Московский государственый университет
им. М. В. Ломоносова
Механико-математический факультет
Кафедра газовой и волновой динамики

Ракитин Виталий Павлович.

Конечно-разностные методы решения уравнений с частными производными

Преподователь: Самохин Александр Сергеевич.

Москва, 2016 год.

Содержание

1 Аннотация **2**

2 Расчёт линейной задачи **3**
2.1 Постановка задачи . . . 3
2.1.1 Граничные условия . . . 3
2.2 Преобразование схем . . . 3

3 Расчёт нелинейной задачи **5**
3.1 Постановка задачи . . . 5
3.1.1 Граничные условия . . . 5
3.2 Преобразование схем . . . 5

4 Аппроксимация **7**

5 Дифференциальное приближение **7**

6 Устойчивость **8**

7 Аналитическиое решение нелинейной задачи **11**

8 Приложения **12**
8.1 Метод Ньютона . . . 12
8.2 Характеристики . . . 13
8.2.1 Лиинейный случай . . . 13
8.2.2 Нелинейный случай . . . 13

1 Аннотация

Решается задача из сборника А.В.Попова под номером 10.

Суть задачи заключается в решении уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial F(u)}{\partial x} = 0$$

методом апроксимации конечно-разностными схемами. Рассматриваются две схемы (явная и не явная), а так же две различные функции

$$F(u) = -\frac{1}{2}u \qquad \text{и} \qquad F(u) = -\frac{1}{2}u^2$$

и найдём решение в полосе Q_t (см. 3).

2 Расчёт линейной задачи

2.1 Постановка задачи

$$F(u) = -\frac{1}{2}u$$

Рассматриваются явная и неявная схемы

$$v_t + (F(v))_{\overset{\circ}{x}} = \frac{h^2}{2\tau} v_{x\overline{x}} \tag{1}$$

$$v_t + (F(\hat{v}))_{\overset{\circ}{x}} = \omega\tau \left((F'_v(v))^2 \hat{v}_x\right)_{\overline{x}} \tag{2}$$

для численного решения уравнения переноса

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

в области

$$Q_t = \{(t,x): \quad 0 < t \leqslant 1, \quad -1 \leqslant x \leqslant 1\}. \tag{3}$$

2.1.1 Граничные условия

1. на прямой $t = 0$ (при $-1 \leqslant x \leqslant 1$) определена функция

$$u_0(x) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad x \leqslant 0, \\ 4x, & \text{если} \quad 0 < x \leqslant 0.25, \\ 1, & \text{если} \quad x > 0.25; \end{cases} \tag{4}$$

2. на прямой $x = -1$ ввиду постоянства решения на характеристиках — прямых вида $t = -2x + C$ (см.5), на множестве $t \in (0,1)$:

$$u(t,-1) = u_0(x \leqslant 0) = 0;$$

3. на прямой $x = 1$, аналогично п.2:

$$u(t,1) = u_0(x > 0.25) = 1.$$

В условиях задачи использованы следующие обозначения

$$g_x = \frac{g^n_{m+1} - g^n_m}{h} \qquad g_{\overset{\circ}{x}} = \frac{g^n_{m+1} - g^n_{m-1}}{2h} \qquad g_{\overline{x}} = \frac{g^n_m - g^n_{m-1}}{h} \qquad (\hat{v})^n_m = v^{n+1}_m$$

2.2 Преобразование схем

Преобразуем уравнение (1) к более удобному виду

$$((v_x)_{\overline{x}})^n_m = \frac{(v_x)^n_m - (v_x)^n_{m-1}}{h} = \frac{\frac{v^n_{m+1} - v^n_m}{h} - \frac{v^n_m - v^n_{m-1}}{h}}{h} = \frac{v^n_{m+1} - 2v^n_m + v^n_{m-1}}{h^2}$$

$$(F(v))_{\overset{\circ}{x}} = -\frac{1}{2}v_{\overset{\circ}{x}} = -\frac{v^n_{m+1} - v^n_{m-1}}{4h}$$

