Московский государственый университет
им. М. В. Ломоносова
Механико-математический факультет
Кафедра газовой и волновой динамики

Ракитин Виталий Павлович.

Численное решение краевой задачи принципа максимума в задаче оптимального управления методом стрельбы.

Москва, 2015 год.

Содержание

1 Постановка заадачи

Рассматривается задача (номер 33) Лагранжа с фиксированным временным отрезком, без ограничений вида «меньше или равно»:

$$\int_0^1 \frac{\ddot{x}^2}{1+\alpha t^4} dt \to extr, \tag{1}$$

$$\int_0^1 x dt = 1, \qquad x(0) = \dot{x}(1) = 0, \qquad \dot{x}(0) = 1,$$

где α — известная константа, параметр задачи.

Требуется формализовать задачу как задачу оптимального управления, принципом максимума Понтрягина свести задачу к краевой задаче, численно решить полученную краевую задачу методом стрельбы и обосновать точность полученных результатов, проверить полученные экстремали Понтрягина на оптимальность при различных значениях параметра

$$\alpha = \{0.0; \quad 0.1; \quad 1.0; \quad 10.0\}.$$

2 Формализация задачи

Формализуем задачу для оптимального управляения. Для этого введём следующие обозначения

$$y = \dot{x}, \qquad u = \dot{y} = \ddot{x}.$$

где u — управление.

Тогда исходная система (1) перепишется в виде:

$$\begin{cases} \dot{x} = y; \\ \dot{y} = u; \\ u \in \mathbb{R}; \\ \text{при } t = 0\text{: } x(0) = 0, \quad y(0) = 1; \\ \text{при } t = 1\text{: } y(1) = 0; \\ \int_0^1 x dt = 1; \\ \int_0^1 \frac{u^2}{1+\alpha t^4} dt \to \text{extr}. \end{cases} \tag{2}$$

3 Система необходимых условий оптимальности

Рассмотртим задачу Лагранжа в пространстве $\Omega = C^1(\Delta, \mathbb{R}^2) \times C(\Delta, \mathbb{R}) \times \mathbb{R}^2$:

$$u(t) \in \mathbb{R}, \qquad \overline{x}^T = (x, y) \in \mathbb{R}^2, \qquad \dot{\overline{x}}^T - (y, u) = 0, \qquad \varphi(t, \overline{x}(t), u(t)) = (y, u);$$

Далее выпишем следующий функционалы

$$B_i(\overline{x}, u, t_0, t_1) = B_i(x, y, u, 0, 1) = \int_0^1 f_i(t, \overline{x}, u) dt + \psi_i(0, \overline{x}(0), 1, \overline{x}(1)), \qquad \text{где } i = 1, \ldots, 4.$$

$$B_0 = \int_0^1 \frac{u^2}{1+\alpha t^4} dt, \qquad f_0 = \frac{u^2}{1+\alpha t^4}, \qquad \psi_0 = 0;$$

$$B_1 = \int_0^1 x dt - 1 = 0, \qquad f_1 = x, \qquad \psi_1 = -1;$$

$$B_2 = x(0), \qquad f_2 = 0, \qquad \psi_2 = x(0);$$

$$B_3 = y(0) - 1, \qquad f_3 = 0, \qquad \psi_3 = y(0) - 1;$$

$$B_4 = y(1), \qquad f_4 = 0, \qquad \psi_4 = y(1);$$

Далее выпишем функцию Лагранжа

$$\mathcal{L} = \int\limits_0^1 L dt + l;$$

где

$$\text{лагранжиан: } L = \sum_{i=0}^{4} \lambda_i f_i(t, \overline{x}, u) + \langle \overline{p}(t), \dot{\overline{x}} - \varphi(t, \overline{x}, u) \rangle;$$

$$\text{терминант: } l = \sum_{i=0}^{4} \lambda_i \psi_i(0, \overline{x}(0), 1, \overline{x}(1));$$

$$\lambda = (\lambda_0, \ldots, \lambda_4), \qquad \overline{p}(\cdot) = (p_x, p_y) \in C^1(\Delta, \mathbb{R}^{2*})$$

множетели лагранжа задачи, а так же функцию Понтрягина

$$H(t, \overline{x}, u, \overline{p}, \lambda) = \langle \overline{p}(t), \varphi(t, \overline{x}, u) \rangle - \sum_{i=0}^{4} \lambda_i f_i(t, \overline{x}, u).$$

А теперь выпишем функции Лагранжа и Понтрягина в явном виде:

$$L = \lambda_0 \left(\frac{u^2}{1 + \alpha t^4} \right) + \lambda_1 x + p_x(\dot{x} - y) + p_y(\dot{y} - u); \tag{3}$$

$$l = -\lambda_1 + \lambda_2 x(0) + \lambda_3 (y(0) - 1) + \lambda_4 y(1);$$

$$H = p_x y + p_y u - \lambda_0 \left(\frac{u^2}{1 + \alpha t^4} \right) - \lambda_1 x;$$

Далее применим к задаче оптимального управления (2) принцип максимума Понтрягина. Необходимые условия оптимальности:

1. Уравнения Эйлера-Лагранжа (сопряжённая система уравнений, условие стационарности по $\overline{x}$):

$$\begin{cases} \dot{p}_x = -\frac{\partial H}{\partial x} = \lambda_1; \\ \dot{p}_y = -\frac{\partial H}{\partial y} = -p_x. \end{cases} \tag{4}$$

