

Математический анализ

Виталий Сергеевич Ерошин

Сентябрь 2021

Содержание

1	Предварительные сведения.	3
1.1	Математическая логика.	3
1.2	"Наивная"теория множеств	3
1.2.1	Свойства	3
1.3	Отображения	3
1.4	Отношения	3
2	О числах	4
2.1	Натуральные числа	4
2.1.1	Аксиомы (Пeano):	4
2.1.2	Модель Фреге-Рассела	4
2.2	Целые числа	5
2.3	Рациональные числа	5
2.4	Действительные числа	5
2.5	Комплексные числа	7
3	Пределы	7
3.1	Доп. свойства действительных чисел	7
3.2	Предел последовательности	8

1 Предварительные сведения.

1.1 Математическая логика.

A, B, \dots - высказывания

$\neg A$ - отрицание

$A \wedge B$ - конъюнкция (логическое и)

$A \vee B$ - дизъюнкция (логическое или)

$A \implies B$ - импликация (A - необходимое условие, B - достаточное условие)

$A \iff B$ - эквивалентность (тогда и только тогда)

$A(x, y)$ - предикат (высказывание, зависящее от переменных)

\forall - квантор общности (для любого...)

\exists - квантор существования (найдется, существует)

$\exists!$ - существует при том единственное

1.2 "Наивная" теория множеств

A, B, \dots - множества

$a \in A$ - элемент a принадлежит множеству A . $(\neg(a \in A)) \iff (a \notin A)$

$A \cup B = \{x : (x \in A) \vee (x \in B)\}$ - объединение множеств

$A \cap B = \{x : (x \in A) \wedge (x \in B)\}$ - пересечение множеств

$B \setminus A = C_B A = \{x : (x \in B) \vee (x \notin A)\}$ - разность множеств

$A \delta B = (B \setminus A) \cup (A \setminus B)$ - симметрическая разность

1.2.1 Свойства

1. Коммутативность $A \cup B = B \cup A$ $A \cap B = B \cap A$
2. Ассоциативность $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
3. Дистрибутивность $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
4. Идемпотентность $A \cup A = A$ $A \cap A = A$
5. Универсальное множество $U : U \cap A = A; U \cup A = U; A \subset U; C_U A = A^C$
6. Двойственность (де Моргана) $(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$ $(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$

1.3 Отображения

Отображение из X в Y :

$$(f : X \rightarrow Y) \iff ((\forall x \text{ in } X)(\exists! y \in Y)y = f(x))$$

x - область отображения f

$f(x)$ - область значений f

$f(x) = \{y \in Y(\exists x \in X)f(x) = y\}$

f инъективное (инъекция, взаимная однозначность)

$$(f(x_1) = f(x_2)) \iff (x_1 = x_2)$$

f сюръективное (сюръекция, отображение на)

$$f(X) = Y \iff (\forall y \in Y)(\exists x \text{ in } X : f(x) = y)$$

f биективное (биекция), если f инъективное и сюръективное.

$f^{-1}(y) = \{x \in X : f(x) = y\}$ - прообраз

1.4 Отношения

Опр. Бинарное отношение \mathcal{R} - это подмножество $X \times X = X^2 = \{(x, y) : (x \in X) \wedge (y \in X)\}$ (декартов квадрат)

$$((x, y) \in \mathcal{R}) \iff x\mathcal{R}y$$

Опр. Отношение порядка на X - это бинарное отношение \mathcal{R} , удовлетворяющее следующим свойствам:

1) рефлексивность:

$$(\forall x \in X) x\mathcal{R}x$$

2) антисимметричность:

$$(\forall x, y \in X)(x\mathcal{R}y) \wedge (y\mathcal{R}x) \implies x = y$$

3) транзитивность:

$$(\forall x, y, z \in X)((x\mathcal{R}y) \wedge (y\mathcal{R}z)) \implies (x\mathcal{R}y)$$

Пример 1. $A \subset B$ (частично упорядоченное)