Значит

$$\frac{v^{n+1}_m - v^n_m}{\tau} - \frac{v^n_{m+1} - \frac{1}{2}v^n_{m-1}}{4h} = \frac{h^2}{2\tau}\frac{v^n_{m+1} - 2v^n_m + v^n_{m-1}}{h^2}$$

$$2\left(v^{n+1}_m - v^n_m\right) - \frac{\tau}{2h}\left(v^n_{m+1} - v^n_{m-1}\right) = v^n_{m+1} - 2v^n_m + v^n_{m-1}$$

$$v^{n+1}_m = \frac{\tau}{2h}\left(v^n_{m+1} - v^n_{m-1}\right) + \frac{1}{2}v^n_{m+1} + \frac{1}{2}v^n_{m-1}$$

$$\boxed{v^{n+1}_m = \frac{1}{2}\left(\left(1 + \frac{\tau}{h}\right)v^n_{m+1} + \left(1 - \frac{\tau}{h}\right)v^n_{m-1}\right)} \tag{1*}$$

Преобразуем уравнение (2) к более удобному виду

$$\left(F'_v(v)\right)^2 = \left(\left(-\frac{1}{2}v\right)'_v\right)^2 = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

$$(\hat{v}_x)_{\overline{x}} = \left(\left(v_m^{n+1}\right)_x\right)_{\overline{x}} = \frac{(v_x)_m^{n+1} - (v_x)_{m-1}^{n+1}}{h} = \frac{\frac{v_{m+1}^{n+1} - v_m^{n+1}}{h} - \frac{v_m^{n+1} - v_{m-1}^{n+1}}{h}}{h} = \frac{v_{m+1}^{n+1} - 2v_m^{n+1} + v_{m-1}^{n+1}}{h^2}$$

$$(F(\hat{v}))_{\overset{\circ}{x}} = -\frac{v_{m+1}^{n+1} - v_{m-1}^{n+1}}{4h}$$

Соответственно,

$$\frac{v_m^{n+1} - v_m^n}{\tau} - \frac{v_{m+1}^{n+1} - v_{m-1}^{n+1}}{4h} = \omega\tau\left(\frac{1}{4}\frac{v_{m+1}^{n+1} - 2v_m^{n+1} + v_{m-1}^{n+1}}{h^2}\right)$$

$$4h^2\left(v_m^{n+1} - v_m^n\right) - \tau h\left(v_{m+1}^{n+1} - v_{m-1}^{n+1}\right) = \omega\tau^2\left(v_{m+1}^{n+1} - 2v_m^{n+1} + v_{m-1}^{n+1}\right)$$

$$\boxed{4h^2 v_m^n + \tau\left(\omega\tau - h\right)v_{m-1}^{n+1} - 2\left(2h^2 + \omega\tau^2\right)v_m^{n+1} + \tau\left(\omega\tau + h\right)v_{m+1}^{n+1} = 0} \qquad (2^*)$$

3 Расчёт нелинейной задачи

3.1 Постановка задачи

$$F(u) = -\frac{1}{2}u^2$$

Аналагично линейному случаю рассматриваются явная и неявная схемы (1) и (2) для численного решения уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{1}{2}\frac{\partial u^2}{\partial x} = 0$$

в области (3).

3.1.1 Граничные условия

1. на прямой $t = 0$ (при $-1 \leqslant x \leqslant 1$) определена функция (4);

2. на прямой $x = -1$, ввиду постоянства решения на характеристиках (см.6) — прямых вида

$$x = -\varphi(\xi)t + \xi; \qquad \varphi(\xi) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad \xi \leqslant 0, \\ 4\xi, & \text{если} \quad 0 < \xi \leqslant 0.25, \\ 1, & \text{если} \quad \xi > 0.25. \end{cases}$$

