Московский государственый университет
им. М. В. Ломоносова
Механико-математический факультет
Кафедра газовой и волновой динамики

Ракитин Виталий Павлович.

Конечно-разностные методы решения уравнений с частными производными

Преподователь: Самохин Александр Сергеевич.

Москва, 2016 год.

Содержание

1 Аннотация

Решается задача из сборника А.В.Попова под номером 10.

Суть задачи заключается в решении уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial F(u)}{\partial x} = 0$$

методом апроксимации конечно-разностными схемами. Рассматриваются две схемы (явная и не явная), а так же две различные функции

$$F(u) = -\frac{1}{2}u \qquad \text{и} \qquad F(u) = -\frac{1}{2}u^2$$

и найдём решение в полосе Q_t (см. 3).

2 Расчёт линейной задачи

2.1 Постановка задачи

$$F(u) = -\frac{1}{2}u$$

Рассматриваются явная и неявная схемы

$$v_t + (F(v))_{\overset{\circ}{x}} = \frac{h^2}{2\tau} v_{x\overline{x}} \tag{1}$$

$$v_t + (F(\hat{v}))_{\overset{\circ}{x}} = \omega\tau \left((F'_v(v))^2 \hat{v}_x \right)_{\overline{x}} \tag{2}$$

для численного решения уравнения переноса

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

в области

$$Q_t = \{(t, x): \quad 0 < t \leqslant 1, \quad -1 \leqslant x \leqslant 1\}. \tag{3}$$

2.1.1 Граничные условия

1. на прямой $t = 0$ (при $-1 \leqslant x \leqslant 1$) определена функция

$$u_0(x) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad x \leqslant 0, \\ 4x, & \text{если} \quad 0 < x \leqslant 0.25, \\ 1, & \text{если} \quad x > 0.25; \end{cases} \tag{4}$$

2. на прямой $x = -1$ ввиду постоянства решения на характеристиках — прямых вида $t = -2x + C$ (см.6), на множестве $t \in (0, 1)$:

$$u(t, -1) = u_0(x \leqslant 0) = 0;$$

3. на прямой $x = 1$, аналогично п.2:

$$u(t, 1) = u_0(x > 0.25) = 1.$$

В условиях задачи использованы следующие обозначения

$$g_x = \frac{g^n_{m+1} - g^n_m}{h} \qquad g_{\overset{\circ}{x}} = \frac{g^n_{m+1} - g^n_{m-1}}{2h} \qquad g_{\overline{x}} = \frac{g^n_m - g^n_{m-1}}{h} \qquad (\hat{v})^n_m = v^{n+1}_m$$

2.2 Преобразование схем

Преобразуем уравнение (1) к более удобному виду

$$((v_x)_{\overline{x}})^n_m = \frac{(v_x)^n_m - (v_x)^n_{m-1}}{h} = \frac{\frac{v^n_{m+1} - v^n_m}{h} - \frac{v^n_m - v^n_{m-1}}{h}}{h} = \frac{v^n_{m+1} - 2v^n_m + v^n_{m-1}}{h^2}$$

$$(F(v))_{\overset{\circ}{x}} = -\frac{1}{2} v_{\overset{\circ}{x}} = -\frac{v^n_{m+1} - v^n_{m-1}}{4h}$$

Значит

$$\frac{v^{n+1}_m - v^n_m}{\tau} - \frac{v^n_{m+1} - \frac{1}{2} v^n_{m-1}}{4h} = \frac{h^2}{2\tau} \frac{v^n_{m+1} - 2v^n_m + v^n_{m-1}}{h^2}$$

$$2\left(v^{n+1}_m - v^n_m\right) - \frac{\tau}{2h}\left(v^n_{m+1} - v^n_{m-1}\right) = v^n_{m+1} - 2v^n_m + v^n_{m-1}$$

$$v^{n+1}_m = \frac{\tau}{2h}\left(v^n_{m+1} - v^n_{m-1}\right) + \frac{1}{2} v^n_{m+1} + \frac{1}{2} v^n_{m-1}$$

$$\boxed{v^{n+1}_m = \frac{1}{2}\left(\left(1 + \frac{\tau}{h}\right) v^n_{m+1} + \left(1 - \frac{\tau}{h}\right) v^n_{m-1}\right)} \tag{1*}$$

Преобразуем уравнение (2) к более удобному виду

$$(F'_v(v))^2 = \left(\left(-\frac{1}{2}v\right)'_v\right)^2 = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

$$(\hat{v}_x)_{\overline{x}} = \left(\left(v_m^{n+1}\right)_x\right)_{\overline{x}} = \frac{(v_x)_m^{n+1} - (v_x)_{m-1}^{n+1}}{h} = \frac{\frac{v_{m+1}^{n+1}-v_m^{n+1}}{h} - \frac{v_m^{n+1}-v_{m-1}^{n+1}}{h}}{h} = \frac{v_{m+1}^{n+1} - 2v_m^{n+1} + v_{m-1}^{n+1}}{h^2}$$

$$(F(\hat{v}))_{\overset{\circ}{x}} = -\frac{v_{m+1}^{n+1} - v_{m-1}^{n+1}}{4h}$$

Соответственно,

$$\frac{v_m^{n+1} - v_m^n}{\tau} - \frac{v_{m+1}^{n+1} - v_{m-1}^{n+1}}{4h} = \omega\tau\left(\frac{1}{4}\frac{v_{m+1}^{n+1} - 2v_m^{n+1} + v_{m-1}^{n+1}}{h^2}\right)$$

$$4h^2\left(v_m^{n+1} - v_m^n\right) - \tau h\left(v_{m+1}^{n+1} - v_{m-1}^{n+1}\right) = \omega\tau^2\left(v_{m+1}^{n+1} - 2v_m^{n+1} + v_{m-1}^{n+1}\right)$$

$$\boxed{4h^2 v_m^n + \tau(\omega\tau - h)v_{m-1}^{n+1} - 2\left(2h^2 + \omega\tau^2\right)v_m^{n+1} + \tau(\omega\tau + h)v_{m+1}^{n+1} = 0} \quad (2^*)$$

Нормируем схему для использования метода прогонки

$$\boxed{\frac{2h^2}{(2h^2 + \omega\tau^2)}v_m^n - \frac{\tau(\omega\tau - h)}{2(2h^2 + \omega\tau^2)}v_{m-1}^{n+1} + v_m^{n+1} - \frac{\tau(\omega\tau + h)}{2(2h^2 + \omega\tau^2)}v_{m+1}^{n+1} = 0} \quad (5)$$

