Программа курса «Комплексный анализ», часть II, 3 поток, механики (6 сем., 2014/2015 уч. год).

1. Интеграл в смысле главного значения. Вычет относительно области и его вычисление.
2. Лемма Жордана.
3. Теорема о вычетах для интеграла в смысле главного значения.
4. Примеры вычисления интегралов. Преобразования Фурье и Гильберта.
5. Теорема о логарифмических вычетах. Принцип аргумента.
6. Теорема Руше. Принцип сохранения области и его следствие.
7. Конформность голоморфных инъективных функций.
8. Обратный принцип соответствия границ.
9. Критерии локальной однолистности и локальной обратимости.
10. Принцип симметрии Римана-Шварца для конформных отображений.
11. Теорема Римана о конформном отображении (б/д). Теорема Каратеодори для жордановых областей (б/д). Их гидродинамическая интерпретация.
12. Обтекание цилиндра с вихрем. Поведение линий тока. Вполне регулярность.
13. Обтекание профиля Жуковского. Условие Чаплыгина.
14. Уравнение Эйлера-Бернулли для идеальной жидкости. Формула Чаплыгина для подъемной силы крыла.
15. Формула Жуковского для подъемной силы крыла.
16. Вычисление подъемной силы для профиля Жуковского.
17. Аналитическое продолжение вдоль пути и его свойства.
18. Единственность аналитического продолжения вдоль пути и его связь с продолжением по цепочке.
19. Гомотопные пути в области. Связь 1- и 2- гомотопности путей в области. Классы гомотопных замкнутых путей в $\mathbb{C}\setminus\{0\}$. Эквивалентные определения односвязной области в $\mathbb{C}$ (б/д).
20. Аналитическое продолжение по близким путям и по путям гомотопии. Теорема о монодромии.
21. Аналитическое продолжение первообразной. Теорема об интегралах по гомотопным путям.
22. Полная аналитическая функция (ПАФ) в смысле Вейерштрасса. Теорема Пуанкаре-Вольтерра. Голоморфные ветви и точки аналитичности ветвей ПАФ.
23. Точки ветвления (ветвей) ПАФ, их классификация. ПАФ $\operatorname{Ln} z$ и z^p .
24. Первообразная рациональной функции как ПАФ. ПАФ $Arctgz$.
25. Модулярная функция и малые теоремы Пикара.

Содержание

0.1 Сводка необходимых формулировок с прошлого семестра.

Определение 0.1. *Пусть Γ_s^+ — КГ замкнутая жорданова кривая, ограничивающая область D_s $(s = 1, \dots, S)$, $S \geqslant 2$ — натуральное. Так же пусть все $\overline{D_2}, \dots, \overline{D_S}$ лежат внутри области D_1.*

Тогда область $D = D_1 \diagdown \bigsqcup\limits_{s=1}^{S} \overline{D_s}$ называется допустимой областью ранга S.

(S — порядок связности области D)

Лемма 0.1 (Лемма Гурса (условие Δ))**.** *Пусть D — область в $\mathbb{C}$, $f \in C(D)$ тогда для $\forall$ замкнутого треугольника $\Delta \in D$ имеем $\int\limits_{\partial^+\Delta} f(z)dz = 0$. В данном случае говорят, что функция f удовлетворяет условию треугольника.*

Теорема 0.1 (Интегральная теорема Коши для допустимой области)**.** *Пусть D — допустимая область с границей $\partial^+ D = \Gamma_1^+ \bigsqcup \Gamma_2^- \bigsqcup \dots \bigsqcup \Gamma_S^-$, $f \in C(\overline{D})$, f удовлетворяет условию Δ в D. Тогда $\int\limits_{\partial^+ D} f(z)dz = 0$.*

1 Интеграл в смысле главного значения. Вычет относительно области и его вычисление.

1.1 Интеграл в смысле главного значения.

Определение 1.1. $\gamma\colon [\alpha,\beta] \to \mathbb{C}$ — *кусочно-гладкий путь (КГ-путь), если он гладкий на каждом из отрезков (т.е. $\exists \dot\gamma(t)$).*
Определение 1.2. $\Gamma^+ = \{\gamma\}$ — *класс эквивалентности КГ-путей называется КГ-кривой.*
Определение 1.3. *Пусть Γ^+ — КГ-кривая в $\overline{\mathbb{C}}$, а $[\Gamma^+]$ — траектория, $z_0 \notin [\Gamma^+], z_0 \in \mathbb{C}$.
Если $\frac{1}{z-z_0} \circ \Gamma^+$ — КГ-кривая в $\mathbb{C}$, тогда Γ^+ — КГ-кривая в $\overline{\mathbb{C}}$.*
Определение 1.4. *Допустимая кривая — жарданова КГ-кривая в $\mathbb{C}$ (взаимооднозначная) либо замкнутая-жордановая.*

Теперь давайте определим интеграл в смысле главного значения.