   Значит,

$$u(t, -1) = 0;$$

3. на прямой $x = 1$, аналогично

$$u(t, 1) = 1.$$

3.2 Преобразование схем

Преобразуем уравнение (1) к более удобному виду

$$\frac{v_m^{n+1} - v_m^n}{\tau} - \frac{\left(v^2\right)_{m+1}^n - \left(v^2\right)_{m-1}^n}{4h} = \frac{h^2}{2\tau}\frac{v_{m+1}^n - 2v_m^n + v_{m-1}^n}{h^2}$$

$$\boxed{v_m^{n+1} = \frac{\tau}{2h}\left(\left(v^2\right)_{m+1}^n - \left(v^2\right)_{m-1}^n\right) + \frac{1}{2}v_{m+1}^n + \frac{1}{2}v_{m-1}^n} \tag{1**}$$

Преобразуем уравнение (2) к более удобному виду

$$\left(F_v'(v)\right)^2 = \left(\left(-\frac{1}{2}v^2\right)_v'\right)^2 = v^2$$

$$\left(v^2\hat{v}_x\right)_{\overline{x}} = \left(\left(v^2\right)_m^n \left(v_m^{n+1}\right)_x\right)_{\overline{x}} = \frac{\left(v^2\right)_m^n \left(v_x\right)_m^{n+1} - \left(v^2\right)_{m-1}^n \left(v_x\right)_{m-1}^{n+1}}{h} =$$
$$= \frac{\left(v^2\right)_m^n v_{m+1}^{n+1} - \left(\left(v^2\right)_m^n + \left(v^2\right)_{m-1}^n\right) v_m^{n+1} - \left(v^2\right)_{m-1}^n v_{m-1}^{n+1}}{h^2}$$

$$\left(F(\hat{v})\right)_{\overset{\circ}{x}} = -\frac{1}{2}\hat{v}^2_{\overset{\circ}{x}} = -\frac{\left(v^2\right)_{m+1}^{n+1} - \left(v^2\right)_{m-1}^{n+1}}{4h}$$

Соответственно,

$$\frac{v_m^{n+1} - v_m^n}{\tau} - \frac{\left(v^2\right)_{m+1}^{n+1} - \left(v^2\right)_{m-1}^{n+1}}{4h} = \omega\tau\left(\frac{\left(v^2\right)_m^n v_{m+1}^{n+1} - \left(\left(v^2\right)_m^n + \left(v^2\right)_{m-1}^n\right) v_m^{n+1} - \left(v^2\right)_{m-1}^n v_{m-1}^{n+1}}{h^2}\right)$$

$$\boxed{\begin{aligned}&4h^2\left(v_m^{n+1}-v_m^n\right)-\tau h\left(\left(v^2\right)_{m+1}^{n+1}-\left(v^2\right)_{m-1}^{n+1}\right)-\\&\qquad-4\omega\tau^2\left(\left(v^2\right)_m^n v_{m+1}^{n+1}-\left(\left(v^2\right)_m^n+\left(v^2\right)_{m-1}^n\right)v_m^{n+1}-\left(v^2\right)_{m-1}^n v_{m-1}^{n+1}\right)=0\end{aligned}} \tag{2**}$$

4 Аппроксимация

Рассматривается уравнение переноса:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial x} = 0.$$

1. Посчитаем апроксимацию для явной схемы (1*)

$$v_m^{n+1} - \frac{1}{2}\left(\left(1+\frac{\tau}{h}\right)v_{m+1}^n + \left(1-\frac{\tau}{h}\right)v_{m-1}^n\right) =$$

$$= v_m^n + \tau\dot{v}_m^n + O(\tau^2) - \frac{1}{2}\left(\left(1+\frac{\tau}{h}\right)\left(v_m^n + h{v'}_m^n + O(h^2)\right) + \left(1-\frac{\tau}{h}\right)\left(v_m^n - h{v'}_m^n + O(h^2)\right)\right) =$$

$$= \tau\left(\dot{v}_m^n - \frac{1}{2}{v'}_m^n\right) + O(\tau^2+h^2) = O(\tau^2+h^2).$$

