Билет 1

Счетность множества рациональных чисел, несчетность множества действительных (вещественных) чисел

Th Кантора ($\mathbb{R}$ - бесконечное несчётное)

Док-во

① $\forall r \in \mathbb{Q}$ $r = \frac{m}{n}$ $m \in \mathbb{Z}$ $n \in \mathbb{N}$ $\mathbb{N} \leftrightarrow \mathbb{Q}$ ~ биекция

n \ m	0	1	-1	2	-2	...
1	0/1	1/1	-1/1	2/1		
2	0/2	1/2	-1/2	2/2		
3	0/3	1/3	-1/3			
4	0/4	1/4				
5	0/5					

Идём по диагоналям сверху вниз

$1 \leftrightarrow 0$ $4 \leftrightarrow \frac{1}{2}$

$2 \leftrightarrow 1$ $5 \leftrightarrow 2$

$3 \leftrightarrow -1$ $6 \leftrightarrow -\frac{1}{2}$

...

Продолжаем процесс (можем указать путь, как от N дойти до (N+1)-ого числа)

$\forall \mathbb{Q}$ получится, т.к. все числа есть в табличке

② $[0,1) \subset \mathbb{R}$ ~ если подмн-во несчётное, то $\mathbb{R}$ - несчётное

Предположим, что счётно $[0,1) = \{x_1, x_2, \ldots\}$ $x \in [0,1) \leftrightarrow \infty$ десятичная дробь, не имеющая периода из одних 9.

$\exists$ 4-ый параграф

$X_1 = 0,\alpha_{11}\alpha_{12}\alpha_{13}\ldots$ $\gamma = 0,\gamma_1\gamma_2\gamma_3$ ~ новое число $\in [0,1)$

$X_2 = 0,\alpha_{21}\alpha_{22}\alpha_{23}\ldots$ $\gamma_1 \neq \alpha_{11}$ $\gamma_1 \neq 9$

$X_3 = 0,\alpha_{31}\alpha_{32}\alpha_{33}\ldots$ $\gamma_2 \neq \alpha_{22}$ $\gamma_2 \neq 9$ ...

$\alpha_{ij} \in \{0,1,\ldots,8,9\}$

Билет 2

Теорема о существовании точной верхней (нижней) грани множества.

Если $A \subset \mathbb{R}$ – ограниченное сверху (снизу) мн-во, то $M\ (m) \in \mathbb{R}$ такое, что $\forall x \in A \quad x \leq M\ (x \geq m)$ назыв-ся верхней (нижней) гранью мн-ва A.

Наименьшая из верхних граней мн-ва назыв. точной верхней гранью ~ $\sup A$
Наибольшая из нижних граней назыв. точной нижней гранью ~ $\inf A$

— Th —

Каждое огран. сверху (снизу) непустое мн-во $E \subset \mathbb{R}$ имеет точную верхнюю (нижнюю) грань

Док-во

$\neq \varnothing$ (есть верхн. грань)

B – мн-во верхних граней мн-ва E. $A := \mathbb{R} \setminus B$ $\quad x \in E\ (\forall a < x)\ a \in A$

$(\forall b \in B)(\forall x > b)\ x \in B \Rightarrow A$ и B удовл. св-ву полноты

$(\exists c \in \mathbb{R})(\forall a \in A)(\forall b \in B) \quad a \overset{(1)}{\leq} c \overset{(2)}{\leq} b$ ~ нужно доказать, что $c = \sup E$

1) $c \in B$. Пусть $c \notin B \Rightarrow \exists x \in E\ x > c \quad c \overset{(1)}{<} \frac{c+x}{2} \overset{(2)}{<} x \overset{(2)}{\Rightarrow} \frac{c+x}{2} \in A$, но $\forall a \in A$: $c \geq a$,
(1) противоречие

2) Пусть $\exists M \in B,\ M < c \quad c > \frac{M+c}{2} > M \Rightarrow \frac{M+c}{2} \in B$, противоречие (2), c – наим.

Билет 3

Бесконечно малые последовательности и их свойства. Арифметические операции со сходящимися последовательностями.

$\{x_n\}$ – бесконечно малая, если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$

1. Произведение ∞ малой и ограниченной последовательности

Если $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ – ∞ малая, а $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ – огранич., то $\{x_n \cdot y_n\}_{n=1}^{\infty}$ – ∞ малая

Док-во

$\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ – огран. $\Rightarrow \exists M>0\ \forall n\in\mathbb{N}\ |y_n|\leq M$

$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ – ∞ малая $\Rightarrow \forall \varepsilon>0\ \exists N\in\mathbb{N}\ \forall n\geq N\ |x_n|<\frac{\varepsilon}{M}$

$\forall \varepsilon>0\ \exists N\in\mathbb{N}\ \forall n>N\ |x_n\cdot y_n|<\frac{\varepsilon}{M}\cdot M=\varepsilon$, чтд

2. Σ конечного числа ∞ малых величин есть величина ∞ малая

Док-во

α_n и β_n – ∞ малые величины

$\forall \varepsilon>0\ \exists N_1\in\mathbb{N}\ \forall n>N_1:\ |\alpha_n|<\frac{\varepsilon}{2}$

$\exists N_2\in\mathbb{N}\ \forall n>N_2:\ |\beta_n|<\frac{\varepsilon}{2}$

$N=\max(N_1,N_2)\ \forall n>N:$

$|\alpha_n+\beta_n|\leq|\alpha_n|+|\beta_n|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$

$\forall$ пара м.б. представлена ∞ малой, чтд

3. ∞ малая ограничена

Док-во

$M=\max\{\varepsilon,|a_1|,\dots,|a_{N-1}|\}$

$\forall n\geq N:\ |a_n|\leq M$, чтд

4. Связь ∞ малых и ∞ больших последовательность

Если $x_n\neq 0\ \forall n\in\mathbb{N}$, то $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ – ∞ малая $\Leftrightarrow \left\{\frac{1}{x_n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ – ∞ большая

