МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ
без пробелов

С.С.Акбаров

2 июля 2019 г.

Если задаться целью проследить, во что превратятся курсы математики, читаемые на технических факультетах нынешних университетов, при условии, что изложение в них будет вестись на современном уровне строгости, с нуля и без пробелов, то можно быть уверенным, что большинству преподавателей и студентов открывшаяся картина покажется неожиданной. Главным сюрпризом наверняка будет то, что такое изложение вообще возможно. Вторым по неожиданности — его детали. И третьим — что такая подача материала будет все же доступна для понимания. Настоящий учебник — попытка такой систематизации. Автор строит курс математики, включающий в себя основные факты математического анализа и лежащих в его основе дисциплин — математической логики и линейной алгебры — с расчетом на формально нулевую подготовку читателя. Последнее, разумеется, не означает обещания, что изложение будет понятно первокласснику, но подразумевает возможность для человека, способного абстрагироваться от части своих знаний, проверить детали внушаемого ему со школы убеждения, что математика — строгая наука, где все аккуратно выстраивается чисто логическими средствами, без ссылок на интуицию, причем сами логические средства также ясно формализуются и никак не связаны с человеческой биологией.

Предисловие

Эта книга представляет собой учебник по математическому анализу и тем областям математики, на которые он опирается: математической логике и линейной алгебре (в объеме, с точностью до некоторых отклонений по ходу изложения, необходимом для доказательства утверждений математического анализа). Идея, руководившая автором при ее создании, состояла в том, чтобы дать возможность студентам и преподавателям проследить цепочки рассуждений, ведущие от самых элементарных понятий теории множеств к главным результатам университетской математики. При этом первостепенными требованиями к этим цепочкам выставлялись их ясность и непрерывность, и, поскольку по опыту автора, это требует объяснения, настоящее Предисловие предназначено главным образом для него.

Что не так? Если задуматься, что теоретически может мешать человеку понимать предмет, изложенный в учебнике, то в голову придут два главных возможных препятствия:

1) *Темные места.* Плохо объясненные, плохо проработанные, неоправданно сложные, непонятные, запутанные детали в каких-то частях изложения, — причем таковыми могут быть даже целые темы, — понятно, составляют проблему.

2) *Пробелы.* Они бывают двух типов: *пробелы со ссылками* и *пробелы без ссылок.*

    a) Первые отсылают читателя за подробностями к другим источникам, и, хотя в таких случаях считается, что человек сам может восстановить недостающие детали, надо понимать, что это далеко не всегда бывает легко. Негарантированная доступность источника, рассогласованность в терминологии и обозначениях, в стиле, необязательно внятное освещение этой темы в самом источнике, всегда представляют дополнительные сложности, иногда небольшие, но часто очень существенные, вплоть до непреодолимых.

    b) Помимо пробелов со ссылками бывают еще пробелы без ссылок. Это происходит, когда какие-то вещи автору текста кажутся очевидными, или общеизвестными, или незаслуживающими детального обсуждения. Во всех случаях это может быть причиной непонимания или вовсе отторжения материала.

В математическом анализе эти трудности представлены полным списком. Вот, в частности, известные автору темные места и пробелы без ссылок (пробелы со ссылками мы перечислим чуть ниже, на странице v).

1. Элементарные функции. Почти во всех учебниках они вводятся "описательно", без строгих определений. Если бы так было везде, это был бы пробел без ссылок, однако автору известна одна книга, а именно, учебник Г. Грауэрта, И. Либа и В. Фишера [3], где экспонента, логарифм, степень и тригонометрические функции определены аккуратно [3, Глава VI, § 4]. Можно было бы поэтому не видеть здесь проблемы, но неприятность в том, что в [3] определения элементарных функций даются только после темы "Разложение Тейлора". Естественно, это делает их формально непригодным в предыдущих темах, то есть, фактически во всем первом семестре изучения матанализа. Поскольку в матанализе элементарные функции принято использовать сразу, проблема остается, и ее можно классифицировать как *темное место.*

2. Кривые и поверхности. Эта тема выглядит недоработанным введением в геометрическую теорию меры, в котором, вопреки ожиданиям зрителя, создатели не захотели или не смогли избавиться от параметризации. То есть, например, кривая в $\mathbb{R}^n$ определяется не как множество в $\mathbb{R}^n$, а как отображение

$$\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$$

с подходящими свойствами (гладкость, липшицевость, спрямляемость, на вкус автора). Все последующие конструкции — длина (или площадь, в случае с поверхностями), интегралы двух типов и подобное — производят впечатление (как и положено им быть) величин, не зависящих от параметризации, но как это формализуется, то есть как следует определить класс кривых (поверхностей), чтобы независимость от параметризации (с естественно вытекающими следствиями) можно было аккуратно доказать, — остается непонятно. Это влечет за собой остальные проблемы: неразработанность аппарата теории, странную узость класса рассматриваемых примеров, а при попытках его расширить — фантастическую дремучесть определений, формулировок и доказательств. В отличие от предыдущего примера, это можно считать *пробелом без ссылок*, потому что ни в каких учебниках эти детали не проясняются.

3. Calculus (Исчисление). К этой теме также логично относиться как к *пробелу без ссылок*, однако здесь объяснение должно быть более подробным. Рассмотрим следующий пример. Представим, что нам захотелось сосчитать производную функции[1]

$$h(x) = \sin(x^2).$$

Если использовать стандартное определение производной через предел[2],

$$h(x) = \lim_{z\to x} \frac{h(z) - h(x)}{z - x}, \tag{1}$$

то для этого нам необходимо будет ввести две вспомогательные функции

$$g(y) = \sin y, \qquad f(x) = x^2,$$

после чего по известной формуле производной композиции функций[3] мы получим:

$$h'(x) = (g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x) = \cos(x^2) \cdot 2x.$$

Этот способ намного менее удобен (особенно когда функция устроена сложно, с большим числом композиций и/или алгебраических операций), чем школьный, в виде цепочки преобразований, которая в данном случае принимает вид

$$\Big(\sin(x^2)\Big)' = \Big(\sin y\Big|_{y=x^2}\Big)' = (\sin y)'\Big|_{y=x^2} \cdot (x^2)' = \cos y\Big|_{y=x^2} \cdot 2x = \cos x^2 \cdot 2x$$

(здесь штрих $'$ означает взятие производной по единственной свободной переменной в скобках, а запись $y = x^2$ в качестве индекса у вертикальной черты, означает подстановку; удобство такой записи в том, что в ней нет необходимости вводить обозначения для промежуточных функций, f и g). Чтобы этот "школьный способ" здесь работал, нужны следующие "школьные тождества для производной":

$$(\sin y)' = \cos y, \qquad (x^2)' = 2x. \tag{2}$$

Проблема в том, что они не могут считаться частными случаями формулы (1): в (1) x является свободной переменной, то есть вместо нее можно подставлять разные значения, и формула все равно будет верна. Например, можно подставить вместо x символ 1, и мы получим верное равенство

$$h(1) = \lim_{z\to 1} \frac{h(z) - h(1)}{z - 1}.$$

Если же то же самое проделать с формулами (2), подставив, например, $y = 1$ и $x = 1$ (что естественно, когда считаешь значение производной функции $h(x) = \sin(x^2)$ в точке 1), то мы получим формально ложные равенства:

$$(\sin 1)' = \cos 1, \qquad (1^2)' = 2 \cdot 1.$$

(потому что производная от константы должна быть нулевой). Это означает, что если мы хотим сохранить школьные приемы вычисления производной, мы должны помимо (1) иметь другое определение производной, предназначенное специально для вычислений.

Естественный способ приписать точный смысл тождествам (2) — относиться к операции взятия производной в них как к *формальной операции* $\tau \mapsto \tau'$ *на термах* подходящей теории 1 порядка[4].

[1] Ниже это упражнение приведено как пример 5.1.23.
[2] В тексте формула (5.1.4).
[3] Ниже формула (5.1.61).
[4] Понятие теории 1 порядка, или формальной теории, описывается ниже в тексте на с.79.

Если представлять Calculus как такую теорию, то его сигнатуру логично было бы считать состоящей их нульместных функциональных символов

$$0,\ 1,\ e,\ \pi$$

(e – число Непера, π – полупериод синуса), одноместных функциональных символов

$$\sin,\ \cos,\ \operatorname{arctg},\ \operatorname{arcctg},$$

двуместных функциональных символов

$$+,\ \cdot,$$

а также, для функций, определенных не везде, двуместных и трехместных предикатных символов, формализующих схемы высказываний

$$\operatorname{tg} x = y,\ \operatorname{ctg} x = y,\ \arcsin x = y,\ \arccos x = y,\ \frac{x}{y} = z,\ x^y = z,\ \log_x y = z.$$

В такой теории производную и интеграл можно было бы определять как операции на термах (или как подходящие преобразования формул[5]), а возникающие конструкции на множестве $\mathbb{R}$ вещественных чисел были бы просто моделью[6] Calculus, как теории 1 порядка. Поскольку решение школьных уравнений и неравенств также представляет собой систему операций над выражениями, построенными из тех же символов, эту часть математики также можно было бы считать компонентой Calculus.

Но Calculus как теория 1 порядка к настоящему времени не разработан[7]. Со времен Коши и Вейерштрасса, когда, как считается, в Анализе был наведен порядок, эта тема так и осталась белым пятном, и как следствие, традиционно объясняется путано, ссылок на специальные дисциплины не имеет, а времени на обучение требует пропорционально своей непроходимости: последние несколько лет школы и первые годы университета.

Делить или объединять? Примеры предыдущего пункта призваны проиллюстрировать тезис, что университетской математике есть куда развиваться. Следующий вопрос можно поставить так: *нужно ли ей продолжать дробиться на все более мелкие дисциплины, или наоборот искать возможности для их объединения?*

Автору очевидно, что приоритетом здесь должно быть второе. Понятно, что учебный процесс ограничен во времени, и если пытаться расположить дисциплины в виде дерева с идеей исключить ссылки на непройденные темы, это удлиннит обучение так, что в традиционные (для большинства учебных заведений) сроки, вполне вероятно, уложиться будет невозможно. Но, во-первых, эта проблема не кажется непреодолимой: при подходящей перестройке курсов можно добиться хотя бы, чтобы линейные участки этого дерева излагались параллельно, и если курс A содержит ссылку на курс B, но ко времени экзамена по A курс B будет пройден, это выглядит приемлемым компромиссом.

А, во-вторых, на уровне учебников эта проблема ведь исчезает. Ничто не мешает человеку открывать одну и ту же книгу в разных местах, когда это ему понадобится. При этом общая картина будет у него всегда перед глазами.

Помимо возможности поглядеть на науку сверху, плюс такой интеграции состоит в том, что она структурирует знание, *давая возможность человеку оценить важность тех или иных тем.* Следя за ссылками читатель может понять, что из предыдущего материала важно для данной темы, а без чего можно обойтись. При дроблении эта опция исчезает.

С чего начать и где остановиться? Автор счел разумным (и возможным) изложить основные факты математического анализа с элиминацией темных мест и пробелов, причем не только пробелов без ссылок, но и со ссылками. Последнее условие в этой программе понимается максимально широко: изложение ведется прямо от оснований математики, что позволяет сделать его полностью независимым от других источников (в частности, избавиться в теоретическом материале от традиционных ссылок на так называемую "базу школьных знаний", которыми всегда злоупотребляют в учебниках по университетской математике).

Для перечисленных выше трех трудных мест в тексте предложены следующие решения.

[5] См. формулы на с.330 и 402.

[6] Понятие модели теории 1 порядка определяется на с.102.

[7] Очевидно, из-за проблемы с определением равенства термов, о которой мы говорим ниже на с.301.

1. Элементарные функции: здесь проблема решается введением двух избыточных аксиом (подробности на с.277). В нашем учебнике эта тема описывается в главе 4, после темы “Пределы”. Такое расположение материала связано с тем, что при доказательстве свойств элементарных функций, в частности, тождеств, приходится активно использовать классические теоремы о непрерывных функциях (а именно, теорему Коши о промежуточном значении 3.3.6 и теорему об обратной функции 3.3.12), которые, как следствие, к этому моменту желательно иметь в своем распоряжении. Однако если формальная сторона дела не стоит в приоритете, ничто не мешает на занятиях описать аксиомы степеней и тригонометрии сразу в теме “числовые функции”, перечислив главные следствия из них без доказательств (или пообещав доказать это позже). Тогда пользоваться элементарными функциями можно будет с первых занятий.

2. Кривые и поверхности: здесь предложенное решение состоит в том, чтобы ввести класс гладких отображений на измеримых по Жордану компактах, которые характеризуются инъективностью почти всюду и невырожденностью почти всюду дифференциала (в тексте такие отображения называются полурегулярными, см. определение на с.953). Это позволяет доказать теорему о существовании (подходящим образом понимаемой) функции перехода от одной параметризации к другой (теорема 15.3.15), что в свою очередь дает решение упомянутой выше проблемы независимости нужных конструкций от параметризации.

3. Calculus: здесь автор должен признаться, что не смог (пока) найти идею, позволяющую элегантно обойти упомянутые выше трудности. Последовательно разрабатывать Calculus, как теорию 1 порядка, — задача, по-видимому, слишком громоздкая (см. подробности на с.300), а можно ли (с соблюдением строгости) описать эту теорию проще — автору неизвестно. В тексте Дифференциальное исчисление описывается как язык 1 порядка с набором функциональных символов, включающим обозначения всех элементарных функций (в том числе функций, определенных не везде на $\mathbb{R}$)[8] с дополнительной операцией взятия частной производной над термами. Обсуждение этой темы мы начинаем со страницы 300, а детали решения приводим на страницах 330 (для функций одной переменной) и на с.821 (для функций нескольких переменных). Интегральное исчисление, наоборот, описывается как конструкция внутри Анализа на с.402, без выхода в теорию формальных языков, потому что неопределенный интеграл удобнее считать операцией на классах функций со значениями в классах функций (а не на классе термов со значениями в классе термов, где он будет не везде определен).

В соответствии с общей философской установкой, в текст включены также темы, которые по описанной выше классификации можно считать пробелами со ссылками. Вот их список в сторону удлинения цепочки связей с матанализом:

4. Линейная алгебра. Многомерный вещественный анализ базируется на линейной алгебре[9], поэтому если задаваться целью ликвидировать не только пробелы без ссылок, но и со ссылками, то соответствующий материал из линейной алгебры в такой текст нужно включать. Мы это делаем в главе 12.

5. Комбинаторика. Линейная алгебра в свою очередь использует результаты комбинаторики[10]. Этот материал мы излагаем в начале главы 12.

6. Теория вещественного числа. Вещественный анализ и линейная алгебра, строятся как дефинициальные расширения теории вещественных чисел. Мы излагаем эту теорию в главе 2.

7. Теория множеств и логика. Теория вещественных чисел в свою очередь представляет собой дефинициальное расширение аксиоматической теории множеств. Мы описываем ее в главе 0, а в главе 1 мы приводим материал из математической логики, необходимый для понимания логической структуры всего курса (в частности, определение самого дефинициального расширения дается на с.90).

О логике нужно сказать несколько слов отдельно, поскольку ее можно считать одновременно и пробелом со ссылками, и темным местом, и, при определенном уровне требовательности, пробелом без ссылок. Речь идет вот о чем. После знаменитого кризиса начала 20 века эта наука пришла к состоянию, когда ее описание удобнее всего представлять как некую игру с символами. И, хотя в этом

[8]То есть, помимо алгебраических операций, включающих деление и возведение в степень, в этой сигнатуре функциональными символами считаются также

$$\sin,\ \cos,\ \mathrm{tg},\ \mathrm{ctg},\ \arcsin,\ \arccos,\ \mathrm{arctg},\ \mathrm{arcctg}, \log .$$

[9]В качестве иллюстрации можно привести, например, теорему о локальном экстремуме 14.1.28, или теоремы Лагранжа 14.3.11 и 14.3.12, или теорему об искажении меры при линейном преобразовании 15.1.21, и другие, где содержатся ссылки на действия с матрицами и полилинейными формами на конечномерном вещественном векторном пространстве.

[10]Например, в конструкции определителя.

и заключался главный итог исследований первой половины 20 века в этой области, — *превращение всей математики в игру с символами*, — правила этой игры и главные ее результаты объясняются на сегодняшний день очень плохо. Неспециалиста эти объяснения поражают своей сложностью и требуют от него усилий, несоразмерных с целями ознакомления с предметом.

Автору очевидно, что причиной здесь является утвердившийся среди логиков после работ Гёделя язык платоновских идей, проявляющийся в традиции использовать понятия множества и функции вне их аксиоматического описания, а понятия истинности и ложности вне их связи с выводимостью из аксиом теории множеств. На самом элементарном уровне понимания предмета это видно в том, что *в современной логике понятия множества и функции используются до того, как теория множеств построена как формальная теория*. Это приводит к странной неоднозначности в понимании этих терминов: с одной стороны, они используются как термины формальной теории, но одновременно (и очень часто, почти всегда, невозможно уловить разницу) как просто слова в повседневной речи, значение которых не требует уточнений (но тем не менее выводы, к которым приводит их употребление, остаются на удивление глубокими и неочевидными[11]).

Человек с улицы (даже математик, но не специалист в этой области) понять эту игру намеков, конечно, не в состоянии, и остается удивляться, как получилось, что до сих пор никто не пытался навести в этой области "линейный порядок" (принятый во всей остальной математике). То есть такое положение дел, при котором ссылки на конструкции, не описанные формально на момент использования, считаются недопустимыми.

В первой части нашего учебника, посвященной основаниям математики (главы 0 и 1) мы постараемся исправить это недоразумение и даем "линейное" изложение главных результатов этой науки. Неспециалисту это прояснит картину, а специалисту позволит взглянуть на нее по-новому (что, как мы уже отмечали в аннотации, полезно). Автор, помимо прочего, считает, что такой "линейный" способ объяснять этот материал представляет собой естественное развитие гильбертовской философии формализма (которой только обстоятельства помешали превратиться в описываемую здесь систему).

С теорией множеств и логикой мы доходим до основ, дальше которых уже ничего нет, и у нас получается курс университетской математики с нуля.

Объем охвата тем 4-7 в этом списке диктуется потребностями математического анализа, но иногда, когда затрагиваемый круг вопросов важен для математики в целом, как, например, в случае с рангом множества (см. определение на с.74), мы отступаем от этого правила и даем немного больше информации.

Структура учебника. В тексте доказываются все формулируемые утверждения, за исключением

1) совсем элементарных, доказательство которых проводится по аналогии с соседними утверждениями (и которые поэтому иногда оформляются в виде упражнений, как, например, свойства чисел в упражнении 2.1.12),
2) нескольких фактов общематематического значения (таких, как теорема Гёделя о неполноте[12] или парадокс Банаха-Тарского[13]), приводимых в тексте только для прояснения мотивировок, и никак не проявляющих себя в логической структуре курса.

По способу подачи материал делится на основной, излагаемый текстом в одну колонку, и иллюстративный, представленный двумя колонками. Разница между тем и другим состоит в том, что основной материал задуман, как логически последовательное изложение основных утверждений теории, в котором, в частности, не допускаются ссылки на утверждения, не доказанные на момент цитирования.

В иллюстративном материале, наоборот, приоритетом считается обеспечение читателя достаточным количеством примеров и упражнений для скорейшего привыкания к используемым в основном тексте понятиям и приемам, и, как следствие, уровень логической строгости здесь снижается. Однако, не намного, а только до той планки, на которой некоторые понятия позволяется упоминать существенно раньше, чем они будут формально определены (например, понятие длины кривой впервые упоминается на с.468, хотя определяется только на с.992), а некоторым утверждениям позволяется быть сформулированными задолго до того, как они будут аккуратно доказаны в тексте (таковы,

[11] Такова, например, теорема Гёделя о полноте, формулируемая ниже в виде двух теорем 1.1.22 и 1.1.23 (отдельно для теорий с конечной и бесконечной системой аксиом).
[12] Теорема 1.1.17 ниже.
[13] Теорема 15.1.5.

например, формулы для простейших геометрических величин в главе 8 – площади правильной области на плоскости, объема тела вращения и т.п. – которые мы по традиции приводим раньше, чем эти величины формально будут определены, и как следствие, доказательство этих формул переносится на несколько глав вперед). При таком подходе, в частности, все, что связано с *Исчислением*, включая определения элементарных (/стандартных) функций, описание формальных операций над ними и доказательство связи этих операций с дифференцированием и интегрированием, попадает в двухколоночный текст, поскольку идеологически превращается в иллюстративный материал.

При работе над текстом автор использовал многие идеи доказательств, а также некоторые задачи и упражнения из учебников и пособий, выходивших в разные годы в России. Эти руководства приведены в списке литературы на странице viii.

Остающиеся пробелы. В предлагаемом варианте текста все еще остаются один пробел без ссылок и одно темное место:

1. Темным местом по-прежнему можно считать Calculus, потому что, как уже говорил автор, найти идею, позволяющую изложить этот материал одновременно строго и просто, ему пока не удалось. Предлагаемое решение можно считать строгим, но простым его не назовешь.
2. Пробелом без ссылок является теорема Гёделя о полноте для рекурсивно аксиоматизированных теорий, описываемая в тексте в нетрадиционно формализованном виде и названная здесь теоремой о семантизации (теорема 1.1.23). Это утверждение приводится без доказательства (и без ссылок на доказательство) и даже сама его формулировка пока не точна.

Автор публикует в сети этот черновик в надежде на помощь коллег и будет признателен за любые ссылки и идеи для устранения этих недостатков.

Благодарности. Автор выражает благодарность коллегам за консультации: С. А. Абрамову, Л. Д. Беклемишеву, В. А. Душскому, Н. М. Зобину, С. В. Иванову, Д. П. Скворцову, С. В. Соловьеву, А. Г. Федотову, Д. С. Шамканову, Н. Швеберу. Автор благодарит также своих друзей за моральную поддержку в этом проекте: Ю. Л. Беккера и А. С. Касюкова.

Литература

[1] Г. И. Архипов, В. А. Садовничий, В. Н. Чубариков. Лекции по математическому анализу, М.: Высшая школа, 1999.

[2] Э. Б. Винберг. Курс алгебры. М.: Факториал-пресс, 2001.

[3] Г. Грауэрт, И. Либ, В. Фишер. Дифференциальное и интегральное исчисление. М.: Мир, 1971.

[4] В. А. Зорич. Математический анализ, М.: Фазис, Т.1-2, 1997.

[5] Дж. Л. Келли. Общая топология, М.: Наука, 1981.

[6] Л. Д. Кудрявцев. Курс математического анализа, М.: Высшая школа, Т.1-2, 1981, Т.3, 1989.

[7] Л. Д. Кудрявцев, А. Д. Кутасов, В. И. Чехлов, М. И. Шабунин. Сборник задач по математическому анализу, М.: Физматлит, Т.1-3, 2003.

[8] У. Рудин. Основы математического анализа. М.: Мир, 1976.

[9] М. Спивак. Математический анализ на многообразиях. М.: Мир, 1968.

[10] Г. Такеути. Теория доказательств. М.: Мир, 1978.

[11] Е. Титчмарш. Теория функций. М.: Наука, 1980.

[12] Х. Уитни. Геометрическая теория интегрирования. М.: ИЛ, 1960.

[13] Дж. Шенфилд. Математическая логика. М.: Наука, 1975.

Часть I

ОСНОВАНИЯ МАТЕМАТИКИ

Глава 0

ТЕОРИЯ МНОЖЕСТВ

Вся современная математика (за исключением некоторых разделов логики) строится на теории множеств (понимаемой ныне как система аксиоматических теорий, различающихся некоторыми деталями). Поэтому если задаваться целью излагать какую-то часть математики (в нашем случае, Анализ) без пробелов, начинать нужно все-таки с теории множеств.

В этой главе мы опишем одну из аксиоматических теорий множеств, теорию Морса-Келли, и при этом постараемся сделать это описание максимально формализованным, чтобы дать читателю представление об *игре с символами*, о которой мы говорили в Предисловии на c.v.

§ 1 Наивная теория множеств

Изучение теории множеств удобно начать с ее наивной версии, которая, будучи сформулирована на современном языке, экономно вводит в курс дела и иллюстрирует проблемы. Эту теорию мы будем обозначать буквосочетанием NST (“naive set theory”).

(a) Формулы

Элементарные высказывания. Взгляд теории множеств (не только наивной, но вообще любой) на мир заключается в том, что его объекты находятся друг с другом в отношении принадлежности: если мы рассматриваем произвольные два объекта A и B, то должно быть истинным или ложным (или независимым от используемой нами системы аксиом) утверждение, звучащее так:

«A принадлежит B»

или, в эквивалентных формулировках,

«A является элементом B»

«B содержит A в качестве элемента».

Коротко это записывают формулой

$$A \in B.$$

Помимо этого объекты могут быть одинаковыми или различаться. Если A и B совпадают, то это записывают формулой

$$A = B.$$

Естественно, кроме A и B в этих высказываниях[1] допускается использование других букв из заранее выбранного *алфавита*. Мы будем считать таким алфавитом латинский с прописными символами[2]:

$$A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L, M, N,\\ O, P, Q, R, S, T, U, V, W, X, Y, Z.$$

Эти символы называются *переменными.*

- Высказывания вида[3] $A \in B$ и $A = B$ (где вместо A и B могут стоять любые другие переменные) называются *атомарными формулами теории множеств.*

[1] Точнее, в схемах высказываний, потому что если формула содержит свободные переменные, то это не одно, семейство высказываний.

[2] Логики обычно делают алфавит бесконечным, объявляя допустимым применение индексов или штриха, но на этом этапе нам будет достаточно конечного набора букв.

[3] См. подстрочное примечание 1.

Логические операции и кванторы. Из атомарных формул (“простейших высказываний” этого языка) строятся более сложные с помощью логических операций и кванторов, список которых удобно привести в следующей таблице:

символ	*его смысл*	*название*
$\neg$	«не»	отрицание
$\&$	«и»	конъюнкция
$\vee$	«или»	дизъюнкция
$\Rightarrow$	«влечет за собой»	импликация
$\Leftrightarrow$	«эквивалентно»	эквивалентность
$\forall$	«для любого»	квантор всеобщности
$\exists$	«существует»	квантор существования

У этих значков имеется формальное описание с точными правилами употребления (и мы приводим его ниже на с.10), однако на этом этапе удобно о таких вещах не задумываться, и в логических рассуждениях руководствоваться интуицией, воспринимая эти символы просто как систему сокращений в обыденной речи.

Высказывания (формулы). Логические операции и кванторы позволяют строить из атомарных формул (“простейших высказываний” об объектах теории) более сложные, называемые просто *формулами*. Для их описания используется следующее индуктивное определение (в котором греческие буквы обозначают переменные или высказывания).

- *Формулой* (или *высказыванием*) *теории множеств* объявляется произвольная строка символов, состоящая из букв латинского алфавита, символов $=$ и $\in$, логических символов и скобок, построенная по следующим правилам:
  - если X и Y – переменные, то $X = Y$ является формулой,
  - если X и Y – переменные, то $X \in Y$ является формулой,
  - если строка φ – формула, то строка $\neg\ (\varphi)$ – тоже формула;
  - если строки φ и ψ – формулы, то следующие строки – тоже формулы:
  $$(\varphi)\ \&\ (\psi), \qquad (\varphi)\ \vee\ (\psi), \qquad (\varphi) \Rightarrow (\psi), \qquad (\varphi) \Leftrightarrow (\psi),$$
  - если φ – формула, а X – переменная, то следующие строки – тоже формулы:
  $$\forall X\ (\varphi), \qquad \exists X\ (\varphi). \tag{0.1.1}$$

- Формула φ в формулах (0.1.1) называется *областью действия квантора* ($\forall$ или $\exists$, в зависимости от символа перед переменной α).

Приведем некотороые примеры.

◇ **0.1.1.** Следующие строки являются формулами теории множеств:

$$\neg(A = B)$$
$$(A \in B)\ \&\ (X = Y)$$
$$(A \in B)\ \vee\ (B \in A)$$
$$\forall X\ \exists Y\ X \in Y$$

◇ **0.1.2.** Следующие строки, наоборот, не являются формулами теории множеств:

$$(A = B)\neg$$
$$(A \in B)\ (X = Y)$$
$$(A \in B)\ \&\ \vee\ (B \in A)$$
$$\forall\ \exists X\ Y\ X \in Y$$

Сокращения.

- Отрицания отношений $=$ и $\in$ имеют специальные обозначения:
$$X \neq Y \tag{0.1.2}$$
– эквивалентная запись отношения
$$\neg(X = Y),$$
а
$$X \notin Y \tag{0.1.3}$$
– эквивалентная запись отношения
$$\neg(X \in Y).$$

Подстановка.

- Вхождение переменной X в формулу φ называется *связанным*, если в этом вхождении X стоит сразу после какого-то квантора, или X попадает в область действия какого-то квантора по X. В противном случае это вхождение называется *свободным*.
- Переменная X в формуле φ называется *связанной переменной* в φ, если все ее вхождения в φ связанны. В противном случае X называется *свободной переменной*.

◇ **0.1.3.** В формуле

$$X = Y\ \&\ \exists X\ X \in X$$

первое вхождение переменной X является свободным, а остальные – связанными.

◇ **0.1.4.** В следующих формулах X является свободной переменной:

$$X = X,$$

$$X \in X,$$

$$\exists Y \quad X \in Y.$$

А в следующих, наоборот, X – связанная переменная:

$$\forall X \quad X = X,$$

$$\exists X \quad X \in X,$$

$$\forall X\ \exists Y \quad X \in Y.$$

- *Подстановкой* переменной Y вместо переменной X в формулу φ называется формула, получающаяся из φ заменой X на Y во всех свободных вхождениях переменной X в формуле φ. Мы обозначаем такую формулу символом

$$\varphi\Big|_{X=Y} \qquad (0.1.4)$$

- Подстановка $\varphi\Big|_{X=Y}$ называется *корректной*, если при замене X на Y вторая переменная не попадает в область действия квантора по этой переменной.

◇ **0.1.5.** Подстановка Y вместо X в формулу

$$X = Y$$

дает формулу

$$Y = Y$$

◇ **0.1.6.** Подстановка Y вместо X в формулу

$$A = B$$

дает ту же формулу

$$A = B$$

◇ **0.1.7.** Подстановка Y вместо X в формулу

$$\exists Y\ X \in Y$$

дает формулу

$$\exists Y\ Y \in Y,$$

однако *такая подстановка некорректна*, потому что после замены Y попадает в область действия квантора $\exists$ по Y.

(b) Аксиомы, теоремы и антиномии.

Аксиомы наивной теории множеств. Если не предполагать ничего о свойствах отношений $=$ и $\in$, которым удовлетворяют или не удовлетворяют различные множества, то и сказать о множествах ничего внятного будет невозможно. Чтобы строить теорию, нужны исходные положения (называемые аксиомами), из которых затем будут выводиться более сложные утверждения (называемые теоремами). В наивной теории множеств аксиомами удобно считать следующие семь высказываний (точнее сказать, классификационный список высказываний).

Первые три аксиомы называют обычно *аксиомами равенства*:

NST-1 **Аксиома рефлексивности:**

$$X = X. \qquad (0.1.5)$$

Это надо понимать так, что равенство $X = X$ считается верным для всех множеств X.

NST-2 **Аксиома симметричности:**

$$X = Y \Rightarrow Y = X. \qquad (0.1.6)$$

На человеческом языке это означает, что равенство $X = Y$ формально не отличается от равенства $Y = X$.

NST-3 **Аксиома транзитивности:**

$$(X = Y \,\&\, Y = Z) \Rightarrow X = Z. \qquad (0.1.7)$$

То есть равенства $X = Y$ и $Y = Z$ влекут за собой равенство $X = Z$.

Следующая аксиома устанавливает связь между равенством и отношением принадлежности:

NST-4 **Аксиома инвариантности:**

$$(X = A \ \&\ Y = B \ \&\ X \in Y) \Rightarrow A \in B \qquad (0.1.8)$$

Иными словами, в отношение $X \in Y$ можно подставлять множества, равные X и Y, и при этом будут получаться следсвия.

Три последние аксиомы описывают собственно отношение принадлежности:

NST-5 **Аксиома невырожденности:**

$$\exists X\ \exists Y \quad X \in Y. \qquad (0.1.9)$$

То есть существуют множества X и Y такие, что $X \in Y$.

NST-6 **Аксиома объемности:**

$$X = Y \iff \forall A \quad (A \in X \iff A \in Y) \qquad (0.1.10)$$

То есть два множества X и Y совпадают, если и только если они «имеют одинаковый набор элементов».

NST-7 **Аксиома безусловного выделения:** пусть φ – формула теории множеств с единственной свободной переменной X, тогда

$$\exists Y \quad (X \in Y \iff \varphi) \qquad (0.1.11)$$

Иными словами, существует множество Y, элементами которого являются в точности те X, для которых выполняется φ.

Обозначение $\{X : \varphi\}$. Отметим сразу одно важное следствие из аксиом NST-1—NST-7: аксиома NST-7 позволяет определять объекты:

- Объект Y в формуле (0.1.11) будет единственным по аксиоме NST-7, поэтому ему можно приписать обозначение. Это обозначение выглядит так:
$$\{X : \varphi\}$$
и, если φ не содержит переменной T, характеризуется оно высказыванием
$$T \in \{X : \varphi\} \iff \varphi\Big|_{X=T}.$$

$\diamond$ **0.1.8. Пустое множество $\varnothing$.** В наивной теории множеств следующее равенство определяет так называемое *пустое множество*:

$$\varnothing = \{X : X \neq X\}. \qquad (0.1.12)$$

В соответствии с аксиомой выделения NST-7, расшифровывается эта запись так: элементами класса $\varnothing$ считаются те и только те множества X, которые не равны самому себе. Поскольку аксиоме NST-1 такое невозможно (высказывание $X = X$ считается верным всегда), множество $\varnothing$ вообще не содержит никаких элементов (отчего и называется пустым).

$\diamond$ **0.1.9. Множество $\mathtt{Set}$ всех множеств.** Точно так же из аксиомы выделения NST-7 следует, что равенство

$$\mathtt{Set} = \{X : X = X\}. \qquad (0.1.13)$$

тоже определяет некое множество. Его элементами считаются те и только те множества X, которые равны самому себе. Поскольку по аксиоме NST-1 это верно для любого X, получается, что множество $\mathtt{Set}$ должно содержать все на свете множества, то есть

$$X \in \mathtt{Set} \qquad (0.1.14)$$

верно для любого объекта X наивной теории множеств.

В том числе это верно и для $X = \mathtt{Set}$, то есть мы получаем, что истинно высказывание

$$\mathtt{Set} \in \mathtt{Set}$$

Здесь важно отметить, что это верно только в наивной теории множеств (и это порождает парадоксы, о которых мы поговорим ниже). В современных аксиоматических теориях множеств эта формула не будет верна.

Теоремы. Из аксиом NST-1—NST-7 средствами логики выводятся следствия, то есть теоремы этой науки.

Как мы уже говорили, наивная теория множеств противоречива, и поэтому ссылки на ее результаты содержательного смысла не имеют. Ее теоремы представляют интерес только как иллюстрации к идее выводимости утверждений из аксиом (абстрактной) теории. Мы приведем лишь несколько простейших теорем теории NST, причем оформлять мы их будем в виде примеров, чтобы у читателя не возникало искушения цитировать их в дальнейшем. Нас будет интересовать цепочка, ведущая к антиномии Рассела.

$\diamond$ **0.1.10.** В наивной теории множеств множества $\varnothing$ и $\mathtt{Set}$ не совпадают:

$$\varnothing \neq \mathtt{Set} \qquad (0.1.15)$$

Доказательство. По аксиоме объемности NST-6, чтобы доказать неравенство $\varnothing \neq \mathtt{Set}$, достаточно подобрать какое-нибудь множество X такое, что
$$X \notin \varnothing \ \&\ X \in \mathtt{Set}.$$
Для этого воспользуемся аксиомой невырожденности NST-5 и рассмотрим какие-нибудь два множества X и Y такие, что

$$X \in Y.$$

В силу (0.1.14), $X \in \mathtt{Set}$. С другой стороны, $X \notin \varnothing$ (потому что $Z \in \varnothing$ невозможно ни для какого Z). □

$\diamond$ **0.1.11.** В наивной теории множеств всякое множество X является элементом некоторого другого множества Y:

$$\forall X \ \exists Y \ X \in Y \qquad (0.1.16)$$

Доказательство. В качестве Y можно выбрать множество $\mathtt{Set}$. □

- Говорят, что *множество A содержится в множестве B*, или что *A является подмножеством множества B*, и изображают это записью
$$A \subseteq B$$
если всякий элемент T множества A является также элементом множества B:
$$\forall T \quad (T \in A \Rightarrow T \in B).$$

$\diamond$ **0.1.12.** В наивной теории множеств для всякого множества X существует множество Y такое, что подмножествами в X являются в точности те множества A, которые являются элементами множества Y:

$$A \subseteq X \iff A \in Y \qquad (0.1.17)$$

Доказательство. Множество Y определяется по аксиоме NST-7 формулой

$$Y = \Big\{ A : \ \forall T \quad (T \in A \ \Rightarrow \ T \in X) \Big\}.$$

□

Антиномия Рассела. В 1902 году английским математиком Бертраном Расселлом было сделано следующее наблюдение.

◇ **0.1.13.** *Антиномия Рассела.* По аксиоме безусловного выделения NST-7 в наивной теории множеств определено множество

$$R = \{X : \ X \notin X\}. \tag{0.1.18}$$

Оно называется *множеством Рассела* и состоит из всевозможных таких множеств X, для которых верно $X \notin X$:

$$X \in R \iff X \notin X \tag{0.1.19}$$

Зададимся вопросом, будет ли R элементом самого себя:

$$R \in R \quad \text{или} \quad R \notin R\,?$$

Антиномия Рассела состоит в том, что эти утверждения эквивалентны:

$$R \in R \quad \underset{\downarrow}{\overset{\substack{\text{вспоминаем}\\ \text{определение } R\\ (0.1.19)}}{\iff}} \quad \big(R \text{ – одно из тех } X, \text{ для которых выполняется } X \notin X\big) \quad \underset{\substack{\uparrow\\ \text{упрощаем}\\ \text{высказывание}}}{\iff} \quad R \notin R$$

То есть,

$$R \in R \quad \iff \quad R \notin R. \tag{0.1.20}$$

! **0.1.14.** Из этого примера следует, между прочим, что *в теории* NST *оба утверждения, $R \in R$ и $R \notin R$, выводимы.*

Действительно, покажем сначала, что $R \in R$. Это делается методом от противного. Предположим, что выполняется противное, то есть $R \notin R$. Тогда в силу (0.1.20) мы получаем $R \in R$. Вместе с нашим предположением, $R \notin R$, это дает два противоположных утверждения, $R \in R$ и $R \notin R$, то есть противоречие. Значит, наше исходное предположение, $R \notin R$, неверно. Поэтому выполняется $R \in R$.

Точно так же доказывается утверждение $R \notin R$.

Программа Гильберта. Из антиномии Рассела (и не только из нее, потому что почти одновременно с ней были обнаружены разные другие противоречия в тогдашней теории множеств) следует, ни много, ни мало, что *в* NST *вообще любое утверждение φ можно доказать (вместе с его отрицанием $\neg\varphi$)* — на этот счет имеется специальная теорема логики о противоречивых теориях, которую мы приводим ниже (теорема 1.1.9).

Понятно, это означало, что построенная к тому времени теория множеств, которую мы здесь описали как аксиоматическую теорию NST, не может выполнять роль фундамента всей математики, для которой она была создана. По этой причине сама эта теория и связанная с ней логика, определяющая общие принципы математических рассуждений — эти области тогда как раз стали оформляться в специальный раздел математики, называемый *основания математики* — были подвергнуты пересмотру. Немецким математиком Давидом Гильбертом в начале 20 века была предложена специальная программа, целью которой объявлялось превращение оснований математики в "универсальную" аксиоматическую теорию, где не только будут удалены существующие противоречия, но также будет доказано, что

1) никаких новых противоречий в дальнейшем возникнуть не может (это свойство теории называется *непротиворечивостью*), и
2) любое утверждение φ либо верно само, либо верно его отрицание $\neg\varphi$ (это называется *полнотой*).

Через некоторое время эта работа привела к определенным положительным результатам: подходящим уточнением определений и введением новых строгих правил для построения новых объектов удалось добиться устранения всех накопленных к тому времени в математике противоречий. Однако новым неприятным сюрпризом, ставшим одним из главных итогов всей этой деятельности, явилась *принципиальная невозможность доказать непротиворечивость любой такой теории* (точнее, любой теории, включающей арифметику, без которой, конечно, никакая математика невозможна). Параллельно обнаружилась *несовместимость непротиворечивости с полнотой.* Эти результаты принадлежат австрийскому математику Курту Гёделю, и мы о них поговорим на с.79 (см. теоремы 1.1.16 и 1.1.17).

§ 2 Логика предикатов для теории множеств

В 20 веке математики, следуя первоначальному плану Гильберта, построили несколько аксиоматических теорий множеств, в которых накопленные к тому времени парадоксы (в частности, парадокс Рассела) были устранены (однако, как мы уже говорили, без гарантий, что новые парадоксы не появятся в будущем). Из них самыми известными являются теории Цермело-Френкеля ZF, Неймана-Бернайса-Гёделя NBG и Морса-Келли MK. Для этих трех теорий, в силу их особенной популярности, удобно выбрать общее название, и мы будем поэтому называть их в дальнейшем *рабочими теориями множеств*. Самой мощной из них является теория Морса-Келли[4] MK, и по этой причине мы будем описывать ее.

(a) Язык теории множеств

Сигнатура теории множеств. В теории Морса-Келли MK, в отличие от наивной теории множеств NST, исходные объекты называются *классами*. Интуитивно под этим понимается более широкое образование, чем множество, а сами множества определяются затем как частные случаи классов (см. ниже определение на с.30). В остальном все детали языка повторяются: считается, что классы, помимо того, что могут совпадать,

$$A = B,$$

еще могут находиться в отношении принадлежности

$$A \in B$$

– и в этом случае, как и в NST, говорят, что “A принадлежит B”, или что “A является *элементом* B”, или что “B содержит A в качестве элемента”.

Формулы теории множеств. Формулы теории MK определяются так же как в теории NST, с той разницей, что алфавит удобно расширить, включив строчные буквы латинского алфавита и еще возможность добавлять к букве штрих. То есть, повторим с уточнениями, на интуитивном уровне, формула в MK – это утверждение или, другой термин, высказывание о классах[5], которое можно получить инструментами теории, то есть с помощью отношения принадлежности $\in$, к которому еще добавляется отношение равенства $=$, а также с помощью (некоторых) логических операций и кванторов, список которых был приведен в таблице на с.3: $\neg$, $\&$, $\vee$, $\Rightarrow$, $\forall$, $\exists$ (символ $\Leftrightarrow$ будет определен позже формулой (0.2.24)). При этом, информация во втором столбце этой таблицы (о смысле этих символов) приводится пока только для интуитивного понимания существа дела, и для нашей ближайшей цели – описать понятие формулы в теории множеств – нам не нужна. Точный смысл этих значков мы объясним на с.10.

Определение понятию формулы выглядит так:

- *Переменной в теории множеств* мы будем считать произвольную букву латинского алфавита, прописную

  $$A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L, M, N, O, P, Q, R, S, T, U, V, W, X, Y, Z,$$

  или строчную,

  $$a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l, m, n, o, p, q, r, s, t, u, v, w, x, y, z,$$

  либо такую же букву с добавленным (возможно, несколько раз) штрихом, то есть если α – переменная, то α' – тоже переменная, например

  $$A', A'', ..., \qquad a', a'', ...$$

- *Формулой* (или *высказыванием*) *теории множеств* называется произвольная строка из переменных, символов $=$ и $\in$, логических символов и скобок, построенная по следующим правилам:

[4]Энтони Морс, Джон Келли. В компактном виде эта теория описана в Добавлении к учебнику Дж. Л. Келли [5]. Об используемом логическом аппарате можно составить представление по книге Г. Такеути [10].

[5]Правильнее сказать, “схема высказываний”, потому что, например, формула $X \in Y$ — это не высказывание о каких-то конкретных X и Y, а схема, включающая все высказывания вида “X принадлежит Y”.

1) если X и Y – переменные, то запись
$$X = Y \tag{0.2.21}$$
является формулой,
2) если X и Y – переменные, то запись
$$X \in Y \tag{0.2.22}$$
является формулой,
3) если строка φ – формула, то строка $\neg\ (\varphi)$ – тоже формула;
4) если строки φ и ψ – формулы, то следующие строки – тоже формулы:
$$(\varphi)\ \&\ (\psi), \qquad (\varphi)\ \vee\ (\psi), \qquad (\varphi) \Rightarrow (\psi),$$
Для обозначения формул мы будем использовать греческие буквы.
5) если φ – формула, а X – переменная, то следующие строки – тоже формулы:
$$\forall X\ (\varphi), \qquad \exists X\ (\varphi). \tag{0.2.23}$$

- Формула φ в формулах (0.2.23) называется *областью действия квантора* ($\forall$ или $\exists$, в зависимости от символа перед переменной α).
- Для любых переменных α и β формулы (0.2.21) и (0.2.22) называются *атомарными* (в теории множеств).
- К списку логических символов выше добавляется символ эквивалентности $\Leftrightarrow$, который понимается так: запись $(\varphi) \Leftrightarrow (\psi)$ является сокращением записи
$$((\varphi) \Rightarrow (\psi))\,\&\,((\psi) \Rightarrow (\varphi)). \tag{0.2.24}$$
- Вхождение переменной α в формулу φ называется *связанным*, если в этом вхождении α стоит сразу после какого-то квантора, или α попадает в область действия какого-то квантора по α. В противном случае это вхождение называется *свободным.*
- Переменная α в формуле φ называется *связанной переменной* в φ, если все ее вхождения в φ связанны. В противном случае α называется *свободной переменной.*
- Если формула φ не содержит свободные переменные, то φ называется *замкнутой.* Если же в φ имеются свободные переменные, то φ называется *открытой формулой.*
- Отрицания отношений $=$ и $\in$ имеют специальные обозначения:
$$X \neq Y \tag{0.2.25}$$
– эквивалентная запись отношения
$$\neg(X = Y),$$
а
$$X \notin Y \tag{0.2.26}$$
– эквивалентная запись отношения
$$\neg(X \in Y).$$
- *Подстановкой* переменной Y вместо переменной X в формулу φ называется формула, получающаяся из φ заменой X на Y во всех свободных вхождениях переменной X в формуле φ. Мы обозначаем такую формулу символом
$$\varphi\Big|_{X=Y} \tag{0.2.27}$$
- Подстановка $\varphi\Big|_{X=Y}$ называется *корректной*, если при замене X на Y вторая переменная не попадает в область действия какого-нибудь квантора по этой переменной.

◇◇ **0.2.1.** Следующие формулы замкнуты:

1) $\forall X\ (X = X)$;
2) $\forall X\ (X \neq X)$;
3) $\forall X\ (X \in X)$;
4) $\forall X\ (X \notin X)$;
5) $\forall Y\ (\exists X\ (X \in Y))$;
6) $\exists Y\ (\forall X\ (X \in Y))$.

(Здесь всюду X и Y – связанные переменные.)

◇◇ **0.2.2.** Примеры одноместных открытых формул:

1) $X = X$;
2) $X \neq X$;
3) $X \in X$;
4) $X \notin X$;
5) $\forall Y\ X \in Y$;
6) $\exists Y\ X \in Y$.

(Здесь всюду X – свободная переменная, а в последних двух примерах переменная Y – связанная.)

◇◇ **0.2.3.** Примеры двуместных открытых формул:

1) $X = Y$;
2) $X \neq Y$;
3) $X \in Y$;
4) $X \notin Y$;
5) $\exists Z\ \Big(X \in Z\ \&\ Y \in Z\Big)$;
6) $\exists Z\ \Big(X \in Z\ \&\ Z \in Y\Big)$.

(Здесь всюду X и Y – свободные переменные, а в последних двух примерах переменная Z – связанная.)

(b) Логика предикатов в аксиоматизации Генцена

Для формализации логических рассуждений, с помощью которых из одних формул (высказываний) выводятся другие, математики построили несколько аксиоматических систем логики, из которых наиболее известны так называемое *исчисление предикатов* CQC, построенное самим Давидом Гильбертом, и эквивалентное ему *исчисление секвенций* LK, предложенное другим немецким математиком, Герхардом Генценом. Эти две системы определяют доминирующую ныне в математике систему логики, называемую *логикой предикатов*. Из них двух более наглядна и удобна в вычислениях система Генцена[6], поэтому для описания логики предикатов мы выбираем ее.

Секвенции. Формулы в языке связаны между собой тем, что одни следуют из других. Если нас интересует вопрос, следует ли формула χ из формулы φ, то это принято записывать строчкой

$$\varphi \vdash \chi,$$

и называется такая запись *секвенцией*. В секвенции может быть несколько формул слева и справа от знака секвенции $\vdash$, тогда эти формулы должны быть разделены запятыми, и при этом *запятая слева от символа $\vdash$ интерпретируется как сокращения символа &, а справа – как сокращение символа $\vee$*.[7] То есть, например, секвенция

$$\varphi, \chi \vdash \psi, \omega$$

означает, что мы хотим понять, следует ли формула $\psi \vee \omega$ из формулы $\varphi \,\&\chi$, и поэтому она эквивалентна секвенции

$$\varphi \,\&\chi \vdash \psi \vee \omega. \tag{0.2.28}$$

Точно так же секвенция

$$\alpha, \beta, \gamma \vdash \delta, \eta, \theta, \iota$$

эквивалентна секвенции

$$\alpha \,\&\beta \,\&\gamma \vdash \delta \vee \eta \vee \theta \vee \iota.$$

В секвенции формулы могут повторяться, например, так:

$$\varphi, \varphi \vdash \chi,$$

или так

$$\varphi, \vdash \chi, \chi, \chi$$

[6]См. сравнение на с.25.

[7]Это правило, — “запятая слева от символа $\vdash$ интерпретируется как сокращения символа &, а справа – как сокращение символа $\vee$”, — формально не присутствует в правилах исчисления LK, оно выводится потом. В нашем тексте оно доказывается ниже в теоремах 0.2.1 и 0.2.2.

(повторение может быть сколь угодно длинным, но конечным, потому что формул в секвенции всегда конечный набор).

Заглавные греческие буквы, например, $\varGamma$, $\varDelta$, обозначают конечные наборы формул (возможно, повторяющиеся), связанные запятыми. В частности, запись

$$\varGamma \vdash \varDelta$$

означает секвенцию, в которой под $\varGamma$ и $\varDelta$ понимаются такие конечные наборы формул. Точно так же запись

$$A, B \vdash \varGamma, \varDelta$$

означает секвенцию, в которой A, B, $\varGamma$, $\varDelta$ тоже такие наобры формул, причем там, где кончается A и начинается B тоже стоит запятая (и то же самое для $\varGamma$ и $\varDelta$).

В секвенции

$$\varGamma \vdash \varDelta$$

набор формул $\varGamma$ (слева от знака $\vdash$) называется *антецедентом* (или *посылкой*), а набор формул $\varDelta$ (справа от знака $\vdash$) – *сукцедентом* (или *следствием*). Не всегда $\varDelta$ следует из $\varGamma$, но в тех случаях, когда удается построить так называемый вывод для секвенции $\varGamma \vdash \varDelta$ (что это такое мы объясним на с.12), говорят, что эта секвеция *выводима* (а $\varDelta$ действительно следует из $\varGamma$).

Наборы $\varGamma$ или $\varDelta$ могут быть пустыми: секвенция

$$\vdash \varDelta,$$

если она выводима, означает, что дизъюнкция формул $\varDelta$ следует из пустого набора формул (это можно понимать так, что $\varDelta$ следует из чего угодно)[8], а секвенция

$$\varGamma \vdash$$

– что из конъюнкции формул $\varGamma$ следует все что угодно[9]. Секвенция, пустая с обеих сторон

$$\vdash,$$

если она выводима, означает, что в этом языке из любого набора формул $\varGamma$ следует любой набор формул $\varDelta$ (это понимается так, что рассматриваемый язык противоречив).