2. Для неявной схемы (2*)

$$4h^2 v_m^n + \tau\left(\omega\tau - h\right)v_{m-1}^{n+1} - 2\left(2h^2+\omega\tau^2\right)v_m^{n+1} + \tau\left(\omega\tau + h\right)v_{m+1}^{n+1} =$$

$$= 4h^2 v_m^n + \tau\left(\omega\tau - h\right)\left(v_m^n + \tau\dot{v}_m^n - h{v'}_m^n - \tau h{\dot{v}'}_m{}^n + O(h^2+\tau^2)\right) - 2\left(2h^2+\omega\tau^2\right)\left(v_m^n + \tau\dot{v}_m^n + O(\tau^2)\right) +$$

$$+\tau\left(\omega\tau + h\right)\left(v_m^n + \tau\dot{v}_m^n + h{v'}_m^n + \tau h{\dot{v}'}_m{}^n + O(h^2+\tau^2)\right) =$$

$$= \cancel{4h^2 v_m^n} + \omega\tau^2\left(v_m^n + \tau\dot{v}_m^n - \cancel{h{v'}_m^n - \tau h{\dot{v}'}_m{}^n} + O(h^2+\tau^2)\right) - \tau h\left(\cancel{v_m^n + \tau\dot{v}_m^n} - h{v'}_m^n - \tau h{\dot{v}'}_m{}^n + O(h^2+\tau^2)\right) -$$

$$-4h^2\left(\cancel{v_m^n} + \tau\dot{v}_m^n + O(\tau^2)\right) + 2\omega\tau^2\left(v_m^n + \tau\dot{v}_m^n + O(\tau^2)\right) + \omega\tau^2\left(v_m^n + \tau\dot{v}_m^n + \cancel{h{v'}_m^n + \tau h{\dot{v}'}_m{}^n} + O(h^2+\tau^2)\right) +$$

$$+\tau h\left(\cancel{v_m^n + \tau\dot{v}_m^n} + h{v'}_m^n + \tau h{\dot{v}'}_m{}^n + O(h^2+\tau^2)\right) = O(\tau^2 + \tau h^2)$$

5 Дифференциальное приближение

1. Дифференциальное приближение для явной схемы (1) с точностью до членов порядка $O\left(\tau^3 + h^3 + \frac{h^4}{\tau}\right)$

$$v_t - \frac{1}{2}v_{\overset{\circ}{x}} = \frac{h^2}{2\tau}v_{x\bar{x}}$$

$$\dot{v} + \frac{\tau}{2}\ddot{v} + \frac{\tau^2}{6}\dddot{v} + O\left(\tau^3\right) - \frac{1}{2}v' - \frac{h}{4}v'' - \frac{h^2}{12}v''' + O\left(h^3\right) = \frac{h^2}{2\tau}v'' + \frac{h^3}{4\tau}v''' + O\left(\frac{h^4}{\tau}\right)$$

$$\dot{v} - \frac{1}{2}v' - \frac{h^2}{2\tau}v'' = -\frac{\tau}{2}\ddot{v} - \frac{\tau^2}{6}\dddot{v} + \frac{h}{4}v'' + \frac{h^2}{12}v''' + \frac{h^3}{4\tau}v'''' + O\left(\tau^3 + h^3 + \frac{h^4}{\tau}\right)$$

$$\dot{v} = \frac{1}{2}v' + O\left(\tau + h + \frac{h^2}{\tau}\right)$$

$$\dot{v}' = \frac{1}{2}v'' + O\left(\tau + h + \frac{h^2}{\tau}\right)$$

$$\dot{v}'' = \frac{1}{2}v''' + O\left(\tau + h + \frac{h^2}{\tau}\right)$$

$$\ddot{v} = \frac{1}{2}\dot{v}' + O\left(\tau + h + \frac{h^2}{\tau}\right) = \frac{1}{4}v'' + O\left(\tau + h + \frac{h^2}{\tau}\right)$$

$$\dddot{v} = \frac{1}{4}\dot{v}'' + O\left(\tau + h + \frac{h^2}{\tau}\right) = \frac{1}{8}v''' + O\left(\tau + h + \frac{h^2}{\tau}\right)$$

$$\dot{v} - \frac{1}{2}v' - \frac{h^2}{2\tau}v'' = \left(\frac{h}{4} - \frac{\tau}{8}\right)v'' + \left(\frac{h^2}{12} - \frac{\tau^2}{48}\right)v''' + \frac{h^3}{4\tau}v'''' + O\left(\tau^3 + h^3 + \frac{h^4}{\tau}\right)$$