2. условие оптимальности по управлению,

$$u = \arg \operatorname*{abs\,max}_{u \in \mathbb{R}} H(u) = \arg \operatorname*{abs\,max}_{u \in \mathbb{R}} \left(p_y u - \left(\frac{\lambda_0}{1 + \alpha t^4} \right) u^2 \right) = \frac{p_y \left(1 + \alpha t^4\right)}{2\lambda_0}$$

   при $\lambda_0 \neq 0$, так как $H(u)$ — парабола, с ветвями, направленными вниз (т.к. $\lambda_0 \geqslant 0$ — см.п. 6), достигает максимума в вершине, при указанном значении аргумента u;

3. условия трансверсальности по $\overline{x}$:

$$p_x(t_k) = (-1)^k \frac{\partial l}{\partial x(t_k)}, \qquad p_y(t_k) = (-1)^k \frac{\partial l}{\partial y(t_k)}.$$

   В нашем случае $k = 0, 1$, $t_0 = 0$, $t_1 = 1$. Значит

$$p_x(0) = \lambda_2, \qquad p_x(1) = 0, \qquad p_y(0) = \lambda_3, \qquad p_y(1) = -\lambda_4.$$

4. условия стационарности по t_k:
   нет, так как в задаче (2) t_k — известные константы;

5. условия дополняющей нежёсткости:
   нет, так как в задаче (2) отсутствуют условия вида «меньше или равно»;

6. условие неотрицательности: $\lambda_0 \geqslant 0$;

7. условие нормировки (множители Лагранжа могут быть выбраны с точностью до положительного множителя);

8. НЕРОН (множители Лагранжа НЕ Равны Одновременно Нулю).

4 Анормальный случай и исследование задачи

Исследуем возможность анормального случая $\lambda_0 = 0$. При $\lambda_0 = 0$ из (2) и (4) получим систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dot{x} = y; \\ \dot{y} = u; \\ \dot{p}_x = \lambda_1; \\ \dot{p}_y = -p_x; \end{cases} \tag{5}$$

Отсюда получаем,

$$p_x(t) = \lambda_1 t + C, \qquad p_y(t) = -\lambda_1 t - C.$$

Так же из условия (п. 2), имеем

$$p_y(t) \equiv 0, \qquad \dot{p}_y(t) \equiv 0,$$

иначе

$$u(t) = \pm\infty,$$

и такой управляемый процесс не является допустимым. Следовательно,

$$\lambda_1 t + C = 0, \qquad \lambda_1 t = C,$$

где $t \in \mathbb{R}$, $\lambda_1, C = \mathrm{const}$, тогда

$$\lambda_1 = C = 0, \qquad p_x(t) \equiv 0.$$

Из условий трансверсальности (п. 3) получаем

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0.$$

Таким образом, если $\lambda_0 = 0$, то все множители Лагранжа равны 0 и получается противоречие с условием (п. 8). Значит, анормальный случай невозможен.

Так как $\lambda_0 \neq 0$, то в силу однородности функции Лагранжа по множителям Лагранжа выберем следующее условие нормировки:

$$\lambda_0 = \frac{1}{2},$$

тогда из условия (п. 2) определяется управление

$$u = p_y(1 + \alpha t^4), \tag{6}$$

5 Краевая задача

Ко всему вышесказанному добавим, что

$$\int\limits_0^1 x dt = 1.$$

Введём обозначение

$$\varphi(t) = \int\limits_0^t x(\tau) d\tau, \quad \text{а так же } \lambda_1 = a;$$

тогда

$$\begin{cases} \varphi(0) = 0, \\ \dot{\varphi} = x; \\ \varphi(1) = 1; \end{cases} \tag{7}$$

Таким образом, на основе принципа максимума Понтрягина задача оптимального управления (2) сводится к краевой задаче (8).

$$
\begin{cases}
\dot{x} = y; \\
\dot{y} = p_y(1+\alpha t^4); \\
\dot{p}_x = a; \\
\dot{p}_y = -p_x; \\
\dot{\varphi} = x; \\
\dot{a} = 0.
\end{cases}
\tag{8}
$$

$$
\begin{array}{lll}
x(0) = 0, & y(0) = 1, & \varphi(0) = 0; \\
y(1) = 0, & p_x(1) = 0. & \varphi(1) = 1;
\end{array}
$$

$$\alpha = \{0.0; \quad 0.1; \quad 1.0; \quad 10.0\}.$$

6 Аналитическое решение краевой задачи

Полученная краевая задача решается аналитически.

1. невооружённым глазом видно, что последнее уравнение очень простое, поэтому

$$\dot{a} = 0 \quad \Rightarrow \quad a = C_1, \quad \text{где } C_1 = \text{const}.$$

2. далее из уравнения $\dot{p}_x = a = C_1$ следует, что

$$p_x = C_1 t + C_2, \qquad \text{где } C_2 = \text{const}.$$

Так же из краевых условий видим, что

$$p_x(1) = 0 \quad \Rightarrow \quad 0 = C_1 + C_2, \qquad C_2 = -C_1.$$

3. из уравнения

$$\dot{p}_y = -p_x = C_1 t - C_1,$$

получим, что

$$p_y = \frac{1}{2}C_1 t^2 - C_1 t + C_3, \qquad \text{где } C_3 = \text{const}.$$

4. теперь рассмотрим уравнение

$$\dot{y} = p_y(1+\alpha t^4) = \left(\frac{1}{2}C_1 t^2 - C_1 t + C_3\right)(1+\alpha t^4),$$