Аксиома и правила вывода в LK. Следующий вариант исчисления LK модифицирован специально под язык теории множеств[10].

- *Аксиома исчисления секвенций* LK. Прежде всего, считается что для любой формулы φ выводима секвенция

  $$\text{LK-0:} \qquad \varphi \vdash \varphi. \qquad (0.2.29)$$

  Это соглашение называется аксиомой исчисления LK (и других аксиом в этом исчислении нет).

- *Правила вывода в исчислении секвенций* LK. Далее вводятся следующие правила, в которых запись

  $$\frac{\varGamma \vdash \varDelta}{\varPi \vdash \varLambda}$$

  означает, что если выводима верхняя секвенция, $\varGamma \vdash \varDelta$, то выводима и нижняя, $\varPi \vdash \varLambda$. Если же вверху стоят две секвенции, разделенные широким пробелом

  $$\frac{\varGamma \vdash \varDelta \quad \varPi \vdash \varLambda}{\varTheta \vdash \varOmega},$$

  то это означает, что из выводимости обеих верхних секвенций, $\varGamma \vdash \varDelta$ и $\varPi \vdash \varLambda$, следует выводимость нижней, $\varTheta \vdash \varOmega$.

  Эти правила делятся на две группы.

---

[8]См. ниже в качестве иллюстрации пример 0.2.26.

[9]См. ниже в качестве иллюстрации пример 0.2.27.

[10]Ниже на с.79 мы опишем язык формальной теории в общем виде. В нем, в отличие от языка теории множеств, допускается наличие функциональных символов (которых нет в языке теории множеств, из-за чего тот проще). Для языков с функциональными символами нижеприводимые правила вывода LK-12 и LK-15 усложняются тем, что вместо переменной y в них позволено подставлять произвольный терм (понятие терма будет определено на с.80).

a. Структурные правила:

— ослабление:

$$\text{LK-1:} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta}{\varphi, \Gamma \vdash \Delta} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \Delta, \varphi} \tag{0.2.30}$$

— сокращение:

$$\text{LK-2:} \qquad \frac{\varphi, \varphi, \Gamma \vdash \Delta}{\varphi, \Gamma \vdash \Delta} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, \varphi, \varphi}{\Gamma \vdash \Delta, \varphi} \tag{0.2.31}$$

— перестановка:

$$\text{LK-3:} \qquad \frac{\varphi, \chi, \psi, \Gamma \vdash \Delta}{\varphi, \psi, \chi, \Gamma \vdash \Delta} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, \varphi, \chi, \psi}{\Gamma \vdash \Delta, \chi, \varphi, \psi} \tag{0.2.32}$$

— сечение:

$$\text{LK-4:} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, \varphi \quad \varphi, \Pi \vdash \Lambda}{\Gamma, \Pi \vdash \Delta, \Lambda} \tag{0.2.33}$$

b. Логические правила:

— переброс отрицания:

$$\text{LK-5:} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, \varphi}{\neg\varphi, \Gamma \vdash \Delta} \qquad \frac{\varphi, \Gamma \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \Delta, \neg\varphi} \tag{0.2.34}$$

— конъюнкция в сукцеденте:

$$\text{LK-6:} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, \varphi \qquad \Gamma \vdash \Delta, \chi}{\Gamma \vdash \Delta, \varphi \& \chi} \tag{0.2.35}$$

— конъюнкция в антецеденте:

$$\text{LK-7:} \qquad \frac{\varphi, \Gamma \vdash \Delta}{\varphi \& \chi, \Gamma \vdash \Delta} \qquad \frac{\varphi, \Gamma \vdash \Delta}{\chi \& \varphi, \Gamma \vdash \Delta} \tag{0.2.36}$$

— дизъюнкция в антецеденте:

$$\text{LK-8:} \qquad \frac{\varphi, \Gamma \vdash \Delta \qquad \chi, \Gamma \vdash \Delta}{\varphi \vee \chi, \Gamma \vdash \Delta} \tag{0.2.37}$$

— дизъюнкция в сукцеденте:

$$\text{LK-9:} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, \varphi}{\Gamma \vdash \Delta, \varphi \vee \chi} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, \varphi}{\Gamma \vdash \Delta, \chi \vee \varphi} \tag{0.2.38}$$

— перенос с импликацией в антецедент:

$$\text{LK-10:} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, \varphi \quad \chi, \Pi \vdash \Lambda}{\varphi \Rightarrow \chi, \Gamma, \Pi \vdash \Delta, \Lambda} \tag{0.2.39}$$

— перенос с импликацией в сукцедент:

$$\text{LK-11:} \qquad \frac{\varphi, \Gamma \vdash \Delta, \chi}{\Gamma \vdash \Delta, \varphi \Rightarrow \chi} \tag{0.2.40}$$

— добавление квантора всеобщности в антецедент: если подстановка $\varphi\big|_{x=y}$ корректна[11], то

$$\text{LK-12:} \qquad \frac{\varphi\big|_{x=y}, \Gamma \vdash \Delta}{\forall x\, \varphi, \Gamma \vdash \Delta} \tag{0.2.41}$$

— добавление квантора всеобщности в сукцедент: если переменная y не входит (как свободная переменная) в нижнюю секвенцию (то есть в наборы формул Γ, Δ, $\forall x\, \varphi$), то

$$\text{LK-13:} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, \varphi\big|_{x=y}}{\Gamma \vdash \Delta, \forall x\, \varphi} \tag{0.2.42}$$

[11] Определение корректной подстановки дано на с. 8.

— добавление квантора существования в антецедент: если переменная y не входит (как свободная переменная) в нижнюю секвенцию (то есть в наборы формул $\exists x\,\varphi$, Γ, Δ), то

$$\mathsf{LK\text{-}14}: \qquad \frac{\varphi\big|_{x=y}, \Gamma \vdash \Delta}{\exists x\,\varphi, \Gamma \vdash \Delta} \tag{0.2.43}$$

— добавление квантора существования в сукцедент: если подстановка $\varphi\big|_{x=y}$ корректна[12], то

$$\mathsf{LK\text{-}15}: \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, \varphi\big|_{x=y}}{\Gamma \vdash \Delta, \exists x\,\varphi} \tag{0.2.44}$$

Отношение следования между формулами, дерево Генцена, и выводимость секвенций в LK. Теперь объясним, как это работает. Если нам даны какие-то две формулы φ и χ (то есть два высказывания в языке теории множеств), то правила вывода LK-0 — LK-15 дают нам (в некоторых случаях) формальную возможность понять, следует формула χ из формулы φ, или нет (это не всегда просто и даже не всегда можно выяснить, но довольно часто все-таки получается, и математика строится на этом). Для этого надо сначала оформить наше намерение в виде секвенции

$$\chi \vdash \psi, \tag{0.2.45}$$

а затем попытаться представить ее как результат применения какого-нибудь правила вывода из LK-1 — LK-15, оформив это в виде картинки

$$\frac{\Gamma' \vdash \Delta'}{\chi \vdash \psi}$$

или

$$\frac{\Gamma' \vdash \Delta' \qquad \Gamma'' \vdash \Delta''}{\chi \vdash \psi}$$

где Γ', Γ'' и Δ' и Δ'' – некие новые наборы формул. После этого нужно попробовать достроить эту картинку, проделав то же самое с новыми секвенциями $\Gamma' \vdash \Delta'$ и $\Gamma'' \vdash \Delta''$, и так далее. Картинка которая у нас будет всякий раз получаться, например, что-нибудь в таком духе,

$$\frac{\dfrac{\Gamma'''\vdash\Delta'''}{\Gamma'\vdash\Delta'} \qquad \dfrac{\Gamma''''\vdash\Delta''''}{\Gamma''\vdash\Delta''}}{\chi \vdash \psi} \tag{0.2.46}$$

— называется *деревом Генцена*. В нем секвенция в самом низу (здесь это $\chi \vdash \psi$) называется *корнем*, а секвенции на самом верху (в данном случае $\Gamma''' \vdash \Delta'''$ и $\Gamma'''' \vdash \Delta''''$) — *вершинами*.

Если (за конечное число шагов) нам удастся построить дерево Генцена, в котором на вершинах стоят аксиомы исчисления LK, то есть секвенции вида LK-0,

$$\varphi \vdash \varphi,$$

(где антецедент не отличается от сукцедента), то

— такое дерево Генцена называется *выводом секвенции* $\chi \vdash \psi$ в исчислении секвенций LK,

— сама секвенция $\chi \vdash \psi$ называется *выводимой* в исчислении секвенций LK, а

— про формулу ψ говорят, что она *следует из формулы* χ в исчислении секвенций LK.

Если же такой вывод построить невозможно (такое случается, см. ниже примеры на с.26), то секвенция $\varphi \vdash \chi$ называется *невыводимой*, а про формулу χ говорят, что она *не следует* из формулы φ в исчислении секвенций LK.

Понятие следования удобно распространить на секвенции общего вида, с произвольным числом формул в акцеденте и сукцеденте, потому что если так сделать, то деревья Генцена (0.2.46) можно будет рассматривать не полностью а фрагментами, сводя вопрос о выводимости корня дерева к вопросу о выводимости предыдущих секвенций. Соответствующее определение с очевидными изменениями повторяет то, что мы говорили про случай (0.2.45):

[12] См. определение на с. 8.

- Пусть
$$\Gamma \vdash \Delta, \qquad (0.2.47)$$
— произвольная секвенция (у которой антецедент и сукцедент состоят из произвольных наборов формул).
  1) *Деревом Генцена* для секвенции (0.2.47) называется произвольная запись вида
  $$\frac{\frac{\Gamma'''\vdash\Delta'''}{\Gamma'\vdash\Delta'} \qquad \frac{\Gamma''''\vdash\Delta''''}{\Gamma''\vdash\Delta''}}{\Gamma\vdash\Delta} \qquad (0.2.48)$$
  в которой в самом низу записана секвенция (0.2.47), и каждый переход снизу вверх представляет собой применение одного из правил LK-0 — LK-15,
  2) Если у какого-то дерева Генцена (0.2.48) на всех вершинах стоят аксиомы исчисления LK, то есть секвенции вида LK-0,
  $$\varphi \vdash \varphi,$$
  (где антецедент не отличается от сукцедента), то такое дерево Генцена называется *выводом для секвенции* (0.2.47) в исчислении секвенций LK,
  3) Секвенция (0.2.47) назвается *выводимой* в исчислении секвенций LK, если у нее существует вывод.
  4) Если секвенция $\Gamma \vdash \chi$ (с единственной формулой в сукцеденте) выводима, то говорят, что *формула χ следует из набора формул Γ* в исчислении секвенций LK.
  5) В частном случае если выводима секвенция $\varphi \vdash \chi$ (с одной формулой в антецеденте и одной в сукцеденте), то говорят, что *формула χ следует из формулы φ* в исчислении секвенций LK.

◇ **0.2.4.** Для секвенции
$$\alpha, \alpha \Rightarrow \beta \vdash \beta \qquad (0.2.49)$$
можно построить дерево Генцена
$$\frac{\dfrac{\alpha \vdash \alpha \qquad \beta \vdash \beta}{\alpha \Rightarrow \beta, \alpha \vdash \beta}\,(0.2.39)}{\alpha, \alpha \Rightarrow \beta \vdash \beta}\,(0.2.32)$$
На его вершинах стоят аксиомы, поэтому это дерево является выводом. Значит, секвенция (0.2.49) выводима, причем независимо от того, какие формулы языка теории множеств подставишь вместо α и β. Подставив, например, вместо α формулу $x \in x$, а вместо β формулу $\exists y\ x \in y$, мы получим выводимую секвенцию
$$x \in x, x \in x \Rightarrow (\exists y\ x \in y) \vdash \exists y\ x \in y.$$

◇ **0.2.5.** Для секвенции
$$\alpha, \beta \vdash \alpha \Rightarrow \beta \qquad (0.2.50)$$
дерево Генцена может быть таким:
$$\frac{\dfrac{\beta \vdash \beta}{\alpha, \alpha, \beta \vdash \beta}\,(0.2.40)}{\alpha, \beta \vdash \alpha \Rightarrow \beta}\,(0.2.40)$$
Здесь на вершинах стоят аксиомы, поэтому это дерево является выводом. То есть секвенция (0.2.76) выводима. Опять это верно для любых формул α и β, поэтому если, например, вместо α подставить формулу $x \in x$, а вместо β формулу $x \in y$, мы получим выводимую секвенцию
$$x \in x, x \in y \vdash x \in x \Rightarrow x \in y.$$

◇ **0.2.6.** Для секвенции
$$\vdash \neg\neg\alpha \Leftrightarrow \alpha \qquad (0.2.51)$$
вывод содержит две ветви:
$$\frac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\alpha \vdash \alpha}{\vdash \alpha, \neg\alpha}\,(0.2.34)}{\neg\neg\alpha \vdash \alpha}\,(0.2.34)}{\vdash \neg\neg\alpha \Rightarrow \alpha}\,(0.2.40) \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\alpha \vdash \alpha}{\neg\alpha, \alpha \vdash}\,(0.2.34)}{\alpha \vdash \neg\neg\alpha}\,(0.2.34)}{\vdash \alpha \Rightarrow \neg\neg\alpha}\,(0.2.40)}{\vdash (\neg\neg\alpha \Rightarrow \alpha) \,\&\, (\alpha \Rightarrow \neg\neg\alpha)}\,(0.2.35)}{\vdash \neg\neg\alpha \Leftrightarrow \alpha}\,(0.2.24)$$
Как и в предыдущих примерах, здесь под α понимается любая формула на языке теории множеств, например, можно подставить формулу $\exists x\ x \in x$, и мы получим выводимую секвенцию
$$\vdash \neg\neg(\exists x\ x \in x) \Leftrightarrow (\exists x\ x \in x).$$

Или, если подставить ее отрицание $\forall x\ x \notin x$, получится также выводимая секвенция

$$\vdash \neg\neg(\forall x\ x \notin x) \Leftrightarrow (\forall x\ x \notin x).$$

То же справедливо для всех остальных примеров ниже, и мы не будем дальше об этом напоминать.

$\diamond$ **0.2.7.** Для секвенции

$$\alpha \,\&\, \beta \vdash \beta \,\&\, \alpha \tag{0.2.52}$$

вывод может быть таким:

$$\dfrac{\dfrac{\beta \vdash \beta}{\alpha \,\&\, \beta \vdash \beta}{\scriptstyle(0.2.36)} \qquad \dfrac{\alpha \vdash \alpha}{\alpha \,\&\, \beta \vdash \alpha}{\scriptstyle(0.2.36)}}{\alpha \,\&\, \beta \vdash \beta \,\&\, \alpha}{\scriptstyle(0.2.35)}$$

$\diamond$ **0.2.8.** Для секвенции

$$\alpha \Rightarrow \beta \vdash \neg\beta \Rightarrow \neg\alpha \tag{0.2.53}$$

вывод может быть таким:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\alpha \vdash \alpha}{\neg\beta, \alpha \vdash \alpha}{\scriptstyle(0.2.30)}}{\alpha, \neg\beta \vdash \alpha}{\scriptstyle(0.2.32)}}{\neg\beta \vdash \alpha, \neg\alpha}{\scriptstyle(0.2.34)}}{\neg\beta \vdash \neg\alpha, \alpha}{\scriptstyle(0.2.32)} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\neg\beta \vdash \neg\beta}{\neg\beta \vdash \neg\beta, \neg\alpha}{\scriptstyle(0.2.30)}}{\neg\beta \vdash \neg\alpha, \neg\beta}{\scriptstyle(0.2.32)}}{\beta, \neg\beta \vdash \neg\alpha}{\scriptstyle(0.2.34)}}{\alpha \Rightarrow \beta, \neg\beta \vdash \neg\alpha}{\scriptstyle(0.2.39)}}{\neg\beta, \alpha \Rightarrow \beta \vdash \neg\alpha}{\scriptstyle(0.2.32)}}{\alpha \Rightarrow \beta \vdash \neg\beta \Rightarrow \neg\alpha}{\scriptstyle(0.2.40)}$$

$\diamond$ **0.2.9.** Для секвенции

$$\alpha \Rightarrow \beta \vdash (\beta \Rightarrow \gamma) \Rightarrow (\alpha \Rightarrow \gamma) \tag{0.2.54}$$

вывод такой:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\alpha \vdash \alpha}{\alpha \vdash \alpha, \gamma}{\scriptstyle(0.2.30)}}{\beta \Rightarrow \gamma, \alpha \vdash \alpha, \gamma}{\scriptstyle(0.2.30)}}{\beta \Rightarrow \gamma, \alpha \vdash \gamma, \alpha}{\scriptstyle(0.2.32)}}{\alpha, \beta \Rightarrow \gamma \vdash \gamma, \alpha}{\scriptstyle(0.2.32)} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\gamma, \beta \vdash \gamma, \beta \quad \dfrac{\gamma \vdash \gamma}{\gamma, \beta \vdash \gamma}{\scriptstyle(0.2.30)}}{\beta \Rightarrow \gamma, \beta \vdash \gamma}{\scriptstyle(0.2.39)}}{\beta, \beta \Rightarrow \gamma \vdash \gamma}{\scriptstyle(0.2.32)}}{\alpha, \beta, \beta \Rightarrow \gamma \vdash \gamma}{\scriptstyle(0.2.30)}}{\beta, \alpha, \beta \Rightarrow \gamma \vdash \gamma}{\scriptstyle(0.2.32)}}{\alpha \Rightarrow \beta, \alpha, \beta \Rightarrow \gamma \vdash \gamma}{\scriptstyle(0.2.39)}}{\alpha, \alpha \Rightarrow \beta, \beta \Rightarrow \gamma \vdash \gamma}{\scriptstyle(0.2.32)}}{\alpha, \beta \Rightarrow \gamma, \alpha \Rightarrow \beta \vdash \gamma}{\scriptstyle(0.2.32)}}{\beta \Rightarrow \gamma, \alpha \Rightarrow \beta \vdash \alpha \Rightarrow \gamma}{\scriptstyle(0.2.40)}}{\alpha \Rightarrow \beta \vdash (\beta \Rightarrow \gamma) \Rightarrow (\alpha \Rightarrow \gamma)}{\scriptstyle(0.2.40)}$$

$\diamond$ **0.2.10.** До сих пор секвенции, которые мы рассматривали, были выводимыми. Рассмотрим в качестве контрпримера следующую секвенцию:

$$\alpha \vdash \neg\alpha. \tag{0.2.55}$$

Самое простое дерево Генцена, которое для нее можно построить, выглядит так:

$$\dfrac{\alpha, \alpha \vdash}{\alpha \vdash \neg\alpha.}{\scriptstyle(0.2.34)}$$

В нем секвенция на вершине,

$$\alpha, \alpha \vdash$$

– не аксиома, поэтому это дерево не будет выводом.

Однако формально это не означает, что секвенция (0.2.55) невыводима в LK, потому что для нее можно строить разные другие деревья, например, такое:

$$\dfrac{\dfrac{\alpha, \alpha, \alpha \vdash}{\alpha, \alpha \vdash}{\scriptstyle(0.2.31)}}{\alpha \vdash \neg\alpha.}{\scriptstyle(0.2.34)}$$

Или такое:

$$\dfrac{\alpha \vdash \beta \quad \beta \vdash \neg\alpha}{\alpha \vdash \neg\alpha.}{\scriptstyle(0.2.33)}$$

(где вместо β можно вставлять разные другие формулы). Эти деревья также не будут выводами (потому что на их вершинах снова стоят не

[13] Атомарные формулы в теории множеств были определены на с.8.

аксиомы), но, поскольку таких деревьев можно получить бесконечно много, перебрать все варианты без специально разработанных для этого технических средств не получится.

Забегая вперед, скажем, что для атомарных формул[13] α секвенция (0.2.55) невыводима. Однако доказать это мы сможем только в конце этого параграфа (см. ниже пример 0.2.38).

◇ **0.2.11.** Для секвенции

$$\forall x\,\alpha \vdash \alpha \tag{0.2.56}$$

вывод такой:

$$\frac{\alpha \vdash \alpha}{\forall x\,\alpha \vdash \alpha}\,(0.2.41)$$

◇ **0.2.12.** Для секвенции, противоположной (0.2.56),

$$\alpha \vdash \forall x\,\alpha \tag{0.2.57}$$

вывод построить не удается. Для построения дерева Генцена выберем какую-нибудь переменную, отличную от x и не входящие в формулу α. Пусть такой переменной будет y. Тогда дерево Генцена может быть таким:

$$\frac{\alpha \vdash \alpha\big|_{x=y}}{\alpha \vdash \forall x\,\alpha}\,(0.2.42)$$

Как и в примере (0.2.10), здесь секвенция, стоящая на вершине

$$\alpha \vdash \alpha\big|_{x=y}$$

— не аксиома. Поэтому такое дерево не будет выводом для (0.2.57).

Но опять, как и в примере (0.2.10), из этого формально не следует, что секвенция (0.2.57) невыводима, потому что дерево вывода для нее можно строить по-разному, и таких вариантов имеется бесконечно много из-за неоднозначности при движении вверх в правилах сокращения (0.2.31) и сечения (0.2.33). Скажем, если применить правило сокращения LK-2 в самом начале (и выбрать больше переменных, отличных от x и не входящих в α, например, пусть такими переменными будут y и z), то можно получить дерево

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\alpha \vdash \alpha\big|_{x=y},\ \alpha\big|_{x=z}}{\alpha \vdash \alpha\big|_{x=y},\ \forall x\,\alpha}\,(0.2.42)}{\alpha \vdash \forall x\,\alpha,\ \alpha\big|_{x=y}}\,(0.2.32)}{\alpha \vdash \forall x\,\alpha,\ \forall x\,\alpha}\,(0.2.42)}{\alpha \vdash \forall x\,\alpha}\,(0.2.31)$$

– и оно опять не будет выводом, потому что секвенция на вершине

$$\alpha \vdash \alpha\big|_{x=y},\ \alpha\big|_{x=z}$$

– не аксиома.

Как и в примере 0.2.10, мы здесь ограничимся заявлением, что для атомарных формул α со свободной переменной x секвенция (0.2.61) невыводима, но почему это так, мы покажем только в конце этого параграфа (в примере 0.2.39).

◇ **0.2.13.** Для секвенции

$$\alpha \vdash \exists x\,\alpha \tag{0.2.58}$$

вывод такой:

$$\frac{\alpha \vdash \alpha}{\alpha \vdash \exists x\,\alpha}\,(0.2.44)$$

◇ **0.2.14.** Для секвенции, противоположной (0.2.58),

$$\exists x\,\alpha \vdash \alpha, \tag{0.2.59}$$

вывод построить не удается (так же, как в примере 0.2.12). Мы докажем, что эта секвенция невыводима для атомарных формул α со свободной переменной x в примере 0.2.40.

◇ **0.2.15.** Для секвенции

$$\forall x\,\alpha \vdash \exists x\,\alpha \tag{0.2.60}$$

вывод такой:

$$\cfrac{\cfrac{\alpha \vdash \alpha}{\alpha \vdash \exists x\,\alpha}\,(0.2.44)}{\forall x\,\alpha \vdash \exists x\,\alpha}\,(0.2.41)$$

◇ **0.2.16.** Для противоположной секвенции

$$\exists x\,\alpha \vdash \forall x\,\alpha \tag{0.2.61}$$

вывод построить не удается. Для построения дерева Генцена выберем какие-нибудь две переменные, отличные от x и не входящие в формулу α. Пусть такими переменными будут a и b. Тогда дерево Генцена может быть таким:

$$\cfrac{\cfrac{\alpha\big|_{x=a} \vdash \alpha\big|_{x=b}}{\alpha\big|_{x=a} \vdash \forall x\,\alpha}\,(0.2.42)}{\exists x\,\alpha \vdash \forall x\,\alpha}\,(0.2.43)$$

Как и в примере (0.2.10), здесь секвенция, стоящая на вершине

$$\alpha\big|_{x=a} \vdash \alpha\big|_{x=b}$$

— не аксиома. Поэтому такое дерево не будет выводом для (0.2.61).

Но опять, как и в примере (0.2.10), из этого формально не следует, что секвенция (0.2.61) невыводима, потому что дерево вывода для нее можно строить по-разному, и таких вариантов имеется бесконечно много из-за неоднозначности при движении вверх в правилах сокращения (0.2.31) и сечения (0.2.33). Скажем, если применить правило сокращения LK-2 в самом начале (и выбрать больше переменных, отличных от x и не входящих в α, например, пусть такими переменными будут a, b, c), то можно получить дерево

$$\begin{array}{ll}
\alpha\big|_{x=a},\ \alpha\big|_{x=b} \vdash \alpha\big|_{x=c} & \\ \cline{1-1}
\alpha\big|_{x=a},\ \alpha\big|_{x=b} \vdash \forall x\,\alpha & (0.2.42) \\ \cline{1-1}
\exists x\,\alpha,\ \alpha\big|_{x=b} \vdash \forall x\,\alpha & (0.2.43) \\ \cline{1-1}
\alpha\big|_{x=b},\ \exists x\,\alpha \vdash \forall x\,\alpha & (0.2.32) \\ \cline{1-1}
\exists x\,\alpha,\ \exists x\,\alpha \vdash \forall x\,\alpha & (0.2.43) \\ \cline{1-1}
\exists x\,\alpha \vdash \forall x\,\alpha & (0.2.31)
\end{array}$$

– и оно опять не будет выводом, потому что секвенция на вершине

$$\alpha\big|_{x=a},\ \alpha\big|_{x=b} \vdash \alpha\big|_{x=c}$$

– не аксиома.

Как и в примере 0.2.10, мы здесь ограничимся заявлением, что для атомарных формул α со свободной переменной x секвенция (0.2.61) невыводима, но почему это так мы покажем только в конце этого параграфа (в примере 0.2.41).

◇ **0.2.17.** Чтобы доказать выводимость секвенции

$$\forall x\,\forall y\,\alpha \vdash \forall y\,\forall x\,\alpha \qquad (0.2.62)$$

нужно выбрать какие-нибудь две переменные, отличные от x и y, и не входящие в формулу α. Пусть это будут a и b. Тогда вывод может быть таким:

$$\begin{array}{ll}
\alpha|_{x=a,y=b} \vdash \alpha|_{x=a,y=b} & \\ \cline{1-1}
\forall y\,\alpha|_{x=a} \vdash \alpha|_{x=a,y=b} & (0.2.41) \\ \cline{1-1}
\forall x\,\forall y\,\alpha \vdash \alpha|_{x=a,y=b} & (0.2.41) \\ \cline{1-1}
\forall x\,\forall y\,\alpha \vdash \forall x\,\alpha|_{y=b} & (0.2.42) \\ \cline{1-1}
\forall x\,\forall y\,\alpha \vdash \forall y\,\forall x\,\alpha & (0.2.42)
\end{array}$$

◇ **0.2.18.** Точно так же чтобы доказать выводимость секвенции

$$\exists x\,\exists y\,\alpha \vdash \exists y\,\exists x\,\alpha, \qquad (0.2.63)$$

нужно выбрать какие-нибудь две переменные, отличные от x и y, и не входящие в формулу α. Пусть опять это будут a и b. Тогда вывод может быть таким:

$$\begin{array}{ll}
\alpha|_{x=a,y=b} \vdash \alpha|_{x=a,y=b} & \\ \cline{1-1}
\alpha|_{x=a,y=b} \vdash \exists x\,\alpha|_{y=b} & (0.2.44) \\ \cline{1-1}
\alpha|_{x=a,y=b} \vdash \exists y\,\exists x\,\alpha & (0.2.44) \\ \cline{1-1}
\exists y\,\alpha|_{x=a} \vdash \exists y\,\exists x\,\alpha & (0.2.43) \\ \cline{1-1}
\exists x\,\exists y\,\alpha \vdash \exists y\,\exists x\,\alpha & (0.2.43)
\end{array}$$

◇ **0.2.19.** Тот же прием позволяет доказать выводимость секвенции

$$\exists x\,\forall y\,\alpha \vdash \forall y\,\exists x\,\alpha, \qquad (0.2.64)$$

Пусть опять a и b – переменные, отличные от x и y, и не входящие в формулу α. Тогда вывод может быть таким:

$$\begin{array}{ll}
\alpha|_{x=a,y=b} \vdash \alpha|_{x=a,y=b} & \\ \cline{1-1}
\alpha|_{x=a,y=b} \vdash \exists x\,\alpha|_{y=b} & (0.2.44) \\ \cline{1-1}
\forall y\,\alpha|_{x=a} \vdash \exists x\,\alpha|_{y=b} & (0.2.41) \\ \cline{1-1}
\forall y\,\alpha|_{x=a} \vdash \forall y\,\exists x\,\alpha & (0.2.42) \\ \cline{1-1}
\exists x\,\forall y\,\alpha \vdash \forall y\,\exists x\,\alpha & (0.2.43)
\end{array}$$

◇ **0.2.20.** Для секвенции, противоположной (0.2.64),

$$\forall x\,\exists y\,\alpha \vdash \exists y\,\forall x\,\alpha, \qquad (0.2.65)$$

вывод построить не получается. В качестве примера дерево Генцена можно построить так. Выберем четыре переменных, отличных от x и y, и не входящих в формулу α. Пусть это будут a, b, c, d. Тогда дерево Генцена может быть таким:

$$\begin{array}{ll}
\alpha|_{x=a,y=c} \vdash \alpha|_{x=d,y=b} & \\ \cline{1-1}
\alpha|_{x=a,y=c} \vdash \forall x\,\alpha|_{y=b} & (0.2.42) \\ \cline{1-1}
\exists y\,\alpha|_{x=a} \vdash \forall x\,\alpha|_{y=b} & (0.2.43) \\ \cline{1-1}
\exists y\,\alpha|_{x=a} \vdash \exists y\,\forall x\,\alpha & (0.2.44) \\ \cline{1-1}
\forall x\,\exists y\,\alpha \vdash \exists y\,\forall x\,\alpha & (0.2.41)
\end{array}$$

Снова, как и в примерах 0.2.10 и 0.2.61, мы скажем здесь, что секвенция (0.2.65) невыводима, пообещав доказать это потом.

◇ **0.2.21.** Для секвенции

$$\forall x\,\forall y\,\alpha \vdash \forall y\,\forall x\,\alpha \qquad (0.2.66)$$

вывод такой:

$$\begin{array}{ll}
\alpha \vdash \alpha & \\ \cline{1-1}
\alpha \vdash \exists x\,\alpha & (0.2.44) \\ \cline{1-1}
\forall x\,\alpha \vdash \exists x\,\alpha & (0.2.41)
\end{array}$$

◇ **0.2.22.** Для секвенции

$$(\forall x\,\alpha)\ \&\ (\forall x\,\beta)\vdash\forall x\,(\alpha\ \&\ \beta) \qquad (0.2.67)$$

вывод такой:

$$\dfrac{\dfrac{\alpha\ \&\ \beta\vdash\alpha\ \&\ \beta}{(\forall x\,\alpha)\ \&\ (\forall x\,\beta)\vdash\alpha\ \&\ \beta}\,{\scriptstyle(0.2.41)}}{(\forall x\,\alpha)\ \&\ (\forall x\,\beta)\vdash\forall x\,(\alpha\ \&\ \beta)}\,{\scriptstyle(0.2.42)}$$

И точно так же выводится секвенция

$$\forall x\,(\alpha\ \&\ \beta)\vdash(\forall x\,\alpha)\ \&\ (\forall x\,\beta) \qquad (0.2.68)$$

▷▷ **0.2.23.** Докажите выводимость секвенций в LK:

$$\neg\exists x\,\alpha\vdash\neg\forall x\,\alpha$$
$$\forall x\,(\alpha\Rightarrow\neg\beta)\vdash\neg(\exists x\,\alpha\,\&\,\forall x\,\beta)$$
$$\forall x\,(\alpha\Rightarrow\neg\beta)\vdash\neg(\exists x\,\alpha\,\&\,\exists x\,\beta)$$

Отметим следующее условное утверждение.

◇ **0.2.24.** Если выводимы секвенции

$$\alpha\vdash\alpha' \qquad \beta\vdash\beta',$$

то выводимы и секвенции

$$\alpha\ \&\ \beta\vdash\alpha'\ \&\ \beta' \qquad \alpha\vee\beta\vdash\alpha'\vee\beta'.$$

Доказательство. Первое утверждение становится очевидным, если поглядеть на дерево

$$\dfrac{\dfrac{\alpha\vdash\alpha'}{\alpha\ \&\ \beta\vdash\alpha'}\,{\scriptstyle(0.2.36)} \qquad \dfrac{\beta\vdash\beta'}{\alpha\ \&\ \beta\vdash\beta'}\,{\scriptstyle(0.2.36)}}{\alpha\ \&\ \beta\vdash\alpha'\ \&\ \beta'}\,{\scriptstyle(0.2.35)}$$

Если секвенции на вершинах выводимы, то к ним можно пририсовать сверху их выводы, и мы получим, что все дерево является выводом для секвенции в корне. Для второй секвенции нужно рассмотреть дерево

$$\dfrac{\dfrac{\alpha\vdash\alpha'}{\alpha\vdash\alpha'\vee\beta'}\,{\scriptstyle(0.2.38)} \qquad \dfrac{\beta\vdash\beta'}{\beta\vdash\alpha'\vee\beta'}\,{\scriptstyle(0.2.38)}}{\alpha\vee\beta\vdash\alpha'\vee\beta'}\,{\scriptstyle(0.2.37)}$$

□

Почему антецедент можно понимать как конъюнкцию, а сукцедент как дизъюнкцию входящих в них формул. Когда на странице 9 мы вводили понятие секвенции, мы сказали там, между прочим, что ее антецедент нужно понимать как конъюнкцию входящих в него формул, а сукцедент — как дизъюнкцию. Однако из перечисленных потом формальных правил LK-0—LK-15 пока не видно, почему это должно быть так. Мы это объясним в приводимых ниже теоремах 0.2.1 и 0.2.2.

Нам будет полезен здесь следующий пример.

◇ **0.2.25.** Выводимы следующие секвенции:

$$\alpha,\beta\vdash\alpha\ \&\ \beta, \qquad (0.2.69)$$
$$\alpha\vee\beta\vdash\alpha,\beta. \qquad (0.2.70)$$

Доказательство. 1. Вывод для (0.2.69) выглядит так:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\alpha\vdash\alpha}{\beta,\alpha\vdash\alpha}\,{\scriptstyle(0.2.30)}}{\alpha,\beta\vdash\alpha}\,{\scriptstyle(0.2.32)} \qquad \dfrac{\beta\vdash\beta}{\alpha,\beta\vdash\alpha}\,{\scriptstyle(0.2.30)}}{\alpha,\beta\vdash\alpha\ \&\ \beta}\,{\scriptstyle(0.2.35)}$$

2. А для (0.2.70) вывод такой:

$$\dfrac{\dfrac{\alpha\vdash\alpha}{\alpha\vdash\alpha,\beta}\,{\scriptstyle(0.2.30)} \qquad \dfrac{\dfrac{\beta\vdash\beta}{\beta\vdash\beta,\alpha}\,{\scriptstyle(0.2.30)}}{\beta\vdash\alpha,\beta}\,{\scriptstyle(0.2.32)}}{\alpha\vee\beta\vdash\alpha,\beta}\,{\scriptstyle(0.2.37)}$$

□

Теперь теорема, объясняющая, почему антецедент можно понимать как конъюнкцию:

Теорема 0.2.1. *Пусть $\varGamma$ — конечный набор формул в* LK *и γ — конъюнкция этих формул. Тогда для формулы $\varDelta$ следующие условия эквивалентны:*

(i) *$\varDelta$ следует из $\varGamma$ в* LK*,*

(ii) *$\varDelta$ следует из γ в* LK*.*

Доказательство. Здесь достаточно рассмотреть случай, когда $\varGamma$ состоит из двух формул α и β, потому что общий случай рассматривается по аналогии.

1. Предположим, что $\varDelta$ следует из набора α,β, то есть выводима секвенция

$$\alpha,\beta\vdash\varDelta.$$

Тогда ее вывод можно подклеить сверху к дереву

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\alpha,\beta\vdash\varDelta}{\alpha\ \&\ \beta,\beta\vdash\varDelta}\,{\scriptstyle(0.2.36)}}{\beta,\alpha\ \&\ \beta\vdash\varDelta}\,{\scriptstyle(0.2.32)}}{\alpha\ \&\ \beta,\alpha\ \&\ \beta\vdash\varDelta}\,{\scriptstyle(0.2.36)}}{\alpha\ \&\ \beta\vdash\varDelta}\,{\scriptstyle(0.2.31)}$$

и мы получим вывод секвенции

$$\alpha \mathbin{\&} \beta \vdash \Delta$$

означающий, что Δ следует из формулы $\alpha \mathbin{\&} \beta$.

2. Наоборот, пусть Δ следует из формулы $\alpha \mathbin{\&} \beta$, то есть выводима секвенция

$$\alpha \mathbin{\&} \beta \vdash \Delta$$

Тогда ее вывод можно подклеить сверху к правой вершине дерева

$$\frac{\alpha, \beta \vdash \alpha \mathbin{\&} \beta \qquad \alpha \mathbin{\&} \beta \vdash \Delta}{\alpha, \beta \vdash \Delta}\,(0.2.33)$$

а вывод формулы (0.2.69) – к левой его вершине, и мы получим вывод секвенции

$$\alpha, \beta \vdash \Delta,$$

означающий, что Δ следует из набора формул α, β. □

И вторая теорема, объясняющая, почему сукцедент можно понимать как дизъюнкцию:

Теорема 0.2.2. *Пусть Δ — конечный набор формул в* LK *и δ — дизъюнкция этих формул. Тогда для набора формул Γ следующие условия эквивалентны:*

(i) *Δ следует из Γ в* LK*,*

(ii) *δ следует из Γ в* LK.

Доказательство. Здесь достаточно рассмотреть случай, когда Δ состоит из двух формул α и β, потому что общий случай рассматривается по аналогии.

1. Предположим, что из Γ следует набор α, β, то есть выводима секвенция

$$\Gamma \vdash \alpha, \beta.$$

Тогда ее вывод можно подклеить сверху к дереву

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\Gamma \vdash \alpha, \beta}{\Gamma \vdash \alpha, \alpha \vee \beta}\,(0.2.38)}{\Gamma \vdash \alpha \vee \beta, \alpha}\,(0.2.32)}{\Gamma \vdash \alpha \vee \beta, \alpha \vee \beta}\,(0.2.38)}{\Gamma \vdash \alpha \vee \beta}\,(0.2.31)$$

и мы получим вывод секвенции

$$\Gamma \vdash \alpha \vee \beta,$$

означающий, что $\alpha \vee \beta$ следует из формул Γ.

2. Наоборот, пусть $\alpha \vee \beta$ следует из формул Γ, то есть выводима секвенция

$$\Gamma \vdash \alpha \vee \beta.$$

Тогда ее вывод можно подклеить сверху к левой вершине дерева

$$\frac{\Gamma \vdash \alpha \vee \beta \qquad \alpha \vee \beta \vdash \alpha, \beta}{\Gamma \vdash \alpha, \beta}\,(0.2.33)$$

а вывод формулы (0.2.70) – к его правой вершине, и мы получим вывод секвенции

$$\Gamma \vdash \alpha, \beta,$$

означающий, что набор формул α, β следует из Γ. □

Рассмотрим несколько иллюстравций.

◇ **0.2.26. Закон исключенного третьего** в исчислении LK можно понимать как утверждение о выводимости секвенции

$$\vdash \alpha \vee \neg\alpha. \qquad (0.2.71)$$

Это в свою очередь означает, что (какой бы ни была формула α) формула $\alpha \vee \neg\alpha$ следует из пустого набора посылок, а значит, из любого набора посылок, потому что в силу правила LK-1, в посылки (антецедент) можно добавлять что угодно:

$$\frac{\vdash \alpha \vee \neg\alpha}{\beta \vdash \alpha \vee \neg\alpha.}\,(0.2.30)$$

По теореме 0.2.2 выводимость секвенции (0.2.71) эквивалентна выводимости секвенции

$$\vdash \alpha, \neg\alpha. \qquad (0.2.72)$$

Простейший вывод для нее выглядит так:

$$\frac{\alpha \vdash \alpha}{\vdash \alpha, \neg\alpha}\,(0.2.34)$$

Таким образом, секвенция (0.2.71) тоже выводима. И, как мы уже говорили, это не зависит от того, какую формулу языка теории множеств подставишь вместо α. Например, подставив вместо α формулу $x \in y$, мы получим выводимую секвенцию

$$\vdash (x \in y) \vee \neg(x \in y).$$

Или, если подставить $x = y$, то получится

$$\vdash (x = y) \vee \neg(x = y).$$

Понятно, что формулы можно подставлять какие угодно сложные, и все равно будут получаться выводимые секвенции:

$$\vdash ((x = y \mathbin{\&} \neg(x = z)) \vee (z = y)) \vee \\ \vee \neg((x = y \mathbin{\&} \neg(x = z)) \vee (z = y)),$$

$$\vdash ((x \in y \mathbin{\&} y \in z) \Rightarrow (x \in z)) \vee \\ \vee \neg((x \in y \mathbin{\&} y \in z) \Rightarrow (x \in z)),$$

и так далее.

◇ **0.2.27.** Рассмотрим секвенцию, симметричную (0.2.71):

$$\alpha\&\neg\alpha \vdash . \qquad (0.2.73)$$

Ее выводимость означает, что (какой бы ни была формула α) из формулы $\alpha\&\neg\alpha$ всегда следует пустой набор следствий, а значит, любое вообще следствие, потому что по правилу LK-1 в сукцедент можно добавлять что угодно:

$$\frac{\alpha\&\neg\alpha \vdash}{\alpha\&\neg\alpha \vdash \beta}\,(0.2.30)$$

По теореме 0.2.1, выводимость секвенции (0.2.73) эквивалентна выводимость секвенции

$$\alpha, \neg\alpha \vdash . \qquad (0.2.74)$$

Для нее простейший вывод выглядит так:

$$\cfrac{\cfrac{\alpha \vdash \alpha}{\neg\alpha, \alpha \vdash}\,(0.2.34)}{\alpha, \neg\alpha \vdash}\,(0.2.32)$$

Значит, секвенция (0.2.73) тоже выводима. Это не зависит от того, какую формулу языка теории множеств подставишь вместо α, например, можно подставить формулу $\exists x\ x \in x$, мы получим выводимую секвенцию

$$\exists x\ x \in x, \neg(\exists x\ x \in x) \vdash .$$

◇ **0.2.28.** Покажем, что выводимы секвенции

$$\alpha \vdash \neg(\neg\alpha), \qquad \neg(\neg\alpha) \vdash \alpha \qquad (0.2.75)$$

Первая из них выводится деревом

$$\frac{\neg\alpha, \alpha \vdash}{\alpha \vdash \neg(\neg\alpha).}\,(0.2.34)$$

в котором вершина выводима, поскольку, как мы уже поняли, выводима секвенция (0.2.74). А вторая — деревом

$$\frac{\vdash \alpha, \neg\alpha}{\neg(\neg\alpha) \vdash \alpha.}\,(0.2.34)$$

в котором вершина выводима, поскольку выводима секвенция (0.2.72).

◇ **0.2.29.** Отметим, что секвенция (0.2.76)

$$\alpha, \beta \vdash \alpha \Rightarrow \beta$$

выведенная нами выше, означает по теореме 0.2.1, что выводима и секвенция

$$\alpha\ \&\ \beta \vdash \alpha \Rightarrow \beta. \qquad (0.2.76)$$

Выводимые формулы в LK.

- Говорят, что *формула α выводима в* LK, или что *α является теоремой теории* LK, если в LK выводима секвенция
$$\vdash \alpha.$$

Теорема 0.2.3. *В* LK *формула χ следует из формулы φ,*

$$\varphi \vdash \chi,$$

тогда и только тогда, когда выводима формула

$$\varphi \Rightarrow \chi.$$

Доказательство. В прямую сторону это следует из правила LK-11:

$$\frac{\varphi \vdash \chi}{\vdash \varphi \Rightarrow \chi.}\,(0.2.40)$$

Это дерево Генцена надо понимать так, что если у его вершины — секвенции $\varphi \vdash \chi$ — есть вывод, то его можно пристроить к этой вершине сверху, и мы получим дерево, являющееся выводом для секвенции $\vdash \varphi \Rightarrow \chi$, а это и означает выводимость формулы $\varphi \Rightarrow \chi$.

В обратную же сторону это утверждение следует из выведенной ранее секвенции (0.2.49):

$$\cfrac{\vdash \varphi \Rightarrow \chi \qquad \cfrac{\varphi, \varphi \Rightarrow \chi \vdash \chi}{\varphi \Rightarrow \chi, \varphi \vdash \chi}\,(0.2.32)}{\varphi \vdash \chi}\,(0.2.33)$$

Опять это дерево надо понимать так, что если у его левой вершины — секвенции $\vdash \varphi \Rightarrow \chi$ — есть вывод (что эквивалентно выводимости формулы $\varphi \Rightarrow \chi$), то его можно пристроить к этой вершине сверху, затем к правой вершине — секвенции $\varphi, \varphi \Rightarrow \chi \vdash \chi$ — нужно будет присторить ее вывод, который мы получили на с.13, и мы в результате получим дерево, являющееся выводом для секвенции $\varphi \vdash \chi$. □

▷ **0.2.30.** Докажите выводимость формулы [14]

$$(\alpha \Rightarrow \beta) \Leftrightarrow (\neg\alpha \vee \beta) \qquad (0.2.77)$$

▷▷ **0.2.31.** Докажите выводимость формул в LK:

$$\begin{aligned}
&(\alpha \,\&\, \beta) \,\&\, \gamma \Leftrightarrow \alpha \,\&\, (\beta \,\&\, \gamma)\\
&(\alpha \vee \beta) \vee \gamma \Leftrightarrow \alpha \vee (\beta \vee \gamma)\\
&\alpha \,\&\, \beta \Leftrightarrow \beta \,\&\, \alpha\\
&\alpha \vee \beta \Leftrightarrow \beta \vee \alpha\\
&\alpha \,\&\, (\beta \vee \gamma) \Leftrightarrow (\alpha \,\&\, \beta) \vee (\alpha \,\&\, \gamma)\\
&\alpha \vee (\beta \,\&\, \gamma) \Leftrightarrow (\alpha \vee \beta) \,\&\, (\alpha \vee \gamma)\\
&\alpha \,\&\, \alpha \Leftrightarrow \alpha\\
&\alpha \vee \alpha \Leftrightarrow \alpha\\
&\alpha \,\&\, (\alpha \vee \beta) \Leftrightarrow \alpha\\
&\alpha \vee (\alpha \,\&\, \beta) \Leftrightarrow \alpha\\
&(\alpha \Rightarrow \beta) \Leftrightarrow \neg(\alpha \,\&\, \neg\beta)\\
&(\alpha \,\&\, \beta) \Leftrightarrow \neg(\alpha \Rightarrow \neg\beta)\\
&(\alpha \vee \beta) \Leftrightarrow (\neg\alpha \Rightarrow \beta)\\
&\alpha \Rightarrow (\beta \Rightarrow \alpha)\\
&(\alpha \Rightarrow (\beta \Rightarrow \gamma)) \Rightarrow ((\alpha \Rightarrow \beta) \Rightarrow (\alpha \Rightarrow \gamma))
\end{aligned}$$

▷▷ **0.2.32.** Докажите выводимость формул в LK:

$$\begin{aligned}
&(\alpha \,\&\, \beta) \Rightarrow \alpha\\
&(\alpha \,\&\, \beta) \Rightarrow \beta\\
&\alpha \Rightarrow (\beta \Rightarrow (\alpha \Rightarrow \beta))\\
&\alpha \Rightarrow (\alpha \vee \beta)\\
&\beta \Rightarrow (\alpha \vee \beta)\\
&(\alpha \Rightarrow \gamma) \Rightarrow ((\beta \Rightarrow \gamma) \Rightarrow ((\alpha \vee \beta) \Rightarrow \gamma))\\
&(\neg\alpha) \Rightarrow (\alpha \Rightarrow \beta)\\
&(\alpha \Rightarrow \beta) \Rightarrow ((\alpha \Rightarrow (\neg\beta)) \Rightarrow (\neg\alpha))
\end{aligned}$$

▷▷ **0.2.33.** Докажите выводимость формул в LK в предположении, что β не содержит переменной x:

$$\begin{aligned}
&\neg\forall x\,\alpha \Leftrightarrow \exists x\,\neg\alpha\\
&\neg\exists x\,\alpha \Leftrightarrow \forall x\,\neg\alpha\\
&((\forall x\,\alpha) \,\&\, \beta) \Leftrightarrow \forall x\,(\alpha \,\&\, \beta)\\
&\beta \,\&\, (\forall x\,\alpha) \Leftrightarrow \forall x\,(\beta \,\&\, \alpha)\\
&((\exists x\,\alpha) \,\&\, \beta) \Leftrightarrow \exists x\,(\alpha \,\&\, \beta)\\
&\beta \,\&\, (\exists x\,\alpha) \Leftrightarrow \exists x\,(\beta \,\&\, \alpha)\\
&((\forall x\,\alpha) \vee \beta) \Leftrightarrow \forall x\,(\alpha \vee \beta)\\
&\beta \vee (\forall x\,\alpha) \Leftrightarrow \forall x\,(\beta \vee \alpha)\\
&((\exists x\,\alpha) \vee \beta) \Leftrightarrow \exists x\,(\alpha \vee \beta)\\
&\beta \vee (\exists x\,\alpha) \Leftrightarrow \exists x\,(\beta \vee \alpha)\\
&((\forall x\,\alpha) \Rightarrow \beta) \Leftrightarrow \forall x\,(\alpha \Rightarrow \beta)\\
&\beta \Rightarrow (\forall x\,\alpha) \Leftrightarrow \forall x\,(\beta \Rightarrow \alpha)\\
&((\exists x\,\alpha) \Rightarrow \beta) \Leftrightarrow \exists x\,(\alpha \Rightarrow \beta)\\
&\beta \Rightarrow (\exists x\,\alpha) \Leftrightarrow \exists x\,(\beta \Rightarrow \alpha)\\
&((\forall x\,\alpha) \,\&\, (\forall x\,\gamma)) \Leftrightarrow \forall x\,(\alpha \Rightarrow \gamma)\\
&((\exists x\,\alpha) \vee (\exists x\,\gamma)) \Leftrightarrow \exists x\,(\alpha \vee \gamma)\\
&\forall y\,\beta \Leftrightarrow \forall x\,\beta|_{y=x}\\
&\exists y\,\beta \Leftrightarrow \exists x\,\beta|_{y=x}\\
&\forall x\,\beta \Leftrightarrow \beta\\
&\exists x\,\beta \Leftrightarrow \beta
\end{aligned}$$

---

[14] Вывод для формулы (0.2.77):

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\alpha\vdash\alpha}{\vdash\alpha,\neg\alpha}\,(0.2.34)}{\vdash\alpha,\neg\alpha\vee\beta}\,(0.2.38)}{\vdash\neg\alpha\vee\beta,\alpha}\,(0.2.32)\quad \dfrac{\beta\vdash\beta}{\beta\vdash\neg\alpha\vee\beta}\,(0.2.38)}{\alpha\Rightarrow\beta\vdash\neg\alpha\vee\beta}\,(0.2.39)}{\vdash(\alpha\Rightarrow\beta)\Rightarrow(\neg\alpha\vee\beta)}\,(0.2.40)\qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\alpha\vdash\alpha}{\alpha\vdash\beta,\alpha}\,(0.2.30)}{\neg\alpha,\alpha\vdash\beta}\,(0.2.34)\quad \dfrac{\beta\vdash\beta}{\beta,\alpha\vdash\beta}\,(0.2.30)}{\neg\alpha\vee\beta,\alpha\vdash\beta}\,(0.2.37)}{\alpha,\neg\alpha\vee\beta\vdash\beta}\,(0.2.32)}{\neg\alpha\vee\beta\vdash\alpha\Rightarrow\beta}\,(0.2.40)}{\vdash(\neg\alpha\vee\beta)\Rightarrow(\alpha\Rightarrow\beta)}\,(0.2.40)}{\vdash\big((\alpha\Rightarrow\beta)\Rightarrow(\neg\alpha\vee\beta)\big)\,\&\,\big((\neg\alpha\vee\beta)\Rightarrow(\alpha\Rightarrow\beta)\big)}\,(0.2.35)}{\vdash(\alpha\Rightarrow\beta)\Leftrightarrow(\neg\alpha\vee\beta)}\,(0.2.24)$$

▷ **0.2.34.** Докажите выводимость формулы [15]

$$\neg(\alpha\vee\beta)\Leftrightarrow(\neg\alpha\,\&\neg\beta) \qquad (0.2.78)$$

Отношение выводимости между формулами в LK. Понятие выводимой формулы, описанное на с.19, имеет важное обобщение, о котором мы сейчас поговорим.