2. Дифференциальное приближение для явной схемы (2) с точностью до членов порядка $O\left(\tau^3+h^3+\tau h^2\right)$

$$v_t-\frac{1}{2}\hat{v}_{\overset{\circ}{x}}=\frac{\omega\tau}{4}\hat{v}_{x\overline{x}}$$

$$\dot{v}+\frac{\tau}{2}\ddot{v}+\frac{\tau^2}{6}\dddot{v}+O\left(\tau^3\right)-\frac{1}{2}v'-\frac{h}{4}v''-\frac{h^2}{12}v'''+O\left(h^3\right)=\frac{\omega\tau}{4}v''+\frac{\omega\tau h}{8}v'''+O\left(\tau h^2\right)$$

$$\dot{v}-\frac{1}{2}v'+\frac{\omega\tau}{4}v''=-\frac{\tau}{2}\ddot{v}-\frac{\tau^2}{6}\dddot{v}+\frac{h}{4}v''+\frac{h^2}{12}v'''+\frac{\omega\tau h}{8}v'''+O\left(\tau^3+h^3+\tau h^2\right)$$

$$\dot{v}=\frac{1}{2}v'+O\left(\tau+h\right)$$

$$\dot{v}'=\frac{1}{2}v''+O\left(\tau+h\right)$$

$$\dot{v}''=\frac{1}{2}v'''+O\left(\tau+h\right)$$

$$\ddot{v}=\frac{1}{2}\dot{v}'+O\left(\tau+h\right)=\frac{1}{4}v''+O\left(\tau+h\right)$$

$$\dddot{v}=\frac{1}{4}\dot{v}''+O\left(\tau+h\right)=\frac{1}{8}v'''+O\left(\tau+h\right)$$

$$\dot{v}-\frac{1}{2}v'+\frac{\omega\tau}{4}v''=\left(\frac{h}{4}-\frac{\tau}{8}\right)v''+\left(\frac{h^2}{12}+\frac{\omega\tau h}{8}-\frac{\tau^2}{48}\right)v'''+O\left(\tau^3+h^3+\tau h^2\right)$$

6 Устойчивость

1. Для явной схемы (1*)

$$v_m^{n+1}=\frac{1}{2}\left(\left(1+\frac{\tau}{h}\right)v_{m+1}^n+\left(1-\frac{\tau}{h}\right)v_{m-1}^n\right)$$

Сделаем замену

$$v_m^n=(\lambda(\varphi))^n e^{im\varphi}$$

Тогда

$$\lambda^{n+1}e^{im\varphi}=\frac{1}{2}\left(\left(1+\frac{\tau}{h}\right)\lambda^n e^{i(m+1)\varphi}+\left(1-\frac{\tau}{h}\right)\lambda^n e^{i(m-1)\varphi}\right)$$

Сократим всё на $\lambda^n e^{im\varphi}$

$$\lambda=\frac{1}{2}\left(\left(1+\frac{\tau}{h}\right)e^{i\varphi}+\left(1-\frac{\tau}{h}\right)e^{-i\varphi}\right)$$

$$\lambda=\frac{1}{2}\left(e^{i\varphi}+e^{-i\varphi}+\frac{\tau}{h}\left(e^{i\varphi}-e^{-i\varphi}\right)\right)$$

$$\lambda=\cos\varphi+\frac{i\tau}{h}\sin\varphi$$

$$|\lambda|=\sqrt{\cos^2\varphi+\frac{\tau^2}{h^2}\sin^2\varphi}=\sqrt{1+(\frac{\tau^2}{h^2}-1)\sin^2\varphi}\leqslant 1\quad\Longleftrightarrow\quad -1\leqslant\frac{\tau^2}{h^2}-1\leqslant 0$$

$$0\leqslant\frac{\tau^2}{h^2}\leqslant 1\qquad\Longrightarrow\qquad\tau^2\leqslant h^2\qquad\Longrightarrow\qquad\tau\leqslant h.$$

Таким образом, можем сделать вывод, что наша схема устойчива при условии $\tau\leqslant h$.