Тогда получим систему вида $G_i = G_i(\hat{v})$:

$$\begin{cases} G_0 = -\frac{2h^2}{(2h^2+\omega\tau^2)}v_0 + \hat{v}_0 - \frac{\tau(\omega\tau+h)}{2(2h^2+\omega\tau^2)}\hat{v}_1, \quad m = 0; \\ G_m = -\frac{2h^2}{(2h^2+\omega\tau^2)}v_m - \frac{\tau(\omega\tau-h)}{2(2h^2+\omega\tau^2)}\hat{v}_{m-1} + \hat{v}_m - \frac{\tau(\omega\tau+h)}{2(2h^2+\omega\tau^2)}\hat{v}_{m+1}, \quad m = 1, \dots, M-1; \\ G_M = -\frac{2h^2}{(2h^2+\omega\tau^2)}v_{M-1} - \frac{\tau(\omega\tau-h)}{2(2h^2+\omega\tau^2)}\hat{v}_{M-1} + \hat{v}_M, \quad m = M. \end{cases}$$

$$\begin{cases} G_0 = Av_0 + \hat{v}_0 + C\hat{v}_1, & m = 0; \\ G_m = Av_m + B\hat{v}_{m-1} + \hat{v}_m + C\hat{v}_{m+1}, & m = 1, \dots, M-1; \\ G_M = Av_{M-1} + B\hat{v}_{M-1} + \hat{v}_M, & m = M. \end{cases}$$

$$A = -\frac{2h^2}{(2h^2 + \omega\tau^2)}, \qquad B = -\frac{\tau(\omega\tau - h)}{2(2h^2 + \omega\tau^2)}, \qquad C = -\frac{\tau(\omega\tau + h)}{2(2h^2 + \omega\tau^2)}$$

Найдём матрицу Якоби

$$J = \begin{pmatrix} 1 & C & 0 & \dots & 0 & 0 \\ B & 1 & C & 0 & \dots & 0 \\ 0 & B & 1 & C & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & B & 1 & C \\ 0 & 0 & \dots & 0 & B & 1 \end{pmatrix}$$

3 Расчёт нелинейной задачи

3.1 Постановка задачи

$$F(u) = -\frac{1}{2}u^2$$

Аналагично линейному случаю рассматриваются явная и неявная схемы (1) и (2) для численного решения уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{1}{2}\frac{\partial u^2}{\partial x} = 0$$

в области (3).

3.1.1 Граничные условия

1. на прямой $t = 0$ (при $-1 \leqslant x \leqslant 1$) определена функция (4);

2. на прямой $x = -1$, ввиду постоянства решения на характеристиках (см.7) — прямых вида

$$x = -\varphi(\xi)t + \xi; \qquad \varphi(\xi) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad \xi \leqslant 0, \\ 4\xi, & \text{если} \quad 0 < \xi \leqslant 0.25, \\ 1, & \text{если} \quad \xi > 0.25. \end{cases}$$

   Значит,

$$u(t, -1) = 0;$$

3. на прямой $x = 1$, аналогично

$$u(t, 1) = 1.$$

3.2 Преобразование схем

Преобразуем уравнение (1) к более удобному виду

$$\frac{v_m^{n+1} - v_m^n}{\tau} - \frac{\left(v^2\right)_{m+1}^n - \left(v^2\right)_{m-1}^n}{4h} = \frac{h^2}{2\tau}\frac{v_{m+1}^n - 2v_m^n + v_{m-1}^n}{h^2}$$

$$\boxed{v_m^{n+1} = \frac{\tau}{2h}\left(\left(v^2\right)_{m+1}^n - \left(v^2\right)_{m-1}^n\right) + \frac{1}{2}v_{m+1}^n + \frac{1}{2}v_{m-1}^n} \tag{1**}$$

Преобразуем уравнение (2) к более удобному виду

$$\left(F'_v(v)\right)^2 = \left(\left(-\frac{1}{2}v^2\right)'_v\right)^2 = v^2$$

$$\left(v^2\hat{v}_x\right)_{\overline{x}} = \left(\left(v^2\right)_m^n \left(v_m^{n+1}\right)_x\right)_{\overline{x}} = \frac{\left(v^2\right)_m^n (v_x)_m^{n+1} - \left(v^2\right)_{m-1}^n (v_x)_{m-1}^{n+1}}{h} =$$
$$= \frac{\left(v^2\right)_m^n v_{m+1}^{n+1} - \left(\left(v^2\right)_m^n + \left(v^2\right)_{m-1}^n\right) v_m^{n+1} + \left(v^2\right)_{m-1}^n v_{m-1}^{n+1}}{h^2}$$

$$\left(F(\hat{v})\right)_{\overset{\circ}{x}} = -\frac{1}{2}\hat{v}^2_{\overset{\circ}{x}} = -\frac{\left(v^2\right)_{m+1}^{n+1} - \left(v^2\right)_{m-1}^{n+1}}{4h}$$

Соответственно,

$$\frac{v_m^{n+1} - v_m^n}{\tau} - \frac{\left(v^2\right)_{m+1}^{n+1} - \left(v^2\right)_{m-1}^{n+1}}{4h} = \omega\tau\left(\frac{\left(v^2\right)_m^n v_{m+1}^{n+1} - \left(\left(v^2\right)_m^n + \left(v^2\right)_{m-1}^n\right) v_m^{n+1} + \left(v^2\right)_{m-1}^n v_{m-1}^{n+1}}{h^2}\right)$$

$$\boxed{\begin{aligned}&4h^2\left(v_m^{n+1}-v_m^n\right)-\tau h\left(\left(v^2\right)_{m+1}^{n+1}-\left(v^2\right)_{m-1}^{n+1}\right)-\\&\qquad-4\omega\tau^2\left(\left(v^2\right)_m^n v_{m+1}^{n+1}-\left(\left(v^2\right)_m^n+\left(v^2\right)_{m-1}^n\right)v_m^{n+1}+\left(v^2\right)_{m-1}^n v_{m-1}^{n+1}\right)=0\end{aligned}} \tag{2**}$$

Нормируем схему для использования метода прогонки

$$\begin{aligned}-4h^2v_m^n+\left(4\omega\tau^2\left(v^2\right)_{m-1}^n v_{m-1}^{n+1}+\tau h\left(v^2\right)_{m-1}^{n+1}\right)+\left(4h^2+4\omega\tau^2\left(\left(v^2\right)_m^n+\left(v^2\right)_{m-1}^n\right)\right)v_m^{n+1}+\\+\left(4\omega\tau^2\left(v^2\right)_m^n v_{m+1}^{n+1}-\tau h\left(v^2\right)_{m+1}^{n+1}\right)=0\end{aligned}$$