- Говорят, что *формула ω выводима из набора формул $\varSigma$ в* LK, если существует дерево Генцена, в котором в корне стоит секвенция $\vdash\omega$, а на вершинах либо секвенции $\vdash\sigma$, где σ — формулы из $\varSigma$, либо аксиомы теории LK (то есть секвенции вида $\alpha\vdash\alpha$):

$$\dfrac{\dfrac{\alpha\vdash\alpha}{\cdots}\qquad\dfrac{\vdash\sigma}{\cdots}}{\vdash\omega}. \tag{0.2.79}$$

- В частном случае, если $\varSigma$ состоит из одной формулы, α, говорят, что *формула ω выводима из формулы α в* LK.
- В другом частном случае, если $\varSigma$ совсем не содержит формул, мы получаем определение *формулы ω выводимой в* LK, данное на с.19.

◇ **0.2.35.** Для любых двух формул α и β из формулы $\alpha\&\beta$ выводятся и α, и β.

Рассмотрим дерево

$$\dfrac{\vdash\alpha\&\beta\qquad\dfrac{\alpha\vdash\alpha}{\alpha\&\beta\vdash\alpha}{\scriptstyle(0.2.36)}}{\vdash\alpha}{\scriptstyle(0.2.33)}$$

Здесь видно, что если выводима формула $\alpha\&\beta$, то есть секвенция $\vdash\alpha\&\beta$, то ее вывод можно приклеить к левой вершине этого дерева, и мы получим вывод для секвенции $\vdash\alpha$. Для формулы β нужно построить похожее дерево.

---

[15] Вывод для формулы (0.2.78):

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\alpha\vdash\alpha}{\alpha\vdash\alpha\vee\beta}{\scriptstyle(0.2.38)}}{\neg(\alpha\vee\beta),\alpha\vdash}{\scriptstyle(0.2.34)}}{\alpha,\neg(\alpha\vee\beta)\vdash}{\scriptstyle(0.2.32)}}{\neg(\alpha\vee\beta)\vdash\neg\alpha}{\scriptstyle(0.2.34)}\qquad\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\beta\vdash\beta}{\beta\vdash\alpha\vee\beta}{\scriptstyle(0.2.38)}}{\neg(\alpha\vee\beta),\beta\vdash}{\scriptstyle(0.2.34)}}{\beta,\neg(\alpha\vee\beta)\vdash}{\scriptstyle(0.2.32)}}{\neg(\alpha\vee\beta)\vdash\neg\beta}{\scriptstyle(0.2.34)}}{\neg(\alpha\vee\beta)\vdash\neg\alpha\,\&\neg\beta}{\scriptstyle(0.2.39)}}{\vdash\neg(\alpha\vee\beta)\Rightarrow(\neg\alpha\,\&\neg\beta)}{\scriptstyle(0.2.40)}\qquad\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\alpha\vdash\alpha}{\alpha\vdash\alpha,\beta}{\scriptstyle(0.2.30)}\qquad\dfrac{\dfrac{\beta\vdash\beta}{\beta\vdash\beta,\alpha}{\scriptstyle(0.2.32)}}{\beta\vdash\alpha,\beta}{\scriptstyle(0.2.32)}}{\alpha\vee\beta\vdash\alpha,\beta}{\scriptstyle(0.2.37)}}{\vdash\alpha,\beta,\neg(\alpha\vee\beta)}{\scriptstyle(0.2.34)}}{\vdash\alpha,\neg(\alpha\vee\beta),\beta}{\scriptstyle(0.2.32)}}{\vdash\neg(\alpha\vee\beta),\alpha,\beta}{\scriptstyle(0.2.32)}}{\neg\beta\vdash\neg(\alpha\vee\beta),\alpha}{\scriptstyle(0.2.34)}}{\neg\alpha,\neg\beta\vdash\neg(\alpha\vee\beta)}{\scriptstyle(0.2.34)}}{\neg\alpha\,\&\neg\beta,\neg\beta\vdash\neg(\alpha\vee\beta)}{\scriptstyle(0.2.36)}}{\neg\beta,\neg\alpha\,\&\neg\beta\vdash\neg(\alpha\vee\beta)}{\scriptstyle(0.2.32)}}{\neg\alpha\,\&\neg\beta,\neg\alpha\,\&\neg\beta\vdash\neg(\alpha\vee\beta)}{\scriptstyle(0.2.36)}}{\neg\alpha\,\&\neg\beta\vdash\neg(\alpha\vee\beta)}{\scriptstyle(0.2.31)}}{\vdash(\neg\alpha\,\&\neg\beta)\Rightarrow\neg(\alpha\vee\beta)}{\scriptstyle(0.2.40)}}{\vdash\big(\neg(\alpha\vee\beta)\Rightarrow(\neg\alpha\,\&\neg\beta)\big)\,\&\,\big((\neg\alpha\,\&\neg\beta)\Rightarrow\neg(\alpha\vee\beta)\big)}{\scriptstyle(0.2.35)}}{\vdash\neg(\alpha\vee\beta)\Leftrightarrow(\neg\alpha\,\&\neg\beta)}{\scriptstyle(0.2.24)}$$

Предложение 0.2.4. *В* LK *формулы α и $\forall x\,\alpha$ выводятся друг из друга.*

Доказательство. 1. Дерево Генцена

$$\dfrac{\vdash \alpha}{\vdash \forall x\,\alpha}{\scriptstyle (0.2.42)} \tag{0.2.80}$$

показывает, что формула $\forall x\,\alpha$ выводится из α.

2. Рассмотрим дерево

$$\dfrac{\vdash \forall x\,\alpha \quad \forall x\,\alpha \vdash \alpha}{\vdash \alpha}{\scriptstyle (0.2.33)} \tag{0.2.81}$$

Вспомним, что выше в примере 0.2.11 мы уже доказали, что правая вершина этого дерева выводима:

$$\forall x\,\alpha \vdash \alpha \tag{0.2.82}$$

Если этот вывод из примера 0.2.11 приклеить к правой вершине дерева (0.2.81), то мы получим дерево вида (0.2.79), означающее, что формула α выводится из формулы $\forall x\,\alpha$. □

Следующая лемма представляет собой аналог теоремы 0.2.1 для отношения выводимости формул:

Лемма 0.2.5. *Пусть Σ — конечный набор формул в* LK *и σ — конъюнкция этих формул. Тогда для формулы ω следующие условия эквивалентны:*

(i) *ω выводится из Σ в* LK*,*

(ii) *ω выводится из σ в* LK*.*

Доказательство. Пусть для начала Σ состоит из двух формул: α и β. Тогда σ есть просто конъюнкция $\alpha\&\beta$.

1. Рассмотрим дерево

$$\dfrac{\dfrac{\vdash \alpha \quad \vdash \beta}{\vdash \alpha\&\beta}{\scriptstyle (0.2.35)}}{\vdash \omega}$$

Если ω выводима из σ то есть из $\alpha\&\beta$, то, поскольку $\alpha\&\beta$ выводима из α и β, то есть из Σ, мы получаем, что ω выводима из Σ.

2. Для доказательства обратного рассмотрим дерево

$$\dfrac{\dfrac{\vdash \alpha\&\beta}{\vdash \alpha} \qquad \dfrac{\vdash \alpha\&\beta}{\vdash \beta}}{\vdash \omega}{\scriptstyle (0.2.35)}$$

В нем верхние две ветви мы можем считать деревьями Генцена в силу примера 0.2.35. Поэтому если последний переход — тоже дерево Генцена, то есть если ω выводится из α и β (или, иными словами, из Σ), то ω должна выводиться и из $\alpha\&\beta$, то есть из σ.

Общий случай (с произвольным числом формул в Σ) рассматривается аналогично. □

Напомним, что на странице 13 мы определили отношение следования из набора формул. Следующая теорема показывает, что в случае, если формулы в посылке замкнуты, это отношение совпадает с отношением выводимости. (Однако, если этого условия нет, то эти два понятия не совпадают, и ниже мы покажем это в примере 0.2.42.)

Теорема 0.2.6 (о дедукции для LK)**.** *Пусть ω – формула и Σ — конечный набор формул в* LK*. Рассмотрим два условия:*

(a) *ω следует из Σ в* LK*,*

(b) *ω выводится из Σ в* LK*.*

Тогда:

(i) условие (a) влечет условие (b),

(ii) если формулы Σ замкнуты, то условие (b) влечет условие (a) (то есть в этом случае (a) и (b) равносильны).

Доказательство. Пусть σ — конъюнкция формул из Σ. По лемме 0.2.5 выводимость из Σ эквивалентна выводимости из σ, поэтому всюду мы можем заменить Σ на σ.

1. Рассмотрим дерево

$$\frac{\vdash \sigma \quad \sigma \vdash \omega}{\vdash \omega}\,(0.2.33) \tag{0.2.83}$$

Если ω следует из σ, то есть выводима секвенция $\sigma \vdash \omega$, то ее вывод можно подклеить к правой вершине этого дерева, и тогда если вдобавок выводима секвенция $\vdash \sigma$, то, подклеив ее вывод к левой вершине, мы получим вывод для секвенции $\vdash \omega$. Это доказывает, что из (a) следует (b).

2. Предположим теперь, что формулы Σ замкнуты. Тогда их конъюнкция σ тоже замкнута. Покажем, что в этом случае из (b) следует (a). Если выполнется (b), то есть ω выводится из σ, то это означает, что существует некое дерево Генцена,

$$\frac{\frac{\underline{\alpha\vdash\alpha}}{\dots} \qquad \frac{\underline{\vdash\sigma}}{\dots}}{\vdash \omega}$$

у которого в корне записана секвенция $\vdash \omega$, а на вершинах стоят либо секвенции вида $\alpha \vdash \alpha$, либо секвенция $\vdash \sigma$. Впишем в каждый антецедент этого дерева формулу σ как дополнительную формулу:

$$\frac{\frac{\underline{\sigma,\alpha\vdash\alpha}}{\dots} \qquad \frac{\underline{\sigma\vdash\sigma}}{\dots}}{\sigma \vdash \omega} \tag{0.2.84}$$

и покажем, что полученная картинка может быть дополнена до дерева Генцена с теми же вершинами и корнем.

Для этого нужно проверить, что если в правилах LK-$\mathsf{1}$ — LK-$\mathsf{15}$ всюду в антецеденты вписать формулу σ, то все они дополняются до деревьев Генцена с теми же вершинами и корнем. Для правил LK-$\mathsf{1}$ — LK-$\mathsf{12}$, LK-$\mathsf{15}$ это верно без требования, чтобы формула σ была замкнутой: если, например, в левое правило LK-$\mathsf{1}$ вписать таким образом σ, то мы получим картинку

$$\frac{\sigma, \varGamma \vdash \varDelta}{\sigma, \varphi, \varGamma \vdash \varDelta}, \tag{0.2.85}$$

которую можно дополнить до картинки

$$\cfrac{\cfrac{\sigma, \varGamma \vdash \varDelta}{\varphi, \sigma, \varGamma \vdash \varDelta,}\,(0.2.30)}{\sigma, \varphi, \varGamma \vdash \varDelta,}\,(0.2.32)$$

а она будет деревом Генцена с теми же, что у (0.2.85) вершиной и корнем. Точно так же, например, если в правиле LK-$\mathsf{12}$ вписать в антецедент формулы σ,

$$\frac{\sigma, \varphi\big|_{x=y}, \varGamma \vdash \varDelta}{\sigma, \forall x\, \varphi, \varGamma \vdash \varDelta}, \tag{0.2.86}$$

то эту картинку можно дополнить до картинки

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\sigma, \varphi\big|_{x=y}, \varGamma \vdash \varDelta}{\varphi\big|_{x=y}, \sigma, \varGamma \vdash \varDelta,}\,(0.2.32)}{\forall x\, \varphi, \sigma, \varGamma \vdash \varDelta,}\,(0.2.41)}{\sigma, \forall x\, \varphi, \varGamma \vdash \varDelta,}\,(0.2.32)$$

а она будет деревом Генцена с теми же, что у (0.2.86) вершиной и корнем.

Так будет со всеми правилами LK-1 — LK-12, LK-15, но когда мы дойдем до правил LK-13 и LK-14 нам понадобится все-таки требование, что все формулы σ — замкнутые. Например, если дополнить правило LK-13

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, \varphi\big|_{x=y}}{\Gamma \vdash \Delta, \forall x\, \varphi} \tag{0.2.87}$$

как раньше, в антецедентах, формулой σ, то полученную картинку

$$\frac{\sigma, \Gamma \vdash \Delta, \varphi\big|_{x=y}}{\sigma, \Gamma \vdash \Delta, \forall x\, \varphi} \tag{0.2.88}$$

можно будет считать частным случаем правила LK-13 только если выполнено ограничение на переменную y в этом правиле: нужно, чтобы y не входил как свободная переменная в нижнюю секвенцию. Это условие будет выполнено, потому что в (0.2.87) y не входил как свободная переменная в нижнюю секвенцию, а в σ он не входит, потому что σ — замкнутая формула.

И то же самое с правилом LK-14. Это доказывает, что картинку (0.2.84) можно дополнить до дерева Генцена с теми же вершинами и корнем. Теперь заметим, что там, где на вершинах стоят секвенции $\sigma, \alpha \vdash \alpha$, их можно продолжить вверх по правилу LK-1,

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta}{\sigma, \Gamma \vdash \Delta}$$

и мы получим дерево Генцена

$$\frac{\frac{\frac{\alpha\vdash\alpha}{\sigma,\alpha\vdash\alpha}}{\dots} \qquad \frac{\sigma\vdash\sigma}{\dots}}{\sigma \vdash \omega},$$

у которого все вершины — аксиомы теории LK-1, а корень — секвенция $\sigma \vdash \omega$. Иными словами, это вывод секвенции $\sigma \vdash \omega$. □

(c) Другие аксиоматизации логики предикатов

Гильбертовское исчисление предикатов CQC. Как мы говорили выше, помимо исчисления секвенций LK, предложенного Генценом для описания логики предикатов, в математике часто используется другая система, CQC (“Classical quantificational calculus”), называемая *исчислением предикатов*, построенная Гильбертом и решающая ту же задачу. Эти системы описывают одну и ту же логику, поэтому эквивалентны. Мы не будем доказывать их эквивалентность, а просто опишем здесь систему Гильберта, чтобы читатель мог составить себе представление о ней.

Система CQC также состоит из аксиом и правил вывода. Но, в отличие от LK, в CQC аксиом много, а правил вывода мало. Еще одно отличие – что в CQC не используется символ секвенции $\vdash$ (потому что считается, что выводиться должны не формулы из формул, то есть не секвенции $\varphi \vdash \chi$, а прямо сами формулы $\varphi \Rightarrow \chi$).

- *Аксиомами исчисление предикатов* называются формулы следующих трех типов.

1) Формулы, называемые *аксиомами исчисления высказываний*[16]:

$$\mathsf{CQC}-1: \quad \varphi \Rightarrow (\chi \Rightarrow \varphi) \tag{0.2.89}$$
$$\mathsf{CQC}-2: \quad (\varphi \Rightarrow (\chi \Rightarrow \psi)) \Rightarrow ((\varphi \Rightarrow \chi) \Rightarrow (\varphi \Rightarrow \psi)) \tag{0.2.90}$$
$$\mathsf{CQC}-3: \quad (\varphi \,\&\, \chi) \Rightarrow \varphi \tag{0.2.91}$$
$$\mathsf{CQC}-4: \quad (\varphi \,\&\, \chi) \Rightarrow \chi \tag{0.2.92}$$
$$\mathsf{CQC}-5: \quad \varphi \Rightarrow (\chi \Rightarrow (\varphi \Rightarrow \chi)) \tag{0.2.93}$$
$$\mathsf{CQC}-6: \quad \varphi \Rightarrow (\varphi \ \vee\ \chi) \tag{0.2.94}$$
$$\mathsf{CQC}-7: \quad \chi \Rightarrow (\varphi \ \vee\ \chi) \tag{0.2.95}$$
$$\mathsf{CQC}-8: \quad (\varphi \Rightarrow \psi) \Rightarrow ((\chi \Rightarrow \psi) \Rightarrow ((\varphi \ \vee\ \chi) \Rightarrow \psi)) \tag{0.2.96}$$
$$\mathsf{CQC}-9: \quad (\neg\varphi) \Rightarrow (\varphi \Rightarrow \chi) \tag{0.2.97}$$
$$\mathsf{CQC}-10: \quad (\varphi \Rightarrow \chi) \Rightarrow ((\varphi \Rightarrow (\neg\chi)) \Rightarrow (\neg\varphi)) \tag{0.2.98}$$
$$\mathsf{CQC}-11: \quad \varphi \vee (\neg\varphi) \tag{0.2.99}$$

[16]Читатель может обратить внимание, что выводимость формул CQC-1—CQC-10 в LK предлагалась в качестве упражнения в задачах 0.2.32, а CQC-11 была выведена в LK в (0.2.72).

2) Формулы, называемые *кванторными аксиомами исчисления предикатов*:

— если X – переменная в формуле φ, то для любой переменной Y, не содержащейся в φ

$$\mathsf{CQC-12}: \qquad (\forall X\ \varphi) \Rightarrow \varphi\big|_{X=Y} \tag{0.2.100}$$

$$\mathsf{CQC-13}: \qquad \varphi\big|_{X=Y} \Rightarrow (\exists X\ \varphi) \tag{0.2.101}$$

— если φ и ψ – формулы, а X – переменная, не являющаяся свободной для ψ, то

$$\mathsf{CQC-14}: \qquad (\forall X\ (\varphi \Rightarrow \psi)) \Rightarrow ((\exists X\ \varphi) \Rightarrow \psi)) \tag{0.2.102}$$

$$\mathsf{CQC-15}: \qquad (\forall X\ (\psi \Rightarrow \varphi)) \Rightarrow (\psi \Rightarrow (\forall X\ \varphi)) \tag{0.2.103}$$

- *Правилами вывода* в исчислении предикатов называются следующие два правила:

modus ponens: если выводимы формулы φ и $\varphi \Rightarrow \psi$, то выводима формула ψ; это изображается дробью

$$\frac{\varphi,\ \varphi \Rightarrow \psi}{\psi} \tag{0.2.104}$$

generalisation: если выводима формула φ, то выводима формула $\forall X\ \varphi$; это изображается дробью

$$\frac{\varphi}{\forall X\ \varphi} \tag{0.2.105}$$

Вывод в CQC обычно выглядит не так наглядно, как в LK, потому что его принято представлять не деревом, а линией (или, правильнее сказать, деревом с одной веткой). Мы нарушим эту традицию и покажем, как будет выглядеть эта картина, если ее перевести на язык деревьев Генцена (с очевидной поправкой, что при переводе символ $\vdash$ должен исчезнуть). Как может заметить читатель, в CQC, из-за громоздкости аксиом, деревья вывода получаются более сложными, чем в LK (по этой причине мы выносим их в подстрочные примечания). Кроме того, при движении от аксиом вниз приходится уточнять подстановки (чтобы зритель понимал, как из данной аксиомы получилась нужная нам формула). Главное же неудобство здесь в том, что вообще сообразить, как строить вывод в CQC существенно труднее, чем в LK.

▷ **0.2.36.** Покажите, что следующая секвенция выводима в CQC:[17]

$$\alpha \Rightarrow \alpha \tag{0.2.106}$$

▷ **0.2.37.** Докажите выводимость в CQC секвенции[18]

$$(\alpha \Rightarrow \beta) \Rightarrow (\alpha \Rightarrow \alpha) \tag{0.2.107}$$

---

[17] Для секвенции (0.2.106) выводом может быть дерево

$$\cfrac{\cfrac{\varphi \Rightarrow (\chi \Rightarrow \varphi)}{\alpha \Rightarrow (\alpha \Rightarrow \alpha),}\begin{smallmatrix}\varphi=\alpha\\ \chi=\alpha\end{smallmatrix} \qquad \cfrac{\cfrac{\varphi \Rightarrow (\chi \Rightarrow \varphi)}{\alpha \Rightarrow ((\alpha \Rightarrow \alpha) \Rightarrow \alpha),}\begin{smallmatrix}\varphi=\alpha\\ \chi=(\alpha\Rightarrow\alpha)\end{smallmatrix} \qquad \cfrac{(\varphi \Rightarrow (\chi \Rightarrow \psi)) \Rightarrow ((\varphi \Rightarrow \chi) \Rightarrow (\varphi \Rightarrow \psi))}{(\alpha \Rightarrow ((\alpha \Rightarrow \alpha) \Rightarrow \alpha)) \Rightarrow (\alpha \Rightarrow (\alpha \Rightarrow \alpha)) \Rightarrow (\alpha \Rightarrow \alpha)}\begin{smallmatrix}\varphi=\alpha\\ \chi=(\alpha\Rightarrow\alpha)\\ \psi=\alpha\end{smallmatrix}}{(\alpha \Rightarrow (\alpha \Rightarrow \alpha)) \Rightarrow (\alpha \Rightarrow \alpha)}(1.2.129)}{\alpha \Rightarrow \alpha}(1.2.129)$$

Здесь на вершинах ветвей находятся аксиомы PC-1 и PC-2, и при движении вниз входящие в них формулы заменяются на формулы α или $\alpha \Rightarrow \alpha$, там указано как.

[18] Для секвенции (0.2.107) выводом может быть дерево

$$\cfrac{\cfrac{\varphi \Rightarrow (\chi \Rightarrow \varphi)}{\alpha \Rightarrow (\beta \Rightarrow \alpha)}\begin{smallmatrix}\varphi=\alpha\\ \chi=\alpha\end{smallmatrix} \qquad \cfrac{(\varphi \Rightarrow (\chi \Rightarrow \psi)) \Rightarrow ((\varphi \Rightarrow \chi) \Rightarrow (\varphi \Rightarrow \psi))}{(\alpha \Rightarrow (\beta \Rightarrow \alpha)) \Rightarrow (\alpha \Rightarrow \beta) \Rightarrow (\alpha \Rightarrow \alpha)}\begin{smallmatrix}\varphi=\alpha\\ \chi=\beta\\ \psi=\alpha\end{smallmatrix}}{(\alpha \Rightarrow \beta) \Rightarrow (\alpha \Rightarrow \alpha)}(1.2.129)$$

Здесь снова на вершинах ветвей находятся аксиомы PC-1 и PC-2.

Исчисление Кетонена G3c. Еще одна аксиоматизация логики предикатов, так называемое исчисление G3c финского математика Оива Кетонена, была придумана как модификация генценовской системы LK. Мы приведем здесь ее вариант[19] для языка теории множеств (или любого языка без функциональных символов). В языке этой системы добавляются два символа: символ $\bot$, означающий "абстрактную ложь", и символ $\top$, означающий "абстрактную истину". Кроме того, отрицание $\neg\alpha$ понимается как сокращение для формулы $\alpha \Rightarrow \bot$. Еще один важный момент — что наборы формул в секвенциях здесь понимаются не как строки, а как "мультимножества". Это означает, что в наборе формул можно как угодно переставлять формулы (отделенные друг от друга запятыми), и при этом считается, что набор не меняется. Отсюда, в частноти, следует, что генценовские правила перестановки (0.2.32) в этой системе лишние.

- *Аксиомами* исчисления G3c считаются следующие три вида секвенций:

$$\varGamma, \bot \vdash \varDelta \qquad\qquad \varGamma, \varphi \vdash \varphi, \varDelta \qquad\qquad \varGamma \vdash \top, \varDelta. \tag{0.2.108}$$

- *Правила вывода* для исчисления G3c делятся на три группы. В первой группе перечисляются бескванторные правила:

$$\frac{\varGamma, \varphi, \chi \vdash \varDelta}{\varGamma, \varphi \mathbin{\&} \chi \vdash \varDelta} \qquad\qquad \frac{\varGamma \vdash \varphi, \varDelta \quad \varGamma \vdash \chi, \varDelta}{\varGamma \vdash \varphi \mathbin{\&} \chi, \varDelta} \tag{0.2.109}$$

$$\frac{\varGamma, \varphi \vdash \varDelta \quad \varGamma, \chi \vdash \varDelta}{\varGamma, \varphi \vee \chi \vdash \varDelta} \qquad\qquad \frac{\varGamma \vdash \varphi, \chi, \varDelta}{\varGamma \vdash \varphi \vee \chi, \varDelta} \tag{0.2.110}$$

$$\frac{\varGamma \vdash \varphi, \varDelta \quad \varGamma, \chi \vdash \varDelta}{\varGamma, \varphi \Rightarrow \chi \vdash \varDelta} \qquad\qquad \frac{\varGamma, \varphi \vdash \chi, \varDelta}{\varGamma \vdash \varphi \Rightarrow \chi, \varDelta} \tag{0.2.111}$$

Во второй – правила с кванторами, в которых на переменные (x и y) не накладывается никаких ограничений[20]:

$$\frac{\varGamma, \forall x\ \varphi, \varphi\Big|_{x=y} \vdash \varDelta}{\varGamma, \forall x\ \varphi \vdash \varDelta} \qquad\qquad \frac{\varGamma \vdash \varphi\Big|_{x=y}, \exists x\ \varphi, \varDelta}{\varGamma \vdash \exists x\ \varphi, \varDelta} \tag{0.2.112}$$

И в третьей – правила с кванторами, в которых на одну из переменных, y, накладывается требование, что она не должна входить в формулы из $\varGamma$ и $\varDelta$, а подстановка $\varphi\Big|_{x=y}$ должна быть корректной:

$$\frac{\varGamma, \varphi\Big|_{x=y} \vdash \varDelta}{\varGamma, \exists x\ \varphi \vdash \varDelta} \qquad\qquad \frac{\varGamma \vdash \varphi\Big|_{x=y}, \varDelta}{\varGamma \vdash \forall x\ \varphi, \varDelta} \tag{0.2.113}$$

О невыводимых секвенциях. Система G3c удобнее системы LK тем, что в ней меньше правил, из-за которых дерево Генцена может разрастаться бесконечно далеко вверх, а именно, правила сокращения (0.2.31) и сечения (0.2.33) отсутствуют (но правда, правила (0.2.42) и (0.2.43) заменяются правилами (0.2.112), которые все равно оставляют такую возможность бесконечного разрастания). Поскольку G3c эквивалентна LK, это облегчает возможность доказывать невыводимость некоторых секвенций. Покажем это на примерах.

◇ **0.2.38.** Пусть α — атомарная формула[21]. Рассмотрим секвенцию (0.2.55), невыводимость которой мы обещали доказать в примере 0.2.10:

$$\alpha \vdash \neg\alpha. \tag{0.2.114}$$

В системе G3c это делается так. Сначала расшифруем запись $\neg\alpha$ для системы G3c:

$$\alpha \vdash \alpha \Rightarrow \bot.$$

После этого становится видно, что единственное правило вывода в системе G3c, которое может привести к такой секвенции – правое правило в (0.2.111). Поэтому если бы у секвенции (0.2.114) был вывод, то он заканчивался бы переходом

$$\frac{\alpha, \alpha \vdash \bot}{\alpha \vdash \alpha \Rightarrow \bot}\,(0.2.111)$$

[19] Подробности об этой замечательной системе см. в книге: S. Negri, G. von Plato. Structural proof theory, Cambridge University Press, 2001.

[20] Если язык теории содержит функциональные символы, то правила (0.2.110) исчисления G3c для него усложняются уточнением, что под y следует понимать произвольный терм (понятие терма будет определено на с.80).

[21] В теории множеств это формулы вида $x = y$ и $x \in y$, мы об этом говорили на с.8.

Теперь если поглядеть на вершину этого дерева, то видно, что дальше вверх его не продолжишь, потому что никакое из правил (0.2.109)-(0.2.113) здесь применить невозможно (в этот момент мы используем тот факт, что α — атомарная формула). Но на вершине этого дерева не аксиома. Значит, оно – не вывод для нашей секвенции. Мы получаем, что у секвенции (0.2.114) вывода вообще нет.

◇ **0.2.39.** Пусть снова α — атомарная формула[22] со свободной переменной x. Покажем, что секвенция, рассматривавшаяся нами в примере 0.2.12,

$$\alpha \vdash \forall x\ \alpha \tag{0.2.115}$$

невыводима. Выберем какую-нибудь переменную, не входящую в формулу α, пусть это будет y (понятно, что y отличается от x, потому что x входит в α). Предположим, что у секвенции (0.2.115) имеется вывод. Тогда в нем последний шаг должен использовать правое правило (0.2.113) (потому что перейти к (0.2.115) в системе G3c можно только с помощью правого правила (0.2.113)). То есть последний шаг этого вывода должен быть таким

$$\frac{\alpha \vdash \alpha\Big|_{x=y}}{\alpha \vdash \forall x\ \alpha}\,{\scriptstyle(0.2.113)} \tag{0.2.116}$$

Дальше уже двигаться вверх невозможно, потому что никакое правило применить не получится (из-за атомарности формулы α). Значит, вывод должен либо иметь вид дерева (0.2.116). Но в нем на вершине не стоит аксиома (потому что y не совпадает с x, и значит, α и $\alpha\Big|_{x=y}$ — разные формулы). Значит это дерево – не выводы, и следовательно, у секвенции (0.2.115) вывода действительно нет.

◇ **0.2.40.** Пусть снова α — атомарная формула[23] со свободной переменной x. Покажем, что секвенция, рассматривавшаяся нами в примере 0.2.14,

$$\exists x\ \alpha \vdash \alpha \tag{0.2.117}$$

невыводима. Выберем какую-нибудь переменную, не входящую в формулу α, пусть это будет y (понятно, что y отличается от x, потому что x входит в α). Предположим, что у секвенции (0.2.117) имеется вывод. Тогда в нем последний шаг должен использовать левое правило (0.2.113) (потому что перейти к (0.2.117) в системе G3c можно только с помощью левого правила (0.2.113)). То есть последний шаг этого вывода должен быть таким

$$\frac{\alpha\Big|_{x=y} \vdash \alpha}{\exists x\ \alpha \vdash \alpha}\,{\scriptstyle(0.2.113)} \tag{0.2.118}$$

Дальше уже двигаться вверх невозможно, потому что никакое правило применить не получится (из-за атомарности формулы α). Значит, вывод должен либо иметь вид дерева (0.2.118). Но в нем на вершине не стоит аксиома (потому что y не совпадает с x, и значит, α и $\alpha\Big|_{x=y}$ — разные формулы). Значит это дерево – не вывод, и, как следствие, у секвенции (0.2.117) вывода действительно нет.

◇ **0.2.41.** Пусть снова α — атомарная формула[24] со свободной переменной x. Покажем, что секвенция, рассматривавшаяся нами в примере 0.2.16,

$$\exists x\ \alpha \vdash \forall x\ \alpha \tag{0.2.119}$$

невыводима. Будем считать, что переменные y и z не входят в формулу α. Предположим, что у секвенции (0.2.119) имеется вывод. Тогда в нем последний шаг должен использовать правила (0.2.113) (потому что перейти к (0.2.119) в системе G3c можно только с помощью (0.2.113)). То есть конец этого вывода должен быть либо таким

$$\frac{\alpha\Big|_{x=y} \vdash \forall x\ \alpha}{\exists x\ \alpha \vdash \forall x\ \alpha}\,{\scriptstyle(0.2.113)}$$

(где y не входит в формулу $\forall x\ \alpha$), либо таким

$$\frac{\exists x\ \alpha \vdash \alpha\Big|_{x=z}}{\exists x\ \alpha \vdash \forall x\ \alpha}\,{\scriptstyle(0.2.113)}$$

(где z не входит в формулу $\exists x\ \alpha$). В обоих случаях движение вверх может быть опять только с использованием правил (0.2.111). В первом случае дерево может получиться только таким

$$\frac{\dfrac{\alpha\Big|_{x=y} \vdash \alpha\Big|_{x=z}}{\alpha\Big|_{x=y} \vdash \forall x\ \alpha}\,{\scriptstyle(0.2.113)}}{\exists x\ \alpha \vdash \forall x\ \alpha}\,{\scriptstyle(0.2.113)} \tag{0.2.120}$$

(где z не входит в формулу $\alpha\Big|_{x=y}$, и поэтому z не может совпадать с y), а во втором – только

[22] См. подстрочное примечание 21 .
[23] См. подстрочное примечание 21 .
[24] См. подстрочное примечание 21 .

таким:

$$\cfrac{\cfrac{\alpha\Big|_{x=y} \vdash \alpha\Big|_{x=z}}{\exists x\ \alpha \vdash \alpha\Big|_{x=z}}(0.2.113)}{\exists x\ \alpha \vdash \forall x\ \alpha}(0.2.113) \qquad (0.2.121)$$

(где y не входит в формулу $\alpha\Big|_{x=z}$, и поэтому z опять не может совпадать с y).

Дальше уже двигаться вверх невозможно, потому что никакое правило применить не получится (из-за атомарности формулы α). Значит, вывод должен либо иметь вид дерева (0.2.120), либо дерева (0.2.121). Но в обоих случаях на вершине не стоит аксиома (потому что y и z — разные переменные, и значит, $\alpha\Big|_{x=y}$ и $\alpha\Big|_{x=z}$ — разные формулы). Значит эти деревья – не выводы, и следовательно, у секвенции (0.2.119) вывода действительно нет.

Контрпример к теореме дедукции. Выше перед формулировкой теоремы дедукции 0.2.6 мы пообещали дать контрпример, показывающий, что понятия следования и выводимости между формулами не эквивалентны. Это наблюдение использует рассмотренный выше пример 0.2.39:

◇ **0.2.42.** Существуют формулы α и β такие, что β выводится из α, но β не следует из α.

Доказательство. Рассмотрим какую-нибудь атомарную формулу α со свободной переменной x и пусть β обозначает формулу $\forall x\,\alpha$. Тогда:

1) формула $\forall x\,\alpha$ выводится из α: существует дерево

$$\cfrac{\vdash \alpha}{\vdash \forall x\,\alpha,}(0.2.42)$$

как отмечалось в предложении 0.2.4, но одновременно

2) формула $\forall x\,\alpha$ не следует в LK из α: секвенция

$$\alpha \vdash \forall x\,\alpha$$

не выводится в LK, в силу примера 0.2.39.

□

Как мы уже говорили, из-за правил (0.2.112) такой способ доказательства невыводимости секвенции не всегда работает в $\mathsf{G3c}$ (как раньше в LK). В общем случае известно, что проблема, выводима данная секвенция, или нет, алгоритмически неразрешима. Помимо такого способа доказательства невыводимости исследованием получаемых деревьев, в математике существует еще один, основанный на построении контрмодели. Мы опишем его ниже в примерах 1.1.15 и 1.1.16.

§ 3 Теория множеств Морса-Келли

Теория Морса-Келли MK, которую мы опишем в этом параграфе, представляет собой так называемую формальную теорию[25] над исчислением секвенций LK для языка теории множеств, описанным выше. От теории LK в том виде, в котором мы ее к настоящему времени описали, теория MK отличается только тем, что в ней понятие вывода несколько усложняется в соответствии с идеологией, описанной на с.21: в MK вводится некая система формул, называемых *аксиомами теории* MK (ниже мы приводим их с обозначениями MK-1—MK-14), и объявляется, что формула ω выводима, если она выводима из аксиом в смысле определения на с.21. Более подробно, определение вывода в MK выглядит так:

- *Дерево Генцена считается выводом в* MK, если каждая его вершина является
  - — либо аксиомой исчисления секвенций LK, то есть секвенцией вида $\alpha \vdash \alpha$,
  - — либо секвенцией вида $\vdash \sigma$, где σ — какая-нибудь аксиома теории MK.

В соответствии с этим меняются и остальные связанные определения:

- Секвенция $\varGamma \vdash \varDelta$ называется выводимой в теории MK, если у нее есть вывод в теории MK.
- Говорят, что *формула χ следует из формулы φ в теории* MK, если в MK выводима секвенция $\varphi \vdash \chi$.
- *Теоремой теории* MK называется произвольная выводимая формула этой теории (то есть такая формула ω, что секвенция $\vdash \omega$ выводима в теории MK).

[25] Общее определение формальной теории (или теории 1 порядка) мы даем ниже на с.79.

Понятно, что поскольку деревьев Генцена, признаваемых выводами, в MK больше, чем в LK, класс выводимых секвенций[26] в MK шире, чем в LK. То же самое происходит и с отношением следования между формулами (которое в MK слабее, чем в LK[27]), и с классом теорем (которых в MK больше, чем в LK[28]):

1) *если секвенция $\Gamma \vdash \Delta$ выводима в теории* LK, *то она выводима и в теории* MK, *не не наоборот,*
2) *если формула χ следует из формулы φ в теории* LK, *то это верно и в теории* MK, *не не наоборот,*
3) *если формула α является теоремой теории* LK, *то она является теоремой и в теории* MK, *не не наоборот.*

(a) Аксиомы равенства, невырожденности, объемности и выделения

Мы перейдем к описанию аксиом теории MK. Некоторые из них, как аксиомы MK-1—MK-6 (на с.30 ниже), довольно просты, но большинство так громоздко, что среди математиков имеется традиция описывать их последовательно, по одной, обсуждая сразу же выводы и вводя определения, которые облегчают описание последующих аксиом. Мы поступим так же, начав список с аксиомы MK-1 на этой странице и закончив его аксиомой MK-14 на с.64.

Мы постараемся сделать этот параграф автономным, чтобы, при желании, его можно было читать, не вникая в детали остального изложения этой главы, поэтому выводы из аксиом теории Морса-Келли (теоремы теории MK) мы будем оформлять традиционными текстовыми рассуждениями, без построения деревьев Генцена (мы дадим только один пример дерева Генцена на с.32), однако читатель должен понимать, что отныне все наши математические утверждения (не только в этой главе, но и вообще во всем учебнике, за исключением некоторых утверждений главы 1, где мы возвращаемся к обсуждению оснований математики) формально могут быть доказаны именно средствами исчисления секвенций LK, построением нужных деревьев (но, конечно, чем дальше мы будем двигаться, тем сложнее эти деревья будут, если их в самом деле задаваться строить).

Первые шесть аксиом теории MK повторяют первые аксиомы теории NST.

Аксиомы равенства.

MK-1 **Аксиома рефлексивности равенства:**

$$X = X \tag{0.3.122}$$

(равенство $X = X$ верно для всех классов X).

MK-2 **Аксиома симметричности равенства:**

$$X = Y \Rightarrow Y = X \tag{0.3.123}$$

(равенство $X = Y$ не отличается от равенства $Y = X$).

MK-3 **Аксиома транзитивности равенства:**

$$(X = Y \,\&\, Y = Z) \Rightarrow X = Z \tag{0.3.124}$$

(равенства $X = Y$ и $Y = Z$ влекут за собой равенство $X = Z$).

MK-4 **Аксиома инвариантности символа принадлежности:**

$$(X = A \;\&\; Y = B \;\&\; X \in Y) \Rightarrow A \in B \tag{0.3.125}$$

(в отношение $X \in Y$ можно подставлять классы, равные X и Y, и при этом будут получаться следствия).

Аксиома невырожденности.

[26] Понятие выводимой секвенции в LK для языка теории множеств было определено на с.13.
[27] Отношение следования между формулами в LK для языка теории множеств было определено на с.13.
[28] Понятие теоремы (выводимой формулы) в LK для языка теории множеств было определено на с.19.

MK-5 **Аксиома невырожденности**[29]**:**

$$\exists X\ \exists Y \quad X \in Y. \tag{0.3.126}$$

(существуют классы X и Y такие, что $X \in Y$).

Аксиома объемности. Следующая аксиома объясняет, как отношение принадлежности $\in$ связано с *равенством объектов*.

MK-6 **Аксиома объемности:**

$$X = Y \iff \forall A \quad (A \in X \iff A \in Y) \tag{0.3.127}$$

(два класса X и Y совпадают, если и только если они «имеют одинаковый набор элементов»).

! **0.3.1.** В одну сторону это утверждение следует из аксиомы инвариантности MK-4: если $X = Y$, то условие $A \in X \ \Leftrightarrow\ A \in Y$ выполняется автоматически. Поэтому содержательный смысл MK-6 состоит в импликации в левую сторону:

$$X = Y \impliedby \forall A \quad (A \in X \iff A \in Y) \tag{0.3.128}$$

Аксиома выделения. Из аксиомы объемности MK-6 следует, что для описания объекта теории множеств (класса) достаточно (и необходимо) описать входящие в него элементы. Это используется в следующей аксиоме, формализующей способ построения новых классов из уже имеющихся.

MK-7 **Аксиома выделения:** *пусть φ – формула теории множеств с единственной свободной переменной X, не содержащая переменные Y и Z, тогда*

$$\exists Y \quad (X \in Y \iff (\exists Z\ X \in Z) \,\&\, \varphi) \tag{0.3.129}$$

то есть существует некий класс Y, элементами которого являются в точности классы X, для которых истинны следующие два высказывания:

— *во-первых, должен существовать класс Z, содержащий X в качестве своего элемента,*

$$\exists Z \quad X \in Z, \tag{0.3.130}$$

— *и, во-вторых, для X должно быть истинным само утверждение φ:*

$$\varphi.$$

Как и в теории NST, аксиома MK-7 позволяет определять объекты:

- Объект Y в формуле (0.3.129) будет единственным по аксиоме MK-7, поэтому ему можно приписать обозначение. Это обозначение выглядит так:

$$\{X : \varphi\}$$

и, если φ не содержит переменной T, характеризуется оно высказыванием

$$T \in \{X : \varphi\} \quad \iff \quad \varphi\Big|_{X=T}$$

Считается, что первое из этих требований, (0.3.130), автоматически добавляется к каждой формуле φ такого вида, когда описывается определяемый ею класс. Поскольку строить новые классы в этой науке приходится постоянно, удобно ввести некий термин, обозначающий объекты X со свойством (0.3.130). Таким термином является слово “множество”:

- Класс X называется *множеством*, если существует класс Y, содержащий X в качестве элемента:

$$\exists Y \quad X \in Y.$$

Если же такого Y не существует, то класс X называется *собственным классом.*

[29]Аксиома MK-5 в действительности не очень важна, потому что избыточна: она является формальным следствием аксиомы бесконечности MK-13 на с.63. Нам она нужна для методических целей: она дает возможность доказывать результаты, важные для понимания предмета, раньше, чем это было бы возможным без нее.

Это определение позволяет понятным образом упростить аксиому выделения:

MK-7′ **Аксиома выделения:** пусть φ – формула теории множеств с единственной свободной переменной X, не содержащая переменную Y, тогда φ определяет класс объектов, обозначаемый символом
$$\{X : \varphi\},$$
элементами которого являются в точности *множества* X, для которых истинно утверждение φ.

◇ **0.3.2. Пустой класс $\varnothing$.** Следующее равенство определяет так называемый *пустой класс*:
$$\varnothing := \{X : X \neq X\}. \qquad (0.3.131)$$
(символ := здесь означает, что это соотношение следует понимать как определение, то есть как декларацию, согласно которой символ слева от := будет использоваться в тексте всюду для обозначения объекта, лежащего справа от этого знака).

В соответствии с аксиомой выделения, расшифровывается эта запись так: элементами класса $\varnothing$ считаются те и только те множества X, которые не равны самому себе. Поскольку по аксиоме MK-1 таких X не бывает (высказывание $X = X$ считается верным всегда), класс $\varnothing$ вообще не содержит никаких элементов (отчего и называется пустым).

◇ **0.3.3. Класс Set всех множеств.** Следующее равенство определяет так называемый *класс всех множеств*:
$$\mathtt{Set} := \{X : X = X\}. \qquad (0.3.132)$$
Это расшифровывается так: элементами класса Set считаются те и только те множества X, которые равны самому себе. Поскольку по аксиоме MK-1 это верно для любого X, класс Set содержит все на свете множества (и только их).

Как и в наивной теории множеств, в теории Морса-Келли

! **0.3.4.** Классы $\varnothing$ и Set не совпадают:
$$\varnothing \neq \mathtt{Set} \qquad (0.3.133)$$

Доказательство. Здесь почти слово в слово повторяются рассуждения примера 0.1.10. По аксиоме объемности MK-6, чтобы доказать неравенство $\varnothing \neq \mathtt{Set}$, достаточно подобрать какой-нибудь класс X такой, чтобы
$$X \notin \varnothing \ \& \ X \in \mathtt{Set}\,.$$
Для этого воспользуемся аксиомой MK-5 и рассмотрим какие-нибудь два класса X и Y такие, что
$$X \in Y.$$
Понятно, что X является множеством, поэтому $X \in \mathtt{Set}$. С другой стороны, $X \notin \varnothing$ (потому что $Z \in \varnothing$ невозможно ни для какого Z). □

(b) Аксиомы подмножеств, объединения и регулярности

Отношение включения $\subseteq$ и аксиома подмножеств.

- Говорят, что *класс X содержится в классе Y*, или что X *является подклассом класса* Y, и изображают это записью
$$X \subseteq Y$$
или записью
$$Y \supseteq X,$$
если всякий элемент Z класса X является также элементом класса Y:
$$X \subseteq Y \quad \Leftrightarrow \quad \forall Z \quad (Z \in X \Rightarrow Z \in Y). \qquad (0.3.134)$$
Отношение $\subseteq$ называется *отношением включения*. Запись
$$X \subseteq Y \subseteq Z$$
эквивалентна высказыванию
$$X \subseteq Y \ \& \ Y \subseteq Z.$$
Отрицание отношения $\subseteq$ записывается символом $\nsubseteq$:
$$X \nsubseteq Y \quad \Longleftrightarrow \quad \neg(X \subseteq Y).$$

- Полезно также ввести отношение строгого включения: говорят, что *класс X строго содержится в классе Y*, или что X *является строгим подклассом класса Y*, и изображают это записью
$$X \subset Y$$
или записью
$$Y \supset X,$$
если
$$X \subseteq Y \ \&\ X \neq Y.$$
Отрицание отношения $\subset$ записывается символом $\not\subset$:
$$X \not\subset Y \quad\Longleftrightarrow\quad \neg(X \subset Y).$$

Свойства отношения включения $\subseteq$:

1° *Всякий класс X содержит пустой класс $\varnothing$ и содержится в классе* `Set` *всех множеств:*
$$\varnothing \subseteq X \subseteq \texttt{Set}\,. \tag{0.3.135}$$

2° *Рефлексивность: любой класс X является своим подклассом:*
$$X \subseteq X. \tag{0.3.136}$$

3° *Антисимметричность: отношения $X \subseteq Y$ и $Y \subseteq X$ выполняются одновременно тогда и только тогда, когда классы X и Y совпадают:*
$$X \subseteq Y \subseteq X \quad\Longleftrightarrow\quad X = Y. \tag{0.3.137}$$

4° *Транзитивность: если $X \subseteq Y$ и $Y \subseteq Z$, то $X \subseteq Z$:*
$$X \subseteq Y \subseteq Z \quad\Longrightarrow\quad X \subseteq Z. \tag{0.3.138}$$

Доказательство. На странице 29 мы говорили, что все утверждения (теоремы) теории MK можно доказать средствами исчисления секвенций LK (то есть построив выводом в теории MK, как мы его определили на с.28). Это касается и свойств (0.3.135) – (0.3.138). Например, свойство (0.3.137), если его сначала упростить
$$X \subseteq Y \subseteq X \quad\Rightarrow\quad X = Y. \tag{0.3.139}$$
а затем переформулировать на языке теории MK,
$$\Big(\big(\forall A\ (A \in X\ \Rightarrow\ A \in Y)\big)\ \&\ \big(\forall A\ (A \in Y\ \Rightarrow\ A \in X)\big)\Big) \quad\Rightarrow\quad X = Y, \tag{0.3.140}$$
будет иметь такой вывод:
$$\dfrac{\dfrac{(\forall A\ \alpha)\ \&\ (\forall A\ \beta) \vdash \forall A\ (\alpha\ \&\ \beta)\ \ (0.2.67) \qquad \dfrac{\dfrac{\vdash (\forall A\ A \in X \Leftrightarrow A \in Y) \Rightarrow X = Y\ \ (0.3.128)}{\forall A\ (A \in X \Leftrightarrow A \in Y) \vdash X = Y}\text{теорема 0.2.3}}{\forall A\ (\alpha\ \&\ \beta) \vdash X = Y}(0.2.24)}{(\forall A\ A \in X \Rightarrow A \in Y)\ \&\ (\forall A\ A \in Y \Rightarrow A \in X) \vdash X = Y}(0.2.33)}{(\forall A\ A \in X \Rightarrow A \in Y)\ \&\ (\forall A\ A \in Y \Rightarrow A \in X) \quad\Rightarrow\quad X = Y}(0.2.40)$$
где α — формула $A \in X \Rightarrow A \in Y$, а β — формула $A \in Y \Rightarrow A \in X$. Мы оставляем читателю проверку остальных свойств. Как мы говорили на с.29, в дальнейшем мы будем оформлять все доказательства в виде обычных текстовых рассуждений, без деревьев Генцена. □

MK-8 **Аксиома подмножеств:** для всякого множества X существует множество Y такое что
$$\forall Z\ (Z \subseteq X \Rightarrow Z \in Y). \tag{0.3.141}$$

Теорема 0.3.1. *Если X – множество, и $Z \subseteq X$, то Z – тоже множество.*

Доказательство. По аксиоме MK-8, существует множество Y такое, что справедливо (0.3.141). Поскольку наш класс Z содержится в X, $Z \subseteq X$, мы получаем $Z \in Y$, и значит, Z – множество. □

◇ **0.3.5.** Пустой класс $\varnothing$ является множеством:

$$\varnothing \in \mathtt{Set}\,. \qquad (0.3.142)$$

Доказательство. Воспользуемся аксиомой MK-5 и выберем классы X и Y так, чтобы $X \in Y$. Понятно, что класс X будет множеством. С другой стороны, по свойству (0.3.135), X содержит пустой класс $\varnothing$. Мы получаем

$$\varnothing \subseteq X \in \mathtt{Set}\,.$$

По теореме 0.3.1 из этого следует, что $\varnothing$ – множество. □

◇ **0.3.6.** Класс $\mathtt{Set}$ всех множеств не является множеством:

$$\mathtt{Set} \notin \mathtt{Set}\,. \qquad (0.3.143)$$

Доказательство. Рассмотрим класс $R = \{X : X \notin X\}$ (который можно назвать классом Рассела, имея в виду пример из антиномии на с.6). По определению (то есть по аксиоме выделения), для всякого класса X

$$X \in R \quad \Leftrightarrow \quad X \in \mathtt{Set}\ \&\ X \notin X.$$

В частности, для $X = R$ получаем:

$$R \in R \quad \Leftrightarrow \quad R \in \mathtt{Set}\ \&\ R \notin R.$$

Если бы было верно $R \in \mathtt{Set}$, это привело бы к противоречию:

$$R \in R \quad \Leftrightarrow \quad R \notin R.$$

Значит, $R \notin \mathtt{Set}$, то есть R – не множество. С другой стороны, как любой класс, R содержится в $\mathtt{Set}$ в силу (0.3.135):

$$R \subseteq \mathtt{Set}\,.$$

Если бы при этом $\mathtt{Set}$ было множеством, мы по теореме 0.3.1 получили бы, что R – тоже множество, и это было бы противоречием с тем, что мы уже доказали про R. Значит, $\mathtt{Set}$ – не множество. □

Экспонента 2^X.