2. Для неявной схемы (2*)

$$4h^2v_m^n+\tau\left(\omega\tau-h\right)v_{m-1}^{n+1}-2\left(2h^2+\omega\tau^2\right)v_m^{n+1}+\tau\left(\omega\tau+h\right)v_{m+1}^{n+1}=0$$

Аналогично предыдущему пункту сделаем замену

$$v_m^n=(\lambda(\varphi))^n e^{im\varphi}$$

Тогда

$$4h^2\lambda^n e^{im\varphi}+\tau\left(\omega\tau-h\right)\lambda^{n+1}e^{i(m-1)\varphi}-2\left(2h^2+\omega\tau^2\right)\lambda^{n+1}e^{im\varphi}+\tau\left(\omega\tau+h\right)\lambda^{n+1}e^{i(m+1)\varphi}=0$$

Сократим всё на $\lambda^{n+1} e^{im\varphi}$

$$\frac{4h^2}{\lambda} + \tau\left(\omega\tau - h\right)e^{-i\varphi} - 2\left(2h^2 + \omega\tau^2\right) + \tau\left(\omega\tau + h\right)e^{i\varphi} = 0$$

$$\frac{4h^2}{\lambda} + \omega\tau^2\left(e^{-i\varphi} + e^{i\varphi}\right) - 2\left(2h^2 + \omega\tau^2\right) + \tau h\left(e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}\right) = 0$$

$$\frac{4h^2}{\lambda} + 2\omega\tau^2\cos\varphi - 2\left(2h^2 + \omega\tau^2\right) + 2i\tau h\sin\varphi = 0$$

$$\frac{4h^2}{\lambda} + 2\omega\tau^2\cos\varphi - 2\left(2h^2 + \omega\tau^2\right) + 2i\tau h\sin\varphi = 0$$

$$-1 \leqslant \lambda = \frac{2h^2}{2h^2 + \omega\tau^2 - \omega\tau^2\cos\varphi - i\tau h\sin\varphi} \leqslant 1$$

Рассмотрим правый случай

$$2h^2 \leqslant 2h^2 + \omega\tau^2 - \omega\tau^2\cos\varphi - i\tau h\sin\varphi$$

$$\omega\tau^2\cos\varphi + i\tau h\sin\varphi \leqslant \omega\tau^2$$

$$\cos\varphi + \frac{ih}{\tau\omega}\sin\varphi \leqslant 1$$

$$\cos^2\varphi + \frac{h^2}{\tau^2\omega^2}\sin^2\varphi \leqslant 1$$

$$1 + \left(\frac{h^2}{\tau^2\omega^2} - 1\right)\sin^2\varphi \leqslant 1$$

$$\frac{h^2}{\tau^2\omega^2} \leqslant 1 \qquad \Longrightarrow \qquad h \leqslant \tau\omega$$

Рассмотрим левый случай

$$-2h^2 \leqslant 2h^2 + \omega\tau^2 - \omega\tau^2\cos\varphi - i\tau h\sin\varphi$$

$$\omega\tau^2\cos\varphi + i\tau h\sin\varphi \leqslant 4h^2 + \omega\tau^2$$

$$\cos\varphi + \frac{ih}{\tau\omega}\sin\varphi \leqslant \frac{4h^2}{\omega\tau^2} + 1$$

$$\cos^2\varphi + \frac{h^2}{\tau^2\omega^2}\sin^2\varphi \leqslant \left(\frac{4h^2}{\omega\tau^2} + 1\right)^2$$

$$1 + \left(\frac{h^2}{\tau^2\omega^2} - 1\right)\sin^2\varphi \leqslant \frac{16h^4}{\omega^2\tau^4} + \frac{8h^2}{\omega\tau^2} + 1$$

$$\left(\frac{h^2}{\tau^2\omega^2} - 1\right)\sin^2\varphi \leqslant \frac{16h^4}{\omega^2\tau^4} + \frac{8h^2}{\omega\tau^2}$$