1. Пусть Γ^+ — допустимся кривая в $\overline{\mathbb{C}}$, $[\Gamma^+]$ — траектория Γ^+.
2. Положим $\mathcal{A} = \{a_1,\ldots,a_J\} \in [\Gamma^+]$ — конечное множество : $f \in C([\Gamma^+]\diagdown\mathcal{A})$ — комплекснозначная функция.
3. Для $\forall a_j\ \exists \delta_j \in (0,+\infty)$. Обозначим $\Delta = \{\delta_1,\ldots,\delta_J\}$, а $|\Delta| = \max_{j=1,\ldots,J}\{\delta_j\}$.
4. Пусть $\exists \delta > 0\colon$ при $|\Delta| < \delta$ круги $\{B(a_j,\delta_j)\}_{j=0}^{J}$ — попарно не пересекаются,
   причем для $\forall j\colon\ \partial B(a_j,\delta_j) \cap [\Gamma^+]$ содержит не более 2 точек (ровно 2, если Γ^+ — замкнуто).
5. Обозначим через $\Gamma^+_{A\Delta} = \Gamma^+ \diagdown \bigsqcup\limits_{j=1}^{J} B(a_j,\delta_j)$ — цепь кривых (выкинули точки с радиусами).

Тогда существует $I = (vp)\int\limits_{\Gamma^+} f(z)dz = \lim\limits_{|\Delta|\to\infty} \int\limits_{\Gamma^+_{A\Delta}} f(z)dz$ — главное значение интеграла.

Определение 1.5. *I — называется интегралом в смысле главного значения, если*

$$\text{для } \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\colon |\Delta| < \delta \text{ и } \left| I - \int\limits_{\Gamma^+_{A\Delta}} f(z)dz \right| < \varepsilon.$$

1.2 Вычет относительно области.

Пусть D — допустимая область в $\overline{\mathbb{C}}$ ранга $s \geqslant 1$.
(т.е. для $\forall z_0 \in \mathbb{C}\diagdown\overline{D} \neq 0$ отображение $\frac{1}{z-z_0}$ переводит D в некоторую обычную допустимую область в $\mathbb{C}$).

Граница области $D\colon\ \partial^+ D = \Gamma_1^+ \sqcup \Gamma_2^- \sqcup \cdots \sqcup \Gamma_s^-$.

Пусть для $\forall a \in \overline{D}\ \exists \delta_a > 0\colon$ при всех $\delta \in (0,\delta_a)\colon\ \partial B(a,\delta) \cap \partial_{\overline{\mathbb{C}}} D$ содержит не более 2х точек и $\partial B(a,\delta) \cap \overline{D}$ является связной замкнутой кривой, ориентированной против часовой стрелки, если $a \neq \infty$, и по часовой, если $a = \infty$. Обозначим её за $\gamma_s^+(a)$.

Определение 1.6. *Пусть в рамках вышеизложенных обозначений $\exists \delta_a' > 0\colon f \in C(B'(a,\delta_a') \cap \overline{D})$.
Тогда, если при $\delta < \min(\delta_a,\delta_a')$ определён $\int\limits_{\gamma_\delta'(a)} f(z)dz$, то вычет в точке a относительно области D:*

$$\operatorname*{res}_{a,D} f(z) := \lim_{\delta\to 0} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_\delta'(a)} f(z)dz.$$

2 Лемма Жордана.

Лемма 2.1. *Пусть функция $f(z)$ определена и непрерывна на множестве $\Pi_+ = \{z \in \mathbb{C} |\ Im\, z \geqslant 0, |z| \geqslant R_0 > 0\}$. Положим при $R > R_0\colon M(R) := \max\limits_{z\in\gamma_R} f(z)$, где $\gamma_R = \{z = Re^{i\theta}, 0 < \theta < \pi\}$ — полуокружность. Предположим, что $f(z)$ стремится к нулю на бесконечности так, что $\lim\limits_{R\to\infty} M(R) = 0$, тогда для $\forall\lambda$ справедливо соотношение*

$$\operatorname*{res}_{\infty,D}(f(z)e^{i\lambda z}) = 0.$$

Доказательство. Из определения вычета относительно области

$$\operatorname*{res}_{\infty,D} f(z)e^{i\lambda z} = \lim_{R\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_R} f(z)e^{i\lambda z}dz.$$