из которого не сложно получить

$$y = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{7}\alpha C_1 t^7 - \frac{1}{3}\alpha C_1 t^6 + \frac{2}{5}\alpha C_3 t^5 + \frac{1}{3}C_1 t^3 - C_1 t^2 + 2C_3 t\right) + C_4, \qquad \text{где } C_4 = \text{const}.$$

Из краевых условий

$$y(0) = 1, \quad y(1) = 0$$

следует

$$
\begin{array}{rcl}
1 & = & C_4, \\
0 & = & \frac{1}{7}\alpha C_1 - \frac{1}{3}\alpha C_1 + \frac{2}{5}\alpha C_3 + \frac{1}{3}C_1 - C_1 + 2C_3
\end{array}
$$

Значит

$$C_3 = \frac{5(2\alpha+7)c_1}{21(\alpha+5)}$$

5. из уравнения

$$\dot{x} = y = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{7}\alpha C_1 t^7 - \frac{1}{3}\alpha C_1 t^6 + \frac{2\alpha(2\alpha+7)C_1 t^5}{21(\alpha+5)} + \frac{C_1 t^3}{3} - C_1 t^2 + \frac{10(2\alpha+7)C_1 t}{21(\alpha+5)}\right) + 1$$

следует

$$x = \frac{1}{42(\alpha+5)}\left(\frac{3}{8}\alpha^2 C_1 t^8 + \frac{15}{8}\alpha C_1 t^8 - \alpha^2 C_1 t^7 - 5\alpha C_1 t^7 + \frac{2}{3}\alpha^2 C_1 t^6 + \frac{7}{3}\alpha C_1 t^6 + \frac{7}{4}\alpha C_1 t^4 + \right.$$
$$\left. + \frac{35 C_1 t^4}{4} - 7\alpha C_1 t^3 - 35 C_1 t^3 + 10\alpha C_1 t^2 + 35 C_1 t^2 + 42\alpha t + 210 t\right) + C_5.$$

Из краевых условий видно

$$x(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad C_5 = 0$$

6. И наконец рассмотрим последнее уравнение $\dot{\varphi} = x$

$$\varphi = \frac{1}{1008(\alpha+5)}\left(\alpha(\alpha+5)C_1 t^9 - 3\alpha(\alpha+5)C_1 t^8 + \frac{8}{7}\alpha(2\alpha+7)C_1 t^7 + \frac{42}{5}(\alpha+5)C_1 t^5 - \right.$$
$$\left. - 42(\alpha+5)C_1 t^4 + 40(2\alpha+7)C_1 t^3 + 504(\alpha+5)t^2\right) + C_6.$$

Из краевых условий, в свою очередь, получим явные выражения для C_1 и C_6.

$$\varphi(0) = 0, \quad \varphi(1) = 1,$$

поэтому

$$\begin{aligned} C_6 &= 0, \\ C_1 &= \frac{8820(\alpha+5)}{5\alpha^2 + 777\alpha + 1960} \end{aligned}$$

Из вышесказанного следует, что решением нашей системы будет следующим

$$\begin{cases} a(t) = -\frac{8820(\alpha+5)}{5\alpha^2+777\alpha+1960}, \\ px(t) = -\frac{8820}{5\alpha^2+777\alpha+1960}(-\alpha + \alpha t + 5t - 5), \\ py(t) = \frac{210}{5\alpha^2+777\alpha+1960}\left(20\alpha + 21\alpha t^2 + 105 t^2 - 42\alpha t - 210 t + 70\right), \\ y(t) = \frac{1}{5\alpha^2+777\alpha+1960}\left(5\alpha^2 + 777\alpha + 630\alpha^2 t^7 + 3150\alpha t^7 - 1470\alpha^2 t^6 - 7350\alpha t^6 + 840\alpha^2 t^5 + \right. \\ \left. +2940\alpha t^5 + 1470\alpha t^3 + 7350 t^3 - 4410\alpha t^2 - 22050 t^2 + 4200\alpha t + 14700 t + 1960\right), \\ x(t) = \frac{1}{4(5\alpha^2+777\alpha+1960)}\left(315\alpha^2 t^8 + 1575\alpha t^8 - 840\alpha^2 t^7 - 4200\alpha t^7 + 560\alpha^2 t^6 + 1960\alpha t^6 + \right. \\ \left. +1470\alpha t^4 + 7350 t^4 - 5880\alpha t^3 - 29400 t^3 + 8400\alpha t^2 + 29400 t^2 + 20\alpha^2 t + 3108\alpha t + 7840 t\right), \\ \varphi(t) = \frac{1}{4(5\alpha^2+777\alpha+1960)}\left(35\alpha^2 t^9 + 175\alpha t^9 - 105\alpha^2 t^8 - 525\alpha t^8 + 80\alpha^2 t^7 + 280\alpha t^7 + 294\alpha t^5 + \right. \\ \left. +1470 t^5 - 1470\alpha t^4 - 7350 t^4 + 2800\alpha t^3 + 9800 t^3 + 10\alpha^2 t^2 + 1554\alpha t^2 + 3920 t^2\right) \end{cases}$$

Так же, при $alpha = 0$:

$$\begin{cases} a(t) = -30, \\ \mathrm{px}(t) = -30(t-1), \\ \mathrm{py}(t) = 3\left(5t^2 - 10t + 3\right), \\ x(t) = \frac{1}{4}\left(5t^4 - 20t^3 + 18t^2 + 4t\right), \\ y(t) = 5t^3 - 15t^2 + 9t + 1, \\ \varphi(t) = \frac{1}{4}\left(t^5 - 5t^4 + 6t^3 + 2t^2\right) \end{cases}$$

