

Московский государственный университет  
им. М. В. Ломоносова  
Механико-математический факультет  
Кафедра газовой и волновой динамики

Ракитин Виталий Павлович.

Численное решение краевой задачи принципа максимума в задаче  
оптимального управления методом стрельбы.

Москва, 2015 год.

# Содержание

1	Постановка задачи	2
2	Формализация задачи	2
3	Система необходимых условий оптимальности	2
4	Аномальный случай и исследование задачи	4
5	Краевая задача	4
6	Аналитическое решение краевой задачи	5
7	Численное решение краевой задачи методом стрельбы	6
8	Тестирование на гармоническом осцилляторе	6
9	Результаты решения задачи и их анализ	9
10	Сравнение аналитического и численного решений	9
11	Приложения	11
11.1	Решение задачи о математическом осцилляторе в Wolfram Mathematica 9. . . . .	11

# 1 Постановка задачи

Рассматривается задача (номер 34) Лагранжа с фиксированным временным отрезком, без ограничений вида «меньше или равно»:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{\ddot{x}^2}{1 + \alpha t^2 x^2} dt &\rightarrow \text{extr}, \\ \int_0^1 x dt &= 1, \\ x(0) = \dot{x}(1) &= 0, \\ \dot{x}(0) &= 1, \end{aligned} \tag{1}$$

где  $\alpha$  — известная константа, параметр задачи.

Требуется формализовать задачу как задачу оптимального управления, принципом максимума Понтрягина свести задачу к краевой задаче, численно решить полученную краевую задачу методом стрельбы и обосновать точность полученных результатов, проверить полученные экстремали Понтрягина на оптимальность при различных значениях параметра

$$\alpha = \{0.0; \quad 0.1; \quad 1.0; \quad 10.0\}.$$

# 2 Формализация задачи

Формализуем задачу для оптимального управления. Для этого введём следующие обозначения

$$y = \dot{x}, \quad u = \dot{y} = \ddot{x}.$$

где  $u$  — управление.

Тогда исходная система (1) переписется в виде:

$$\begin{cases} \dot{x} = y; \\ \dot{y} = u; \\ u \in \mathbb{R}; \\ x(0) = 0, \quad y(0) = 1; \\ y(1) = 0; \\ \int_0^1 x dt = 1; \\ \int_0^1 \frac{u^2}{1 + \alpha t^2 x^2} dt \rightarrow \text{extr}. \end{cases} \tag{2}$$

# 3 Система необходимых условий оптимальности

Рассмотрим задачу Лагранжа в пространстве  $\Omega = C^1(\Delta, \mathbb{R}^2) \times C(\Delta, \mathbb{R}) \times \mathbb{R}^2$ :

$$u(t) \in \mathbb{R}, \quad \bar{x}^T = (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad \dot{\bar{x}}^T = (y, u) = 0, \quad \varphi(t, \bar{x}(t), u(t)) = (y, u);$$

Далее выпишем следующий функционалы

$$B_i(\bar{x}, u, t_0, t_1) = B_i(x, y, u, 0, 1) = \int_0^1 f_i(t, \bar{x}, u) dt + \psi_i(0, \bar{x}(0), 1, \bar{x}(1)), \quad \text{где } i = 1, \dots, 4.$$

$$B_0 = \int_0^1 \frac{u^2}{1 + \alpha t^2 x^2} dt, \quad f_0 = \frac{u^2}{1 + \alpha t^2 x^2}, \quad \psi_0 = 0;$$

$$B_1 = \int_0^1 x dt - 1 = 0, \quad f_1 = x, \quad \psi_1 = -1;$$

$$\begin{aligned}
B_2 &= x(0), & f_2 &= 0, & \psi_2 &= x(0); \\
B_3 &= y(0) - 1, & f_3 &= 0, & \psi_3 &= y(0) - 1; \\
B_4 &= y(1), & f_4 &= 0, & \psi_4 &= y(1);
\end{aligned}$$

