n, q_n]_{\mathbb{Q}}\}_{n=1}^\infty$  и  $\{[r_n, s_n]_{\mathbb{Q}}\}_{n=1}^\infty$  эквивалентные, если  $\{[\min(p_n, r_n), \min(q_n, s_n)]_{\mathbb{Q}}\}_{n=1}^\infty$  -

стягивающая.

**Теорема 1** Введенное отношение является отношением эквивалентности на множестве всех систем стягивающихся рациональных отрезков.

**Определение** Действительным числом называется класс эквивалентности систем стягивающихся рациональных отрезков.

**Определение** Суммой двух действительных чисел с представителями  $\{[p_n, q_n]_{\mathbb{Q}}\}_{n=1}^{\infty}$  и  $\{[r_n, s_n]_{\mathbb{Q}}\}_{n=1}^{\infty}$  называется число с представителем  $\{[p_n + r_n, q_n + s_n]_{\mathbb{Q}}\}_{n=1}^{\infty}$

**Теорема 2** Определение корректно и сложение удовлетворяет свойствам:

Ia)  $(\forall x, y \in \mathbb{R}) x + y = y + x$

Iб)  $(\forall x, y, z \in \mathbb{R}) x + (y + z) = (x + y) + z$

Iв)  $(\forall x \in \mathbb{R}) x + 0 = x$

Iг)  $(\forall x \in \mathbb{R}) x + (-x) = 0$

Если  $x$  представить  $\{[p_n, q_n]_{\mathbb{Q}}\}_{n=1}^{\infty}$

**Определение** Действительное число  $a$  называется положительным, если для некоторой представляющей его системы рациональных отрезков  $\{[p_n, q_n]_{\mathbb{Q}}\}_{n=1}^{\infty}$  для некоторых  $n \in \mathbb{N}$   $p_n > 0$

**Теорема 3**  $\mathbb{R}$  называется линейно упорядоченным множеством относительно отношения  $\leq$ .

**Лемма** Если система  $\{[p_n, q_n]_{\mathbb{Q}}\}_{n=1}^{\infty}$  представляет число  $c \in \mathbb{R}$ , то  $(\forall n \in \mathbb{N}) p_n \leq c \leq q_n$ .

**Замечание** Системы стягивающихся рациональных отрезков  $\{[p_n, q_n]_{\mathbb{Q}}\}_{n=1}^{\infty}$  и  $\{[p_n, q_n]_{\mathbb{Q}}\}_{n=m}^{\infty}$  эквивалентны  $\forall m \in \mathbb{N}$

**Определение** Произведением положительных действительных чисел  $a, b$  представляемых системами стягивающихся рациональных отрезков  $\{[p_n, q_n]_{\mathbb{Q}}\}_{n=1}^{\infty}$  и  $\{[r_n, s_n]_{\mathbb{Q}}\}_{n=1}^{\infty}$  соответственно с  $p_1 > 0, r_1 > 0$  называется действительное число, представляемое системой  $\{[p_n r_n, q_n s_n]_{\mathbb{Q}}\}_{n=1}^{\infty}$

$$1. (\forall a \in \mathbb{R}) a \times 0 = 0 \times a := 0$$

$$2. (\forall a > 0)(\forall b < 0) a \times b = b \times a := -(a \times (-b))$$

$$3. (\forall a < 0)(\forall b < 0) a \times b = b \times a := (-a) \times (-b)$$

**Теорема 4** Операция произведения действительных чисел корректна и удовлетворяет свойствам:

IIa)  $(\forall x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R}) xy = yx$

IIб)  $(\forall x, y, z \in \mathbb{R}) x(yz) = (xy)z$

IIc)  $(\forall x \in \mathbb{R}) x \times 1 = x$

**Определение** Если  $a \in \mathbb{R}, a > 0$  представляется системой  $\{[p_n, q_n]_{\mathbb{Q}}\}_{n=1}^{\infty}, p_1 > 0$ , то обратным  $\frac{1}{a}$  называется число, представимое  $\{[\frac{1}{q_n}, \frac{1}{p_n}]_{\mathbb{Q}}\}_{n=1}^{\infty}$

$$a < 0 : \quad \frac{1}{a} := -(\frac{1}{-a})$$

$$\frac{1}{p_n} - \frac{1}{q_n} = \frac{q_n - p_n}{p_n q_n} \leq \frac{q_n - p_n}{p_n^2}$$

**Теорема 5**

I-II  $(\forall x, y, z \in \mathbb{R}) x(y + z) = xy + xz$

I-III  $(\forall x, y \in \mathbb{R})(\forall z \in \mathbb{R}, z > 0)(x \leq y) \implies xz \leq yz$

IIг)  $(\forall x \in \mathbb{R}, x \neq 0) x \times \frac{1}{x} = 1$

IV  $(\forall x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R}, y \neq 0)(\exists n \in \mathbb{Z}) ny \geq x$

**Теорема 6** (Свойство полноты действительных чисел)  $(\forall A, B \subset \mathbb{R})$  таких, что  $A \cup B = \mathbb{R}, A \cap B = \emptyset, (\forall a \in A)(\forall b \in B) a < b$