Пример 2. $x \leq y$

Пример 3. $X \in \mathbb{R}$

Пример 4. $(\forall x, y \in X)(x\mathcal{R}y) \vee (y\mathcal{R}x)$ (Линейно упорядоченное)

Определение. Отношение эквивалентности на X - это бинарное отношение \mathcal{R} , удовлетворяющее следующим свойствам:

1) рефлексивность (см. выше)

2) симметричность $(\forall x, y \in X)(x\mathcal{R}y) \implies (y\mathcal{R}x)$

3) транзитивность

Теорема. Если на X задано отношение эквивалентности \mathcal{R} , то X может быть разбито на классы эквивалентности, то есть непересекающиеся множества, каждое из которых состоит из взаимноэквивалентных элементов:

$$X = \cup_{\alpha \in A} X_{\alpha} : \alpha_1 \neq \alpha_2 \implies X_{\alpha_1} \cap X_{\alpha_2} = \emptyset$$

$$(\forall \alpha \in A)(x_1, x_2 \in X_{\alpha}) x_1 \mathcal{R} x_2$$

$$(\forall \alpha \neq \beta)(\forall x_1 \in X_{\alpha})(\forall x_2 \in X_{\beta}) \neg x_1 \mathcal{R} x_2$$

2 О числах

2.1 Натуральные числа

2.1.1 Аксиомы (Пeano):

I. 1 есть натуральное число

II. $(\forall n \in \mathbb{N})(\exists Sc(n) \in \mathbb{N})$

III. $(\forall n \in \mathbb{N})(1 \neq Sc(n))$

IV. $(Sc(n) = Sc(m)) \implies (n = m)$

V. (аксиома индукции)

$$(\forall \mathfrak{M} \subset \mathbb{N})((1 \in \mathfrak{M}) \wedge (n \in \mathfrak{M}) \implies Sc(n) \in \mathfrak{M}) \implies \mathfrak{M} = \mathbb{N}$$

2.1.2 Модель Фреге-Рассела

$$\{\emptyset\} = 1$$

$$Sc(n) := n \cup \{n\}$$

$$2 = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$$

$$3 = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$$

...

Определение. $m + n$

$$m + 1 := Sc(m)$$

$$m + Sc(n) := Sc(m + n)$$

Определение. $m \cdot n$

$$m \cdot 1 := m$$

$$m \cdot Sc(n) = m \cdot n + m$$

Определение.

$$m \leq n \iff (m = n) \vee ((\exists p \in \mathbb{N})(n = m + p))$$

Теорема.

Ia. (Коммутативность сложения)

$$m + n = n + m$$

Иб. (Ассоциативность сложения)

$$(m + n) + p = m + (n + p)$$

Па. (Коммутативность умножения)

$$m \cdot n = n \cdot m$$

Пб. (Ассоциативность умножения)

$$(m \cdot n) \cdot p = m \cdot (n \cdot p)$$

Пв. (Единица)

$$1 \cdot n = n$$

I-II. (Дистрибутивность)

$$m \cdot (n + p) = m \cdot n + m \cdot p$$

IIIa. $m \leq m$

IIIб. $(m \leq n) \wedge (n \leq m) \implies (m = n)$

IIIв. $(m \leq n) \wedge (n \leq p) \implies (m \leq p)$

IIIг. $(m \leq n) \vee (n \leq m)$

I-III. $(m \leq n) \implies (m + p) \leq (n + p)$

II-III. $(m \leq n) \implies m \cdot p \leq n \cdot p$

IV. (Свойство Архимеда)

$$m \leq p \implies (\exists n) m \cdot n \geq p$$

2.2 Целые числа

$$\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup \{0\} \cup \{-n : n \in \mathbb{N}\}$$

$$(m, n \in \mathbb{N}) m + (-n) := (p \in \mathbb{N}, n + p = m, m > n), (0, m = n), (-p, p \in \mathbb{N}, m + p = n, n > m)$$

Теорема.