- *Экспонентой* произвольного класса X называется класс

$$2^X = \{Z : \ Z \subseteq X\} \qquad (0.3.144)$$

◇ **0.3.7.** Экспонента класса всех множеств совпадает с классом всех множеств:

$$2^{\mathtt{Set}} = \mathtt{Set} \qquad (0.3.145)$$

Доказательство. Если $Y \in 2^{\mathtt{Set}} = \{Z : \ Z \subseteq \mathtt{Set}\}$, то по аксиоме выделения МК-7′, Y должно быть множеством: $Y \in \mathtt{Set}$. Мы получаем включение $2^{\mathtt{Set}} \subseteq \mathtt{Set}$. Наоборот, если $Y \in \mathtt{Set}$, то, поскольку Y является классом, в силу (0.3.135) мы получаем, что $Y \subseteq \mathtt{Set}$. Таким образом, одновременно $Y \in \mathtt{Set}$ и $Y \subseteq \mathtt{Set}$, и значит, $Y \in 2^{\mathtt{Set}}$. Это доказывает включение $\mathtt{Set} \subseteq 2^{\mathtt{Set}}$. Применяя (0.3.137), мы получаем $2^{\mathtt{Set}} = \mathtt{Set}$. □

Теорема 0.3.2. *Если X – множество, то 2^X – тоже множество, и для всякого класса Z*

$$Z \subseteq X \quad \Leftrightarrow \quad Z \in 2^X \qquad (0.3.146)$$

Доказательство. Пусть X – множество. Тогда по аксиоме MK-8 можно подобрать множество Y такое, что справедливо (0.3.141): если $Z \subseteq X$, то $Z \in Y$. Отсюда следует, что $2^X \subseteq Y$. При этом Y – множество, поэтому по теореме 0.3.1, 2^X тоже должно быть множеством. □

Объединение и пересечение двух классов. Аксиома попарного объединения.

- *Пересечением классов X и Y* называется класс

$$X \cap Y = \{Z : \ Z \in X\ \&\ Z \in Y\} \qquad (0.3.147)$$

- *Объединением классов X и Y* называется класс

$$X \cup Y = \{Z : \ Z \in X \ \vee\ Z \in Y\} \qquad (0.3.148)$$

Свойства операций пересечения и объединения двух классов:

1° *Связь с пустым классом: для любого класса X*

$$\varnothing \cap X = \varnothing, \qquad \varnothing \cup X = X. \tag{0.3.149}$$

2° *Связь с классом всех множеств: для любого класса X*

$$\mathtt{Set} \cap X = X, \qquad \mathtt{Set} \cup X = \mathtt{Set}\,. \tag{0.3.150}$$

3° *Связь с включением: для любых классов X и Y*

$$X \cap Y \subseteq X \subseteq X \cup Y. \tag{0.3.151}$$

4° *Идемпотентность: всякий класс X, в объединении и в пересечении с самим собой не меняется:*

$$X \cap X = X, \qquad X \cup X = X. \tag{0.3.152}$$

5° *Коммутативность: для любых классов X и Y*

$$X \cap Y = Y \cap X, \qquad X \cup Y = Y \cup X. \tag{0.3.153}$$

6° *Ассоциативность: для любых классов X, Y и Z*

$$(X \cap Y) \cap Z = X \cap (Y \cap Z), \qquad (X \cup Y) \cup Z = X \cup (Y \cup Z) \tag{0.3.154}$$

7° *Дистрибутивность: для любых классов X, Y и Z*

$$(X \cap Y) \cup Z = (X \cup Z) \cap (Y \cup Z), \qquad (X \cup Y) \cap Z = (X \cap Z) \cup (Y \cap Z) \tag{0.3.155}$$

8° *Связь с отношением включения: для любых классов X и Y*

$$X \cap Y = X \iff X \subseteq Y \iff X \cup Y = Y \tag{0.3.156}$$

Теорема 0.3.3. *Если X или Y – множество, то пересечение $X \cap Y$ – тоже множество.*

Доказательство. В силу (0.3.152), достаточно рассмотреть случай, когда множеством является класс X. Тогда, применив (0.3.151), мы получим: $X \cap Y \subseteq X$. То есть класс $X \cap Y$ содержится в множестве X, и по теореме 0.3.1, $X \cap Y$ должен быть множеством. □

Если бы мы задались целью доказать аналогичное утверждение с заменой операции $\cap$ на операцию $\cup$ (и с естественной поправкой, чтобы оба класса X и Y были множествами), мы обнаружили бы, что это утверждение невозможно вывести из перечисленных к настоящему моменту аксиом. Поэтому оно вводится как отдельная аксиома:

MK-9 **Аксиома попарного объединения:** *для любых двух множеств X и Y их объединение $X \cup Y$ – тоже множество.*

Объединение и пересечение элементов класса. Аксиома поэлементного объединения.

- *Объединением элементов класса X* называется класс

$$\cup X = \{Z : \ \exists Y \ (Y \in X \ \& \ Z \in Y)\} \tag{0.3.157}$$

- *Пересечением элементов класса X* называется класс

$$\cap X = \{Z : \ \forall Y \ (Y \in X \Rightarrow Z \in Y)\} \tag{0.3.158}$$

Свойства операций объединения и пересечения элементов класса:

1° *Действие на пустой класс:*

$$\cup\varnothing = \varnothing, \qquad \cap\varnothing = \mathtt{Set}\,. \tag{0.3.159}$$

2° *Действие на класс всех множеств:*

$$\cup\mathtt{Set} = \mathtt{Set}, \qquad \cap\mathtt{Set} = \varnothing. \tag{0.3.160}$$

3° *Монотонность относительно включения: для любых классов X и Y*

$$X \subseteq Y \quad \Longrightarrow \quad \cap X \subseteq \cap Y \ \& \ \cup X \subseteq \cup Y. \qquad (0.3.161)$$

4° *Монотонность относительно принадлежности: для любых классов X и Y*

$$X \in Y \quad \Longrightarrow \quad \cap Y \subseteq X \subseteq \cup Y. \qquad (0.3.162)$$

5° *Объединение элементов множества является множеством:*

$$X \in \mathtt{Set} \quad \Longrightarrow \quad \cup X \in \mathtt{Set}\,. \qquad (0.3.163)$$

6° *Пересечение элементов непустого класса является множеством:*

$$X \neq \varnothing \quad \Longrightarrow \quad \cap X \in \mathtt{Set}\,. \qquad (0.3.164)$$

Следующее устверждение представляет собой аналог теоремы 0.3.3:

Теорема 0.3.4. *Если X – множество, то пересечение его элементов $\cap X$ – тоже множество.*

Как и в случае с операциями попарного пересечения и объединения, аналогичное утверждение с заменой операции $\cap$ на операцию $\cup$ невозможно вывести из перечисленных к настоящему моменту аксиом. Поэтому оно вводится как отдельная аксиома:

MK-10 **Аксиома поэлементного объединения:** *для любого множества X объединение его элементов $\cup X$ – тоже множество.*

Дополнение и разность.

- *Дополнением* класса X называется класс

$$\setminus X = \{Y : \ Y \notin X\} \qquad (0.3.165)$$

Свойства дополнения:

1° *Связь с пустым классом и классом всех множеств:*

$$\setminus\varnothing = \mathtt{Set}, \qquad \setminus\mathtt{Set} = \varnothing. \qquad (0.3.166)$$

2° *Связь с пересечением и объединением: для любого класса X*

$$X \cap \setminus X = \varnothing, \qquad X \cup \setminus X = \mathtt{Set}\,. \qquad (0.3.167)$$

3° *Связь с включением: для любых классов X и Y*

$$X \subseteq Y \quad \Longrightarrow \quad \setminus Y \subseteq \setminus X. \qquad (0.3.168)$$

4° *Инволютивность: для любого класса X*

$$\setminus(\setminus X) = X. \qquad (0.3.169)$$

5° *Законы де Моргана: для любых классов X и Y*

$$\setminus(X \cap Y) = (\setminus X) \cup (\setminus Y), \qquad \setminus(X \cup Y) = (\setminus X) \cap (\setminus Y). \qquad (0.3.170)$$

- *Разностью* классов X и Y называется класс

$$X \setminus Y = X \cap (\setminus Y) \qquad (0.3.171)$$

Свойства разности:

1° *Связь с пустым классом и классом всех множеств: для любого класса X*

$$X \setminus \varnothing = X, \qquad \varnothing \setminus X = \varnothing. \qquad (0.3.172)$$

2° *Связь с пересечением и объединением: для любых классов* X, Y, Z

$$X \cap (Y \setminus Z) = (X \cap Y) \setminus Z, \qquad (X \cup Y) \setminus Z = (X \setminus Z) \cup (Y \setminus Z) \tag{0.3.173}$$

3° *Связь с включением: для любых классов* X, Y, Z

$$X \subseteq Y \quad \Longrightarrow \quad X \setminus Z \subseteq Y \setminus Z \quad \& \quad Z \setminus Y \subseteq Z \setminus X. \tag{0.3.174}$$

4° *Двойная разность: для любых классов* X, Y, Z

$$X \setminus (Y \setminus Z) = (X \setminus Y) \cup (X \cap Y \cap Z). \tag{0.3.175}$$

5° *Законы де Моргана: для любых классов* X, Y, Z

$$X \setminus (Y \cap Z) = (X \setminus Y) \cup (X \setminus Z), \qquad X \setminus (Y \cup Z) = (X \setminus Y) \cap (X \setminus Z). \tag{0.3.176}$$

◇ **0.3.8.** Докажем равенство

$$(A \setminus B) \cap C = (A \cap C) \setminus B \tag{0.3.177}$$

Действительно,

$$x \in (A\setminus B) \cap C \iff x \in A\setminus B \;\&\; x \in C \iff x \in A \;\&\; x \notin B \;\&\; x \in C \iff$$
$$\iff x \in A \cap C \;\&\; x \notin B \iff x \in (A \cap C)\setminus B$$

▷ **0.3.9.** Докажите равенство:

$$A \cup (B \setminus C) = (A \cup B) \setminus \Big[(B \cap C) \setminus A\Big] \tag{0.3.178}$$

Аксиома регулярности.

MK-11 **Аксиома регулярности:** *если* X *– непустой класс,* $X \neq \varnothing$*, то в нем существует элемент* $Y \in X$*, пересечение которого с* X *пусто:*

$$X \cap Y = \varnothing.$$

Следствия из аксиомы регулярности MK-11**:**

1° *Не существует класса* A *такого, что* $A \in A$.

2° *Не существует классов* A, B *таких, что* $A \in B \in A$.

3° *Не существует классов* A, B, C *таких, что* $A \in B \in C \in A$.

Доказательство. Эти утверждения доказываются одинаково, поэтому мы докажем только первые два.

1. Пусть для какого-то A справедливо $A \in A$. Рассмотрим класс

$$X = \{Z : \ Z = A\}.$$

Из условия $A \in A$ следует, что A – множество. Поэтому, по аксиоме выделения MK-7′, у класса X имеется только один элемент, а именно множество A

$$Z \in X \quad \iff \quad Z \in \mathtt{Set} \;\&\; Z = \underset{\underset{\mathtt{Set}}{\Cap}}{A} \quad \iff \quad Z = A. \tag{0.3.179}$$

Отсюда следует, в частности, что X непусто, поэтому можно воспользоваться аксиомой MK-11 и выбрать $Y \in X$ такой что $Y \cap X = \varnothing$. В силу (0.3.179), $Y = A$, и поэтому мы получаем

$$A \cap X = Y \cap X = \varnothing.$$

Но с другой стороны, $A \in A$ и $A \in X$, поэтому $A \in A \cap X = \varnothing$, что невозможно.

2. Пусть для каких-то A и B справедливо $A \in B \in A$. Рассмотрим класс

$$X = \{Z : \ Z = A \ \vee \ Z = B\}.$$

Из условия $A \in B \in A$ следует, что A и B – множества. Поэтому, по аксиоме выделения MK-7′, у класса X элементы совпадают либо с A, либо с B:

$$Z \in X \iff Z \in \mathtt{Set} \ \& \ (Z = \underset{\mathtt{Set}}{\underset{\Cap}{A}} \ \vee \ Z = \underset{\mathtt{Set}}{\underset{\Cap}{B}}) \iff Z = A \ \vee \ Z = B. \tag{0.3.180}$$

Отсюда следует, в частности, что X непусто, поэтому можно воспользоваться аксиомой MK-11 и выбрать $Y \in X$ такой что $Y \cap X = \varnothing$. В силу (0.3.180), $Y = A$ или $Y = B$. Если $Y = A$, то мы получаем

$$A \cap X = Z \cap X = \varnothing$$

Но, с другой стороны, поскольку $B \in A$ и $B \in X$, должно быть $B \in A \cap X = \varnothing$, что невозможно. И точно так же для случая $Y = B$. □

(c) Отношения, отображения и аксиома подстановки

Одночленные классы и пары.

- *Одночленным классом*, порожденным классом X, называется класс

$$\{X\} = \{Y : \ X \in \mathtt{Set} \Rightarrow Y = X\} \tag{0.3.181}$$

Теорема 0.3.5. *Если X – множество, то порожденный им одночленный класс $\{X\}$ – тоже множество, и*

(i) *для всякого класса Y*

$$Y \in \{X\} \quad \Leftrightarrow \quad Y = X,$$

(ii) *пересечение и объединением элементов $\{X\}$ является X:*

$$\cap\{X\} = X = \cup\{X\}.$$

Теорема 0.3.6. *Если X – собственный класс, то*

(i) *порожденный им одночленный класс $\{X\}$ совпадает с* Set*,*

$$\{X\} = \mathtt{Set};$$

(ii) *пересечение и объединением элементов $\{X\}$ описывается равенствами*

$$\cap\{X\} = \varnothing, \qquad \cup\{X\} = \mathtt{Set}\,.$$

◇ **0.3.10.** Напомним, что согласно примеру 0.3.5, пустой класс $\varnothing$ является множеством. Покажем, что одночленный класс $\{\varnothing\}$, порожденный пустым множеством $\varnothing$, не совпадает с пустым множеством:

$$\{\varnothing\} \neq \varnothing \tag{0.3.182}$$

Это следует из аксиомы объемности MK-6: $\varnothing \in \{\varnothing\}$, но $\varnothing \neq \varnothing$.

◇ **0.3.11.** Наоборот, одночленный класс $\{\mathtt{Set}\}$, порожденный классом Set всех множеств, совпадает с классом Set:

$$\{\mathtt{Set}\} = \mathtt{Set}\,. \tag{0.3.183}$$

Это следует из теоремы 0.3.6.

- *Неупорядоченной парой*, порожденной классами X и Y называется класс

$$\{X, Y\} = \{X\} \cup \{Y\} \tag{0.3.184}$$

Теорема 0.3.7. *Если X и Y – множества, то порожденная ими неупорядоченная пара $\{X, Y\}$ является множеством, и*

(i) *для всякого класса Z*

$$Z \in \{X, Y\} \quad \Leftrightarrow \quad (Z = X \ \vee \ Z = Y), \tag{0.3.185}$$

(ii) *при перестановке компонент пара* $\{X,Y\}$ *не меняется*

$$\{X,Y\}=\{Y,X\}.$$

(iii) *пересечение и объединение элементов неупорядоченной пары* $\{X,Y\}$ *описываются формулами*

$$\cap\{X,Y\}=X\cap Y,\qquad \cup\{X,Y\}=X\cup Y.$$

Теорема 0.3.8. *Если* X *или* Y *– собственный класс, то*

(i) *неупорядоченная пара* $\{X,Y\}$ *совпадает с* $\mathtt{Set}$

$$\{X,Y\}=\mathtt{Set};$$

(ii) *при перестановке компонент пара* $\{X,Y\}$ *не меняется*

$$\{X,Y\}=\{Y,X\}.$$

(iii) *пересечение и объединение элементов неупорядоченной пары* $\{X,Y\}$ *описываются формулами*

$$\cap\{X,Y\}=\varnothing,\qquad \cup\{X,Y\}=\mathtt{Set}\,.$$

Доказательство. □

- *Упорядоченной парой*, порожденной классами X и Y называется класс

$$(X,Y)=\{\{X\},\{X,Y\}\}\tag{0.3.186}$$

Теорема 0.3.9. *Если* X *и* Y *– множества, то*

$$(X,Y)\in\mathtt{Set}\tag{0.3.187}$$

$$\cap(X,Y)=\{X\},\qquad \cup(X,Y)=\{X,Y\}\tag{0.3.188}$$

$$\cap\cap(X,Y)=X,\qquad \cap\cup(X,Y)=X\cap Y,\tag{0.3.189}$$

$$\cup\cap(X,Y)=X,\qquad \cup\cup(X,Y)=X\cup Y\tag{0.3.190}$$

$$\big(\cup\cap(X,Y)\big)\cup\Big(\big(\cup\cup(X,Y)\big)\setminus\cup\cap(X,Y)\Big)=Y\tag{0.3.191}$$

Теорема 0.3.10. *Если* X *или* Y *– собственный класс, то*

$$(X,Y)=\mathtt{Set},\tag{0.3.192}$$

$$\cap(X,Y)=\varnothing,\qquad \cup(X,Y)=\mathtt{Set},\tag{0.3.193}$$

$$\cap\cap(X,Y)=\mathtt{Set},\qquad \cap\cup(X,Y)=\varnothing,\tag{0.3.194}$$

$$\cup\cap(X,Y)=\varnothing,\qquad \cup\cup(X,Y)=\mathtt{Set}\tag{0.3.195}$$

Первая формула в (0.3.189) и формула (0.3.191) оправдывают следующие определения.

- *Левой компонентой* класса Z называется класс

$$\mathtt{left}\,Z=\cap\cap Z\tag{0.3.196}$$

- *Правой компонентой* класса Z называется класс

$$\mathtt{right}\,Z=\big(\cup\cap(X,Y)\big)\cup\Big(\big(\cup\cup(X,Y)\big)\setminus\cup\cap(X,Y)\Big)\tag{0.3.197}$$

Из теорем 0.3.9 и 0.3.10 следует

Теорема 0.3.11. *Если X и Y – множества, то*

$$\texttt{left}(X,Y)=X, \qquad \texttt{right}(X,Y)=Y. \tag{0.3.198}$$

Если же X или Y – собственный класс, то

$$\texttt{left}(X,Y)=\texttt{Set}=\texttt{right}(X,Y). \tag{0.3.199}$$

Теорема 0.3.12. *Если X и Y – множества, то для любых классов U и V*

$$(X,Y)=(U,V) \iff X=U \ \& \ Y=V. \tag{0.3.200}$$

- Для всякой формулы φ условимся символ $\{(X,Y): \ \varphi\}$ употреблять для обозначения класса, определенного равенством

$$\{(X,Y): \ \varphi\}=\{Z: \ \exists X \ \exists Y \ Z=(X,Y) \ \& \ \varphi\} \tag{0.3.201}$$

Декартово произведение.

- *Декартовым произведением* классов X и Y называется класс

$$X\times Y=\{(A,B): \ A\in X \ \& \ B\in Y\} \tag{0.3.202}$$

Теорема 0.3.13. *Если X и Y – множества, то $X\times Y$ – тоже множество.*

Доказательство. Заметим, что класс $2^{2^{X\cup Y}}$ является множеством:

$$X\in\texttt{Set} \ \& \ Y\in\texttt{Set} \overset{\text{аксиома MK-9}}{\Longrightarrow} X\cup Y\in\texttt{Set} \overset{\text{теорема 0.3.2}}{\Longrightarrow}$$
$$\Longrightarrow 2^{X\cup Y}\in\texttt{Set} \overset{\text{теорема 0.3.2}}{\Longrightarrow} 2^{2^{X\cup Y}}\in\texttt{Set}$$

Отсюда следует, что нам достаточно доказать включение

$$X\times Y\subseteq 2^{2^{X\cup Y}} \tag{0.3.203}$$

– и тогда по теореме 0.3.1 это будет означать, что $X\times Y$ – тоже множество. Это делается так:

$$(A,B)\in X\times Y \implies A\in X \ \& \ B\in Y \implies A\in X\cup Y \ \& \ B\in X\cup Y \overset{(0.3.146)}{\Longrightarrow}$$
$$\Longrightarrow \{A\}\in 2^{X\cup Y} \ \& \ \{A,B\}\in 2^{X\cup Y} \overset{(0.3.146)}{\Longrightarrow} (A,B)=\{\{A\},\{A,B\}\}\in 2^{2^{X\cup Y}}.$$

□

Отношения.

- *Отношением* называется произвольный класс r, элементами которого являются упорядоченные пары:

$$C\in r \implies \exists A \ \exists B \quad C=(A,B).$$

(Это автоматически означает, что компоненты A и B каждой такой пары (A,B) должны быть множествами, потому что иначе пара (A,B) не могла бы быть элементом r.)

! **0.3.12.** Всякое отношение r является подклассом в декартовом произведении $X\times Y$ некоторых классов X и Y:

$$r\subseteq X\times Y \tag{0.3.204}$$

В качестве X и Y можно взять, например, класс Set всех множеств.

- Формула $A\in B$, рассматриваемая на классе множеств, то есть когда $A,B\in\texttt{Set}$, определяет некоторое отношение,

$$e=\{(A,B): \ A\in B\}, \tag{0.3.205}$$

которое естественно называть *отношением* *принадлежности.*

При этом формально формула $A \in B$ не будет эквивалентна формуле $(A, B) \in e$,

$$A \in B \not\Longleftrightarrow \quad (A, B) \in e,$$

потому что если B – не множество, то в силу (0.3.192), $(A, B) = \mathtt{Set}$, и поэтому $(A, B) \notin e$. По этой причине для обозначения этого отношения мы ввели здесь букву e вместо ожидаемого символа $\in$. Это отношение понадобится нам ниже, но в дальнейшем мы все же будем пользоваться символом $\in$ для его обозначения, чтобы не усложнять запись без необходимости. Мы надеемся, что это не вызовет недоразумений.

Предложение 0.3.14. *Класс e не является множеством:*

$$e \notin \mathtt{Set} \tag{0.3.206}$$

Доказательство. Предположим, что $e \in \mathtt{Set}$. Тогда $\{e\} \in \mathtt{Set}$, то есть e и $\{e\}$ – множества. При этом $e \in \{e\}$, и значит, $(e, \{e\}) \in e$. Вспомнив определение упорядоченной пары, мы получим

$$\{\{e\}, \{e, \{e\}\}\} = (e, \{e\}) \in e$$

С другой стороны, $e \in \{e\}$ и $\{e\} \in \{\{e\}, \{e, \{e\}\}\}$, и мы получаем цепочку

$$e \in \{e\} \in \{\{e\}, \{e, \{e\}\}\} \in e,$$

которая невозможна по свойству 3° на с.36. □

- Точно так же формула $A \subseteq B$, рассматриваемая на классе множеств, $A, B \in \mathtt{Set}$, определяет некоторое отношение,

$$s = \{(A, B) : \ A \subseteq B\}, \tag{0.3.207}$$

которое естественно называть *отношением включения.*

Как и в случае с $\in$, формула $A \subseteq B$ не будет эквивалентна формуле $(A, B) \in s$,

$$A \subseteq B \not\Longleftrightarrow \quad (A, B) \in s,$$

потому что если B – не множество, то в силу (0.3.192), $(A, B) = \mathtt{Set}$, и $(A, B) \notin s$.

Предложение 0.3.15. *Класс s не является множеством:*

$$s \notin \mathtt{Set} \tag{0.3.208}$$

Доказательство. Предположим, что $s \in \mathtt{Set}$. Поскольку $s \subseteq s$, мы получаем $(s, s) \in s$. Вспомнив определение упорядоченной пары, мы получим

$$\{\{s\}\} = \{\{s\}, \{s\}\} = \{\{s\}, \{s, s\}\} = (s, s) \in e$$

Это дает цепочку

$$s \in \{s\} \in \{\{s\}\} \in s,$$

которая невозможна по свойству 3° на с.36. □

- Если r и s – два отношения, то их *композицией* называется класс

$$r \circ s = \{U : \ \exists A \ \exists B \ \exists C \quad U = (A, C) \ \& \ (A, B) \in r \ \& \ (B, C) \in s\} \tag{0.3.209}$$

- В дальнейшем для всякой формулы P от переменных A и C условимся употреблять обозначение $\{(A, C) : P\}$ вместо $\{U : \exists A \ \exists C \quad U = (A, C) \ \& \ P\}$. Это позволяет сократить формулы, например, (0.3.209) тогда можно будет записать так:

$$r \circ s = \{(A, B) : \ \exists B \quad (A, B) \in r \ \& \ (B, C) \in s\} \tag{0.3.210}$$

- Если r – отношение, то *обратным отношением* к нему называется отношение

$$r^{-1} = \{(A, B) : \ (B, A) \in r\} \tag{0.3.211}$$

Теорема 0.3.16. *Для любых отношений r, s, t*

$$(r \circ s) \circ t = r \circ (s \circ t), \tag{0.3.212}$$

$$r \circ (s \cap t) = (r \circ s) \cap (r \circ t), \tag{0.3.213}$$

$$r \circ (s \cup t) = (r \circ s) \cup (r \circ t). \tag{0.3.214}$$

$$(r^{-1})^{-1} = r \tag{0.3.215}$$

$$(r \circ s)^{-1} = s^{-1} \circ r^{-1} \tag{0.3.216}$$

- Если r – отношение, то для любых классов X и Y запись XrY эквивалентна записи $(X,Y)\in r$:
$$XrY \quad\Longleftrightarrow\quad (X,Y)\in r \tag{0.3.217}$$
- Говорят, что r – *отношение на классе* X, если $r\subseteq X\times X$.

Отображения.

- Класс f называется *отображением*, если он является отношением и удовлетворяет условию:
$$\forall X\ \forall Y\ \forall Z\quad \Big(\big((X,Y)\in f\ \&\ (X,Z)\in f\big)\ \Rightarrow\ Y=Z\Big). \tag{0.3.218}$$
- *Областью определения* класса (необязательно, отображения) f называется класс
$$\mathsf{D}(f)=\{X:\ \exists Y\quad (X,Y)\in f\}. \tag{0.3.219}$$
- *Областью значений* (или *образом*) класса (необязательно, отображения) f называется класс
$$\mathsf{R}(f)=\{Y:\ \exists X\quad (X,Y)\in f\}. \tag{0.3.220}$$
- *Значением* класса (необязательно, отображения) f на классе X называется класс
$$f(X)=\cap\{Y:\ (X,Y)\in f\}. \tag{0.3.221}$$
- Запись
$$f:X\to Y \tag{0.3.222}$$
означает, что f является отображением, область определения которого совпадает с классом X, а область значений лежит в классе Y:
$$\mathsf{D}(f)=X\quad \&\quad \mathsf{R}(f)\subseteq Y. \tag{0.3.223}$$
- Полезно также зарезервировать какое-то обозначение для ситуации, когда условия (0.3.223) ослаблены до условий
$$\mathsf{D}(f)\subseteq X\quad \&\quad \mathsf{R}(f)\subseteq Y. \tag{0.3.224}$$
Мы в таких случаях будем писать
$$f:X\hookrightarrow Y. \tag{0.3.225}$$

◇ **0.3.13.** Можно заметить, что пустое множество $\varnothing$ является отображением, потому что формулы $(X,Y)\in\varnothing$ и $(X,Z)\in\varnothing$, ложны, и значит, из них следует что угодно, в частности $Y=Z$. При этом,
$$\mathsf{D}(\varnothing)=\varnothing=\mathsf{R}(\varnothing) \tag{0.3.226}$$
потому что из $(X,Y)\in\varnothing$ следует $X\in\varnothing$ и $Y\in\varnothing$. Для произвольного класса X значение на нем отображения $\varnothing$ равно
$$\varnothing(X)=\varnothing \tag{0.3.227}$$
потому что
$$\varnothing(X)=\cap\{Y:\ (X,Y)\in\varnothing\}= \\ =\cap\,\mathtt{Set}=(0.3.160)=\varnothing.$$

◇ **0.3.14.** Класс всех множеств $\mathtt{Set}$, наоборот, не является отображением, потому что если X, Y, Z – множества, и $Y\ne Z$ (такие множества Y и Z существуют, например, в силу (0.3.182)), то по теореме 0.3.9, $(X,Y)\in\mathtt{Set}$ и $(X,Z)\in\mathtt{Set}$, но $Y\ne Z$. Несмотря на это, можно найти область определения и область значений класса $\mathtt{Set}$:
$$\mathsf{D}(\mathtt{Set})=\mathtt{Set}=\mathsf{R}(\mathtt{Set}).$$
Действительно, для всякого $X\in\mathtt{Set}$ мы получаем $(X,\varnothing)\in\mathtt{Set}$, и значит $X\in\mathsf{D}(\mathtt{Set})$, а с другой стороны $(\varnothing,X)\in\mathtt{Set}$, и поэтому $X\in\mathsf{R}(\mathtt{Set})$. Определение (0.3.221) позволяет также найти значение класса $\mathtt{Set}$ на произвольном классе X:
$$\mathtt{Set}(X)=\begin{cases}\varnothing, & X\in\mathtt{Set}\\ \mathtt{Set}, & X\notin\mathtt{Set}\end{cases}. \tag{0.3.228}$$
Действительно, если $X\in\mathtt{Set}$, то
$$\mathtt{Set}(X)=\cap\{Y:\ (X,Y)\in\mathtt{Set}\}= \\ =(0.3.187)=\cap\,\mathtt{Set}=(0.3.160)=\varnothing.$$
Если же $X\notin\mathtt{Set}$, то
$$\mathtt{Set}(X)=\cap\{Y:\ (X,Y)\in\mathtt{Set}\}=(0.3.192)= \\ =\cap\{Y:\ (X,Y)\in\mathtt{Set}\}=\cap\varnothing=(0.3.159)=\mathtt{Set}\,.$$

◇ **0.3.15. Характеристическая функция класса.** Пусть X — произвольный класс. Класс

$$f = \Big\{ z : \ \Big(\exists x \in X \ z = (x, \{\varnothing\}) \Big) \vee \vee \Big(\exists x \notin X \ z = (x, \varnothing) \Big) \Big\} \quad (0.3.229)$$

является отображением, удовлетворяющим условиям

$$\mathsf{D}(f) = \mathtt{Set} \ \& \ (f(x) = \{\varnothing\} \ \Leftrightarrow \ x \in X) \ \& \ \& \ (f(x) = \varnothing \ \Leftrightarrow \ x \notin X).$$

Это отображение называется *характеристической функцией* класса X.

Теорема 0.3.17. *Для всякого класса f*

$$X \in \mathsf{D}(f) \quad \Longrightarrow \quad f(X) \in \mathtt{Set} \qquad (0.3.230)$$

$$X \notin \mathsf{D}(f) \quad \Longrightarrow \quad f(X) = \mathtt{Set} \qquad (0.3.231)$$

Доказательство. Если $X \in \mathsf{D}(f)$, то $\{Y : \ (X, Y) \in \mathtt{Set}\} \neq \varnothing$, и в силу (0.3.164) мы получаем

$$f(X) = \cap\{Y : \ (X, Y) \in \mathsf{D}(f)\} \in \mathtt{Set}\,.$$

Если же $X \notin \mathtt{Set}$, то $\{Y : \ (X, Y) \in \mathtt{Set}\} = \varnothing$, и в силу (0.3.159) мы получаем

$$f(X) = \cap\{Y : \ (X, Y) \in \mathsf{D}(f)\} = \cap\varnothing = \mathtt{Set}\,.$$

□

Теорема 0.3.18. *Если f и g — отображения, то их композиция $g \circ f$ — тоже отображение, и для него справедливы соотношения*

$$\mathsf{D}(g \circ f) = \{X \in \mathsf{D}(f) : \ f(X) \in \mathsf{D}(g)\} \subseteq \mathsf{D}(f) \qquad (0.3.232)$$

$$\mathsf{R}(g \circ f) = \{Z \in \mathsf{D}(g) : \ \exists Y \in \mathsf{R}(f) \cap \mathsf{D}(g) \quad g(Y) = Z\} \subseteq \mathsf{R}(g) \qquad (0.3.233)$$

и тождество

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)), \qquad x \in \mathsf{D}(g \circ f) \qquad (0.3.234)$$

- Отображение $f : X \to Y$ называется *биекцией* между классами X и Y, если $Y = \mathsf{R}(f)$ и

$$\forall A \ \forall B \quad (A, B \in \mathsf{D}(f) \ \& \ A \neq B) \quad \Rightarrow \quad f(A) \neq f(B).$$

- Примером биекции является тождественное отображение $\mathrm{id}_X : X \to X$, определенное на любом классе X формулой

$$\mathrm{id}_X(A) = A, \qquad A \in X. \qquad (0.3.235)$$

- Два отображения $f : X \to Y$ и $g : Y \to X$ называются *взаимно обратными*, если

$$g \circ f = \mathrm{id}_X \ \& \ f \circ g = \mathrm{id}_Y\,.$$

  В этом случае отображение g называют также *обратным отображением* для f (а f — обратным отображением для g).

Теорема 0.3.19. *Отображение $f : X \to Y$ тогда и только тогда будет биекцией между X и Y, когда существует обратное ему отображение $g : Y \to X$*

Аксиома подстановки.

MK-12 **Аксиома подстановки:** *если f – отображение, и его область определения $\mathsf{D}(f)$ – множество, то и его область значений $\mathsf{R}(f)$ – тоже множество.*

Свойства отображений:

1° *Если f и g – отображения, то $f \circ g$ – тоже отображение.*

2° *Если f – отображение, то*

$$f = \{(X, Y) : \ Y = f(X)\} \qquad (0.3.236)$$

3° *Отображения f и g совпадают тогда и только тогда, когда они совпадают на всех значениях:*

$$f = g \iff \forall X \ f(X) = g(X) \tag{0.3.237}$$

4° *Если f – отображение, у которого область определения $\mathsf{D}(f)$ является множеством, то f – множество.*

Доказательство. 4. Если f – отображение, и его область определения $\mathsf{D}(f)$ – множество, то по аксиоме MK-12 область значений $\mathsf{R}(f)$ – тоже множество. Значит по теореме 0.3.13, декартово произведение $\mathsf{D}(f) \times \mathsf{R}(f)$ – тоже множество. Отсюда по теореме 0.3.1 класс $f \subseteq \mathsf{D}(f) \times \mathsf{R}(f)$ является множеством. □

- Если X – множество, то для произвольного класса Y символом Y^X обозначается класс, состоящий из отображений $f : X \to Y$:

$$f \in Y^X \iff f : X \to Y. \tag{0.3.238}$$

Теорема 0.3.20. *Если X и Y – множества, то класс Y^X – тоже множество.*

Доказательство. Всякое отображение $f : X \to Y$ является отношением, поэтому элементом декартова произведения $X \times Y$, поэтому справедлива цепочка

$$f \in Y^X \implies f \subseteq X \times Y \implies f \in 2^{X \times Y},$$

Иными словами,

$$Y^X \subseteq 2^{X \times Y}. \tag{0.3.239}$$

Если X и Y – множества, то по теореме 0.3.13, декартово произведение $X \times Y$ – тоже множество. Отсюда по теореме 0.3.2, $2^{X \times Y}$ – тоже множество. Таким образом, в (0.3.239) справа стоит множество, и значит, по теореме 0.3.1, слева – тоже множество. □

Теорема 0.3.21. *Если X, Y, Z – множества, то правила*

$$P(f)(B)(A) = f(B, A), \qquad A \in X, \ B \in Y, \ f \in Z^{Y \times X}. \tag{0.3.240}$$

и

$$Q(g)(B, A) = g(B)(A), \qquad A \in X, \ B \in Y, \ g \in (Z^Y)^X. \tag{0.3.241}$$

определяют пару взаимно обратных биекций между $Z^{Y \times X}$ и $(Z^Y)^X$:

$$P : Z^{Y \times X} \to (Z^Y)^X, \qquad Q : (Z^Y)^X \to Z^{Y \times X}$$

Доказательство. По теореме 0.3.19 здесь достаточно проверить, что P и Q взаимно обратны:

$$Q \circ P = \mathrm{id}_{Z^{Y \times X}}, \qquad P \circ Q = \mathrm{id}_{(Z^Y)^X}.$$

Это делается прямым вычислением:

$$Q(P(f))(B, A) = (0.3.241) = P(f)(B)(A) = (0.3.240) = f(B, A), \quad f \in Z^{Y \times X}.$$

и

$$P(Q(g))(B)(A) = (0.3.240) = Q(g)(B, A) = (0.3.241) = g(B)(A), \quad g \in (Z^Y)^X.$$

□

- Для всякого отображения f и любого класса X введем следующие обозначения:

$$\bigcup_{Y \in X} f(Y) = \{Z : \ \exists Y \quad Y \in X \ \& \ Z \in f(Y)\} \tag{0.3.242}$$

$$\bigcap_{Y \in X} f(Y) = \{Z : \ \forall Y \quad Y \in X \Rightarrow Z \in f(Y)\} \tag{0.3.243}$$

Теорема 0.3.22. *Если отображение f является множеством, то для любого множества X классы $\bigcup_{Y \in X} f(Y)$ и $\bigcap_{Y \in X} f(Y)$ являются множествами.*

Ограничение и продолжение отображения.

- Для всякого отношения r и любого класса X *ограничением r на X* называется отношение

$$r\big|_X = r \cap (X \times \texttt{Set}) \tag{0.3.244}$$

Отношение r при этом называется *продолжением* отношения $r\big|_X$.

Теорема 0.3.23. *Для всякого отображения f его ограничение $f\big|_X$ на произвольный класс X является отображением, причем его область определения описывается равенством*

$$\mathsf{D}(f\big|_X) = \mathsf{D}(f) \cap X \tag{0.3.245}$$

а действие – правилом

$$f\big|_X(Y) = f(Y), \qquad Y \in \mathsf{D}(f) \cap X. \tag{0.3.246}$$

Отношение эквивалентности.

- Отношение $r \subseteq X \times X$ называется *отношением эквивалентности* на классе X, если оно обладает следующими свойствами:
  — *рефлексивность*:
  $$ArA, \tag{0.3.247}$$
  — *симметричность*:
  $$ArB \;\Rightarrow\; BrA, \tag{0.3.248}$$
  — *транзитивность*:
  $$(ArB \;\&\; BrC) \;\Rightarrow\; ArC. \tag{0.3.249}$$

- Если r — отношение эквивалентности на классе X, то *классом эквивалентности* по отношению r называется произвольный непустой класс $Y \subseteq X$ такой, что

$$\forall A \in X\ \forall B \in Y\ \big(A \in Y \quad \Leftrightarrow \quad ArB\big) \tag{0.3.250}$$

Лемма 0.3.24. *Любые два класса эквивалентности Y и Z либо не пересекаются, либо совпадают.*

Доказательство. Если существует $A \in Y \cap Z$, то для всякого $B \in X$ мы получим:

$$B \in Y \quad \Longleftrightarrow \quad ArB \quad \Longleftrightarrow \quad B \in Z$$

□

Теорема 0.3.25. *Пусть r — отношение эквивалентности на непустом классе X такое что все классы эквивалентности по нему являются множествами. Тогда*

(i) существует класс X/r, элементами которого являются в точности классы эквивалентности по отношению r:

$$Y \in X/r \quad \Leftrightarrow \quad \Big(Y \subseteq X \;\&\; \forall A \in X\ \forall B \in Y\ \big(A \in Y \quad \Leftrightarrow \quad ArB\big)\Big) \tag{0.3.251}$$

(ii) существует отображение $p : X \to X/r$ со свойством

$$\forall A \in X \quad A \in p(A) \tag{0.3.252}$$

Отображение $p : X \to X/r$ сюръективно.

- Класс X/r называется *фактор-классом* класса X по отношению эквивалентности r, а отображение $p : X \to X/r$ – *фактор-отображением* (класса X по отношению эквивалентности r).

Доказательство. Определим класс X/r формулой

$$X/r = \{Y :\ \varnothing \neq Y \subseteq X \;\&\; \forall A \in X\ \forall B \in Y\ \big(A \in Y \quad \Leftrightarrow \quad ArB\big)\}$$

Поскольку каждый класс эквивалентности Y является множеством, X/r будет состоять в точности из всех классов эквивалентности по r. С другой стороры, отображение p определяется формулой

$$p(A) = \{B :\ B \in X \;\&\; ArB\}.$$

Ясно, что $A \in p(A)$, а с другой стороны, $p(A)$ является классом эквивалентности. Отображение p будет сюръективно, потому что если Y – класс эквивалентности, то по определению он непуст, поэтому найдется $A \in Y$. Для него мы получим $A \in X$ и $A \in p(A)$. Значит, Y и $p(A)$ – классы эквивалентности, содержащие A, и по лемме 0.3.24 мы получаем, что $Y = p(A)$. □

Теорема 0.3.26. *Если X – множество, то на нем любое отношение эквивалентности r удовлетворяет условиям теоремы 0.3.25, а фактор-класс X/r является множеством.*

Доказательство. По теореме 0.3.25, фактор-отображение $p : X \to X/r$ сюръективно, поэтому

$$\mathsf{R}(p) = X/r,$$

и по аксиоме MK-12, этот класс должен быть множеством. □

◇ **0.3.16.** Отношение равенства

$$ArB \iff A = B$$

является отношением эквивалентности на любом классе X (например, на классе `Set` всех множеств).

Классами эквивалентности по такому отношению будут только одноэлементные классы: $Y = \{A\}$, $A \in X$. Поэтому фактор-отображение $p : X \to X/r$ будет биекцией.

◇ **0.3.17.** Теорему 0.3.25 можно в некотором смысле обратить: произвольное отображение $f : X \to Z$ порождает отношение эквивалентности на классе X по формуле

$$ArB \iff f(A) = f(B).$$

(d) Определения по индукции

Наполненные классы.

- Класс X называется *наполненным*, если всякий его элемент является его подклассом:

$$\forall A \in X \quad A \subseteq X \tag{0.3.253}$$

◇ **0.3.18.** Очевидно, пустой класс $\varnothing$ наполнен.

◇ **0.3.19.** Одночленный класс $\{\varnothing\}$ также наполнен.

◇ **0.3.20.** Упорядоченная пара $\{\varnothing, \{\varnothing\}\}$ является наполненным классом.

◇ **0.3.21.** Эту цепочку примеров можно продолжать, потому что если X – наполненное множество, то класс $X \cup \{X\}$ – тоже наполненное множество. В частности, наполнены классы

$$\{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\} := \{\varnothing, \{\varnothing\}\} \cup \{\{\varnothing, \{\varnothing\}\}\},$$

$$\{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}\} := \\ = \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\} \cup \{\{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}\}$$

и так далее.

◇ **0.3.22.** Класс `Set` всех множеств, очевидно, наполнен.

! **0.3.23.** Следующие примеры показывают, что условие наполненности класса (несмотря на внешнее сходство) не эквивалентно условию транзитивности отношения $\in$ на данном классе.

◇ **0.3.24.** Класс $X = \{\{\varnothing\}\}$ обладает тем свойством, что на нем отношение принадлежности $\in$ транзитивно,

$$\forall A, B, C \in X \quad A \in B \in C \Rightarrow A \in C \tag{0.3.254}$$

но при этом класс X не наполнен.

Доказательство. Цепочка $A \in B \in C \in \{\{\varnothing\}\}$ невозможна: можно построить цепочку из двух знаков $\in$

$$\varnothing \in \{\varnothing\} \in \{\{\varnothing\}\},$$

но левее уже никаких классов не подпишешь. Отсюда следует, что класс $X = \{\{\varnothing\}\}$ тривиально удовлетворяет условию (0.3.254). Но он не удовлетворяет условию (0.3.253), потому что для него нужно было бы, чтобы из

$$\{\varnothing\} \in \{\{\varnothing\}\}$$

следовало

$$\{\varnothing\} \subseteq \{\{\varnothing\}\}$$

то есть

$$\varnothing \in \{\{\varnothing\}\},$$

а это неверно. □

◇ **0.3.25.** Класс

$$X = \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\{\varnothing\}\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}$$

наполнен, но на нем отношение принадлежности $\in$ не транзитивно.

Свойства наполненных классов:

1° *Всякий непустой наполненный класс X содержит в качестве элемента пустое множество:*

$$\varnothing \in X$$

2° *Пересечение $X \cap Y$ и объединение $X \cup Y$ любых двух наполненных классов X и Y являются наполненными классами.*

3° *Если X – класс, элементы которого являются наполненными классами, то пересечение $\cap X$ и объединение $\cup X$ элементов класса X также являются наполненными классами.*

Доказательство. 1. По аксиоме регулярности MK-11, существует элемент $Y \in X$ такой, что $Y \cap X = \varnothing$. Но с другой стороы, поскольку класс X насыщен, $Y \subseteq X$, и поэтому

$$Y = Y \cap X = \varnothing.$$

2. Если X и Y – наполненные классы, и $A \in X \cap Y$, то $A \in X$ и $A \in Y$, и, посольку X и Y наполненны, $A \subseteq X$ и $A \subseteq Y$, и отсюда $A \subseteq X \cap Y$. Если же $A \in X \cup Y$, то $A \in X$ или $A \in Y$, и, посольку X и Y наполненны, $A \subseteq X$ или $A \subseteq Y$, и отсюда $A \subseteq X \cap Y$.

3. Утверждение 3° доказывается аналогично. □

Теоремы об определении по индукции.

- Говорят, что *отображение h индуктивно* (или *рекурсивно*) *определяет отображение f*, или что *отображение f индуктивно* (или *рекурсивно*) *определено отображением h*, если

  (i) область определения $\mathsf{D}(f)$ отображения f является наполненным классом:

  $$\forall X \in \mathsf{D}(f) \quad X \subseteq \mathsf{D}(f) \tag{0.3.255}$$

  (ii) значение отображения f на всяком элементе $X \in \mathsf{D}(f)$ определяется значениями f на элементах $Y \in X$ с помощью функции h по формуле

  $$\forall X \in \mathsf{D}(f) \quad f(X) = h(f|_X); \tag{0.3.256}$$

  (iii) f продолжает любое другое отображение со свойствами (i) и (ii): если g – какое-то другое отображение, удовлетворяющее (i) и (ii), то $g \subseteq f$.

Следующая теорема – один из из самых важных результатов этой науки:

Теорема 0.3.27 (об определении по индукции)**.** *Всякое отображение h индуктивно определяет единственное отображение f.*

Доказательство. Пусть F – класс отображений, являющихся множествами и удовлетворяющих условиям (0.3.255) и (0.3.324):

$$F = \{f : \forall X \in \mathsf{D}(f) \quad X \subseteq \mathsf{D}(f) \ \& \ f(X) = h(f|_X)\}.$$

Заметим, что класс F непуст, потому что содержит по крайней мере пустое множество:

$$\varnothing \in F.$$

Покажем далее, что любые два отображения из класса F совпадают на общей области определения:

$$\forall f, g \in F \quad f\big|_{\mathsf{D}(f)\cap\mathsf{D}(g)} = g\big|_{\mathsf{D}(f)\cap\mathsf{D}(g)} \tag{0.3.257}$$

Действительно, пусть $f, g \in F$. Рассмотрим класс

$$A = \{X : \ X \in \mathsf{D}(f) \cap \mathsf{D}(g) \ \& \ f(X) \neq g(X)\}, \tag{0.3.258}$$

и предположим, что он непуст, $A \neq \varnothing$. Тогда по аксиоме регулярности MK-11 в нем существует элемент B, пересечение которого с A пусто:

$$B \in A \quad \& \quad B \cap A = \varnothing.$$

Первое означает, что значения отображений f и g различаются на B, а второе – что их ограничения на B совпадают:

$$f(B) \neq g(B) \quad \& \quad f\big|_B = g\big|_B. \tag{0.3.259}$$

Поскольку $B \in A$, в силу (0.3.258), мы получаем $B \in \mathsf{D}(f) \cap \mathsf{D}(g)$. А с другой стороны, оба отображения f и g принадлежат F, и значит, удовлетворяют условию (0.3.324). Отсюда, используя второе утверждение в (0.3.259), мы получаем:

$$f(B) = (0.3.324) = h(f\big|_B) = (0.3.259) = h(g\big|_B) = (0.3.324) = g(B),$$

и это противоречит первому утверждению в (0.3.259). Значит, наше предположение, что A непусто, неверно. То есть $A = \varnothing$, и это доказывает (0.3.257).

После этого нужно положить

$$f = \cup F,$$

и это будет отображение, индуктивно порожденное отображением h. □

Теорема 0.3.28. *Если отображение h определено на классе* $\mathtt{Set}$*, то определенное им индуктивно отображение f также определено на классе* $\mathtt{Set}$*:*

$$\mathsf{D}(h) = \mathtt{Set} \quad \Longrightarrow \quad \mathsf{D}(f) = \mathtt{Set}\,.$$

Доказательство. Предположим, что порожденное им отображение f определено не всюду на $\mathtt{Set}$:

$$\mathsf{D}(f) \neq \mathtt{Set}\,. \tag{0.3.260}$$

Тогда

$$\mathtt{Set} \setminus \mathsf{D}(f) \neq \varnothing,$$

и к этому классу можно применить аксиому регулярности MK-11: существует класс $Y \in \mathtt{Set} \setminus \mathsf{D}(f)$ такой, что

$$Y \cap (\mathtt{Set} \setminus \mathsf{D}(f)) = \varnothing.$$

Иными словами,

$$Y \in \mathtt{Set} \setminus \mathsf{D}(f) \quad \& \quad Y \subseteq \mathsf{D}(f). \tag{0.3.261}$$

Рассмотрим класс

$$N = \{Y\} \cup \mathsf{D}(f).$$

Он наполнен, потому что если $Z \in N$, то

— либо $Z \in \mathsf{D}(f)$, и тогда, поскольку $\mathsf{D}(f)$ наполнен, мы получаем

$$Z \subseteq \mathsf{D}(f) \subseteq N,$$

— либо $Z \in \{Y\}$, то есть $Z = Y$, и тогда, в силу (0.3.261), мы получаем

$$Z = Y \subseteq \mathsf{D}(f) \subseteq N.$$

Определим отображение g на N правилом

$$g(X) = \begin{cases} f(X), & X \in \mathsf{D}(f) \\ h(f), & X = Y \end{cases}, \qquad X \in N.$$

Оно будет принадлежать F и продолжать отображение f на более широкий, чем $\mathsf{D}(f)$, класс N. Это означает, что f не может удовлетворять условию (iii) в определении на с.58. Как следствие, наше предположение (0.3.260) не может быть верно. □

Теорема 0.3.29. *Пусть отображение h и классы M и P удовлетворяют следующим условиям:*

(i) *класс M наполнен:*

$$\forall X \in M \quad X \subseteq M, \tag{0.3.262}$$

(ii) *для всякого элемента $X \in M$ класс P^X всех отображений $f : X \to P$ содержится в области определения h:*
$$\forall X \in M \quad P^X \subseteq \mathsf{D}(h), \tag{0.3.263}$$

(iii) *область значений h содержится в классе P:*
$$\mathsf{R}(h) \subseteq P. \tag{0.3.264}$$

Тогда существует единственное отображение $f : M \to P$, связанное с отображением h тождеством (0.3.324)*:*
$$\forall X \in \mathsf{D}(f) = M \quad f(X) = h(f|_X). \tag{0.3.265}$$

Доказательство. Рассмотрим отображение $H : \mathtt{Set} \to \mathtt{Set}$, определенное правилом:
$$H(g) = \begin{cases} h(g), & g \in \bigcup_{X\in M} P^X \\ \varnothing, & g \notin \bigcup_{X\in M} P^X \end{cases} \tag{0.3.266}$$

Оно корректно определено в силу (0.3.263). По теореме 0.3.28, H индуктивно определяет некое отображение $F : \mathtt{Set} \to \mathtt{Set}$. В частности, F будет удовлетворять условию (0.3.324):
$$\forall X \in \mathtt{Set} \quad F(X) = H(F|_X). \tag{0.3.267}$$

Покажем, что
$$\forall X \in M \quad F\big|_X \in P^X. \tag{0.3.268}$$

Предположим, что это не так:
$$\exists X \in M \quad F\big|_X \notin P^X. \tag{0.3.269}$$

Зафиксируем этот элемент $X \in M$. Условие (0.3.269) означает, что найдется $Y \in X$ такой, что
$$F(Y) \notin P.$$

Из условия (0.3.262) следует, что $Y \in M$. Поэтому множество
$$N = \{Y \in M : \ F(Y) \notin P\}$$

непусто. Применим к нему аксиому регулярности MK-11: существует A такой, что
$$A \in N \quad \& \quad A \cap N = \varnothing.$$

Первое условие здесь означает, что
$$A \in M \quad \& \quad F(A) \notin P, \tag{0.3.270}$$

а второе – что
$$\forall Z \in A \quad Z \notin N = \{Y \in M : \ F(Y) \notin P\},$$

Опять применяя (0.3.262), можно это переформулировать так:
$$\forall Z \in A \quad \big(Z \in M \quad \& \quad Z \notin N = \{Y \in M : \ F(Y) \notin P\}\big).$$

Это в свою очередь, будет означать
$$\forall Z \in A \quad F(Z) \in P,$$

и, добавив к этому первую часть (0.3.270), мы можем записать это так:
$$A \in M \quad \& \quad F\big|_A \in P^A. \tag{0.3.271}$$

Теперь мы получаем:
$$F(A) = (0.3.267) = H(F\big|_A) = (0.3.271), (0.3.266) = h(F\big|_A) \in \mathsf{R}(h) \subseteq (0.3.264) \subseteq P$$

То есть $F(A) \in P$, и это противоречит (0.3.270). Значит, наше предположение (0.3.269) неверно, и поэтому справедливо (0.3.268).

