Содержание

0.1 Программа курса

Программа курса «Комплексный анализ», часть II, 3 поток, механики (6 сем., 2014/2015 уч. год).

1. Интеграл в смысле главного значения. Вычет относительно области и его вычисление.
2. Лемма Жордана.
3. Теорема о вычетах для интеграла в смысле главного значения.
4. Примеры вычисления интегралов. Преобразования Фурье и Гильберта.
5. Теорема о логарифмических вычетах. Принцип аргумента.
6. Теорема Руше. Принцип сохранения области и его следствие.
7. Конформность голоморфных инъективных функций.
8. Обратный принцип соответствия границ.
9. Критерии локальной однолистности и локальной обратимости.
10. Принцип симметрии Римана-Шварца для конформных отображений.
11. Теорема Римана о конформном отображении (б/д). Теорема Каратеодори для жордановых областей (б/д). Их гидродинамическая интерпретация.
12. Обтекание цилиндра с вихрем. Поведение линий тока. Вполне регулярность.
13. Обтекание профиля Жуковского. Условие Чаплыгина.
14. Уравнение Эйлера-Бернулли для идеальной жидкости. Формула Чаплыгина для подъемной силы крыла.
15. Формула Жуковского для подъемной силы крыла.
16. Вычисление подъемной силы для профиля Жуковского.
17. Аналитическое продолжение вдоль пути и его свойства.
18. Единственность аналитического продолжения вдоль пути и его связь с продолжением по цепочке.
19. Гомотопные пути в области. Связь 1- и 2- гомотопности путей в области. Классы гомотопных замкнутых путей в $\mathbb{C}\setminus\{0\}$. Эквивалентные определения односвязной области в $\mathbb{C}$ (б/д).
20. Аналитическое продолжение по близким путям и по путям гомотопии. Теорема о монодромии.
21. Аналитическое продолжение первообразной. Теорема об интегралах по гомотопным путям.
22. Полная аналитическая функция (ПАФ) в смысле Вейерштрасса. Теорема Пуанкаре-Вольтерра. Голоморфные ветви и точки аналитичности ветвей ПАФ.
23. Точки ветвления (ветвей) ПАФ, их классификация. ПАФ $\operatorname{Ln} z$ и z^p .
24. Первообразная рациональной функции как ПАФ. ПАФ $Arctgz$.
25. Модулярная функция и малые теоремы Пикара.

0.2 Сводка необходимых формулировок с прошлого семестра.

Определение 0.1. *Пусть* Γ_s^+ — *КГ замкнутая жорданова кривая, ограничивающая область* D_s $(s = 1, \ldots, S)$, $S \geqslant 2$ — *натуральное. Так же пусть все* $\overline{D_2}, \ldots, \overline{D_S}$ *лежат внутри области* D_1.
Тогда область $D = D_1 \setminus \bigsqcup\limits_{s=1}^{S} \overline{D_s}$ *называется* <u>*допустимой областью ранга* S</u>.
(S — *порядок связности области* D*)*
Лемма 0.1 (Лемма Гурса (условие Δ))**.** *Пусть* D — *область в* $\mathbb{C}$, $f \in C(D)$ *тогда для* $\forall$ *замкнутого треугольника* $\Delta \in D$ *имеем* $\int\limits_{\partial^+\Delta} f(z)dz = 0$. *В данном случае говорят, что функция* f *удовлетворяет условию треугольника.*
Теорема 0.1 (Интегральная теорема Коши для допустимой области)**.** *Пусть* D — *допустимая область с границей* $\partial^+ D = \Gamma_1^+ \bigsqcup \Gamma_2^- \bigsqcup \cdots \bigsqcup \Gamma_S^-$, $f \in C(\overline{D})$, f *удовлетворяет условию* Δ *в* D. *Тогда* $\int\limits_{\partial^+ D} f(z)dz = 0$.

1 Интеграл в смысле главного значения. Вычет относительно области и его вычисление.

1.1 Интеграл в смысле главного значения.

