1) Счетность мн-ва рациональных чисел, несчетность множества действительных чисел.

• Мн-во рациональных чисел счетно

Док-во: составим таблицу, в столбцах которой будут содержаться все положительные рациональные числа.

числители →

знаменатели ↓

	0	1	2	3	...
1	0	1	2	3	...
2	0	$1/2$	1	$3/2$	...
3	0	$1/3$	$2/3$	1	...
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	

Занумеруем каждую клетку таблицы, проходя по ней так, как указано на схеме. Если встретилось число, которое совпадает с ранее пронумерованным, то пропустим его (при этом мощность $\mathbb{Q}$ не изменится, т.к. повторов - счетное число, а $\mathbb{Q}$ бесконечно). Получаем биекцию $\mathbb{N} \to \mathbb{Q}$, следовательно, $\mathbb{Q}$ - счетно ▫

• Мн-во действительных чисел $\mathbb{R}$ - несчетно.

Док-во: каждое действительное число представим в виде $0,\{a_n\}$, где $\{a_n\}$ - десятичная запись действ. числа без запятой. Пусть мн-во $\mathbb{R}$ счетно, тогда $\exists$ биекция из $\mathbb{N}$ в $\mathbb{R}$. Предположим, что все действительные числа неким образом пронумерованы, тогда их можно записать в таблицу след. вида

0,	α_1	α_2	α_3	...
0,	α_1'	α_2'	α_3'	
0,	α_1''	α_2''	α_3''	
0,	⋮	⋮	⋮	
0,				
0,				
⋮				

Составим число из цифр, стоящих по диагонали, обозн. на схеме, оно будет иметь вид $0,\alpha_1\alpha_2'\alpha_3''...$

Заменим в нём каждую цифру на другую (неравную исходной), получим число, которое не может быть равно ни одной из строчек таблицы, т.к. отличается от каждого уже записанного числа по 1 символу

$\Downarrow$

мы получим число, которого нет в таблице

$\Downarrow$

противоречие, т.к. все действительные числа по нашему предположению уже были записаны в этой таблице ▫

! Ещё один способ: $(0,1) \gtrsim \mathbb{N}$ (диаг. метод Кантора)

$(0,1) \cong (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \cong \mathbb{R}$ (биекция: $tg\, x$) $\Rightarrow \mathbb{R}$ - несчетно

② Теорема о существовании (точной) верхней (нижней) грани мн-ва

Формулировка: Если непустое мн-во вещественных чисел X ограничено сверху, то сущ. $\sup X$; если непустое мн-во X ограничено снизу, то сущ. $\inf X$.

Док-во: Рассмотрим 2 случая:

① Мн-во X содержит хотя бы один неотрицательный элемент

Очевидно, что все неотриц. эл-ты будут больше отрицательных, тогда будем работать с множ-вом X' ($X' \subset X$, $X' = \{a \mid a \geq 0, a \in X\}$). Пусть $x = a_0, a_1 a_2 a_3 \ldots = a_0,\{a_n\}$ – произвольный элемент мн-ва X'. Заметим, что X ограничено сверху $\Rightarrow \exists C \in \mathbb{R}: C = c_0, c_1 c_2 c_3 \ldots = c_0, \{c_n\}$ $(\forall x \in X) \hookrightarrow x \leq C \leq c_0 + 1$

Рассмотрим мн-во целых частей всех чисел, лежащих в X'. Т.к. это мн-во непусто, то в нём есть наибольший элемент – обозначим его $\overline{a_0}$. Обозначим $X_0 = \{x \in X' : x = \overline{a_0}, \{a_n\}\}$, т.е. мн-во X_0 состоит из всех чисел из X', целая часть которых равна $\overline{a_0}$. Пусть E_1 – мн-во первых десятичных знаков чисел из X_0. Т.к. мн-во E_1 конечно и непусто, то в нём есть максимальный элемент (если E_1 пусто, то sup был найден на предыдущем шаге). Обозначим его за $\overline{a_1}$. Пусть $X_1 = \{x \in X' : x = \overline{a_0}, \overline{a_1} a_2 a_3 \ldots\}$, тогда $X' \supset X_0 \supset X_1$. Обозначим $\overline{a_2}$ = максимальный второй десятичный знак элементов X_1, $X_2 = \{x \in X' : x = \overline{a_0}, \overline{a_1}\,\overline{a_2} a_3 a_4 \ldots\}$

Повторяя данные рассуждения, получаем последовательности непустых множеств и десятичных знаков. $X' \supset X_0 \supset X_1 \ldots \supset X_k \supset X_{k+1} \ldots$, $X_k = \{x \in X_{k-1} : x = \overline{a_0}, \overline{a_1} \ldots \overline{a_k} a_{k+1} \ldots\}$

Рассмотрим десятичную дробь $\overline{x} = \overline{a_0}, \overline{a_1}\,\overline{a_2}\,\overline{a_3} \ldots = \overline{a_0}, \{\overline{a_n}\}$. Докажем, что $\overline{x} = \sup X$, т.е. что:

1) $\forall x \in X \hookrightarrow \overline{x} \geq x$

2) $\forall x' < \overline{x} \;\; \exists \tilde{x} \in X : \tilde{x} > x'$

Возьмём произвольное $x \in X$. Возможны 3 случая:
- $x \notin X_k$ при $\forall k \in \mathbb{N}$
- $x \in X_k$ при $k = 0, 1, 2 \ldots$
- $\exists m : x \in X_{m-1}, x \notin X_m$

1 случай: $x \notin X_k$ при $\forall k \in \mathbb{N} \Rightarrow x \notin X_0 \Rightarrow a_{0x} < \overline{a_0} \Rightarrow x < \overline{x}$

2 случай: $x \in X_k$ при $k = 0, 1, 2 \ldots \Rightarrow \forall k \;\; a_k = \overline{a_k} \Rightarrow x = \overline{x}$

3 случай: $x = \overline{a_0}, \overline{a_1}\,\overline{a_2} \ldots \overline{a_{m-1}} a_m \ldots < \overline{a_0}, \overline{a_1}\,\overline{a_2} \ldots \overline{a_{m-1}}\,\overline{a_m} \ldots \leq \overline{x}$

$\Rightarrow$ 1 условие выполнено в любом случае

Покажем, что условие 2) тоже выполнено.