Для упрощения внешнего вида схемы заменим все константы на конкретном шаге вычисления на

$$A[M]=\frac{4\omega\tau^2\left(v^2\right)_M^n}{4h^2+4\omega\tau^2\left(\left(v^2\right)_m^n+\left(v^2\right)_{m-1}^n\right)},\quad B=\frac{\tau h}{4h^2+4\omega\tau^2\left(\left(v^2\right)_m^n+\left(v^2\right)_{m-1}^n\right)},\quad C=\frac{-4h^2}{4h^2+4\omega\tau^2\left(\left(v^2\right)_m^n+\left(v^2\right)_{m-1}^n\right)}$$

Тогда наша схема принимает вид

$$Cv_m^n+\left(A[m-1]v_{m-1}^{n+1}+B\left(v^2\right)_{m-1}^{n+1}\right)+v_m^{n+1}+\left(A[m]v_{m+1}^{n+1}-B\left(v^2\right)_{m+1}^{n+1}\right)=0$$

Теперь получим систему вида $G_i=G_i(\hat{v})$:

$$\begin{cases}G_0=Cv_0+\hat{v}_0+\left(A[0]\hat{v}_1-B\hat{v}_1^2\right), & m=0;\\ G_m=Cv_m+\left(A[m-1]\hat{v}_{m-1}+B\hat{v}_{m-1}^2\right)+\hat{v}_m+\left(A[m]\hat{v}_{m+1}-B\hat{v}_{m+1}^2\right), & m=1,\ldots,M-1;\\ G_M=Cv_M+\left(A[M-1]\hat{v}_{M-1}+B\hat{v}_{M-1}^2\right)+\hat{v}_M, & m=M.\end{cases}$$

Найдём матрицу Якоби

$$J=\begin{pmatrix}1 & A[0]-2B\hat{v}_1 & 0 & \ldots & 0\\ A[0]+B\hat{v}_0 & 1 & A[1]-2B\hat{v}_2 & 0 & \ldots\\ 0 & A[1]+B\hat{v}_1 & 1 & A[2]-2B\hat{v}_3 & \ldots\\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots\\ 0 & \ldots & A[M-2]+B\hat{v}_{M-2} & 1 & A[M-1]-2B\hat{v}_M\\ 0 & \ldots & 0 & A[M-1]+B\hat{v}_{M-1} & 1\end{pmatrix}$$

4 Устойчивость нелинейной неявной схемы

$$\frac{v_m^{n+1}-v_m^n}{\tau}-\frac{\left(v^2\right)_{m+1}^{n+1}-\left(v^2\right)_{m-1}^{n+1}}{4h}=\omega\tau\left(\frac{\left(v^2\right)_m^n v_{m+1}^{n+1}-\left(\left(v^2\right)_m^n+\left(v^2\right)_{m-1}^n\right)v_m^{n+1}+\left(v^2\right)_{m-1}^n v_{m-1}^{n+1}}{h^2}\right)$$

Лианиризуем наше уравнение. Пусть $w_m^n=v_m^n+\delta_m^n$ другое решение сеточной задачи, тогда подставим это решение в наше уравнение вычтем исходное. Затем выполним следующие равненства

$$(v_m^n+\delta_m^n)^2-(v_m^n)^2=2v_m^n\delta_m^n$$

Тогда с точностью до $O((\delta_m^n)^2)$

$$\frac{\delta_m^{n+1}-\delta_m^n}{\tau}-\frac{2\delta_{m+1}^{n+1}v_{m+1}^{n+1}-2\delta_{m-1}^{n+1}v_{m-1}^{n+1}}{4h}=\omega\tau\left(\frac{2\delta_m^n v_m^n v_{m+1}^{n+1}-\left(2\delta_m^n v_m^n+2\delta_{m-1}^n v_{m-1}^n\right)v_m^{n+1}+2\delta_{m-1}^n v_{m-1}^n v_{m-1}^{n+1}}{h^2}\right)$$

Применим спектральный признак устойчивости. Сделаем замену

$$\delta_m^n=(\lambda(\varphi))^n e^{im\varphi}$$

Тогда

$$
\frac{\lambda^{n+1}e^{im\varphi}-\lambda^n e^{im\varphi}}{\tau}-\frac{2\lambda^{n+1}e^{i(m+1)\varphi}v_{m+1}^{n+1}-2\lambda^{n+1}e^{i(m-1)\varphi}v_{m-1}^{n+1}}{4h}=
$$

$$
=\omega\tau\left(\frac{2\lambda^n e^{im\varphi}v_m^n v_{m+1}^{n+1}-\left(2\lambda^n e^{im\varphi}v_m^n+2\lambda^n e^{i(m-1)\varphi}v_{m-1}^n\right)v_m^{n+1}+2\lambda^n e^{i(m-1)\varphi}v_{m-1}^n v_{m-1}^{n+1}}{h^2}\right)
$$

$$
\frac{\lambda-1}{\tau}-2\lambda\frac{e^{i\varphi}v_{m+1}^{n+1}-e^{i\varphi}v_{m-1}^{n+1}}{4h}=\omega\tau\left(\frac{2v_m^n v_{m+1}^{n+1}-\left(2v_m^n+2e^{-i\varphi}v_{m-1}^n\right)v_m^{n+1}+2e^{-i\varphi}v_{m-1}^n v_{m-1}^{n+1}}{h^2}\right)
$$

$$
\lambda=\frac{\frac{1}{\tau}+\omega\tau\left(\frac{2v_m^n v_{m+1}^{n+1}-\left(2v_m^n+2e^{-i\varphi}v_{m-1}^n\right)v_m^{n+1}+2e^{-i\varphi}v_{m-1}^n v_{m-1}^{n+1}}{h^2}\right)}{\frac{1}{\tau}-2\frac{e^{i\varphi}v_{m+1}^{n+1}-e^{i\varphi}v_{m-1}^{n+1}}{4h}}
$$

Преобразуем, найдём модуль λ, получим, что данная схема неустойчива

5 Аппроксимация

Рассматривается уравнение переноса:

$$
\frac{\partial u}{\partial t}-\frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial x}=0.
$$

1. Посчитаем апроксимацию для явной схемы (1*)

$$
v_m^{n+1}-\frac{1}{2}\left(\left(1+\frac{\tau}{h}\right)v_{m+1}^n+\left(1-\frac{\tau}{h}\right)v_{m-1}^n\right)=
$$

$$
=v_m^n+\tau\dot{v}_m^n+O(\tau^2)-\frac{1}{2}\left(\left(1+\frac{\tau}{h}\right)\left(v_m^n+h{v'}_m^n+O(h^2)\right)+\left(1-\frac{\tau}{h}\right)\left(v_m^n-h{v'}_m^n+O(h^2)\right)\right)=
$$

$$
=\tau\left(\dot{v}_m^n-\frac{1}{2}{v'}_m^n\right)+O(\tau^2+h^2)=O(\tau^2+h^2).
$$