Далее выпишем функцию Лагранжа

$$\mathcal{L} = \int_0^1 L dt + l;$$

где

$$L = \sum_{i=0}^4 \lambda_i f_i(t, \bar{x}, u) + \langle \bar{p}(t), \dot{\bar{x}} - \varphi(t, \bar{x}, u) \rangle$$

называется лагранжианом, а

$$l = \sum_{i=0}^4 \lambda_i \psi_i(0, \bar{x}(0), 1, \bar{x}(1));$$

терминантом.

$$\lambda = (\lambda_0, \dots, \lambda_4), \quad \bar{p}(\cdot) = (p_x, p_y) \in C^1(\Delta, \mathbb{R}^{2*})$$

множители лагранжа задачи, а так же функция Понтрягина

$$H(t, \bar{x}, u, \bar{p}, \lambda) = \langle \bar{p}(t), \varphi(t, \bar{x}, u) \rangle - \sum_{i=0}^4 \lambda_i f_i(t, \bar{x}, u).$$

А теперь выпишем функции Лагранжа и Понтрягина в явном виде:

$$L = \lambda_0 \left( \frac{u^2}{1 + \alpha t^2 x^2} \right) + \lambda_1 x + p_x(\dot{x} - y) + p_y(\dot{y} - u); \quad (3)$$

$$l = -\lambda_1 + \lambda_2 x(0) + \lambda_3 (y(0) - 1) + \lambda_4 y(1); \quad (4)$$

$$H = p_x y + p_y u - \lambda_0 \left( \frac{u^2}{1 + \alpha t^2 x^2} \right) - \lambda_1 x; \quad (5)$$

Далее применим к задаче оптимального управления (2) принцип максимума Понтрягина. Необходимые условия оптимальности:

1. Уравнения Эйлера-Лагранжа (сопряжённая система уравнений, условие стационарности по  $\bar{x}$ ):

$$\begin{cases} \dot{p}_x = -\frac{\partial H}{\partial x} = \lambda_1; \\ \dot{p}_y = -\frac{\partial H}{\partial y} = -p_x. \end{cases} \quad (6)$$

2. условие оптимальности по управлению,

$$u = \arg \max_{u \in \mathbb{R}} H(u) = \arg \max_{u \in \mathbb{R}} \left( p_y u - \left( \frac{\lambda_0}{1 + \alpha t^2 x^2} \right) u^2 \right) = \frac{p_y (1 + \alpha t^2 x^2)}{2\lambda_0}$$

при  $\lambda_0 \neq 0$ , так как  $H(u)$  — парабола, с ветвями, направленными вниз (т.к.  $\lambda_0 \geq 0$  — см.п. 6), достигает максимума в вершине, при указанном значении аргумента  $u$ ;

3. условия трансверсальности по  $\bar{x}$ :

$$p_x(t_k) = (-1)^k \frac{\partial l}{\partial x(t_k)}, \quad p_y(t_k) = (-1)^k \frac{\partial l}{\partial y(t_k)}.$$

В нашем случае  $k = 0, 1$ ,  $t_0 = 0$ ,  $t_1 = 1$ . Значит

$$p_x(0) = \lambda_2, \quad p_x(1) = 0, \quad p_y(0) = \lambda_3, \quad p_y(1) = -\lambda_4.$$

4. условия стационарности по  $t_k$ :  
нет, так как в задаче (2)  $t_k$  — известные константы;
5. условия дополняющей нежёсткости:  
нет, так как в задаче (2) отсутствуют условия вида «меньше или равно»;
6. условие неотрицательности:  $\lambda_0 \geq 0$ ;

7. условие нормировки (множители Лагранжа могут быть выбраны с точностью до положительного множителя);

8. НЕРОН (множители Лагранжа НЕ Равны Одновременно Нулю).