Док-во

1. Пусть $\{x_n\}$ – ∞ малая $\Rightarrow \forall\varepsilon>0\ \exists N\in\mathbb{N}\ \forall n>N\ \ 0<|x_n|<\varepsilon$

$\left|\frac{1}{x_n}\right|>\frac{1}{\varepsilon};\ \frac{1}{x_n}\in U_{\varepsilon}(+\infty)$

2. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=+\infty \Rightarrow \forall\varepsilon>0\ \exists N\in\mathbb{N}\ \forall n>N\ \ \frac{1}{x_n}>\frac{1}{\varepsilon}$

$0<x_n<\varepsilon \Rightarrow |x_n|<\varepsilon$

Последовательность наз-в. сходящейся (к a), если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$

Арифметические операции:

Если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \ell_1$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \ell_2$

① $x_n \pm y_n$ сходится к $\ell_1 \pm \ell_2$

Док-во

$$\left.\begin{aligned}&\forall \varepsilon>0\ \exists N_1\in\mathbb{N}\ \forall n>N_1\quad |x_n-\ell_1|<\frac{\varepsilon}{2}\\ &\forall \varepsilon>0\ \exists N_2\in\mathbb{N}\ \forall n>N_2\quad |y_n-\ell_2|<\frac{\varepsilon}{2}\end{aligned}\right\}\ \begin{aligned}&\forall n>\max(N_1,N_2)\\ &|(x_n\pm y_n)-(\ell_1\pm\ell_2)|\le|x_n-\ell_1|+|y_n-\ell_2|<\varepsilon,\end{aligned}$$

чтд

② $x_n \cdot y_n$ сходится к $\ell_1 \cdot \ell_2$

Док-во

y_n - сходящаяся $\Rightarrow \{y_n\}$ ограничена:

$$\exists M\in\mathbb{R}_+\ \forall n\in\mathbb{N}\ |y_n|\le M$$

$$\forall \varepsilon>0\ \exists N_1\in\mathbb{N}\ \forall n>N_1\ |x_n-\ell_1|<\frac{\varepsilon}{2M}$$

$$\forall \varepsilon>0\ \exists N_2\in\mathbb{N}\ \forall n>N_2\ |y_n-\ell_2|<\frac{\varepsilon}{2(|\ell_1|+1)}$$

$\forall n>\max(N_1,N_2)$:

$$|x_ny_n-\ell_1\ell_2|\le|x_ny_n-\ell_1y_n|+|\ell_1y_n-\ell_1\ell_2|\le|y_n||x_n-\ell_1|+(|\ell_1|+1)|y_n-\ell_2|<\varepsilon,$$ чтд

③ Если дополнительно $y_n\ne 0$ $\forall n\in\mathbb{N}$ $\ell_2\ne 0$, то $\frac{x_n}{y_n}$ сходится к $\frac{\ell_1}{\ell_2}$

Док-во

$$\lim_{n\to\infty} y_n\ne 0 \Rightarrow \exists N\in\mathbb{N}\ \forall n>N\ |y_n|>\frac{|\ell_2|}{2}$$ ~ отделимость от 0

$$\forall \varepsilon>0\ \exists N_1\in\mathbb{N}\ \forall n>N_1\ |x_n-\ell_1|<\frac{\varepsilon}{4}\cdot|\ell_2|$$

$$\forall \varepsilon>0\ \exists N_2\in\mathbb{N}\ \forall n>N_2\ |y_n-\ell_2|<\frac{\varepsilon|\ell_2|^2}{4(|\ell_1|+1)}$$

$\forall n>\max(N,N_1,N_2)$

$$\left|\frac{x_n}{y_n}-\frac{\ell_1}{\ell_2}\right|=\left|\frac{x_n\ell_2-y_n\ell_1}{y_n\ell_2}\right|\le\frac{|x_n\ell_2-\ell_1\ell_2|}{|y_n||\ell_2|}+\frac{|\ell_1\ell_2-y_n\ell_1|}{|y_n||\ell_2|}\le\frac{|x_n-\ell_1|\cdot 2}{|\ell_2|}+\frac{|\ell_1|\cdot|\ell_2-y_n|}{\frac{\ell_2^2}{2}}<\varepsilon,$$

чтд

Билет 4

Свойства пределов, связанные с неравенствами.

① Ограниченность сходящихся последовательностей

x_n сходится $\Rightarrow$ x_n ограничена

Док-во

$\varepsilon := 1 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n > N \quad |x_n - \ell| < 1$, т.е. $-1 + \ell < x_n < \ell + 1$

$M := \max(x_1, x_2, \ldots, x_N, \ell + 1) \qquad m := \min(x_1, x_2, \ldots, x_N, -1 + \ell)$

$\forall n \in \mathbb{N} \quad m \le x_n \le M$, чтд

② Отделимость от нуля

Если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \ell \neq 0$, то $\exists N \in \mathbb{N}: \forall n > N \ ((\operatorname{sign} x_n = \operatorname{sign} \ell) \wedge |x_n| > \frac{|\ell|}{2})$

Док-во

$\varepsilon := \frac{|\ell|}{2} > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} : \forall n > N \quad |x_n - \ell| < \frac{|\ell|}{2} \Leftrightarrow -\frac{|\ell|}{2} + \ell < x_n < \ell + \frac{|\ell|}{2}$

1. $\ell > 0 \Rightarrow x_n > \frac{\ell}{2}$ и $\operatorname{sign} x_n = \operatorname{sign} \ell$
2. $\ell < 0 \Rightarrow x_n < \frac{\ell}{2}$ и $\operatorname{sign} x_n = \operatorname{sign} \ell$, чтд