2. Для неявной схемы (2*)

$$
4h^2v_m^n+\tau\left(\omega\tau-h\right)v_{m-1}^{n+1}-2\left(2h^2+\omega\tau^2\right)v_m^{n+1}+\tau\left(\omega\tau+h\right)v_{m+1}^{n+1}=
$$

$$
=4h^2v_m^n+\tau\left(\omega\tau-h\right)\left(v_m^n+\tau\dot{v}_m^n-h{v'}_m^n-\tau h{\dot{v}'}{}_m^n+O(h^2+\tau^2)\right)-2\left(2h^2+\omega\tau^2\right)\left(v_m^n+\tau\dot{v}_m^n+O(\tau^2)\right)+
$$

$$
+\tau\left(\omega\tau+h\right)\left(v_m^n+\tau\dot{v}_m^n+h{v'}_m^n+\tau h{\dot{v}'}{}_m^n+O(h^2+\tau^2)\right)=
$$

$$
=\cancel{4h^2v_m^n}+\omega\tau^2\left(v_m^n+\tau\dot{v}_m^n-\cancel{h{v'}_m^n-\tau h{\dot{v}'}{}_m^n}+O(h^2+\tau^2)\right)-\tau h\left(\cancel{v_m^n+\tau\dot{v}_m^n}-h{v'}_m^n-\tau h{\dot{v}'}{}_m^n+O(h^2+\tau^2)\right)-
$$

$$
-4h^2\left(\cancel{v_m^n}+\tau\dot{v}_m^n+O(\tau^2)\right)+2\omega\tau^2\left(v_m^n+\tau\dot{v}_m^n+O(\tau^2)\right)+\omega\tau^2\left(v_m^n+\tau\dot{v}_m^n+\cancel{h{v'}_m^n+\tau h{\dot{v}'}{}_m^n}+O(h^2+\tau^2)\right)+
$$

$$
+\tau h\left(\cancel{v_m^n+\tau\dot{v}_m^n}+h{v'}_m^n+\tau h{\dot{v}'}{}_m^n+O(h^2+\tau^2)\right)=O(\tau^2+\tau h^2)
$$

6 Дифференциальное приближение

1. Дифференциальное приближение для явной схемы (1) с точностью до членов порядка $O\left(\tau^3+h^3+\frac{h^4}{\tau}\right)$

$$
v_t-\frac{1}{2}v_{\overset{\circ}{x}}=\frac{h^2}{2\tau}v_{x\bar{x}}
$$

$$
\dot{v}+\frac{\tau}{2}\ddot{v}+\frac{\tau^2}{6}\dddot{v}+O\left(\tau^3\right)-\frac{1}{2}v'-\frac{h}{4}v''-\frac{h^2}{12}v'''+O\left(h^3\right)=\frac{h^2}{2\tau}v''+\frac{h^3}{4\tau}v'''+O\left(\frac{h^4}{\tau}\right)
$$

$$
\dot{v}-\frac{1}{2}v'-\frac{h^2}{2\tau}v''=-\frac{\tau}{2}\ddot{v}-\frac{\tau^2}{6}\dddot{v}+\frac{h}{4}v''+\frac{h^2}{12}v'''+\frac{h^3}{4\tau}v''''+O\left(\tau^3+h^3+\frac{h^4}{\tau}\right)
$$

$$
\dot{v}=\frac{1}{2}v'+O\left(\tau+h+\frac{h^2}{\tau}\right)
$$

$$\dot{v}' = \frac{1}{2}v'' + O\left(\tau + h + \frac{h^2}{\tau}\right)$$
$$\dot{v}'' = \frac{1}{2}v''' + O\left(\tau + h + \frac{h^2}{\tau}\right)$$
$$\ddot{v} = \frac{1}{2}\dot{v}' + O\left(\tau + h + \frac{h^2}{\tau}\right) = \frac{1}{4}v'' + O\left(\tau + h + \frac{h^2}{\tau}\right)$$
$$\dddot{v} = \frac{1}{4}\dot{v}'' + O\left(\tau + h + \frac{h^2}{\tau}\right) = \frac{1}{8}v''' + O\left(\tau + h + \frac{h^2}{\tau}\right)$$

$$\dot{v} - \frac{1}{2}v' - \frac{h^2}{2\tau}v'' = \left(\frac{h}{4} - \frac{\tau}{8}\right)v'' + \left(\frac{h^2}{12} - \frac{\tau^2}{48}\right)v''' + \frac{h^3}{4\tau}v'''' + O\left(\tau^3 + h^3 + \frac{h^4}{\tau}\right)$$

2. Дифференциальное приближение для явной схемы (2) с точностью до членов порядка $O\left(\tau^3 + h^3 + \tau h^2\right)$

$$v_t - \frac{1}{2}\hat{v}_{\overset{\circ}{x}} = \frac{\omega\tau}{4}\hat{v}_{x\overline{x}}$$

$$\dot{v} + \frac{\tau}{2}\ddot{v} + \frac{\tau^2}{6}\dddot{v} + O\left(\tau^3\right) - \frac{1}{2}v' - \frac{h}{4}v'' - \frac{h^2}{12}v''' + O\left(h^3\right) = \frac{\omega\tau}{4}v'' + \frac{\omega\tau h}{8}v''' + O\left(\tau h^2\right)$$
$$\dot{v} - \frac{1}{2}v' + \frac{\omega\tau}{4}v'' = -\frac{\tau}{2}\ddot{v} - \frac{\tau^2}{6}\dddot{v} + \frac{h}{4}v'' + \frac{h^2}{12}v''' + \frac{\omega\tau h}{8}v''' + O\left(\tau^3 + h^3 + \tau h^2\right)$$
$$\dot{v} = \frac{1}{2}v' + O\left(\tau + h\right)$$
$$\dot{v}' = \frac{1}{2}v'' + O\left(\tau + h\right)$$
$$\dot{v}'' = \frac{1}{2}v''' + O\left(\tau + h\right)$$
$$\ddot{v} = \frac{1}{2}\dot{v}' + O\left(\tau + h\right) = \frac{1}{4}v'' + O\left(\tau + h\right)$$
$$\dddot{v} = \frac{1}{4}\dot{v}'' + O\left(\tau + h\right) = \frac{1}{8}v''' + O\left(\tau + h\right)$$
$$\dot{v} - \frac{1}{2}v' + \frac{\omega\tau}{4}v'' = \left(\frac{h}{4} - \frac{\tau}{8}\right)v'' + \left(\frac{h^2}{12} + \frac{\omega\tau h}{8} - \frac{\tau^2}{48}\right)v''' + O\left(\tau^3 + h^3 + \tau h^2\right)$$