Положим теперь

$$f = F\big|_M.$$

Для него будет выполняться тождество (0.3.265),

$$\forall X \in M \quad f(X) = F(X) = (0.3.267) = H(F\big|_X) = (0.3.268), (0.3.266) = h(F\big|_X),$$

из которого будет следовать, что f является отображением из M в P:

$$f(X) = h(F\big|_X) \in \mathsf{R}(h) \subseteq (0.3.264) \subseteq P$$

Остается доказать единственность такого отображения f. Пусть $g : M \to P$ – какое-нибудь другое отображение с тем же свойством:

$$\forall X \in M \quad g(X) = h(g|_X). \tag{0.3.272}$$

Предположим, что $f \neq g$. Тогда класс

$$N = \{X \in M : \ f(X) \neq g(X)\}$$

непуст. Значит, к нему можно применить аксиому регулярности MK-11: существует класс A такой, что

$$A \in N \quad \& \quad A \cap N = \varnothing.$$

Первое условие означает, что

$$A \in M \quad \& \quad f(A) \neq g(A). \tag{0.3.273}$$

А второе – что

$$\forall X \in A \quad f(X) = g(X),$$

то есть что

$$f\big|_A = g\big|_A.$$

Но отсюда, применяя первое условие из (0.3.273), $A \in M$, мы получаем

$$f(A) = (0.3.265) = h(f\big|_A) = h(g\big|_A) = (0.3.272) = g(A),$$

и это противоречит второму условию из (0.3.273): $f(A) \neq g(A)$. □

(e) Ординалы

Отношение полного порядка.

- Отношение $r \subseteq X \times X$ называется *отношением строгого частичного порядка* на классе X, если оно обладает следующими свойствами:
  - *антисимметричность*:
  $$ArB \ \Rightarrow \ \neg(BrA), \tag{0.3.274}$$
  - *транзитивность*:
  $$(ArB \ \& \ BrC) \ \Rightarrow \ ArC. \tag{0.3.275}$$
- Отношение $r \subseteq X \times X$ называется *отношением строгого линейного порядка* на классе X, если оно является отношением строгого частичного порядка и обладает следующим дополнительным свойством:
  - *линейность*:
  $$A \neq B \ \Rightarrow \ (ArB \ \vee \ BrA), \tag{0.3.276}$$
- Говорят, что в классе X элемент $A \in X$ является
  - *минимальным* для отношения r, если для любого другого элемента $B \in X$ из $A \neq B$ следует, что BrA ложно,
  - *максимальным* для отношения r, если для любого другого элемента $B \in X$ из $A \neq B$ следует, что ArB ложно.

Предложение 0.3.30. *Если r – отношение строгого линейного порядка на классе X, и $Y \subseteq X$ – подкласс в X, то минимальный элемент A в Y, если он существует, единственен и обладает свойством*

$$\forall B \in Y \quad (A \neq B \quad \Longrightarrow \quad A\, r B) \tag{0.3.277}$$

Доказательство. Предположим, что A и A' – два минимальных элемента в Y. Тогда если $A \neq A'$, то, поскольку отношение r линейно, либо ArA', либо $A'rA$. Если ArA', то A' не может быть минимальным элементом в Y, а если $A'rA$, то A не может быть минимальным элементом в Y.

Пусть далее A – минимальный элемент в Y, и пусть $B \in Y$, причем $A \neq B$. Поскольку отношение r линейно, должно выполняться либо ArB, либо BrA. Второе невозможно, поскольку A – минимальный элемент в Y. □

- Отношение $r \subseteq X \times X$ называется *отношением полного порядка* на классе X, если оно является отношением строгого линейного порядка и в любом непустом подклассе $Y \subseteq X$, $Y \neq \varnothing$, имеется минимальный для r элемент.
- Если r — отношение полного порядка на классе X, то говорят также, что r *вполне упорядочивает* X. Кроме того, если на классе X существует какое-нибудь отношение полного порядка, то говорят, что *класс X можно вполне упорядочить.*
- Если r – отношение полного порядка на классе X, и $\varnothing \neq Y \subseteq X$, то минимальный элемент в Y, существование которого постулируется в определении полного порядка, а единственность доказывается в предложении 0.3.30, обозначается символом

$$\min Y. \tag{0.3.278}$$

Определение и свойства ординалов.

- Класс X называется *ординалом*, если он наполнен, и любой его элемент $Y \in X$ также является наполненным классом.

◇ **0.3.26** (конструкция фон Неймана)**.** Математику Джону фон Нейману принадлежит следующая остроумная идея строить ординалы “по индукции”.

Прежде всего, *пустое множество $\varnothing$ является ординалом.* В дальнейшем нам будет удобно использовать для него новый символ:

$$0 := \varnothing. \tag{0.3.279}$$

Далее, *одночленный класс $\{\varnothing\}$ (единственным элементом которого является пустое множество) также является ординалом.* Для него мы также введем специальное обозначение

$$1 := \{\varnothing\} = \{0\} = 0 \cup \{0\}. \tag{0.3.280}$$

Так же по аналогии определяются ординалы 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 (и некоторые из этих обозначений будут нам полезны ниже, в частности, 0 и 1 встретятся при на с.108 в определении предиката истинности, и это будет еще до обсуждения понятия числа, которое начнется только со с.122[30]):

— класс $\{\varnothing, \{\varnothing\}\}$ (с двумя элементами, $\varnothing$ и $\{\varnothing\}$) также является ординалом и обозначается

$$2 := \{\varnothing, \{\varnothing\}\} = \{0, 1\} = 1 \cup \{1\}. \tag{0.3.281}$$

— класс $\{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}$ является ординалом и обозначается

$$3 := \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\} = \{0, 1, 2\} = 2 \cup \{2\}. \tag{0.3.282}$$

— следующий в этой цепочке класс $3 \cup \{3\}$ тоже является ординалом и обозначается

$$4 := \{0, 1, 2, 3\} = 3 \cup \{3\}. \tag{0.3.283}$$

— так же определяются классы 5, 6, 7, 8 и 9:

$$5 := \{0, 1, 2, 3, 4\} = 4 \cup \{4\}, \tag{0.3.284}$$
$$6 := \{0, 1, 2, 3, 4, 5\} = 5 \cup \{5\}, \tag{0.3.285}$$
$$7 := \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\} = 6 \cup \{6\}, \tag{0.3.286}$$
$$8 := \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\} = 7 \cup \{7\}, \tag{0.3.287}$$
$$9 := \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\} = 8 \cup \{8\}. \tag{0.3.288}$$

◇ **0.3.27.** Экспонента нуля равна единице:

$$2^0 = 1 \tag{0.3.289}$$

Доказательство.

$$X \in 2^0 = 2^{\varnothing} \quad \Longleftrightarrow \quad X \subseteq \varnothing \quad \Longleftrightarrow \quad X = \varnothing = 0.$$

□

[30]Все же в обозначениях 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 читатель, конечно, должен увидеть связь с натуральными числами, потому что эти ординалы действительно входят как элементы в определяемый ниже класс `FinOrd`, формализующий идею (расширенного) множества натуральных чисел (и значит, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 действительно являются натуральными числами, см. (0.3.332)).

◇ **0.3.28.** Экспонента единицы равна двойке:

$$2^1 = 2 \qquad (0.3.290)$$

Доказательство.

$$X \in 2^1 = 2^{\{\varnothing\}} \iff X \subseteq \{\varnothing\} \iff X = \varnothing \ \vee \ X = \{\varnothing\} \iff X \in \{\varnothing; \{\varnothing\}\} = 2.$$

□

Теорема 0.3.31. *Если X – ординал и $Y \subseteq X$ – наполненный подкласс в X, то Y – тоже ординал.*

Доказательство. Поскольку X наполнен, любой элемент $Z \in Y$ является также элементом ординала X, и поэтому Z – наполненый класс. С другой стороны, Y сам наполнен, и вместе это значит, что Y – ординал. □

Теорема 0.3.32. *Всякий элемент $Y \in X$ произвольного ординала X сам является ординалом.*

Доказательство. Для $Y \in X$ мы получаем импликацию

$$Y \in X \quad \overset{X\ –\ \text{ординал}}{\Longrightarrow} \quad Y\ –\ \text{наполненный класс},$$

а для любого его элемента $Z \in Y$ – цепочку

$$Z \in Y \in X \quad \overset{\substack{X\ –\ \text{наполненный} \\ \text{класс}}}{\Longrightarrow} \quad Z \in X \quad \overset{X\ –\ \text{ординал}}{\Longrightarrow} \quad Z\ –\ \text{наполненный класс}.$$

Таким образом, класс Y наполнен и любой его элемент $Z \in Y$ – тоже наполненный класс. Значит, Y – ординал. □

Теорема 0.3.33 (об отношении $\in$ на ординале)**.** *Пусть X – ординал. Тогда отношение принадлежности $\in$ на X будет отношением полного порядка*[31]*, то есть будет обладать следующими свойствами:*

(i) *транзитивность:*

$$\forall A, B, C \in X \quad A \in B \in C \quad \Longrightarrow \quad A \in C \qquad (0.3.291)$$

(ii) *линейность:*

$$\forall A, B \in X \quad A \in B \ \vee \ B \in A \ \vee \ A = B. \qquad (0.3.292)$$

(iii) *полная упорядоченность: если $\varnothing \ne Y \subseteq X$ — непустой подкласс в X, то найдется элемент $B \in Y$, принадлежащий любому другому элементу $C \in Y$, отличному от B:*

$$C \in Y \ \&\ C \ne B \quad \Rightarrow \quad B \in C, \qquad (0.3.293)$$

причем таким элементом B будет пересечение класса Y:

$$B = \cap Y \qquad (0.3.294)$$

- Элемент B класса Y, описываемый в свойстве 3°, называется *минимальным элементом* класса Y (по отношению принадлежности $\in$) и обозначается

$$B = \min Y \qquad (0.3.295)$$

Свойство 3°, таким образом, утверждает, что

$$\min Y = \cap Y \qquad (0.3.296)$$

Доказательство. 1. Транзитивность следует напрямую из определения ординала: если $A, B, C \in X$ и $A \in B \in C$, то, поскольку C, как элемент ордианала X, является наполненным классом, $A \in C$.

2. Линейность доказывается от противного (и довольно сложно). Предположим, что условие (0.3.292) не выполняется. Тогда должен быть непустым класс

$$Y = \{B \in X : \ \exists A \in X \quad A \notin B \ \&\ A \ne B \ \&\ B \notin A\}. \qquad (0.3.297)$$

[31]Отношение полного порядка было определено на с.50.

По аксиоме регулярности MK-11 на с.36, это означает, что существует элемент $y \in Y$ такой что $y \cap Y = \varnothing$. Зафиксируем этот класс y. Он один из тех B, для которых выполняется формула, определяющая Y:

$$B \in X \ \& \ (\exists A \in X \quad A \notin B \ \& \ A \neq B \ \& \ B \notin A)$$

То есть формула

$$y \in X \ \& \ (\exists A \in X \quad A \notin y \ \& \ A \neq y \ \& \ y \notin A).$$

Это означает, что класс

$$Z = \{z \in X : \ z \notin y \ \& \ z \neq y \ \& \ y \notin z\} \qquad (0.3.298)$$

– тоже непуст. Опять аксиоме регулярности MK-11 на с.36, существует элемент $z \in Z$ такой что $z \cap Z = \varnothing$. Зафиксируем z тоже.

Заметим теперь, что $y \notin Z$ (потому что $y \neq y$ неверно, и значит, формула $y \in X \ \& \ y \notin y \ \& \ y \neq y \ \& \ y \notin y$, получаемая подстановкой y вместо z в фигурные скобки (0.3.298), тоже неверна). Поскольку $z \in Z$, отсюда можно сделать вывод, что

$$y \neq z. \qquad (0.3.299)$$

Покажем, что тем не менее из наших построений следует, что

$$y = z. \qquad (0.3.300)$$

Это будет противоречием к исходному предположению, что (0.3.292) не выполняется.

Сначала покажем, что $y \subseteq z$. Пусть $t \in y$. Поскольку X – ординал, и значит наполненный класс, из $t \in y \in X$ следует $t \in X$. Мы получим такую цепочку:

$$y \cap Y = \varnothing \implies t \notin Y \implies \neg\Big(t \in X \ \& \ \exists A \in X \quad A \notin t \ \& \ A = t \ \& \ t \in A\Big) \implies$$
$$\implies t \notin X \vee \Big(\forall A \in X \quad A \in t \vee A = t \vee t \in A\Big) \implies \forall A \in X \quad A \in t \vee A = t \vee t \in A \implies$$
$$\implies z \in t \vee z = t \vee t \in z$$

Покажем, что в последней формуле первые два варианта невозможны:

— если $z \in t$, то поскольку $t \in y$, и $z, t, y \in X$, мы, по уже доказанному условию транзитивности (0.3.291), получаем $z \in y$, и, по определению класса Z это означает, что $z \notin Z$ (а это противоречит выбору $z \in Z$),

— если же $z = t$, то, поскольку $t \in y$, мы получаем $z \in y$, и, опять по определению класса Z это означает, что $z \notin Z$ (и это противоречит выбору $z \in Z$).

Итак, остается только вариант $t \in z$, и, поскольку это верно для любого $t \in y$, мы получаем $y \subseteq z$.

Теперь наоборот, покажем что $z \subseteq y$. Пусть $t \in z$. Поскольку X – ординал, и значит наполненный класс, из $t \in y \in X$ следует $t \in X$. С другой стороны, $z \cap Z = \varnothing$, поэтому $t \notin Z$. Вместе то и другое дает цепочку

$$t \notin Z \implies \neg\Big(t \in X \ \& \ t \notin y \ \& \ t \neq y \ \& \ y \notin t\Big) \implies$$
$$\implies t \notin X \vee \Big(t \in y \vee t = y \vee y \in t\Big) \implies t \in y \vee t = y \vee y \in t$$

Покажем, что в последней формуле последние два варианта невозможны:

— если $y \in t$, то поскольку $t \in z$, и $y, t, z \in X$, мы, по уже доказанному условию транзитивности (0.3.291), получаем $y \in z$, и, по определению класса Z это означает, что $z \notin Z$ (а это противоречит выбору $z \in Z$),

— если же $y = t$, то, поскольку $t \in z$, мы получаем $t \in y$, и, опять по определению класса Z это означает, что $z \notin Z$ (и это противоречит выбору $z \in Z$).

Остается только вариант $t \in y$, и, поскольку это верно для любого $t \in z$, мы получаем $z \subseteq y$.

Мы доказали равенство (0.3.300), противоречащее (0.3.299), и это нам и нужно было.

3. Пусть $\varnothing \neq Y \subseteq X$. Пусть X – ординал, и $\varnothing \neq Y \subseteq X$. По аксиоме регулярности MK-11 на с.36, существует элемент $B \in Y$ такой, что $B \cap Y = \varnothing$. Это значит, что ни для какого элемента $C \in Y$ не выполняется $C \in B$:

$$\forall C \in Y \quad C \notin B. \qquad (0.3.301)$$

Поскольку B и C – элементы ординала X, в силу свойства линейности (0.3.292), либо $B \in C$, либо $B = C$, либо $C \in B$. Поэтому (0.3.301) эквивалентно условию (0.3.293). Мы доказали существование элемента B.

Теперь покажем, что $B = \cap Y$. По теореме 0.3.32, всякий элемент $C \in Y \subseteq X$ является ординалом, поэтому он наполнен, и значит из (0.3.293) следует

$$C \in Y \ \& \ C \neq B \quad \Rightarrow \quad B \subseteq C.$$

Поскольку $B \subseteq B$, условие $C \neq B$ можно отбросить:

$$C \in Y \quad \Rightarrow \quad B \subseteq C.$$

Из этого можно сделать вывод, что $B \subseteq \cap Y$. С другой стороны, $B \in Y$, поэтому $\cap Y \subseteq B$. Вместе это означает равенство (0.3.294). □

Лемма 0.3.34. *Пусть X и Y – ординалы. Тогда*

$$Y \subseteq X \quad \Longleftrightarrow \quad (Y \in X \ \vee \ Y = X), \tag{0.3.302}$$

причем если $Y \subseteq X$ и $Y \neq X$, то

$$Y = \min(X \setminus Y) \tag{0.3.303}$$

Доказательство. Пусть X – ординал, Y – наполненный класс и $Y \subseteq X$. В утверждении (0.3.302) импликация в левую сторону очевидна:

$$Y \subseteq X \quad \Longleftarrow \quad (Y \in X \ \vee \ Y = X).$$

Если $Y = X$, то $Y \subseteq X$ тривиально. Если же $Y \in X$, то $Y \subseteq X$ по формуле (0.3.253), поскольку класс X насыщен.

Докажем обратную импликацию

$$Y \subseteq X \quad \Longrightarrow \quad (Y \in X \ \vee \ Y = X).$$

Пусть $Y \subseteq X$ и $Y \neq X$. Тогда $X \setminus Y \neq \varnothing$, и по уже доказанному свойству 2°, класс $X \setminus Y$ обладает минимальным элементом:

$$B = \min(X \setminus Y).$$

Нам нужно показать, что $Y = B$ (это докажет формулу (0.3.303), из которой будет следовать, что $Y = B \in X$).

a. Покажем сначала, что $Y \subseteq B$. Пусть $A \in Y$. Из свойства линейности (0.3.292) следует, что либо $A \in B$, либо $A = B$, либо $B \in A$. Покажем, что последние два варианта невозможны. Действительно, если $A = B$, то вместе с $A \in Y$ это дает $B \in Y$, что невозможно, потому что $B = \min(X \setminus Y)$, откуда $B \in X \setminus Y$. Если же $B \in A$, то получается $B \in A \in Y$, и, поскольку Y наполнен, $B \in Y$, что опять противоречит условию $B \in X \setminus Y$. Мы получаем, что $A \in B$, и это доказывает импликацию $A \in Y \ \Rightarrow \ A \in B$.

b. Покажем, что наоборот, $B \subseteq Y$. Пусть $A \in B$. Поскольку $A \in B \in X$, а класс X наполнен, мы получаем, что $A \in X$. Нам нужно показать, что $A \in Y$. Если предположить, что это не так, то есть $A \in X \setminus Y$, то из-за условия $B = \min(X \setminus Y)$ это будет означать, что $A \notin B$, а это противоречит выбору A как элемента B. Значит действительно $A \in Y$, и это доказывает импликацию $A \in B \ \Rightarrow \ A \in Y$.

□

Свойства ординалов:

1° *Всякий непустой ординал X содержит пустой класс $\varnothing$ в качестве элемента,*

$$\varnothing \in X, \tag{0.3.304}$$

и имеет пустое пересечение:

$$\cap X = \varnothing \tag{0.3.305}$$

Поэтому, в частности, минимальным элементом в ординале X является пустой класс:

$$\min X = \varnothing. \tag{0.3.306}$$

2° *Пересечение* $X \cap Y$ *и объединение* $X \cup Y$ *любых двух ординалов* X *и* Y *являются ординалами.*

3° *Если* M – *класс, элементами которого являются ординалы, то* $\cup M$ – *ординал, и при этом всякий ординал* $X \in M$ *либо принадлежит* $\cup M$*, либо совпадает с* $\cup M$*:*

$$X \in M \quad \Rightarrow \quad \big(X \in \cup M \vee X = \cup M\big). \tag{0.3.307}$$

4° *Если* M – *непустой класс, элементами которого являются ординалы, то* $\cap M$ – *ординал, причем* $\cap M \in M$*, и всякий ординал* $X \in M$ *либо содержит* $\cup M$ *в качестве элемента, либо совпадает с* $\cup M$*:*

$$X \in M \quad \Rightarrow \quad \big(\cap M \in X \vee \cap M = X\big). \tag{0.3.308}$$

5° *Если* X *и* Y – *ординалы, то либо* $X \subseteq Y$*, либо* $Y \subseteq X$*.*

6° *Если* X *и* Y – *ординалы, то либо* $X \in Y$*, либо* $Y \in X$*, либо* $X = Y$*.*

Доказательство. 1. Первое утверждение следует из свойства 1° наполненных классов на с.46. Из (0.3.304) мы получаем цепочку:

$$\varnothing \in X \quad \Longrightarrow \quad \cap X \subseteq \varnothing \quad \Longrightarrow \quad \cap X = \varnothing.$$

Формула (0.3.306) теперь следует из (0.3.296).

2. Если X и Y – ординалы, то они – наполненные классы, поэтому по свойству 2° на с.46 классы $X \cap Y$ и $X \cup Y$ также наполнены. С другой стороны, элементами $X \cap Y$ и $X \cup Y$ являются элементы X и Y, и эти элементы являются наполненными классами.

3. Пусть M – класс, элементами которого являются ординалы. По свойству 3° на с.46, класс $\cup M$ наполнен. С другой стороны, из $B \in \cup M$ следует, что $B \in C$ для некоторого $C \in M$, который является ординалом. Значит, его элемент B – наполненный класс. Это доказывает, что $\cup M$ – ординал. Теперь если $X \in M$, то в силу (0.3.162), $X \subseteq \cap M$, и поскольку X и $\cup M$ – ординалы, по лемме 0.3.34, либо $X \in \cup M$, либо $X = \cup M$.

4. Пусть M – непустой класс, элементами которого являются ординалы. По уже доказанному свойству 3°, всякий элемент $X \in M$ либо принадлежит ординалу $\cup M$, либо совпадает с ним. Рассмотрим два случая:

a. Если все элементы $X \in M$ совпадают с $\cup M$, то есть M просто состоит из одного элемента, $X = \cup M$, то $\cap M = X = \cup M$, и то, что утверждается, верно автоматически: $\cap M = X \in M$ и $X = \cap M$.

b. Если в M имеются элементы, отличные от $\cup M$, то положив $N = M \setminus \{\cup M\}$, мы получим $\cap N = \cap M$. При этом по уже доказанному свойству 3°, N будет непустым классом в ординале $\cup M$. По свойству 3° на с.51, $\cap N = \min N \in N \subseteq M$, и отсюда $\cap M = \cap N \in M$. Если теперь $X \in M$, то либо $X \in N$, и тогда в силу (0.3.293), $\cap M = \cap N = \min N \in X$, либо $X \notin N$, и тогда $X = \cup M$.

5. Пусть X и Y – ординалы. По уже доказанному свойству 2°, $X \cap Y$ – тоже ординал. С другой стороны, $X \cap Y \subseteq X$, поэтому по лемме 0.3.34, либо $X \cap Y \in X$, либо $X \cap Y = X$. Во втором случае $X \subseteq Y$. Если же $X \cap Y \in X$, то отсюда следует что $X \cap Y \notin Y$, потому что иначе мы получили бы $X \cap Y \in X \cap Y$, что невозможно по следствию 1° из аксиомы регулярности MK-11 на с.36. Таким образом, $X \cap Y$ – ординал, $X \cap Y \subseteq Y$ и $X \cap Y \notin Y$. Опять по лемме 0.3.34, мы получаем $X \cap Y = Y$, и значит, $Y \subseteq X$.

6. Пусть X и Y – ординалы, причем пусть $X \neq Y$. По уже доказанному свойству 5°, $X \subseteq Y$ или $Y \subseteq X$. Если $Y \subseteq X$, то по лемме 0.3.34, $Y \in X$ (поскольку $Y \neq X$). Если же $X \subseteq Y$, то опять по лемме 0.3.34, $X \in Y$ (поскольку $X \neq Y$). □

Класс `Ord` малых ординалов.

- Ординал X мы будем называть *малым*[32], если он является множеством.
- Символом `Ord` мы обозначаем класс всех малых ординалов:

$$\texttt{Ord} = \{X : \ X - \text{малый ординал}\} = \{X : \ X - \text{ординал}\}. \tag{0.3.309}$$

[32]Малые ординалы часто называют *порядковыми числами.*

- На классе $\mathtt{Ord}$ удобно ввести отношение

$$A < B \iff A \in B, \qquad A, B \in \mathtt{Ord}, \qquad (0.3.310)$$

и отношение

$$A \leqslant B \iff \Big(A \in B \quad \vee \quad A = B\Big), \qquad A, B \in \mathtt{Ord}\,. \qquad (0.3.311)$$

Из теоремы 0.3.33 следует

Теорема 0.3.35. *Отношение $<$ вполне упорядочивает класс $\mathtt{Ord}$.*

Свойства класса $\mathtt{Ord}$:

1° *Класс $\mathtt{Ord}$ – ординал, не являющийся множеством.*

2° *Не существует никаких других ординалов, кроме $\mathtt{Ord}$ и его элементов.*

3° *Класс X является ординалом тогда и только тогда, когда он наполнен и содержится в $\mathtt{Ord}$.*

4° *Если $X \subseteq \mathtt{Ord}$, то $\cup X$ – ординал.*

5° *Если $\varnothing \neq X \subseteq \mathtt{Ord}$, то $\cap X$ – ординал, причем $\cap X \in X$.*

6° *Если $B, C \in \mathtt{Ord}$ и $\forall A < B \quad A < C$, то $B \subseteq C$.*

Доказательство. 1. Пусть $Y \in X \in \mathtt{Ord}$. Тогда, во-первых, Y – множество, а, во-вторых, по теореме 0.3.32, Y – ординал. Значит, $Y \in \mathtt{Ord}$, и это доказывает наполненность $\mathtt{Ord}$:

$$X \in \mathtt{Ord} \implies X \subseteq \mathtt{Ord}\,.$$

С другой стороны, всякий элемент $X \in \mathtt{Ord}$ является ординалом и значит, наполненным классом. Вместо это означет, что $\mathtt{Ord}$ – ординал. Он не может быть множеством, потому что тогда мы получили бы $\mathtt{Ord} \in \mathtt{Ord}$, а это противоречит следствию 1° из аксиомы регулярности MK-$\mathsf{11}$ на с.36.

2. Пусть X – ординал. По уже доказанному свойству 1°, $\mathtt{Ord}$ – тоже ординал. Поэтому по свойству 6° на с.54, либо $X = \mathtt{Ord}$, либо $X \in \mathtt{Ord}$, либо $\mathtt{Ord} \in X$. Последнее – $\mathtt{Ord} \in X$ – невозможно, потому что оно означало бы, что $\mathtt{Ord}$ – множество, а мы уже доказали в 1°, что это не так. Значит, остается либо $X = \mathtt{Ord}$, либо $X \in \mathtt{Ord}$.

3. Если X – ординал, то по уже доказанному свойству 2°, либо $X = \mathtt{Ord}$, либо $X \in \mathtt{Ord}$. В первом случае X тривиально содержится в $\mathtt{Ord}$, а во втором это будет следствием того, что класс $\mathtt{Ord}$, будучи ординалом, наполнен:

$$X \in \mathtt{Ord} \;\Rightarrow\; X \subseteq \mathtt{Ord}\,.$$

Наоборот, если X – наполненный класс, содержащийся в ординале $\mathtt{Ord}$, то по теореме 0.3.31, X является ординалом.

4. Свойство 4° есть непосредственное следствие свойства 3° на с.54.

5. А свойство 5° сразу следует из свойства 4° на с.54.

6. Если $B, C \in \mathtt{Ord}$, то условие $\forall A < B \quad A < C$ расшифровывается так: $\forall A \in B \quad A \in C$. Это как раз означает, что $B \subseteq C$. □

Операция $X \mapsto \mathsf{S}(X)$.

- Для всякого малого ординала X класс $X \cup \{X\}$ называется *следующим ординалом после* X и имеет специальное обозначение:

$$\mathsf{S}(X) = X \cup \{X\} \qquad (0.3.312)$$

Оправданием этому термину служат следующие

Свойства операции $X \mapsto \mathsf{S}(X)$:

1° *Если $X \in \mathtt{Ord}$, то $\mathsf{S}(X) \in \mathtt{Ord}$.*

2° *Если $X \in \mathtt{Ord}$, то $\varnothing \neq \mathsf{S}(X)$ и $X \neq \mathsf{S}(X)$.*

3° *Если $X \in \mathtt{Ord}$, то $\mathsf{S}(X)$ является $\in$-минимальным элементом класса $\{Y : Y \in \mathtt{Ord} \;\&\; X \in Y\}$,*

$$\mathsf{S}(X) = \min\{Y : Y \in \mathtt{Ord} \;\&\; X \in Y\}, \qquad (0.3.313)$$

4° *Если* $X \in \mathtt{Ord}$, *то*
$$\cup \mathsf{S}(X) = X \in \mathsf{S}(X) \tag{0.3.314}$$

5° *Если* $X \in \mathtt{Ord}$, *то*
$$\cup X \subseteq X \subseteq \mathsf{S}(\cup X), \tag{0.3.315}$$
причем справедлива следующая альтернатива:

— *либо в* (0.3.315) *выполняется равенство слева, эквивалентное неравенству справа:*
$$\cup X = X \quad \Leftrightarrow \quad X \ne \mathsf{S}(\cup X). \tag{0.3.316}$$

— *либо в* (0.3.315) *выполняется равенство справа, эквивалентное замене включения слева на символ принадлежности:*
$$\cup X \in X \quad \Leftrightarrow \quad X = \mathsf{S}(\cup X). \tag{0.3.317}$$

6° *Если* $X \in \mathtt{Ord}$, $Y \in \mathtt{Ord}$ *и* $\mathsf{S}(X) = \mathsf{S}(Y)$, *то* $X = Y$.

7° *Если* $X \in \mathtt{Ord}$, $Y \in \mathtt{Ord}$ *и* $\mathsf{S}(X) \in \mathsf{S}(Y)$, *то* $X \in Y$.

8° *Если* $X, Y \in \mathtt{Ord}$ *и* $X \in Y$, *то* $\mathsf{S}(X) \leqslant Y$.

Доказательство. 1. Пусть $X \in \mathtt{Ord}$. Убедимся, что класс $\mathsf{S}(X)$ наполнен. Действительно, если $A \in B \in \mathsf{S}(X) = X \cup \{X\}$, то либо $A \in B = X$, и значит, $A \in X$, либо $A \in B \in X$, и тогда $A \in X$, в силу наполненности X. В любом случае, $A \in X \subseteq \mathsf{S}(X)$. С другой стороны, всякий элемент $B \in \mathsf{S}(X) = X \cup \{X\}$ либо совпадает с X, либо является элементом X. В обоих случаях B является ординалом и значит, наполнен. Вместе это означает, что $\mathsf{S}(X)$ – ординал.

2. Если $\varnothing = \mathsf{S}(X) = X \cup \{X\}$, то $\{X\} \subseteq \varnothing$, то есть $X \in \varnothing$, что невозможно. Если же $X = \mathsf{S}(X) = X \cup \{X\}$, то $\{X\} \subseteq X$, то есть $X \in X$, что тоже невозможно.

3. Пусть $X \in \mathtt{Ord}$. Обозначим $Z = \{Y : \ Y \in \mathtt{Ord} \ \& \ X \in Y\}$. В 1° мы уже доказали, что $\mathsf{S}(X) \in \mathtt{Ord}$. С другой стороны, $X \in X \cup \{X\} = \mathsf{S}(X)$. Вместе эти два утверждения означают, что $\mathsf{S}(X) \in Z$. Покажем теперь, что это минимальный элемент в Z в смысле отношения $\in$. Предположим, что существует $B \in Z$ такой, что $B \in \mathsf{S}(X) = X \cup \{X\}$. Тогда либо $B = X$, либо $B \in X$. В первом случае, $B = X$, мы получаем
$$X \underset{\substack{\Uparrow \\ B \in Z}}{\in} B = X,$$
и это невозможно по следствию 1° из аксиомы регулярности MK-11 на с.36. А во втором случае, $B \in X$, мы получим
$$X \underset{\substack{\Uparrow \\ B \in Z}}{\in} B \in X,$$
и это невозможно по следствию 2° на с.36. Это доказывает (0.3.313).

4. В формуле (0.3.314) второе равенство очевидно, $X \in X \cup \{X\} = \mathsf{S}(X)$, а первое доказывается цепочкой:
$$A \in \cup \mathsf{S}(X) \iff \exists Y \in \underbrace{\mathsf{S}(X)}_{\substack{\| \\ X \cup \{X\}}} \ A \in Y \iff \underbrace{A \in X}_{Y \in \{X\}} \vee \underbrace{\exists Y \in X \ A \in Y}_{\substack{\Downarrow \\ A \in Y \in X \\ \Downarrow \\ A \in X}} \iff A \in X.$$

5. В формуле (0.3.315) первое включение $\cup X \subseteq X$ вытекает из наполненности класса X:
$$A \in \cup X \quad \Rightarrow \quad \exists B \in X \ A \in B \quad \Rightarrow \quad A \in B \in X \quad \overset{\substack{X \text{ – наполненный} \\ \text{класс}}}{\Rightarrow} \quad A \in X.$$
А второе, $X \subseteq \mathsf{S}(\cup X)$, следует из (0.3.307):
$$A \in X \quad \overset{(0.3.307)}{\Rightarrow} \quad A \in \cup X \vee A = \cup X \quad \Rightarrow \quad A \in (\cup X) \cup \{\cup X\} = \mathsf{S}(\cup X).$$
Заметим далее, что поскольку X и $\mathsf{S}(\cup X)$ – ординалы, по лемме 0.3.34, второе включение в (0.3.315), $X \subseteq \mathsf{S}(\cup X)$, эквивалентно условию
$$X \in \mathsf{S}(\cup X) \ \vee \ X = \mathsf{S}(\cup X).$$

Отсюда получается цепочка, доказывающая (0.3.316):

$$X \ne \mathsf{S}(\cup X) \quad \Leftrightarrow \quad X \in \mathsf{S}(\cup X) = (\cup X) \cup \{\cup X\} \quad \Leftrightarrow \quad \underbrace{X \in \cup X}_{\substack{\Downarrow \\ \exists B \in X \ X \in B \\ \Downarrow \\ X \in B \in X \\ \uparrow \\ \text{невозможно,} \\ \text{в силу } 2^\circ \text{ на с.36}}} \vee X = \cup X \quad \Leftrightarrow \quad X = \cup X$$

А эквивалентность (0.3.317) доказывается цепочкой

$$\cup X \in X \quad \Leftrightarrow \quad \{\cup X\} \subseteq X \quad \Leftrightarrow \quad \overset{\substack{X \\ \rotatebox[origin=c]{90}{$\subseteq$}\ (0.3.315)}}{\underbrace{(\cup X) \cup \{\cup X\}}_{\substack{\| \\ \mathsf{S}(\cup X) \\ \rotatebox[origin=c]{90}{$\subseteq$}\ (0.3.315) \\ X}}} \subseteq X \quad \Leftrightarrow \quad \mathsf{S}(\cup X) = X$$

6. Пусть $X \in \mathtt{Ord}$, $Y \in \mathtt{Ord}$ и $\mathsf{S}(X) = \mathsf{S}(Y)$. Тогда

$$X = (0.3.314) = \cup \mathsf{S}(X) = \cup \mathsf{S}(Y) = (0.3.314) = Y.$$

7. Пусть $X, Y \in \mathtt{Ord}$, тогда

$$\underbrace{\mathsf{S}(X)}_{\substack{\| \\ X \cup \{X\}}} \in \underbrace{\mathsf{S}(Y)}_{\substack{\| \\ Y \cup \{Y\}}} \quad \Longrightarrow \quad X \cup \{X\} \in Y \cup \{Y\} \quad \Longrightarrow \quad \underbrace{X \cup \{X\} \in Y}_{\substack{\Downarrow \\ \{X\} \subseteq Y \\ \Downarrow \\ X \in Y}} \vee \underbrace{X \cup \{X\} \in \{Y\}}_{\substack{\Downarrow \\ X \cup \{X\} = Y \\ \Downarrow \\ \{X\} \subseteq Y \\ \Downarrow \\ X \in Y}}$$

8. Для $X, Y \in \mathtt{Ord}$ мы получаем цепочку

$$X < Y \quad \Longleftrightarrow \quad X \in Y \quad \Longrightarrow \quad X \in Y \ \& \ \underbrace{X \subseteq Y}_{\substack{\Uparrow \\ Y \text{ – наполненный класс}}} \quad \Longrightarrow \quad \underbrace{X \cup \{X\}}_{\substack{\| \\ \mathsf{S}(X)}} \subseteq Y \quad \Longrightarrow \quad X \leqslant Y.$$

□

Теорема 0.3.36. *Класс $M \subseteq \mathtt{Ord}$ тогда и только тогда будет множеством, когда он содержится в некотором малом ординале $A \in \mathtt{Ord}$:*

$$M \subseteq \mathtt{Ord} \ \& \ M \in \mathtt{Set} \quad \Leftrightarrow \quad \exists A \in \mathtt{Ord} \quad M \subseteq A. \tag{0.3.318}$$

Доказательство. Если M содержится в некотором малом ординале A, то поскольку A – множество, M тоже должен быть множеством.

Пусть наоборот, $M \subseteq \mathtt{Ord}$ и $M \in \mathtt{Set}$. Предположим, что M не содержится ни в каком ординале:

$$\forall A \in \mathtt{Ord} \quad \exists B \in M \quad B \notin A.$$

Поскольку класс $\mathtt{Ord}$ линейно упорядочен по отношению $\in$, это условие можно переписать так:

$$\forall A \in \mathtt{Ord} \quad \exists B \in M \quad A \in B \ \vee \ A = B.$$

Если вместо B подставить $\mathsf{S}(B)$, то можно это упростить:

$$\forall A \in \mathtt{Ord} \quad \exists B \in M \quad A \in B.$$

Это в свою очередь упрощается так:

$$\mathtt{Ord} \subseteq \cup M.$$

Здесь $\cup M$ – множество (в силу (0.3.163)), поэтому мы получаем, что класс $\mathtt{Ord}$ тоже должен быть множеством, а это не так. □

Изолированные и предельные ординалы.

- Ординал $X \in \mathtt{Ord}$ называется
  - *изолированным*, если $X = \varnothing$ или существует малый ординал $Y \in \mathtt{Ord}$ такой что $X = \mathsf{S}(Y)$;
  - *предельным*, если он не является изолированным, или, иными словами, если $X \neq \varnothing$ и не существует $Y \in \mathtt{Ord}$ такое что $X = \mathsf{S}(Y)$.

Теорема 0.3.37. *Непустой ординал $X \in \mathtt{Ord}$ изолирован тогда и только тогда, когда*

$$\cup X \in X \tag{0.3.319}$$

или, что эквивалентно,

$$X = \mathsf{S}(\cup X) \tag{0.3.320}$$

Доказательство. Эквивалентность условий (0.3.319) и (0.3.320) доказана выше формулой (0.3.317). Пусть $X \neq \varnothing$ и X – изолированное малый ординал, то есть $X = \mathsf{S}(Y)$ для некоторого $Y \in \mathtt{Ord}$. Тогда выполняется (0.3.319):

$$\cup X = \cup \mathsf{S}(Y) \overset{(0.3.314)}{=} Y \overset{(0.3.314)}{\in} \mathsf{S}(Y) = X.$$

Наоборот, если выполняется (0.3.319), $\cup X \in X$, то положив $Y = \cup X$, мы получим

$$X = (0.3.317) = \mathsf{S}(\cup X) = \mathsf{S}(Y).$$

$\square$

Теорема 0.3.38. *Непустой ординал $X \in \mathtt{Ord}$ пределен тогда и только тогда, когда*[33]

$$\cup X = X, \tag{0.3.321}$$

или, что эквивалентно, когда

$$X \neq \mathsf{S}(\cup X) \tag{0.3.322}$$

Доказательство. Эквивалентность условий (0.3.321) и (0.3.322) доказана в формуле (0.3.316). Дальше применяется цепочка:

$$X \neq \varnothing \text{ – предельный малый ординал} \quad \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \quad X \neq \varnothing \text{ – не изолированный малый ординал} \quad \overset{\text{теорема 0.3.37}}{\Leftrightarrow} \quad X \neq \mathsf{S}(\cup X).$$

$\square$

Определения по индукции на ординалах. Следующее определение представляет собой модификацию определения на с.46.

- Говорят, что *отображение h индуктивно определяет отображение f на ординалах*, или что *отображение f на ординалах индуктивно определено отображением h*, если
  (i) область определения $\mathsf{D}(f)$ отображения f является ординалом:
  $$\mathsf{D}(f) \in \mathtt{Ord} \ \vee \ \mathsf{D}(f) = \mathtt{Ord}, \tag{0.3.323}$$
  (ii) значение отображения f на всяком классе $X \in \mathsf{D}(f)$ описывается равенством (0.3.324):
  $$\forall X \in \mathsf{D}(f) \quad f(X) = h(f|_X). \tag{0.3.324}$$
  (iii) f продолжает любое другое отображение со свойствами (i) и (ii): если g – какое-то другое отображение, удовлетворяющее (i) и (ii), то $g \subseteq f$.

Теорема 0.3.39. *Всякое отображение h индуктивно определяет единственное отображение f на ординалах.*

[33] Условие (0.3.321) можно переписать так: $\forall A \in X \quad \exists B \in X : \quad A \in B$.

Доказательство. По теореме 0.3.27 h индуктивно определяет некое отображение, обозначим его F. Пусть $Y = \mathsf{D}(F) \cap \mathtt{Ord}$ и f – ограничение F на Y:

$$f = F\big|_Y.$$

Поскольку $\mathsf{D}(F)$ и $\mathtt{Ord}$ – наполненные классы, их пересечение $Y = \mathsf{D}(F) \cap \mathtt{Ord}$ – тоже наполненный класс (по свойству 2° на с.46). При этом $Y \subseteq \mathtt{Ord}$, поэтому по свойству 4° на с.55, Y – ординал. Условие (0.3.324) выполняется для отображения f автоматически, и то же самое с условием (iii). □

Из теоремы 0.3.29 сразу следует

Теорема 0.3.40. *Пусть M – ординал, P – произвольный класс, и отображение h удовлетворяет следующим условиям:*

(i) *для всякого ординала $X \in M$ класс P^X всех отображений $f : X \to P$ содержится в области определения h:*
$$\forall X \in M \quad P^X \subseteq \mathsf{D}(h), \tag{0.3.325}$$

(ii) *область значений h содержится в классе P:*
$$\mathsf{R}(h) \subseteq P. \tag{0.3.326}$$

Тогда отображение h индуктивно определяет единственное отображение $f : M \to P$.

Примером применения теоремы 0.3.39 является следующая теорема, которая понадобится нам ниже при доказательстве леммы 0.3.55.

Теорема 0.3.41. *Для всякого ординала X и любого его подкласса $M \subseteq X$ найдется отображение $f : X \hookrightarrow M$ со следующими свойствами:*

(i) *область определения $\mathsf{D}(f)$ отображения f есть ординал (такой что $\mathsf{D}(f) \subseteq X$),*

(ii) *f является биекцией между $\mathsf{D}(f)$ и M,*

(iii) *f строго монотонно (сохраняет отношение принадлежности):*
$$\forall A, B \in \mathsf{D}(f) \quad A \in B \quad \Longleftrightarrow \quad f(A) \in f(B). \tag{0.3.327}$$

Доказательство. 1. Рассмотрим отображение

$$h(T) = \min\Big(M \setminus \mathsf{R}(T)\Big)$$

(где $\mathsf{R}(T)$ – область значений класса T, определенная формулой (0.3.220)). По теореме 0.3.39 оно определяет некое отображение f, у которого область определения $\mathsf{D}(f)$ является ординалом, и

$$\forall Z \in \mathsf{D}(f) \quad f(Z) = h(f|_Z) = \min\Big(M \setminus \mathsf{R}(f|_Z)\Big).$$

2. Это отображение будет инъективно, потому что если $A, B \in \mathsf{D}(f)$ и $A \neq B$, то либо $A \in B$, либо $B \in A$. Будем считать, что $A \in B$. Тогда

$$f(A) \in \mathsf{R}(f|_B) \quad \Rightarrow \quad f(A) \notin M \setminus \mathsf{R}(f|_B) \quad \Rightarrow \quad f(A) \neq \min\Big(M \setminus \mathsf{R}(f|_B)\Big) = f(B).$$

3. С другой стороны, f сюръективно, потому что если $M \setminus \mathsf{R}(f) \neq \varnothing$, то можно положить

$$g(A) = \begin{cases} f(A), & A \in \mathsf{D}(f) \\ \min\Big(M \setminus \mathsf{R}(f)\Big), & A = \mathsf{D}(f) \end{cases},$$

и мы получим отображение g с областью определения $\mathsf{D}(g) = \mathsf{D}(f) \cup \{\mathsf{D}(f)\} = \mathsf{S}(\mathsf{D}(f))$, более широкой чем у f, но с теми же свойствами, что у f, и это будет означать, что g продолжает f, сохраняя его свойства, что невозможно по определению (на с.58) отображения, порожденного h.

4. Заметим далее, что отображение f нестрого монотонно:

$$A \leqslant B \quad \Longrightarrow \quad f(A) \leqslant f(B) \tag{0.3.328}$$

Это доказывается цепочкой

$$A \leqslant B \iff A \subseteq B \implies f|_A \subseteq f_B \implies \mathsf{R}(f|_A) \subseteq \mathsf{R}(f_B) \implies$$
$$\implies M \setminus \mathsf{R}(f|_A) \supseteq M \setminus \mathsf{R}(f_B) \implies \underbrace{\min\Big(M \setminus \mathsf{R}(f|_A)\Big)}_{\substack{\| \\ f(A)}} \leqslant \underbrace{\min\Big(M \setminus \mathsf{R}(f_B)\Big)}_{\substack{\| \\ f(B)}}$$

5. Поскольку отображение f инъективно, из его нестрогой монотонности (0.3.328) следует строгая монотонность в одну сторону,

$$A < B \implies f(A) < f(B), \tag{0.3.329}$$

а из нее – строгая монотонность в обе стороны:

$$A < B \iff f(A) < f(B).$$

Действительно, если $f(A) < f(B)$, то это сразу означает, что $A \neq B$, а из (0.3.329) следует, что вариант $A > B$ тоже отпадает, и поэтому остается только вариант $A < B$. Это доказывает условие (0.3.327).

6. Нам остается доказать включение $\mathsf{D}(f) \subseteq X$. Для этого сначала нужно заметить, что из (0.3.327) следует неравенство

$$\forall A \in \mathsf{D}(f) \quad A \leqslant f(A) \tag{0.3.330}$$

Если $\mathsf{D}(f) = \varnothing$, то это неравенство выполняется тривиально, если же $\mathsf{D}(f) \neq \varnothing$, то оно доказывается индукцией с использованием теоремы 0.3.43. Во-первых, из $\mathsf{D}(f) \neq \varnothing$ и $\mathsf{D}(f) \in \mathtt{Ord}$ сразу следует

$$\varnothing \in \mathsf{D}(f)$$

Во-вторых, если (0.3.330) верно для какого-то $A \in \mathsf{D}(f)$, то для $\mathsf{S}(A) \in \mathsf{D}(f)$ мы получаем

$$A \leqslant f(A) < f(\mathsf{S}(A)) \overset{\text{свойство } 7^\circ \text{ на с.56}}{\implies} \mathsf{S}(A) \leqslant f(\mathsf{S}(A)).$$

И, в-третьих, если (0.3.330) верно для всех $A \in B$, где $B \in \mathsf{D}(f)$, то

$$\forall A \in B \quad A \leqslant f(A) < f(B) \overset{\text{свойство } 7^\circ \text{ на с.55}}{\implies} B \leqslant f(B).$$

7. Теперь из (0.3.330) следует цепочка:

$$\forall A \in \mathsf{D}(f) \quad A \leqslant f(A) = \min\Big(\underbrace{M \setminus \mathsf{R}(f|_A)}_{\substack{\cap| \\ X}}\Big) \in X$$
$$\Downarrow$$
$$\forall A \in \mathsf{D}(f) \quad A \in X$$
$$\Downarrow$$
$$\mathsf{D}(f) \subseteq X$$

□

Доказательства по индукции. Следующие два утверждения имеют общее название: принцип трансфинитной индукции.

Теорема 0.3.42 (принцип полной трансфинитной индукции)**.** *Пусть X – ординал и класс $Y \subseteq X$ обладает следующим свойством:*

CT*: если для какого-то ординала $A \in X$ выполняется $A \subseteq Y$, то $A \in Y$.*

Тогда $Y = X$.

Доказательство. Предположим, что $Y \neq X$. Тогда $Z = X \setminus Y \neq \varnothing$. Значит, по свойству 2° на с.55 Z обладает минимальным элементом

$$A = \min Z.$$

Всякий элемент $B \in A$ (то есть всякий элемент $B < A$) не лежит в Z, поэтому лежит в Y:

$$\forall B \in A \quad B \in Y.$$

Иными словами, $A \subseteq Y$. Значит, по условию CT, $A \in Y$, и поэтому $A \notin Z$, а это противоречит выбору A. □

! **0.3.29.** Условие CT означает, между прочим, потому что $\varnothing \subseteq Y$.
что

$$\varnothing \in Y,$$

Теорема 0.3.43 (принцип обыкновенной трансфинитной индукции)**.** *Пусть X – ординал и класс $Y \subseteq X$ обладает следующими свойствами:*

- OT-0*:* $\varnothing \in Y$*;*
- OT-1*:* *если* $B \in Y$*, то* $\mathsf{S}(B) \in Y$*.*
- OT-2*:* *если предельный ординал $A \in X$ удовлетворяет условию*

$$\forall B < A \quad B \in Y, \qquad (0.3.331)$$

то $A \in Y$*.*

Тогда $Y = X$*.*

Доказательство. Пусть $A \in X$ и $A \subseteq Y$. Предположим сначала, что A – изолированный ординал, то есть либо $A = \varnothing$, либо $A = \mathsf{S}(B)$ для некоторого $B \in X$. Тогда если $A = \varnothing$, то по условию OT-0, $A = \varnothing \in Y$. Если же $A = \mathsf{S}(B)$ для некоторого $B \in X$, то условие

$$Y \supseteq A = \mathsf{S}(B) = B \cup \{B\}$$

влечет за собой условие $B \in Y$, из которого в свою очередь в силу OT-1, мы получаем $A = \mathsf{S}(B) \in Y$. Если же A – предельный ординал, то для него условие

$$Y \supseteq A = \{B : B \in A\} = \{B \in X : B < A\}$$

эквивалентно условию (0.3.331), и по OT-2 мы снова получем, что $A \in Y$.