③ Переход к пределу в неравенствах

Если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \ell_1$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \ell_2$, $\forall n \in \mathbb{N} \quad x_n \le y_n$, то $\ell_1 \le \ell_2$

Док-во

"От противного"

Предположим, что $\ell_1 > \ell_2 \quad \varepsilon := \frac{\ell_1 - \ell_2}{2} > 0$

$\exists N_1 \in \mathbb{N} \quad \forall n > N_1 \quad |x_n - \ell_1| < \frac{\ell_1 - \ell_2}{2} = \varepsilon \quad (1)$

$\exists N_2 \in \mathbb{N} \quad \forall n > N_2 \quad |y_n - \ell_2| < \frac{\ell_1 - \ell_2}{2} \quad (2)$

$\forall n > \max(N_1, N_2) \quad y_n \overset{(2)}{<} \frac{\ell_1 + \ell_2}{2} \overset{(1)}{<} x_n$ – противоречие, чтд

④ О промежуточной последовательности

Если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} z_n = \ell$ $\forall n \in \mathbb{N}$ $x_n \le y_n \le z_n$, то $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \ell$

Док-во

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N_1 \in \mathbb{N} \ \forall n > N_1 \ |x_n - \ell| < \varepsilon$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N_2 \in \mathbb{N} \ \forall n > N_2 \ |z_n - \ell| < \varepsilon$

$\max(N_1, N_2) = N \in \mathbb{N}$

$\forall n > \max(N_1, N_2) \quad \ell - \varepsilon < x_n \le y_n \le z_n < \ell + \varepsilon \Rightarrow |y_n - \ell| < \varepsilon$

Билет 5

Теорема о пределе ограниченной монотонной последовательности.

Последовательность x_n называется ..., если

монотонна
- неубывающей $\forall n \in \mathbb{N}$ $x_n \leq x_{n+1}$
- невозрастающей $\forall n \in \mathbb{N}$ $x_n \geq x_{n+1}$
- возрастающей $\forall n \in \mathbb{N}$ $x_n < x_{n+1}$
- убывающей $\forall n \in \mathbb{N}$ $x_n > x_{n+1}$

строго монотонна

—Th— Вейерштрасса

Каждая неубывающая (невозрастающая) ограниченная сверху (снизу) последовательность сходится, причём её предел равен $\sup x_n$ ($\inf x_n$)

Док-во

Б.О.О. $x_n \leq x_{n+1}$

$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ ограничена сверху $\Rightarrow \exists \sup \{x_n\} = l$:

1. $\forall n \in \mathbb{N}$ $x_n \leq l < l + \varepsilon$ $(\forall \varepsilon > 0)$
2. $\forall \varepsilon > 0$ $\exists N \in \mathbb{N}$ $x_N > l - \varepsilon$

Из монотонности $\Rightarrow$ $\forall n > N$ $x_n \geq x_{n-1} \geq \ldots \geq x_N > l - \varepsilon$

$$l + \varepsilon > x_n > l - \varepsilon \Rightarrow \lim_{n \to \infty} x_n = l$$

-Add-

Любая монотонная последовательность имеет предел в $\overline{\mathbb{R}}$

Док-во

Пусть $\{x_n\}$ - неубывающая и неограниченная сверху:

$\forall \varepsilon > 0$ $\exists N \in \mathbb{N}$ $x_N > \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow \forall n > N$ $x_n \geq x_N > \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow \lim_{n \to \infty} x_n = +\infty$, чтд

Билет 6

Число e.

Последовательность $x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ сходится. Её предел назыв. числом e

Док-во

$y_n := \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$ $y_n > 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$

нер-во Бернулли

$$\frac{y_{n-1}}{y_n} = \frac{\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}} = \frac{\left(\frac{n}{n-1}\right)^n}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1}} = \frac{n}{n+1}\left(\frac{n^2}{n^2-1}\right)^n = \frac{n}{n+1}\left(1+\frac{1}{n^2-1}\right)^n \geq \frac{n}{n+1}\left(1+\frac{n}{n^2-1}\right) = \frac{n^3+n^2-n}{n^3+n^2-n-1} > 1$$

убывающая ~

$\lim\limits_{n\to\infty} y_n = e$ $\quad x_n = \frac{y_n}{1+\frac{1}{n}} \to e$, чтд

$\lim\limits_{x\to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$ $\quad \lim\limits_{x\to\infty} \left(1+\frac{n}{x}\right)^x = e^n$ $\quad \lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = 1$

Билет 7

Теорема Кантора о вложенных отрезках.

Всякая последовательность вложенных отрезков $\{[a_n, b_n]\}_{n=1}^{\infty}$ (т.е. $[a_{n+1}, b_{n+1}] \overset{(*)}{\subset} [a_n, b_n]$ $\forall n \in \mathbb{N}$) имеет непустое пересечение ($\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n] \neq \varnothing$) $\forall n \in \mathbb{N}$ $a_n \leq b_n$ "нерастяжимость" числовой оси

Док-во

(*) $a_{n+1} \geq a_n$, $b_{n+1} \leq b_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$ (a_n – неубывающая, b_n – невозрастающая)

$$\left.\begin{array}{ll} a_n \leq b_1 \quad \forall n \in \mathbb{N} & \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \sup\{a_n\} = a \\ b_n \geq a_1 \quad \forall n \in \mathbb{N} & \lim\limits_{n\to\infty} b_n = \inf\{b_n\} = b \end{array}\right\} \Rightarrow a_n \leq a \leq b \leq b_n$$

по св-ву предел. переходов в нер-вах

$\Downarrow$

$[a, b] \subset \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n]$, чтд

вырожд. случай: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$

опред. стягив. системы отр. $\sim (b_n - a_n) \to 0$

Билет 8

Подпоследовательности. Два определения частичного предела.