7 Устойчивость

1. Для явной схемы (1*)

$$v_m^{n+1} = \frac{1}{2}\left(\left(1 + \frac{\tau}{h}\right)v_{m+1}^n + \left(1 - \frac{\tau}{h}\right)v_{m-1}^n\right)$$

Сделаем замену

$$v_m^n = (\lambda(\varphi))^n e^{im\varphi}$$

Тогда

$$\lambda^{n+1}e^{im\varphi} = \frac{1}{2}\left(\left(1 + \frac{\tau}{h}\right)\lambda^n e^{i(m+1)\varphi} + \left(1 - \frac{\tau}{h}\right)\lambda^n e^{i(m-1)\varphi}\right)$$

Сократим всё на $\lambda^n e^{im\varphi}$

$$\lambda = \frac{1}{2}\left(\left(1 + \frac{\tau}{h}\right)e^{i\varphi} + \left(1 - \frac{\tau}{h}\right)e^{-i\varphi}\right)$$
$$\lambda = \frac{1}{2}\left(e^{i\varphi} + e^{-i\varphi} + \frac{\tau}{h}\left(e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}\right)\right)$$

$$\lambda = \cos\varphi + \frac{i\tau}{h}\sin\varphi$$

$$|\lambda| = \sqrt{\cos^2\varphi + \frac{\tau^2}{h^2}\sin^2\varphi} = \sqrt{1 + (\frac{\tau^2}{h^2} - 1)\sin^2\varphi} \leqslant 1 \quad\Longleftrightarrow\quad -1 \leqslant \frac{\tau^2}{h^2} - 1 \leqslant 0$$

$$0 \leqslant \frac{\tau^2}{h^2} \leqslant 1 \quad\Longrightarrow\quad \tau^2 \leqslant h^2 \quad\Longrightarrow\quad \tau \leqslant h.$$

Таким образом, можем сделать вывод, что наша схема устойчива при условии $\tau \leqslant h$.

2. Для неявной схемы (2*)

$$4h^2 v_m^n + \tau\left(\omega\tau - h\right) v_{m-1}^{n+1} - 2\left(2h^2 + \omega\tau^2\right) v_m^{n+1} + \tau\left(\omega\tau + h\right) v_{m+1}^{n+1} = 0$$

Аналогично предыдущему пункту сделаем замену

$$v_m^n = (\lambda(\varphi))^n e^{im\varphi}$$

Тогда

$$4h^2 \lambda^n e^{im\varphi} + \tau\left(\omega\tau - h\right) \lambda^{n+1} e^{i(m-1)\varphi} - 2\left(2h^2 + \omega\tau^2\right) \lambda^{n+1} e^{im\varphi} + \tau\left(\omega\tau + h\right) \lambda^{n+1} e^{i(m+1)\varphi} = 0$$

Сократим всё на $\lambda^{n+1} e^{im\varphi}$

$$\frac{4h^2}{\lambda} + \tau\left(\omega\tau - h\right) e^{-i\varphi} - 2\left(2h^2 + \omega\tau^2\right) + \tau\left(\omega\tau + h\right) e^{i\varphi} = 0$$

$$\frac{4h^2}{\lambda} + \omega\tau^2\left(e^{-i\varphi} + e^{i\varphi}\right) - 2\left(2h^2 + \omega\tau^2\right) + \tau h\left(e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}\right) = 0$$

$$\frac{4h^2}{\lambda} + 2\omega\tau^2\cos\varphi - 2\left(2h^2 + \omega\tau^2\right) + 2i\tau h\sin\varphi = 0$$

$$\frac{4h^2}{\lambda} + 2\omega\tau^2\cos\varphi - 2\left(2h^2 + \omega\tau^2\right) + 2i\tau h\sin\varphi = 0$$

$$-1 \leqslant \lambda = \frac{2h^2}{2h^2 + \omega\tau^2 - \omega\tau^2\cos\varphi - i\tau h\sin\varphi} \leqslant 1$$

Рассмотрим правый случай

$$2h^2 \leqslant 2h^2 + \omega\tau^2 - \omega\tau^2\cos\varphi - i\tau h\sin\varphi$$

$$\omega\tau^2\cos\varphi + i\tau h\sin\varphi \leqslant \omega\tau^2$$

$$\cos\varphi + \frac{ih}{\tau\omega}\sin\varphi \leqslant 1$$

$$\cos^2\varphi + \frac{h^2}{\tau^2\omega^2}\sin^2\varphi \leqslant 1$$

$$1 + \left(\frac{h^2}{\tau^2\omega^2} - 1\right)\sin^2\varphi \leqslant 1$$

$$\frac{h^2}{\tau^2\omega^2} \leqslant 1 \qquad \Longrightarrow \qquad h \leqslant \tau\omega$$

Рассмотрим левый случай

$$-2h^2 \leqslant 2h^2 + \omega\tau^2 - \omega\tau^2\cos\varphi - i\tau h\sin\varphi$$

$$\omega\tau^2\cos\varphi + i\tau h\sin\varphi \leqslant 4h^2 + \omega\tau^2$$

$$\cos\varphi + \frac{ih}{\tau\omega}\sin\varphi \leqslant \frac{4h^2}{\omega\tau^2} + 1$$

$$\cos^2\varphi + \frac{h^2}{\tau^2\omega^2}\sin^2\varphi \leqslant \left(\frac{4h^2}{\omega\tau^2} + 1\right)^2$$

$$1 + \left(\frac{h^2}{\tau^2\omega^2} - 1\right)\sin^2\varphi \leqslant \frac{16h^4}{\omega^2\tau^4} + \frac{8h^2}{\omega\tau^2} + 1$$

$$\left(\frac{h^2}{\tau^2\omega^2} - 1\right)\sin^2\varphi \leqslant \frac{16h^4}{\omega^2\tau^4} + \frac{8h^2}{\omega\tau^2}$$

Так как мы уже выяснили, что

$$\frac{h^2}{\tau^2\omega^2} \leqslant 1$$

Получим

$$|\sin\varphi| \geqslant \sqrt{\frac{\frac{16h^4}{\omega^2\tau^4} + \frac{8h^2}{\omega\tau^2}}{1 - \frac{h^2}{\tau^2\omega^2}}}$$