7 Численное решение краевой задачи методом стрельбы

Краевая задача (8) решается численно методом стрельбы. В качестве параметров пристрелки выбираются недостающие для решения задачи Коши значения при $t = 0$

$$\beta_1 = a(0), \qquad \beta_2 = p_y(0), \qquad \beta = \{\beta_1, \beta_2\}.$$

Задав эти значения каким-либо образом и решив задачу Коши на отрезке $\Delta = [0, 1]$ получим соответствующие выбранному значению β функции $x(t)[\beta]$, $y(t)[\beta]$, $p_x(t)[\beta]$, $p_y(t)[\beta]$ и, в частности, значения $p_x(1)[\beta]$, $y(1)[\beta]$.

Задача Коши для системы дифференциальных уравнений (8) с начальными условиями в нулевой момент времени решается численно явным методом Рунге-Кутты 5-го порядка, основанным на расчётных формулах Дормана-Принса 5(6) DOPRI5 с автоматическим выбором шага (то есть с контролем относительной локальной погрешности на шаге по правилу Рунге). Для решения краевой задачи необходимо подобрать значения β так, чтобы выполнились условия:

$$\varphi(1)[\beta] = 0, \qquad y(1)[\beta] = 0.$$

Однако всего у нас неизвестны значения трёх переменных в начальный момент времени: p_x, y, a. Заметим, что из краевой задачи (8) видно, что $\dot{p}_x = a$, а значит $p_x(t) = a(t)\cdot(t-1)$, тогда при $t = 0$: $p_x(0) = -a(0)$, но $a = \text{const}$, тогда $a(t) = -p_x(0)$. соответственно вектор-функцией невязок будет функция

$$\mathcal{X}(\beta) = \begin{pmatrix} y(1)[\beta] \\ \varphi(1)[\beta] - 1 \end{pmatrix},$$

Таким образом, в результате выбора вычислительной схемы метода стрельбы, решение краевой задачи свелось к решению системы трёх алгебраических уравнений от трёх неизвестных. Корень β системы алгебраических уравнений $\mathcal{X}(\beta) = 0$ находится методом Ньютона с модификацией Исаева-Сонина. Решение линейной системы уравнений внутри модифицированного метода Ньютона осуществляется методом Гаусса с выбором главного элемента по столбцу, с повторным пересчётом.

Схема численного решения краевой задачи методом стрельбы выбрана таким образом, что при отсутствии ошибок в программной реализации решения задачи Коши, найденный методом Ньютона корень будет правильным (без учёта погрешности численного интегрирования), даже если внутри метода Ньютона есть какие-то ишибки. Напротив, ошибка в решении задачи Коши делает бесполезным полученный результат, даже если всё остальное запрограммировано правильно и методу Ньютона удалось найти корень.

Исходя из этого крайне важен следующий тест части программы, решающей задачу Коши, на системе дифференциальных уравнений с известным аналитическим решением.

Итерационный процесс начинается с $\beta_1^0 = \beta_2^0 = 0$, далее

$$\begin{pmatrix} \beta_1^{n+1} \\ \beta_2^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_1^{n} \\ \beta_2^{n} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{\partial \mathcal{X}_1}{\partial \beta_1^{n+1}} & \frac{\partial \mathcal{X}_1}{\partial \beta_2^{n+1}} \\ \frac{\partial \mathcal{X}_2}{\partial \beta_1^{n+1}} & \frac{\partial \mathcal{X}_2}{\partial \beta_2^{n+1}} \end{pmatrix}^{-1} \cdot \mathcal{X}(\beta)$$

8 Оценка глобальной погрешности.

Для вычисления глобальной погрешности введём множество переменных δ_i :

$$\delta_0 = 0, \qquad \delta_{k+1} = \text{Err}_k + \delta_k \cdot e^{\int\limits_{t_k}^{t_{k+1}} \mu(s)ds}$$

Интеграл в предыдущем выражении можно приблизить следующим образом

$$\int\limits_{t_k}^{t_{k+1}} \mu(s)ds = (t_{k+1} - t_k)\cdot \text{Hmax}\left(\frac{J + J^T}{2}\right),$$

где J — матрица Якоби исходной системы дифференциальных уравнений, а Hmax — функция, возвращающая максимальное собственное значение полученной матрицы.

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1+\alpha t^4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \qquad \mathcal{A} = \frac{J + J^T}{2} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2}A & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2}A & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

где $A = \left(\alpha t^4 + 1\right)$. Собственные числа λ матрицы $\mathcal{A}$ находятся из харрактеристического уравнения

$$\lambda^6 - \lambda^4\left(1 - \frac{\text{A}^2}{4}\right) + \lambda^2\left(\frac{\text{A}^2}{8} + \frac{1}{4}\right) - \frac{\text{A}^2}{64} = 0 \tag{9}$$

Сделаем замену $\lambda^2 = z$, тогда получим следующее уравнение

$$z^3 - z^2\left(1 - \frac{\text{A}^2}{4}\right) + z\left(\frac{\text{A}^2}{8} + \frac{1}{4}\right) - \frac{\text{A}^2}{64} = 0$$

По теореме Руше если на границе круга $B(0,R)$ на комплексной плоскости $\mathbb{C}$ с центром в точке 0 и радиусом R имеет место неравенство для двух голоморфных функций f и g следующего вида

$$|g(z)|\big|_{|z|=R} \leqslant |f(z)|\big|_{|z|=R},$$

то количество нулей с учётом кратности суммы $f+g$ в круге $B(0,R)$ совпадает с количеством нулей $f(z)$ в этом же круге $B(0,R)$.