Так как мы уже выяснили, что

$$\frac{h^2}{\tau^2\omega^2} \leqslant 1$$

Получим

$$|\sin\varphi| \geqslant \sqrt{\frac{\frac{16h^4}{\omega^2\tau^4} + \frac{8h^2}{\omega\tau^2}}{1 - \frac{h^2}{\tau^2\omega^2}}}$$

Рассмотрим $\varphi = \frac{\pi}{2}$

$$1 \geqslant \frac{\frac{16h^4}{\omega^2\tau^4} + \frac{8h^2}{\omega\tau^2}}{1 - \frac{h^2}{\tau^2\omega^2}}$$

$$\frac{16h^4}{\omega^2\tau^4} + \frac{8h^2}{\omega\tau^2} + \frac{h^2}{\tau^2\omega^2} - 1 \leqslant 0$$

$$\frac{16h^4}{\tau^4} + (8\omega + 1)\frac{h^2}{\tau^2} - \omega^2 \leqslant 0$$

Рассморим случай

$$\frac{16h^4}{\tau^4} + (8\omega + 1)\frac{h^2}{\tau^2} - \omega^2 = 0$$

и делаем замену $x = \frac{h^2}{\tau^2}$

$$16x^2 + (8\omega + 1)x - \omega^2 = 0$$

$$D = (8\omega + 1)^2 + 4 \cdot 16 \cdot \omega^2 = 128\omega^2 + 16\omega + 1$$

$$x = \frac{-8\omega - 1 \pm \sqrt{128\omega^2 + 16\omega + 1}}{32}$$

Значит

$$\frac{h^2}{\tau^2} \in \left[\frac{-8\omega - 1 - \sqrt{128\omega^2 + 16\omega + 1}}{32}, \frac{-8\omega - 1 + \sqrt{128\omega^2 + 16\omega + 1}}{32}\right]$$

При $\omega = 1$

$$\frac{h^2}{\tau^2} \in (0, 0.095)$$

$$\frac{h}{\tau} \in (0, 0.3)$$

При $\omega = 0.1$

$$\frac{h^2}{\tau^2} \in (0, 0.0053)$$

$$\frac{h}{\tau} \in (0, 0.073)$$

Таким образом, мы можем подобрать такие τ и h, чтобы наша схема была устойчива в точке $\varphi = \frac{\pi}{2}$, а значит она условно устойчива.

7 Аналитическое решение

7.1 Линейный случай

Решение системы, которую мы рассматриваем, имеет вид

$$u(t,x) = \begin{cases} 0, & x + \frac{t}{2} \leqslant 0; \\ 4x + 2t, & 0 < x + \frac{t}{2} \leqslant \frac{1}{4}; \\ 1, & x + \frac{t}{2} > \frac{1}{4}. \end{cases}$$

7.2 Нелинейный случай

Решение нелинейного уравнения $\frac{\partial u}{\partial t} - u\frac{\partial u}{\partial x} = 0$ с начальным условием $u(0,x) = u_0(x)$ будем проводить в два этапа.

- Формально найдём решение $\varphi(t,x)$ уравнения Хопфа $\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = 0$ с начальным условием $\varphi(0,x) = u_0(x)$. Решение задачи Коши в параметрическом виде

$$\begin{cases} \varphi = u_0(\xi); \\ x = \xi + u_0(\xi)t. \end{cases}$$

  Это решение в нашем случае имеет вид

$$\varphi_1(t,x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 0; \\ \frac{x}{0.25+t}, & 0 < x < t + 0.25; \\ 1, & x \geqslant 0.25 + t. \end{cases}$$

  В момент времени $t = -0.25$ происходит опрокидывание волны. Волна начинает двигаться вдвое медленнее по правилу Уизема.