## 4 Анормальный случай и исследование задачи

Исследуем возможность анормального случая  $\lambda_0 = 0$ . При  $\lambda_0 = 0$  из (2) и (6) получим систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dot{x} = y; \\ \dot{y} = u; \\ \dot{p}_x = \lambda_1; \\ \dot{p}_y = -p_x; \end{cases} \quad (7)$$

Отсюда получаем,

$$p_x(t) = \lambda_1 t + C, \quad p_y(t) = -\lambda_1 t - C.$$

Так же из условия (п. 2), имеем

$$p_y(t) \equiv 0, \quad \dot{p}_y(t) \equiv 0,$$

иначе

$$u(t) = \pm\infty,$$

и такой управляемый процесс не является допустимым. Следовательно,

$$\lambda_1 t + C = 0, \quad \lambda_1 t = C,$$

где  $t \in \mathbb{R}$ ,  $\lambda_1, C = \text{const}$ , тогда

$$\lambda_1 = C = 0, \quad p_x(t) \equiv 0.$$

Из условий трансверсальности (п. 3) получаем

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0.$$

Таким образом, если  $\lambda_0 = 0$ , то все множители Лагранжа равны 0 и получается противоречие с условием (п. 8). Значит, анормальный случай невозможен.

Так как  $\lambda_0 \neq 0$ , то в силу однородности функции Лагранжа по множителям Лагранжа выберем следующее условие нормировки:

$$\lambda_0 = \frac{1}{2},$$

тогда из условия (п. 2) определяется управление

$$u = p_y(1 + \alpha t^2 x^2), \quad (8)$$

## 5 Краевая задача

Ко всему вышесказанному добавим, что

$$\int_0^1 x dt = 1.$$

Введём обозначение

$$\varphi(t) = \int_0^t x(\tau) d\tau, \quad \lambda_1 = a;$$

тогда

$$\begin{cases} \varphi(0) = 0, \\ \dot{\varphi} = x; \\ \varphi(1) = 1; \end{cases} \quad (9)$$

Таким образом, на основе принципа максимума Понтрягина задача оптимального управления (2) сводится к краевой задаче (10).

$$\begin{cases} \dot{x} = y, & x(0) = 0; \\ \dot{y} = p_y(1 + \alpha t^2 x^2), & y(0) = 1, y(1) = 0; \\ \dot{p}_x = \lambda_1 = a, & p_x(1) = 0; \\ \dot{p}_y = -p_x; \\ \dot{\varphi} = x, & \varphi(0) = 0, \varphi(1) = 1; \\ \dot{a} = 0. \end{cases} \quad (10)$$

Параметр  $\alpha$  принимает следующие значения

$$\alpha = \{0.0; \quad 0.1; \quad 1.0; \quad 10.0\}.$$

## 6 Аналитическое решение краевой задачи

Полученная краевая задача решается аналитически.

1. из уравнения  $\dot{p}_x = 1$  следует, что

$$p_x = t + C_1,$$

где  $C_1 = \text{const.}$

Так же из краевых условий видим, что  $p_x(1) = 0$ , тогда  $0 = 1 + C_1$ , значит  $C_1 = -1$ .

2. из уравнения

$$\dot{p}_y = -p_x = -t + 1$$

получим, что

$$p_y = -\frac{1}{2}t^2 + t + C_2, \quad \text{где } C_2 = \text{const.}$$

3. из уравнения

$$\dot{y} = p_y(1 + \alpha t^4) = \left(-\frac{1}{2}t^2 + t + C_2\right)(1 + \alpha t^4)$$

не сложно получить,

$$y = \frac{1}{2} \left( -\frac{2}{5}\alpha C_2 t^5 - \frac{\alpha t^7}{7} - \frac{\alpha t^6}{3} - 2C_2 t - \frac{t^3}{3} - t^2 \right) + C_3$$

Из краевых условий  $y(0) = 1$ ,  $y(1) = 0$  получим

$$C_3 = 1, \quad C_2 = -\frac{5(5\alpha - 7)}{21(\alpha + 5)}.$$

А значит

$$y = \frac{1}{42} \left( t \left( t \left( -3\alpha t^5 - 7\alpha t^4 + \frac{2\alpha(5\alpha - 7)t^3}{\alpha + 5} - 7t - 21 \right) - \frac{320}{\alpha + 5} + 50 \right) + 42 \right)$$