Возьмём в качестве $f(z)=z^3$ и $g(z) = -z^2\left(1-\frac{\mathrm{A}^2}{4}\right) + z\left(\frac{\mathrm{A}^2}{8}+\frac{1}{4}\right) - \frac{\mathrm{A}^2}{64}$.

Найдём $R>0$: $|f| \geqslant |g|$ при $|z|=R$.

Положим $R = max\left\{3\left|1-\frac{\mathrm{A}^2}{4}\right|, \sqrt{\frac{3\mathrm{A}^2}{8}+\frac{3}{4}}, \sqrt[3]{\frac{3\mathrm{A}^2}{64}}\right\}$. Тогда

$$|g(z)|\Big|_{|z|=R} \leqslant z^2\left|1-\frac{\mathrm{A}^2}{4}\right| + z\left(\frac{\mathrm{A}^2}{8}+\frac{1}{4}\right) + \frac{\mathrm{A}^2}{64} \leqslant \frac{R^3}{3} + \frac{R^3}{3} + \frac{R^3}{3} = R^3.$$

9 Правило Рунге

Проверим правило Рунге. А именно, посчитаем отличия всех фазовых и сопряжённых переменных от точного аналитического решения при различных *alpha* для различных значений максимально допустимой относительной погрешности на шаге. То есть проверим следующее соотношение

$$variation = \frac{y_{-7}-y_{-9}}{y_{-9}-y_{-11}} \approx 100^{\frac{s}{s+1}} = 100^{\frac{5}{5+1}} \approx 46.42$$

После проведения всех расчётов для были получены следующие величины

$$R_x = 7.656930; \tag{10}$$
$$R_y = 2.555695; \tag{11}$$
$$R_{p_x} = 2.564632; \tag{12}$$
$$R_{p_y} = 7.661325; \tag{13}$$
$$R_\varphi = 2.558514. \tag{14}$$
$$\tag{15}$$

10 Тестирование на гармоническом осцилляторе

Дабы отбросить все сомнения в корректности работы программы для решения задачи Коши, проведём тестирование на более простом случае с заранее известным решением, а именно на гармоническом осцилляторе

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y; \\ \frac{dy}{dt} = -x; \\ 0 < t < 30; \\ t = 0 : x = 0, y = 8. \end{cases}$$

Визуализация численного решения данной задачи с помощью нашей программы представлена в виде графиков на рис.(3), (2) и (1). Для удобства проверки дополнительно решим нашу задачу с помощью пакета *Wolfram Mathematica 9* (см. рис. 11.1). Сравнивая полученные результаты можно заметить, что полученные решения абсолютно идентичны, на основе чего можно сделать вывод о корректности работы программы. Однако, для большей достоверности проверим так же численные оценки отклонений.

1. Для вычисления глобальной погрешности введём множество переменных δ_i :

$$\delta_0 = 0, \qquad \delta_{k+1} = Err_k + \delta_k \cdot e^{\int_{t_k}^{t_{k+1}} \mu(s)ds}$$

Интеграл в предыдущем выражении можно приблизить следующим образом

$$\int_{t_k}^{t_{k+1}} \mu(s)ds = (t_{k+1}-t_k)\cdot \mathrm{Hmax}\left(\frac{J+J^T}{2}\right),$$

где J — матрица Якоби исходной системы дифференциальных уравнений, Err_k — максимум расстояний между соответствующими координатами на k-ом шаге, а Hmax — функция, возвращающая максимальное собственное значение полученной матрицы. В наше случае мы получим следующее

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad A = \frac{J + J^T}{2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_{1,2} = 0, \qquad \delta_0 = 0, \qquad \delta_{k+1} = Err_k + \delta_k.$$

Таким образом были получены следующие значения глобальной погрешности:

$$\text{для точности погрешности -7-го порядка } \delta_k = 2.433796 \cdot 10^{-6}$$

$$\text{для точности погрешности -9-го порядка } \delta_k = 3.964618 \cdot 10^{-7}$$

$$\text{для точности погрешности -11-го порядка } \delta_k = 8.135620 \cdot 10^{-9}$$

2. А оценка **локального отклонения на шаге** для каждой точки $t = \{50, 100, 150, 200\}$ для обеих координат получилась равна в районе 100 ± 2, что намного превышает теоретическую оценку 56.23 и свидетельствуют о большом запасе точности в методе — при уменьшении максимально допустимой относительной погрешности на шаге интегрирования на 2 порядка происходит существенное уточнение решения, метод в данном случае работает как метод более высокого порядка. Это в первую очередь связано с коэффициентами в расчётных формулах метода и особенностями системы дифференциальных уравнений гармонического осциллятора.

На основе выше сказанного можно сделать вывод, что полученная программа работает корректно.