При $x' < 0$ оно выполнено, т.к. $\overline{x} > 0$, тогда выберем $\tilde{x}$ из X'. Пусть тогда $0 \leq x' < \overline{x}$, $x' = a_0', \{a_n'\}$. Пусть a_m' – первый элемент, для которого $a_m' \neq \overline{a_m}$.

Тогда $x' = \overline{a_0}, \overline{a_1} \ldots \overline{a_{m-1}} a_m' \ldots < \overline{a_0}, \overline{a_1} \ldots \overline{a_m} \leq \tilde{x} \in X_{m+1} \leq \overline{x}$. Значит, условие 2) тоже выполнено $\Rightarrow \overline{x} = \sup X$ ■

② Если все элементы мн-ва X отрицательны: док-во аналогично, но числа записываются в виде $-a_0, a_1 a_2 \ldots \Rightarrow$ на каждом шаге выбирается $\underline{a_k} = \min(a_{k_0}, a_{k_1} \ldots)$ ■

(3) Бесконечно малые послед-ти и их св-ва.

Опр. 1 послед-ть называется бесконечно малой, если $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ (далее - б.м.п)

Свойства

1) сумма конечного числа б.м.п есть б.м.п

Док-во: пусть $\{\alpha_n\}$ и $\{\beta_n\}$ б.м.п, тогда по определению предела:

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_1(\varepsilon) \in \mathbb{N}: \forall n \geq N_1(\varepsilon) \longrightarrow |\alpha_n - 0| < \frac{\varepsilon}{2}$

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_2(\varepsilon) \in \mathbb{N}: \forall n \geq N_2(\varepsilon) \longrightarrow |\beta_n - 0| < \frac{\varepsilon}{2}$

Тогда при $N_3 = \max(N_1(\varepsilon), N_2(\varepsilon))$: $\forall n \geq N_3 \longrightarrow \begin{cases} |\alpha_n| < \frac{\varepsilon}{2} \\ |\beta_n| < \frac{\varepsilon}{2} \end{cases} \Rightarrow |\alpha_n| + |\beta_n| < \varepsilon$

При этом: $|\alpha_n + \beta_n| \leq |\alpha_n| + |\beta_n| < \varepsilon \Rightarrow |\alpha_n + \beta_n| < \varepsilon$ при $\forall n > N_3$ и при $\forall \varepsilon > 0$,

следовательно, $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_3 = \max(N_1(\varepsilon), N_2(\varepsilon)): \forall n \geq N_3 \quad |\alpha_n + \beta_n| < \varepsilon$

$\Downarrow$

$\lim_{n\to\infty} \{\alpha_n + \beta_n\} = 0 \Rightarrow \{\alpha_n + \beta_n\}$ - б.м.п ∎

(аналогичное док-во для любого конечного числа б.м.п.)

2) произведение б.м.п на ограниченную послед-ть есть б.м.п

Д-во: Пусть $\{\beta_n\}$ - ограниченная послед-ть $\Rightarrow \exists C > 0: \forall n \in \mathbb{N} \longrightarrow |\beta_n| < C$

Пусть $\{\alpha_n\}$ - б.м.п $\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}: \forall n \geq N(\varepsilon) \quad |\alpha_n| < \frac{\varepsilon}{C}$

Тогда верно, что при $n \geq N(\varepsilon) \quad |\alpha_n| \cdot |\beta_n| < \varepsilon$

$|\alpha_n| \cdot |\beta_n| = |\alpha_n \cdot \beta_n| \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}: \forall n \geq N(\varepsilon) \longrightarrow |\alpha_n \beta_n| < \varepsilon$

$\Downarrow$

$\lim_{n\to\infty} \{\alpha_n \beta_n\} = 0$

$\Downarrow$

$\{\alpha_n \beta_n\}$ - б.м.п ∎

! если $\lim_{n\to\infty} x_n = a$, то $x_n = a + \alpha_n$, α_n - б.м.п

$|x_n - a| < \varepsilon \Rightarrow \lim_{n\to\infty} x_n - a = 0 \Rightarrow \{x_n - a\}$ - б.м.п.

~~$|x_n - a$~~

(4) Св-ва пределов, связанные с неравенствами

① Ограниченность: если $\{x_n\}$ сходится, то она ограничена

Док-во: $\{x_n\}$ - сходится $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, тогда по определению предела

$\forall \varepsilon>0 \quad \exists N(\varepsilon)\in\mathbb{N}: \forall n\geq N(\varepsilon) \hookrightarrow |x_n - a| < \varepsilon \Rightarrow$ при $\varepsilon = 1$: $|x_n - a| < 1$

При этом: $|x_n| = |x_n + a - a| = |(x_n - a) + (a)| \leq |x_n - a| + |a| < 1 + |a|$.

Тогда пусть $C = \max(1+|a|, |x_1|, |x_2|, \ldots, |x_{N(1)-1}|) \Rightarrow x_n \leq C \quad \forall n\in\mathbb{N}$, значит, $\{x_n\}$ ограничена ■

! не всякая огр. послед. сходится (пример $x_n = (-1)^n$)

! если $\forall C>0 \quad \exists N_C\in\mathbb{N}: |x_{N_C}| > C \Rightarrow$ послед-ть не ограничена

② Переход к пределу в неравенствах: если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$, причем $a<b$, то $\exists N_0\in\mathbb{N}: \forall n>N_0 \hookrightarrow x_n < y_n$

Док-во: выберем $U_\varepsilon(a)$ и $U_\varepsilon(b)$ такие, что они не пересекаются, тогда по опр. предела: $\forall \varepsilon>0 \quad \exists N_1\in\mathbb{N}: \forall n>N_1 \hookrightarrow x_n\in U_\varepsilon(a)$

$\forall \varepsilon>0 \quad \exists N_2\in\mathbb{N}: \forall n>N_2 \hookrightarrow y_n\in U_\varepsilon(b)$

