Московский государственый университет
им. М. В. Ломоносова
Механико-математический факультет
Кафедра газовой и волновой динамики

Ракитин Виталий Павлович.

Численное решение краевой задачи принципа максимума в задаче оптимального управления методом стрельбы.

Москва, 2015 год.

Содержание

1 Постановка заадачи

Рассматривается задача (номер 34) Лагранжа с фиксированным временным отрезком, без ограничений вида «меньше или равно»:

$$\begin{aligned} \int\limits_0^1 \frac{\ddot{x}^2}{1+\alpha t^2 x^2} dt \quad &\to \quad \text{extr}, \\ \int\limits_0^1 x dt \quad &= \quad 1, \\ x(0) = \dot{x}(1) \quad &= \quad 0, \\ \dot{x}(0) \quad &= \quad 1, \end{aligned} \tag{1}$$

где α — известная константа, параметр задачи.

Требуется формализовать задачу как задачу оптимального управления, принципом максимума Понтрягина свести задачу к краевой задаче, численно решить полученную краевую задачу методом стрельбы и обосновать точность полученных результатов, проверить полученные экстремали Понтрягина на оптимальность при различных значениях параметра

$$\alpha = \{0.0; \quad 0.1; \quad 1.0; \quad 10.0\}.$$

2 Формализация задачи

Формализуем задачу для оптимального управляения. Для этого введём следующие обозначения

$$y = \dot{x}, \qquad u = \dot{y} = \ddot{x}.$$

где u — управление.

Тогда исходная система (1) перепишется в виде:

$$\begin{cases} \dot{x} = y; \\ \dot{y} = u; \\ u \in \mathbb{R}; \\ x(0) = 0, \quad y(0) = 1; \\ y(1) = 0; \\ \int\limits_0^1 x dt = 1; \\ \int\limits_0^1 \frac{u^2}{1+\alpha t^2 x^2} dt \to extr. \end{cases} \tag{2}$$

3 Система необходимых условий оптимальности

Рассмотртим задачу Лагранжа в пространстве $\Omega = C^1(\Delta, \mathbb{R}^2) \times C(\Delta, \mathbb{R}) \times \mathbb{R}^2$:

$$u(t) \in \mathbb{R}, \qquad \overline{x}^T = (x, y) \in \mathbb{R}^2, \qquad \dot{\overline{x}}^T - (y, u) = 0, \qquad \varphi(t, \overline{x}(t), u(t)) = (y, u);$$

Далее выпишем следующий функционалы

$$B_i(\overline{x}, u, t_0, t_1) = B_i(x, y, u, 0, 1) = \int\limits_0^1 f_i(t, \overline{x}, u) dt + \psi_i(0, \overline{x}(0), 1, \overline{x}(1)), \qquad \text{где } i = 1, \ldots, 4.$$

$$B_0 = \int\limits_0^1 \frac{u^2}{1+\alpha t^2 x^2} dt, \qquad f_0 = \frac{u^2}{1+\alpha t^2 x^2}, \qquad \psi_0 = 0;$$

$$B_1 = \int\limits_0^1 x dt - 1 = 0, \qquad f_1 = x, \qquad \psi_1 = -1;$$

$$B_2 = x(0), \qquad f_2 = 0, \qquad \psi_2 = x(0);$$
$$B_3 = y(0) - 1, \qquad f_3 = 0, \qquad \psi_3 = y(0) - 1;$$
$$B_4 = y(1), \qquad f_4 = 0, \qquad \psi_4 = y(1);$$

Далее выпишем функцию Лагранжа

$$\mathcal{L} = \int\limits_0^1 L dt + l;$$

где

$$L = \sum_{i=0}^{4} \lambda_i f_i(t, \overline{x}, u) + \left\langle \overline{p}(t), \dot{\overline{x}} - \varphi(t, \overline{x}, u) \right\rangle$$

называется лагранжианом, а

$$l = \sum_{i=0}^{4} \lambda_i \psi_i \big(0, \overline{x}(0), 1, \overline{x}(1)\big);$$