Определение 1.1. $\gamma\colon [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$ — *кусочно-гладкий путь (КГ-путь), если он гладкий на каждом из отрезков (т.е. $\exists \dot\gamma(t)$).*
Определение 1.2. $\Gamma^+ = \{\gamma\}$ *— класс эквивалентности КГ-путей называется КГ-кривой.*
Определение 1.3. *Пусть Γ^+ — КГ-кривая в $\overline{\mathbb{C}}$, а $[\Gamma^+]$ — траектория, $z_0 \notin [\Gamma^+], z_0 \in \mathbb{C}$.
Если $\frac{1}{z-z_0} \circ \Gamma^+$ — КГ-кривая в $\mathbb{C}$, тогда Γ^+ — КГ-кривая в $\overline{\mathbb{C}}$.*
Определение 1.4. *Допустимая кривая — жарданова КГ-кривая в $\mathbb{C}$ (взаимооднозначная) либо замкнутая-жорданова.*

Теперь давайте определим интеграл в смысле главного значения.

1. Пусть Γ^+ — допустимся кривая в $\overline{\mathbb{C}}$, $[\Gamma^+]$ — траектория Γ^+.
2. Положим $\mathcal{A} = \{a_1, \ldots, a_J\} \in [\Gamma^+]$ — конечное множество : $f \in C([\Gamma^+] \diagdown \mathcal{A})$ — комплекснозначная функция.
3. Для $\forall a_j\ \exists \delta_j \in (0, +\infty)$. Обозначим $\Delta = \{\delta_1, \ldots, \delta_J\}$, а $|\Delta| = \max_{j=1,\ldots,J}\{\delta_j\}$.
4. Пусть $\exists \delta > 0\colon$ при $|\Delta| < \delta$ круги $\{B(a_j, \delta_j)\}_{j=0}^{J}$ — попарно не пересекаются, причем для $\forall j\colon\ \partial B(a_j, \delta_j) \cap [\Gamma^+]$ содержит не более 2 точек (ровно 2, если Γ^+ — замкнуто).
5. Обозначим через $\Gamma^+_{A\Delta} = \Gamma^+ \diagdown \bigsqcup\limits_{j=1}^{J} B(a_j, \delta_j)$ — цепь кривых (выкинули точки с радиусами).

Тогда существует $I = (vp) \int\limits_{\Gamma^+} f(z)dz = \lim\limits_{|\Delta| \to \infty} \int\limits_{\Gamma^+_{A\Delta}} f(z)dz$ — главное значение интеграла.

Определение 1.5. *I — называется интегралом в смысле главного значения, если*

$$\text{для } \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\colon |\Delta| < \delta \text{ и } \left| I - \int\limits_{\Gamma^+_{A\Delta}} f(z)dz \right| < \varepsilon.$$

Замечание 1.1 (от Белошапки). *Важно отметить, чем принципиально отличается интеграл в смысле главного значения от обычного интеграла. Рассмотрим интеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$ над вещественной прямой. Пусть он имеет единственную особенность в точке $c \in [a, b]$. Тогда*

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \lim_{\delta_1 \to 0} \lim_{\delta_2 \to 0} \left(\int\limits_a^{c-\delta_1} f(x)dx + \int\limits_{c+\delta_2}^{b} f(x)dx \right).$$

Такой интеграл называется несобственным с особенностью в точке c. Однако интеграл в смысле главного значения определяется следующим образом

$$(vp) \int\limits_a^b f(x)dx = \lim_{\delta \to 0} \left(\int\limits_a^{c-\delta} f(x)dx + \int\limits_{c+\delta}^{b} f(x)dx \right).$$

Таким образом интеграл в смысле главного значения отличается от несобственного интеграла тем, что в случае главного значения приближаемся к особенности согласованно с обеех сторон. В свою очередь для несобственного интеграла сходимости справа и слева независимы друг от друга.

1.2 Вычет относительно области.