Вместе это означает выполнение условия CT теоремы (0.3.42), и значит, $Y = X$. $\square$

Конечные ординалы и аксиома бесконечности. Определение конечного ординала выглядит усилением определения ординала на с.50.

- Класс X называется *конечным ординалом*, если он является изолированным ординалом[34], и любой его элемент $Y \in X$ также является изолированным ординалом.

Следующая теорема аналогична теореме 0.3.32:

Теорема 0.3.44. *Всякий элемент $Y \in X$ произвольного конечного ординала X сам является конечным ординалом.*

Доказательство. Ординал Y изолированный, поскольку он является элементом конечного ординала. Если же $Z \in Y$, то мы получаем цепочку

$$Z \in Y \in X \quad \xRightarrow{\substack{X\ –\ \text{наполненный}\\ \text{класс}}} \quad Z \in X \quad \xRightarrow{\substack{X\ –\ \text{конечный}\\ \text{ординал}}} \quad Z\ –\ \text{изолированный ординал.}$$

Таким образом, Y – изолированный ординал, и любой его элемент $Z \in Y$ – тоже изолированный ординал. Значит, Y – конечный ординал. $\square$

- *Класс всех конечных ординалов* обозначается символом $\mathtt{FinOrd}$.

Свойства класса $\mathtt{FinOrd}$:

1° *Ординалы 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, определенные выше формулами* (0.3.279) — (0.3.288)*, являются конечными ординалами:*

$$\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\} \subseteq \mathtt{FinOrd} \qquad (0.3.332)$$

2° *Если* $X \in \mathtt{FinOrd}$*, то* $\mathsf{S}(X) \in \mathtt{FinOrd}$*.*

[34] Изолированные ординалы были определены на с.58.

3° *Класс* $\mathtt{FinOrd}$ *является ординалом.*

Доказательство. 1. Свойство 1° очевидно.

2. Пусть $X \in \mathtt{FinOrd}$, то есть X – конечный ординал. Если $Y \in \mathsf{S}(X) = X \cup \{X\}$, то либо $Y \in X$, и тогда Y – изолированное малый ординал, потому у X, как у конечного ординала, все элементы должны быть изолированными ординалами. Либо $Y = X$, и тогда Y – изолированный ординал, потому что X, как конечный ординал, должно быть изолированным ординалом. Итак, любой элемент $Y \in \mathsf{S}(X)$ – изолированный ординал. С другой стороны, $\mathsf{S}(X)$ – тоже изолированный ординал (потому что имеет вид $\mathsf{S}(Y)$ для $Y = X$). Вместе это означает, что $\mathsf{S}(X)$ – конечный ординал.

3. Если $A \in B \in \mathtt{FinOrd}$, то B – конечный ординал, и поэтому по теореме 0.3.44 A – тоже конечный ординал. Значит, $A \in \mathtt{FinOrd}$, и это доказывает наполненность класса $\mathtt{FinOrd}$. С другой стороны, всякий элемент $B \in \mathtt{FinOrd}$ является конечным ординалом, и значит, ординалом, и поэтому наполнен. Вместе это значит, что $\mathtt{FinOrd}$ – ординал. □

Из теоремы 0.3.40 следует

Теорема 0.3.45 (об определении индукцией на конечных ординалах)**.** *Пусть P – класс, и h – отображение со следующими свойствами:*

(i) *для любого конечного ординала $n \in \mathtt{FinOrd}$ класс P^n (состоящий из всевозможных отображений $f : n \to P$) содержится в области определения $\mathsf{D}(h)$,*

$$P^n \subseteq \mathsf{D}(h)$$

(в частности, $P^{\varnothing} = \{\varnothing\} \subseteq \mathsf{D}(h)$).

(ii) *область значений h содержится в классе P:*

$$\mathsf{R}(h) \subseteq P.$$

Тогда формула

$$f(n) = h(f\big|_n), \qquad n \in \mathtt{FinOrd} \tag{0.3.333}$$

однозначно определяет отображение $f : \mathtt{FinOrd} \to P$.

Следующая модификация теоремы 0.3.45 очень полезна в приложениях.

Теорема 0.3.46 (об определении индукцией на конечных ординалах)**.** *Пусть Q – класс, и H – отображение, действующее из Q в Q:*

$$H : Q \to Q.$$

Тогда для всякого множества $X \in Q$ правила

$$f(\varnothing) = X, \qquad f(\mathsf{S}(n)) = H(f(n)), \qquad n \in \mathtt{FinOrd}, \tag{0.3.334}$$

однозначно определяют отображение $f : \mathtt{FinOrd} \to Q$.

У теорем 0.3.42 и 0.3.43 имеются два важных аналога для случая, когда рассматриваемый класс ординалов X содержится в множестве $\mathtt{FinOrd}$. Эти аналоги называются принципами индукции (без эпитета “трансфинитный”).

Теорема 0.3.47 (принцип полной индукции)**.** *Пусть класс $Y \subseteq \mathtt{FinOrd}$ обладает следующими свойствами:*

CI*: если для какого-то числа $n \in \mathtt{FinOrd}$ выполняется $n \subseteq Y$, то $n \in Y$.*

Тогда $Y = \mathtt{FinOrd}$.

Доказательство. Это частный случай теоремы 0.3.42 с $X = \mathtt{FinOrd}$. □

! **0.3.30.** Условие CI означает, между прочим, что

$$\varnothing \in Y,$$

потому что $\varnothing \subseteq Y$.

Теорема 0.3.48 (принцип обыкновенной индукции). *Пусть класс $Y \subseteq \mathtt{FinOrd}$ обладает следующими свойствами:*

OI-0: $\varnothing \in Y$;

OI-1: *если* $m \in Y$, *то* $\mathsf{S}(m) \in Y$.

Тогда $Y = \mathtt{FinOrd}$.

Доказательство. Это частный случай теоремы 0.3.43 с $X = \mathtt{FinOrd}$, только качественная разница в том, что здесь условие OT-2 отпадает, потому что в $\mathtt{FinOrd}$ нет предельных ординалов (в силу определения конечного ординала). □

MK-13 **Аксиома бесконечности:** существует *множество*[35] Y со следующими свойствами:

(i) $\varnothing \in Y$;

(ii) если $X \in Y$, то $X \cup \{X\} \in Y$.

Из этой аксиомы следует

Теорема 0.3.49. $\mathtt{FinOrd} \in \mathtt{Ord}$.

Доказательство. По свойству 3° на с.62, $\mathtt{FinOrd}$ – ординал. Поэтому нам нужно только доказать, что $\mathtt{FinOrd}$ является множеством. Рассмотриме множество Y из аксиомы MK-13 и покажем, что $\mathtt{FinOrd} \subseteq Y$. По теореме 0.3.1 это будет означать, что $\mathtt{FinOrd}$ – тоже множество. Обозначим $X = Y \cap \mathtt{FinOrd}$. Понятно, что $X \subseteq \mathtt{FinOrd}$. Заметим, что

1. $\varnothing \in X$, потому что $\varnothing \in Y$ по условию (i) аксиомы MK-13, а с другой стороны, $\varnothing \in \mathtt{FinOrd}$ в силу свойства 1° на с.61.
2. Если $A \in X$, то $A \in Y$, поэтому по условию (i) аксиомы MK-13, $\mathsf{S}(A) \in Y$, а с другой стороны, $A \in \mathtt{FinOrd}$, поэтому в силу свойства 2° на с.61, $\mathsf{S}(A) \in \mathtt{FinOrd}$. В результате, $\mathsf{S}(A) \in X$.

Мы видим, что класс X удовлетворяет посылкам теоремы 0.3.48, значит $X = Y \cap \mathtt{FinOrd} = \mathtt{FinOrd}$. Отсюда $\mathtt{FinOrd} \subseteq Y$. □

Теорема 0.3.50. $\mathtt{FinOrd}$ *является минимальным предельным ординалом.*

Доказательство. Сначала покажем, что $\mathtt{FinOrd}$ – предельный ординал. По теореме 0.3.38 для этого нужно убедиться, что

$$\cup \mathtt{FinOrd} = \mathtt{FinOrd}.$$

Вложение $\cup \mathtt{FinOrd} \subseteq \mathtt{FinOrd}$ следует из (0.3.315), нам нужно проверить обратное вложение, $\mathtt{FinOrd} \subseteq \cup \mathtt{FinOrd}$. Это следует из свойства 2° на с.61: если $X \in \mathtt{FinOrd}$, то $X \in \mathsf{S}(X) \in \mathtt{FinOrd}$, поэтому $X \in \cup \mathtt{FinOrd}$.

Мы поняли, что $\mathtt{FinOrd}$ – предельный ординал. Показать, что это минимальный ординал с таким свойством, можно просто заметив, что никакой меньший ординал не будет предельным. Действительно, если $X < \mathtt{FinOrd}$, то есть $X \in \mathtt{FinOrd}$, то X – конечный ординал, и поэтому изолированный ординал, то есть не предельный. □

Операция наполнения $X \mapsto \mathtt{fill}\, X$. Полезность теорем 0.3.46 и 0.3.48 можно проиллюстрировать конструкцией, сопоставляющей любому множеству X наименьшее содержащее его наполненное[36] множество, обозначаемое $\mathtt{fill}\, X$ и называемое наполнением X.

Зафиксируем произвольное множество $X \in \mathtt{Set}$ и определим отображение $H : \mathtt{Set} \to \mathtt{Set}$ правилом

$$H(T) = \begin{cases} \cup T, & T \neq \varnothing \\ X, & T = \varnothing \end{cases}$$

Если считать, что $Q = \mathtt{Set}$, то Q и H будут удовлетворять посылке теоремы 0.3.46, и поэтому формула (0.3.334) определяет некое отображение $f : \mathtt{FinOrd} \to \mathtt{Set}$. Обозначим

$$\mathtt{fill}_n\, X = f(n)$$

[35] В аксиоме MK-13 важно утверждение, что Y является множеством, а не просто классом.

[36] В смысле определения на с.45.

и заметим, что

$$\mathtt{fill}_0\, X = X, \quad \mathtt{fill}_{\mathsf{S}(n)}\, X = \cup \mathtt{fill}_n\, X, \quad n \in \mathtt{FinOrd}\,.$$

Действительно, во-первых,

$$\mathtt{fill}_0\, X = f(0) = f(\varnothing) = h(f\big|_{\varnothing}) = h(\varnothing) = X.$$

И, во-вторых,

$$\mathtt{fill}_{\mathsf{S}(n)}\, X = f(\mathsf{S}(n)) = H(f(n)) = \\ = \cup f(n) = \cup \mathtt{fill}_n\, X.$$

Теперь *наполнение* $\mathtt{fill}\, X$ множества X определяется равенством

$$\mathtt{fill}\, X = \bigcup_{n \in \mathtt{FinOrd}} \mathtt{fill}_n\, X. \qquad (0.3.335)$$

Свойства наполнения:

1° *Всякое множество X содержится в своем наполнении $\mathtt{fill}\, X$:*

$$X \subseteq \mathtt{fill}\, X \qquad (0.3.336)$$

2° *Наполнение $\mathtt{fill}\, X$ любого множества X является наполненным множеством:*

$$Y \in \mathtt{fill}\, X \quad \Longrightarrow \quad Y \subseteq \mathtt{fill}\, X \qquad (0.3.337)$$

3° *Если множество X содержится в наполненном классе Y, то его наполнение $\mathtt{fill}\, X$ также содержится в Y:*

$$(X \subseteq Y \;\&\; \cup Y \subseteq Y) \quad \Longrightarrow \\ \Longrightarrow \quad \mathtt{fill}\, X \subseteq Y. \qquad (0.3.338)$$

4° *Множество X наполнено тогда и только тогда, когда оно совпадает со своим наполнением:*

$$X = \mathtt{fill}\, X. \qquad (0.3.339)$$

Доказательство. 1. Прежде всего,

$$X = \mathtt{fill}_0\, X \subseteq \bigcup_{n \in \mathtt{FinOrd}} \mathtt{fill}_n\, X = \mathtt{fill}\, X.$$

2. Если $Y \in \mathtt{fill}\, X = \bigcup_{n \in \mathtt{FinOrd}} \mathtt{fill}_n\, X$, то $Y \in \mathtt{fill}_n\, X$ для некоторого $n \in \mathtt{FinOrd}$. Применяя (0.3.162), получаем

$$Y \subseteq \cup \mathtt{fill}_n\, X = \mathtt{fill}_{\mathsf{S}(n)}\, X \subseteq \mathtt{fill}\, X.$$

3. Пусть Y – наполненый класс, и $X \subseteq Y$. Чтобы доказать включение $\mathtt{fill}\, X \subseteq Y$, мы применим теорему 0.3.48. Сначала заметим, что

$$\mathtt{fill}_0\, X = X \subseteq Y.$$

После этого предположим, что для некоторого $n \in \mathtt{FinOrd}$ выполняется

$$\mathtt{fill}_n\, X \subseteq Y.$$

Тогда

$$\mathtt{fill}_{\mathsf{S}(n)}\, X = \cup \mathtt{fill}_n\, X \subseteq (0.3.161) \subseteq \cup Y \subseteq Y.$$

4. Если множество X наполнено, то подставляя $Y = X$ в (0.3.338), мы получим

$$(X \subseteq X \;\&\; \cup X \subseteq X) \quad \Longrightarrow \quad \mathtt{fill}\, X \subseteq X,$$

и вместе с (0.3.336) это дает (0.3.339). Наоборот, если выполняется (0.3.339), то в силу (0.3.337), множество X наполнено. □

! **0.3.31.** Свойства 1°, 2° и 3° вместе означают то, что мы говорили вначале: наполнение $\mathtt{fill}\, X$ множества X является наименьшим наполненным множеством (эквивалентно: классом), содержащим X.

(f) Кардиналы и аксиома выбора

Аксиома выбора. Следующая аксиома — последняя в теории MK.

- *Функцией выбора* называется произвольное отображение c со следующими свойствами:
  (i) областью определения c является класс $\mathtt{Set} \setminus \{\varnothing\}$ всех непустых множеств,
  (ii) для всякого $X \in \mathtt{Set} \setminus \{\varnothing\}$ справедливо $c(X) \in X$,

MK-14 **Аксиома выбора:** существует функция выбора.

Теорема 0.3.51. *Для любого множества X существует его биекция $f : X \to T$ на некоторый малый ординал $T \in \mathtt{Ord}$.*

Доказательство. Напомним, что область значений $\mathsf{R}(M)$ класса M была определена нами формулой (0.3.220). Зафиксируем X и рассмотрим отображение

$$h(M) = c\,(X \setminus \mathsf{R}(M)), \qquad M \in \mathtt{Set},$$

где c – функция выбора, существование которой декларируется аксиомой MK-14. По теореме 0.3.39 отображение h определяет единственное отображение f, определенное на некотором ординале $\mathsf{D}(f)$ по формуле

$$f(Y) = h(f\big|_Y) = c\,(X \setminus \mathsf{R}(f\big|_Y)), \qquad Y \in \mathsf{D}(f) \subseteq \mathtt{Ord}\,.$$

Приглядимся к этому отображению f.

1. Заметим сначала, что f должно быть биекцией (между своими областью определения $\mathsf{D}(f)$ и множеством значений $\mathsf{R}(f)$). Действительно, предположим, что для некоторых $A \neq B \in \mathsf{D}(f)$ выполняется $f(A) = f(B)$. По свойству ординалов 6° на с.54 либо $A \in B$, либо $B \in A$. Будем считать, что $A \in B$. Тогда $f(A) \in \mathsf{R}(f\big|_B)$, и мы получаем такую импликацию:

$$f(B) = c\,(X \setminus \mathsf{R}(f\big|_B)) \in X \setminus \underbrace{\mathsf{R}(f\big|_B)}_{\substack{\Cup \\ f(A)}} \quad \Rightarrow \quad f(A) \neq f(B).$$

2. Заметим далее, что всегда

$$f(Y) = c\,(X \setminus \mathsf{R}(f\big|_Y)) \in X \setminus \mathsf{R}(f\big|_Y) \subseteq X,$$

поэтому $\mathsf{R}(f) \subseteq X$. Отсюда по теореме 0.3.1 следует, что $\mathsf{R}(f)$ – множество, а из этого по аксиоме MK-12 на с.42 следует, что

$$\mathsf{D}(f) = f^{-1}\big(\mathsf{R}(f^{-1})\big) = f^{-1}\big(\mathsf{D}(f)\big)$$

– тоже множество, и значит,

$$\mathsf{D}(f) \in \mathtt{Ord}\,.$$

3. Поскольку $\mathsf{D}(f) \notin \mathsf{D}(f)$, по теореме 0.3.17 мы получаем

$$\underbrace{f(\mathsf{D}(f))}_{\substack{\| \\ c\left(X \setminus \mathsf{R}(f|_{\mathsf{D}(f)})\right) \\ \| \\ c\,(X \setminus \mathsf{R}(f))}} = \mathtt{Set}$$

То есть

$$c\big(X \setminus \mathsf{R}(f)\big) = \mathtt{Set}\,.$$

Такое возможно только если $X \setminus \mathsf{R}(f) \notin \mathsf{D}(c) = \mathtt{Set} \setminus \{\varnothing\}$. То есть должно быть $X \setminus \mathsf{R}(f) = \varnothing$, и, поскольку $\mathsf{R}(f) \subseteq X$, мы получем

$$\mathsf{R}(f) = X.$$

Таким образом, f – биекция между $\mathsf{D}(f) \in \mathtt{Ord}$ и $\mathsf{R}(f) = X$. □

Кардинальные числа.

- Говорят, что два множества X и Y *равномощны*, и обозначают это записью

$$X \simeq Y, \tag{0.3.340}$$

  если существует биекция f, областью определения которой является множество X, а областью значений – множество Y:

$$\mathsf{D}(f) = X \quad \& \quad \mathsf{R}(f) = Y.$$

  Если $X \simeq Y$ ложно, то это обозначается записью

$$X \not\simeq Y$$

Свойства отношения $\simeq$:

1° **Рефлексивность:** *всегда* $X \simeq X$.

2° **Симметричность:** *если* $X \simeq Y$, *то* $Y \simeq X$.

3° **Транзитивность:** *если* $X \simeq Y$ *и* $Y \simeq Z$, *то* $X \simeq Z$.

- *Кардинальным числом* называется всякий малый ординал $P \in \mathtt{Ord}$, не равномощное никакому своему элементу:
$$T \in P \quad \Rightarrow \quad T \not\simeq P. \tag{0.3.341}$$
(то есть никакому меньшему ординалу). Класс всех кардинальных чисел обозначается $\mathtt{Card}$:
$$\mathtt{Card} = \{P: \ P \text{ – кардинальное число}\} \tag{0.3.342}$$

Свойства класса $\mathtt{Card}$:

1° *Для всякого ординала $T \in \mathtt{Ord}$ найдется равномощный ему кардинал $P \in \mathtt{Card}$.*

2° *На $\mathtt{Card}$ отношение равномощности $\simeq$ эквивалентно равенству:*
$$\forall P, Q \in \mathtt{Card} \qquad P \simeq Q \quad \Leftrightarrow \quad P = Q \tag{0.3.343}$$

Теорема 0.3.52. *Существует отображение* $\operatorname{card} : \mathtt{Set} \to \mathtt{Card}$ *со свойством*
$$\forall X \in \mathtt{Set} \quad \operatorname{card} X \simeq X \tag{0.3.344}$$

- Отображение $\operatorname{card} : \mathtt{Set} \to \mathtt{Card}$ называется *отображением мощности.* Кардинал $\operatorname{card} X$ называется *мощностью множества* X.

Доказательство. Определим отношение
$$\operatorname{card} = \{(X, P) : X \simeq P \ \& \ P \in \mathtt{Card}\} \tag{0.3.345}$$
(то есть пара (X, P) принадлежит классу card, если X равномощно P и P является кардиналом). Если $(X, P) \in \operatorname{card}$ и $(X, Q) \in \operatorname{card}$, то $X \simeq P$ и $X \simeq Q$, поэтому по свойствам 2° и 3° отношения $\simeq$, $P \simeq Q$. С другой стороны, $P, Q \in \mathtt{Card}$, поэтому в силу (0.3.343), $P = Q$, Поскольку это верно для любых $(X, P) \in \operatorname{card}$ и $(X, Q) \in \operatorname{card}$, это означает, что отношение card – отображение. Условие (0.3.344) следует из (0.3.345), и остается доказать, что card определено на всем классе $\mathtt{Set}$. Это следует из теоремы 0.3.51: всякое множество $X \in \mathtt{Set}$ равномощно некоторому ординалу $T \in \mathtt{Ord}$, который в свою очередь (по свойству 1° класса $\mathtt{Card}$) равномощен некоторому кардиналу $P \in \mathtt{Card}$, поэтому $(X, P) \in \operatorname{card}$. □

Теорема 0.3.53. *Если $X \in \mathtt{Ord}$, то*
$$\operatorname{card} X = \min\{Z \in \mathtt{Ord} : Z \simeq X\} \tag{0.3.346}$$

Доказательство. Из $\operatorname{card} X \simeq X$ следует $\operatorname{card} X \in \{Z \in \mathtt{Ord} : \ Z \simeq X\}$, поэтому $\operatorname{card} X \geqslant \min\{Z \in \mathtt{Ord} : Z \simeq X\}$. Если предположить, что неравенство строгое, $\operatorname{card} X > \min\{Z \in \mathtt{Ord} : Z \simeq X\}$, то мы получим
$$\min\{Z \in \mathtt{Ord} : Z \simeq X\} \simeq X \simeq \operatorname{card} X,$$
то есть $\min\{Z \in \mathtt{Ord} : Z \simeq X\}$ – ординал, равномощный $\operatorname{card} X$, но меньший $\operatorname{card} X$. Это означает, что $\operatorname{card} X$ – не кардинал (потому что противоречит определению кардиналов). □

Свойства мощности:

1° *Если $X, Y \in \mathtt{Set}$, то $X \simeq Y$ тогда и только тогда, когда $\operatorname{card} X = \operatorname{card} Y$.*

2° *$P \in \mathtt{Card}$ тогда и только тогда, когда $P \in \mathtt{Set}$ и $\operatorname{card} P = P$.*

3° *Если $X \in \mathtt{Set}$, то $\operatorname{card}(\operatorname{card} X) = \operatorname{card} X$.*

Доказательство. 1. Если $X \simeq Y$, то
$$\operatorname{card} X \overset{(0.3.344)}{\simeq} X \simeq Y \overset{(0.3.344)}{\simeq} \operatorname{card} Y \quad \overset{\text{транзитивность } \simeq}{\Longrightarrow} \quad \operatorname{card} X \simeq \operatorname{card} Y \quad \overset{(0.3.343)}{\Longrightarrow} \quad \operatorname{card} X = \operatorname{card} Y.$$
Наоборот, если $\operatorname{card} X = \operatorname{card} Y$, то
$$\operatorname{card} X = \operatorname{card} Y \quad \Longrightarrow \quad X \overset{(0.3.344)}{\simeq} \operatorname{card} X = \operatorname{card} Y \overset{(0.3.344)}{\simeq} Y \quad \overset{\text{транзитивность } \simeq}{\Longrightarrow} \quad X \simeq Y.$$

2. Если $P \in \mathtt{Set}$ и $\operatorname{card} P = P$, то $P = \operatorname{card} P \in \mathtt{Card}$. Наоборот, если $P \in \mathtt{Card}$, то

$$\underbrace{\operatorname{card} P}_{\substack{\Cap \\ \mathtt{Card}}} \simeq \underbrace{P}_{\substack{\Cap \\ \mathtt{Card}}} \overset{(0.3.343)}{\Longrightarrow} \operatorname{card} P = P.$$

3. Если $X \in \mathtt{Set}$, то обозначив $P = \operatorname{card} X \in \mathtt{Card}$, мы по уже доказанному свойству 2°, получим

$$\operatorname{card}(\operatorname{card} X) = \operatorname{card} P = P = \operatorname{card} X.$$

$\square$

Теорема 0.3.54. *Для множеств $X \neq \varnothing$ и Y следующие условия эквивалентны:*

(i) $\operatorname{card} X \leqslant \operatorname{card} Y$,

(ii) *существует инъективное отображение $f : X \to Y$,*

(iii) *существует сюръективное отображение $g : Y \to X$.*

Для доказательства нам понадобится несколько лемм.

Лемма 0.3.55. *Если*[37] $X \subseteq Y \in \mathtt{Ord}$, *то* $\operatorname{card} X \leqslant Y$.

Доказательство. 1. Сразу заметим, что если $X \in \mathtt{Ord}$, то это верно:

$$X, Y \in \mathtt{Ord} \ \& \ X \subseteq Y \quad \Longrightarrow \quad \operatorname{card} X \leqslant Y \tag{0.3.347}$$

Действительно, в этом случае

$$\operatorname{card} X = (0.3.346) = \min\{Z \in \mathtt{Ord} : Z \simeq X\} \leqslant X \leqslant Y.$$

2. Пусть $X \subseteq Y \in \mathtt{Ord}$. Тогда по теореме 0.3.41 найдется отображение $f : Y \hookrightarrow Y$, у которого область определения $\mathsf{D}(f) \subseteq Y$ является ординалом, и которое является биекцией между $\mathsf{D}(f)$ и X. Значит,

$$X \simeq \mathsf{D}(f) \subseteq Y \quad \Longrightarrow \quad \operatorname{card} X = \operatorname{card} \mathsf{D}(f) \overset{(0.3.347)}{\leqslant} Y.$$

$\square$

Лемма 0.3.56. *Если $X \subseteq Y \in \mathtt{Set}$, то $\operatorname{card} X \leqslant \operatorname{card} Y$.*

Доказательство. Пусть $X \subseteq Y \in \mathtt{Set}$. Поскольку $Y \simeq \operatorname{card} Y$, найдется биекция $f : Y \to \operatorname{card} Y$. Ее ограничение $f|_X$ на множество X также будет биекцией, поэтому по уже доказанному свойству 1°,

$$\operatorname{card} X = \operatorname{card} \mathsf{R}(f|_X).$$

С другой стороны, $\mathsf{R}(f|_X) \subseteq \operatorname{card} Y$, поэтому по лемме 0.3.55

$$\operatorname{card} \mathsf{R}(f|_X) \leqslant \operatorname{card} Y.$$

$\square$

Лемма 0.3.57. *Для всякого отображения f*

$$\operatorname{card} \mathsf{R}(f) \leqslant \operatorname{card} \mathsf{D}(f) \tag{0.3.348}$$

Доказательство. Рассмотрим отображение

$$g(B) = c(\{A : \ f(A) = B\}), \qquad B \in \mathsf{R}(f).$$

где c – функция выбора из аксиомы MK-14 на с.64. Отображение g будет инъективно, и значит, биективно между $\mathsf{D}(g) = \mathsf{R}(f)$ и $\mathsf{R}(g) \subseteq \mathsf{D}(f)$. Применяя свойство мощности 1° и лемму 0.3.56, мы получаем

$$\mathsf{R}(f) = \mathsf{D}(g) \simeq \mathsf{R}(g) \subseteq \mathsf{D}(f) \quad \Longrightarrow \quad \operatorname{card} \mathsf{R}(f) = \operatorname{card} \mathsf{D}(g) = \operatorname{card} \mathsf{R}(g) \leqslant \operatorname{card} \mathsf{D}(f).$$

$\square$

[37] В лемме 0.3.55 X – произвольное подмножество в Y, необязательно ординал.

Доказательство теоремы 0.3.54. 1. Докажем сначала импликацию $(i) \Rightarrow (ii)$. Пусть $\operatorname{card} X \leqslant \operatorname{card} Y$. Пусть $p : X \to \operatorname{card} X$ и $q : Y \to \operatorname{card} Y$ – биекции, и $r : \operatorname{card} X \to \operatorname{card} Y$ – естественное вложение

$$r(A) = A, \qquad A \in \operatorname{card} X.$$

Тогда отображение $f = q^{-1} \circ r \circ p : X \to Y$ является инъекцией, как композиция инъекций.

2. Далее докажем $(ii) \Rightarrow (iii)$. Пусть дана инъекция $f : X \to Y$. Поскольку $X \neq \varnothing$, найдется элемент $A \in X$. Зафиксируем его и определим отображение

$$g(B) = \begin{cases} f^{-1}(B), & B \in \mathsf{R}(f) \\ A, & B \notin \mathsf{R}(f) \end{cases}, \qquad B \in Y.$$

Это отображение g будет сюръективно.

3. Наконец, убедимся, что $(iii) \Rightarrow (i)$. Пусть $g : Y \to X$ – сюръективное отображение. Тогда

$$\operatorname{card} X = \operatorname{card} \mathsf{R}(g) \leqslant (0.3.348) \leqslant \operatorname{card} \mathsf{D}(g) = \operatorname{card} Y.$$

□

Теорема 0.3.58 (Кантор, Бернштейн). *Если* $A, B, X, Y \in \mathtt{Set}$ *и*

$$\begin{array}{ccc} X & \simeq & B \\ \cup\!\mid & & \cap\!\mid \\ A & \simeq & Y \end{array} \tag{0.3.349}$$

то $X \simeq Y$.

Доказательство. Здесь применяются только что доказанные свойства 1° и 4°: с одной стороны,

$$X \simeq B \subseteq Y \quad \Longrightarrow \quad \operatorname{card} X = \operatorname{card} B \leqslant \operatorname{card} Y,$$

а, с другой стороны,

$$Y \simeq A \subseteq X \quad \Longrightarrow \quad \operatorname{card} Y = \operatorname{card} A \leqslant \operatorname{card} X.$$

□

◇ **0.3.32.** Всякий конечный ординал является кардиналом:

$$\mathtt{FinOrd} \subseteq \mathtt{Card}. \tag{0.3.350}$$

Для доказательства нам понадобится следующая

Лемма 0.3.59. *Если* $X, Y \in \mathtt{Ord}$ *и* $\mathsf{S}(X) \simeq \mathsf{S}(Y)$, *то* $X \simeq Y$.

Доказательство. Покажем, что если существует какая-то биекция $f : \mathsf{S}(X) \to \mathsf{S}(Y)$, то существует и биекция $g : \mathsf{S}(X) \to \mathsf{S}(Y)$, переводящая элемент $X \in \mathsf{S}(X) = X \cup \{X\}$ в элемент $Y \in \mathsf{S}(Y) = Y \cup \{Y\}$. Для этого обозначим

$$A = f^{-1}(Y), \quad B = f(X).$$

Если переход от A к Y и от X к B под действием отображения f обозначить стрелками $\mapsto$, то мы можем изобразить это картинкой

$$\begin{tikzcd} A \arrow[dr, mapsto] & X \arrow[dl, mapsto] \\ B & Y \end{tikzcd}$$

Ясно, что отображение f можно переопределить так, чтобы A переходило в B, а X в Y:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[d, mapsto] & X \arrow[d, mapsto] \\ B & Y \end{tikzcd}$$

Это новое отображение $g : \mathsf{S}(X) \to \mathsf{S}(Y)$ определяется формулой

$$g = \Big(f \setminus \big\{(A, Y), (X, B)\big\}\Big) \cup \big\{(A, B), (X, Y)\big\}$$

и понятно, что оно также будет биекцией. □

Доказательство примера 0.3.32. Проведем индукцию (то есть воспользуемся теоремой 0.3.48). Во-первых, $\varnothing \in \mathtt{Card}$, потому что не существует ординального числа, меньшего $\varnothing$. Во-вторых, пусть $n \in \mathtt{FinOrd} \cap \mathtt{Card}$. Предположим, что $\mathsf{S}(n) \notin \mathtt{FinOrd} \cap \mathtt{Card}$, то есть существует $k \in \mathsf{S}(n)$ такой что $k \simeq \mathsf{S}(n)$. Поскольку $k \in \mathsf{S}(n) \subseteq \mathtt{FinOrd}$, по теореме 0.3.50 мы получаем, что k –

изолированный ординал. С другой стороны, отношение $k \simeq \mathsf{S}(n)$ невозможно при $k = \varnothing$, поэтому $k \ne \varnothing$. Значит, k – непустой изолированный ординал. То есть $k = m + 1$ для некоторого $m \in \mathtt{FinOrd}$. Для него мы получаем

$$m + 1 = k \simeq \mathsf{S}(n).$$

Отсюда по лемме 0.3.59,

$$m \simeq n. \tag{0.3.351}$$

С другой стороны, из

$$m + 1 = k \in \mathsf{S}(n)$$

по свойству 7° на с.56 следует

$$m \in n. \tag{0.3.352}$$

Условия (0.3.351) и (0.3.352) вместе означают, что n – не кардинал, а это противоречит нашему предположению $n \in \mathtt{FinOrd} \cap \mathtt{Card}$. □

◇ **0.3.33.** Множество $\mathtt{FinOrd}$ конечных ординалов является кардиналом:

$$\mathtt{FinOrd} \in \mathtt{Card} \tag{0.3.353}$$

Доказательство. Если $X \simeq \mathtt{FinOrd}$ для некоторого $X \in \mathtt{FinOrd}$, то

$$\underbrace{X \subseteq \mathsf{S}(X) \subseteq \mathtt{FinOrd}}_{\substack{\Downarrow \text{ лемма 0.3.56} \\ \operatorname{card} X \leqslant \operatorname{card} \mathsf{S}(X) \leqslant \operatorname{card} \mathtt{FinOrd}}} \quad \& \quad \underbrace{\mathtt{FinOrd} \simeq X}_{\substack{\Downarrow \\ \operatorname{card} \mathtt{FinOrd} = \operatorname{card} X}}$$

$$\Downarrow$$

$$\operatorname{card} X \leqslant \operatorname{card} \mathsf{S}(X) \leqslant \operatorname{card} \mathtt{FinOrd} = \operatorname{card} X$$

$$\Downarrow$$

$$\operatorname{card} \mathsf{S}(X) = \operatorname{card} X$$

$$\Downarrow$$

$$\mathsf{S}(X) \simeq X.$$

Это противоречит примеру (0.3.59), согласно которому элемент $\mathsf{S}(X) \in \mathtt{FinOrd}$ должен быть кардиналом. □

Теорема 0.3.60. *Для всякого множества X справедливо неравенство*

$$\operatorname{card} X < \operatorname{card} 2^X. \tag{0.3.354}$$

Доказательство. Рассмотрим отображение

$$f : X \to 2^X \quad \Big| \quad f(Y) = \{Y\}, \qquad Y \in X.$$

Оно инъективно, поэтому

$$\operatorname{card} X \leqslant \operatorname{card} 2^X.$$

Предположим, что здесь выполняется точное равенство:

$$\operatorname{card} X = \operatorname{card} 2^X. \tag{0.3.355}$$

Тогда существует некая биекция g между X и 2^X. Рассмотрим множество

$$Z = \{Y : \ Y \in X \ \& \ Y \notin g(Y)\}. \tag{0.3.356}$$

Поскольку $g : X \to 2^X$ – биекция, должен существовать элемент $T \in X$, который под действием g переходит в множество Z:

$$g(T) = Z. \tag{0.3.357}$$

Для этого элемента T мы получим:

$$T \in g(T) \quad \overset{(0.3.356)}{\Longleftrightarrow} \quad T \notin Z \overset{(0.3.357)}{=} g(T).$$

Это противоречие опровергает наше предположение (0.3.355). □

Биекции $\mathtt{Ord} \simeq \mathtt{Card}$ и $\mathtt{Ord} \simeq \mathtt{Card} \setminus \mathtt{FinOrd}$.

Теорема 0.3.61. *Класс* $\mathtt{Card}$ *не является множеством.*

Доказательство. Если предположить, что $\mathtt{Card}$ – множество, то мы получим цепочку, противоречащую (0.3.354):

$$\begin{aligned}\mathtt{Card}\in\mathtt{Set} &\overset{(0.3.163)}{\Longrightarrow} \cup\mathtt{Card}\in\mathtt{Set} \overset{\text{теорема } 0.3.2}{\Longrightarrow} 2^{\cup\mathtt{Card}}\in\mathtt{Set} \overset{\text{теорема } 0.3.52}{\Longrightarrow}\\ &\Longrightarrow \operatorname{card} 2^{\cup\mathtt{Card}}\in\mathtt{Card} \overset{(0.3.162)}{\Longrightarrow} \operatorname{card} 2^{\cup\mathtt{Card}}\subseteq\cup\mathtt{Card} \Longrightarrow\\ &\Longrightarrow \operatorname{card} 2^{\cup\mathtt{Card}} \overset{\text{свойство } 3^\circ,\text{ с.66}}{=} \operatorname{card}\operatorname{card} 2^{\cup\mathtt{Card}} \overset{\text{лемма } 0.3.56}{\leqslant} \operatorname{card}\Big(\cup\mathtt{Card}\Big).\end{aligned}$$

□

Теорема 0.3.62. *Существует отображение $f:\mathtt{Ord}\to\mathtt{Card}$ со следующими свойствами:*

(i) *f является биекцией между $\mathtt{Ord}$ и $\mathtt{Card}$,*

(ii) *f строго монотонно (сохраняет отношение принадлежности):*

$$\forall A,B\in\mathtt{Ord}\quad A\in B \iff f(A)\in f(B). \tag{0.3.358}$$

Доказательство. По теореме 0.3.41, существует сюръекция $f:\mathtt{Ord}\hookrightarrow\mathtt{Card}$ со свойствами (i) и (ii), у которой область определения $\mathsf{D}(f)$ является ординалом. Если предположить, что $\mathsf{D}(f)\neq\mathtt{Ord}$, то по свойству 3° на с.55, $\mathsf{D}(f)\in\mathtt{Ord}$, и значит $\mathsf{D}(f)$ является множеством. Тогда по аксиоме подстановки MK-12 на с.42, $\mathsf{R}(f)=\mathtt{Card}$ тоже должно быть множеством, а это противоречит теореме 0.3.61. □

Теорема 0.3.63. *Существует отображение $\aleph:\mathtt{Ord}\to\mathtt{Card}\setminus\mathtt{FinOrd}$ со следующими свойствами:*

(i) *$\aleph$ является биекцией между $\mathtt{Ord}$ и $\mathtt{Card}\setminus\mathtt{FinOrd}$,*

(ii) *$\aleph$ строго монотонно (сохраняет отношение принадлежности):*

$$\forall A,B\in\mathtt{Ord}\quad A\in B \iff \aleph(A)\in\aleph(B). \tag{0.3.359}$$

Доказательство. Здесь с минимальными изменениями используется прием из теоремы 0.3.62: по теореме 0.3.41, существует сюръекция $\aleph:\mathtt{Ord}\hookrightarrow\mathtt{Card}$ со свойствами (i) и (ii), у которой область определения $\mathsf{D}(\aleph)$ является ординалом. Если предположить, что $\mathsf{D}(\aleph)\neq\mathtt{Ord}$, то по свойству 3° на с.55, $\mathsf{D}(\aleph)\in\mathtt{Ord}$, и значит $\mathsf{D}(\aleph)$ является множеством. Тогда по аксиоме подстановки MK-12 на с.42, $\mathsf{R}(\aleph)=\mathtt{Card}\setminus\mathtt{FinOrd}$ тоже должно быть множеством, а это противоречит теореме 0.3.61. □

Конечные и бесконечные множества.

- Множество X называется *конечным*, если у него мощность является конечным ординалом:

$$\operatorname{card} X\in\mathtt{FinOrd}.$$

  В противном случае X называется *бесконечным* множеством.

- Класс всех конечных множеств мы будем обозначать $\mathtt{Fin}$.

Свойства конечных множеств:

1°. *Если $f:X\to Y$ – инъективное отображение и Y – конечное множество, то X – тоже конечное множество.*

2°. *Если $f:Y\to X$ – сюръективное отображение и Y – конечное множество, то X – тоже конечное множество.*

3°. *Всякое подмножество X любого конечного множества Y также является конечным множеством.*

4°. *Разность $X\setminus Y$ любого конечного множества X и любого другого множества Y тоже является конечным множеством.*

5°. *Пересечение $X\cap Y$ любого конечного множества X с любым другим множеством Y тоже является конечным множеством.*

6°. *Объединение $X\cup Y$ любых двух конечных множеств X и Y тоже является конечным множеством.*

7°. *Если X – конечное множество, и любой его элемент $Y\in X$ – тоже конечное множество, то поэлементное объединение $\cup X$ – тоже конечное множество.*

8°. *Декартово произведение $X\times Y$ любых двух конечных множеств X и Y тоже является конечным множеством.*

Доказательство. 1. Если $f : X \to Y$ – инъективное отображение и Y – конечное множество, то по теореме 0.3.54 мы получаем:

$$\operatorname{card} X \leqslant \operatorname{card} Y \in \texttt{FinOrd}.$$

Если в первом знаке стоит равенство, то мы получаем $\operatorname{card} X = \operatorname{card} Y \in \texttt{FinOrd}$, а если строгое неравенство, то мы получаем $\operatorname{card} X \in \operatorname{card} Y \in \texttt{FinOrd}$, и, в силу наполненности $\texttt{FinOrd}$, как ординала, $\operatorname{card} X \in \texttt{FinOrd}$.

2. Если $f : Y \to X$ – сюръективное отображение и Y – конечное множество, то снова применяется теорема 0.3.54.

3. Свойство 3° следует из леммы 0.3.56.

4. Если X – конечное множество, то для любого множества Y мы получаем $X \setminus Y \subseteq X$, и по уже доказанному свойству 3°, $X \setminus Y$ должно быть конечно.

5. Если X – конечное множество, то для любого множества Y мы получаем $X \cap Y \subseteq X$, и по уже доказанному свойству 3°, $X \cap Y$ должно быть конечно.

6. Пусть X и Y – конечные множества. Чтобы доказать, что их объединение $X \cup Y$ конечно, мы рассмотрим несколько случаев.

a) Прежде всего, рассмотрим случай, когда множество Y состоит из одного элемента, $Y = \{y\}$, не лежащего в X: $y \notin X$. Рассмотрим кардинал $n = \operatorname{card} X$ и выберем биекцию $f : X \to n$. Тогда отображение

$$g(T) = \begin{cases} f(T), & T \in X \\ \mathsf{S}(n), & T = y \end{cases},$$

будет биекцией $g : X \cup Y \to \mathsf{S}(n)$. Поэтому $\operatorname{card}(X \cup Y) = \mathsf{S}(n)$, и мы получаем, что множество $X \cup Y$ конечно.

b) Следующий случай – когда X и Y не пересекаются. Здесь проводится индукция по мощности множества Y. Если $\operatorname{card} Y = \varnothing$, то

$$\operatorname{card} Y = \varnothing \quad \Longrightarrow \quad Y = \varnothing \quad \Longrightarrow \quad X \cup Y = X \quad \Longrightarrow \quad \operatorname{card}(X \cup Y) = \operatorname{card} X \in \texttt{FinOrd},$$

и $X \cup Y$ – конечное множество. Далее, предположим, что мы доказали это для всех множеств Y мощности $\operatorname{card} Y = n$. Пусть $\operatorname{card} Y = \mathsf{S}(n)$. Выделим какой-нибудь элемент $z \in Y$ и рассмотрим множество $Y \setminus \{z\}$. Его мощность будет равна n,

$$\operatorname{card}(Y \setminus \{z\}) = n,$$

поэтому по нашему предположению, множество $X \cup (Y \setminus \{z\})$ конечно. Теперь если добавить к нему не пересекающееся с ним одноэлементное множество $\{z\}$, то это будет в точности рассмотренный случай a), и мы получаем, что множество

$$X \cup (Y \setminus \{z\}) \cup \{z\} = X \cup Y$$

– тоже конечно. Это завершает индукцию.

c) Последний случай – когда X и Y могут пересекаться. Тогда мы можем рассмотреть множество $Y \setminus X$, которое по уже доказанному свойству 4° будет конечным, и не будет пересекаться с X, и по доказанному в пункте b), множество

$$X \cup (Y \setminus X) = X \cup Y$$

должно быть конечным.

7. Свойство 7° доказывается индукцией по мощности X. Если $\operatorname{card} X = \varnothing$, то $X = \varnothing$, и $\cup X = \varnothing$ – конечное множество. Предположим, мы доказали, что $\cup X$ – конечное множество для всех множеств X мощности $n \in \texttt{FinOrd}$. Пусть теперь X – множество мощности $\mathsf{S}(n)$. Зафиксируем какой-нибудь элемент $z \in X$. Тогда множество $X \setminus \{z\}$ будет иметь мощность n, и по нашему предположению, его поэлементное объединение $\cup(X \setminus \{z\})$ также будет конечным. Отсюда по уже доказанному свойству 6°, множество

$$\Big(\cup (X \setminus \{z\}) \Big) \cup z = \cup X$$

также должно быть конечным.

8. Пусть X и Y – конечные множества. Представим их декартово произведение $X \times Y$ как объединение классов $X \times \{y\}$, где $y \in Y$:

$$X \times Y = \bigcup_{y \in Y} X \times \{y\}$$

Каждый класс $X \times \{y\}$ равномощен множеству X, поэтому он будет конечен. А множество таких классов
$$\{X \times \{y\};\ y \in Y\}$$
равномощно Y и поэтому тоже конечно. Значит, по уже доказанному свойству 7°, объединение этих классов
$$X \times Y = \bigcup_{y \in Y} X \times \{y\} = \cup\{X \times \{y\};\ y \in Y\}$$
– тоже конечное множество. $\square$

Теорема 0.3.64. *Если X – конечное множество, $Y \subseteq X$ и $\operatorname{card} Y = \operatorname{card} X$, то $Y = X$.*

Доказательство. Это утверждение удобно переформулировать так: если X – конечное множество, $Y \subseteq X$ и $Y \neq X$, то $\operatorname{card} Y \neq \operatorname{card} X$. Чтобы это доказать, заметим, что условия $Y \subseteq X$ и $Y \neq X$ влекут за собой условие $X \setminus Y \neq \varnothing$. Зафиксируем какой-нибудь элемент $x \in X \setminus Y$ и рассмотрим произвольную биекцию $f : \operatorname{card} Y \to Y$. Правило
$$g(z) = \begin{cases} f(z), & z \in \operatorname{card} Y \\ x, & z = \operatorname{card} Y \end{cases}$$
определяет некую биекцию $g : \operatorname{card} \mathsf{S}(Y) = \operatorname{card} Y \cup \{\operatorname{card} Y\} \to Y \cup \{x\}$, поэтому
$$\operatorname{card}(Y \cup \{x\}) = \operatorname{card} \mathsf{S}(Y).$$
С другой стороны, g можно рассматривать как инъекцию $g : \operatorname{card} \mathsf{S}(Y) \to X$, поэтому по теореме 0.3.54,
$$\operatorname{card} \mathsf{S}(Y) = \operatorname{card}(\operatorname{card} \mathsf{S}(Y)) \leqslant \operatorname{card} X.$$
Вместе это дает цепочку
$$\operatorname{card} Y < \operatorname{card} \mathsf{S}(Y) \leqslant \operatorname{card} X,$$
откуда и получается $\operatorname{card} Y \neq \operatorname{card} X$. $\square$

Теорема 0.3.65. *Множество X бесконечно тогда и только тогда, когда существует инъективное отображение $f : \mathtt{FinOrd} \to X$.*

Доказательство. Множество X бесконечно, тогда и только тогда, когда его мощность $\operatorname{card} X$ больше любого конечного ординала $n \in \mathtt{FinOrd}$, то есть не меньше кардинала $\mathtt{FinOrd}$, или, что то же самое, мощности $\mathtt{FinOrd}$:
$$\operatorname{card} X \geqslant \mathtt{FinOrd} = \operatorname{card} \mathtt{FinOrd}.$$
По теореме 0.3.54, это эквивалентно существованию инъективного отображения $f : \mathtt{FinOrd} \to X$. $\square$

Теорема 0.3.66. *Множество X бесконечно тогда и только тогда, когда оно имеет равномощное себе подмножество, не совпадающее с X.*

Для доказательства нам понадобится следующая

Лемма 0.3.67. *Если $\mathtt{FinOrd} \leqslant A \in \mathtt{Card}$, то $A \simeq A \setminus \{\varnothing\}$.*

Доказательство. Формула
$$f(n) = \begin{cases} \mathsf{S}(n), & n \in \mathtt{FinOrd} \\ n, & n \notin \mathtt{FinOrd} \end{cases}$$
определяет биекцию между A и $A \setminus \{\varnothing\}$. $\square$

Доказательство теоремы 0.3.66. Если существует $Y \subseteq X$ такое что $Y \neq X$ и $\operatorname{card} Y = \operatorname{card} X$, то по теореме 0.3.64 это несовместимо с условием конечности X. Значит, X будет бесконечным.

Наоборот, пусть X бесконечно. Тогда $\operatorname{card} X \geqslant \mathtt{FinOrd}$. Рассмотрим какую-нибудь биекцию $g : \operatorname{card} X \to X$ и положим
$$Y = \mathsf{R}(g\big|_{\operatorname{card} X \setminus \{\varnothing\}}).$$
Тогда $Y \neq X$, и при этом
$$Y \simeq \operatorname{card} X \setminus \{\varnothing\} \overset{\text{лемма 0.3.67}}{\simeq} \operatorname{card} X \simeq X.$$
$\square$

Следующая теорема аналогична теореме 0.3.36:

Теорема 0.3.68. *Множество* $M \subseteq \mathtt{FinOrd}$ *тогда и только тогда конечно, когда оно содержится в некотором конечном ординале* $A \in \mathtt{FinOrd}$*:*

$$M \subseteq \mathtt{FinOrd}\ \&\ M \in \mathtt{Fin} \quad \Leftrightarrow \quad \exists A \in \mathtt{FinOrd} \quad M \subseteq A. \tag{0.3.360}$$

Доказательство. Если M содержится в некотором конечном ординале A, то, поскольку A – конечное множество, M тоже будет конечным множеством.

Пусть наоборот $M \subseteq \mathtt{FinOrd}$ и $M \in \mathtt{Fin}$. Предположим, что M не содержится ни в каком конечном ординале:

$$\forall A \in \mathtt{FinOrd} \quad \exists B \in M \quad B \notin A.$$

Поскольку класс $\mathtt{FinOrd}$ линейно упорядочен по отношению $\in$, это условие можно переписать так:

$$\forall A \in \mathtt{FinOrd} \quad \exists B \in M \quad A \in B\ \vee\ A = B.$$

Если вместо B подставить $\mathsf{S}(B)$, то можно это упростить:

$$\forall A \in \mathtt{FinOrd} \quad \exists B \in M \quad A \in B.$$

Это в свою очередь упрощается так:

$$\mathtt{FinOrd} \subseteq \cup M.$$

Здесь $\cup M$ – множество (в силу свойства 7° на с.70), поэтому мы получаем, что класс $\mathtt{FinOrd}$ тоже должен быть конечным множеством, а это не так. □

Последовательности и их декартовы произведения. После того, как определен класс $\mathtt{FinOrd}$ конечных ординалов полезно определить понятие последовательности, встречающееся повсюду в математике.

- *Бесконечной последовательностью*, или просто *последовательностью* называется произвольное отображение $x : \mathtt{FinOrd} \to \mathtt{Set}$ (имеющее областью определения класс $\mathtt{FinOrd}$ всех конечных ординалов). Значения такого отображения часто записывают с помощью нижнего индекса
$$x_n = x(n), \qquad n \in \mathtt{FinOrd}.$$
а само отображение – в виде семейства $\{x_n;\ n \in \mathtt{FinOrd}\}$ или $\{x_n\}$.
- *Конечной последовательностью* называется произвольное отображение x, имеющее областью определения конечный ординал:
$$\mathsf{D}(x) \in \mathtt{FinOrd}.$$
Точно так же значения такого отображения часто записывают с помощью индексов
$$x_k = x(k), \qquad k \in n = \mathsf{D}(x).$$
а само это отображение – в виде семейства $\{x_k;\ k \in n\}$. Ординал n при этом называется *длиной* последовательности $\{x_k;\ k \in n\}$.
- Конечная последовательность длины n называется также *строкой длины* n. При этом строку длины 2 удобно называть *парой*, строку длины 3 — *тройкой*, строку длины 4 — *четверкой*, строку длины 5 — *пятеркой*, строку длины 6 — *шестеркой*, и так до строки длины 9, которую называют *девяткой*[38].