терминантом.

$$\lambda = (\lambda_0, \ldots, \lambda_4), \qquad \overline{p}(\cdot) = (p_x, p_y) \in C^1(\Delta, \mathbb{R}^{2*})$$

множетели лагранжа задачи, а так же функция Понтрягина

$$H(t, \overline{x}, u, \overline{p}, \lambda) = \left\langle \overline{p}(t), \varphi(t, \overline{x}, u) \right\rangle - \sum_{i=0}^{4} \lambda_i f_i(t, \overline{x}, u).$$

А теперь выпишем функции Лагранжа и Понтрягина в явном виде:

$$L = \lambda_0 \left(\frac{u^2}{1 + \alpha t^2 x^2} \right) + \lambda_1 x + p_x(\dot{x} - y) + p_y(\dot{y} - u); \tag{3}$$
$$l = -\lambda_1 + \lambda_2 x(0) + \lambda_3 \big(y(0) - 1\big) + \lambda_4 y(1); \tag{4}$$
$$H = p_x y + p_y u - \lambda_0 \left(\frac{u^2}{1 + \alpha t^2 x^2} \right) - \lambda_1 x; \tag{5}$$

Далее применим к задаче оптимального управления (2) принцип максимума Понтрягина. Необходимые условия оптимальности:

1. Уравнения Эйлера-Лагранжа (сопряжённая система уравнений, условие стационарности по $\overline{x}$):

$$\begin{cases} \dot{p}_x = -\frac{\partial H}{\partial x} = \lambda_1; \\ \dot{p}_y = -\frac{\partial H}{\partial y} = -p_x. \end{cases} \tag{6}$$

2. условие оптимальности по управлению,

$$u = \arg \operatorname*{abs\,max}_{u \in \mathbb{R}} H(u) = \arg \operatorname*{abs\,max}_{u \in \mathbb{R}} \left(p_y u - \left(\frac{\lambda_0}{1 + \alpha t^2 x^2} \right) u^2 \right) = \frac{p_y \left(1 + \alpha t^2 x^2\right)}{2\lambda_0}$$

   при $\lambda_0 \neq 0$, так как $H(u)$ — парабола, с ветвями, направленными вниз (т.к. $\lambda_0 \geqslant 0$ — см.п. 6), достигает максимума в вершине, при указанном значении аргумента u;

3. условия трансверсальности по $\overline{x}$:

$$p_x(t_k) = (-1)^k \frac{\partial l}{\partial x(t_k)}, \qquad p_y(t_k) = (-1)^k \frac{\partial l}{\partial y(t_k)}.$$

   В нашем случае $k = 0, 1$, $t_0 = 0$, $t_1 = 1$. Значит

$$p_x(0) = \lambda_2, \qquad p_x(1) = 0, \qquad p_y(0) = \lambda_3, \qquad p_y(1) = -\lambda_4.$$

4. условия стационарности по t_k:
   нет, так как в задаче (2) t_k — известные константы;

5. условия дополняющей нежёсткости:
   нет, так как в задаче (2) отсутствуют условия вида «меньше или равно»;

6. условие неотрицательности: $\lambda_0 \geqslant 0$;

7. условие нормировки (множители Лагранжа могут быть выбраны с точностью до положительного множителя);

8. НЕРОН (множители Лагранжа НЕ Равны Одновременно Нулю).

4 Анормальный случай и исследование задачи

Исследуем возможность анормального случая $\lambda_0 = 0$. При $\lambda_0 = 0$ из (2) и (6) получим систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dot{x} = y; \\ \dot{y} = u; \\ \dot{p}_x = \lambda_1; \\ \dot{p}_y = -p_x; \end{cases} \tag{7}$$

Отсюда получаем,

$$p_x(t) = \lambda_1 t + C, \qquad p_y(t) = -\lambda_1 t - C.$$

Так же из условия (п. 2), имеем

$$p_y(t) \equiv 0, \qquad \dot{p}_y(t) \equiv 0,$$

иначе

$$u(t) = \pm\infty,$$

и такой управляемый процесс не является допустимым. Следовательно,

$$\lambda_1 t + C = 0, \qquad \lambda_1 t = C,$$

где $t \in \mathbb{R}$, $\lambda_1, C = \text{const}$, тогда

$$\lambda_1 = C = 0, \qquad p_x(t) \equiv 0.$$

Из условий трансверсальности (п. 3) получаем

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0.$$

Таким образом, если $\lambda_0 = 0$, то все множители Лагранжа равны 0 и получается противоречие с условием (п. 8). Значит, анормальный случай невозможен.