Пусть D — допустимая область в $\overline{\mathbb{C}}$ ранга $s \geqslant 1$.
(т.е. для $\forall z_0 \in \mathbb{C} \diagdown \overline{D} \neq 0$ отображение $\frac{1}{z-z_0}$ переводит D в некоторую обычную допустимую область в $\mathbb{C}$).

Граница области D: $\partial^+ D = \Gamma_1^+ \sqcup \Gamma_2^- \sqcup \cdots \sqcup \Gamma_s^-$.

Пусть для $\forall a \in \overline{D}\ \exists \delta_a > 0\colon$ при всех $\delta \in (0, \delta_a)\colon\ \partial B(a, \delta) \cap \partial_{\overline{\mathbb{C}}} D$ содержит не более 2х точек и $\partial B(a, \delta) \cap \overline{D}$ является связной замкнутой кривой, ориентированной против часовой стрелки, если $a \neq \infty$, и по часовой, если $a = \infty$. Обозначим её за $\gamma_s^+(a)$.

Определение 1.6. *Пусть в рамках вышеизложенных обозначений* $\exists\delta_a^{'} > 0\colon f \in C(B'(a, \delta_a^{'}) \cap \overline{D})$. *Тогда, если при* $\delta < \min(\delta_a, \delta_a^{'})$ *определён* $\int\limits_{\gamma_\delta^{'}(a)} f(z)dz$, *то* *<u>вычет в точке a относительно области D</u>*:

$$\operatorname*{res}_{a,D} f(z) := \lim_{\delta\to 0}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_\delta^{'}(a)} f(z)dz.$$

1.3 Вычисление вычета относительно области.

Положим D — допустимая область в $\mathbb{C}$. Для вычисления вычетов относительно области используем следующие предложения

Предложение 1.1. *Пусть* $a \in D$ *и* $f \in A(U'(a))$ *(проколотая окрестность), тогда* $\operatorname*{res}_{a,D} f(z) = \operatorname*{res}_{a} f(z)$.

Доказательство. Очевидно. □

Предложение 1.2. *Пусть* $a \in \mathbb{C}$ *и* $f(z) = \overline{\overline{o}}(\frac{1}{z-a})$ *или* $a = \infty$ *и при* $z \to \infty$ $(z \in D)$: $f(z) = \overline{\overline{o}}(\frac{1}{z})$, *тогда* $\operatorname*{res}_{a,D} f(z) = 0$.

Доказательство.

1. Случай $a \neq \infty$. $\left|\int\limits_{\gamma_\delta^+} f(z)dz\right| \leqslant \overline{\overline{o}}(\frac{1}{\delta}) \cdot 2\pi\delta \xrightarrow[\delta\to 0]{} 0$, где $\delta = |z-a|$.
2. Случай $a = \infty$. ?

□

Предложение 1.3. *Пусть* $a \in \partial D$ *— полюс первого порядка для функции* f, $a \neq \infty$, Θ_a *— абсолютная величина внутреннего угла области* D *с вершиной* a. *Тогда*

$$\operatorname*{res}_{a,D} f(z) = \frac{\Theta_a}{2\pi}\operatorname*{res}_{a} f(z).$$

Доказательство. При достаточно малом δ положим $\gamma_\delta^+(a) = \partial^+ B(a,\delta) \cap \overline{D}$ — связная дуга δ-окрестности точки a. Рассмотрим параметризацию данной кривой $\gamma_\delta^+(a)$: $z = z(t) = a\delta e^{it}$, $\dot{z}(t) = a\delta i e^{it}$, при $t \in [\alpha(\delta), \beta(\delta)]$, причем $\alpha(\delta) < \beta(\delta) < \alpha(\delta) + 2\pi$. Положим

$$\Theta_a = \lim_{\delta\to 0}(\beta(\delta) - \alpha(\delta)).$$

Разложим f в проколотой окрестности точки a в ряд Лорана при $0 < |z-a| < \delta_a > 0$:

$$f(z) = \frac{C_{-1}}{z-a} + C_0 + \ldots$$

Тогда вычет в точке a относительно области D принимает вид

$$\operatorname*{res}_{a,D} = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_\delta^+} f(z)dz = \frac{1}{2\pi i}\lim_{\delta\to 0}\int\limits_{\alpha(\delta)}^{\beta(\delta)}\left(\frac{C_{-1}}{\delta e^{it}} + \overline{\overline{o}}(1)\right)\delta i e^{it}dt = \frac{C_{-1}}{2\pi}\lim_{\delta\to 0}\left(\alpha(\delta) - \beta(\delta)\right) = C_{-1}\frac{\Theta_a}{2\pi}$$

C_{-1} — и есть необходимый вычет.