$(\exists c \in \mathbb{R})$  такое, что  $(\forall a \in A)(\forall b \in B) a \leq c \leq b$

**Определение** Множество  $A$  действительных чисел называется ограниченным сверху [снизу], если

$$(\forall M \in \mathbb{R})[\exists M \in \mathbb{R}](\forall x \in A) x \leq M [x \geq m]$$

## 2.5 Комплексные числа

$$\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$

$$(a, b) + (c, d) := (a + c, b + d)$$

$$(a, b) \times (c, d) := (ac - bd, ad + bc)$$

$$(a, 0) =: a$$

$$(0, 1) =: i \text{ (мнимая единица) } i^2 = -1$$

$$(a, b) = a + bi \text{ (алгебраическая форма комплексного числа) } |z| = \sqrt{a^2 + b^2} \quad a = \operatorname{Re}(z) \quad b = \operatorname{Im}(z)$$

Неравенство треугольника:

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$$

$$|z_1 - z_2| \geq ||z_1| - |z_2||$$

**Определение** Комплексно сопряженным к  $z = c + di$  называется  $\bar{z} = c - di$

Аргумент  $z = \arg(z) = \varphi + 2k\pi$

$$a = |z|(\cos(\varphi)), \quad b = |z|(\sin(\varphi))$$

Тригонометрическая форма:

$$z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

$$w = |w|(\cos\psi + i\sin\psi)$$

$$z \times w = |z||w|(\cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi + (\cos\varphi\sin\psi + \sin\varphi\cos\psi)i = |z||w|(\cos(\varphi + \psi) + \sin(\varphi + \psi)i)$$

$$\arg(zw) = \arg(z) + \arg(w)$$

$$\cos\varphi + i\sin\varphi = \operatorname{cis}\varphi =: e^{i\varphi}$$

$z = |z|e^{i\varphi}$  - показательная форма записи (формула Эйлера)

$$\cos\varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2}$$

$$\sin\varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i}$$

$$e^{i\pi} = -1$$

$z^n = |z|^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi) = (|z|(\cos\varphi + i\sin\varphi))^n$  - формула Муавра.

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi, n \in \mathbb{Z}$$

$$z^n = w \quad w = 0 \implies z = 0$$

$$w \neq 0 \implies w = |w|(\cos\psi + i\sin\psi) \quad z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi$$

$$|z| = \sqrt[n]{|w|}$$

$$n\varphi = \psi + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\varphi = \frac{\psi}{n} + \frac{2\pi k}{n}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n-1$$

## 3 Пределы

### 3.1 Доп. свойства действительных чисел

**Теорема 1** (Плотность множества рациональных чисел в множестве действительных)

$$(\forall a, b \in \mathbb{R}; a < b)(\exists r \in \mathbb{Q}) \quad a < r < b$$

**Определение** Множества  $A$  и  $B$  называются равномошными, если существует биекция  $A$  на  $B$ .

**Определение** Множество  $A$  называется счетным, если оно равномошно  $\mathbb{N}$  или несчетным, если оно не конечное и не счетное.

**Теорема 2** (Кантор)  $\mathbb{Q}$  - счетно,  $\mathbb{R}$  - несчетно

**Определение** Если  $A$  - ограниченное сверху множество действительных чисел, то число  $b$  такое, что  $(\forall a \in A) \quad a \leq b$  называется верхней гранью множества  $A$ .

Наименьшим из множества верхних граней называется точной верхней гранью и обозначается  $\sup(a)$  - супремум. Аналогично нижняя грань  $\inf(A)$  - инфимум.

### 3.2 Предел последовательности

**Определение** Число  $l \in \mathbb{R}$  называется пределом последовательности  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$  если

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n > N) |x_n - l| < \epsilon$$

( $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  сходится к  $l$ ,  $\lim_{x \rightarrow \infty} x_n = l$ ,  $x_n \rightarrow l$   $n \rightarrow \infty$ )  
 $(\exists l \in \mathbb{R}) \lim_{x \rightarrow \infty} x_n = l \iff \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  сходится, иначе расходится

**Теорема 1** (Единственность предела) Числовая последовательность может иметь не более, чем один предел.

**Теорема 2** (Свойства предела  $a$ , связанные с неравенствами)

1. (Ограниченность последовательности) Если последовательность сходится, то она ограничена
2. (Отделимость от нуля и сохранение знака)  
 Если последовательность  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  сходится к  $l \neq 0$ , то  $(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n > N)(\text{sign}(x_n) = \text{sign}(l)) \wedge |x_n| > \frac{|l|}{2}$
3. (Переход к пределу в неравенствах)  
 Если  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y_0$  и  $(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n \geq N) x_n \leq y_n$ , то  $x_0 \leq y_0$
4. (Теорема о промежуточной последовательности)  
 Если  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{x \rightarrow \infty} z_n = l$  и  $(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n \geq N) x_n \leq y_n \leq z_n$ , то  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = l$

**Теорема 3** (Арифметические операции со сходящимися последовательностями)

Пусть  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y_0$ , тогда:

1.  $\lim_{x \rightarrow \infty} (x_n + y_n) = x_0 + y_0$
2.  $\lim_{x \rightarrow \infty} (x_n - y_n) = x_0 - y_0$
3.  $\lim_{x \rightarrow \infty} (x_n y_n) = x_0 y_0$
4. Если  $((\forall n \in \mathbb{N})(y_n \neq 0)) \wedge y_0 \neq 0$ , то  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{x_0}{y_0}$

**Определение** Последовательность  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  называется бесконечно малой, если ее  $\lim_{x \rightarrow \infty} x_n = 0$

**Теорема 4** (Произведение бесконечно малой и ограниченной последовательностей) Если  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  - бесконечно малая, а  $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$  ограниченная, то  $\{x_n y_n\}_{n=1}^{\infty}$  бесконечно малая.