Пусть $N_3 = \max(N_1, N_2)$, тогда $\forall \varepsilon>0 \quad \forall n>N_3 \hookrightarrow x_n\in U_\varepsilon(a)$, $y_n\in U_\varepsilon(b)$, при этом $U_\varepsilon(a)\cap U_\varepsilon(b) = \varnothing \Rightarrow \forall n>N_3 \quad x_n<y_n$ ■

! Возможные формулировки: если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = l_1$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = l_2$, при этом $\forall n\in\mathbb{N}$ $x_n\leq y_n$, то $l_1\leq l_2$ (док-во: от противного)

! Следствие: если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $a<b$, то $\exists N_0: \forall n>N_0 \hookrightarrow x_n < b$

③ Теорема о пределе зажатой послед-ти

Формулировка: если послед-ти $\{x_n\}, \{y_n\}, \{z_n\}$ таковы, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$ и $\exists N_0\in\mathbb{N}: \forall n>N_0 \quad x_n\leq y_n\leq z_n$, то $\{y_n\}$ сходится и $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$

Док-во: по опр. предела: $\forall \varepsilon>0 \quad \exists N_1(\varepsilon)\in\mathbb{N}: \forall n>N_1(\varepsilon) \hookrightarrow x_n\in U_\varepsilon(a)$

$\forall \varepsilon>0 \quad \exists N_2(\varepsilon)\in\mathbb{N}: \forall n>N_2(\varepsilon) \hookrightarrow z_n\in U_\varepsilon(a)$

Тогда пусть $N_3 = \max(N_0, N_1(\varepsilon), N_2(\varepsilon)) \Rightarrow \forall\varepsilon>0 \quad \forall n>N_3 \quad x_n\in U_\varepsilon(a)$, $z_n\in U_\varepsilon(a)$, при этом $x_n\leq y_n\leq z_n \Rightarrow \forall\varepsilon>0 \quad \forall n>N_3 \quad y_n\in U_\varepsilon(a) \Rightarrow y_n$ сходится и $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$ ■

6 Арифм. операции со сход. послед-тями.

! Если $x_n = a + \alpha_n$, где $\{\alpha_n\}$ - б.м.п, то $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$

Если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$, то

а) $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n + y_n) = a + b$

Док-во: т.к. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$, то $x_n = a + \alpha_n$, $y_n = b + \beta_n$, где $\{\alpha_n\}, \{\beta_n\}$ - б.м.п.

Тогда: $x_n + y_n = a + b + \alpha_n + \beta_n$, при этом $\{\alpha_n + \beta_n\}$ - б.м.п $\Rightarrow x_n + y_n \to a + b$ при $n \to \infty$ ∎

б) $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n \cdot y_n) = ab$

Аналогично: $x_n = a + \alpha_n$, $y_n = b + \beta_n$, $\{\alpha_n\}, \{\beta_n\}$ - б.м.п.

Тогда: $x_n \cdot y_n = (a + \alpha_n)(b + \beta_n) = ab + \underbrace{a \cdot \beta_n}_{\text{бмп}} + \underbrace{b \cdot \alpha_n}_{\text{бмп}} + \underbrace{\alpha_n \cdot \beta_n}_{\text{бмп}} \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_n y_n = ab$ ∎

в) Пусть также $y_n \neq 0$ при $n \in \mathbb{N}$ и $b \neq 0$, тогда:
$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{a}{b}$

Док-во: рассмотрим разность $\frac{x_n}{y_n} - \frac{a}{b}$: если $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{a}{b}$, то $\left\{\frac{x_n}{y_n} - \frac{a}{b}\right\}$ - б.м.п

$$\frac{x_n}{y_n} - \frac{a}{b} = \frac{a + \alpha_n}{b + \beta_n} - \frac{a}{b} = \frac{b(a + \alpha_n) - a(b + \beta_n)}{b(b + \beta_n)} = \frac{b\alpha_n - a\beta_n}{b} \cdot \frac{1}{b + \beta_n} =$$

$$= \left(\alpha_n - \frac{a}{b}\beta_n\right) \cdot \frac{1}{y_n}$$

! $\alpha_n - \frac{a}{b} \cdot \beta_n$ - б.м.п.

! $\frac{1}{y_n}$ - ограничг, т.к.: 1) Т.к. $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$, то пусть $\varepsilon = \frac{|b|}{2}$, тогда $\exists N_0 \in \mathbb{N}: \forall n \geq N_0 \hookrightarrow |y_n - b| < \frac{|b|}{2}$

2) Тогда: $|b| - |y_n| \leq |y_n - b| \Rightarrow |b| - |y_n| < \frac{|b|}{2} \Rightarrow |y_n| > \frac{|b|}{2} \Rightarrow \frac{2}{|b|} > \frac{1}{|y_n|}$

Пусть $C = \max\left(\frac{1}{|y_0|}, \frac{1}{|y_1|}, \ldots, \frac{1}{|y_{N_0 - 1}|}, \frac{2}{|b|}\right)$, тогда $\forall n \in \mathbb{N} \hookrightarrow \frac{1}{|y_n|} = \left|\frac{1}{y_n}\right| \leq C \Rightarrow \left\{\frac{1}{y_n}\right\}$ - ограничена ∎

Вернемся к доказательству: $\frac{x_n}{y_n} - \frac{a}{b} = \underbrace{\left(\alpha_n - \frac{a}{b} \cdot \beta_n\right)}_{\text{б.м.п.}} \cdot \underbrace{\frac{1}{y_n}}_{\text{огр}} \Rightarrow \frac{x_n}{y_n} - \frac{a}{b}$ - б.м.п $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} - \frac{a}{b} = 0$

$$\Downarrow$$

$$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{a}{b}$$ ∎

7) Теорема о пределе ограниченной монотонной послед-ти:

Формулировка: если послед-ть является возрастающей (убывающей) и огран. сверху (снизу), то существует $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \sup\{x_n\}$ ($\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \inf\{x_n\}$).