I-IV (II-IV с $p \in \mathbb{N}$)

Ив. (Нуль) $0 + n = n$

Иг. (Противоположный элемент) $\exists(-m) \in \mathbb{Z}) m + (-m) = 0$

2.3 Рациональные числа

$$\mathbb{N}^2(m, n) \mathcal{R}(p, q) \iff m \cdot q = n \cdot p$$

1) $(m, n) \mathcal{R}(m, n) m \cdot n = n \cdot m$

2) $(m, n) \mathcal{R}(p, q) \implies (p, q) \mathcal{R}(m, n); m \cdot q = n \cdot p; p \cdot n = q \cdot m$

3) $(m, n) \mathcal{R}(p, q) \wedge (p, q) \mathcal{R}(r, s) \implies (m, n) \mathcal{R}(r, s)$

\mathbb{Q}_+ - множество классов эквивалентности дробей (\mathbb{N}^2) по \mathcal{R} . (Положительные рациональные числа)

$$\mathbb{Q} := \mathbb{Q}_+ \cup \{\emptyset\} \cup \{-r : r \in \mathbb{Q}_+\}$$

Теорема I-IV (II-III с $p > 0$, IV с $m \neq 0$)

IIг. (Обратный элемент)

$$(\forall r \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}) (\exists r^{-1} \in \mathbb{Q}) r \times r^{-1} = r^{-1} \times r = 1$$

Теорема 2 Каждое положительное рациональное число представимо бесконечной периодической десятичной дробью, и наоборот, каждая бесконечная периодическая десятичная дробь представима в виде положительного рационального числа.

2.4 Действительные числа

Определение Последовательностью рациональных чисел называется отображение из \mathbb{N} в \mathbb{Q} $\{r_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathbb{Q}$

Определение Рациональным отрезком называется $\{r \in \mathbb{Q} : p \leq r \leq q\} = [p, q]_{\mathbb{Q}}$ $p, q \in \mathbb{Q}$

Определение Система $\{[p_n, q_n]\}_{n=1}^\infty$ называется системой вложенных рациональных отрезков если $(\forall n \in \mathbb{N}) [p_{n+1}, q_{n+1}]_{\mathbb{Q}} \subset [p_n, q_n]_{\mathbb{Q}}$

Определение Система вложенных рациональных отрезков называется стягивающей, если $(\forall \epsilon \in \mathbb{Q}_+) (\exists N \in \mathbb{N}) (\forall n > N) q_n - p_n < \epsilon$

Определение Если $\{[p_n, q_n]_{\mathbb{Q}}\}_{n=1}^\infty$ и $\{[r_n, s_n]_{\mathbb{Q}}\}_{n=1}^\infty$ эквивалентные, если $\{[\min(p_n, r_n), \min(q_n, s_n)]_{\mathbb{Q}}\}_{n=1}^\infty$ -

стягивающая.

Теорема 1 Введенное отношение является отношением эквивалентности на множестве всех систем стягивающихся рациональных отрезков.

Определение Действительным числом называется класс эквивалентности систем стягивающихся рациональных отрезков.

Определение Суммой двух действительных чисел с представителями $\{[p_n, q_n]_{\mathbb{Q}}\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{[r_n, s_n]_{\mathbb{Q}}\}_{n=1}^{\infty}$ называется число с представителем $\{[p_n + r_n, q_n + s_n]_{\mathbb{Q}}\}_{n=1}^{\infty}$

Теорема 2 Определение корректно и сложение удовлетворяет свойствам:

Ia) $(\forall x, y \in \mathbb{R}) x + y = y + x$

Iб) $(\forall x, y, z \in \mathbb{R}) x + (y + z) = (x + y) + z$

Iв) $(\forall x \in \mathbb{R}) x + 0 = x$

Iг) $(\forall x \in \mathbb{R}) x + (-x) = 0$

Если x представить $\{[p_n, q_n]_{\mathbb{Q}}\}_{n=1}^{\infty}$

Определение Действительное число a называется положительным, если для некоторой представляющей его системы рациональных отрезков $\{[p_n, q_n]_{\mathbb{Q}}\}_{n=1}^{\infty}$ для некоторых $n \in \mathbb{N}$ $p_n > 0$

Теорема 3 \mathbb{R} называется линейно упорядоченным множеством относительно отношения \leq .