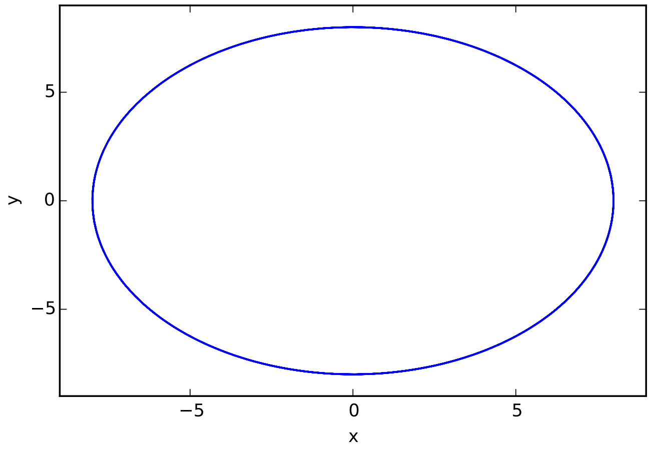


Рис. 1. Решение задачи о математическом осцилляторе. График зависимости $y(x)$

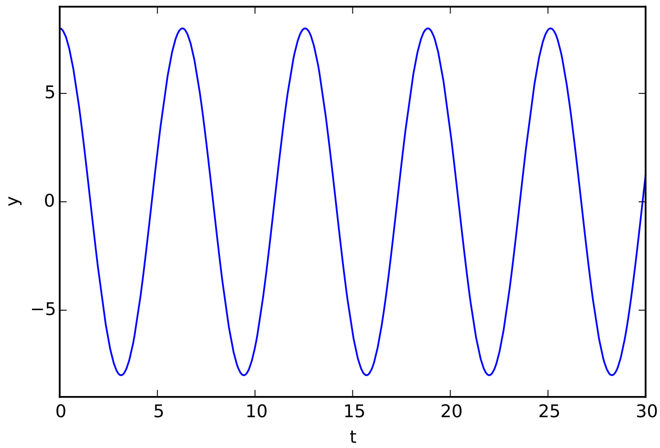


Рис. 2. Решение задачи о математическом осцилляторе. График зависимости $y(t)$

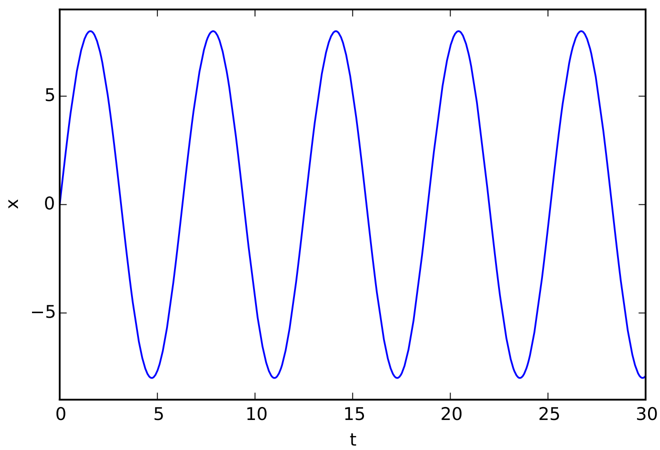


Рис. 3. Решение задачи о математическом осцилляторе. График зависимости $x(t)$

11 Результаты решения задачи и их анализ

Для задача была решена с различными значениями максимально допустимой относительной погрешности на шаге решения задачи Коши для $\Delta = 10^{-7}, 10^{-9}, 10^{-11}$. При каждом проходе были посчитаны погрешности на шаге (по правилу Рунге см. выше), а так же глобальные погрешности, а именно $\mathrm{Err} = 6.82 \cdot 10^{-07}$.

Для сравнения численного решения и аналитического можно взглянуть на полученные графики, по которым явно видно, что они абсолютно идентичны.

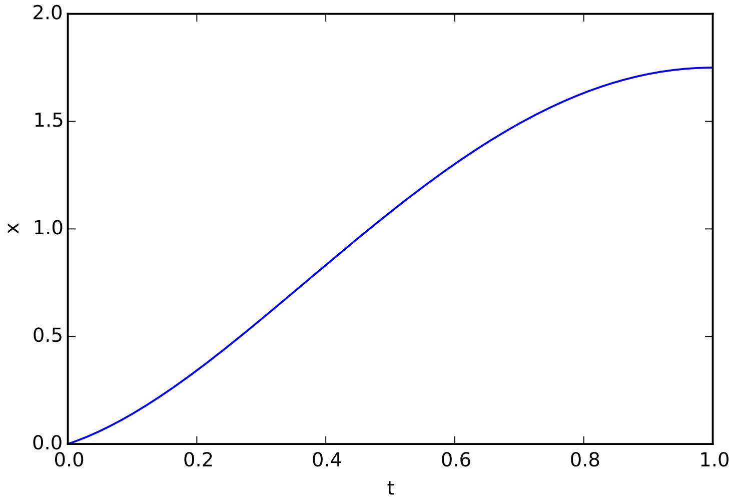


Рис. 4. График зависимости $x(t)$, полученный численным методом.

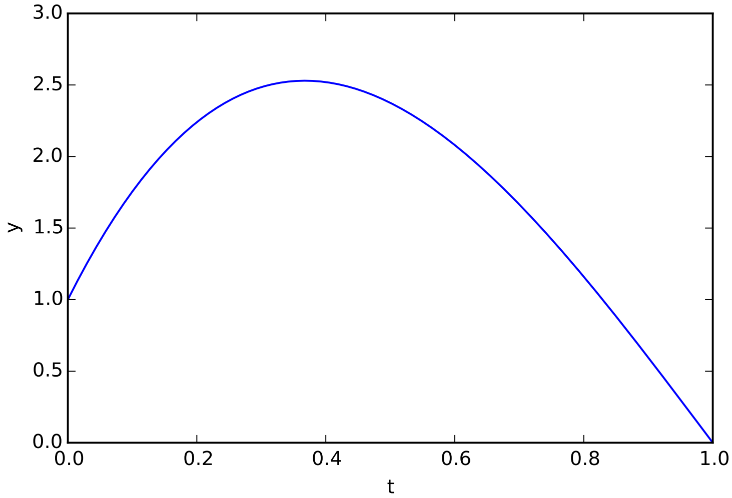


Рис. 5. График зависимости $y(t)$, полученный численным методом.