Доказательство: $\{x_n\}$ ограничена сверху (снизу) $\Rightarrow$ по теореме о сущ-нии точной верхней (нижней) грани сущ. точная верхняя (нижняя) грань этой послед-ти. Пусть $\sup\{x_n\}=a$, тогда: $\begin{cases} \forall n\in\mathbb{N} \hookrightarrow x_n \le a \\ \forall \varepsilon>0\ \exists N_\varepsilon\in\mathbb{N}:\ x_{N_\varepsilon} > a-\varepsilon \end{cases}$

При этом послед-ть $\{x_n\}$ возрастает $\Rightarrow \forall n\ge N_\varepsilon \hookrightarrow x_n \ge x_{N_\varepsilon}$

Тогда: $\begin{cases} \forall \varepsilon>0\ \exists N_\varepsilon\in\mathbb{N}:\ x_{N_\varepsilon} > a-\varepsilon \\ \forall n\ge N_\varepsilon \hookrightarrow x_n\ge x_{N_\varepsilon} \\ \forall n\in\mathbb{N}\hookrightarrow x_n\le a \end{cases} \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0\ \exists N_\varepsilon\in\mathbb{N}:\ \forall n\ge N_\varepsilon \hookrightarrow x_n\in U_\varepsilon(a)$

$$\Downarrow$$

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a = \sup\{x_n\} \ \blacksquare$$

(для убывающей аналогично).

! Точная верхняя грань послед-ти:

$M=\sup X \Leftrightarrow (\forall x\in X \hookrightarrow x\le M)\wedge(\forall\varepsilon>0\ \exists x_\varepsilon\in X:\ x_\varepsilon > M-\varepsilon)$

! Точная нижняя грань:

$m=\inf X \Leftrightarrow (\forall x\in X\hookrightarrow x\ge m)\wedge(\forall\varepsilon>0\ \exists x_\varepsilon\in X:\ x_\varepsilon< m+\varepsilon)$

(8) Число e.

Рассмотрим послед-ть: $x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$

Докажем, что она сходится:

1) $n \in \mathbb{N} \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} \hookrightarrow x_n > 1$, т.к. $1+\frac{1}{n} > 1. \Rightarrow \{x_n\}$ ограничена снизу

2) рассмотрим отношение:

$$\cancel{\frac{x_{n+1}}{x_n} = \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+2} : \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+2} : \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1} = \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+2} \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}}$$

$$\frac{x_{n-1}}{x_n} = \left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n} : \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = \left(\frac{n}{n-1}\right)^{n} : \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1} = \left(\frac{n}{n-1}\right)^{n} \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1} =$$

$$= \left(\frac{n^2}{n^2-1}\right)^{n+1} \cdot \left(\frac{n-1}{n}\right) = \left(1+\frac{1}{n^2-1}\right)^{n+1} \cdot \left(\frac{n-1}{n}\right)$$

Воспользуемся неравенством Бернулли $\left((1+x)^{n+1} \geq 1+(n+1)x\right)$, тогда:

$$\frac{x_{n-1}}{x_n} = \left(1+\frac{1}{n^2-1}\right)^{n+1} \cdot \left(\frac{n-1}{n}\right) \geq \left(1+(n+1)\cdot\frac{1}{n^2-1}\right) \cdot \left(\frac{n-1}{n}\right) = \left(1+\frac{1}{n-1}\right) \cdot \left(\frac{n-1}{n}\right) = \frac{n}{n-1} \cdot \frac{n-1}{n} =$$

$= 1 \Rightarrow \frac{x_{n-1}}{x_n} \geq 1 \Rightarrow \{x_n\}$ убывающая, т.к. $\forall n > 1, n \in \mathbb{N} \hookrightarrow x_{n-1} \geq x_n$

Тогда: $\{x_n\}$ убывающая, $\{x_n\}$ ограничена снизу $\Rightarrow \exists \lim\limits_{n\to\infty} x_n$. Он обозначается как $e \approx 2{,}71828182\ldots$

Значит, $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = e$.

9 Теорема Кантора о вложенных отрезках

! Послед-ть отрезков $\Delta_1, \Delta_2 \ldots \Delta_n$ ($\Delta_n = [a_n, b_n]$) наз-ся стягивающейся, если:

а) каждый последующий отрезок принадлежит предыдущему, т.е.:

$\forall n \in \mathbb{N} \hookrightarrow \Delta_{n+1} \subset \Delta_n$ (т.е. $a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_n \leq b_n \leq b_{n-1} \ldots \leq b_1$

б) длина n-го отрезка $\to 0$ при $n \to \infty$, т.е.

$\lim\limits_{n \to \infty} (b_n - a_n) = 0$

Теорема Кантора: Если послед-ть отрезков является стягивающейся, то существует единственная точка, принадлежащая всем отрезкам данной послед-ти

а) существование: Заметим, что $\forall n_{\in \mathbb{N}} \forall m \in \mathbb{N} \hookrightarrow a_n \leq b_m$. Тогда, т.к. $a_n \leq b_m$ при всех $n, m \in \mathbb{N}$, то $a_n \leq \sup\{a_n\} \leq \inf\{b_n\} \leq b_n$, тогда $a_n \leq \sup\{a_n\} \leq b_n \Rightarrow \exists\, c = \sup\{a_n\}$, такое, что $\forall n \in \mathbb{N} \hookrightarrow a_n \leq c \leq b_n$

б) единственность: пусть $\exists$ такие $c_0 \neq c$, тогда $\forall n \in \mathbb{N} \hookrightarrow c_0, c \in \Delta_n$. Без ограничения общности будем считать, что $c_0 < c$, тогда $\forall n \in \mathbb{N}$ верно, что $a_n \leq c_0 < c \leq b_n$. ~~Но~~ Тогда: $b_n - a_n \geq c - c_0$, но $c - c_0 > 0$, т.к. $c \neq c_0 \Rightarrow \lim\limits_{n \to \infty}(b_n - a_n) \neq 0 \Rightarrow$ противоречие. Тогда $c - c_0 = 0 \Rightarrow c = c_0$. Точка c единственная ■

(11) Теорема Больцано – Вейерштрасса

Формулировка: Из любой ~~сходящейся~~ ограниченной послед-ти можно выделить сходящуюся подпоследовательность (любая огр. послед-ть имеет хотя бы 1 частичный предел).