**Определение**  $\epsilon$ -окрестностью числа  $l \in \mathbb{R}$  называется  $U_\epsilon(l) := (l - \epsilon, l + \epsilon)$  ( $\epsilon > 0$ )

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x_n = l \iff (\forall \epsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n > N) x_n \in U_\epsilon(l)$$

(Определение предела последовательности на языке окрестностей)

$$\mathbb{R} = (-\infty, +\infty) \quad -\infty : (\forall x \in \mathbb{R}) -\infty < x \quad +\infty : (\forall x \in \mathbb{R}) x < +\infty$$

$$\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\} = \bar{\mathbb{R}}; \quad \mathbb{R} \cup \{\infty\} = \hat{\mathbb{R}}$$

**Определение**  $\epsilon$ -окрестность: ( $\epsilon > 0$ )

1.  $-\infty : (-\infty, -\frac{1}{\epsilon})$
2.  $+\infty : (\frac{1}{\epsilon}, +\infty)$
3.  $\infty : (-\infty, -\frac{1}{\epsilon}) \cup (\frac{1}{\epsilon}, +\infty)$

**Определение** Последовательность  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  называется бесконечно большой, если  $\lim_{x \rightarrow \infty} x_n$  есть одно из  $+\infty, -\infty, \infty$

**Теорема 5** (Связь бесконечно малых и бесконечно больших последовательностей) Если  $x_n \neq 0 \forall n \in \mathbb{N}$ , то  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  - бесконечно малая  $\iff \{\frac{1}{x_n}\}_{n=1}^{\infty}$  - бесконечно большая.

**Определение** Последовательность  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  называется неубывающей ( $\forall n \in \mathbb{N}) x_n \leq x_{n+1}$ , невозрастающей ( $\forall n \in \mathbb{N}) x_{n+1} \leq x_n$ , убывающей ( $\forall n \in \mathbb{N}) x_n > x_{n+1}$ , возрастающей ( $\forall n \in \mathbb{N}) x_n < x_{n+1}$ .  
 Последовательность монотонна, если она неубывающая, невозрастающая, убывающая или возрастающая.  
 Последовательность строго монотонна, если она убывающая или возрастающая.



**Теорема 6** (Вейерштрасса о монотонных последовательностях) Если  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  ограниченная неубывающая последовательность, то  $\exists \lim_{x \rightarrow \infty} x_n = \sup\{x_n\}$ , если невозрастающая, то  $\exists \lim_{x \rightarrow \infty} x_n = \inf\{x_n\}$

**Доказательство**

$$l := \sup\{x_n\} \iff \begin{cases} (\forall n \in \mathbb{N}) x_n \leq l \\ (\forall \epsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N}) l - \epsilon < x_N \leq l \end{cases}$$

$$(\forall n > N) l \geq x_n \geq x_{n-1} \geq x_N > l - \epsilon \implies |x_n - l| < \epsilon$$

**Теорема 7** (Принцип Кантора вложенных отрезков) Каждая система вложенных отрезков имеет непустое пересечение.

**Доказательство:**  $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n] \implies ((a_n \leq a_{n+1}) \ \& \ (b_n \geq b_{n+1}))$

$$a_n \leq b_n \leq b_1 \quad \exists a = \lim_{x \rightarrow \infty} a_n = \sup\{a_n\}$$

$$a_n \leq a \quad \exists b = \lim_{x \rightarrow \infty} b_n = \inf\{b_n\} \implies b \leq b_n \implies [a, b] \subset [a_n, b_n]$$

**Определение** Стягивающейся системой отрезков называется система вложенных отрезков, длины которых образуют бесконечно малую последовательность.

**Дополнение к принципу Кантора** Система стягивающихся отрезков имеет пересечение, состоящее из одной точки.

$$a_n \leq a \leq b \leq b_n \implies 0 \leq b - a \leq b_n - a_n = 0 \ (n \rightarrow \infty)$$

**Определение** Подпоследовательностью последовательности  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  называется последовательность  $\{x_{n_k}\}_{n=1}^{\infty}$ , где  $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$  - возрастающая последовательность натуральных чисел.

**Определение** Частичным пределом последовательности  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  называется предел ее подпоследовательности.