◇ **0.3.34.** Введенное здесь понятие пары как последовательности длины 2 согласуется с понятием упорядоченной пары множеств (X, Y), определенной выше формулой (0.3.186)

$$(X, Y) = \{\{X\}, \{X, Y\}\},$$

потому что всякой последовательности $a : 2 \to \mathtt{Set}$ длины 2 естественным образом можно сопоставить упорядоченную пару множеств (X, Y)

$$X = a_0, \quad Y = a_2,$$

[38]Напомним, что ординалы от 0 до 9 были определены выше формулами (0.3.279)-(0.3.288).

и наоборот, любой упорядоченной паре множеств (X,Y) по тем же формулам можно поставить в соответствие последовательность $a : 2 \to \mathtt{Set}$.

Напомним, что декартово произведение классов $X \times Y$ было определено нами выше формулой (0.3.202):

$$X \times Y = \{(A,B) : \ A \in X \ \& \ B \in Y\}.$$

Обобщением этого понятия на случай большего числа множителей можно считать следующую конструкцию.

- Заметим, что в соответствии с обозначением (0.3.238), множество всех последовательностей длины n со значениями в множестве Y естественно обозначать символом Y^n:

$$x \in Y^n \quad \Longleftrightarrow \quad x : n \to Y \tag{0.3.361}$$

Множество Y^n называется *декартовой степенью* множества Y.

- Пусть $X_0, ...X_k$ конечная последовательность множдеств. Их *декартовым произведением* называется множество

$$X_0 \times ... \times X_k = \prod_{i=0}^{k} X_i = \{t \in \{X_0, ..., X_k\}^{k+1} : \ \forall i \in K \ t_i \in X_i\} \tag{0.3.362}$$

Теорема 0.3.69. *Пусть $X_0, ..., X_{n+1}$ – последовательность множеств. Тогда*

$$\Big(\prod_{i\in n} X_i\Big) \times X_{n+1} \cong \prod_{i\in n+1} X_i \tag{0.3.363}$$

Доказательство. Отображение

$$f : \Big(\prod_{i\in n} X_i\Big) \times X_{n+1} \to \prod_{i\in n+1} X_i \quad \Big| \quad f\Big((x_0, ..., x_n), x_{n+1}\Big) = \Big(x_0, ..., x_n, x_{n+1}\Big)$$

является биекцией. □

(g) Ранг множества и полное упорядочение Set

Не только новичку, но и опытному математику класс $\mathtt{Set}$ всех множеств обычно кажется каким-то необъятным образованием, у которого не может быть никакого внятного описания. В теории MK этот стереотип чудесным образом удается преодолеть. Здесь мы опишем замечательную конструкцию, которая позволяет рассыпать класс $\mathtt{Set}$ на семейство *подмножеств* $\mathtt{Set}_A$, индексированных малыми ординалами $A \in \mathtt{Ord}$. Это позволяет доказать теорему[39] о полном упорядочении класса $\mathtt{Set}$, которую можно считать одной из вершин теории Морса-Келли.

Ранг множества. Напомним, что выше (0.3.221) мы определили значение $g(X)$ любого класса g на любом множестве X. Заметим, что если g – множество, то класс ординалов

$$\{A \in \mathtt{Ord} : \ \forall T \ (g(T) \in \mathtt{Ord} \Rightarrow g(T) \in A)\} = \{A \in \mathtt{Ord} : \ \mathsf{R}(g) \cap \mathtt{Ord} \subseteq A\}$$

непуст: поскольку g – множество, $\mathsf{R}(g)$ – тоже множество, значит $\mathsf{R}(g) \cap \mathtt{Ord}$ – тоже множество, и по теореме 0.3.36, $\mathsf{R}(g) \cap \mathtt{Ord} \subseteq A$ для некоторого $A \in \mathtt{Ord}$.

Рассмотрим отображение

$$h(g) = \min\{A \in \mathtt{Ord} : \ \forall T \ (g(T) \in \mathtt{Ord} \Rightarrow g(T) \in A)\} = \min\{A \in \mathtt{Ord} : \ \mathsf{R}(g) \cap \mathtt{Ord} \subseteq A\}, \qquad g \in \mathtt{Set}$$

Оно определено всюду на $\mathtt{Set}$ и принимает значения в $\mathtt{Ord}$, поэтому по теореме 0.3.28 h индуктивно определяет некое отображение $\mathsf{rank} : \mathtt{Set} \to \mathtt{Ord}$ формулой (0.3.324):

$$\mathsf{rank}\, X = h(\mathsf{rank}\big|_X) = \min\{A \in \mathtt{Ord} : \ \mathsf{R}(\mathsf{rank}\big|_X) \cap \mathtt{Ord} \subseteq A\} \tag{0.3.364}$$

- *Рангом* множества X называется ординал $\mathsf{rank}\, X$, определенный формулой (0.3.364).

[39] См. ниже теорему 0.3.72.

Свойства ранга множеств:

1° $\operatorname{rank} X \leqslant B \in \mathtt{Ord}$ *тогда и только тогда, когда* $\forall T \in X \ \operatorname{rank} T \in B$.

2° *Если* $X \in Y$, *то* $\operatorname{rank} X \in \operatorname{rank} Y$.

3° *Если* $X \subseteq Y$, *то* $\operatorname{rank} X \leqslant \operatorname{rank} Y$.

4° $\operatorname{rank}(X \cup Y) = \operatorname{rank} X \cup \operatorname{rank} Y$.

5° $\operatorname{rank}(\cup X) = \cup\{\operatorname{rank} Y : \ Y \in X\} \leqslant \operatorname{rank} X$.

6° $\operatorname{rank}\{X\} = \operatorname{rank} \mathsf{S}(X)$.

7° $\operatorname{rank} 2^X = \operatorname{rank} \mathsf{S}(X)$.

8° *Если* $A \in \mathtt{Ord}$, *то* $\operatorname{rank} A = A$.

Доказательство. 1. Пусть $B \in \mathtt{Ord}$. Тогда условие $\forall T \in X \ \operatorname{rank} T \in B$ эквивалентно условию

$$\mathsf{R}(\operatorname{rank}\big|_X) \cap \mathtt{Ord} = \{\operatorname{rank} T;\ T \in X\} \cap \mathtt{Ord} = \{\operatorname{rank} T;\ T \in X\} \subseteq B.$$

которое в свою очередь эквивалентно условию

$$B \in \{A \in \mathtt{Ord} : \mathsf{R}(\operatorname{rank}\big|_X) \cap \mathtt{Ord} \subseteq A\}$$

и условию

$$B \geqslant \min\{A \in \mathtt{Ord} : \mathsf{R}(\operatorname{rank}\big|_X) \cap \mathtt{Ord} \subseteq A\} = \operatorname{rank} A.$$

2. Пусть $X \in Y$. Тогда, очевидно, $\operatorname{rank} X \in \mathsf{R}(\operatorname{rank}\big|_Y)$, а с другой стороны, $\operatorname{rank} X \in \mathtt{Ord}$, поэтому $\operatorname{rank} X \in \mathsf{R}(\operatorname{rank}\big|_Y) \cap \mathtt{Ord}$. Поэтому если для какого-то ординала A справедливо $\mathsf{R}(\operatorname{rank}\big|_Y) \cap \mathtt{Ord} \subseteq A$, то автоматически справедливо и $\operatorname{rank} X \in A$. Это можно переформулировать так, что $\operatorname{rank} X$ принадлежит пересечению всех таких A, и поэтому мы получаем цепочку

$$\operatorname{rank} X \in \cap\{A \in \mathtt{Ord} \quad \mathsf{R}(\operatorname{rank}\big|_Y) \cap \mathtt{Ord} \subseteq A\} = (0.3.296) = \\ = \min\{A \in \mathtt{Ord} \quad \mathsf{R}(\operatorname{rank}\big|_Y) \cap \mathtt{Ord} \subseteq A\} = (0.3.364) = \operatorname{rank} Y.$$

3. Пусть $X \subseteq Y$. Тогда по уже доказанному свойству 2°, если $T \in X$, то $T \in Y$, и значит $\operatorname{rank} T \in \operatorname{rank} Y$. Это можно понимать так, что $\operatorname{rank} Y$ – одно из тех множеств $A \in \mathtt{Ord}$, для которых справедливо включение $\mathsf{R}(\operatorname{rank}\big|_X) \cap \mathtt{Ord} \subseteq A$:

$$\operatorname{rank} Y \in \{A \in \mathtt{Ord} : \ \mathsf{R}(\operatorname{rank}\big|_X) \cap \mathtt{Ord} \subseteq A\}.$$

Как следствие,

$$\operatorname{rank} Y \geqslant \min\{A \in \mathtt{Ord} : \ \mathsf{R}(\operatorname{rank}\big|_X) \cap \mathtt{Ord} \subseteq A\} = \operatorname{rank} X.$$

4. Прежде всего, из $X \subseteq X \cup Y$ следует, в силу уже доказанного свойства 3°, что $\operatorname{rank} X \leqslant \operatorname{rank}(X \cup Y)$, и точно так же из $Y \subseteq X \cup Y$ следует, что $\operatorname{rank} Y \leqslant \operatorname{rank}(X \cup Y)$. Это в свою очередь означает в силу (0.3.302), что

$$\operatorname{rank} X \subseteq \operatorname{rank}(X \cup Y) \quad \& \quad \operatorname{rank} Y \subseteq \operatorname{rank}(X \cup Y).$$

Поэтому

$$\operatorname{rank} X \cup \operatorname{rank} Y \subseteq \operatorname{rank}(X \cup Y). \tag{0.3.365}$$

Докажем теперь обратное включение. Для этого заметим такую цепочку:

$$T \in X \cup Y \quad \Longrightarrow \quad T \in X \quad \vee \quad T \in Y \quad \Longrightarrow \\ \Longrightarrow \quad \operatorname{rank} T \in \operatorname{rank} X \quad \vee \quad \operatorname{rank} T \in \operatorname{rank} Y \quad \Longrightarrow \quad \operatorname{rank} T \in \operatorname{rank} X \cup \operatorname{rank} Y.$$

Это можно понимать так, что ординал $\operatorname{rank} X \cup \operatorname{rank} Y$ содержится в классе всех ординалов A, для которых выполняется условие

$$\mathsf{R}(\operatorname{rank}\big|_{X \cup Y}) \cap \mathtt{Ord} \subseteq A.$$

Или, иными словами,

$$\operatorname{rank} X \cup \operatorname{rank} Y \in \{A \in \mathtt{Ord} : \ \mathsf{R}(\operatorname{rank}\big|_{X \cup Y}) \cap \mathtt{Ord} \subseteq A\}.$$

Понятно, что $\mathsf{rank}\, X \cup \mathsf{rank}\, Y$ должен быть не меньше минимума этого множества:

$$\mathsf{rank}\, X \cup \mathsf{rank}\, Y \geqslant \min\{A \in \mathtt{Ord} :\ \mathsf{R}(\mathsf{rank}\,\big|_{X\cup Y}) \cap \mathtt{Ord} \subseteq A\} = (0.3.364) = \mathsf{rank}(X \cup Y).$$

Опять в силу (0.3.302) мы получаем

$$\mathsf{rank}\, X \cup \mathsf{rank}\, Y \supseteq \mathsf{rank}(X \cup Y),$$

Вместе с (0.3.365) это дает 4°.

5. Во-первых, из цепочки

$$T \in \cup X \quad\Longrightarrow\quad \exists Y \in X\ T \in Y \quad\Longrightarrow\quad \exists Y \in X\ \ \mathsf{rank}\, T \in \mathsf{rank}\, Y \quad\Longrightarrow\quad \mathsf{rank}\, T \in \cup\{\mathsf{rank}\, Y;\ Y \in X\}$$

следует включение

$$\cup\{\mathsf{rank}\, Y;\ Y \in X\} \in \{A \in \mathtt{Ord} : \mathsf{R}(\mathsf{rank}\,\big|_{\cup X}) \cap \mathtt{Ord} \subseteq A\}$$

а из него – неравенство

$$\cup\{\mathsf{rank}\, Y;\ Y \in X\} \geqslant \min\{A \in \mathtt{Ord} : \mathsf{R}(\mathsf{rank}\,\big|_{\cup X}) \cap \mathtt{Ord} \subseteq A\} = \mathsf{rank} \cup X. \tag{0.3.366}$$

Во-вторых, из цепочки

$$Y \in X \quad\Longrightarrow\quad Y \subseteq \cup X \quad\Longrightarrow\quad \mathsf{rank}\, Y \leqslant \mathsf{rank} \cup X$$

следует неравенство

$$\cup\{\mathsf{rank}\, Y;\ Y \in X\} \leqslant \mathsf{rank} \cup X.$$

которое вместе с (0.3.366) это дает равенство в 5°:

$$\cup\{\mathsf{rank}\, Y;\ Y \in X\} = \mathsf{rank} \cup X.$$

В-третьих, из цепочки

$$Y \in X \quad\Longrightarrow\quad \mathsf{rank}\, Y \in \mathsf{rank}\, X \quad\Longrightarrow\quad \mathsf{rank}\, Y \leqslant \mathsf{rank}\, X$$

мы получаем неравенство в 5°:

$$\cup\{\mathsf{rank}\, Y;\ Y \in X\} \leqslant \mathsf{rank}\, X.$$

6. Равенство 6° доказывается прямым вычислением:

$$\mathsf{rank}\{X\} = \min\{A \in \mathtt{Ord} :\ \mathsf{R}(\mathsf{rank}\,\big|_{\{X\}}) \cap \mathtt{Ord} \subseteq A\} =$$
$$= \min\{A \in \mathtt{Ord} :\ \{\mathsf{rank}\, X\} \subseteq A\} = \min\{A \in \mathtt{Ord} :\ \mathsf{rank}\, X \in A\} = \mathsf{rank}\, \mathsf{S}(X).$$

7. С одной стороны,

$$X \in 2^X \quad\Longrightarrow\quad \mathsf{rank}\, X \in \mathsf{rank}\, 2^X \quad\Longrightarrow\quad \mathsf{rank}\, \mathsf{S}(X) \leqslant \mathsf{rank}\, 2^X.$$

А, с другой,

$$Y \in 2^X \quad\Longrightarrow\quad Y \subseteq X \quad\Longrightarrow\quad \mathsf{rank}\, Y \leqslant \mathsf{rank}\, X < \mathsf{rank}\, \mathsf{S}(X).$$

Последнее верно для всякого $Y \in 2^X$, поэтому, по уже доказанному свойству 1°,

$$\mathsf{rank}\, 2^X \leqslant \mathsf{rank}\, \mathsf{S}(X).$$

Вместе то и другое дает 7°.

8. Последнее свойство доказывается индукцией по ординалу A. Пусть X – класс ординалов, для которых верно равенство $\mathsf{rank}\, A = A$. Рассмотрим произвольный ординал $A \in \mathtt{Ord}$, такой, что $A \subseteq X$, то есть удовлетворяющий условию[40]

$$\forall B \in A \quad \mathsf{rank}\, B = B.$$

Тогда

$$\mathsf{R}(\mathsf{rank}\,\big|_A) = \mathsf{R}(\{\mathsf{rank}\, B;\ B \in A\}) = \mathsf{R}(\{B;\ B \in A\}) = A,$$

и

$$\mathsf{rank}\, A = \min\{C \in \mathtt{Ord} :\ \mathsf{R}(\mathsf{rank}\,\big|_A) \cap \mathtt{Ord} \subseteq C\} = \min\{C \in \mathtt{Ord} :\ A \subseteq C\} = A.$$

То есть $A \in X$. По теореме 0.3.42 это означает, что $X = \mathtt{Ord}$. □

[40]Можно заметить, хотя это не входит в формальное требование теоремы 0.3.42, которую мы собираемся применить, что $\varnothing$ удовлетворяет этому условию, потому что $\mathsf{rank}\,\varnothing = \min\{C \in \mathtt{Ord} :\ \varnothing \cap \mathtt{Ord} \subseteq C\} = \min \mathtt{Ord} = \varnothing$.

Теорема 0.3.70. *Для всякого малого ординала $A \in \mathtt{Ord}$ класс*

$$\mathtt{Set}_A = \{X : \ \mathsf{rank}\, X \in A\} \tag{0.3.367}$$

является множеством, и удовлетворяет равенству

$$\mathtt{Set}_A = \bigcup_{B:\ B\in A} 2^{\mathtt{Set}_B} \tag{0.3.368}$$

Доказательство. Докажем сначала (0.3.368). Пусть $X \in \mathtt{Set}_A$, то есть $\mathsf{rank}\, X \in A$. Положим $B = \mathsf{rank}\, X \in A$. Тогда для всякого $T \in X$ мы в силу свойства 2° на с.75 получим $\mathsf{rank}\, T \in \mathsf{rank}\, X = B$, следовательно, $X \subseteq \{T : \ \mathsf{rank}\, T \in B\} = \mathtt{Set}_B$, то есть $X \in 2^{\mathtt{Set}_B}$. Мы доказали вложение

$$\mathtt{Set}_A \subseteq \bigcup_{B:\ B\in A} 2^{\mathtt{Set}_B}.$$

Наоборот, пусть $X \in \bigcup_{B:\ B\in A} 2^{\mathtt{Set}_B}$, то есть $X \in 2^{\mathtt{Set}_B}$ для некоторого $B \in A$. Это значит, что $X \subseteq \mathtt{Set}_B = \{T : \ \mathsf{rank}\, T \in B\}$, то есть для всякого $T \in X$ выполняется $\mathsf{rank}\, T \in B$. Из определения rank формулой (0.3.364) мы получаем, что $\mathsf{rank}\, X \leqslant B \in A$, и значит, $X \in \mathtt{Set}_A$. Таким образом, доказано вложение

$$\mathtt{Set}_A \supseteq \bigcup_{B:\ B\in A} 2^{\mathtt{Set}_B}$$

и вместе с ним, вся формула (0.3.368).

Теперь покажем, что для всякого малого ординала $A \in \mathtt{Ord}$ класс $\mathtt{Set}_A$ является множеством. Это доказывается индукцией по теореме 0.3.42. При $A = \varnothing$ мы получаем

$$\mathtt{Set}_A = \mathtt{Set}_\varnothing = \{X : \ \mathsf{rank}\, X \in \varnothing\} = \varnothing \in \mathtt{Set}\,.$$

Предположим, что при некотором $A \in \mathtt{Ord}$ это верно для всех $B \in A$:

$$\forall B \quad B \in A \quad \Longrightarrow \quad \mathtt{Set}_B \in \mathtt{Set}\,.$$

Тогда по теореме 0.3.2

$$\forall B \quad B \in A \quad \Longrightarrow \quad 2^{\mathtt{Set}_B} \in \mathtt{Set},$$

и поэтому

$$\mathtt{Set}_A = (0.3.368) = \bigcup_{B:\ B\in A} 2^{\mathtt{Set}_B} \in \mathtt{Set}\,.$$

□

Свойства $\mathtt{Set}_A$:

1° $X \subseteq \mathtt{Set}_A$ *тогда и только тогда, когда* $\mathsf{rank}\, X \leqslant A$.

2° $\mathsf{rank}\, \mathtt{Set}_A = A$.

3° *Наполненность:* $X \in \mathtt{Set}_A \quad \Longrightarrow \quad X \subseteq \mathtt{Set}_A$.

4° *Если* $A \in B$, *то* $\mathtt{Set}_A \in \mathtt{Set}_B$ *(и поэтому* $\mathtt{Set}_A \subseteq \mathtt{Set}_B$*).*

5° $2^{\mathtt{Set}_A} = \mathtt{Set}_{\mathsf{S}(A)}$.

6° *Если A – предельный ординал*[41], *то* $\mathtt{Set}_A = \bigcup_{B:\ B\in A} \mathtt{Set}_B$.

7° $\mathtt{Set} = \bigcup_{A:\ A\in\mathtt{Ord}} \mathtt{Set}_A$.

Доказательство. 1. Первое свойство здесь эквивалентно свойству 1° на с.75:

$$X \subseteq \mathtt{Set}_A \quad \Longleftrightarrow \quad \forall Y \in X \quad \mathsf{rank}\, Y < A \quad \Longleftrightarrow \quad \mathsf{rank}\, X \leqslant A.$$

2. Во-первых, $\forall X \in \mathtt{Set}_A \ \mathsf{rank}\, X \in A$, поэтому по свойству 1° на с.75 $\mathsf{rank}\, \mathtt{Set}_A \leqslant A$. Во-вторых, $\forall B \in A \ \mathsf{rank}\, B = B \in A$ (по свойству 8° на с.75), поэтому $B \in \mathtt{Set}_A$. Это означает включение $A \subseteq \mathtt{Set}_A$, из которого по свойству 3° на с.75 следует $A = \mathsf{rank}\, A \leqslant \mathsf{rank}\, \mathtt{Set}_A$.

3. Если $Y \in X \in \mathtt{Set}_A$, то $\mathsf{rank}\, Y < \mathsf{rank}\, X < A$, поэтому $\mathsf{rank}\, Y < A$ и значит $Y \in \mathtt{Set}_A$.

4. Если $A \in B$, то в силу уже доказанного свойства 2°, $\mathsf{rank}\, \mathtt{Set}_A = A < B$, поэтому $\mathtt{Set}_A \in \mathtt{Set}_B$.

[41] Предельные ординалы были определены выше на с.58.

5. Здесь применяется уже доказанное свойство 1°:

$$X \in 2^{\mathtt{Set}_A} \iff X \subseteq \mathtt{Set}_A \iff \operatorname{\mathsf{rank}} X \leqslant A \iff \operatorname{\mathsf{rank}} X < \mathsf{S}(A) \iff X \in \mathtt{Set}_{\mathsf{S}(A)}.$$

6. Пусть A – предельный ординал. Тогда

$$X \in \mathtt{Set}_A \iff \operatorname{\mathsf{rank}} X < A \iff \exists B < A \ \operatorname{\mathsf{rank}} X < B \iff$$
$$\iff \exists B < A \ X \in \mathtt{Set}_B \iff X \in \bigcup_{B:\ B \in A} \mathtt{Set}_B.$$

7. Если $X \in \mathtt{Set}$, то существует $A \in \mathtt{Ord}$ такой что $\operatorname{\mathsf{rank}} X < A$, поэтому $X \in \mathtt{Set}_A$. Иными словами, $X \in \bigcup_{A:\ A \in \mathtt{Ord}} \mathtt{Set}_A$. □

Полное упорядочение Set. Напомним, что понятие полного порядка было введено на с.50.

Теорема 0.3.71. *На каждом множестве X можно ввести отношение полного порядка.*

Доказательство. По теореме 0.3.51 существует биекция $f : X \to T$ на некоторый малый ординал $T \in \mathtt{Ord}$. Правило

$$A \prec B \iff f(A) \in f(B), \qquad A, B \in X,$$

определяет полный порядок на X. □

Теорема 0.3.72. *На классе* Set *всех множеств можно ввести отношение полного порядка.*

Доказательство. Для каждого малого ординала $A \in \mathtt{Ord}$ класс $\mathtt{Set}_A$ является по теореме 0.3.70 множеством, поэтому по теореме 0.3.71 на $\mathtt{Set}_A$ существует (хотя бы один) полный порядок. Если обозначить через W_A класс всевозможных полных порядков на $\mathtt{Set}_A$, то, во-первых, он будет непуст (потому что, как мы уже говорили, существует хотя бы один полный порядок на $\mathtt{Set}_A$), а, во-вторых, он будет множеством (потому что каждый полный порядок на $\mathtt{Set}_A$ содержится в $\mathtt{Set}_A \times \mathtt{Set}_A$, и значит W_A содержится в множестве $2^{\mathtt{Set}_A \times \mathtt{Set}_A}$).

Мы получаем, что $\{W_A;\ A \in \mathtt{Ord}\} \subseteq \mathtt{Set} \setminus \{\varnothing\}$. Значит, к классам W_A можно применить функцию выбора $c : \mathtt{Set} \setminus \{\varnothing\} \to \mathtt{Set}$ (из аксиомы MK-14 на с.64), и для каждого $A \in \mathtt{Ord}$ мы получим некий полный порядок $\prec_A = c(W_A) \in W_A$ на $\mathtt{Set}_A$. Теперь определим отношение $\prec$ на Set правилом: $X \prec Y$, если

— либо $\operatorname{\mathsf{rank}} X \in \operatorname{\mathsf{rank}} Y$,

— либо $\operatorname{\mathsf{rank}} X = \operatorname{\mathsf{rank}} Y = A$, и $X \prec_A Y$.

Отношение $\prec$ будет полным порядком на Set. □

Глава 1

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛОГИКА

Глядя на шаги, по которым в главе 0 строилась теория множеств, нетрудно представить, как, меняя какие-то элементы этой конструкции, можно построить другую подобную теорию. Например, можно менять аксиомы самой теории (если варьировать аксиомы MK-1 – MK-14, оставив все остальные элементы неизменными, то будут получаться различные варианты теории множеств, каковых много в математике). Точно так же можно менять язык теории (алфавит и сигнатуру), и даже аксиомы логики и правила вывода LK-0 – LK-15[1]. При этом будут получаться конструкции, называемые формальными теориями (понятно, что они могут сильно отличаться друг от друга).

Изучением таких теорий, построенных по примеру уже описанной нами теории множеств, занимается наука, называемая *математической логикой*. Сами теории такого вида имеют специальное название: *формальные теории*, или *формальные системы*, или *теории первого порядка*. В этой главе мы опишем основные выводы этой науки, увиденные глазами сторонника гильбертовской философии формализма (в том смысле как мы описали это на с.v).

Понятия и результаты этой главы будут полезны ниже в главе 4 о стандартных функциях при объяснении трудностей построения Исчисления (Calculus, см. с.301).

§ 1 Логика предикатов для общей формальной теории

(a) Синтаксис.

Определение формальной теории.

- *Формальная теория $\mathcal{T}$ над логикой предикатов* состоит из языка теории и ее дедуктивного аппарата. Эти компоненты определяются следующими правилами.

  I. *Язык* формальной теории (над логикой предикатов) представляет из себя алфавит, сигнатуру и правила построения формул.

  1. *Алфавит $\mathcal{A}$* формальной теории $\mathcal{T}$ описывается указанием символов, которые называются *переменными* данного языка. Эта часть конструкции считается произвольной, и, поскольку в этой науке нам понадобится много разных букв вне алфавита, мы для удобства условимся использовать более узкий алфавит, чем тот, что описывался на с.7 для построенного там варианта теории множеств:

     - *Переменной в формальной теории* мы будем считать произвольную строку символов, составленную по следующим правилам:

       — всякая строчная буква латинского алфавита

       $$a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l, m, n, o, p, q, r, s, t, u, v, w, x, y, z,$$

       является переменной,

       — если x – переменная, то добавляя к ней штрих $'$ мы получаем новую переменную:

       $$x', x'', \dots$$

[1] В качестве примера читатель может поглядеть на правила интуиционистской логики, которые мы приводим на с.116.

2. *Сигнатура* формальной теории представляет собой список используемых в ней специальных символов, не входящих в алфавит, которые делятся на функциональные и предикатные.

   a. *Предикатные символы* интутитивно представляют собой обозначения для элементарных высказываний об объектах (как символы $\in$ и $=$ в теории множеств). Каждому предикатному символу P приписывается конечный ординал n, называемый *валентностью предиката* P, и его интуитивный смысл – число переменных, необходимых для высказывания P.

   b. *Функциональные символы* интуитивно представляют собой обозначения для элементарных операций в данном языке (как $+$ и $\cdot$ в арифметике). Как и в случае с предикатными символами, каждому функциональному символу F приписывается конечный ординал n, называемый *валентностью символа* F, интуитивный смысл которого – число переменных, необходимых для операции F.

3. Далее вводится понятие *терма*, под которым понимается фрагмент формулы, составленный посредством функциональных символов, без предикатных. Точное определение выглядит так: *термом* называется произвольная строка символов, построенная по следующим правилам

— всякая переменная является термом,

— всякий функциональный символ валентности 0 является термом,

— если $\tau_1, ..., \tau_n$ – термы, и F – функциональный символ валентности n, то строка

$$F(\tau_1, ..., \tau_n) \tag{1.1.1}$$

– также терм. В частном случае, когда валентность F равна 2, принято для краткости вместо (1.1.1) писать

$$\tau_1 F \tau_2$$

(как это делается в теории групп с символом умножения $\cdot$, см. ниже пример 1.1.4).

4. После этого *формулой* данного языка объявляется произвольная строка символов, построенная по следующим правилам:

— если $\tau_1, ..., \tau_n$ – термы, и P – предикатный символ валентности n, то строка

$$P(\tau_1, ..., \tau_n) \tag{1.1.2}$$

– формула. В частном случае, когда валентность P равна 2, принято для краткости вместо (1.1.2) писать

$$\tau_1 P \tau_2$$

(как это делается в теории множеств с символом принадлежности $\in$, см. (0.2.22));

— если строка φ – формула, то строка $\neg\ (\varphi)$ – тоже формула;

— если строки φ и ψ – формулы, то следующие строки – тоже формулы:

$$(\varphi)\ \&\ (\psi), \qquad (\varphi)\ \vee\ (\psi), \qquad (\varphi) \Rightarrow (\psi), \qquad (\varphi) \Leftrightarrow (\psi),$$

— если x – переменная, а φ – формула, то следующие строки – тоже формулы:

$$\forall x\ (\varphi), \qquad \exists x\ (\varphi). \tag{1.1.3}$$

Как и раньше, для обозначения формул мы используем греческие буквы.

- Мы будем говорить, что *формулы α и β равны*, и изображать это записью

$$\alpha = \beta,$$

  если α и β совпадают как строчки символов.

Для дальнейших объяснений нам понадобятся определения, аналогичные тем, что давались на с.8 и 8.

- Вхождение переменной x в формулу φ называется *связанным*, если в этом вхождении x стоит сразу после какого-то квантора, или α попадает в область действия какого-то квантора по x. В противном случае это вхождение называется *свободным*.

- Переменная x в формуле φ называется *связанной переменной* в φ, если все ее вхождения в φ связаны. В противном случае x называется *свободной переменной* формулы φ.
- Если формула φ не содержит свободные переменные, то φ называется *замкнутой.* Если же в φ имеются свободные переменные, то φ называется *открытой формулой.*
- *Подстановкой* терма τ вместо переменной x в формулу φ называется формула, получающаяся из φ заменой всех свободных вхождений переменной x в формуле φ на терм τ. Мы обозначаем такую формулу символом

$$\varphi\Big|_{x=\tau} \tag{1.1.4}$$

- Подстановка $\varphi\Big|_{x=\tau}$ называется *корректной*, если при замене x на τ никакая переменная, входящая в τ, не попадает в область действия квантора по этой переменной. Это эквивалентно тому, что каждое свободное вхождение переменной x в формулу φ не должно содержаться в области действия кванторов по переменным, входящим в терм τ.

II. *Дедуктивный аппарат* формальной теории состоит из аксиом теории и логического исчисления.

1. *Аксиомы формальной теории* представляют собой произвольную выбранную совокупность A формул языка теории.
2. *Логическое исчисление* состоит из аксиом логики и правил вывода, описывающих логику предикатов для данного языка. Им может быть исчисление секвенций LK, описанное нами на с.10 для языка теории множеств (качественно отличающегося от общего случая отсутствием функциональных символов), которое для языка общего вида (с функциональными символами) должно быть усложнено соглашением что в правилах вывода LK-12 и LK-15 вместо переменной y позволено подставлять произвольный терм. Весь список правил удобно привести снова, несмотря на повторения (всюду, кроме LK-12 и LK-15). Прежде всего, аксиома для общего исчисления секвенций LK та же, что и в исчислении для теориий множеств: для любой формулы φ выводима секвенция

$$\text{LK-0:} \qquad \varphi \vdash \varphi. \tag{1.1.5}$$

Остальные правила следующие.

a. Структурные правила:

— ослабление:

$$\text{LK-1:} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta}{\varphi, \Gamma \vdash \Delta} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \Delta, \varphi} \tag{1.1.6}$$

— сокращение:

$$\text{LK-2:} \qquad \frac{\varphi, \varphi, \Gamma \vdash \Delta}{\varphi, \Gamma \vdash \Delta} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, \varphi, \varphi}{\Gamma \vdash \Delta, \varphi} \tag{1.1.7}$$

— перестановка:

$$\text{LK-3:} \qquad \frac{\varphi, \chi, \psi, \Gamma \vdash \Delta}{\varphi, \psi, \chi, \Gamma \vdash \Delta} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, \varphi, \chi, \psi}{\Gamma \vdash \Delta, \chi, \varphi, \psi} \tag{1.1.8}$$

— сечение:

$$\text{LK-4:} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, \varphi \quad \varphi, \Pi \vdash \Lambda}{\Gamma, \Pi \vdash \Delta, \Lambda} \tag{1.1.9}$$

b. Правила введения логических связок:

— переброс отрицания:

$$\text{LK-5:} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, \varphi}{\neg\varphi, \Gamma \vdash \Delta} \qquad \frac{\varphi, \Gamma \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \Delta, \neg\varphi} \tag{1.1.10}$$

— конъюнкция в сукцеденте:

$$\mathsf{LK\text{-}6}: \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, \varphi \qquad \Gamma \vdash \Delta, \chi}{\Gamma \vdash \Delta, \varphi \& \chi} \tag{1.1.11}$$

— конъюнкция в антецеденте:

$$\mathsf{LK\text{-}7}: \qquad \frac{\varphi, \Gamma \vdash \Delta}{\varphi \& \chi, \Gamma \vdash \Delta} \qquad \frac{\varphi, \Gamma \vdash \Delta}{\chi \& \varphi, \Gamma \vdash \Delta} \tag{1.1.12}$$

— дизъюнкция в антецеденте:

$$\mathsf{LK\text{-}8}: \qquad \frac{\varphi, \Gamma \vdash \Delta \qquad \chi, \Gamma \vdash \Delta}{\varphi \vee \chi, \Gamma \vdash \Delta} \tag{1.1.13}$$

— дизъюнкция в сукцеденте:

$$\mathsf{LK\text{-}9}: \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, \varphi}{\Gamma \vdash \Delta, \varphi \vee \chi} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, \varphi}{\Gamma \vdash \Delta, \chi \vee \varphi} \tag{1.1.14}$$

— перенос с импликацией в антецедент:

$$\mathsf{LK\text{-}10}: \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, \varphi \quad \chi, \Pi \vdash \Lambda}{\varphi \Rightarrow \chi, \Gamma, \Pi \vdash \Delta, \Lambda} \tag{1.1.15}$$

— перенос с импликацией в сукцедент:

$$\mathsf{LK\text{-}11}: \qquad \frac{\varphi, \Gamma \vdash \Delta, \chi}{\Gamma \vdash \Delta, \varphi \Rightarrow \chi} \tag{1.1.16}$$

— добавление квантора всеобщности в антецедент: если подстановка $\varphi\big|_{x=\tau}$ корректна[2] (здесь x — переменная, а τ – терм), то

$$\mathsf{LK\text{-}12}:^* \qquad \frac{\varphi\big|_{x=\tau}, \Gamma \vdash \Delta}{\forall x\, \varphi, \Gamma \vdash \Delta} \tag{1.1.17}$$

— добавление квантора всеобщности в сукцедент: если переменная y не входит (как свободная переменная) в нижнюю секвенцию (то есть в наборы формул Γ, Δ, $\forall x\, \varphi$), то

$$\mathsf{LK\text{-}13}: \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, \varphi\big|_{x=y}}{\Gamma \vdash \Delta, \forall x\, \varphi} \tag{1.1.18}$$

— добавление квантора существования в антецедент: если переменная y не входит (как свободная переменная) в нижнюю секвенцию (то есть в наборы формул $\exists x\, \varphi$, Γ, Δ), то

$$\mathsf{LK\text{-}14}: \qquad \frac{\varphi\big|_{x=y}, \Gamma \vdash \Delta}{\exists x\, \varphi, \Gamma \vdash \Delta} \tag{1.1.19}$$

— добавление квантора существования в сукцедент: если подстановка $\varphi\big|_{x=\tau}$ корректна[3] (здесь x — переменная, а τ – терм), то

$$\mathsf{LK\text{-}15}:^* \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, \varphi\big|_{x=\tau}}{\Gamma \vdash \Delta, \exists x\, \varphi} \tag{1.1.20}$$

Подобно тому как это делалось на с.12 для теории MK, *деревом Генцена* в формальной теории называется произвольная картинка

$$\frac{\frac{\frac{\Gamma''' \vdash \Delta'''}{\Gamma' \vdash \Delta'} \qquad \frac{\Gamma'''' \vdash \Delta''''}{\Gamma'' \vdash \Delta''}}{\chi \vdash \psi}}{}, \tag{1.1.21}$$

в которой внизу выписана какая-то одна секвенция, а каждый переход сверху вниз представляет собой применение одного из правил вывода $\mathsf{LK\text{-}1}$ — $\mathsf{LK\text{-}15}$. При этом секвенция в самом низу (здесь это $\chi \vdash \psi$) называется *корнем*, а секвенции на самом верху (в данном случае $\Gamma''' \vdash \Delta'''$ и $\Gamma'''' \vdash \Delta''''$) — *вершинами* этого дерева.

[2]Определение корректной подстановки дано на с. 8.
[3]См. определение на с. 8.

- *Дерево Генцена считается выводом в формальной теории* $\mathcal{T}$, если каждая его вершина является
  - — либо аксиомой исчисления секвенций LK, то есть секвенцией вида $\varphi \vdash \varphi$, где φ — какая-нибудь аксиома теории $\mathcal{T}$,
  - — либо секвенцией вида $\vdash \alpha$, где α — какая-нибудь аксиома теории $\mathcal{T}$ (то есть формула из списка A аксиом этой теории).
- Секвенция $\Gamma \vdash \Delta$ называется выводимой в теории $\mathcal{T}$, если у нее есть вывод в теории $\mathcal{T}$.
- Формула ω формальной теории $\mathcal{T}$ называется
  - — *выводимой* (или *теоремой* теории $\mathcal{T}$), если в $\mathcal{T}$ выводима секвенция $\vdash \omega$;
  - — *опровержимой*, если ее отрицание, $\neg\omega$, выводимо в теории $\mathcal{T}$.

- Формальная теория $\mathcal{T}$ называется *теорией с равенством*, если в ее сигнатуру включен специальный символ $=$, а в систему аксиом – следующие аксиомы, называемые *аксиомами равенства*:

— аксиомы эквивалентности для равенства:

$$x = x \tag{1.1.22}$$
$$x = y \quad \Rightarrow \quad y = x \tag{1.1.23}$$
$$(x = y \ \& \ y = z) \quad \Rightarrow \quad x = z \tag{1.1.24}$$

— аксиомы инвариантности функциональных и предикатных символов:

a. Для любого функционального символа F валентности n и для любых двух строк переменных $x_1, ..., x_n$ и $y_1, ..., y_n$ длины n задается аксиома[4]

$$(x_1 = y_1 \ \& \ ... \ \& \ x_n = y_n) \quad \Rightarrow \quad F(x_1, ..., x_n) = F(y_1, ..., y_n). \tag{1.1.25}$$

b. Для любого предикатного символа P валентности n и для любых двух строк переменных $x_1, ..., x_n$ и $y_1, ..., y_n$ длины n задается аксиома[5]

$$\Big((x_1 = y_1 \ \& \ ... \ \& \ x_n = y_n) \ \& \ P(x_1, ..., x_n)\Big) \quad \Rightarrow \quad P(y_1, ..., y_n). \tag{1.1.26}$$

- Если $\mathcal{T}$ — формальная теория с равенством, то для ее аксиом, не являющихся аксиомами равенства, полезно выделить специальное название. Мы условимся называть такие аксиомы *содержательными аксиомами* теории $\mathcal{T}$.

◇ **1.1.1.** *Теория множеств Морса-Келли* MK, построенная нами выше в § 2 и § 3, является примером формальной теории с равенством. Это теория над логикой предикатов, ее сигнатура состоит из единственного двуместного предикатного символа принадлежности $\in$ (не считая двуместного предикатного символа равенства $=$), а аксиомы – утверждения MK-1 – MK-14, приведенные в § 3.

◇ **1.1.2.** *Наивная теория множеств* NST, построенная в § 1 этой главы, также является примером формальной теории с равенством. Это также теория над логикой предикатов, у нее такая же сигнатура, как у MK, а система аксиом NST-1—NST-7 описана на с.4.

◇ **1.1.3.** *Теорию частичного порядка*, используемую в разных разделах алгебры и анализа, можно представить как формальную теорию с равенством над логикой предикатов, у которой сигнатура состоит из единственного двуместного предикатного символа сравнения $\leqslant$ (не считая двуместного предикатного символа равенства $=$), а содержательными аксиомами считаются формулы

$$x \leqslant x \tag{1.1.27}$$
$$x \leqslant y \ \& \ y \leqslant x \quad \Rightarrow \quad x = y \tag{1.1.28}$$
$$x \leqslant y \ \& \ y \leqslant z \quad \Rightarrow \quad x \leqslant z \tag{1.1.29}$$

◇ **1.1.4.** *Теорию групп*, также часто используемую в алгебре и анализе, можно представить как формальную теорию с равенством. Ее сигнатура, состоит (помимо двуместного предикатного символа равенства $=$) из функционального символа 1 (валентности 0) и функционального символа $\cdot$

[4] В (1.1.25) запись $k \leqslant n$ понимается как неравенство в классе конечных ординалов, определенных выше на с.61.

[5] В (1.1.26) запись $k \leqslant n$ понимается как неравенство в классе конечных ординалов, определенных выше на с.61.

(валентности 2) с содержательными аксиомами

$$(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z) \tag{1.1.30}$$

$$x \cdot 1 = x \ \& \ 1 \cdot x = x \tag{1.1.31}$$

$$\forall x \quad \exists y \quad \big(x \cdot y = 1 \ \& \ y \cdot x = 1\big) \tag{1.1.32}$$

◇ **1.1.5.** *Арифметика Пеано* PA определяется как формальная теория с равенством над логикой предикатов с сигнатурой, состоящей из символа 0 валентности 0, символа S валентности 1, двух символов $+$ и $\cdot$ валентности 2, и следующими содержательными аксиомами:

$$\neg(0 = \mathsf{S}(x)) \tag{1.1.33}$$

$$\mathsf{S}(x) = \mathsf{S}(y) \quad \Rightarrow \quad x = y \tag{1.1.34}$$

$$x + 0 = x \tag{1.1.35}$$

$$x + \mathsf{S}(y) = \mathsf{S}(x + y) \tag{1.1.36}$$

$$x \cdot 0 = 0 \tag{1.1.37}$$

$$x \cdot \mathsf{S}(y) = x \cdot y + x \tag{1.1.38}$$

$$\left(\varphi\big|_{x=0} \ \& \ \forall y \ \left(\varphi\big|_{x=y} \ \Rightarrow \ \varphi\big|_{x=\mathsf{S}(y)}\right)\right) \ \Rightarrow \ \varphi \tag{1.1.39}$$

где φ – произвольная формула, для которой подстановка $\varphi\big|_{x=y}$ будет корректна (в этом случае подстановка $\varphi\big|_{x=\mathsf{S}(y)}$ тоже будет корректна, а подстановка $\varphi\big|_{x=0}$ всегда корректна). Можно заметить, что в этом примере число аксиом бесконечно: строка (1.1.39) описывает не одну аксиому, а то, что называется *схемой аксиом.*

Отношения следствия и эквивалентности между формулами.

Теорема 1.1.1 (об импликации)**.** *Секвенция $\alpha, \Gamma \vdash \Delta, \beta$ выводима тогда и только тогда, когда выводима секвенция $\Gamma \vdash \Delta, \alpha \Rightarrow \beta$.*

- Говорят, что *формула β следует из формулы α в теории $\mathcal{T}$*, если в $\mathcal{T}$ выводима секвенция $\alpha \vdash \beta$.[6] Из теоремы 1.1.1 следует, что это эквивалентно выводимости секвенции $\vdash \alpha \Rightarrow \beta$.

Доказательство. В прямую сторону это следует из правила LK-11:

$$\dfrac{\alpha, \Gamma \vdash \Delta, \beta}{\Gamma \vdash \Delta, \alpha \Rightarrow \beta.}\,(1.1.16)$$

Это дерево Генцена надо понимать так, что если у его вершины — секвенции $\alpha, \Gamma \vdash \Delta, \beta$ — есть вывод, то его можно пристроить к этой вершине сверху, и мы получим дерево, являющееся выводом для секвенции $\Gamma \vdash \Delta, \alpha \Rightarrow \beta$.

В обратную же сторону это утверждение следует из выведенной ранее секвенции (0.2.49):

$$\dfrac{\dfrac{\Gamma \vdash \Delta, \alpha \Rightarrow \beta \qquad \dfrac{\alpha, \alpha \Rightarrow \beta \vdash \beta}{\alpha \Rightarrow \beta, \alpha \vdash \beta}\,(1.1.8)}{\Gamma, \alpha \vdash \Delta, \beta}\,(1.1.9)}{\alpha, \Gamma \vdash \Delta, \beta}\,(1.1.8)$$

Опять это дерево надо понимать так, что если у его левой вершины — секвенции $\Gamma \vdash \Delta, \alpha \Rightarrow \beta$ — есть вывод, то его можно пристроить к этой вершине сверху, затем к правой вершине — секвенции $\alpha, \alpha \Rightarrow \beta \vdash \beta$ — нужно будет пристроить ее вывод, который мы получили на с.13, и мы в результате получим дерево, являющееся выводом для секвенции $\alpha, \Gamma \vdash \Delta, \beta$. □

Теорема 1.1.2 (о транзитивности)**.** *Если выводимы секвенции $\Gamma \vdash \alpha$ и $\alpha \vdash \Delta$, то выводима и секвенция $\Gamma \vdash \Delta$.*

! **1.1.6.** Если формулу α заменить здесь каким-нибудь набором (из более чем одной формулы) Θ, то это утверждение утрачивает силу: из выводимости секвенций $\Gamma \vdash \Theta$ и $\Theta \vdash \Delta$ не следует выводимость секвенции $\Gamma \vdash \Delta$.

---

[6] Мы уже определяли это отношение между формулами выше на с.13.

Доказательство. Это частный случай правила сечения LK-4:

$$\frac{\Gamma \vdash \alpha \quad \alpha \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \Delta}\,(1.1.9)$$

□

Теорема 1.1.3. *Если выводима секвенция $\alpha \vdash \beta$, то для любой формулы γ выводима секвенция $\beta \Rightarrow \gamma \vdash \alpha \Rightarrow \gamma$.*

Доказательство. Пусть выводима секвенция $\alpha \vdash \beta$. Тогда по теореме 1.1.1 выводима секвенция

$$\vdash \alpha \Rightarrow \beta.$$

Вспомним секвенцию (0.2.54), которую мы вывели выше:

$$\alpha \Rightarrow \beta \vdash (\beta \Rightarrow \gamma) \Rightarrow (\alpha \Rightarrow \gamma).$$

Вместе эти две секвенции по теореме 1.1.2 дают выводимость секвенции

$$\vdash (\beta \Rightarrow \gamma) \Rightarrow (\alpha \Rightarrow \gamma).$$

Снова применяя теорему 1.1.1, мы получаем выводимость секвенции

$$\beta \Rightarrow \gamma \vdash \alpha \Rightarrow \gamma.$$

□

- Если в теории $\mathcal{T}$ выводимы секвенции $\alpha \vdash \beta$ и $\beta \vdash \alpha$, то говорят, что *формулы α и β эквивалентны в теории $\mathcal{T}$*. Из теоремы 1.1.1 следует, что это эквивалентно выводимости секвенции $\vdash \alpha \Leftrightarrow \beta$. Условимся эквивалентность формул α и β обозначать записью

$$\alpha \sim \beta.$$

Теорема 1.1.4. *Если $\alpha \sim \beta$, то*

(i) выводимость секвенции $\Gamma \vdash \Delta, \alpha$ эквивалентна выводимости секвенции $\Gamma \vdash \Delta, \beta$.

(ii) выводимость секвенции $\alpha, \Gamma \vdash \Delta$ эквивалентна выводимости секвенции $\beta, \Gamma \vdash \Delta$.

Доказательство. 1. Из выводимости секвенции $\alpha \vdash \beta$ следует, что в дереве (получающемся применениям правила сечения LK-4)

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, \alpha \quad \alpha \vdash \beta}{\Gamma \vdash \Delta, \beta}\,(1.1.9)$$

если левая вершина выводима, то и корень тоже выводим. И такой же вывод получается если поменять местами α и β.

2. Точно так же, применениям правила сечения LK-4, доказывается (ii). □

Свойства эквивалентных формул:[7]

1° *Если $\alpha \sim \beta$, то*

$$\neg\alpha \sim \neg\beta, \tag{1.1.40}$$

и для всякой переменной x

$$\forall x\ \alpha \sim \forall x\ \beta, \quad \exists x\ \alpha \sim \exists x\ \beta. \tag{1.1.41}$$

2° *Если $\alpha_1 \sim \beta_1$ и $\alpha_2 \sim \beta_2$, то*

$$\alpha_1 \ \&\ \alpha_2 \sim \beta_1 \ \&\ \beta_2, \quad \alpha_1 \vee \alpha_2 \sim \beta_1 \vee \beta_2,, \quad \alpha_1 \Rightarrow \alpha_2 \sim \beta_1 \Rightarrow \beta_2. \tag{1.1.42}$$

Доказательство. Эти свойства можно считать очевидными. □

[7] Эти свойства не распространяются на отношение следствия между формулами. Например, если β следует из α, то из этого нельзя заключить, что $\neg\beta$ следует из $\neg\alpha$. Все же применение логических операций & и $\vee$ и кванторов $\forall$ и $\exists$ сохраняет отношение следствия.

Отношение выводимости между формулами в формальной теории. Вариант исчисления секвенций LK, описанный нами на с.10, был частным случаем этого исчисления для языка теории множеств. Общий случай качественно не отличается, но для порядка все же мы должны дать для него основные определения отдельно. В частности, вот определения выводимости в формальной теории.

- Говорят, что *формула ω выводима из набора формул Σ в формальной теории $\mathcal{T}$*, если существует дерево Генцена, в котором в корне стоит секвенция $\vdash \omega$, а на вершинах либо аксиомы теории LK (то есть секвенции вида $\alpha \vdash \alpha$, где α — произвольная формула теории $\mathcal{T}$), либо секвенции вида $\vdash \beta$, где β — произвольная аксиома теории $\mathcal{T}$, либо секвенции $\vdash \sigma$, где σ — произвольная формула из Σ:
$$\frac{\frac{\alpha\vdash\alpha}{\dots} \qquad \frac{\vdash\beta}{\dots} \qquad \frac{\vdash\sigma}{\dots}}{\vdash \omega}. \tag{1.1.43}$$
- В частном случае, если Σ состоит из одной формулы, σ, говорят, что *формула ω выводится из формулы σ в теории $\mathcal{T}$*.
- В другом частном случае, если Σ совсем не содержит формул, говорят, что *формула ω выводится в теории $\mathcal{T}$*, а дерево (1.1.43), принимающее вид
$$\frac{\frac{\alpha\vdash\alpha}{\dots} \qquad \frac{\vdash\beta}{\dots}}{\vdash \omega}, \tag{1.1.44}$$
где α — произвольная формула теории $\mathcal{T}$, а β — произвольная аксиома теории $\mathcal{T}$, называется *выводом формулы ω в теории $\mathcal{T}$*.

Пусть $\mathcal{T}$ – формальная теория и σ – формула в ней. Условимся символом $\mathcal{T}+\sigma$ обозначать формальную теорию, полученную из $\mathcal{T}$ присоединением формулы σ к списку аксиом. Заметим, что следующие условия эквивалентны:

(a) ω выводится из σ в $\mathcal{T}$,

(b) ω выводится в $\mathcal{T}+\sigma$.