4. из уравнения

$$\dot{x} = y = \frac{1}{42} \left( t \left( t \left( -3\alpha t^5 - 7\alpha t^4 + \frac{2\alpha(5\alpha - 7)t^3}{\alpha + 5} - 7t - 21 \right) - \frac{320}{\alpha + 5} + 50 \right) + 42 \right)$$

следует

$$x = \frac{t}{1008} \left( -9\alpha t^7 - 24\alpha t^6 + \frac{8\alpha(5\alpha - 7)t^5}{\alpha + 5} + \frac{120(5\alpha - 7)t}{\alpha + 5} - 42t^3 - 168t^2 + 1008 \right) + C_4,$$

Из краевых условий  $x(0) = 0$ , тогда

$$C_4 = 0$$

Из вышесказанного следует, что решением нашей системы будет следующим

$$\begin{cases} x = \frac{t}{1008} \left( -9\alpha t^7 - 24\alpha t^6 + \frac{8\alpha(5\alpha - 7)t^5}{\alpha + 5} + \frac{120(5\alpha - 7)t}{\alpha + 5} - 42t^3 - 168t^2 + 1008 \right); \\ y = \frac{1}{42} \left( t \left( t \left( -3\alpha t^5 - 7\alpha t^4 + \frac{2\alpha(5\alpha - 7)t^3}{\alpha + 5} - 7t - 21 \right) - \frac{320}{\alpha + 5} + 50 \right) + 42 \right); \\ p_x = t - 1; \\ p_y = -\frac{1}{2}t^2 + t - \frac{5(5\alpha - 7)}{21(\alpha + 5)} \end{cases}$$

## 7 Численное решение краевой задачи методом стрельбы

Краевая задача (10) решается численно методом стрельбы. В качестве параметров пристрелки выбираются недостающие для решения задачи Коши значения при  $t = 0$

$$\beta_x = p_x(0), \quad \beta_y = p_y(0), \quad \beta = \{\beta_x, \beta_y\}.$$

Задав эти значения каким-либо образом и решив задачу Коши на отрезке  $\Delta = [0, 1]$  получим соответствующие выбранному значению  $\beta$  функции  $x(t)[\beta]$ ,  $y(t)[\beta]$ ,  $p_x(t)[\beta]$ ,  $p_y(t)[\beta]$  и, в частности, значения  $p_x(1)[\beta]$ ,  $y(1)[\beta]$ . Задача Коши для системы дифференциальных уравнений (10) с начальными условиями в нулевой момент времени решается численно явным методом Рунге-Кутты 5-го порядка, основанным на расчётных формулах Дормана-Принса 5(6) DOPRI5 с автоматическим выбором шага (то есть с контролем относительной локальной погрешности на шаге по правилу Рунге). Для решения краевой задачи необходимо подобрать значения  $\beta$  так, чтобы выполнялись условия:

$$p_x(1)[\beta] = 0, \quad y(1)[\beta] = 0.$$

соответственно вектор-функцией невязок будет функция

$$X(\beta) = \begin{pmatrix} p_x(1)[\beta] \\ y(1)[\beta] \end{pmatrix}$$

Таким образом, в результате выбора вычислительной схемы метода стрельбы, решение краевой задачи свелось к решению системы двух алгебраических уравнений от двух неизвестных. Корень  $\beta$  системы алгебраических уравнений  $X(\beta) = 0$  находится методом Ньютона с модификацией Исаева-Сонина. Решение линейной системы уравнений внутри модифицированного метода Ньютона осуществляется методом Гаусса с выбором главного элемента по столбцу, с повторным пересчётом.

Схема численного решения краевой задачи методом стрельбы выбрана таким образом, что при отсутствии ошибок в программной реализации решения задачи Коши, найденный методом Ньютона корень будет правильным (без учёта погрешности численного интегрирования), даже если внутри метода Ньютона есть какие-то ишибки. Напротив, ошибка в решении задачи Коши делает бесполезным полученный результат, даже если всё остальное запрограммировано правильно и методу Ньютона удалось найти корень.