Док-во: Пусть $\{x_n\}$ – ограниченная послед-ть, тогда:

~~Е~~ $\exists a, b: \forall n \in \mathbb{N} \hookrightarrow x_n \in [a, b] = \Delta$. Будем делить отрезок $[a, b]$ пополам, каждый раз выбирая ту половину, в которую попало бесконечно много точек, тогда получим мн-во отрезков таких, что:

1) $\Delta_1 \supset \Delta_2 \supset \ldots \supset \Delta_n \ldots$

2) $b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n} \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$, т.к. $\left\{\frac{b-a}{2^n}\right\}$ – бмп $\Bigg| \Rightarrow \{\Delta_k\}$ – послед-ть стягивающихся отрезков.

Тогда по теореме Кантора ~~[illegible]~~: $\exists!\, c: \forall k \in \mathbb{N} \hookrightarrow c \in \Delta_k$

Докажем, что существует такая подпослед-ть $\{x_{n_k}\}$, что $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = c$.

Заметим, что Δ_1 содержит бесконечно много членов послед-ти, значит, $\exists n_1 \in \mathbb{N}: x_{n_1} \in \Delta_1$. Аналогично Δ_2 содержит бесконечно много членов послед-ти $\Rightarrow \exists n_2 > n_1: x_{n_2} \in \Delta_2$. Тогда $\forall k \in \mathbb{N}\ \exists x_{n_k} \in \Delta_k$, причем ~~$x_k$~~ $n_1 < n_2 < n_3 \ldots < n_k \Rightarrow$ существует набор $x_{n_1}, x_{n_2} \ldots x_{n_k}$ такой, что $\forall k \in \mathbb{N} \hookrightarrow a_k \le x_{n_k} \le b_k$, т.е. все члены подпослед-ти $x_{n_1} \ldots x_{n_k}$ начиная с нек. номера лежат в отрезке $[a_k, b_k]$. При этом $c \in \Delta_k$ при любых k, следовательно, $c, x_{n_k} \in [a_k, b_k]$ при $\forall k \in \mathbb{N} \Rightarrow |x_{n_k} - c| \le b_k - a_k$.

~~Т~~ Заметим, что $b_k - a_k = \frac{b-a}{2^k} \Rightarrow |x_{n_k} - c| \le \frac{b-a}{2^k} \Rightarrow$ при $k \to \infty$ $|x_{n_k} - c| \to 0$,

значит, $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = c \Rightarrow \{x_{n_k}\}$ – искомая сходящаяся послед-ть ■

(13) Критерий Коши сходимости числовой послед-ти.

Опр: Послед-ть называется фундаментальной, если она удовл условию Коши.

а) $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}: \forall n \geq n_\varepsilon \quad \forall m \geq n_\varepsilon \hookrightarrow |x_n - x_m| < \varepsilon$

б) $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}: \forall n \geq n_\varepsilon \quad \forall p \in \mathbb{N} \hookrightarrow |x_{n+p} - x_n| < \varepsilon$

! Могут спросить: фундаментальная послед-ть явл ограниченной.

Док-во: по опр фунд. послед.: $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}: \forall n \geq n_\varepsilon \ \forall m \geq n_\varepsilon \hookrightarrow |x_n - x_m| < \varepsilon$.

Пусть $\varepsilon = 1$, тогда верно, что $|x_n - x_m| < 1$ при $n \geq n_0 \Rightarrow |x_n - x_{n_0}| < 1$

При этом $|x_n| = |x_n - x_{n_0} + x_{n_0}| = |(x_n - x_{n_0}) + x_{n_0}| \leq |x_n - x_{n_0}| + |x_{n_0}| < 1 + |x_{n_0}|$

Тогда пусть $C = \max(1 + |x_{n_0}|, |x_1|, \dots, |x_{n_0-1}|)$, тогда $\forall n \in \mathbb{N} \hookrightarrow |x_n| \leq C$, значит, послед. ограничена ■

Теорема (Критерий Коши): Для того, чтобы послед-ть имела конечный предел, необходимо и достаточно, чтобы она была фундаментальной.

Док-во: 1) необходимость

Пусть $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = a \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}: \forall n \geq N(\varepsilon) \hookrightarrow |x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$

Пусть $n, m \in \mathbb{N}: n, m \geq N(\varepsilon)$, тогда $\begin{cases} |x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} \\ |x_m - a| < \frac{\varepsilon}{2} \end{cases}$

Заметим, что $|x_n - x_m| = |x_n - a - x_m + a| = |(x_n - a) - (x_m - a)| \leq |x_n - a| + |x_m - a|$

При этом $|x_n - a| + |x_m - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}: \forall n \geq N(\varepsilon) \hookrightarrow |x_n - x_m| < \varepsilon$, следовательно, условие фундаментальности всегда выполняется

2) достаточность

Пусть $\{x_n\}$ - фундаментальна, тогда она ограничена $\Rightarrow$ по теореме Больцано-Вейерштрасса она содержит сходящуюся подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$. Пусть $\lim\limits_{k \to \infty} x_{n_k} = a \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists k(\varepsilon) \in \mathbb{N}: \forall k \geq k(\varepsilon) \hookrightarrow |x_{n_k} - a| < \frac{\varepsilon}{2}$

По определению фунд. послед $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}: \forall n \geq N(\varepsilon) \ \forall m \geq N(\varepsilon) \hookrightarrow |x_n - x_m| < \frac{\varepsilon}{2}$

Пусть $N = \max(N(\varepsilon), k(\varepsilon))$. Зафиксируем n_k такое, что $n_k \geq N$, тогда при $m = n_k$ и $\forall n \geq N \hookrightarrow |x_n - x_{n_k}| < \frac{\varepsilon}{2}$, при этом $\forall n \geq N$:

$$|x_n - a| = |(x_n - x_{n_k}) + (x_{n_k} - a)| \leq |x_n - x_{n_k}| + |x_{n_k} - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Следовательно, $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N}: \forall n \geq N \hookrightarrow |x_n - a| < \varepsilon \Rightarrow \lim\limits_{n \to \infty} x_n = a$ ■

(14) Определение предела функции в точке в терминах окрестностей (по Коши) и в терминах послед-тей (по Гейне), их эквив.