**Теорема 8** (Эквивалентное определение частичного предела) Число  $l \in \mathbb{R}$  является частичным пределом  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \iff (\forall \epsilon > 0)(\forall N \in \mathbb{N}) |x_n - l| < \epsilon$

**Доказательство**

1)

$l$  - частичный предел  $l = \lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} \iff (\forall \epsilon > 0)(\exists K \in \mathbb{N})(\forall k > K) |x_{n_k} - l| < \epsilon$

$$(\forall N \in \mathbb{N})(\{n_k\} \nearrow) \exists K_1 \in \mathbb{N} \ n_{K_1} > N \ \forall k > \max(K, K_1) |x_{n_k} - l| < \epsilon$$

2)

$$\epsilon := 1 \quad N := 1 \quad n_1 \in \mathbb{N} \quad |x_{n_1} - l| < 1$$

$$\epsilon := \frac{1}{2} \quad N := n_1 \quad n_2 \in \mathbb{N} \quad |x_{n_2} - l| < \frac{1}{2}$$

$$\epsilon := \frac{1}{k} \quad N := n_{k-1} \quad n_k \in \mathbb{N} \quad |x_{n_k} - l| < \frac{1}{k}$$

$$0 \leq |x_{n_k} - l| < \frac{1}{k}$$

**Теорема 9** (Больцано-Вейерштрасс) Из каждой ограниченной последовательности можно выделить сходящуюся подпоследовательность.

**Доказательство**  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  - ограниченная  $\exists [a_1, b_1] \supset \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$

$[a_2, b_2]$  - та из половин  $[a_1, b_1]$ , которая содержит бесконечно много элементов последовательности  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ . Продолжая, получим последовательность вложенных отрезков  $\{[a_n, b_n]\}_{n=1}^{\infty}$ , так как  $b_n - a_n = \frac{b_1 - a_1}{2^{n-1}}$ . Следовательно,  $\{[a_n, b_n]\}_{n=1}^{\infty}$  - стягивающаяся,  $\{C\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n]$ . Докажем, что  $C$  - частичный предел

$$x_{n_1} := x_1; x_{n_2} \in [a_2, b_2], x_{n_k} \in [a_k, b_k]; 0 \leq |C - x_{n_k}| \leq \frac{b_1 - a_1}{2^{k-1}}$$

**Дополнение**  $\forall \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \exists \{x_{n_k}\}_{n=1}^{\infty} \lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = l \in \mathbb{R}$

**Доказательство** Предположим  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  неограниченная сверху.

$$n_1 : x_{n_1} > 1$$

$$n_2 > n_1 : x_{n_2} > 2$$

$$n_k > n_{k-1} : x_{n_k} > k$$

$$x_{n_k} > k \iff - < \frac{1}{x_{n_k}} < \frac{1}{k} \quad \lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = +\infty$$

**Определение** Верхним пределом последовательности  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$  называется наибольший из ее частичных пределов ( $\lim_{x \rightarrow \infty} x_n$  с чертой сверху) Нижним пределом называется наименьший из ее частичных пределов ( $\lim_{x \rightarrow \infty} x_n$  с чертой снизу).

**Теорема 10** (Три определения верхнего и нижнего пределов) Для любой ограниченной последовательности  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  существуют ее верхний и нижний предел ( $L$  и  $l$ ). Для них справедливы следующие утверждения:

1.  $(\forall \epsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n > N) x_n < L + \epsilon \wedge (\forall \epsilon > 0)(\forall N \in \mathbb{N})(\exists n > N) x_n > L - \epsilon$   
 $(\forall \epsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n > N) x_n > l - \epsilon \wedge (\forall \epsilon > 0)(\forall N \in \mathbb{N})(\exists n > N) x_n < l + \epsilon$
2.  $L = \lim_{x \rightarrow \infty} \sup\{x_n, x_{n+1}, \dots\}; l = \lim_{x \rightarrow \infty} \inf(\{x_n, x_{n+1}, \dots\})$   
 $\limsup_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{x \rightarrow \infty} x_n$  (с чертой)  $\liminf_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{x \rightarrow \infty} x_n$  (Подчеркнуто)

**Доказательство**  $s_n = \sup\{x_n, x_{n+1}, \dots\} \geq s_{n+1} = \sup\{x_{n+1}, x_{n+2}, \dots\}$

$\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$  - невозрастающая последовательность  $m \leq x_n \leq M \implies m \leq s_n \leq M$

$L = \lim_{x \rightarrow \infty} s_n \implies (\forall \epsilon > 0)(\exists N_1 \in \mathbb{N})(\forall n > N_1) |L - s_n| < \epsilon \implies s_n < L + \epsilon \implies x_n < L + \epsilon$

$s_{N_2+1} = \sup\{x_{N_2+1}, x_{N_2+2}, \dots\} \quad s_{N_2+1} > L - \epsilon \quad (\exists n > N_2) x_n > L - \epsilon$

$(\forall N \in \mathbb{N}) N_2 > \max(N_1, N)$

1)  $\implies L = \liminf_{n \rightarrow \infty} x_n$   $L$  - частичный предел  $\implies (\forall \epsilon > 0)(\forall N \in \mathbb{N})(\exists n > N) |x_n - L| < \epsilon \iff L - \epsilon < x_n < L + \epsilon$