$$\varphi_2(t,x) = \begin{cases} 0, x < \frac{1}{2}(t + 0.25); \\ 0, x \geqslant \frac{1}{2}(t + 0.25). \end{cases}$$

- Обратим время, то есть заметим, что искомое $u(t,x) = \varphi(-t,x)$.

$$u(t,x) = \begin{cases} \varphi_1(-t,x), & t < \frac{1}{4}; \\ \varphi_2(-t,x), & t \geqslant \frac{1}{4}. \end{cases}$$

Самое для нас интересное, это значение в момент времени $t=1$

$$u(1,x)=\begin{cases}0, & x<-\frac{3}{8};\\ 1, & x>\frac{3}{8}.\end{cases}$$

А также выпишем условия на достаточно толстой границе

$$u(t,x)=\begin{cases}0, & x<-\frac{3}{8},\ t\in[0,1];\\ 1, & x>0.25,\ t\in[0,1];\\ . & \dots\dots\dots\dots\dots\dots\end{cases}$$

8 Приложения

8.1 Метод Ньютона

Решение нелинейной системы уравнений методом Ньютона

$$F(\overline{x}) = F(\overline{x}_0 + \Delta\overline{x}_1) \approx F(\overline{x}_0) + \left.\frac{\partial F}{\partial \overline{x}}\right|_{\overline{x}=\overline{x}_0} \cdot \Delta\overline{x}_1$$

Определим вектор приращений $\Delta\overline{x}_1$ из условия $F(\overline{x}) = 0$

$$\left.\frac{\partial F}{\partial \overline{x}}\right|_{\overline{x}=\overline{x}_0} \cdot \Delta\overline{x}_1 = -F(\overline{x}_0);$$

Или в развёрнутом виде

$$\sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial f_i(\overline{x}_0)}{\partial x_j}\right) \cdot \Delta\overline{x}_1 = -f_i(\overline{x}_0),$$

$$\frac{\partial f_i(\overline{x}_0)}{\partial x_j} = \frac{f_i(x_1(0), \ldots, x_{j-1}(0), x_j(0) + \varepsilon, x_{j+1}(0), \ldots, x_n(0)) - f_i(\overline{x}_0)}{\varepsilon}$$

Обозначим матрицу Якоби

$$F'(\overline{x}_0) = \left.\frac{\partial F}{\partial \overline{x}}\right|_{\overline{x}=\overline{x}_0} \equiv \left\| \frac{\partial f_i(\overline{x}_0)}{\partial x_j} \right\|$$

Значит,

$$F'(\overline{x}_0) \cdot \Delta\overline{x}_1 = -F(\overline{x}_0)$$

$$\Delta\overline{x}_1 = \overline{x}_1 - \overline{x}_0 = -\left(F'(\overline{x}_0)\right)^{-1} \cdot F(\overline{x}_0)$$

$$\overline{x}_1 = \overline{x}_0 - \left(F'(\overline{x}_0)\right)^{-1} \cdot F(\overline{x}_0)$$

8.2 Характеристики

8.2.1 Лиинейный случай

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

Составим характеристическую систему

$$\frac{dt}{1} = \frac{dx}{-\frac{1}{2}}$$

$$t = -2x + C_1. \tag{5}$$

8.2.2 Нелинейный случай

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{1}{2}\frac{\partial u^2}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} - u\frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

Составим характеристическую систему

$$\frac{dt}{1} = \frac{dx}{-u} = \frac{du}{0}$$

Значит, получим уравнения

$$u = C_1, \qquad x + ut = C_2$$

начальное значение (4): значит

$$C_2 = \sigma; \qquad C_1 = \varphi(\xi) = u_0(\xi) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad \xi \leqslant 0, \\ 4\xi, & \text{если} \quad 0 < \xi \leqslant 0.25, \\ 1, & \text{если} \quad \xi > 0.25; \end{cases}$$

Тогда

$$x + \varphi(\xi)t = \xi \quad \Longrightarrow \quad x = -\varphi(\xi)t + \xi. \tag{6}$$