□

Предложение 1.4 (Лемма Жордана). *Пусть* $f \in C(\Pi_R)$, *где* $\Pi_R = \{z \in \mathbb{C} |\, Im\, z \geqslant 0, |z| > R\}$, *и для* $z \in \Pi_R$: $\lim\limits_{z\to\infty} f(z) = 0$, *тогда для любого фиксированного* $\lambda > 0$ *выполняется соотношение*

$$\operatorname*{res}_{\infty,D}(f(z)e^{i\lambda z}) = 0.$$

(подробнее смотри билет 2)

2 Лемма Жордана.

Лемма 2.1. *Пусть функция $f(z)$ определена и непрерывна на множестве $\Pi_+ = \{z \in \mathbb{C} |\, Im\, z \geqslant 0, |z| \geqslant R_0 > 0\}$. Положим при $R > R_0\colon M(R) := \max\limits_{z \in \gamma_R} f(z)$, где $\gamma_R = \{z = Re^{i\theta}, 0 < \theta < \pi\}$ — полуокружность. Предположим, что $f(z)$ стремится к нулю на бесконечности так, что $\lim\limits_{R\to\infty} M(R) = 0$, тогда для $\forall \lambda$ справедливо соотношение*

$$\operatorname*{res}_{\infty, D}(f(z)e^{i\lambda z}) = 0.$$

Доказательство. Из определения вычета относительно области

$$\operatorname*{res}_{\infty, D} f(z)e^{i\lambda z} = \lim_{R\to\infty} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_R} f(z)e^{i\lambda z} dz.$$

В указанных выше обозначениях имеем

$$\left| \int\limits_{\gamma_R} f(z)e^{i\lambda z} dz \right| = \left| \int\limits_0^\pi f(Re^{i\theta}) e^{\lambda(iR\cos\theta - R\sin\theta)} iRe^{i\theta} d\theta \right| \leqslant \int\limits_0^\pi M(R)Re^{-\lambda R\sin\theta} d\theta$$

Справедлива оценка $\sin\theta \geqslant \frac{2\theta}{\pi}$ на $0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}$. Исходя из этого сделаем замену $\tau = \frac{2R\theta}{\pi}$, тогда

$$\int\limits_0^\pi M(R)Re^{-\lambda R\sin\theta} d\theta = 2M(R) \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} Re^{-\lambda R\sin\theta} d\theta \leqslant 2M(R) \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} Re^{-\frac{2\lambda R\theta}{\pi}} d\theta = \pi M(R) \int\limits_0^R e^{-\lambda\tau} d\tau = \pi M(R)(1 - e^{-\lambda R});$$

Значит,

$$\left| \int\limits_{\gamma_R} f(z)e^{i\lambda z} dz \right| \leqslant \underbrace{\pi M(R)}_{\to 0} \underbrace{(1 - e^{-\lambda R})}_{\to 1} \xrightarrow[R\to+\infty]{} 0.$$

■

3 Теорема о вычетах для интеграла в смысле главного значения.

Теорема 3.1. *Пусть D — допустимая в $\overline{\mathbb{C}}$ область, $\mathcal{A} = \{a_1, \ldots, a_N\} \subset \overline{D}$ (если $\infty \in \overline{D}$, тогда $\infty \in \mathcal{A}$). $\mathcal{A}$ — конечное множество, $f \in A(D \diagdown \mathcal{A}) \cap C(\overline{D})$. Тогда*

$$(vp) \int\limits_{\partial^+ D} f(z)dz = 2\pi i \sum_{n=1}^{N} \operatorname*{res}_{a_n, D} f(z).$$

То есть интеграл в смысле главного значения существует, если и только если выечеты в каждой точке из $\mathcal{A}$ относительно области D существуют. В таком случае данное равенство выполняется.