1)  $\implies (\forall \epsilon > 0)(\exists N_1 \in \mathbb{N})(\forall n > N_1) x_n < L + \epsilon \quad n > \max(N_1, N)$

Пусть  $s$  - частичный предел  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \implies \{x_{n_i}\}_{n_i=1}^{\infty} \lim_{n_i \rightarrow \infty} x_{n_i} = s \iff (\forall \epsilon > 0)(\exists I \in \mathbb{N})(\forall i < I) |x_{n_i} - s| < \epsilon$   
 $\forall i > \max(I, I_1) I_1 n_{i_1} > N \quad s - \epsilon < x_{n_i} < L + \epsilon \implies s - \epsilon < L + \epsilon \implies s < L + 2\epsilon \implies s \leq L$

**Определение** Последовательность  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  называется фундаментальной (или последовательностью Коши), если  $(\forall \epsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n > N)(\forall p \in \mathbb{N}) |x_{n+p} - x_n| < \epsilon \iff (\forall m, n > N) |x_m - x_n| < \epsilon$

**Теорема 11** (Критерий Коши) Последовательность  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  сходится  $\iff \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  фундаментальна.

**Доказательство** 1) Сходимость  $\implies$  фундаментальность

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x_n = l \implies (\forall \epsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n > N) |x_n - l| < \frac{\epsilon}{2}$$

$$(\forall p \in \mathbb{N}) n + p > N \implies |x_{n+p} - l| < \frac{\epsilon}{2}$$

$$|x_{n+p} - x_n| = |x_{n+p} - l + l - x_n| \implies |x_{n+p} - l| + |l - x_n| < \epsilon$$

2) Фундаментальность  $\implies$  ограниченность

$$\epsilon := 1 \quad n := N + 1 \quad (\forall p \in \mathbb{N}) |x_{N+1+p} - x_{N+1}| < 1 \implies x_{N+1} - 1 < x_{N+1+p} < x_{N+1} + 1$$

$$\min(x_1, x_{N+1} - 1 < x_n < \max(x_1, x_{N+1} + 1) \quad (\forall n \in \mathbb{N})$$

3) Фундаментальность  $\implies$  сходимость  $\implies$  (Б. В.)  $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}, \lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = l \iff (\forall \epsilon > 0)(\exists K \in \mathbb{N})(\forall k > K) |x_{n_k} - l| < \epsilon$

если фундаментальная последовательность имеет сходящуюся подпоследовательность, то она сходится.

$$N_1 := \max(N, n_{K+1}) \quad n_K := n_K > \max(N, n) = n + p \quad (\forall n < N_1) |x_n - l| \leq |x_n - x_{n_k} + x_{n_k} - l| < \epsilon$$

**Теорема 12** (Число  $e$ ) Последовательность  $\{x_n = (1 + \frac{1}{n})^n\}_{n=1}^{\infty}$  сходится. Ее предел называется числом  $e$

**Доказательство** Рассмотрим  $y_n := (1 + \frac{1}{n})^{n+1}$ . Доказать, что  $y_0$  убывает

$$\frac{y_{n-1}}{y_n} = \frac{(1 + \frac{1}{n-1})^n}{(1 + \frac{1}{n})^{n+1}} = (\frac{n-1}{n})^n \times \frac{1}{1 + \frac{1}{n}} = (\frac{n^2}{n^2-1})^n \frac{1}{1 + \frac{1}{n}} = (1 + \frac{1}{n^2-1})^n \frac{n}{n+1} \geq (1 + \frac{n}{n^2+1}) \frac{n}{n+1} = \frac{(n^2+n-1)n}{(n^2-1)(n+1)} = \frac{n^2+n-1}{n^2-1} > 1$$

$$x_n = \frac{y_n}{1 + \frac{1}{n}} \xrightarrow{(n \rightarrow \infty)} e$$

**Дополнение**  $e > 2$

$$x_n \nearrow \frac{x_n + 1}{x_n} = \frac{(1 + \frac{1}{n+1})^{n+1}}{(1 + \frac{1}{n})^n} = (1 - \frac{1}{(n+1)^2})^n \frac{n+2}{n+1} \geq (1 - \frac{n}{(n+1)^2}) \frac{n+2}{n+1} = \frac{n^3 + 3n^2 + 3n + 2}{n^2 + 3n^2 + 3n + 1} > 1$$

$$2 = x_1 < x_n < y_n \quad e = 2,718281828\dots$$

**Пример 2**  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$

$$\sqrt[n]{n} > 1 \quad \sqrt[n]{n} =: 1 + \alpha_n, \quad \alpha_n > 0$$

$$n = (1 + \alpha_n)^n \geq 1 + n\alpha_n + \frac{n(n-1)}{2}\alpha_n^2 > 1$$

$$\frac{1}{n-1} \geq \frac{1}{n(n-1)} + \frac{\alpha_n}{n-1} + \frac{\alpha_n}{2} > \frac{1}{n(n-1)} \implies \alpha_n^2 \rightarrow 0 \implies \alpha_n \rightarrow 0$$