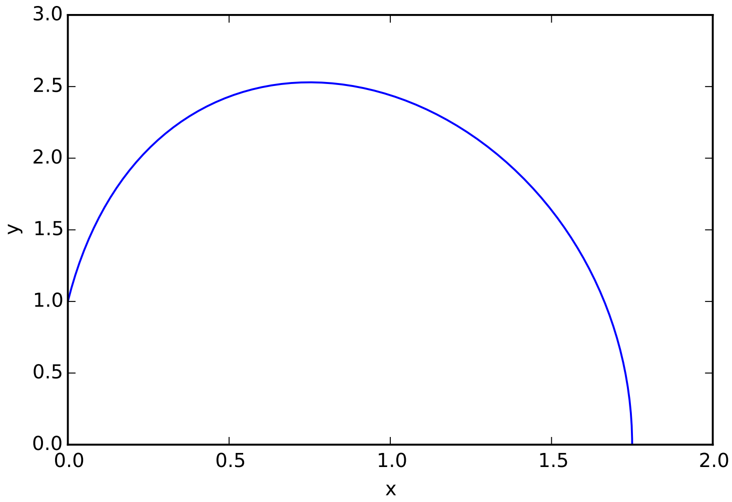


Рис. 6. График зависимости $y(x)$, полученный численным методом.

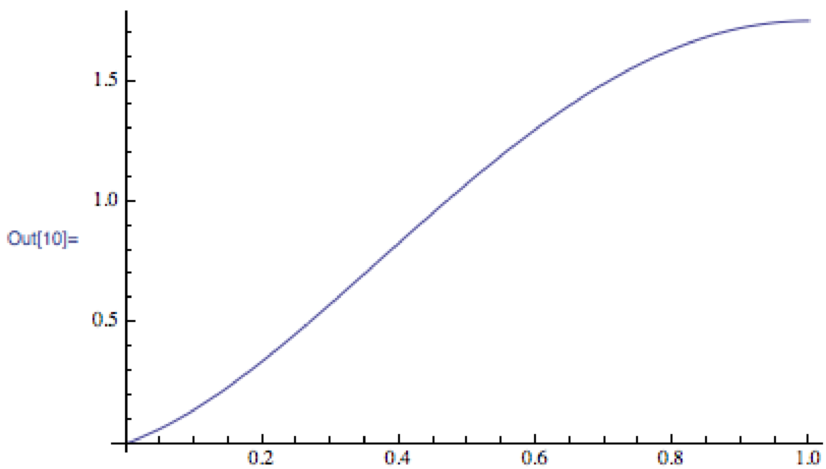


Рис. 7. График зависимости $x(t)$, полученный аналитичсеки.

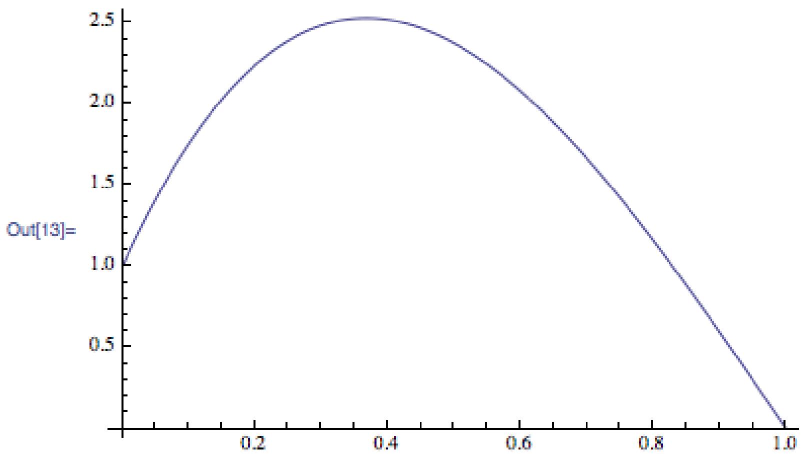


Рис. 8. График зависимости $y(t)$, полученный аналитичсеки.