Доказательство. Для $\forall a_j \in \mathcal{A}\ \exists \delta_j \in (0, +\infty)$. Обозначим $\Delta = \{\delta_1, \ldots, \delta_N\}$, а $|\Delta| = \max_{j=1,\ldots,N}\{\delta_j\}$.
Пусть $\exists \delta > 0$: при $|\Delta| < \delta$ круги $\{B(a_j, \delta_j)\}_{j=0}^{N}$ — попарно не пересекаются, соответственно определим $\gamma_{\delta_j}^{+}(a_j)$.

Положим $D_{\mathcal{A}\Delta} = D \diagdown \bigsqcup\limits_{j=1}^{N} \overline{B(a_j, \delta_j)}$ — допустимая область в $\mathbb{C}$.

Очевидно, что $f \in A(D_{\mathcal{A}\Delta}) \cap C(\overline{D_{\mathcal{A}\Delta}})$.
Пусть $\mathcal{A}' = \mathcal{A} \cap \partial D = \{a_1, \ldots, a_J\}$, где $J \leqslant N$ и $\infty = a_J$, если $\infty \in \partial D$.
Пускай $\Gamma^{+}_{\mathcal{A}'\Delta'} = \partial^+ D \diagdown \bigsqcup\limits_{j=1}^{J} B(a_j, \delta_j)$, где $\Delta' = \{\delta_1, \ldots, \delta_J\}$.

Значит, $\partial^+ D_{\mathcal{A}\Delta} = \Gamma^{+}_{\mathcal{A}'\Delta'} \cap \bigsqcup\limits_{j=1}^{N} \gamma_{\delta_j}^{-}(a_j)$.
Тогда по интегральной теореме Коши:

$$0 = \int\limits_{\partial^+ D_{\mathcal{A}\Delta}} f(z)dz = \underbrace{\int\limits_{\Gamma^{+}_{\mathcal{A}'\Delta'}} f(z)dz}_{(vp) \int\limits_{\partial^+ D} f(z)dz} - \sum_{j=1}^{N} \underbrace{\int\limits_{\gamma_{\delta_j}^{+}(a_j)} f(z)dz}_{2\pi i \operatorname*{res}\limits_{a_j, D} f(z)}.$$

∎

4 Примеры вычисления интегралов. Преобразования Фурье и Гильберта.

Для вычисления интгралов в смысле главного значения в первую очередь мы будем использовать теорему о вычетах а так же предложения (1.1) — (1.4).

1. $f(z) = \frac{\ln z}{z^2-1}$

2. Вспомним замечание (1.1). Рассмотрим $f(z) = \frac{1}{z}$ обычный несобственный интеграл от $-\infty$ до $+\infty$

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{z} dz \text{— расходится}$$

   Однако, интеграл в смысле главного значения сходится и

$$(vp) \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{z} dz = 0$$

3. Преобразование Фурье

$$\hat{f}(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (vp) \int\limits_{\mathbb{R}} f(y)\, e^{ixy} dy; \qquad \widetilde{f}(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (vp) \int\limits_{\mathbb{R}} f(y)\, e^{ixy} dy.$$

4. Преобразование Гильберта

$$f \to H[f](x) = \frac{1}{\pi} (vp) \int\limits_{\mathbb{R}} \frac{f(x)}{x-t} dt$$

5 Теорема о логарифмических вычетах. Принцип аргумента.

6 Теорема Руше. Принцип сохранения области и его следствие.

7 Конформность голоморфных инъективных функций.

8 Обратный принцип соответствия границ.

9 Критерии локальной однолистности и локальной обратимости.

10 Принцип симметрии Римана-Шварца для конформных отображений.