### 3.3 Предел функции

**Определение** Проколотой  $\delta$ -окрестностью точки  $a \in \mathbb{R}$  называется множество

$$U_\delta^o(a) = (a - \delta, a) \cup (a, a + \delta)$$

$$U_\delta^o((\pm)\infty) = U_\delta((\pm)\infty)$$

**Определение** (Коши)  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A \iff (\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in U_\delta^o(a)) f(x) \in U_\epsilon^o(A)$

**Определение** (Гейне)  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A \iff (\forall \{x_n\} \subset X \setminus \{a\}, \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a) \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A$

**Теорема 1** Определение предела функции по Коши и по Гейне эквивалентны.

**Доказательство**

1)  $K \implies G$

$$(\forall x_n \in X \setminus a, \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a) \iff (\forall \epsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n > N) x_n \in U_\epsilon^o(a) \implies \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A$$

2)  $G \implies K$  (от противного)

$$(\forall \epsilon > 0)(\forall \delta > 0)(\exists x \in U_\delta^o(a)) f(x) \notin U_\epsilon^o(A)$$

$$1. \delta := 1 \quad x_1 \in U_1^o(a) \quad f(x_1) \notin U_{\epsilon_0}(A)$$

$$2. \delta := 1/2 \quad x_2 \in U_{1/2}^o(a) \quad f(x_2) \notin U_{\epsilon_0}(A)$$

3. ...

$$4. \delta := 1/n \quad x_n \in U_{1/n}^o(a) \quad f(x_n) \notin U_{\epsilon_0}(A)$$

$$\{x_n\}_{n=1}^\infty \quad (\forall \epsilon > 0)(\exists N = [\frac{1}{\epsilon}] + 1)(\forall n > N) x_n \in U_\epsilon(a) \implies \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A$$

$a, A \in \mathbb{R}$

Коши:  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A \iff (\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x : 0 < |x - a| < \delta) |f(x) - A| < \epsilon$

**Пример 1**

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1} (x+1) = 2$$

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x : 0 < |x - 1| < \delta) \left| \frac{x^2 - 1}{x - 1} - 2 \right| < \epsilon$$

$$\delta = \epsilon \quad 0 < |x - 1| < \epsilon \implies \frac{x^2 - 1 - 2x + 2}{x - 1} = \frac{(x-1)^2}{(x-1)} = (x-1)$$

**Пример 2** (Функция Дирихле)

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) \neg \exists (\forall a \in \mathbb{R})$$

1)  $a \in \mathbb{Q}$

$$1. x'_n = a - \frac{1}{n} \in \mathbb{Q} \quad f(x'_n) = 1 \rightarrow_{n \rightarrow \infty} 1$$

$$2. x''_n = a - \frac{\sqrt{2}}{n} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \quad f(x''_n) = 0 \rightarrow_{n \rightarrow \infty} 0$$

2)  $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

1.  $x'_n = a - \frac{1}{n} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \quad f(x'_n) = 0 \rightarrow_{n \rightarrow \infty} 0$
2.  $x''_n = (a)_n \in \mathbb{Q} \quad f(x''_n) = 1 \rightarrow_{n \rightarrow \infty} 1$

**Теорема 2** (Свойства предела функции, связанные с неравенствами)

1. (Ограниченность) Если  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A \in \mathbb{R}$ , то  $f(x)$  ограничена в ... проколотовой окрестности точки  $a$ , т. е. множество значений функции  $f(x)$  ограничено.
2. (Отделимость от нуля и сохранение знака) Если  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A \in \bar{\mathbb{R}}$ , то  $(\exists C > 0)$  такое, что в
3. О трех функциях. Если  $(\exists \delta > 0)(\forall x \in U_\delta^o(a)) f(x) \leq g(x) \leq h(x)$  и  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} h(x) = A \in \mathbb{R} \implies \lim_{x \rightarrow a} g(x) = A$

**Доказательство**

1.

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in U_\delta^o(a)) |f(x) - A| < \epsilon$$

$$\epsilon := 1 \quad (\exists \delta > 0)(\forall x \in U_\delta^o(a)) A - 1 < f(x) < A + 1$$

2.

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in U_\delta^o(a)) f(x) \in U_\epsilon(A)$$

$$A = \pm\infty \quad \epsilon := 1 \quad f(x) \in U_1(\pm\infty) \quad \text{sign} f(x) = \pm 1 \quad |f(x)| > 1$$

$$A \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \quad \epsilon := \frac{|A|}{2} > 0 \quad f(x) \in U_{\frac{|A|}{2}}(A) \iff |f(x) - A| < \frac{|A|}{2}$$

**Теорема 3** (Свойства предела функции, связанные с арифметическими операциями)

Пусть  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ ,  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = B$ ,  $A, B \in \mathbb{R}$ , тогда

1.  $\lim_{x \rightarrow a} (f \pm g)(x) = A \pm B$
2.  $\lim_{x \rightarrow a} (f \times g)(x) = A \times B$
3. Если  $B \neq 0$ , то  $\lim_{x \rightarrow a} (\frac{f}{g})(x) = \frac{A}{B}$