Исходя из этого крайне важен следующий тест части программы, решающей задачу Коши, на системе дифференциальных уравнений с известным аналитическим решением.

## 8 Тестирование на гармоническом осцилляторе

Дабы отбросить все сомнения в корректности работы программы для решения задачи Коши, проведём тестирование на более простом случае с заранее известным решением, а именно на гармоническом осцилляторе

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y; \\ \frac{dy}{dt} = -x; \\ 0 < t < 30; \\ t = 0 : x = 0, y = 8. \end{cases}$$

Визуализация численного решения данной задачи с помощью нашей программы представлена в виде графиков на рис.(3), (2) и (1). Для удобства проверки дополнительно решим нашу задачу с помощью пакета *Wolfram Mathematica 9* (см. рис. 11.1). Сравнивая полученные результаты можно заметить, что полученные решения абсолютно идентичны, на основе чего можно сделать вывод о корректности работы программы. Однако, для большей достоверности проверим так же численные оценки отклонений.

1. Для вычисления глобальной погрешности введём множество переменных  $\delta_i$  :

$$\delta_0 = 0, \quad \delta_{k+1} = Err_k + \delta_k \cdot e^{\int_{t_k}^{t_{k+1}} \mu(s) ds}$$

Интеграл в предыдущем выражении можно приблизить следующим образом

$$\int_{t_k}^{t_{k+1}} \mu(s) ds = (t_{k+1} - t_k) \cdot \text{Hmax} \left( \frac{J + J^T}{2} \right),$$

где  $J$  — матрица Якоби исходной системы дифференциальных уравнений,  $Err_k$  — максимум расстояний между соответствующими координатами на  $k$ -ом шаге, а  $H_{\max}$  — функция, возвращающая максимальное собственное значение полученной матрицы. В наше случае мы получим следующее

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A = \frac{J + J^T}{2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_{1,2} = 0, \quad \delta_0 = 0, \quad \delta_{k+1} = Err_k + \delta_k.$$

Таким образом были получены следующие значения глобальной погрешности:

для точности погрешности -7-го порядка  $\delta_k = 2.433796 \cdot 10^{-6}$

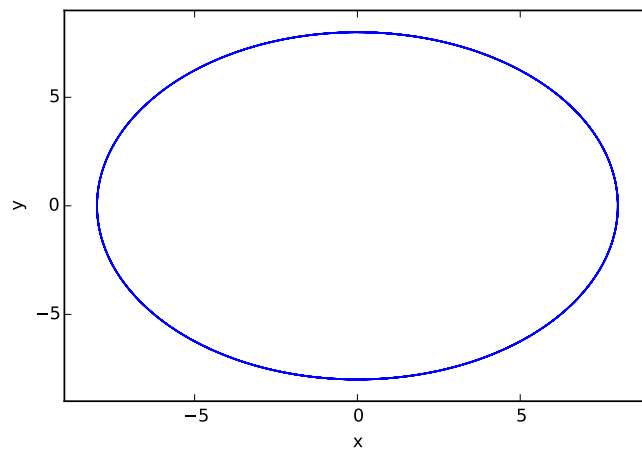
для точности погрешности -9-го порядка  $\delta_k = 3.964618 \cdot 10^{-7}$