Если $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ возрастающая последовательность натуральных чисел, то $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ называется подпоследовательностью посл-ти $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$

1. Если $\exists \lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = \ell$, то ℓ называется частичным пределом послед. $\{x_n\}$

Эквивалентное определение частичного предела

2. Число $\ell \in \mathbb{R}$ является частичным пределом последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$

$$\Updownarrow$$

$$\forall \varepsilon > 0 \ \forall N \in \mathbb{N} \ \exists n > N \ |x_n - \ell| < \varepsilon$$

Док-во

1. Пусть ℓ – част. предел: $\forall \varepsilon > 0 \ \exists K \in \mathbb{N} \ \forall k > K \ |x_{n_k} - \ell| < \varepsilon$

$\forall N \in \mathbb{N} \ \exists K_1 \in \mathbb{N} \ n_{K_1} > N \ \forall k > \max(K, K_1) \ |x_{n_k} - \ell| < \varepsilon$

$\{n_k\}\uparrow$ ~ возрастающая послед. натур. чисел

2. Пусть для ℓ верно, что $\forall \varepsilon > 0 \ \forall N \in \mathbb{N} \ \exists n > N \ |x_n - \ell| < \varepsilon$

Построим сходящуюся подпоследовательность:

$\varepsilon := 1 \quad N := 1 \quad n_1 \in \mathbb{N} \quad |x_{n_1} - \ell| < 1$

$\varepsilon := \frac{1}{2} \quad N := n_1 \quad n_2 \in \mathbb{N} \quad |x_{n_2} - \ell| < \frac{1}{2}$

$\dots$

$\varepsilon := \frac{1}{k} \quad N := n_{k-1} \quad n_k \in \mathbb{N} \quad |x_{n_k} - \ell| < \frac{1}{k} \Rightarrow \{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty} : \forall \varepsilon > 0 \ \exists K \in \mathbb{N} : \forall k > K \ |x_{n_k} - \ell| < \varepsilon$, чтд

Билет 9

Теорема о трёх определениях верхнего и нижнего пределов.

Верхним (нижним) пределом числовой последовательности называется наибольший (наименьший) из её частич. пределов

— Th —

Каждая ограниченная последовательность $\{x_n\}$ имеет конечные верхний и нижний пределы $L = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n$ и $\ell = \underline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n$

Справедливы следующие утверждения:

① $(\forall\varepsilon>0\ \exists N\in\mathbb{N}\ \forall n>N\ \underline{x_n<L+\varepsilon}) \wedge (\forall\varepsilon>0\ \forall N\in\mathbb{N}\ \exists n>N\ \underline{x_n>L-\varepsilon}) \sim \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n$

$(\forall\varepsilon>0\ \exists N\in\mathbb{N}\ \forall n>N\ \underline{x_n>\ell-\varepsilon}) \wedge (\forall\varepsilon>0\ \forall N\in\mathbb{N}\ \exists n>N\ \underline{x_n<\ell+\varepsilon}) \sim \underline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n$

② $L = \lim\limits_{n\to\infty} \sup\{x_n, x_{n+1}, \dots\} \sim \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} \sup x_n$

$\ell = \lim\limits_{n\to\infty} \inf\{x_n, x_{n+1}, \dots\} \sim \underline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} \inf x_n$

Док-во

для верхнего предела

1) $s_n = \sup\{x_n, x_{n+1}, \dots\} = \sup\limits_{m\geq n} x_m \Rightarrow s_n \geqslant s_{n+1}$ (s_{n+1} имеет тот же sup, что и s_n)

$s_n \geqslant \inf\{x_1, x_2, \dots\}$

Тогда по Th Вейерштрасса $\exists L := \lim\limits_{n\to\infty} s_n = \inf\{s_n\}$

$\forall\varepsilon>0\ \exists N\in\mathbb{N}\ \forall n>N\ L-\varepsilon < s_n < L+\varepsilon \Rightarrow x_n < L+\varepsilon$

2) Возьмём произвольное N:

$\forall N\in\mathbb{N}\ s_{N+1} \geq L$, где $s_{N+1} = \sup\{x_{N+1}, x_{N+2}, \dots\}$

$\exists n>N:\ x_n > s_{N+1} - \varepsilon \geq L - \varepsilon$

Нужно доказать, L - частичный предел

$\varepsilon := 1 \quad |x_{n_1} - L| < \varepsilon = 1$

$\exists N_1\in\mathbb{N}\ \forall n>N\ x_n < L+\varepsilon = L+1$

$N_1+1\ \exists n_1 > N_1+1\ x_{n_1} > L-\varepsilon = L-1$

$\varepsilon := \frac{1}{2}$ $\quad \exists N_2 \in \mathbb{N}\ \forall n > N\ \ x_n < L + \frac{1}{2}$

$\max(N_2+1, n)\ \ \exists n_2 > \max(N_2+1, n_1)\ \ x_{n_2} > L - \frac{1}{2}$

$\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}\ \ \forall k \in \mathbb{N}\ \ |x_{n_k} - L| < \frac{1}{k}$

$$L - \frac{1}{k} < x_{n_k} < L + \frac{1}{k}$$

$$\xrightarrow{k \to \infty} L$$

Возьмем предел некой подпоследовательности:

$t := \lim\limits_{i \to \infty} x_{m_i}$ $\quad \forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n > N\ \ x_n < L + \varepsilon$

$\{m_i\} \uparrow \quad \exists I \in \mathbb{N}\ \ \forall i > I\ \ m_i > N \Rightarrow x_{m_i} < L + \varepsilon \quad i \to \infty$

$$t \leq L + \varepsilon$$

$\forall \varepsilon > 0\ \ t \leq L + \varepsilon \Rightarrow t \leq L \Rightarrow L$ - верхний предел, чтд

— Add —

Для произвольной последовательности верхний и нижний предел также существуют, но могут быть $\pm\infty$

Билет 10

Теорема Больцано–Вейерштрасса.