Рассмотрим $\varphi = \frac{\pi}{2}$

$$1 \geqslant \frac{\frac{16h^4}{\omega^2\tau^4} + \frac{8h^2}{\omega\tau^2}}{1 - \frac{h^2}{\tau^2\omega^2}}$$

$$\frac{16h^4}{\omega^2\tau^4} + \frac{8h^2}{\omega\tau^2} + \frac{h^2}{\tau^2\omega^2} - 1 \leqslant 0$$

$$\frac{16h^4}{\tau^4} + (8\omega + 1)\frac{h^2}{\tau^2} - \omega^2 \leqslant 0$$

Рассморим случай

$$\frac{16h^4}{\tau^4} + (8\omega + 1)\frac{h^2}{\tau^2} - \omega^2 = 0$$

и делаем замену $x = \frac{h^2}{\tau^2}$

$$16x^2 + (8\omega + 1)x - \omega^2 = 0$$

$$D = (8\omega + 1)^2 + 4 \cdot 16 \cdot \omega^2 = 128\omega^2 + 16\omega + 1$$

$$x = \frac{-8\omega - 1 \pm \sqrt{128\omega^2 + 16\omega + 1}}{32}$$

Значит

$$\frac{h^2}{\tau^2} \in \left[\frac{-8\omega - 1 - \sqrt{128\omega^2 + 16\omega + 1}}{32}, \frac{-8\omega - 1 + \sqrt{128\omega^2 + 16\omega + 1}}{32}\right]$$

При $\omega = 1$

$$\frac{h^2}{\tau^2} \in (0, 0.095)$$

$$\frac{h}{\tau} \in (0, 0.3)$$

При $\omega = 0.1$

$$\frac{h^2}{\tau^2} \in (0, 0.0053)$$

$$\frac{h}{\tau} \in (0, 0.073)$$

Таким образом, мы можем подобрать такие τ и h, чтобы наша схема была устойчива в точке $\varphi = \frac{\pi}{2}$, а значит она условно устойчива.

8 Аналитическое решение

8.1 Линейный случай

Решение системы, которую мы рассматриваем, имеет вид

$$u(t,x) = \begin{cases} 0, & x + \frac{t}{2} \leqslant 0; \\ 4x + 2t, & 0 < x + \frac{t}{2} \leqslant \frac{1}{4}; \\ 1, & x + \frac{t}{2} > \frac{1}{4}. \end{cases}$$

8.2 Нелинейный случай

Решение нелинейного уравнения $\frac{\partial u}{\partial t} - u\frac{\partial u}{\partial x} = 0$ с начальным условием $u(0,x) = u_0(x)$ будем проводить в два этапа.

- Формально найдём решение $\varphi(t,x)$ уравнения Хопфа $\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = 0$ с начальным условием $\varphi(0,x) = u_0(x)$. Решение задачи Коши в параметрическом виде

$$\begin{cases} \varphi = u_0(\xi); \\ x = \xi + u_0(\xi)t. \end{cases}$$

Это решение в нашем случае имеет вид

$$\varphi_1(t,x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 0; \\ \frac{x}{0.25+t}, & 0 < x < t + 0.25; \\ 1, & x \geqslant 0.25 + t. \end{cases}$$

В момент времени $t = -0.25$ происходит опрокидывание волны. Волна начинает двигаться вдвое медленнее по правилу Уизема.

$$\varphi_2(t,x) = \begin{cases} 0, x < \frac{1}{2}(t+0.25); \\ 1, x \geqslant \frac{1}{2}(t+0.25). \end{cases}$$

- Обратим время, то есть заметим, что искомое $u(t,x) = \varphi(-t,x)$.

$$u(t,x) = \begin{cases} \varphi_1(-t,x), & t < \frac{1}{4}; \\ \varphi_2(-t,x), & t \geqslant \frac{1}{4}. \end{cases}$$

Самое для нас интересное, это значение в момент времени $t = 1$

$$u(1,x) = \begin{cases} 0, & x < -\frac{3}{8}; \\ 1, & x > \frac{3}{8}. \end{cases}$$

А также выпишем условия на достаточно толстой границе

$$u(t,x) = \begin{cases} 0, & x < -\frac{3}{8},\ t \in [0,1]; \\ 1, & x > 0.25,\ t \in [0,1]; \\ . & \dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

9 Расчёт линейной задачи

$$||v||_{C_h} = \max_{x_i \in \omega_h} |v_i|, \qquad ||v||_{L_{1,h}} = h \cdot \sum_{x_i \in \omega_h} |v_i|, \qquad \Delta(v)_\alpha = ||v-u||_\alpha, \qquad \delta(v)_\alpha = \frac{||u-v||_\alpha}{||v||_\alpha}$$

Таблица 1. Нормы погрешности расчётов явной схемы.

τ	h	$\Delta(v)_{C_h}$	$\Delta(v)_{L_1,h}$	$\delta(v)_{C_h}$	$\delta(v)_{L_1,h}$
1.000000e-01	1.000000e-01	1.000000e+00	4.900000e+01	1.000000e+00	5.539853e-01
1.000000e-01	1.000000e-02	5.273108e+06	5.054663e+05	9.999999e-01	9.999896e-01
1.000000e-01	1.000000e-03	5.465235e+16	5.093047e+14	1.000000e+00	1.000000e+00
1.000000e-02	1.000000e-01	8.031926e-01	3.709536e-01	8.031926e-01	2.426046e-01
1.000000e-03	1.000000e-01	9.373646e-01	8.401416e-01	9.373646e-01	7.926923e-01
1.000000e-02	1.000000e-02	1.000000e+00	4.000000e+00	1.000000e+00	4.104669e-01
1.000000e-02	1.000000e-03	1.616070e+96	4.323214e+94	1.000000e+00	1.000000e+00
1.000000e-03	1.000000e-02	8.181700e-01	4.498948e-02	8.181700e-01	2.313072e-02
1.000000e-03	1.000000e-03	1.000000e+00	5.000000e-01	1.000000e+00	2.667378e-01
1.000000e-04	2.000000e-03	1.585838e-01	7.305628e-02	1.585838e-01	2.657558e-02

Таблица 2. Нормы погрешности расчётов неявной схемы w = 0.1.