① По Коши. Число a наз-ся пределом функции $f(x)$ в точке A, если эта функция определена в некоторой окрестности точки A, за исключением, быть может, самой точки A, и для каждого $\varepsilon>0$ найдется число $\delta>0$ такое, что для всех x, удовл условию $|x-A|<\delta$, $x\neq A$, выполняется нер-во $|f(x)-a|<\varepsilon$

$\lim\limits_{x\to A} f(x)=a \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0 \quad \exists\delta>0: \forall x\in \mathring{U}_\delta(A) \to f(x)\in U_\varepsilon(a)$

② По Гейне. Число A наз-ся пределом функции $f(x)$ в точке a, если эта функция определена в нек. $\mathring{U}_{\delta_0}(a)$, т.е. $\exists\delta_0>0: \mathring{U}_{\delta_0}(a)\subset \mathcal{D}(f)$, и для любой послед-ти $\{x_n\}$ $(\lim\limits_{n\to\infty} x_n=a)$, такой, что $x_n\in\mathring{U}_{\delta_0}(a)$ $\forall n\in\mathbb{N}$, соответствующая послед-ть значений функций $\{f(x_n)\}$ сходится к числу A

Эквивалентность:

! $f(x)$ опр. в нек. окр. $a \Rightarrow \exists\delta_0>0: \mathring{U}_{\delta_0}\in\mathcal{D}(f)$

(а) К → Г: Пусть A – предел $f(x)$ в точке a, тогда:

$\forall\varepsilon>0 \quad \exists\delta>0: \forall x\in\mathring{U}_\delta(a) \to f(x)\in U_\varepsilon(A)$

Рассмотрим произвольную послед-ть $\{x_n\}$, сходящуюся к a и такую, что $x_n\in\mathring{U}_{\delta_0}(a)$ $\forall n\in\mathbb{N}$

Из определения предела по Коши следует, что для найденного $\delta>0$ $\exists n_\delta$ такой, что $\forall n\geq n_\delta \to x_n\in\mathring{U}_\delta(a)$ и $f(x_n)\in U_\varepsilon(A)$. Тогда:

$\forall\varepsilon>0 \quad \exists N(\varepsilon)\in\mathbb{N}: \forall n\geq N(\varepsilon) \to f(x_n)\in U_\varepsilon(A)$, причем это условие выполняется для любой $\{x_n\}$ такой, что $\forall n\in\mathbb{N}: x_n\in \mathring{U}_{\delta_0}(a)\subset\mathcal{D}(f)$ и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=a$. Тогда A – предел $f(x)$ по Гейне

(б) Г → К: Докажем, что если A – предел $f(x)$ в точке a по Гейне, то это же число явл пределом этой функции по Коши.

Пусть это не так, тогда: $\exists\varepsilon_0>0: \forall\delta\in(0,\delta_0]$ $\exists x_{(\delta)}\in\mathring{U}_\delta(a): |f(x(\delta))-A|\geq\varepsilon_0$

Пусть $\delta=\frac{\delta_0}{n} \Rightarrow x_n=x(\frac{\delta_0}{n})$, тогда $\forall n\in\mathbb{N} \to 0<|x_n-a|<\frac{\delta_0}{n}$, а также

$|f(x_n)-A|\geq\varepsilon_0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_n=a$ и $x_n\in\mathring{U}_{\delta_0}(a)$ $\forall n\in\mathbb{N}$, но $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)\neq A$, следовательно, A не явл пределом функции по Гейне ⇒ противоречие. Значит, если A – предел функции по Гейне, то A – предел этой же функции по Коши ☒

(15) Критерий Коши сущ-ния предела функции

Функция $f(x)$ удовл. в точке $x=a$ условию Коши, если она определена в некоторой проколотой окр-ти точки a и $\forall \varepsilon>0\ \exists \delta=\delta(\varepsilon)>0: \forall x', x'' \in \mathring{U}_\delta(a) \hookrightarrow |f(x')-f(x'')|<\varepsilon$

! **Лемма**: пусть $\exists \delta>0$ такое, что $f(x)$ определена в $\mathring{U}_\delta(a)$, и пусть $\forall$ послед-ти $\{x_n\}$ такой, что $x_n \in \mathring{U}_\delta(a)$ при $n\in\mathbb{N}$ и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, соответствующая послед-ть значений функции $\{f(x_n)\}$ имеет конечный предел. Тогда этот предел не зависит от выбора послед-ти $\{x_n\}$, т.е.: если $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = A$ и $\lim\limits_{n\to\infty} f(\tilde{x}_n) = \tilde{A}$, где $\tilde{x}_n \in \mathring{U}_\delta(a)$ при $n\in\mathbb{N}$ и $\lim\limits_{n\to\infty}\tilde{x}_n = a$, то $\tilde{A}=A$.

Док-во: образуем послед-ть $x_1, \tilde{x}_1, x_2, \tilde{x}_2, \dots, x_n, \tilde{x}_n, \dots$ и обозначим k-ый член этой послед-ти за y_k. Т.к. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty}\tilde{x}_n = a$, то по опред.:

$\forall \varepsilon>0\ \exists N(\varepsilon)\in\mathbb{N}: \forall n\geq N(\varepsilon)\ |x_n-a|<\varepsilon$

$\forall \varepsilon>0\ \exists N'(\varepsilon)\in\mathbb{N}: \forall n\geq N'(\varepsilon)\ |\tilde{x}_n-a|<\varepsilon$ $\Rightarrow$ при $N''(\varepsilon) = 2\cdot\max(N(\varepsilon), N'(\varepsilon))$