Так как $\lambda_0 \neq 0$, то в силу однородности функции Лагранжа по множителям Лагранжа выберем следующее условие нормировки:

$$\lambda_0 = \frac{1}{2},$$

тогда из условия (п. 2) определяется управление

$$u = p_y(1 + \alpha t^2 x^2), \tag{8}$$

5 Краевая задача

Ко всему вышесказанному добавим, что

$$\int_0^1 x dt = 1.$$

Введём обозначение

$$\varphi(t) = \int_0^t x(\tau) d\tau, \quad \lambda_1 = a;$$

тогда

$$\begin{cases} \varphi(0) = 0, \\ \dot{\varphi} = x; \\ \varphi(1) = 1; \end{cases} \tag{9}$$

Таким образом, на основе принципа максимума Понтрягина задача оптимального управления (2) сводится к краевой задаче (10).

$$\begin{cases} \dot{\varphi} = x, & \varphi(0) = 0, \varphi(1) = 1; \\ \dot{x} = y, & x(0) = 0; \\ \dot{y} = p_y(1 + \alpha t^2 x^2), & y(0) = 1, y(1) = 0; \\ \dot{p}_y = -p_x; & \\ \dot{p}_x = \lambda_1 = a, & p_x(1) = 0; \\ \dot{a} = 0. & \end{cases} \tag{10}$$

Параметр α принимает следующие значения

$$\alpha = \{0.0; \quad 0.1; \quad 1.0; \quad 10.0\}.$$

6 Аналитическое решение краевой задачи

Данная система уравнений не является аналитически интегрируемой. Тем не менее, $a = a = \text{const}$, $p_x = a(t-1)$, $p_y = -\frac{a}{2}(t-1)^2 + b$, где $b = \text{const}$. Далее неинтегрируемое уравнение второго порядка

$$\ddot{x} = \left(-\frac{a}{2}(t-1)^2 + b\right)(1 + \alpha t^2 x^2), \quad \alpha, a, b = \text{const}\,.$$

При $\alpha = 0$ имеем аналитическое решение. Имеем

$$y = -\frac{a}{6}(t-1)^3 + bt + c;$$

Причем $y(1) = 0$, отсюда $c = -b$. Далее $y(0) = 1$ даёт $a - 6b = 6$.

$$x(t) = -\frac{a}{24}(t-1)^4 + \frac{b}{2}t^2 - bt + \frac{a}{24}; \quad \varphi(t) = -\frac{a}{120}(t-1)^5 + \frac{b}{6}t^3 - \frac{b}{2}t^2 + \frac{a}{24}t + \frac{a}{120}.$$

Условие $\varphi(1) = 1$ даёт

$$-\frac{b}{3} + \frac{a}{24} + \frac{a}{120} = 1 \Leftrightarrow -\frac{b}{3} + \frac{a}{20} = 1.$$

Таким образом

$$-\frac{b}{3} + \frac{3+3b}{10} = 1 \Leftrightarrow -b + 9 = 30 \Leftrightarrow b = -21, a = -120.$$

$$\begin{cases} \varphi(t) = (t-1)^5 - \frac{7}{2}t^3 + \frac{21}{2}t^2 - 5t - 1, & \varphi(0) = 0, \varphi(1) = 1; \\ x(t) = \frac{(t-1)^4}{2} - \frac{3}{2}t^2 + 3t, & x(0) = 0; \\ y(t) = 2(t-1)^3 - 3t + 3, & y(0) = 1, y(1) = 0; \\ p_y(t) = 6(t-1)^2 - 3; & \\ p_x(t) = -12(t-1), & p_x(1) = 0; \\ a = -12; & \end{cases}$$