Лемма Если система $\{[p_n, q_n]_{\mathbb{Q}}\}_{n=1}^{\infty}$ представляет число $c \in \mathbb{R}$, то $(\forall n \in \mathbb{N}) p_n \leq c \leq q_n$.

Замечание Системы стягивающихся рациональных отрезков $\{[p_n, q_n]_{\mathbb{Q}}\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{[p_n, q_n]_{\mathbb{Q}}\}_{n=m}^{\infty}$ эквивалентны $\forall m \in \mathbb{N}$

Определение Произведением положительных действительных чисел a, b представляемых системами стягивающихся рациональных отрезков $\{[p_n, q_n]_{\mathbb{Q}}\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{[r_n, s_n]_{\mathbb{Q}}\}_{n=1}^{\infty}$ соответственно с $p_1 > 0, r_1 > 0$ называется действительное число, представляемое системой $\{[p_n r_n, q_n s_n]_{\mathbb{Q}}\}_{n=1}^{\infty}$

$$1. (\forall a \in \mathbb{R}) a \times 0 = 0 \times a := 0$$

$$2. (\forall a > 0)(\forall b < 0) a \times b = b \times a := -(a \times (-b))$$

$$3. (\forall a < 0)(\forall b < 0) a \times b = b \times a := (-a) \times (-b)$$

Теорема 4 Операция произведения действительных чисел корректна и удовлетворяет свойствам:

IIa) $(\forall x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R}) xy = yx$

IIб) $(\forall x, y, z \in \mathbb{R}) x(yz) = (xy)z$

IIс) $(\forall x \in \mathbb{R}) x \times 1 = x$

Определение Если $a \in \mathbb{R}, a > 0$ представляется системой $\{[p_n, q_n]_{\mathbb{Q}}\}_{n=1}^{\infty}, p_1 > 0$, то обратным $\frac{1}{a}$ называется число, представимое $\{[\frac{1}{q_n}, \frac{1}{p_n}]_{\mathbb{Q}}\}_{n=1}^{\infty}$

$$a < 0 : \quad \frac{1}{a} := -(\frac{1}{-a})$$

$$\frac{1}{p_n} - \frac{1}{q_n} = \frac{q_n - p_n}{p_n q_n} \leq \frac{q_n - p_n}{p_n^2}$$

Теорема 5

I-II $(\forall x, y, z \in \mathbb{R}) x(y + z) = xy + xz$

I-III $(\forall x, y \in \mathbb{R})(\forall z \in \mathbb{R}, z > 0)(x \leq y) \implies xz \leq yz$

IIг) $(\forall x \in \mathbb{R}, x \neq 0) x \times \frac{1}{x} = 1$

IV $(\forall x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R}, y \neq 0)(\exists n \in \mathbb{Z}) ny \geq x$

Теорема 6 (Свойство полноты действительных чисел) $(\forall A, B \subset \mathbb{R})$ таких, что $A \cup B = \mathbb{R}, A \cap B = \emptyset, (\forall a \in A)(\forall b \in B) a < b$

$(\exists c \in \mathbb{R})$ такое, что $(\forall a \in A)(\forall b \in B) a \leq c \leq b$

Определение Множество A действительных чисел называется ограниченным сверху [снизу], если

$$(\forall M \in \mathbb{R})[\exists M \in \mathbb{R}](\forall x \in A) x \leq M [x \geq m]$$

