Учреждение образования

«БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

**Решение задачи коммивояжера методом ветвей и границ**

Студент: Лобан В.С.

ФИТ 2 курс 6 группа

Минск 2018

Возьмем в качестве произвольного маршрута:  
X0 = (1,2);(2,3);(3,4);(4,5);(5,1)  
Тогда F(X0) = 18 + 24 + 86 + 27 + 84 = 239  
Для определения нижней границы множества воспользуемся **операцией редукции** или приведения матрицы по строкам, для чего необходимо в каждой строке матрицы D найти минимальный элемент.  
di = min(j) dij

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **i j** | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | di |
| **1** | INF | 18 | 30 | INF | 9 | 9 |
| **2** | 9 | INF | 24 | 59 | 75 | 9 |
| **3** | 11 | 27 | INF | 86 | 58 | 11 |
| **4** | 26 | 49 | 36 | INF | 27 | 26 |
| **5** | 84 | 75 | 52 | 22 | INF | 22 |

Затем вычитаем di из элементов рассматриваемой строки. В связи с этим во вновь полученной матрице в каждой строке будет как минимум один ноль.

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **i j** | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** |
| **1** | INF | 9 | 21 | INF | 0 |
| **2** | 0 | INF | 15 | 50 | 66 |
| **3** | 0 | 16 | INF | 75 | 47 |
| **4** | 0 | 23 | 10 | INF | 1 |
| **5** | 62 | 53 | 30 | 0 | INF |

Такую же операцию редукции проводим по столбцам, для чего в каждом столбце находим минимальный элемент:  
dj = min(i) dij

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **i j** | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** |
| **1** | INF | 9 | 21 | INF | 0 |
| **2** | 0 | INF | 15 | 50 | 66 |
| **3** | 0 | 16 | INF | 75 | 47 |
| **4** | 0 | 23 | 10 | INF | 1 |
| **5** | 62 | 53 | 30 | 0 | INF |
| dj | 0 | 9 | 10 | 0 | 0 |

После вычитания минимальных элементов получаем полностью редуцированную матрицу, где величины di и dj называются **константами приведения**.

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **i j** | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** |
| **1** | INF | 0 | 11 | INF | 0 |
| **2** | 0 | INF | 5 | 50 | 66 |
| **3** | 0 | 7 | INF | 75 | 47 |
| **4** | 0 | 14 | 0 | INF | 1 |
| **5** | 62 | 44 | 20 | 0 | INF |

Сумма констант приведения определяет нижнюю границу H:  
H = ∑di + ∑dj  
H = 9+9+11+26+22+0+9+10+0+0 = 96  
Элементы матрицы dij соответствуют расстоянию от пункта i до пункта j.  
Поскольку в матрице n городов, то D является матрицей nxn с неотрицательными элементами dij ≥ 0  
Каждый допустимый маршрут представляет собой цикл, по которому коммивояжер посещает город только один раз и возвращается в исходный город.  
Длина маршрута определяется выражением:  
F(Mk) = ∑dij  
Причем каждая строка и столбец входят в маршрут только один раз с элементом dij.  
**Шаг №1**.  
**Определяем ребро ветвления** и разобьем все множество маршрутов относительно этого ребра на два подмножества (i,j) и (i\*,j\*).  
С этой целью для всех клеток матрицы с нулевыми элементами заменяем поочередно нули на М(бесконечность) и определяем для них сумму образовавшихся констант приведения, они приведены в скобках.