В указанных выше обозначениях имеем

$$\left|\int\limits_{\gamma_R} f(z)e^{i\lambda z}dz\right| = \left|\int\limits_0^\pi f(Re^{i\theta})e^{\lambda(iR\cos\theta - R\sin\theta)}iRe^{i\theta}d\theta\right| \leqslant \int\limits_0^\pi M(R)Re^{-\lambda R\sin\theta}d\theta$$

Справедлива оценка $\sin\theta \geqslant \frac{2\theta}{\pi}$ на $0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}$. Исходя из этого сделаем замену $\tau = \frac{2R\theta}{\pi}$, тогда

$$\int\limits_0^\pi M(R)Re^{-\lambda R\sin\theta}d\theta = 2M(R)\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} Re^{-\lambda R\sin\theta}d\theta \leqslant 2M(R)\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} Re^{-\frac{2\lambda R\theta}{\pi}}d\theta = \pi M(R)\int\limits_0^R e^{-\lambda\tau}d\tau = \pi M(R)(1-e^{-\lambda R});$$

Значит,

$$\left|\int\limits_{\gamma_R} f(z)e^{i\lambda z}dz\right| \leqslant \underbrace{\pi M(R)}_{\to 0}\underbrace{(1-e^{-\lambda R})}_{\to 1} \xrightarrow[R\to+\infty]{} 0.$$

■

3 Теорема о вычетах для интеграла в смысле главного значения.

Теорема 3.1. *Пусть D — допустимая в $\overline{\mathbb{C}}$ область, $\mathcal{A} = \{a_1, \ldots, a_N\} \subset \overline{D}$ (если $\infty \in \overline{D}$, тогда $\infty \in \mathcal{A}$). $\mathcal{A}$ — конечное множество, $f \in A(D \diagdown \mathcal{A}) \cap C(\overline{D})$. Тогда*

$$(vp) \int\limits_{\partial^+ D} f(z)dz = 2\pi i \sum_{n=1}^{N} \operatorname*{res}_{a_n, D} f(z).$$

То есть интеграл в смысле главного значения существует, если и только если выечеты в каждой точке из $\mathcal{A}$ относительно области D существуют. В таком случае данное равенство выполняется.

Доказательство. Для $\forall a_j \in \mathcal{A}$ $\exists \delta_j \in (0, +\infty)$. Обозначим $\Delta = \{\delta_1, \ldots, \delta_N\}$, а $|\Delta| = \max_{j=1,\ldots,N}\{\delta_j\}$.
Пусть $\exists \delta > 0$: при $|\Delta| < \delta$ круги $\{B(a_j, \delta_j)\}_{j=0}^{N}$ — попарно не пересекаются, соответственно определим $\gamma^+_{\delta_j}(a_j)$.

Положим $D_{\mathcal{A}\Delta} = D \diagdown \bigsqcup\limits_{j=1}^{N} \overline{B(a_j, \delta_j)}$ — допустимая область в $\mathbb{C}$.

Очевидно, что $f \in A(D_{\mathcal{A}\Delta}) \cap C(\overline{D_{\mathcal{A}\Delta}})$.
Пусть $\mathcal{A}' = \mathcal{A} \cap \partial D = \{a_1, \ldots, a_J\}$, где $J \leqslant N$ и $\infty = a_J$, если $\infty \in \partial D$.
Пускай $\Gamma^+_{\mathcal{A}'\Delta'} = \partial^+ D \diagdown \bigsqcup\limits_{j=1}^{J} B(a_j, \delta_j)$, где $\Delta' = \{\delta_1, \ldots, \delta_J\}$.

Значит, $\partial^+ D_{\mathcal{A}\Delta} = \Gamma^+_{\mathcal{A}'\Delta'} \cap \bigsqcup\limits_{j=1}^{N} \gamma^-_{\delta_j}(a_j)$.
Тогда по интегральной теореме Коши:

$$0 = \int\limits_{\partial^+ D_{\mathcal{A}\Delta}} f(z)dz = \underbrace{\int\limits_{\Gamma^+_{\mathcal{A}'\Delta'}} f(z)dz}_{(vp) \int\limits_{\partial^+ D} f(z)dz} - \sum_{j=1}^{N} \underbrace{\int\limits_{\gamma^+_{\delta_j}(a_j)} f(z)dz}_{2\pi i \operatorname*{res}\limits_{a_j, D} f(z)}.$$

■

4 Примеры вычисления интегралов. Преобразования Фурье и Гильберта.

5 Теорема о логарифмических вычетах. Принцип аргумента.

6 Теорема Руше. Принцип сохранения области и его следствие.

7 Конформность голоморфных инъективных функций.

8 Обратный принцип соответствия границ.

9 Критерии локальной однолистности и локальной обратимости.

10 Принцип симметрии Римана-Шварца для конформных отображений.