Из каждой ограниченной последовательности можно выделить сходящуюся подпоследовательность.

Док-во

$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ – ограниченная $\Rightarrow \exists a_1, b_1 \in \mathbb{R}\ \forall n \in \mathbb{N}\quad a_1 \leq x_n \leq b_1$

Разобьем $[a_1, b_1]$ на два отрезка:

$$\left[a_1, \frac{a_1+b_1}{2}\right], \left[\frac{a_1+b_1}{2}, b_1\right]$$

~ какой-то из отрезков содержит бесконечно много членов последов. (например, $[a_2, b_2]$)

Повторяя это, получим

$\{[a_n, b_n]\}_{n=1}^{\infty}$ – последовательность стягивающихся вложенных отрезков $\left(0 < b_n - a_n = \frac{b_1-a_1}{2^n} < \frac{b_1-a_1}{2}\right)$, $\xrightarrow{n\to\infty} 0$

По Th Кантора:

$$\{c\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n]$$

Докажем, что c – частичный предел

$x_{n_1} = x_1$

$x_{n_2} \in [a_2, b_2]$, $n_2 > n_1$

...

$x_{n_k} \in [a_k, b_k]$, $n_k > n_{k-1}$ (т.к. бесконечно много элементов) и $c \in [a_k, b_k]$

$$0 \leq |c - x_{n_k}| \leq b_k - a_k = \frac{b_1 - a_1}{2^k} \xrightarrow{k\to\infty} 0, \text{ чтд}$$

— Add to Th —

$$\forall \{x_n\}_{n=1}^{\infty}\quad \lim_{k\to\infty} x_{n_k} = \ell \in \overline{\mathbb{R}}$$

Любая числовая последовательность имеет хотя бы 1 частичный предел (конечный или бесконечный)

Док-во

Предположим, что $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ – неогран. сверху

$1 \in \mathbb{N}\quad \exists n_1 : x_{n_1} > 1$

$2 \in \mathbb{N}\quad \exists n_2 : x_{n_2} > \max(2, x_1, \dots, x_{n_1})\ n_2 > n_1$

...

$x_{n_k} > \max(k, x_1, \dots, x_{n_{k-1}})$

$\{x_{n_k}\} : x_{n_k} > k \Rightarrow \lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = +\infty$, чтд

Билет 11

Критерий Коши сходимости числовой последовательности.

Последовательность $\{x_n\}$ называется фундаментальной (последов. Коши), если
$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} \ \forall n > N \ \forall p \in \mathbb{N} \ |x_{n+p} - x_n| < \varepsilon$

— Th —

Числов. последоват. сходится $\Leftrightarrow$ она фундаментальна

Док-во

① Из сходимости к фундаментальности

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{n\to\infty} x_n = l \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} \ \forall n > N \ |x_n - l| < \frac{\varepsilon}{2} \\ \qquad\qquad\qquad \forall p \in \mathbb{N} \ |x_{n+p} - l| < \frac{\varepsilon}{2}\end{array}\right] \Rightarrow |x_{n+p} - x_n| \le |x_{n+p} - l| + |l - x_n| < \varepsilon$$

② Из фундаментальности к сходимости

1. фундаментальность $\Rightarrow$ ограниченность

$\varepsilon := 1 \ \exists N \in \mathbb{N} \ \forall n > N \ \forall p \in \mathbb{N} \ |x_{n+p} - x_n| < 1$

$n = N+1 \ \forall m \geq n: \ x_{N+1} - 1 \le x_m \le x_{N+1} + 1$

$\forall n \in \mathbb{N} \quad \min(x_1, \dots, x_N, x_{N+1} - 1) \le x_n \le \max(x_1, \dots, x_N, x_{N+1} + 1)$

По Th Больцано-Вейерштрасса: $\exists \{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty} \ \lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = l$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists K \in \mathbb{N} \ \forall k > K \ |x_{n_k} - l| < \frac{\varepsilon}{2}$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} \ \forall n > N, \forall p \in \mathbb{N} \ |x_{n+p} - x_n| < \frac{\varepsilon}{2}$ ~ фундаментальность

$\forall m > \max(N, n_{K+1}): \ |x_m - l| \le |x_m - x_{n_m}| + |x_{n_m} - l| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$, чтд

Билет 12

Определение предела функции в точке в терминах окрестностей (по Коши) и в терминах последовательностей (по Гейне), их эквивалентность.

Пусть функция f определена в некоторой $\mathring{U}_{\delta_0}(a)$, $a \in \overline{\mathbb{R}} \cup \{\infty\}$.
Тогда $\ell = \lim\limits_{x \to a} f(x)$ $(\ell \in \overline{\mathbb{R}} \cup \{\infty\})$ означает, что

1. **По Коши**

   $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x \in \mathring{U}_\delta(a) \ \ f(x) \in U_\varepsilon(\ell)$

2. **По Гейне**

   $\forall \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset D(f) \setminus \{a\}, \lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \ \hookrightarrow \ \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = \ell$ ~ последовательность Гейне

— Th — об эквивалентности

Док-во

① Коши $\Rightarrow$ Гейне

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \Rightarrow \forall \delta > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} \ \forall n > N \ |x_n - a| < \delta$ и $x_n \neq a \Rightarrow x_n \in \mathring{U}_\delta(a) \Rightarrow f(x_n) \in U_\varepsilon(\ell)$

$\Downarrow$

$\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = \ell$

② Гейне $\Rightarrow$ Коши

"От противного"

$\exists \varepsilon > 0 \ \forall \delta > 0 \ \exists x \in \mathring{U}_\delta(a) : \ f(x) \notin U_\varepsilon(\ell)$

$\delta := 1 \quad \exists x_1 \in \mathring{U}_1(a) \quad f(x_1) \notin U_\varepsilon(\ell)$

$\delta := \frac{1}{2} \quad \exists x_2 \in \mathring{U}_{\frac{1}{2}}(a) \quad f(x_2) \notin U_\varepsilon(\ell)$

$\dots$

$\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \ \forall n: \ x_n \in \mathring{U}_{\frac{1}{n}}(a) \quad f(x_n) \in U_\varepsilon(\ell)$

$\Rightarrow$ 1. $a \neq \pm\infty, \infty$ (проколотая) $0 < |x_n - a| < \frac{1}{n}$

$\Downarrow$ по Гейне $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ ımq

$\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = \ell$

2. $a = +\infty \Rightarrow x_n > n$

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$

— Add —

$\forall a, \ell \in \mathbb{R}$: ~ конечные числа

По Коши:

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \ \forall x, \ 0 < |x - a| < \delta \ \hookrightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$

Билет 13

Критерий Коши существования предела функции.