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **i j** | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | di |
| **1** | INF | 0(7) | 11 | INF | 0(1) | 0 |
| **2** | 0(5) | INF | 5 | 50 | 66 | 5 |
| **3** | 0(7) | 7 | INF | 75 | 47 | 7 |
| **4** | 0(0) | 14 | 0(5) | INF | 1 | 0 |
| **5** | 62 | 44 | 20 | 0(70) | INF | 20 |
| dj | 0 | 7 | 5 | 50 | 1 | 0 |

d(1,2) = 0 + 7 = 7; d(1,5) = 0 + 1 = 1; d(2,1) = 5 + 0 = 5; d(3,1) = 7 + 0 = 7; d(4,1) = 0 + 0 = 0; d(4,3) = 0 + 5 = 5; d(5,4) = 20 + 50 = 70;   
Наибольшая сумма констант приведения равна (20 + 50) = 70 для ребра (5,4), следовательно, множество разбивается на два подмножества (5,4) и (5\*,4\*).  
**Исключение ребра** (5,4) проводим путем замены элемента d54 = 0 на M, после чего осуществляем очередное приведение матрицы расстояний для образовавшегося подмножества (5\*,4\*), в результате получим редуцированную матрицу.

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **i j** | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | di |
| **1** | INF | 0 | 11 | INF | 0 | 0 |
| **2** | 0 | INF | 5 | 50 | 66 | 0 |
| **3** | 0 | 7 | INF | 75 | 47 | 0 |
| **4** | 0 | 14 | 0 | INF | 1 | 0 |
| **5** | 62 | 44 | 20 | M | INF | 20 |
| dj | 0 | 0 | 0 | 50 | 0 | 70 |

Нижняя граница гамильтоновых циклов этого подмножества:  
H(5\*,4\*) = 96 + 70 = 166  
**Включение ребра** (5,4) проводится путем исключения всех элементов 5-ой строки и 4-го столбца, в которой элемент d45 заменяем на М, для исключения образования негамильтонова цикла.  
В результате получим другую сокращенную матрицу (4 x 4), которая подлежит операции приведения.  
После операции приведения сокращенная матрица будет иметь вид:

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **i j** | **1** | **2** | **3** | **5** | di |
| **1** | INF | 0 | 11 | 0 | 0 |
| **2** | 0 | INF | 5 | 66 | 0 |
| **3** | 0 | 7 | INF | 47 | 0 |
| **4** | 0 | 14 | 0 | INF | 0 |
| dj | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

Сумма констант приведения сокращенной матрицы:  
∑di + ∑dj = 0  
Нижняя граница подмножества (5,4) равна:  
H(5,4) = 96 + 0 = 96 ≤ 166  
Поскольку нижняя граница этого подмножества (5,4) меньше, чем подмножества (5\*,4\*), то ребро (5,4) включаем в маршрут с новой границей H = 96  
**Шаг №2**.  
**Определяем ребро ветвления** и разобьем все множество маршрутов относительно этого ребра на два подмножества (i,j) и (i\*,j\*).  
С этой целью для всех клеток матрицы с нулевыми элементами заменяем поочередно нули на М(бесконечность) и определяем для них сумму образовавшихся констант приведения, они приведены в скобках.

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **i j** | **1** | **2** | **3** | **5** | di |
| **1** | INF | 0(7) | 11 | 0(47) | 0 |
| **2** | 0(5) | INF | 5 | 66 | 5 |
| **3** | 0(7) | 7 | INF | 47 | 7 |
| **4** | 0(0) | 14 | 0(5) | INF | 0 |
| dj | 0 | 7 | 5 | 47 | 0 |

d(1,2) = 0 + 7 = 7; d(1,5) = 0 + 47 = 47; d(2,1) = 5 + 0 = 5; d(3,1) = 7 + 0 = 7; d(4,1) = 0 + 0 = 0; d(4,3) = 0 + 5 = 5;   
Наибольшая сумма констант приведения равна (0 + 47) = 47 для ребра (1,5), следовательно, множество разбивается на два подмножества (1,5) и (1\*,5\*).  
**Исключение ребра** (1,5) проводим путем замены элемента d15 = 0 на M, после чего осуществляем очередное приведение матрицы расстояний для образовавшегося подмножества (1\*,5\*), в результате получим редуцированную матрицу.