τ	h	$\Delta(v)_{C_h}$	$\Delta(v)_{L_1,h}$	$\delta(v)_{C_h}$	$\delta(v)_{L_1,h}$
1.000000e-01	2.000000e-01	4.372200e-01	2.269288e-01	4.038161e-01	1.959267e-01
1.000000e-02	2.000000e-01	3.375862e-01	2.378580e-01	2.805984e-01	1.904446e-01
1.000000e-03	2.000000e-01	3.290486e-01	2.418351e-01	2.701957e-01	1.922478e-01
1.000000e-01	2.000000e-02	4.106256e+00	1.941447e+00	1.314155e+00	1.424242e+00
1.000000e-03	1.000000e-01	9.373646e-01	8.401416e-01	9.373646e-01	7.926923e-01
1.000000e-02	2.000000e-02	7.311477e-01	8.107262e-01	6.954223e-01	1.453499e+00
1.000000e-02	2.000000e-03	4.839753e+30	1.322317e+30	1.000000e+00	1.000000e+00
1.000000e-03	2.000000e-03	2.375341e+01	3.131219e+00	1.043861e+00	1.536225e+00

Таблица 3. Нормы погрешности расчётов неявной схемы w = 1.0.

τ	h	$\Delta(v)_{C_h}$	$\Delta(v)_{L_1,h}$	$\delta(v)_{C_h}$	$\delta(v)_{L_1,h}$
1.000000e-01	2.000000e-01	9.306913e-01	7.211783e-01	6.911680e-01	1.030898e+00
1.000000e-02	2.000000e-01	4.141583e-01	2.351699e-01	3.734761e-01	2.015669e-01
1.000000e-03	2.000000e-01	3.370144e-01	2.406146e-01	2.790449e-01	1.926056e-01
1.000000e-01	2.000000e-02	1.187399e+08	8.121043e+07	1.000000e+00	1.000000e+00
1.000000e-02	2.000000e-02	2.453783e+02	5.281614e+01	1.004092e+00	1.010707e+00
1.000000e-02	2.000000e-03	2.054269e+108	8.622864e+107	1.000000e+00	1.000000e+00
1.000000e-03	2.000000e-03	8.290935e+46	1.136613e+46	1.000000e+00	1.000000e+00
1.000000e-03	2.000000e-02	7.264135e-01	8.126977e-01	6.909746e-01	1.463833e+00

10 Расчёт нелинейной задачи

Таблица 4. Нормы погрешности расчётов явной схемы.

τ	h	$\Delta(v)_{C_h}$	$\Delta(v)_{L_1,h}$	$\delta(v)_{C_h}$	$\delta(v)_{L_1,h}$
1.000000e-04	2.000000e-03	5.002563e-01	2.766860e-02	5.002563e-01	1.006497e-02
1.000000e-01	1.000000e-01	1.000000e+00	4.934460e+01	5.921550e-01	5.578812e-01
1.000000e-01	1.000000e-02	1.579176e+184	3.158663e+182	1.000000e+00	1.000000e+00
1.000000e-01	1.000000e-03	inf	nan	nan	nan
1.000000e-02	1.000000e-01	7.987221e-01	2.871557e-01	7.987221e-01	1.780430e-01
1.000000e-03	1.000000e-01	9.400057e-01	8.370356e-01	9.400057e-01	7.874540e-01
1.000000e-03	1.000000e-02	8.038476e-01	2.986111e-02	8.038476e-01	1.523418e-02
1.000000e-02	1.000000e-02	inf	nan	nan	nan
1.000000e-02	1.000000e-03	inf	nan	nan	nan
1.000000e-03	1.000000e-03	inf	nan	nan	nan
1.000000e-04	1.000000e-03	8.038476e-01	2.986111e-03	8.038476e-01	1.496037e-03

Таблица 5. Нормы погрешности расчётов неявной схемы.

τ	h	$\Delta(v)_{C_h}$	$\Delta(v)_{L_1,h}$	$\delta(v)_{C_h}$	$\delta(v)_{L_1,h}$
1.000000e-01	2.000000e-02	inf	inf	nan	nan
1.000000e-02	2.000000e-03	0.000000e+00	nan	nan	nan

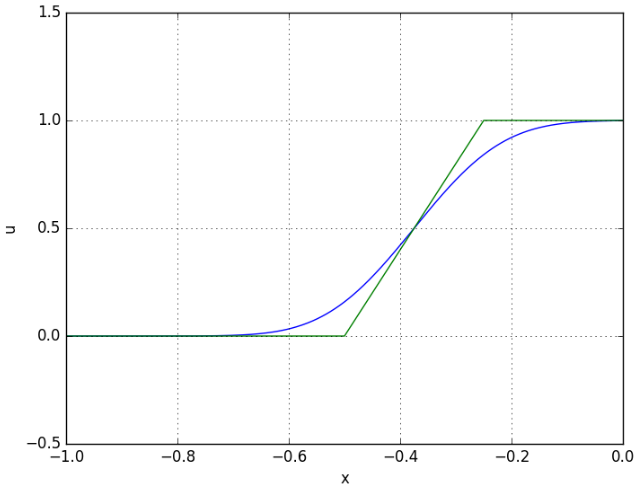

Рис. 1. Явный линейный

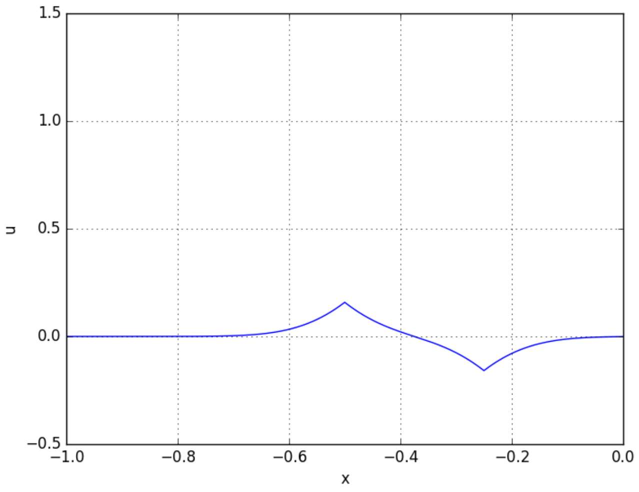

Рис. 2. Явный линейный (ошибка)