$\forall k\geq N''(\varepsilon) \hookrightarrow |y_k-a|<\varepsilon$

$\Downarrow$

$\lim\limits_{k\to\infty} y_k = a$

Тогда по условию леммы $\exists A': \lim\limits_{k\to\infty} f(y_k) = A'$. Тогда $\{f(x_n)\}, \{f(\tilde{x}_n)\}$ — под-послед-ти сходящейся послед-ти $y_k \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = \lim\limits_{n\to\infty} f(\tilde{x}_n) = \lim\limits_{k\to\infty} f(y_k) = A'$, значит, $A=\tilde{A}$ ■

Теорема: для того, чтобы функция имела конечный предел в точке a, необходимо и достаточно, чтобы эта функция удовл в данной точке условию Коши

Док-во: • необходимость: пусть $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$, тогда:

$\forall \varepsilon>0\ \exists\delta>0: \forall x\in\mathring{U}_\delta(a) \hookrightarrow |f(x)-A|<\frac{\varepsilon}{2}$

Пусть $x', x''\in\mathring{U}_\delta(a) \Rightarrow |f(x')-A|<\frac{\varepsilon}{2}$, $|f(x'')-A|<\frac{\varepsilon}{2}$, тогда:

$|f(x')-f(x'')| = |f(x')-A-f(x'')+A| = |(f(x')-A)-(f(x'')-A)| \leq |f(x')-A|+|f(x'')-A| < \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

Тогда $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0: \forall x', x''\in\mathring{U}_\delta(a) \hookrightarrow |f(x')-f(x'')|<\varepsilon \Rightarrow$ критерий Коши выполнен ■

• достаточность: пусть для функции выполнен критерий Коши, тогда $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0: \forall x', x''\in\mathring{U}_\delta(a) \hookrightarrow |f(x')-f(x'')|<\varepsilon$.

Пусть $\{x_n\}$ — произвольная послед-ть такая, что ~~$\{x_n\}$~~ $x_n\in\mathring{U}_\delta(a)\ \forall n\in\mathbb{N}$ и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$. Тогда по определению предела $\forall\delta>0\ \exists n_\delta\in\mathbb{N}: \forall n>n_\delta \hookrightarrow |x_n-a|<\delta$, тогда $\forall x_m \geq x_{n_\delta}, \forall x_n\geq x_{n_\delta} \hookrightarrow x_m\in\mathring{U}_\delta(a), x_n\in\mathring{U}_\delta(a) \Rightarrow$ по критерию Коши $|f(x_n)-f(x_m)|<\varepsilon \Rightarrow \{f(x_n)\}$ — фундаментальная послед-ть $\Rightarrow$ она имеет конечный предел. В силу леммы, доказанной выше, этот предел не зависит от выбора $\{x_n\} \Rightarrow f(x)$ имеет конечный предел в точке a ■

(16) Существование одностор. пределов у монотонных функций.

Опр предела слева: $\forall \varepsilon>0 \ \exists \delta>0: \forall x \in (a-\delta, a) \hookrightarrow |f(x)-A| < \varepsilon$

справа: $\forall \varepsilon>0 \ \exists \delta>0: \forall x \in (a, a+\delta) \hookrightarrow |f(x)-A| < \varepsilon$

Теорема: Если функция f определена и явл. монотонной на $[a, b]$, то в каждой точке $x_0 \in (a, b)$ эта функция имеет конечные пределы слева и справа, а в точках a и b – соответственно правый и левый пределы

Д-во: пусть f возрастает на $[a, b]$. Зафиксируем точку x_0 из $(a, b]$. Тогда $\forall x \in [a, x_0) \hookrightarrow f(x) \leq f(x_0) \Rightarrow f(x)$ ограничена на $[a, x_0) \Rightarrow$ по теореме о сущ-нии точной верхней границы $\exists \sup\limits_{a \leq x < x_0} f(x) = M$, $M \leq f(x_0)$. Тогда выполнены следующие условия:

1) $\forall x \in [a, x_0) \hookrightarrow f(x) \leq M$

2) $\forall \varepsilon>0 \ \exists x_\varepsilon \in [a, x_0): M-\varepsilon < f(x_\varepsilon)$

Значит, $\forall \varepsilon>0 \ \exists x_\varepsilon \in [a, x_0) \hookrightarrow f(x_\varepsilon) \in (M-\varepsilon, M]$. Обозначим за δ разность $x_0 - x_\varepsilon$ ($\delta>0$, т.к. $x_0 > x_\varepsilon$), тогда: $\forall \varepsilon>0 \ \exists \delta>0: \forall x \in (x_0-\delta, x_0) \hookrightarrow f(x) \in (M-\varepsilon, M]$

Следовательно, существует $\lim\limits_{x \to x_0-0} f(x) = f(x_0-0) = M$

Аналогично доказывается, что $\exists \lim\limits_{x \to x_0+0} f(x) = \inf\limits_{x_0 < x \leq b} f(x)$.

! Некоторые пределы:

$\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty \Leftrightarrow \forall \varepsilon>0 \ \exists \delta>0: \forall x \in \mathring{U}_\delta(a) \hookrightarrow |f(x)| > \varepsilon$

$+\infty \Rightarrow f(x) > \varepsilon$

$-\infty \Rightarrow f(x) < -\varepsilon$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon>0 \ \exists \delta>0: \forall x \in U_\delta(+\infty) \hookrightarrow |f(x)-A| < \varepsilon$

(17) Непрерывность функции в точке. Непрерывность сложной функции

Опр. Функция f, определённая в некоторой окрестности точки a, называется непрерывной в точке a, если $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$.

! Пусть $x-a = \Delta x$ – приращение аргумента, а $f(x)-f(a) = \Delta y$ – приращение функции.
Тогда: $x = a + \Delta x \Rightarrow f(a+\Delta x) - f(a) = \Delta y. \Rightarrow$ т.к. $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$, то
$\lim\limits_{x\to a} (f(x)-f(a)) = 0 \Rightarrow \lim\limits_{\Delta x\to 0} \Delta y = 0$

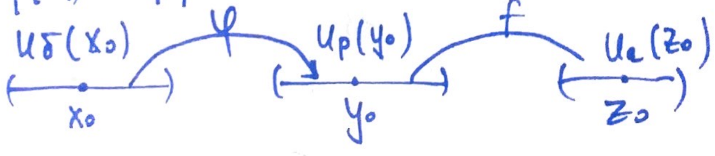
<u>Непрерывность сложной функции</u>

Теорема: Если фун-я $z = f(y)$ непрерывна в т. y_0, а функция $y = \varphi(x)$ непрерывна в т. x_0, причем $y_0 = \varphi(x_0)$, то в нек. окрестности точки x_0 определена сложная функция $f(\varphi(x))$, и эта функция непрерывна в точке x_0.