2.5 Комплексные числа

$$\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$

$$(a, b) + (c, d) := (a + c, b + d)$$

$$(a, b) \times (c, d) := (ac - bd, ad + bc)$$

$$(a, 0) =: a$$

$$(0, 1) =: i \text{ (мнимая единица) } i^2 = -1$$

$$(a, b) = a + bi \text{ (алгебраическая форма комплексного числа) } |z| = \sqrt{a^2 + b^2} \quad a = \operatorname{Re}(z) \quad b = \operatorname{Im}(z)$$

Неравенство треугольника:

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$$

$$|z_1 - z_2| \geq ||z_1| - |z_2||$$

Определение Комплексно сопряженным к $z = c + di$ называется $\bar{z} = c - di$

Аргумент $z = \arg(z) = \varphi + 2k\pi$

$$a = |z|(\cos(\varphi)), \quad b = |z|(\sin(\varphi))$$

Тригонометрическая форма:

$$z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

$$w = |w|(\cos\psi + i\sin\psi)$$

$$z \times w = |z||w|(\cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi + (\cos\varphi\sin\psi + \sin\varphi\cos\psi)i = |z||w|(\cos(\varphi + \psi) + \sin(\varphi + \psi)i)$$

$$\arg(zw) = \arg(z) + \arg(w)$$

$$\cos\varphi + i\sin\varphi = \operatorname{cis}\varphi =: e^{i\varphi}$$

$z = |z|e^{i\varphi}$ - показательная форма записи (формула Эйлера)

$$\cos\varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2}$$

$$\sin\varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i}$$

$$e^{i\pi} = -1$$

$z^n = |z|^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi) = (|z|(\cos\varphi + i\sin\varphi))^n$ - формула Муавра.

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi, \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$z^n = w \quad w = 0 \implies z = 0$$

$$w \neq 0 \implies w = |w|(\cos\psi + i\sin\psi) \quad z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi$$

$$|z| = \sqrt[n]{|w|}$$

$$n\varphi = \psi + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\varphi = \frac{\psi}{n} + \frac{2\pi k}{n}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n-1$$

3 Пределы

3.1 Доп. свойства действительных чисел

Теорема 1 (Плотность множества рациональных чисел в множестве действительных)

$$(\forall a, b \in \mathbb{R}; a < b)(\exists r \in \mathbb{Q}) \quad a < r < b$$

Определение Множества A и B называются равномошными, если существует биекция A на B .

Определение Множество A называется счетным, если оно равномошно \mathbb{N} или несчетным, если оно не конечное и не счетное.

Теорема 2 (Кантор) \mathbb{Q} - счетно, \mathbb{R} - несчетно

Определение Если A - ограниченное сверху множество действительных чисел, то число b такое, что $(\forall a \in A) \quad a \leq b$ называется верхней гранью множества A .

Наименьшим из множества верхних граней называется точной верхней гранью и обозначается $\sup(a)$ - супремум. Аналогично нижняя грань $\inf(A)$ - инфимум.

3.2 Предел последовательности

Определение Число $l \in \mathbb{R}$ называется пределом последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ если

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n > N) |x_n - l| < \epsilon$$

($\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ сходится к l , $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = l$, $x_n \rightarrow l$ $n \rightarrow \infty$)
 $(\exists l \in \mathbb{R}) \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = l \iff \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ сходится, иначе расходится

Теорема 1 (Единственность предела) Числовая последовательность может иметь не более, чем один предел.

Теорема 2 (Свойства предела a , связанные с неравенствами)

1. (Ограниченность последовательности) Если последовательность сходится, то она ограничена
2. (Отделимость от нуля и сохранение знака)
 Если последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ сходится к $l \neq 0$, то $(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n > N)(\text{sign}(x_n) = \text{sign}(l)) \wedge |x_n| > \frac{|l|}{2}$
3. (Переход к пределу в неравенствах)
 Если $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y_0$ и $(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n \geq N) x_n \leq y_n$, то $x_0 \leq y_0$
4. (Теорема о промежуточной последовательности)
 Если $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = l$ и $(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n \geq N) x_n \leq y_n \leq z_n$, то $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = l$