~ условие Коши

Существует конечный предел $\lim\limits_{x\to a} f(x) \Leftrightarrow \forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0\ \forall x', x'' \in \mathring{U}_\delta(a)$
$|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$

Док-во

① **Необходимость**

$\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell \Rightarrow \forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0\ \forall x \in \mathring{U}_\delta(a)\quad f(x) \in U_{\frac{\varepsilon}{2}}(\ell) \Leftrightarrow |f(x) - \ell| < \frac{\varepsilon}{2}$

$\forall x', x'' \in \mathring{U}_\delta(a)\quad |f(x') - f(x'')| \leq |f(x') - \ell| + |\ell - f(x'')| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

② **Достаточность**

Рассмотрим произвольную послед. Гейне:

$\forall \{x_n\} \subset D(f) \setminus \{a\},\ \lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \Leftrightarrow \forall \delta>0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n>N\quad 0 < |x_n - a| < \delta$

из условия Коши ~ $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$ и $x_n \in \mathring{U}_\delta(a)$

$\forall \varepsilon>0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n>N\ \forall p \in \mathbb{N}\quad |f(\underset{x'}{x_{n+p}}) - f(\underset{x''}{x_n})| < \varepsilon$

$\exists \ell = \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)$

"От противного"

(*) Единственность конечной последовательности

Предположим, что есть две последовательности $\{x_n'\}, \{x_n''\}$ и $\ell_1 = \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n')$ и $\ell_2 = \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n'')$

состоит 2 послед., которые стремятся к $a \Rightarrow \exists \lim x_n$ и $\ell_1 = \ell_2$

Рассмотрим $\{x_1', x_1'', x_2', x_2'', x_3' \ldots\} = \{x_n\}$ ~ последов. Гейне

чтд

Билет 14

Существование односторонних пределов у монотонных функций.

Пусть f определена в (a,b), $-\infty<a<b<+\infty$. Тогда существует левосторонний предел B в т. b ($B=\lim\limits_{x\to b-0} f(x) = f(b-0)$)

—Th—

Если 1) f неубывающая на $(a,b) \Rightarrow \exists \lim\limits_{x\to b-0} f(x) = \sup\limits_{x\in(a,b)} f(x)$

2) f невозрастающая на $(a,b) \Rightarrow \exists \lim\limits_{x\to b-0} f(x) = \inf\limits_{x\in(a,b)} f(x)$

3) f неубывающая на $(a,b) \Rightarrow \exists \lim\limits_{x\to a+0} f(x) = \inf\limits_{x\in(a,b)} f(x)$

4) f невозрастающая на $(a,b) \Rightarrow \exists \lim\limits_{x\to a+0} f(x) = \sup\limits_{x\in(a,b)} f(x)$

Док-во

2 утверждение $m = \inf\limits_{x\in(a,b)} f(x)$

1. $m=-\infty$ $\forall \varepsilon>0$ $(\exists \tilde{x}\in(a,b))$ $f(\tilde{x}) < -\frac{1}{\varepsilon}$

$\delta := b-\tilde{x} > 0$ $(\forall x,\ \underset{\overset{\shortparallel}{\tilde{x}}}{b-\delta} < x < b)$ $f(x) \le f(\tilde{x}) < -\frac{1}{\varepsilon} \Leftrightarrow f(x) \in U_\varepsilon(-\infty)$

2. $m>-\infty$ $\forall \varepsilon>0$ $(\exists \tilde{x}\in(a,b))$ $m \le f(\tilde{x}) < m+\varepsilon \Rightarrow m-\varepsilon < m \le f(x) \le f(\tilde{x}) < m+\varepsilon$

$f(x) \in U_\varepsilon(m)$, чтд

Аналогично для других случаев

Билет 15

Непрерывность функции в точке. Непрерывность сложной функции.

1) Пусть f определена в некоторой окр-ти $U_{\delta_0}(x_0)$, $x_0 \in \mathbb{R}$. Если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$, то f называется непрерывной в т. x_0.

2) Пусть f определена в $(a, x_0]$ $(-\infty \le a < x_0)$. Если $f(x_0-0) = f(x_0)$, то f непрерывна слева в x_0.

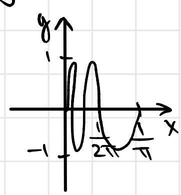
3) Пусть f определена в $[x_0, b)$ $(x_0 < b \le +\infty)$. Если $f(x_0+0) = f(x_0)$, то f непрерывна справа в x_0

4) Пусть f определена в $\mathring{U}_{\delta_0}(x_0)$. Если f не является непрерывной в x_0, то x_0 называется точкой разрыва функции f.