7 Численное решение краевой задачи методом стрельбы

Краевая задача (10) решается численно методом стрельбы. В качестве параметров пристрелки выбираются недостающие для решения задачи Коши значения при $t = 0$

$$\beta_x = p_x(0), \qquad \beta_y = p_y(0), \qquad \beta = \{\beta_x, \beta_y\}.$$

Задав эти значения каким-либо образом и решив задачу Коши на отрезке $\Delta = [0, 1]$ получим соответствующие выбранному значению β функции $x(t)[\beta]$, $y(t)[\beta]$, $p_x(t)[\beta]$, $p_y(t)[\beta]$ и, в частности, значения $p_x(1)[\beta]$, $y(1)[\beta]$. Задача Коши для системы дифференциальных уравнений (10) с начальными условиями в нулевой момент времени решается численно явным методом Рунге-Кутты 5-го порядка, основанным на расчётных формулах Дормана-Принса 5(6) DOPRI5 с автоматическим выбором шага (то есть с контролем относительной локальной погрешности на шаге по правилу Рунге). Для решения краевой задачи необходимо подобрать значения β так, чтобы выполнились условия:

$$p_x(1)[\beta] = 0, \qquad y(1)[\beta] = 0.$$

соответственно вектор-функцией невязок будет функция

$$X(\beta) = \begin{pmatrix} p_x(1)[\beta] \\ y(1)[\beta] \end{pmatrix}$$

Таким образом, в результате выбора вычислительной схемы метода стрельбы, решение краевой задачи свелось к решению системы двух алгебраических уравнений от двух неизвестных. Корень β системы алгебраических уравнений $X(\beta) = 0$ находится методом Ньютона с модификацией Исаева-Сонина. Решение линейной системы уравнений внутри модифицированного метода Ньютона осуществляется методом Гаусса с выбором главного элемента по столбцу, с повторным пересчётом.

Схема численного решения краевой задачи методом стрельбы выбрана таким образом, что при отсутствии ошибок в программной реализации решения задачи Коши, найденный методом Ньютона корень будет правильным (без учёта погрешности численного интегрирования), даже если внутри метода Ньютона есть какие-то ишибки. Напротив, ошибка в решении задачи Коши делает бесполезным полученный результат, даже если всё остальное запрограммировано правильно и методу Ньютона удалось найти корень.

Исходя из этого крайне важен следующий тест части программы, решающей задачу Коши, на системе дифференциальных уравнений с известным аналитическим решением.

8 Оценка погрешности

Погрешность на одном шаге вычисляется с помощью вычисления следущей точки траектории двумя способами. $x_k, \hat{x}_k$ вычисляются методом Дормана—Принса 5(4). Локальная погрешность на шаге

$$\mathrm{err}_k = \|x_k - \hat{x}_k\|, \quad \|y\| = \max\{|y_1|, \ldots, |y_n|\}.$$

Глобальная погрешность δ_k вычисляется по следущей схеме

$$\delta_0 = 0; \quad \delta_{k+1} = \mathrm{err}_k + \delta_k \exp\left\{ \int\limits_{t_k}^{t_{k+1}} \mu(s)\, ds \right\},$$

где $\mu(s)$ — максимальный модуль собственного значения матрицы $\frac{1}{2}\left(J + J^T\right)$.