Теорема 3 (Арифметические операции со сходящимися последовательностями)

Пусть $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y_0$, тогда:

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) = x_0 + y_0$
2. $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n - y_n) = x_0 - y_0$
3. $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n y_n) = x_0 y_0$
4. Если $((\forall n \in \mathbb{N})(y_n \neq 0)) \wedge y_0 \neq 0$, то $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{x_0}{y_0}$

Определение Последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ называется бесконечно малой, если ее $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$

Теорема 4 (Произведение бесконечно малой и ограниченной последовательностей) Если $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ - бесконечно малая, а $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ ограниченная, то $\{x_n y_n\}_{n=1}^{\infty}$ бесконечно малая.

Определение ϵ -окрестностью числа $l \in \mathbb{R}$ называется $U_\epsilon(l) := (l - \epsilon, l + \epsilon)$ ($\epsilon > 0$)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = l \iff (\forall \epsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n > N) x_n \in U_\epsilon(l)$$

(Определение предела последовательности на языке окрестностей)

$$\mathbb{R} = (-\infty, +\infty) \quad -\infty : (\forall x \in \mathbb{R}) -\infty < x \quad +\infty : (\forall x \in \mathbb{R}) x < +\infty$$

$$\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\} = \bar{\mathbb{R}}; \quad \mathbb{R} \cup \{\infty\} = \hat{\mathbb{R}}$$

Определение ϵ -окрестность: ($\epsilon > 0$)

1. $-\infty : (-\infty, -\frac{1}{\epsilon})$
2. $+\infty : (\frac{1}{\epsilon}, +\infty)$
3. $\infty : (-\infty, -\frac{1}{\epsilon}) \cup (\frac{1}{\epsilon}, +\infty)$

Определение Последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ называется бесконечно большой, если $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ есть одно из $+\infty, -\infty, \infty$

Теорема 5 (Связь бесконечно малых и бесконечно больших последовательностей) Если $x_n \neq 0 \forall n \in \mathbb{N}$, то $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ - бесконечно малая $\iff \{\frac{1}{x_n}\}_{n=1}^{\infty}$ - бесконечно большая.

Определение Последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ называется неубывающей ($\forall n \in \mathbb{N}) x_n \leq x_{n+1}$, невозрастающей ($\forall n \in \mathbb{N}) x_{n+1} \leq x_n$, убывающей ($\forall n \in \mathbb{N}) x_n > x_{n+1}$, возрастающей ($\forall n \in \mathbb{N}) x_n < x_{n+1}$

Последовательность монотонна, если она неубывающая, невозрастающая, убывающая или возрастающая. Последовательность строго монотонна, если она убывающая или возрастающая.

Теорема 6 (Вейерштрасса о монотонных последовательностях) Если $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ ограниченная неубывающая последовательность, то $\exists \lim_{x \rightarrow \infty} x_n = \sup\{x_n\}$, если невозрастающая, то $\exists \lim_{x \rightarrow \infty} x_n = \inf\{x_n\}$

Доказательство

$$l := \sup\{x_n\} \iff \begin{cases} (\forall n \in \mathbb{N}) x_n \leq l \\ (\forall \epsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N}) l - \epsilon < x_N \leq l \end{cases}$$

$$(\forall n > N) l \geq x_n \geq x_{n-1} \geq x_N > l - \epsilon \implies |x_n - l| < \epsilon$$

Теорема 7 (Принцип Кантора вложенных отрезков) Каждая система вложенных отрезков имеет непустое пересечение.

Доказательство: $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n] \implies ((a_n \leq a_{n+1}) \ \& \ (b_n \geq b_{n+1}))$

$$a_n \leq b_n \leq b_1 \quad \exists a = \lim_{x \rightarrow \infty} a_n = \sup\{a_n\}$$

$$a_n \leq a \quad \exists b = \lim_{x \rightarrow \infty} b_n = \inf\{b_n\} \implies b \leq b_n \implies [a, b] \subset [a_n, b_n]$$

Определение Стягивающейся системой отрезков называется система вложенных отрезков, длины которых образуют бесконечно малую последовательность.