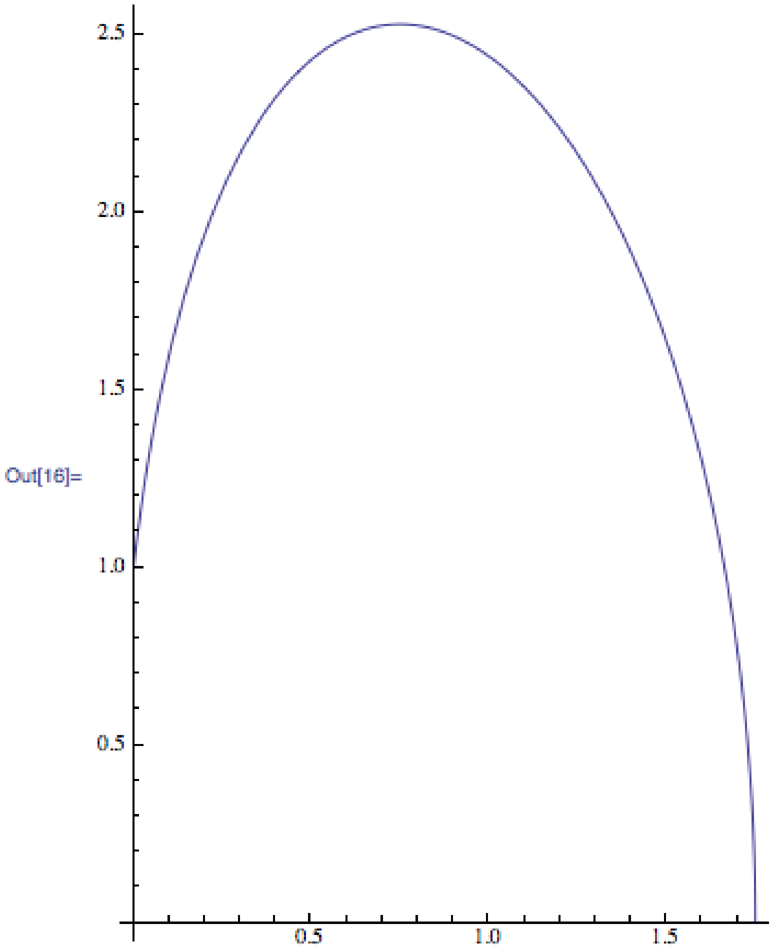


Рис. 9. График зависимости $y(x)$, полученный аналитичсеки.

Список литературы

[1] *И. С. Григорьев.* Методическое пособие по численным методам решения краевых задач принципа максимума в задачах оптимального управления
Издательство Центра прикладных исследований при механико-математическом факультете МГУ, 2005.

[2] *В. В. Александров, Н. С. Бахвалов, К. Г. Григорьев, Г. Ю. Данков, М. И. Зеликин, С. Я. Ищенко, С. В. Конягин, Е. А. Лапшин, Д. А. Силаев, В. М. Тихомиров, А. В. Фурсиков.* Практикум по численным методам в задачах оптимального управления
Издательство Московского университета, 1988.

[3] *И. С. Григорьев, И. С. Заплетин.* Практикум по численным методам в задачах оптимального управления. Дополнение I
Издательство Центра прикладных исследований при механико-математическом факультете МГУ, 2007.

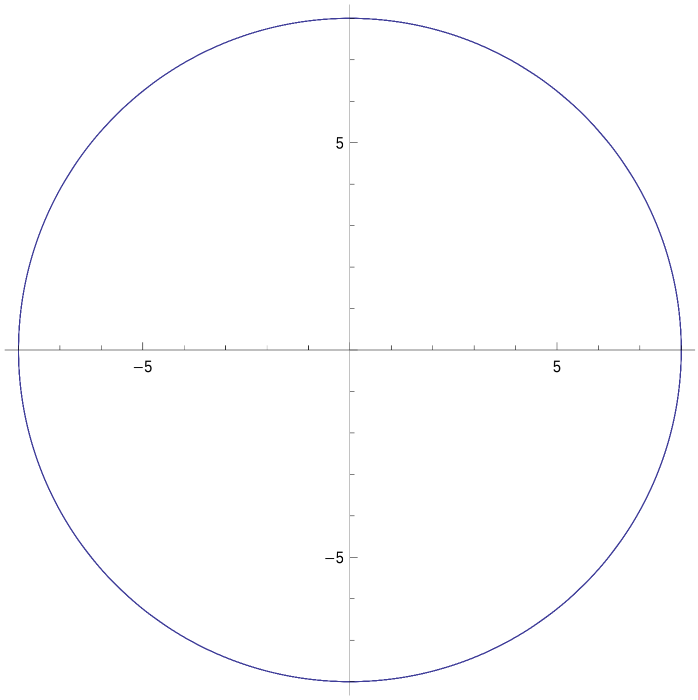
12 Приложения

12.1 Решение задачи о математическом осцилляторе в Wolfram Mathematica 9.

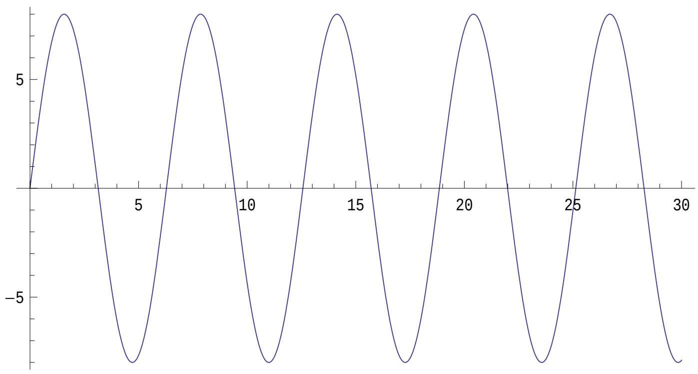
In[44]:=
```
solve = NDSolve[
  {x'[t] == y[t], y'[t] == -x[t], x[0] == 0, y[0] == 8}, {x, y}, {t, 0, 30}]
ParametricPlot[Evaluate[{x[t], y[t]} /. solve], {t, 0, 30}]
ParametricPlot[Evaluate[{t, x[t]    } /. solve], {t, 0, 30}]
ParametricPlot[Evaluate[{t, y[t]    } /. solve], {t, 0, 30}]
```

Out[44]=
```
{{x → InterpolatingFunction[{{0., 30.}}, <>],
  y → InterpolatingFunction[{{0., 30.}}, <>]}}
```

Out[45]=



Out[46]=



Out[47]=