Матрица J Якоби системы 10 имеет вид

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2p_y\alpha t^2 x & 0 & (1+\alpha t^2 x^2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \frac{J + J^T}{2} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2}+B & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}+B & 0 & A & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix},$$

где $A = \frac{1+\alpha t^2 x^2}{2} \geqslant \frac{1}{2}$, $B = p_y \alpha t^2 x$. Собственные числа λ матрицы $\frac{1}{2}(J + J^T)$ находятся из уравнения

$$z^3 - \kappa z^2 + \left(\frac{\kappa}{2} - \frac{1}{4}\right) z - \left(\frac{A}{4}\right)^2 = 0; \quad z = \lambda^2, \quad \kappa = B^2 + B + 1 + A^2 = A^2 + \left(B + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \geqslant \frac{3}{4}.$$

По теореме Руше если на границе круга $B(0, R)$ на комплексной плоскости $\mathbb{C}$ с центром в точке 0 и радиусом R имеет место неравенство для двух голоморфных функций f и g следующего вида

$$|g(z)|\big|_{|z|=R} \leqslant |f(z)|\big|_{|z|=R},$$

то количество нулей с учётом кратности суммы $f + g$ в круге $B(0, R)$ совпадает с количеством нулей $f(z)$ в этом же круге $B(0, R)$.

Возьмём в качестве $f(z) = z^3$ и $g(z) = -\kappa z^2 + \left(\frac{\kappa}{2} - \frac{1}{4}\right) z - \left(\frac{A}{4}\right)^2$. Найдём $R > 0$: $|f| \geqslant |g|$ при $|z| = R$.

Положим $R = max\left\{3\kappa, \sqrt{\frac{3\kappa}{2} - \frac{3}{4}}, \sqrt[3]{\frac{3A^2}{16}}\right\}$. Тогда

$$\left|g(z)\right|\Big|_{|z|=R} \leqslant \kappa R^2 + \left(\frac{\kappa}{2} - \frac{1}{4}\right) R + \left(\frac{A}{4}\right)^2 \leqslant \frac{R^3}{3} + \frac{R^3}{3} + \frac{R^3}{3} = R^3.$$

9 Тестирование на гармоническом осцилляторе

Дабы отбросить все сомнения в корректности работы программы для решения задачи Коши, проведём тестирование на более простом случае с заранее известным решением, а именно на гармоническом осцилляторе

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y; \\ \frac{dy}{dt} = -x; \\ 0 < t < 30; \\ t = 0 : x = 0, y = 8. \end{cases}$$

Визуализация численного решения данной задачи с помощью нашей программы представлена в виде графиков на рис.(3), (2) и (1). Для удобства проверки дополнительно решим нашу задачу с помощью пакета *Wolfram Mathematica 9* (см. рис. 12.1). Сравнивая полученные результаты можно заметить, что полученные решения абсолютно идентичны, на основе чего можно сделать вывод о корректности работы программы. Однако, для большей достоверности проверим так же численные оценки отклонений.

1. Для вычисления глобальной погрешности введём множество переменных δ_i :

   $$\delta_0 = 0, \qquad \delta_{k+1} = Err_k + \delta_k \cdot e^{\int\limits_{t_k}^{t_{k+1}} \mu(s)ds}$$

   Интеграл в предыдущем выражении можно приблизить следующим образом

   $$\int\limits_{t_k}^{t_{k+1}} \mu(s)ds = (t_{k+1} - t_k) \cdot \mathrm{Hmax}\left(\frac{J + J^T}{2}\right),$$

   где J — матрица Якоби исходной системы дифференциальных уравнений, Err_k — максимум расстояний между соответствующими координатами на k-ом шаге, а Hmax — функция, возвращающая максимальное собственное значение полученной матрицы. В наше случае мы получим следующее

   $$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad A = \frac{J + J^T}{2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

   $$\lambda_{1,2} = 0, \qquad \delta_0 = 0, \qquad \delta_{k+1} = Err_k + \delta_k.$$

   Таким образом были получены следующие значения глобальной погрешности:

   для точности погрешности -7-го порядка $\delta_k = 2.433796 \cdot 10^{-6}$

   для точности погрешности -9-го порядка $\delta_k = 3.964618 \cdot 10^{-7}$

   для точности погрешности -11-го порядка $\delta_k = 8.135620 \cdot 10^{-9}$

2. А оценка **локального отклонения на шаге** для каждой точки $t = \{50, 100, 150, 200\}$ для обеих координат получилась равна в районе 100 ± 2, что намного превышает теоретическую оценку 56.23 и свидетельствуют о большом запасе точности в методе — при уменьшении максимально допустимой относительной погрешности на шаге интегрирования на 2 порядка происходит существенное уточнение решения, метод в данном случае работает как метод более высокого порядка. Это в первую очередь связано с коэффициентами в расчётных формулах метода и особенностями системы дифференциальных уравнений гармонического осциллятора.

