Формулы Маклорена и Тейлора

Формула Тейлора:

при $x \to x_0$

$$f(x) = f(x_0)(x-x_0)^0 + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots + O(x^n) =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + O(x^n)$$

Формула Маклорена – частный случай при $x_0 = 0$.

<u>Примеры:</u>

1) $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{4!} + O(x^4). = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + O(x^n)$

2) $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + O(x^6) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \cdot (-1)^k + O(x^{2n+2})$

3) $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + O(x^5) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k}}{(2k)!} \cdot (-1)^k + O(x^{2n+1})$

4) $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + O(x^3) =$

$$= \sum_{k=0}^{n} C_\alpha^k x^k + O(x^n).$$

5) $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + O(x^3) = \sum_{k=0}^{n} x^k + O(x^n).$

Вывод: $1 + x + x^2 + x^3 + \cancel{O(x^3)} + \dots + O(x^n) =$

по формуле геометр. прогрессии

$$= \frac{1-x^n}{1-x} = \frac{1}{1-x} - \frac{x^n}{1-x} = \frac{1}{1-x} + O(x^n).$$

$\frac{x^n}{1-x} \approx O(x^n).$

6) $\operatorname{tg} x = x + \frac{x^3}{6} + \frac{2x^5}{15} + O(x^6)$

Вывод:

$$\operatorname{tg}' x = \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{1}{\left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + O(x^5)\right)} = \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + O(x^5)\right)^{-2} =$$

$$= 1 + x^2 + \frac{2}{3}x^4 + O(x^5).$$

Проинтегрируем: $\operatorname{tg} x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + O(x^6).$

7) $\arcsin x = x + \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40} + O(x^6) = x + \frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3} + \frac{1\cdot 3}{2^2\cdot 2!}\cdot\frac{x^5}{5} + \frac{1\cdot 3\cdot 7}{2^3\cdot 3!}\cdot\frac{x^7}{7} + O(x^8)$

8) $\arccos x = \frac{\pi}{2} - \arcsin x.$

9) $\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + O(x^6) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k+1}}{2k+1}\cdot(-1)^k + O(x^{2n+2})$

10) $\operatorname{sh} x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + O(x^6) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + O(x^{2n+2})$

11) $\operatorname{ch} x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + O(x^5) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k}}{2k!} + O(x^{2n+1})$