**Доказательство 3)**

$$B \neq 0 \implies \text{Th2(2)} (\exists \delta > 0)(\forall x \in U_\delta^o(a)) g(x) \neq 0$$

$$(\forall \{x_n\}_{n=1}^\infty x_n \neq 0, \lim_{x \rightarrow \infty} x_n = a$$

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow \infty} f(x_n) = A \\ \lim_{x \rightarrow \infty} g(x_n) = B \end{cases} \implies \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x_n)}{g(x_n)} = \frac{A}{B}$$

**Теорема 4** (Критерий Коши, существование предела функции)

$$\exists \lim_{x \rightarrow a} f(x) \in \mathbb{R} \iff (\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x_1, x_2 \in U_\delta^o(a)) |f(x_1) - f(x_2)| < \epsilon$$

**Доказательство**

Необходимость

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A \in \mathbb{R} \iff (\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in U_\delta^o(a)) |f(x) - A| < \frac{\epsilon}{2}$$

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq |f(x_1) - A| + |A - f(x_2)| < \epsilon$$

Достаточность

$$(\forall \{x_n\}_{n=1}^\infty x_n \in X \setminus \{a\}, \lim_{x \rightarrow \infty} x_n = a) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x_n) = A \in \mathbb{R}$$

$$(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n > N) x_n \in U_\delta^o(a) \quad (\forall p \in \mathbb{N}) |f(x_{n+p}) - f(x_n)| < \epsilon \implies \{f(x_n)\}_{n=1}^\infty \text{ фундаментальна} \implies \exists \lim_{x \rightarrow \infty} f(x_n) = A$$

### 3.4 Сравнение функций

**Определение.** Пусть  $f(x) = \lambda(x)g(x)$  в проколотой окрестности точки  $a$

1. Если  $\lambda(x)$  ограничена в некоторой проколотой окрестности, то  $f(x) = O(g(x))$ ,  $x \rightarrow a$
2. Если  $\lim_{x \rightarrow a} \lambda(x) = 0$ , то  $f(x) = o(g(x))$ ,  $x \rightarrow a$
3. Если  $\lim_{x \rightarrow a} \lambda(x) = 1$ , то  $f(x) \sim g(x)$ ,  $x \rightarrow a$

**Теорема 1.** Если  $g(x) \neq 0$  в некоторой проколотой окрестности точки  $a$ , то

1.  $\frac{f(x)}{g(x)}$  ограничена в некоторой проколотой окрестности точки  $a \implies f(x) = O(g(x))$ ,  $x \rightarrow a$
2.  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0 \implies f(x) = o(g(x))$ ,  $x \rightarrow a$
3.  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1 \implies f(x) \sim o(g(x))$ ,  $x \rightarrow a$

**Пример**

$$\sin x \sin \frac{1}{x} = \sin \frac{1}{x} = O(\sin \frac{1}{x}), x \rightarrow 0$$

$$x \sin \frac{1}{x} = o(\sin \frac{1}{x}), x \rightarrow 0$$

$$\sin x \sin \frac{1}{x} \sim x \sin \frac{1}{x}, x \rightarrow 0$$

**Теорема 2.**  $f(x) \sim g(x)$ ,  $x \rightarrow a \iff f(x) - g(x) = o(g(x))$ ,  $x \rightarrow a$

**Доказательство.**

$$f(x) \sim g(x), x \rightarrow a \implies f(x) = \lambda(x)g(x), \lim_{x \rightarrow a} \lambda(x) = 1 \implies f(x) - g(x) = (\lambda(x) - 1)g(x), \lim_{x \rightarrow a} (\lambda(x) - 1) = 0 \implies f(x) - g(x) = o(g(x))$$

**Теорема 3.** (Использование эквивалентных при вычислении пределов)

Если  $f_1(x) \sim f_2(x)$ ,  $x \rightarrow a$ , то  $\lim_{x \rightarrow a} f_1(x)g(x) = \lim_{x \rightarrow a} f_2(x)g(x)$  и  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x)}{f_1(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x)}{f_2(x)}$  при условии, что хотя бы один из пределов в каждом равенстве существует.

## 4 Дифференциальное исчисление функций одной переменной

### 4.1 Определение производной

**Определение.** Пусть  $y = f(x)$  определена в некоторой окрестности точки  $a \in \mathbb{R}$ . Приращением  $\Delta y$  этой функции в точке  $a$ , соответствующим приращению аргумента  $\Delta x$ , называется  $\Delta y = f(a + \Delta x) - f(a)$ . Производной функции  $y = f(x)$  в точке  $a$  называется предел (если он существует и конечен)  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} =: f'(a)$

**Теорема 1.** Если функция имеет производную в точке  $a$ , то она непрерывна в  $a$ .

**Доказательство:**

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(x) + \alpha(x), \lim_{x \rightarrow a} \alpha(x) = 0 \implies f(x) - f(a) = f'(a)(x - a) + \alpha(x)(x - a)$$

**Теорема 2.** (Арифметические операции и производная)

Если  $\exists f'(a)$  и  $g'(a)$ , то

$$(f \pm g)'(a) = f'(a) \pm g'(a) \quad (1)$$

$$(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a) \quad (2)$$

$$\text{Если } g(a) \neq 0, \text{ то } \left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g^2(a)} \quad (3)$$

**Доказательство**

1.