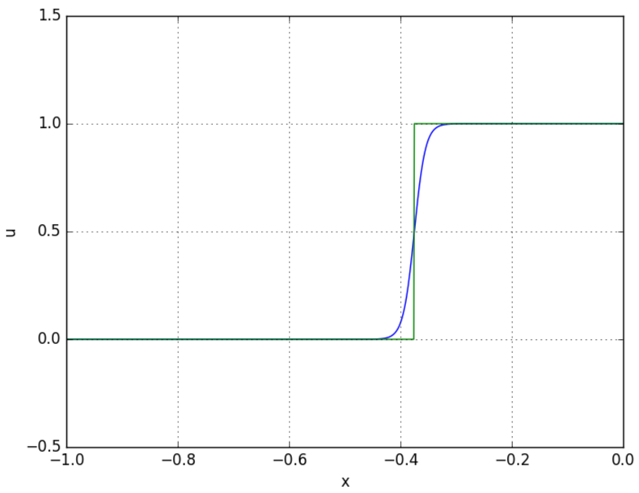

Рис. 3. Явный нелинейный

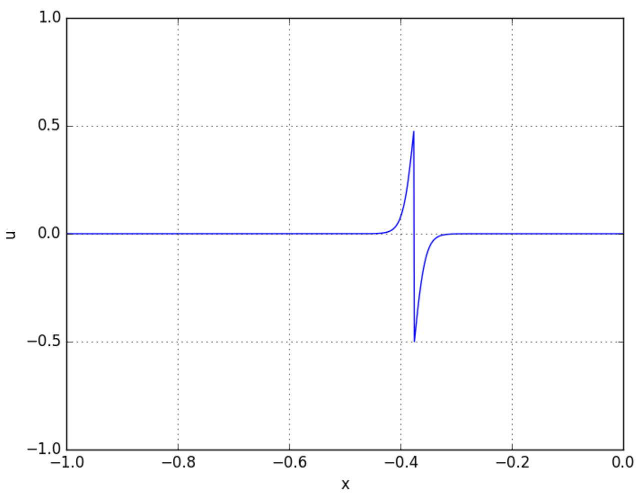

Рис. 4. Явный нелинейный (ошибка)

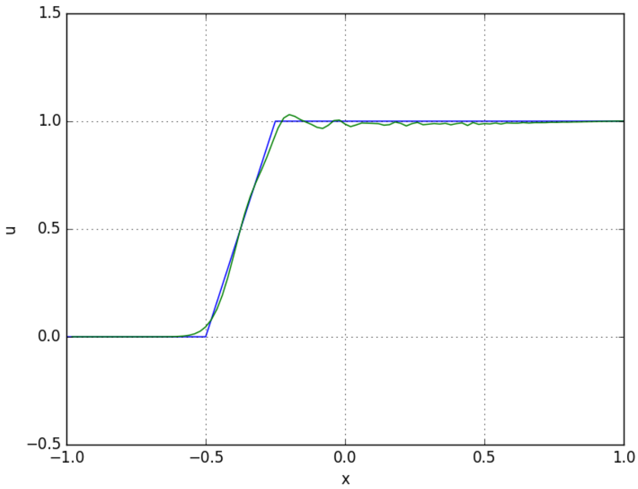

Рис. 5. Невный линейный $\omega = 1.0$

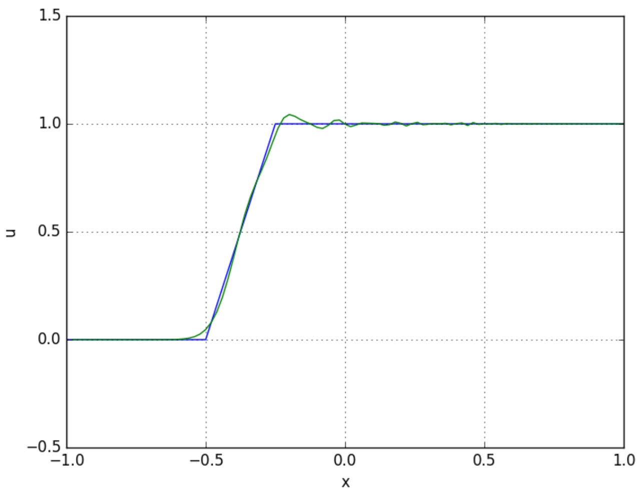

Рис. 6. Невный линейный $\omega = 0.1$

11 Приложения

11.1 Метод Ньютона

Решение нелинейной системы уравнений методом Ньютона

$$F(\overline{x}) = F(\overline{x}_0 + \Delta\overline{x}_1) \approx F(\overline{x}_0) + \left.\frac{\partial F}{\partial \overline{x}}\right|_{\overline{x}=\overline{x}_0} \cdot \Delta\overline{x}_1$$

Определим вектор приращений $\Delta\overline{x}_1$ из условия $F(\overline{x}) = 0$

$$\left.\frac{\partial F}{\partial \overline{x}}\right|_{\overline{x}=\overline{x}_0} \cdot \Delta\overline{x}_1 = -F(\overline{x}_0);$$

Или в развёрнутом виде

$$\sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial f_i(\overline{x}_0)}{\partial x_j}\right) \cdot \Delta\overline{x}_1 = -f_i(\overline{x}_0),$$

$$\frac{\partial f_i(\overline{x}_0)}{\partial x_j} = \frac{f_i(x_1(0), \ldots, x_{j-1}(0), x_j(0) + \varepsilon, x_{j+1}(0), \ldots, x_n(0)) - f_i(\overline{x}_0)}{\varepsilon}$$

Обозначим матрицу Якоби

$$F'(\overline{x}_0) = \left.\frac{\partial F}{\partial \overline{x}}\right|_{\overline{x}=\overline{x}_0} \equiv \left\|\frac{\partial f_i(\overline{x}_0)}{\partial x_j}\right\|$$

Значит,

$$F'(\overline{x}_0) \cdot \Delta\overline{x}_1 = -F(\overline{x}_0)$$

$$\Delta\overline{x}_1 = \overline{x}_1 - \overline{x}_0 = -\left(F'(\overline{x}_0)\right)^{-1} \cdot F(\overline{x}_0)$$

$$\overline{x}_1 = \overline{x}_0 - \left(F'(\overline{x}_0)\right)^{-1} \cdot F(\overline{x}_0)$$

11.2 Характеристики

11.2.1 Лиинейный случай

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

Составим характеристическую систему

$$\frac{dt}{1} = \frac{dx}{-\frac{1}{2}}$$

$$t = -2x + C_1. \tag{6}$$

11.2.2 Нелинейный случай

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{1}{2}\frac{\partial u^2}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} - u\frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

Составим характеристическую систему

$$\frac{dt}{1} = \frac{dx}{-u} = \frac{du}{0}$$

Значит, получим уравнения

$$u = C_1, \qquad x + ut = C_2$$

начальное значение (4): значит

$$C_2 = \sigma; \qquad C_1 = \varphi(\xi) = u_0(\xi) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad \xi \leqslant 0, \\ 4\xi, & \text{если} \quad 0 < \xi \leqslant 0.25, \\ 1, & \text{если} \quad \xi > 0.25; \end{cases}$$

Тогда

$$x + \varphi(\xi)t = \xi \quad \Longrightarrow \quad x = -\varphi(\xi)t + \xi. \tag{7}$$