5) Если x_0 — точка разрыва f, и $\exists$ конечные $f(x_0-0)$, $f(x_0+0)$, то x_0 — точки разрыва I-ого рода. В противном случае — II рода

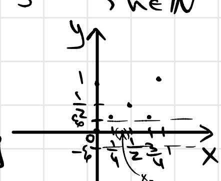
6) Точка разрыва I-ого рода называется точка устранимого разрыва, если $f(x_0-0) = f(x_0+0)$. Точка разрыва II-ого рода называется точкой бесконечного разрыва, если $\exists$ хотя бы один бесконечный $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)$ или $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$

- $f(x) = \operatorname{sign} x$: $f(+0) = 1$, $f(-0) = -1$
- $f(x) = |\operatorname{sign} x|$: $f(+0) = f(-0) = 1 \ne f(0) (=0)$
- $f(x) = \frac{1}{x}$ $f(+0) = +\infty$, $f(-0) = -\infty$
- $f(x) = \sin\frac{1}{x}$



$y_0 \in [-1, 1]$ $\exists \{x_n\}, x_n \to 0$, $\sin\frac{1}{x_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} y_0 \Rightarrow \nexists \lim$

- функция Дирихле
- функция Римана $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{n}, \text{ если } x = \frac{m}{n} \text{ (несократимая) и } n - \min \text{ из возмож.}, & m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N} \\ 0, \text{ если } x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} \end{cases}$



$x_0 \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0) = 0$ $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta = \min\left\{ \left|x_0 - \frac{[nx_0]}{n}\right|, \left|x_0 - \frac{[nx_0]+1}{n}\right| : \frac{1}{n} \ge \varepsilon \right\}$

$\forall x$, $|x - x_0| < \delta$ $|f(x)| < \varepsilon$

— Th 1 —

Пусть f определена в некоторой $U_{\delta_0}(x_0)$. Следующие утверждения эквивалентны:

1. f непрерывна в x_0
2. $\forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0\ \forall x, |x-x_0|<\delta\ \ |f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$ ~ опр. предела по Коши
3. $\forall \{x_n\}\subset D(f), \lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0\ \ \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=f(x_0)$ ~ опред. предела по Гейне

Следствия:

1. Ограниченность

Если f непрерывна в т. x_0, то $\exists \delta>0\ \exists M: \forall x, |x-x_0|<\delta\ \ |f(x)|\leq M$

2. Отделимость от нуля

Если f непрерывна в т. x_0, $f(x_0)\neq 0$, то $\exists\delta>0\ \forall x, |x-x_0|<\delta$
$|f(x)|>\dfrac{|f(x_0)|}{2}$ и $\operatorname{sign} f(x) = \operatorname{sign} f(x_0)$

3. Арифметические операции

Если f, g непрерывны в x_0, то $f\pm g, f\cdot g$ и $(g(x_0)\neq 0)$ $\frac{f}{g}$ непрер. в x_0

— Th — Переход к пределу в сложной функции

Если $\lim f(x) = a$ и g непрерывна в a, то $g\circ f$ $(g(f(x))$, то
$\lim\limits_{x\to x_0 \pm 0} g(f(x)) = g(a)$

Док-во

Возьмём послед. Гейне: $\forall \{x_n\}\subset D(g\circ f), x_n \neq (\lessgtr) x_0, \lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$
$\lim\limits_{n\to\infty} \underbrace{f(x_n)}_{y_n} = a \overset{\text{Th 1}}{\Longrightarrow} \lim\limits_{n\to\infty} g(y_n) = g(a) \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} g(f(x_n)) = g(a)$, чтд

— Следствие — Непрерывность сложной функции

Если f непрерывна в x_0, а g непрерывна в $f(x_0)$, то $g\circ f$ непрерывна в x_0 ~ частный случай $(f(x_0)=a)$

— Замечание — О пределе сложной функции

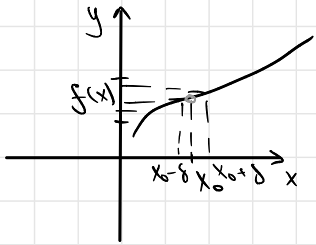
Из $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=a$, $\lim\limits_{y\to a} g(y)=b$ не следует, что $\lim\limits_{x\to x_0} g(f(x))=b$.

Последнее равенство справедливо, если $f(x)\neq a$ для $x\in \overset{\circ}{U}_{\delta_0}(x_0)$, $\delta_0>0$

Пример, когда неверно

$g(y)=|\operatorname{sign} y|$, $f(x)\equiv 0$ $\quad \lim\limits_{y\to 0} g(y)=1$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(f(x))=0$

Геометрический смысл непрерывности:



— Th 3 — О точках разрыва монотонной функции

Если f монотонна на (a,b) $(-\infty\le a<b\le+\infty)$, то она может иметь на (a,b) не более, чем счётное мн-во точек разрыва. Все эти точки разрыва (если $\exists$) — точки разрыва I-ого рода, причём не устранимого.

Док-во

Пусть f не убывает на (a,b), $x_0\in(a,b)$ — точка разрыва.

$$\left.\begin{aligned} &1.\ x<x_0 \Rightarrow f(x)\le f(x_0) \Rightarrow f(x_0-0)\le f(x_0) \\ &2.\ x>x_0 \Rightarrow f(x)\ge f(x_0) \Rightarrow f(x_0+0)\ge f(x_0)\end{aligned}\right\} \Rightarrow f(x_0-0)<f(x_0+0)$$

x_0 — точка разрыва $\to (f(x_0-0), f(x_0+0))$

$x_1<x_2$ — 2 точки разрыва

$f(x_1+0)\le f(x_2-0) \Rightarrow (f(x_1-0), f(x_1+0))\cap(f(x_2-0), f(x_2+0))=\varnothing$

Каждой точке разрыва соответствует интервал.

Выберем $r\in\mathbb{Q}$: $r\in(f(x_0-0), f(x_0+0))\cap\mathbb{Q}$. Если $x_1\neq x_2$, то $r_1\neq r_2 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ точкам разрыва соответствуют $\mathbb{Q}$ числа $\Rightarrow$ не более чем счётно, чтд

Билет 16

Ограниченность функции, непрерывной на отрезке.