На основе выше сказанного можно сделать вывод, что полученная программа работает корректно.

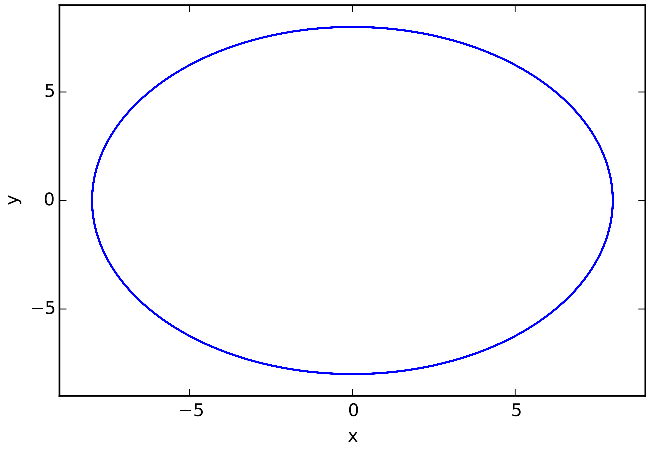


Рис. 1. Решение задачи о математическом осцилляторе. График зависимости $y(x)$

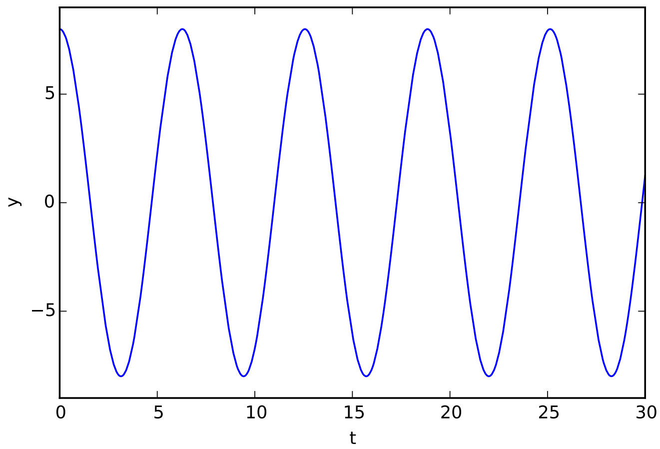


Рис. 2. Решение задачи о математическом осцилляторе. График зависимости $y(t)$

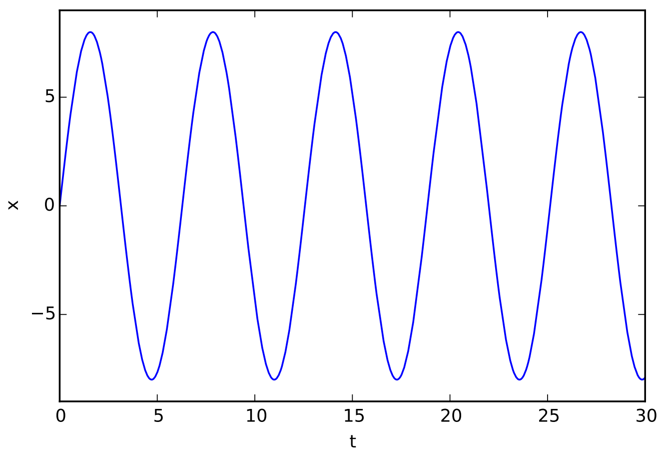


Рис. 3. Решение задачи о математическом осцилляторе. График зависимости $x(t)$

10 Результаты решения задачи и их анализ

11 Сравнение аналитического и численного решений

Список литературы

[1] *И. С. Григорьев.* Методическое пособие по численным методам решения краевых задач принципа максимума в задачах оптимального управления
Издательство Центра прикладных исследований при механико-математическом факультете МГУ, 2005.