Дополнение к принципу Кантора Система стягивающихся отрезков имеет пересечение, состоящее из одной точки.

$$a_n \leq a \leq b \leq b_n \implies 0 \leq b - a \leq b_n - a_n = 0 \ (n \rightarrow \infty)$$

Определение Подпоследовательностью последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ называется последовательность $\{x_{n_k}\}_{n=1}^{\infty}$, где $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ - возрастающая последовательность натуральных чисел.

Определение Частичным пределом последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ называется предел ее подпоследовательности.

Теорема 8 (Эквивалентное определение частичного предела) Число $l \in \mathbb{R}$ является частичным пределом $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \iff (\forall \epsilon > 0)(\forall N \in \mathbb{N}) |x_n - l| < \epsilon$

Доказательство

1)

l - частичный предел $l = \lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} \iff (\forall \epsilon > 0)(\exists K \in \mathbb{N})(\forall k > K) |x_{n_k} - l| < \epsilon$

$$(\forall N \in \mathbb{N})(\{n_k\} \nearrow) \exists K_1 \in \mathbb{N} \ n_{K_1} > N \ \forall k > \max(K, K_1) |x_{n_k} - l| < \epsilon$$

2)

$$\epsilon := 1 \quad N := 1 \quad n_1 \in \mathbb{N} \quad |x_{n_1} - l| < 1$$

$$\epsilon := \frac{1}{2} \quad N := n_1 \quad n_2 \in \mathbb{N} \quad |x_{n_2} - l| < \frac{1}{2}$$

$$\epsilon := \frac{1}{k} \quad N := n_{k-1} \quad n_k \in \mathbb{N} \quad |x_{n_k} - l| < \frac{1}{k}$$

$$0 \leq |x_{n_k} - l| < \frac{1}{k}$$

Теорема 9 (Больцано-Вейерштрасс) Из каждой ограниченной последовательности можно выделить сходящуюся подпоследовательность.

Доказательство $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ - ограниченная $\exists [a_1, b_1] \supset \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$

$[a_2, b_2]$ - та из половин $[a_1, b_1]$, которая содержит бесконечно много элементов последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$. Продолжая, получим последовательность вложенных отрезков $\{[a_n, b_n]\}_{n=1}^{\infty}$, так как $b_n - a_n = \frac{b_1 - a_1}{2^{n-1}}$. Следовательно, $\{[a_n, b_n]\}_{n=1}^{\infty}$ - стягивающаяся, $\{C\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n]$. Докажем, что C - частичный предел

$$x_{n_1} := x_1; x_{n_2} \in [a_2, b_2], x_{n_k} \in [a_k, b_k]; 0 \leq |C - x_{n_k}| \leq \frac{b_1 - a_1}{2^{k-1}}$$

Дополнение $\forall \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \exists \{x_{n_k}\}_{n=1}^{\infty} \lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = l \in \mathbb{R}$

Доказательство Предположим $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ неограниченная сверху.

$$n_1 : x_{n_1} > 1$$

$$n_k > n_{k-1} : x_{n_k} > k$$

$$2 = x_1 < x_n < y_n \quad e = 2,718281828\dots$$

Пример 2 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$

$$\sqrt[n]{n} > 1 \quad \sqrt[n]{n} =: 1 + \alpha_n, \quad \alpha_n > 0$$

$$n = (1 + \alpha_n)^n \geq 1 + n\alpha_n + \frac{n(n-1)}{2} \alpha_n^2 > 1$$

$$\frac{1}{n-1} \geq \frac{1}{n(n-1)} + \frac{\alpha_n}{n-1} + \frac{\alpha_n}{2} > \frac{1}{n(n-1)} \implies \alpha_n^2 \rightarrow 0 \implies \alpha_n \rightarrow 0$$