Док-во: пусть ε – произвольное положит. число. Тогда в силу непрерывности f в т. y_0 $\exists \rho = \rho_\varepsilon$ такое, что $U_\rho(y_0) \subset D(f)$ и $\forall y \in U_\rho(y_0) \hookrightarrow f(y) \in U_\varepsilon(z_0)$,
$z_0 = f(y_0)$

Т.к. φ непрерывна в x_0, то можно указать число $\delta = \delta_\rho = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что
$\forall x \in U_\delta(x_0) \hookrightarrow \varphi(x) \in U_\rho(y_0)$
Тогда на $U_\delta(x_0)$ определена сложная функция $f(\varphi(x))$, причем $\forall x \in U_\delta(x_0) \hookrightarrow$
$f(\varphi(x)) \in U_\varepsilon(z_0)$, при этом $z_0 = f(\varphi(x_0)) = f(y_0) \Rightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0: \forall x \in U_\delta(x_0) \hookrightarrow f(\varphi(x)) \in U_\varepsilon(\varphi(x_0$
Следовательно, $f(\varphi(x))$ непрер. в точке x_0 ■

Схематично



! f непр. в точке $a \Leftrightarrow$
- $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0: \forall x: |x-a| < \delta \hookrightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$
- $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0: \forall x \in U_\delta(a) \hookrightarrow f(x) \in U_\varepsilon(f(a))$
- $\forall \{x_n\}: \lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \to \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(a)$

(18) Ограниченность функции, непрерывной на отрезке

Теорема (Вейерштрасса): Если функция непрерывна на отрезке $[a,b]$, то она ограничена, т.е. $\exists C>0: \forall x \in [a,b] \hookrightarrow |f(x)| \le C$

Доказательство: предположим обратное, тогда $\forall C>0 : \exists x_c \in [a,b] \hookrightarrow |f(x)| > C$.
Пусть $C \in \{1, 2 \dots n\}$, тогда: $\forall n \in \mathbb{N} \ \exists x_n \in [a,b] \hookrightarrow |f(x_n)| > n$.
При этом послед-ть x_n ограничена $\Rightarrow$ по теореме Больцано-Вейерштрасса у неё можно выделить сходящуюся подпослед-ть. Пусть $\{x_{n_k}\}$ - искомая сходящаяся подпослед $\Rightarrow \lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = \varphi$, при этом $a \le x_{n_k} \le b$ для $\forall k \in \mathbb{N}$.
Т.к. f непрерывна на $[a,b]$, то она непрерывна и в точке φ, тогда $\lim\limits_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = f(\varphi)$.

При этом из условия $\forall n \in \mathbb{N} \ \exists x_n \in [a,b] \hookrightarrow |f(x_n)| > n$ следует, что $\lim\limits_{k\to\infty} (f(x_{n_k})) = \infty$, т.к. $k \to \infty$, но $f(x_{n_k})$ имеет конечный предел, равный $f(\varphi)$.
Противоречие. Следовательно, утверждение верно

! Неверно для промежутков не явл. отрезками: $\frac{1}{x}$ непрерывна на $(0,1)$, но не ограничена на ней.

19) Достижение (точной) верхней и нижней граней функцией, непр. на отрезке

Теорема (Вейерштрасса): если f непрерывна на $[a, b]$, то она достигает своих точной верхней и нижней грани, т.е. $\exists \xi \in [a, b]: f(\xi) = \sup\limits_{x \in [a,b]} f(x)$, $\exists \tilde{\xi} \in [a, b]: f(\tilde{\xi}) = \inf\limits_{x \in [a,b]} f(x)$.

Док-во: непрерывная на отрезке функция ограничена, следовательно, $\exists \sup\limits_{x \in [a,b]} f(x)$ и $\inf\limits_{x \in [a,b]} f(x)$. Пусть $\sup f(x) = M$, тогда в силу определения точной верхней грани:

1) $\forall x \in [a, b] \hookrightarrow f(x) \leq M$
2) $\forall \varepsilon > 0 \ \exists x_\varepsilon \in [a, b] \hookrightarrow f(x_\varepsilon) > M - \varepsilon$

Пусть $\varepsilon = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3} \dots \frac{1}{n}$, получаем из условия 2) последовательность $\{x_n\}$, где $x_n = x_{\frac{1}{n}}$, при этом для любого её члена верно, что 1) $x_n \in [a, b]$
2) $f(x_n) > M - \frac{1}{n}$

Тогда $\forall n \in \mathbb{N} \hookrightarrow M - \frac{1}{n} < f(x_n) \leq M \Rightarrow \lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = M$

Т.к. послед-ть $\{x_n\}$ ограничена ($\forall n \in \mathbb{N} \hookrightarrow x_n \in [a, b]$), то по теореме Больцано-Вейерштрасса из неё можно выделить сходящуюся подпослед-ть $\{x_{n_k}\}$, тогда $\lim\limits_{k \to \infty} x_{n_k} = \varphi$. Функция f непрерывна в точке $\varphi \Rightarrow \lim\limits_{k \to \infty} f(x_{n_k}) = f(\varphi)$.

С другой стороны, $\{f(x_{n_k})\}$ – подпослед-ть сходящейся послед-ти $\{f(x_n)\}$, следовательно, $\lim\limits_{k \to \infty} f(x_{n_k}) = f(\varphi) = \lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = M \Rightarrow \lim\limits_{k \to \infty} f(x_{n_k}) = M \Rightarrow f(\varphi) = M = \sup f(x)$, т.е. точная верхняя грань достигается.

Аналогично для $\inf f(x)$.