Функция f называется непрерывной на мн-ве X, если $\forall x_0 \in X\ \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in X, |x - x_0| < \delta\ \ |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

$X = [a, b]$ – непрерывна на отрезке $[a, b]$

Функция $f: X \to \mathbb{R}$ называется ограниченной на X, если множество её значений $f(X)$ ограничено.

— Th — 1-ая Th Вейерштрасса о непрер. на отрезке функциях

Если f непрерывна на $[a, b]$, то f ограничена на $[a, b]$

Док-во

"От противного"

Пусть f неограничена сверху: $\sup\limits_{x \in [a,b]} f(x) = +\infty$

$\forall n \in \mathbb{N}\ \exists x_n \in [a, b]:\ f(x_n) > n$

Th Больцано-Вейерштрасса

$a \le x_n \le b,\ f(x_n) > n \Rightarrow \exists \{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}\ \lim\limits_{k \to \infty} x_{n_k} = x_0$

$\Downarrow$ Th о предел. переходах

$a \le x_0 \le b$

$\Rightarrow \lim\limits_{k \to \infty} f(x_{n_k}) = f(x_0)$

$f(x_{n_k}) > n_k \Rightarrow \lim\limits_{k \to \infty} f(x_{n_k}) = +\infty$, ч.т.д.

Билет 17

Достижение точной верхней и точной нижней граней функцией, непрерывной на отрезке.

—Th— 2-ая Th Вейерштрасса

Если f непрерывна на $[a,b]$, то $\exists x', x'' \in [a,b]$:

$$f(x') = \sup_{x\in[a,b]} f(x) \ ; \ f(x'') = \inf_{x\in[a,b]} f(x)$$

Док-во

$M = \sup\limits_{x\in[a,b]} f(x) \quad \forall \varepsilon>0 \ \exists x\in[a,b] \quad M-\varepsilon< f(x) \le M$

$\varepsilon = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots \quad \{x_n\} \subset [a,b]$ и $M-\frac{1}{n} < f(x_n) \le M$

$a \le x_n \le b$

$\Downarrow$ Th Больцано – Вейерштрасса

$\exists \{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty} \quad \lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = x_0$

$\swarrow$ Th о предел. переходах

$a \le x_0 \le b \quad \to \lim\limits_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = f(x_0)$

Тогда $M - \frac{1}{n_k} < f(x_{n_k}) \le M$, $k\to\infty$

$$M = \lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = f(x_0), \text{ чтд}$$

Билет 18

Больцано – Коши

Теорема о промежуточных значениях непрерывной функции.

Пусть f непрерывна на $[a,b]$. $\forall c=f(x_1)<d=f(x_2)$, $x_1,x_2\in[a,b]$)
$\forall e\in(c,d)\ \exists\gamma\in[a,b]:\ f(\gamma)=e$

Док-во

Рассмотрим частный случай: $c<e=0<d$

$\{a_1,b_1\}=\{x_1,x_2\}$ $\quad f(a_1)\cdot f(b_1)<0$ ~ ф-ция в концах отрезков принимает знач. разных знаков
$a_1<b_1$

$f\left(\frac{a_1+b_1}{2}\right)=0$ ~ доказано

$f\left(\frac{a_1+b_1}{2}\right)\neq 0$ $\quad [a_2,b_2]$ $\quad \{a_2,b_2\}\subset\{a_1,b_1,\frac{a_1+b_1}{2}\}$

берём 2 числа разн. зн.

$f(a_2)\cdot f(b_2)<0$ $\quad \{\frac{a_1+b_1}{2}\}\subset\{a_2,b_2\}$

Делим пополам, либо после конечного числа делений получим 0, либо процесс неограниченный и строим последовательность стягив. отрезков:

$\{[a_n,b_n]\}_{n=1}^{\infty}$ $\quad b_n-a_n=\frac{|x_1-x_2|}{2^{n-1}}$

$\{\gamma\}=\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}[a_n,b_n]$ $\quad \lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}b_n=\gamma\in[a,b]$

$f(\gamma)=\lim\limits_{n\to\infty}f(a_n)=\lim\limits_{n\to\infty}f(b_n)$

$f(a_n)\cdot f(b_n)<0 \Rightarrow f^2(\gamma)\le 0\Rightarrow f(\gamma)=0$

Th о предельных переходах в нер-вах

Общий случай: $f(x_1)\le e\le f(x_2)$ (или $f(x_2)\le e\le f(x_1)$)
Пусть определен отрезок $[a_k,b_k]$, причём $f(a_k)\le e\le f(b_k)$.

Определим $k_k=\frac{a_k+b_k}{2}$

$$[a_{k+1},b_{k+1}]=\begin{cases}[a_k,k_k], & \text{если } e\le f(k_k)\\ [k_k,b_k], & \text{если } f(k_k)<e\end{cases}\Rightarrow f(a_{k+1})\le e\le f(b_{k+1})$$

последов. вложенных отрезков

$\{[a_k,b_k]\}:\ \forall k\in\mathbb{N}\ f(a_k)\le e\le f(b_k)$ $\quad \{\gamma\}=\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}[a_n,b_n]$

$b_k-a_k=\frac{b-a}{2^k}\to 0\Rightarrow|\gamma-a_k|\le|b_k-a_k|\to 0\Rightarrow a_k\to\gamma,\ b_k\to\gamma$

в силу непрерывности: $f(a_k)\to f(\gamma)$, $f(b_k)\to f(\gamma)$

По Th о пред. пер.

$f(a_k)\le e\le f(b_k)\Rightarrow f(\gamma)\le e\le f(\gamma)$, т.е. $e=f(\gamma)$, чтд

Билет 19

Теорема об обратной функции.

Если f строго монотонна и непрерывна на промежутке I, то на промежутке $f(I)$ определена ...