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **i j** | **1** | **2** | **3** | **5** | di |
| **1** | INF | 0 | 11 | INF | 0 |
| **2** | 0 | INF | 5 | 66 | 0 |
| **3** | 0 | 7 | INF | 47 | 0 |
| **4** | 0 | 14 | 0 | INF | 0 |
| dj | 0 | 0 | 0 | 47 | 47 |

Нижняя граница гамильтоновых циклов этого подмножества:  
H(1\*,5\*) = 96 + 47 = 143  
**Включение ребра** (1,5) проводится путем исключения всех элементов 1-ой строки и 5-го столбца, в которой элемент d51 заменяем на М, для исключения образования негамильтонова цикла.  
В результате получим другую сокращенную матрицу (3 x 3), которая подлежит операции приведения.  
После операции приведения сокращенная матрица будет иметь вид:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| **i j** | **1** | **2** | **3** | di |
| **2** | 0 | INF | 5 | 0 |
| **3** | 0 | 7 | INF | 0 |
| **4** | 0 | 14 | 0 | 0 |
| dj | 0 | 7 | 0 | 7 |

Сумма констант приведения сокращенной матрицы:  
∑di + ∑dj = 7  
Нижняя граница подмножества (1,5) равна:  
H(1,5) = 96 + 7 = 103 ≤ 143  
Чтобы исключить подциклы, запретим следующие переходы: (4,1),   
Поскольку нижняя граница этого подмножества (1,5) меньше, чем подмножества (1\*,5\*), то ребро (1,5) включаем в маршрут с новой границей H = 103  
**Шаг №3**.  
**Определяем ребро ветвления** и разобьем все множество маршрутов относительно этого ребра на два подмножества (i,j) и (i\*,j\*).  
С этой целью для всех клеток матрицы с нулевыми элементами заменяем поочередно нули на М(бесконечность) и определяем для них сумму образовавшихся констант приведения, они приведены в скобках.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| **i j** | **1** | **2** | **3** | di |
| **2** | 0(5) | INF | 5 | 5 |
| **3** | 0(0) | 0(7) | INF | 0 |
| **4** | INF | 7 | 0(12) | 7 |
| dj | 0 | 7 | 5 | 0 |

d(2,1) = 5 + 0 = 5; d(3,1) = 0 + 0 = 0; d(3,2) = 0 + 7 = 7; d(4,3) = 7 + 5 = 12;   
Наибольшая сумма констант приведения равна (7 + 5) = 12 для ребра (4,3), следовательно, множество разбивается на два подмножества (4,3) и (4\*,3\*).  
**Исключение ребра** (4,3) проводим путем замены элемента d43 = 0 на M, после чего осуществляем очередное приведение матрицы расстояний для образовавшегося подмножества (4\*,3\*), в результате получим редуцированную матрицу.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| **i j** | **1** | **2** | **3** | di |
| **2** | 0 | INF | 5 | 0 |
| **3** | 0 | 0 | INF | 0 |
| **4** | INF | 7 | INF | 7 |
| dj | 0 | 0 | 5 | 12 |

Нижняя граница гамильтоновых циклов этого подмножества:  
H(4\*,3\*) = 103 + 12 = 115  
**Включение ребра** (4,3) проводится путем исключения всех элементов 4-ой строки и 3-го столбца, в которой элемент d34 заменяем на М, для исключения образования негамильтонова цикла.  
В результате получим другую сокращенную матрицу (2 x 2), которая подлежит операции приведения.  
После операции приведения сокращенная матрица будет иметь вид:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **i j** | **1** | **2** | di |
| **2** | 0 | INF | 0 |
| **3** | 0 | 0 | 0 |
| dj | 0 | 0 | 0 |

Сумма констант приведения сокращенной матрицы:  
∑di + ∑dj = 0  
Нижняя граница подмножества (4,3) равна:  
H(4,3) = 103 + 0 = 103 ≤ 115  
Поскольку нижняя граница этого подмножества (4,3) меньше, чем подмножества (4\*,3\*), то ребро (4,3) включаем в маршрут с новой границей H = 103  
В соответствии с этой матрицей включаем в гамильтонов маршрут ребра (2,1) и (3,2).  
В результате по дереву ветвлений гамильтонов цикл образуют ребра:  
(5,4), (4,3), (3,2), (2,1), (1,5),   
Длина маршрута равна F(Mk) = 103.