для точности погрешности -11-го порядка  $\delta_k = 8.135620 \cdot 10^{-9}$

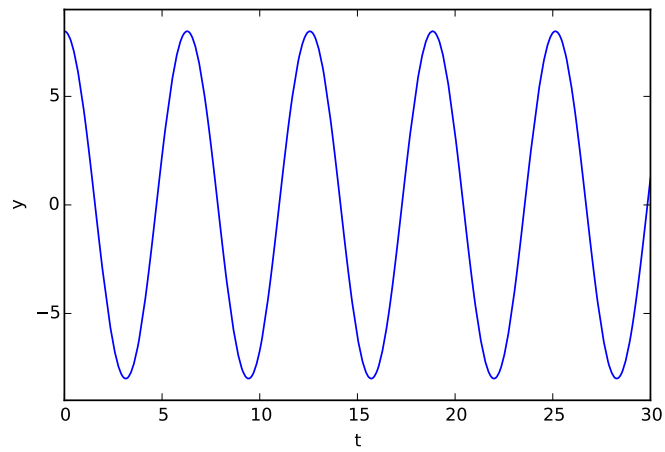
2. А оценка **локального отклонения на шаге** для каждой точки  $t = \{50, 100, 150, 200\}$  для обеих координат получилась равна в районе  $100 \pm 2$ , что намного превышает теоретическую оценку 56.23 и свидетельствуют о большом запасе точности в методе — при уменьшении максимально допустимой относительной погрешности на шаге интегрирования на 2 порядка происходит существенное уточнение решения, метод в данном случае работает как метод более высокого порядка. Это в первую очередь связано с коэффициентами в расчётных формулах метода и особенностями системы дифференциальных уравнений гармонического осциллятора.

На основе выше сказанного можно сделать вывод, что полученная программа работает корректно.

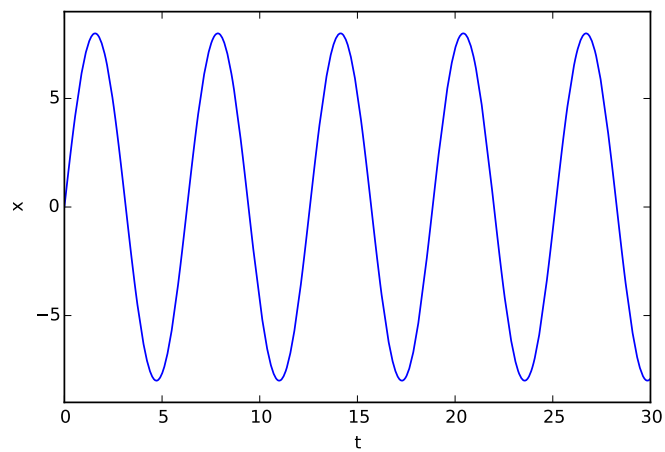




**Рис. 1.** Решение задачи о математическом осцилляторе. График зависимости  $y(x)$



**Рис. 2.** Решение задачи о математическом осцилляторе. График зависимости  $y(t)$



**Рис. 3.** Решение задачи о математическом осцилляторе. График зависимости  $x(t)$

9 Результаты решения задачи и их анализ

10 Сравнение аналитического и численного решений

## Список литературы

- [1] *И. С. Григорьев*. Методическое пособие по численным методам решения краевых задач принципа максимума в задачах оптимального управления  
Издательство Центра прикладных исследований при механико-математическом факультете МГУ, 2005.
- [2] *В. В. Александров, Н. С. Бахвалов, К. Г. Григорьев, Г. Ю. Данков, М. И. Зеликин, С. Я. Ищенко, С. В. Конягин, Е. А. Лапшин, Д. А. Силаев, В. М. Тихомиров, А. В. Фурсиков*. Практикум по численным методам в задачах оптимального управления  
Издательство Московского университета, 1988.
- [3] *И. С. Григорьев, И. С. Заплетин*. Практикум по численным методам в задачах оптимального управления. Дополнение I  
Издательство Центра прикладных исследований при механико-математическом факультете МГУ, 2007.

## 11 Приложения

### 11.1 Решение задачи о математическом осцилляторе в Wolfram Mathematica 9.

```

In[44]:= solve = NDSolve[
  {x'[t] == y[t], y'[t] == -x[t], x[0] == 0, y[0] == 8}, {x, y}, {t, 0, 30}]
ParametricPlot[Evaluate[{x[t], y[t]} /. solve], {t, 0, 30}]
ParametricPlot[Evaluate[{t, x[t]} /. solve], {t, 0, 30}]
ParametricPlot[Evaluate[{t, y[t]} /. solve], {t, 0, 30}]

```

```

Out[44]= {{x -> InterpolatingFunction[{{0., 30.}}, <>],
  y -> InterpolatingFunction[{{0., 30.}}, <>]}}

```