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}, g'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x) - g(a)}{x - a}$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{(f(x) \pm g(x)) - (f(a) \pm g(a))}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \pm \lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x) - g(a)}{x - a}$$

2.

$$\frac{(fg)(x) - (fg)(a)}{x - a} = \frac{f(a)g(x) - f(a)g(a)}{x - a} + \frac{f(a)g(x) - f(a)g(a)}{x - a} = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}g(a) + f(a)\frac{g(x) - g(a)}{x - a}$$

$$f'(a)g(a) + f(a)g'(a) \text{ при } x \rightarrow a$$

3.

$$\frac{\frac{f}{g}(x) - \frac{f}{g}(a)}{x - a} = \frac{f(x)g(a) - f(a)g(x)}{g(x)g(a)(x - a)} = \frac{f(x)g(a) - f(a)g(a)}{g(x)g(a)(x - a)} + \frac{f(a)g(a) - f(a)g(x)}{g(x)g(a)(x - a)}$$

$$\frac{g(a)f'(a)}{g^2(a)} - \frac{f(a)g'(a)}{g^2(a)} \text{ при } x \rightarrow a$$

### Теорема 3 (Произведение элементарных функций)

Для всех  $a$  из области определения соответствующих функций справедливы равенства:

1.  $(\sin x)'|_{x=a} = \cos a$
2.  $(\cos x)'|_{x=a} = -\sin a$
3.  $(\operatorname{tg} x)'|_{x=a} = \frac{1}{\cos^2(a)} = \sec^2 a$
4.  $(\operatorname{ctg} x)'|_{x=a} = -\frac{1}{\sin^2(a)} = -\operatorname{cosec}^2 a$
5.  $(x^b)'|_{x=a} = ba^{b-1} \quad (a > 0 \text{ для } b \notin \mathbb{Z}, a \neq 0 \text{ для } b \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N})$
6.  $(b^x)'|_{x=a} = b^a \ln b$
7.  $(\operatorname{sh} x)'|_{x=a} = \operatorname{ch} a$
8.  $(\operatorname{ch} x)'|_{x=a} = \operatorname{sh} a$
9.  $(\operatorname{th} x)'|_{x=a} = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 a}$
10.  $(\operatorname{ch} x)'|_{x=a} = -\frac{1}{\operatorname{th}^2 a}$

### Доказательство.

1)

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin x - \sin a}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{2 \sin \frac{x-a}{2} \cos \frac{x+a}{2}}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \cos \frac{x+a}{2} = \cos a$$

2)

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\cos x - \cos a}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{-2 \sin \frac{x-a}{2} \sin \frac{x+a}{2}}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} (-\sin \frac{x+a}{2}) = -\sin a$$

5)

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^b - a^b}{x - a} = a^b \lim_{x \rightarrow a} \frac{(\frac{x}{a})^b - a}{x - a} = a^b \lim_{x \rightarrow a} \frac{e^{b \ln \frac{x}{a}} - 1}{x - a} = a^b \lim_{x \rightarrow a} \frac{b \ln \frac{x}{a}}{x - a} = a^b b \lim_{x \rightarrow a} \frac{\ln(a + \frac{x-a}{a})}{x - a} = a^b b \lim_{x \rightarrow a} \frac{x - a}{a(x - a)} = ba^{b-1}$$

6)

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{b^x - b^a}{x - a} = b^a \lim_{x \rightarrow a} \frac{b^{x-a} - 1}{x - a} = b^a \ln b$$

7)

$$(\operatorname{sh} x)' = (\frac{e^x - e^{-x}}{2})' = \frac{1}{2}(e^x - (\frac{1}{e^x})') = \frac{1}{2}(e^x - \frac{-e^x}{e^{2x}}) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \operatorname{ch} x$$

10)

$$(\operatorname{cth} x)' = (\frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x})' = \frac{(\operatorname{ch} x)' \operatorname{sh} x - \operatorname{ch} x (\operatorname{sh} x)'}{\operatorname{sh}^2 x} = \frac{\operatorname{sh}^2 x - \operatorname{ch}^2 x}{\operatorname{sh}^2 x} = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$$

### Теорема 4. (Производная обратной функции)

Если  $f(x)$  непрерывна и строго монотонна на  $U_\delta(a)$  и  $\exists f'(a) \neq 0$ , то обратная функция  $f^{-1}$  имеет производную в точке  $f(a)$ , равную  $\frac{1}{f'(a)}$  ( $= (f^{-1})'(f(a))$ )

**Доказательство.** Обратная функция определена, непрерывна на интервале  $f(U_\delta(a))$  и строго монотонна,  $\Phi = f^{-1}$ , рассмотрим  $[a - \delta, a + \delta]$ . Для определенности,  $f \nearrow$ . Тогда  $\Phi$  определена на  $[f(a - \delta), f(a + \delta)] \rightarrow y$

$$\lim_{\Delta y \rightarrow \delta} \frac{\Phi(f(a) + \Delta y) - \Phi(f(a))}{\Delta y} = \frac{1}{\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}} = \frac{1}{f'(a)}$$