[2] *В. В. Александров, Н. С. Бахвалов, К. Г. Григорьев, Г. Ю. Данков, М. И. Зеликин, С. Я. Ищенко, С. В. Конягин, Е. А. Лапшин, Д. А. Силаев, В. М. Тихомиров, А. В. Фурсиков.* Практикум по численным методам в задачах оптимального управления
Издательство Московского университета, 1988.

[3] *И. С. Григорьев, И. С. Заплетин.* Практикум по численным методам в задачах оптимального управления. Дополнение I
Издательство Центра прикладных исследований при механико-математическом факультете МГУ, 2007.

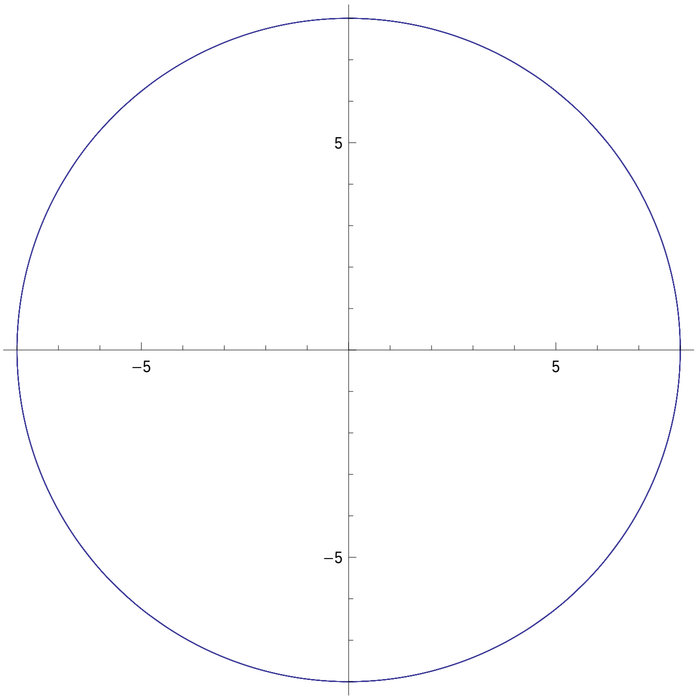
12 Приложения

12.1 Решение задачи о математическом осцилляторе в Wolfram Mathematica 9.

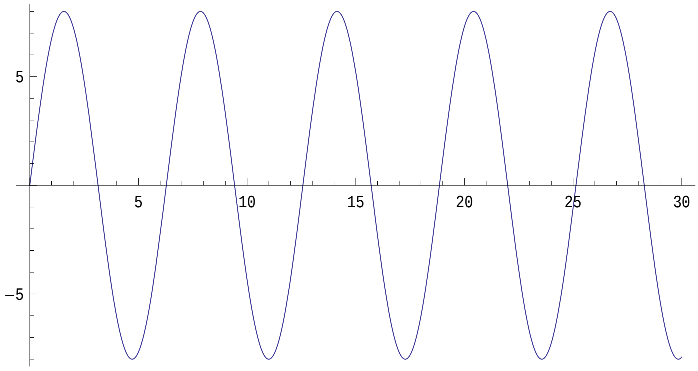
In[44]:=
```
solve = NDSolve[
  {x'[t] == y[t], y'[t] == -x[t], x[0] == 0, y[0] == 8}, {x, y}, {t, 0, 30}]
ParametricPlot[Evaluate[{x[t], y[t]} /. solve], {t, 0, 30}]
ParametricPlot[Evaluate[{t, x[t]    } /. solve], {t, 0, 30}]
ParametricPlot[Evaluate[{t, y[t]    } /. solve], {t, 0, 30}]
```

Out[44]=
```
{{x → InterpolatingFunction[{{0., 30.}}, <>],
  y → InterpolatingFunction[{{0., 30.}}, <>]}}
```

Out[45]=



Out[46]=



Out[47]=