По аналогии с теоремой о дедукции для LK 0.2.6 доказывается

Теорема 1.1.5 (о дедукции для произвольной теории $\mathcal{T}$). *Пусть ω – формула и Σ — конечный набор формул в формальной теории $\mathcal{T}$. Рассмотрим два условия:*

(a) ω следует из Σ в $\mathcal{T}$,

(b) ω выводится из Σ в $\mathcal{T}$.

Тогда:

(i) условие (a) влечет условие (b),

(ii) если формулы Σ замкнуты, то условие (b) влечет условие (a) (то есть в этом случае (a) и (b) равносильны).

Замыкание всеобщности.

- Пусть α — формула формальной теории $\mathcal{T}$, и пусть $x_1, ..., x_n$ — ее свободные переменные. Тогда *замыканием всеобщности* $\overline{\alpha}$ формулы α называется формула
$$\forall x_1 \dots \forall x_n\ \alpha.$$
- Пусть $\mathcal{T}$ — формальная теория с системой аксиом Σ. Если каждую формулу α в Σ заменить на ее замыкание всеобщности $\overline{\alpha}$, то мы получим систему аксиом некоторой новой формальной теории $\overline{\mathcal{T}}$, которую мы будем называть замыканием формальной теории $\mathcal{T}$.

По аналогии с предложением 0.2.4 доказывается

Предложение 1.1.6. *В формальной теории $\mathcal{T}$ всякая формула α и ее замыкание всеобщности $\overline{\alpha}$ выводятся друг из друга.*

Отсюда сразу следует

Теорема 1.1.7. *Выводимость формулы ω в формальной теории $\mathcal{T}$ эквивалентна ее выводимости в замыкании $\overline{\mathcal{T}}$ теории $\mathcal{T}$.*

Противоречивость и непротиворечивость.

Теорема 1.1.8. *Для формулы φ в теории $\mathcal{T}$ следующие условия эквивалентны:*

(i) формула φ одновременно выводима и опровержима в теории $\mathcal{T}$ (то есть в теории $\mathcal{T}$ выводимы формулы φ и $\neg\varphi$),

(ii) в $\mathcal{T}$ выводима формула $\varphi \mathbin{\&} \neg\varphi$,

(iii) в $\mathcal{T}$ выводима формула $\varphi \Leftrightarrow \neg\varphi$.

Доказательство. 1. (i)$\Rightarrow$(ii). Рассмотрим дерево

$$\frac{\vdash \varphi \quad \vdash \neg\varphi}{\vdash \varphi \mathbin{\&} \neg\varphi}\,{\scriptstyle (1.1.11)}$$

Если в $\mathcal{T}$ выводимы формулы φ и $\neg\varphi$, то подклеив их выводы к вершинам этого дерева, мы получим вывод формулы $\varphi \mathbin{\&} \neg\varphi$.

2. (ii)$\Rightarrow$(iii). Вспомним выведенную выше секвенцию (0.2.76),

$$\alpha \mathbin{\&} \beta \vdash \alpha \Rightarrow \beta. \tag{1.1.45}$$

Подставив φ вместо α, а $\neg\varphi$ вместо β, мы получим секвенцию

$$\varphi \mathbin{\&} \neg\varphi \vdash \varphi \Rightarrow \neg\varphi,$$

которая также выводима. Подклеим ее вывод к правой вершине дерева

$$\frac{\vdash \varphi \mathbin{\&} \neg\varphi \quad \varphi \mathbin{\&} \neg\varphi \vdash \varphi \Rightarrow \neg\varphi}{\vdash \varphi \Rightarrow \neg\varphi}\,{\scriptstyle (1.1.11)}$$

Если теперь выводима формула $\varphi \mathbin{\&} \neg\varphi$, то подклеив ее вывод к левой вершине, мы получим вывод формулы $\varphi \Rightarrow \neg\varphi$.

Точно также заменив в (1.1.45) α на $\neg\varphi$, а β на φ, мы получим выводимую секвенцию

$$\neg\varphi \mathbin{\&} \varphi \vdash \neg\varphi \Rightarrow \varphi.$$

Подклеим ее вывод к правой вершине дерева

$$\frac{\vdash \neg\varphi \mathbin{\&} \varphi \quad \neg\varphi \mathbin{\&} \varphi \vdash \neg\varphi \Rightarrow \varphi}{\vdash \neg\varphi \Rightarrow \varphi}\,{\scriptstyle (1.1.11)} \tag{1.1.46}$$

Теперь если выводима формула $\varphi \mathbin{\&} \neg\varphi$, то, в силу выводимости секвенции (0.2.52), выводима и формула $\neg\varphi \mathbin{\&} \varphi$. Подклеив ее вывод к левой вершине дерева (1.1.46), мы получим вывод формулы $\neg\varphi \Rightarrow \varphi$.

Мы получили, что если выводима формула $\varphi \mathbin{\&} \neg\varphi$, то выводимы формулы $\varphi \Rightarrow \neg\varphi$ и $\neg\varphi \Rightarrow \varphi$. Значит, выводима формула $\varphi \Leftrightarrow \neg\varphi$.

3. (iii)$\Rightarrow$(i). Пусть выводима некоторая формула $\varphi \Leftrightarrow \neg\varphi$, то есть секвенция

$$\vdash \varphi \Leftrightarrow \neg\varphi.$$

Это означает выводимость секвенций

$$\vdash \varphi \Rightarrow \neg\varphi$$

и

$$\vdash \neg\varphi \Rightarrow \varphi.$$

По теореме 0.2.3 это эквивалентно выводимости секвенций

$$\varphi \vdash \neg\varphi$$

и

$$\neg\varphi \vdash \varphi.$$

Выводимость первой из них влечет выводимость формулы $\neg\varphi$ в силу дерева

$$\dfrac{\dfrac{\varphi\vdash\neg\varphi}{\vdash\neg\varphi,\neg\varphi}\,(1.1.10)}{\vdash\neg\varphi}\,(1.1.7)$$

А выводимость второй влечет выводимость формулы φ в силу дерева

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\neg\varphi\vdash\varphi}{\vdash\varphi,\neg(\neg\varphi)}\,(1.1.10)\qquad\qquad \neg(\neg\varphi)\vdash\varphi\ (0.2.75)}{\vdash\varphi,\varphi}\,(1.1.7)}{\vdash\varphi}\,(1.1.7)$$

(в котором секвенция в правой вершине была выведена раньше в (0.2.75)). □

- Если в теории $\mathcal{T}$ существует формула φ, удовлетворяющая условиям теоремы 1.1.8, то теория $\mathcal{T}$ называется *противоречивой*. В противном случае (если формулы φ с описанными в этой теореме свойствами не существует), теория $\mathcal{T}$ называется *непротиворечивой*.

◇ **1.1.7.** Наивная теория множеств NST, которую мы строили в § 1 главы 0, противоречива как формальная теория, потому что парадокс Рассела (0.1.20), обсуждавшийся нами в примере 0.1.13, означает выводимость в этой теории формулы

$$R\in R\ \Leftrightarrow\ R\notin R$$

(где R — множество Рассела, определенное формулой (0.1.18)). По теореме 1.1.8 это, между прочим, означает, что в NST выводима также формула

$$R\in R\ \&\ R\notin R,$$

и что в этой теории выводима и опровержима формула $R\in R$ (мы это отмечали в замечании 0.1.14, но тогда мы пользовались обычным математическим языком, не организованным в формальное исчисление).

Теорема 1.1.9 (о противоречивых теориях). *Если теория $\mathcal{T}$ противоречива, то в ней любая формула одновременно выводима и опровержима.*

Доказательство. Здесь используется секвенция (0.2.74), которую мы вывели когда-то. Пусть φ – какая-нибудь формула в $\mathcal{T}$, являющаяся выводимой и опровержимой одновременно. Зафиксируем какую-нибудь формулу ψ в теории $\mathcal{T}$ и покажем, что она тоже выводима и опровержима в $\mathcal{T}$.

Выводимость φ значит, что существует ее вывод в теории $\mathcal{T}$, то есть дерево Генцена (1.1.44)

$$\dfrac{\dfrac{\alpha\vdash\alpha}{\dots}\qquad\dfrac{\vdash\beta}{\dots}}{\vdash\varphi}$$

с корнем $\vdash\varphi$, и вершинами вида $\alpha\vdash\alpha$, где α — произвольная формула теории, либо $\vdash\beta$, где β — произвольная аксиома теории $\mathcal{T}$.

Точно так же выводимость $\neg\varphi$ значит, что существует такое же дерево Генцена

$$\dfrac{\dfrac{\alpha\vdash\alpha}{\dots}\qquad\dfrac{\vdash\beta}{\dots}}{\vdash\neg\varphi}.$$

Подклеив эти деревья сверху к левым двум вершинам дерева (а вывод секвенции (0.2.74) — к его правой вершине)

$$\dfrac{\dfrac{\vdash\varphi\quad\vdash\neg\varphi}{\vdash\varphi\ \&\ \neg\varphi}\,(1.1.11)\qquad\dfrac{\varphi\ \&\ \neg\varphi\vdash\quad(0.2.74)}{\varphi\ \&\ \neg\varphi\vdash\psi}\,(1.1.6)}{\vdash\psi}\,(1.1.9)$$

мы получим вывод формулы ψ в теории $\mathcal{T}$.

То есть ψ выводима в теории $\mathcal{T}$. Это верно для любой формулы ψ, поэтому если взять вместо нее формулу $\neg\psi$, то для нее это тоже будет верно. Значит, обе формулы, ψ и $\neg\psi$ выводимы в $\mathcal{T}$. □

Из теоремы 1.1.9 сразу следует

Теорема 1.1.10. *Если в формальной теории $\mathcal{T}$ существует невыводимая формула φ, то теория $\mathcal{T}$ непротиворечива.*

Справедлива также следующая

Теорема 1.1.11. *Если замкнутая формула φ в теории $\mathcal{T}$ невыводима, то (не только теория $\mathcal{T}$, но и) теория $\mathcal{T} + \neg\varphi$ непротиворечива.*

Доказательство. Заметим, что аксиомы теории $\mathcal{T}$ тоже можно считать замкнутыми (как и формулу φ), потому что по теореме 1.1.7 теория $\mathcal{T}$ и ее замыкание $\overline{\mathcal{T}}$ дают один и тот же класс выводимых формул.

Теперь предположим, что теория $\mathcal{T} + \neg\varphi$ противоречива. Тогда по теореме 1.1.9 в ней выводится любая формула, в том числе и формула φ. Иными словами, φ выводится из $\neg\varphi$ и некоторого конечного набора Σ аксиом теории $\mathcal{T}$. При этом, как мы уже говорили, формулы Σ можно считать замкнутыми (поскольку это аксиомы теории $\mathcal{T}$), а формула $\neg\varphi$ замкнута потому что φ замкнута. Отсюда по теореме о дедукции 1.1.5 мы получаем, что φ (не просто выводится, но и) *следует из $\neg\varphi$ и Σ*. То есть в LK выводима секвенция

$$\neg\varphi, \Sigma \vdash \varphi.$$

Подклеив ее вывод к левой вершине дерева Генцена (а вывод секвенции (0.2.75) — к его правой вершине)

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\neg\varphi, \Sigma \vdash \varphi}{\Sigma \vdash \varphi, \neg(\neg\varphi)}{\scriptstyle(1.1.10)} \qquad \neg(\neg\varphi) \vdash \varphi \;\; {\scriptstyle(0.2.75)}}{\Sigma \vdash \varphi, \varphi}{\scriptstyle(1.1.9)}}{\Sigma \vdash \varphi}{\scriptstyle(1.1.7)}$$

мы получим, что φ следует из Σ. Опять применяя теорему дедукции 1.1.5, мы получим, что формула φ выводима из Σ, то есть выводима в $\mathcal{T}$. □

(b) Дефинициальные расширения

- Пусть нам дана формальная теория $\mathcal{T}$ с алфавитом $\mathcal{A}$, сигнатурой Σ и аксиомами Γ.

  1. Пусть P – какой-то новый символ, не входящий ни в алфавит $\mathcal{A}$, ни в сигнатуру Σ. Если мы хотим относиться к P, как к новому предикатному символу некоторой валентности n, то необходимо задать некую новую аксиому, которая называется *определяющей аксиомой* этого предикатного символа, и это должна быть какая-нибудь формула

  $$P(x_1, ..., x_n) \quad \Longleftrightarrow \quad \alpha, \tag{1.1.47}$$

  в которой α – какая-нибудь формула, в которой нет никаких свободных переменных, кроме $x_1, ..., x_n$ (возможно, не всех из этого списка). Если задана такая определяющая аксиома, то P называется *внешним предикатным символом* (валентности n) теории $\mathcal{T}$, а формула α – *определением* символа P.

  2. Пусть кроме того F – какой-то новый символ, не входящий ни в алфавит $\mathcal{A}$, ни в сигнатуру Σ. Если мы хотим относиться к F, как к новому функциональному символу некоторой валентности n, то необходимо задать некую новую аксиому, которая называется *определяющей аксиомой* этого функционального символа, и это должна быть какая-нибудь формула

  $$y = F(x_1, ..., x_n) \quad \Longleftrightarrow \quad \beta, \tag{1.1.48}$$

где β – какая-нибудь формула, в которой нет никаких свободных переменных, кроме $x_1, ..., x_n$ (возможно, не всех из этого списка), а также переменной y, причем в теории $\mathcal{T}$ выводима формула

$$(\forall x_1, ..., x_n \ \exists y \ \beta) \ \& \ \forall x_1, ..., x_n \ \forall y \ \forall z \ \Big((\beta \ \& \ \beta\big|_{y=z}) \quad \Longrightarrow \quad y = z \Big) \qquad (1.1.49)$$

в которой z – какая-нибудь переменная, не содержащаяся в β. Если задано такое определение, то F называется *внешним функциональным символом* (валентности n) теории $\mathcal{T}$, а формула β – *определением* символа F.

- Формальная теория $\mathcal{R}$, полученная из теории $\mathcal{T}$ последовательным добавлением к ее сигнатуре Σ некоторого количества внешних предикатных или функциональных символов, с одновременным добавлением к системе аксиом теории $\mathcal{T}$ соответствующих аксиом, определяющих эти символы (то есть формул (1.1.47) и/или (1.1.48)), называется *дефинциальным расширением* теории $\mathcal{T}$.

◇ **1.1.8.** Символ `Ord`, обозначающий класс малых ординалов, определенный формулой (0.3.309), может считаться примером внешнего функционального символа валентности 0, присоединенного к теории MK. А теория MK с присоединенным к ней символом, определенным формулой (0.3.309), – пример дефинициального расширения теории MK.

◇ **1.1.9.** Символ S, обозначающий функцию следования, определенную формулой (0.3.312), – пример внешнего функционального символа валентности 1 для теории MK. Точно так же теория MK с присоединенным к ней символом S, определенным формулой (0.3.312), – пример дефинициального расширения теории MK.

◇ **1.1.10.** Символ $\simeq$, обозначающий отношение равномощности, и определенный формулой (0.3.340), – пример внешнего предикатного символа валентности 2 для теории MK.

! **1.1.11.** Глядя на эти примеры, можно заметить, что в теории множеств Морса-Келли **MK** всякий присоединенный предикатный символ η валентности n выделяет некий класс строк длины n, а всякий присоединенный функциональный символ θ валентности n выделяет некое отображение на строках длины n.

Групповая подстановка. Ниже нам понадобится следующая конструкция. Пусть φ — формула, содержащая n свободных переменных $x_1, ..., x_n$ и еще термы $\tau_1, ..., \tau_n$, и предположим, мы хотим заменить в ней каждую переменную x_k на терм τ_k.

- *Групповой подстановкой* термов $\tau_1, ..., \tau_n$ вместо переменных $x_1, ..., x_n$ в формулу φ называется формула, получающаяся из φ одновременной заменой всех свободных вхождений каждой переменной x_k в формуле φ на терм τ_k. Мы обозначаем такую формулу символом
$$\varphi\Big|_{x_1=\tau_1,...,x_n=\tau_n} \qquad (1.1.50)$$
- Групповая подстановка $\varphi\Big|_{x_1=\tau_1,...,x_n=\tau_n}$ называется *корректной*, если ее можно представить как последовательное применение корректных подстановок одной переменной:
$$\varphi\Big|_{x_1=\tau_1,...,x_n=\tau_n} = \varphi\Big|_{x_1=\tau_1} ...\Big|_{x_n=\tau_n}$$
т.е. при замене x_k на τ_k никакая переменная, входящая в τ_k, не должна попадать в область действия квантора по этой переменной. Это эквивалентно тому, что каждое свободное вхождение переменной x_k в формулу φ не должно содержаться в области действия кванторов по переменным, входящим в терм τ_k.

Перевод формул в дефинициальном расширении. Всякой формуле φ дефинициального расширения $\mathcal{R}$ теории $\mathcal{T}$ можно неким стандартным образом поставить в соответствие некую формулу $\widehat{\varphi}$ теории $\mathcal{T}$ (без присоединенных символов) так, чтобы φ и $\widehat{\varphi}$ были равносильны в $\mathcal{R}$. Это удобно описать, считая, что $\mathcal{R}$ получено из $\mathcal{T}$ присоединением какого-то одного внешнего символа (а в общем случае нужно будет представить $\mathcal{R}$ как цепочку дефинициальных расширений, полученую из $\mathcal{T}$ присоединением каждый раз по одному символу). Поэтому мы рассмотрим два случая.

1. Пусть $\mathcal{R}$ получено из $\mathcal{T}$ присоединением предикатного символа P, определенного формулой α по правилу (1.1.47), причем пусть связанные переменные в формуле α не пересекаются с переменными (любыми, и свободными, и связанными) в формуле φ (если это не так, то можно в α связанные переменные заменить на какие-то другие). Тогда чтобы получить $\widehat{\varphi}$ мы в формуле φ заменяем каждое вхождение символа $P(\tau_1, ..., \tau_n)$ в φ формулой α с подставленными термами $\tau_1, ..., \tau_n$ вместо $x_1, ..., x_n$ (такая подстановка будет корректна, потому что переменные из $\tau_1, ..., \tau_n$ не будут содержаться в α как связанные переменные).
2. Пусть $\mathcal{R}$ получено из $\mathcal{T}$ присоединением функционального символа F, определенного формулой β по правилу (1.1.48). Построим сначала перевод $\widehat{\varphi}$ всех атомарных формул φ:

   — если φ не содержит символа F, то мы считаем, что $\widehat{\varphi}$ совпадает с φ,

   — предположим, что мы построили формулы $\widehat{\varphi}$ для всех атомарных формул φ, в которых символ F встречается k раз,

   — пусть далее φ – атомарная формула, в которой символ F встречается $k+1$ раз; выберем какую-нибудь формулу χ так, чтобы φ имела вид
   $$\varphi = \chi\Big|_{y=F(\tau_1,...,\tau_n)}$$
   где термы $\tau_1, ..., \tau_n$ символа F не содержат, а переменная y не встречается ни в χ, ни в $\tau_1, ..., \tau_n$; будем считать, что переменные, входящие в $\tau_1, ..., \tau_n$, не входят в (1.1.48) как связанные переменные (если это не так, поменяем y и связанные переменные в (1.1.48) и в наших рассуждениях дальше будем вместо y использовать другую букву); в формуле χ символ F входит уже k раз (на 1 меньше, чем в формуле φ), поэтому для нее соответствующая формула $\widehat{\chi}$ уже построена; теперь $\widehat{\varphi}$ можно определить так:
   $$\forall y \Big(\beta\Big|_{x_1=\tau_1,...,x_n=\tau_n} \Rightarrow \widehat{\chi}\Big)$$
   (подстановка будет корректна, потому что переменные из термов $\tau_1, ..., \tau_n$ не содержатся как связанные переменные в β); эквивалентный способ — определить $\widehat{\varphi}$ формулой
   $$\exists y \Big(\beta\Big|_{x_1=\tau_1,...,x_n=\tau_n} \ \&\ \widehat{\chi}\Big).$$

   После того, как перевод $\widehat{\varphi}$ построен для всех атомарных формул φ, мы, рассматривая произвольную формулу ψ, заменяем в ней всякую атомарную подформулу φ на ее перевод $\widehat{\varphi}$.

- Формула $\widehat{\varphi}$ называется *переводом формулы φ на язык теории $\mathcal{T}$.*

Свойства операции перевода:

1° *Если формула φ не содержит присоединенных символов, то*[8]
$$\widehat{\varphi} = \varphi \tag{1.1.51}$$

2° *Если P — присоединенный предикатный символ валентности n, определенный формулой* (1.1.47)*, то*
$$\big(P(x_1, ..., x_n)\big)^{\widehat{}} = \alpha, \tag{1.1.52}$$

3° *Если F — присоединенный функциональный символ валентности n, определенный формулой* (1.1.48)*, то*
$$\big(y = F(x_1, ..., x_n)\big)^{\widehat{}} = \beta, \tag{1.1.53}$$

4° *В $\mathcal{T}$ справедливы следующие равенства формул*
$$\widehat{\neg\varphi} = \neg\widehat{\varphi}, \quad (\varphi \Rightarrow \psi)^{\widehat{}} = (\widehat{\varphi} \Rightarrow \widehat{\psi}) \tag{1.1.54}$$
$$\widehat{\varphi \ \&\ \psi} = \widehat{\varphi} \ \&\ \widehat{\psi}, \quad \widehat{\varphi \vee \psi} = \widehat{\varphi} \vee \widehat{\psi}, \tag{1.1.55}$$
$$\widehat{\forall x\ \varphi} = \forall x\ \widehat{\varphi}, \quad \widehat{\exists x\ \varphi} = \exists x\ \widehat{\varphi}. \tag{1.1.56}$$

[8] Равенство формул было определено на с.80.

5° *Для любой формулы φ в $\mathcal{R}$ выводима формула*

$$\varphi \;\Leftrightarrow\; \widehat{\varphi} \tag{1.1.57}$$

6° *Если τ — терм теории $\mathcal{T}$ (без новых присоединенных символов), для которого подстановка $\varphi\big|_{x=\tau}$ корректна, то подстановка $\widehat{\varphi}\big|_{x=\tau}$ также будет корректна, и справедливо равенство формул*

$$\widehat{\varphi\big|_{x=\tau}} = \widehat{\varphi}\big|_{x=\tau}. \tag{1.1.58}$$

7° *Если в теории $\mathcal{R}$ подстановка $\varphi\big|_{x=\tau}$ корректна (и τ — произвольный терм в $\mathcal{R}$, то есть, возможно, содержащий присоединенные к $\mathcal{T}$ символы), то в $\mathcal{T}$ выводимы секвенции*

$$\forall x\ \widehat{\varphi} \vdash \widehat{\varphi\big|_{x=\tau}} \tag{1.1.59}$$

$$\widehat{\varphi\big|_{x=\tau}} \vdash \exists x\ \widehat{\varphi} \tag{1.1.60}$$

Доказательство. Здесь все свойства очевидны, кроме 5 и 7. Свойство 5 вытекает из свойств 1° и 2° на с.85: всякая атомарная формула φ эквивалентна своему переводу $\widehat{\varphi}$ в $\mathcal{R}$,

$$\varphi \sim \widehat{\varphi},$$

поэтому то же самое верно для любых формул, составленных из атомарных с помощью связок $\neg$, &, $\vee$, $\Rightarrow$, и кванторов $\forall$, $\exists$. То есть это верно для любых вообще формул.

Свойство 7 доказывается индукцией по сложности формулы. □

◇ **1.1.12.** Напомним, что отношение включения $\subseteq$ было определено в теории MK формулой (0.3.134)

$$X \subseteq Y \quad\Leftrightarrow\quad \forall A\ (A \in X \Rightarrow A \in Y).$$

Понятно, что $\subseteq$ можно понимать как внешний двуместный предикатный символ в MK. Саму теорию MK с присоединенным к ней предикатным символом $\subseteq$ можно поэтому рассматривать как дефинициальное расширение теории MK. Обозначим его MK$+\subseteq$. Рассмотрим в MK$+\subseteq$ какую-нибудь формулу φ с участием этого символа, например, (0.3.139):

$$\big(X \subseteq Y\ \&\ Y \subseteq X\big) \quad\Rightarrow\quad X = Y.$$

Ее перевод $\widehat{\varphi}$ на язык теории MK, естественно, должен содержать только символы сигнатуры теории MK (то есть $=$ или $\in$, без $\subseteq$), и мы его упоминали уже, — это формула (0.3.140):

$$\Big(\big(\forall A\ (A \in X \;\Rightarrow\; A \in Y)\big)\ \&\ \big(\forall A\ (A \in Y \;\Rightarrow\; A \in X)\big)\Big) \quad\Rightarrow\quad X = Y.$$

На с.32 мы приводили вывод формулы $\widehat{\varphi}$ в MK, а формула φ, в свою очередь, выводится[9] в MK$+\subseteq$.

Теорема 1.1.12. *Пусть $\mathcal{R}$ — дефинициальное расширение теории $\mathcal{T}$. Формула φ в $\mathcal{R}$ выводима в $\mathcal{R}$ если и только если ее перевод $\widehat{\varphi}$ выводим в $\mathcal{T}$.*

[9] Формула φ имеет следующий вывод в MK$+\subseteq$:

$$\dfrac{\vdash X \subseteq Y \Rightarrow (\forall A\ \alpha)\ (0.3.134)}{X \subseteq Y \vdash \forall A\ \alpha}\ \text{теорема 0.2.3} \qquad \dfrac{\vdash Y \subseteq X \Rightarrow (\forall A\ \beta)\ (0.3.134)}{Y \subseteq X \vdash \forall A\ \beta}\ \text{теорема 0.2.3}$$

$$\dfrac{X \subseteq Y \vdash \forall A\ \alpha \qquad Y \subseteq X \vdash \forall A\ \beta}{X \subseteq Y\ \&\ Y \subseteq X \vdash (\forall A\ \alpha)\ \&\ (\forall A\ \beta))}\ \text{пример 0.2.24}$$

$$\dfrac{\vdash (\forall A\ A \in X \Leftrightarrow A \in Y) \Rightarrow X = Y\ \ (0.3.128)}{\forall A\ (A \in X \Leftrightarrow A \in Y) \vdash X = Y}\ \text{теорема 0.2.3}$$

$$\dfrac{\forall A\ (A \in X \Leftrightarrow A \in Y) \vdash X = Y}{\forall A\ (\alpha\ \&\ \beta) \vdash X = Y}\ (0.2.24)$$

$$\dfrac{(\forall A\ \alpha)\ \&\ (\forall A\ \beta) \vdash \forall A\ (\alpha\ \&\ \beta)\ \ (0.2.67) \qquad \forall A\ (\alpha\ \&\ \beta) \vdash X = Y}{(\forall A\ \alpha)\ \&\ (\forall A\ \beta) \vdash X = Y}\ (0.2.33)$$

$$\dfrac{X \subseteq Y\ \&\ Y \subseteq X \vdash (\forall A\ \alpha)\ \&\ (\forall A\ \beta)) \qquad (\forall A\ \alpha)\ \&\ (\forall A\ \beta) \vdash X = Y}{X \subseteq Y\ \&\ Y \subseteq X \vdash X = Y}\ (0.2.33)$$

$$\dfrac{X \subseteq Y\ \&\ Y \subseteq X \vdash X = Y}{\vdash \big(X \subseteq Y\ \&\ Y \subseteq X\big) \quad\Rightarrow\quad X = Y}\ (0.2.40)$$

где α — формула $A \in X \Rightarrow A \in Y$, а β — формула $A \in Y \Rightarrow A \in X$.

Доказательство. Заметим сразу, что в одну сторону это утверждение следует сразу из свойства (1.1.57): если $\widehat{\varphi}$ выводима в $\mathcal{T}$, то φ выводима в $\mathcal{R}$. Действительно, в $\mathcal{R}$ выводима формула (1.1.57), а значит, и формула

$$\widehat{\varphi} \ \Rightarrow \ \varphi,$$

и по теореме об импликации 1.1.1, секвенция

$$\widehat{\varphi} \vdash \varphi.$$

Мы можем подклеить ее вывод сверху к правой вершине дерева

$$\frac{\vdash \widehat{\varphi} \quad \widehat{\varphi} \vdash \varphi}{\vdash \varphi}\,(1.1.9)$$

и тогда, если $\widehat{\varphi}$ выводима (в $\mathcal{T}$, а значит и в $\mathcal{R}$), то ее вывод мы также можем подклеить к левой вершине этого дерева, и мы получим вывод в $\mathcal{R}$ для секвенции $\vdash \varphi$.

Таким образом, задача сводится к проверке второй половины этого утверждения: если φ выводима в $\mathcal{R}$, то $\widehat{\varphi}$ выводима в $\mathcal{T}$.

Если φ выводима в $\mathcal{R}$, то у нее есть вывод в $\mathcal{R}$, то есть некое дерево Генцена,

$$\frac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\alpha \vdash \alpha}{\Gamma_3 \vdash \Delta_3}}{\Gamma_1 \vdash \Delta_1}}{\dots} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\vdash \gamma}{\Gamma_4 \vdash \Delta_4}}{\Gamma_2 \vdash \Delta_2}}{\dots}}{\vdash \varphi} \tag{1.1.61}$$

у которого на вершинах стоят либо аксиомы исчисления предикатов LK (то есть секвенции вида $\alpha \vdash \alpha$), либо секвенции вида $\vdash \gamma$, где γ — аксиомы теории $\mathcal{T}$ или теории $\mathcal{R}$.

Преобразуем каждую формулу ψ в этом дереве в формулу $\widehat{\psi}$ теории $\mathcal{T}$ (по правилам, описанным на с.91). Мы получим некую картинку с секвенциями теории $\mathcal{T}$:

$$\frac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\widehat{\alpha} \vdash \widehat{\alpha}}{\widehat{\Gamma}_3 \vdash \widehat{\Delta_3}}}{\widehat{\Gamma}_1 \vdash \widehat{\Delta_1}}}{\dots} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\vdash \widehat{\gamma}}{\widehat{\Gamma}_4 \vdash \widehat{\Delta_4}}}{\widehat{\Gamma}_2 \vdash \widehat{\Delta_2}}}{\dots}}{\vdash \widehat{\varphi}} \tag{1.1.62}$$

В вершинах этой картинки стоят либо секвенции вида $\widehat{\alpha} \vdash \widehat{\alpha}$, то есть аксиомы исчисления предикатов LK, либо секвенции вида $\vdash \widehat{\gamma}$, где γ — аксиомы теории $\mathcal{T}$, либо секвенции вида $\vdash \widehat{\gamma}$, где γ — аксиома теории $\mathcal{R}$, то есть определение в $\mathcal{T}$. Но всякое определение имеет вид (1.1.47)

$$\eta(x_1, ..., x_n) \quad \Longleftrightarrow \quad \alpha,$$

и его перевод будет иметь вид

$$\alpha \quad \Longleftrightarrow \quad \alpha,$$

По теореме 0.2.3 выводимость такой формулы эквивалентна выводимости секвенции

$$\alpha \vdash \alpha.$$

А это аксиома теории $\mathcal{T}$.

Сказанное означает, что в дереве (1.1.62), получающемся переводом дерева (1.1.61), все вершины — либо аксиомы теории $\mathcal{T}$, либо выводимые секвенции в теории $\mathcal{T}$. Поэтому если доказать, что в (1.1.62) каждый переход вниз осуществляется по правилам вывода исчисления LK, то это будет выводом секвенции

$$\vdash \widehat{\varphi}$$

(что нам и нужно).

Таким образом, остается проверить только, что конструкция (1.1.62) — это либо само по себе дерево Генцена, либо ее можно дополнить (с сохранением корня и возможным добавлением новых вершин, которые также будут выводимыми секвенциями) до дерева Генцена.

Это делается вот как. Каждый переход в (1.1.62)

$$\frac{\widehat{\Gamma}_p \vdash \widehat{\Delta}_p}{\widehat{\Gamma}_q \vdash \widehat{\Delta}_q} \tag{1.1.63}$$

получен как преобразование по правилам (1.1.71)—(1.1.70) соответствующего перехода в (1.1.61)

$$\frac{\Gamma_p \vdash \Delta_p}{\Gamma_q \vdash \Delta_q}, \tag{1.1.64}$$

который в свою очередь получен применением какого-то из правил вывода LK-1 — LK-15. Нужно перебрать все правила от LK-1 до LK-15 и убедиться, что всякий раз, когда в (1.1.64) выводимость нижней секвенция следует из выводимости верхней применением этого правила, в (1.1.63) выводимость нижней секвенции также получается из выводимости верхней применением этого же правила, возможно, с добавлением каких-то других.

Рассмотрим теперь эти правила.

1. Пусть (1.1.64) получено применением первого правила в LK-1, то есть имеет вид

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta}{\alpha, \Gamma \vdash \Delta}$$

Тогда (1.1.63), получаемое преобразованием этого перехода, имеет вид

$$\frac{\widehat{\Gamma} \vdash \widehat{\Delta}}{\widehat{\alpha}, \widehat{\Gamma} \vdash \widehat{\Delta}},$$

и это тоже применение правила LK-1.

2. Следующие правила, от LK-2 до LK-11 включительно проверяются так же элементарно.

3. Сложности начинаются с правила LK-12*. Пусть (1.1.64) получено применением этого правила, то есть имеет вид

$$\frac{\alpha\big|_{x=\tau}, \Gamma \vdash \Delta}{\forall x\, \alpha, \Gamma \vdash \Delta}$$

— где x — переменная, а τ – терм. Это преобразуется в переход

$$\frac{\widehat{\alpha\big|_{x=\tau}}, \widehat{\Gamma} \vdash \widehat{\Delta}}{\widehat{\forall x\, \alpha}, \widehat{\Gamma} \vdash \widehat{\Delta}}.$$

Здесь переход от верхней секвенции к нижней можно представить как действие правила сечения (1.1.9),

$$\frac{\widehat{\forall x\, \alpha} \vdash \widehat{\alpha\big|_{x=\tau}} \qquad \widehat{\alpha\big|_{x=\tau}}, \widehat{\Gamma} \vdash \widehat{\Delta}}{\widehat{\forall x\, \alpha}, \widehat{\Gamma} \vdash \widehat{\Delta}},$$

и по правилу (1.1.56) это будет эквивалентно переходу

$$\frac{\forall x\, \widehat{\alpha} \vdash \widehat{\alpha\big|_{x=\tau}} \qquad \widehat{\alpha\big|_{x=\tau}}, \widehat{\Gamma} \vdash \widehat{\Delta}}{\forall x\, \widehat{\alpha}, \widehat{\Gamma} \vdash \widehat{\Delta}}.$$

Последний переход представляет собой применение правила сечения LK-4, а добавленная нами вершина слева — $\forall x\, \widehat{\alpha} \vdash \widehat{\alpha\big|_{x=\tau}}$ — выводимая секвенция в $\mathcal{T}$, в силу (1.1.59).

4. Пусть (1.1.64) получено применением правила LK-13*, то есть имеет вид

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, \alpha\big|_{x=y}}{\Gamma \vdash \Delta, \forall x\, \alpha}$$

— где y не входит (как свободная переменная) в нижнюю секвенцию. Это преобразуется в переход

$$\frac{\widehat{\Gamma} \vdash \widehat{\Delta}, \widehat{\alpha\big|_{x=y}}}{\widehat{\Gamma} \vdash \widehat{\Delta}, \widehat{\forall x\, \alpha}}$$

который по формулам (1.1.58) и (1.1.56) эквивалентен переходу

$$\frac{\widehat{\Gamma} \vdash \widehat{\Delta}, \widehat{\alpha}\big|_{x=y}}{\widehat{\Gamma} \vdash \widehat{\Delta}, \forall x\, \widehat{\alpha}}$$

При этом, y, по-прежнему, не входит (как свободная переменная) в нижнюю секвенцию, и мы получаем, что это в точности применение правила LK-13* к верхней секвенции.

5. Пусть (1.1.64) получено применением правила LK-14*, то есть имеет вид

$$\frac{\alpha\big|_{x=y}, \Gamma \vdash \Delta}{\exists x\, \alpha, \Gamma \vdash \Delta}$$

— где y не входит (как свободная переменная) в нижнюю секвенцию. Это преобразуется в переход

$$\frac{\widehat{\alpha\big|_{x=y}}, \widehat{\Gamma} \vdash \widehat{\Delta}}{\widehat{\exists x\, \alpha}, \widehat{\Gamma} \vdash \widehat{\Delta}}$$

который по формулам (1.1.58) и (1.1.56) эквивалентен переходу

$$\frac{\widehat{\alpha}\big|_{x=y}, \widehat{\Gamma} \vdash \widehat{\Delta}}{\exists x\, \widehat{\alpha}, \widehat{\Gamma} \vdash \widehat{\Delta}}$$

Здесь y по-прежнему не входит (как свободная переменная) в нижнюю секвенцию, и мы получаем, что это в точности применение правила LK-14* к верхней секвенции.

6. Пусть (1.1.64) получено применением правила LK-15*, то есть имеет вид

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, \alpha\big|_{x=\tau}}{\Gamma \vdash \Delta, \exists x\, \alpha}$$

— где x — переменная, а τ – терм. Это преобразуется в переход

$$\frac{\widehat{\Gamma} \vdash \widehat{\Delta}, \widehat{\alpha\big|_{x=\tau}}}{\widehat{\Gamma} \vdash \widehat{\Delta}, \widehat{\exists x\, \alpha}}.$$

Здесь переход от верхней секвенции к нижней можно представить как действие правила сечения (1.1.9),

$$\frac{\widehat{\Gamma} \vdash \widehat{\Delta}, \widehat{\alpha\big|_{x=\tau}} \qquad \widehat{\alpha\big|_{x=\tau}} \vdash \widehat{\exists x\, \alpha}}{\widehat{\Gamma} \vdash \widehat{\Delta}, \widehat{\exists x\, \alpha}},$$

и по правилу (1.1.56) это будет эквивалентно переходу

$$\frac{\widehat{\Gamma} \vdash \widehat{\Delta}, \widehat{\alpha\big|_{x=\tau}} \qquad \widehat{\alpha\big|_{x=\tau}} \vdash \exists x\, \widehat{\alpha}}{\widehat{\Gamma} \vdash \widehat{\Delta}, \exists x\, \widehat{\alpha}},$$

Последний переход представляет собой применение правила сечения LK-4, а добавленная нами вершина справа — $\widehat{\alpha\big|_{x=\tau}} \vdash \exists x\, \widehat{\alpha}$ — выводимая секвенция в $\mathcal{T}$, в силу (1.1.60). □

(c) Интерпретации и модели

Интерпретации.

- Пусть нам даны:
  1) две формальные теории $\mathcal{S}$ и $\mathcal{T}$ над логикой предикатов с одним алфавитом $\mathcal{A}$ и сигнатурами Σ и T соответственно,
  2) некий символ U, не входящий ни в алфавит $\mathcal{A}$, ни в сигнатуру Σ, ни в сигнатуру T,

  И пусть каждому (предикатному и функциональному) символу η из Σ поставлен в соответствие некий внешний (предикатный или функциональный, в зависимости от η) символ η' в теории $\mathcal{T}$, той же валентности, что η (см. определение на с.89). Пусть кроме того, символ U присоединен к теории $\mathcal{T}$ как предикатный символ валентности 1, причем выполнены следующие два условия:

  (i) требуется, чтобы в теории $\mathcal{T}$ существовал хотя бы один объект, удовлетворяющий условию U, то есть чтобы была выводима секвенция

$$\vdash \exists x\; U(x) \tag{1.1.65}$$

(ii) нужно чтобы для каждого функционального символа F из сигнатуры Σ соответствующий функциональный символ F' в дефинициальном расширении $\mathcal{S}'$ теории $\mathcal{T}$, сохранял свойство U для своих аргументов, то есть должна быть выводима секвенция

$$U(x_1), ..., U(x_n) \vdash U\Big(F'(x_1, ..., x_n)\Big) \tag{1.1.66}$$

(здесь n – валентность символа F').

И пусть $\mathcal{S}'$ обозначает формальную теорию, полученную как дефинициальное расширение теории $\mathcal{T}$ присоединением к ней символов η' (где η пробегает Σ) и символа U.

- *Преобразование формул.* При этих условиях каждой формуле φ теории $\mathcal{S}$ можно поставить в соответствие формулу φ' в теории $\mathcal{S}'$, которая отличается от φ только тем, что на входящие в нее переменные накладывается дополнительное условие, что они должны удовлетворять формуле U (неформально выражаясь, должны лежать в универсуме U, не выходя из него). Построение формулы φ' происходит следующим образом:

— каждый предикатный символ P в φ нужно заменить на соответствующий символ P',

— каждый функциональный символ F в φ нужно заменить на соответствующий символ F' (при этом каждый терм τ преобразуется в новый терм τ'),

— каждую подформулу

$$\forall x \ (\alpha) \tag{1.1.67}$$

нужно заменить на подформулу

$$\forall x \ \Big(U(x) \ \Rightarrow \ (\alpha)\Big) \tag{1.1.68}$$

— каждую подформулу

$$\exists x \ \alpha \tag{1.1.69}$$

нужно заменить на подформулу

$$\exists x \ \Big(U(x) \ \& \ (\alpha)\Big) \tag{1.1.70}$$

— если в формуле φ есть свободные переменные $x_1, ..., x_n$, то мы заменяем φ на формулу

$$\Big(U(x_1) \ \& \ ... \ \& \ U(x_n)\Big) \Rightarrow (\varphi). \tag{1.1.71}$$

- Предположим далее, что выполняется следующее условие:

    — для всякой формулы φ, являющейся аксиомой теории $\mathcal{S}$, соответствующая ей формула φ' в теории $\mathcal{S}'$ выводима в этой теории.

  Тогда теория $\mathcal{S}'$ называется *интерпретацией теории $\mathcal{S}$ в теории $\mathcal{T}$*. Предикатный символ U при этом называется *универсумом* этой интерпретации, а формула φ' — *переводом формулы φ* в этой интерпретации.

! **1.1.13.** Конструкция интерпретации позволяет “погрузить” данную теорию $\mathcal{S}$ в построенное дефинициальное расширение $\mathcal{S}'$ теории $\mathcal{T}$. С другой стороны, по теореме 1.1.12 дефинициальное расширение $\mathcal{S}'$ само можно считать теорией, погруженной в $\mathcal{T}$. Поэтому мы получаем “цепочку погружений” (здесь символ $\subseteq$ используется неформально, не как обозначение из теории множеств):

$$\mathcal{S} \subseteq \mathcal{S}' \subseteq \mathcal{T}.$$

Теорема 1.1.13. *Если формула φ теории $\mathcal{S}$ выводима (соответственно, опровержима) в $\mathcal{S}$, то в любой интерпретации $\mathcal{S}'$ теории $\mathcal{S}$ ее перевод φ' также выводим (соответственно, опровержим).*

Для доказательства этого утверждения нам понадобится следующая

Лемма 1.1.14. *Если $\alpha\Big|_{x=\tau}$ — корректная подстановка, и $y_1, ..., y_n$ – переменные в терме τ, то*

$$\left(\alpha\Big|_{x=\tau}\right)' \sim \left(\big(U(y_1) \ \& \ ... \ \& \ U(y_n)\big) \Rightarrow \alpha'\Big|_{x=\tau'}\right) \tag{1.1.72}$$

Доказательство теоремы 1.1.13. Здесь схема рассуждений похожа на ту, что использовалась в доказательстве второй части теоремы 1.1.12, только каждый шаг усложняется пропроционально усложнению конструкции φ' в сравнении с $\widehat{\varphi}$.

Нам достаточно рассмотреть случай, когда формула φ выводима в $\mathcal{S}$. Тогда у нее есть вывод в $\mathcal{S}$, то есть некое дерево Генцена,

$$\frac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\lambda\vdash\lambda}{\Gamma_3\vdash\Delta_3}}{\Gamma_1\vdash\Delta_1}}{\dots} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\vdash\gamma}{\Gamma_4\vdash\Delta_4}}{\Gamma_2\vdash\Delta_2}}{\dots}}{\vdash\varphi} \tag{1.1.73}$$

у которого на вершинах стоят либо аксиомы исчисления предикатов LK (то есть секвенции вида $\lambda\vdash\lambda$), либо секвенции вида $\vdash\gamma$, где γ — аксиомы теории $\mathcal{S}$.

Преобразуем каждую формулу ψ в этом дереве в формулу ψ' теории $\mathcal{S}'$ (по правилам, описанным на с.96). Мы получим некую картинку с секвенциями теории $\mathcal{S}'$:

$$\frac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\lambda'\vdash\lambda'}{\Gamma_3'\vdash\Delta_3'}}{\Gamma_1'\vdash\Delta_1'}}{\dots} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\vdash\gamma'}{\Gamma_4'\vdash\Delta_4'}}{\Gamma_2'\vdash\Delta_2'}}{\dots}}{\vdash\varphi'} \tag{1.1.74}$$

В вершинах этой картинки стоят либо секвенции вида $\lambda'\vdash\lambda'$, то есть аксиомы исчисления предикатов LK, либо секвенции вида $\vdash\gamma'$, где γ — аксиомы теории $\mathcal{S}$, а это выводимые секвенции, поскольку операция $\gamma\mapsto\gamma'$ есть интерпретация теории $\mathcal{S}$.

Поэтому если доказать, что в (1.1.74) каждый переход вниз осуществляется по правилам вывода исчисления LK, то это будет выводом секвенции

$$\vdash\varphi'$$

(что нам и нужно).

Таким образом, остается проверить только, что конструкция (1.1.74) — это либо само по себе дерево Генцена, либо ее можно дополнить до дерева Генцена.

Это делается вот как. Каждый переход в (1.1.74)

$$\frac{\Gamma_p'\vdash\Delta_p'}{\Gamma_q'\vdash\Delta_q'} \tag{1.1.75}$$

получен как преобразование по правилам (1.1.71)—(1.1.70) соответствующего перехода в (1.1.73)

$$\frac{\Gamma_p\vdash\Delta_p}{\Gamma_q\vdash\Delta_q}, \tag{1.1.76}$$

который в свою очередь получен применением какого-то из правил вывода LK-1 — LK-15. Нужно перебрать все правила от LK-1 до LK-15 и убедиться, что всякий раз, когда в (1.1.76) выводимость нижней секвенция следует из выводимости верхней применением этого правила, в (1.1.75) выводимость нижней секвенции также получается из выводимости верхней применением этого же правила, возможно, с добавлением каких-то других.

Рассмотрим теперь эти правила.

1. Пусть (1.1.76) получено применением первого правила в LK-1, то есть имеет вид

$$\frac{\Gamma\vdash\Delta}{\alpha,\Gamma\vdash\Delta}$$

Тогда (1.1.75), получаемое преобразованием этого перехода, имеет вид

$$\frac{\Gamma'\vdash\Delta'}{\alpha',\Gamma'\vdash\Delta'},$$

и это тоже применение правила LK-1.

2. Следующие правила, от LK-2 до LK-11 включительно проверяются так же элементарно.

3. Сложности начинаются с правила LK-12*. Пусть (1.1.76) получено применением этого правила, то есть имеет вид

$$\frac{\alpha\big|_{x=\tau},\Gamma\vdash\Delta}{\forall x\,\alpha,\Gamma\vdash\Delta}$$

— где x — переменная, а τ – терм. Это преобразуется в переход

$$\frac{(\alpha\big|_{x=\tau})', \varGamma' \vdash \varDelta'}{(\forall x\, \alpha)', \varGamma' \vdash \varDelta'},$$

По правилам преобразования (1.1.72) и (1.1.68) этот переход расшифровывается так:

$$\frac{\big(U(y_1)\ \&\ ...\ \&\ U(y_n)\big) \Rightarrow \alpha'\big|_{x=\tau'(y_1,...,y_n)}, \varGamma' \vdash \varDelta'}{\forall x\ U(x) \Rightarrow \alpha', \varGamma' \vdash \varDelta'}, \tag{1.1.77}$$

– здесь в числителе мы заменили формулу $(\alpha\big|_{x=\tau})'$ на эквивалентную ей в (силу (1.1.72)) формулу $\big(U(y_1)\ \&\ ...\ \&\ U(y_n)\big) \Rightarrow \alpha'\big|_{x=\tau'(y_1,...,y_n)}$, применяя теорему 1.1.4.

Дальше нам полезно будет ввести некое обозначение для упрощения формул. Условимся формулу $U(y_1)\ \&\ ...\ \&\ U(y_n)$ коротко записывать как $U(y)$:

$$U(y) = U(y_1)\ \&\ ...\ \&\ U(y_n) \tag{1.1.78}$$

Тогда (1.1.77) можно переписать так:

$$\frac{U(y) \Rightarrow \alpha'\big|_{x=\tau'}, \varGamma' \vdash \varDelta'}{\forall x\ U(x) \Rightarrow \alpha', \varGamma' \vdash \varDelta'}, \tag{1.1.79}$$

Теперь чтобы доказать, что из верхней секвенции здесь выводится нижняя, заметим, что из правила (1.1.66), записанного применительно к нашим условиям в виде

$$U(y_1), ..., U(y_n) \vdash U\big(\tau'(y_1, ..., y_n)\big),$$

или, что эквивалентно, из выводимости

$$U(y_1)\ \&\ ...\ \&\ U(y_n) \vdash U\big(\tau'(y_1, ..., y_n)\big),$$

по теореме 1.1.3 следует выводимость секвенции

$$U\big(\tau'(y_1, ..., y_n)\big) \Rightarrow \alpha'\big|_{x=\tau'(y_1,...,y_n)} \vdash \big(U(y_1)\ \&\ ...\ \&\ U(y_n)\big) \Rightarrow \alpha'\big|_{x=\tau'(y_1,...,y_n)}$$

Если снова воспользоваться обозначением (1.1.78), то эту секвенцию можно будет коротко записать так:

$$U\big(\tau'\big) \Rightarrow \alpha'\big|_{x=\tau'} \vdash U(y) \Rightarrow \alpha'\big|_{x=\tau'}$$

Добавив ее слева к верхней секвенции в (1.1.79), мы получим дерево

$$\cfrac{\cfrac{U\big(\tau'\big) \Rightarrow \alpha'\big|_{x=\tau'} \vdash U(y) \Rightarrow \alpha'\big|_{x=\tau'} \qquad U(y) \Rightarrow \alpha'\big|_{x=\tau'}, \varGamma' \vdash \varDelta'}{U\big(\tau'(y)\big) \Rightarrow \alpha'\big|_{x=\tau'(y)}, \varGamma' \vdash \varDelta'}\,(1.1.9)}{\forall x\ U(x) \Rightarrow \alpha', \varGamma' \vdash \varDelta'}\,(1.1.17)$$

Здесь секвенция в левой вершине, как мы уже заметили, выводима. Поэтому из выводимости секвенции в правой вершине следует выводимость корня дерева.

4. Пусть (1.1.76) получено применением правила LK-13*, то есть имеет вид

$$\frac{\varGamma \vdash \varDelta, \alpha\big|_{x=y}}{\varGamma \vdash \varDelta, \forall x\, \alpha}$$

— где y не входит (как свободная переменная) в нижнюю секвенцию. Это преобразуется в переход

$$\frac{\varGamma' \vdash \varDelta', \Big(\alpha\big|_{x=y}\Big)'}{\varGamma' \vdash \varDelta', \Big(\forall x\, \alpha\Big)'}$$

который по правилам преобразования (1.1.72) и (1.1.68) расшифровывается так:

$$\frac{\varGamma' \vdash \varDelta', U(y) \Rightarrow \alpha'\big|_{x=y}}{\varGamma' \vdash \varDelta', \forall x\ U(x) \Rightarrow \alpha'}$$

(опять мы в числителе заменяем формулу на эквивалентную, применяя теорему 1.1.4), или, что эквивалентно, так:

$$\frac{\Gamma' \vdash \Delta', \big(U(x) \Rightarrow \alpha'\big)\big|_{x=y}}{\Gamma' \vdash \Delta', \forall x\ U(x) \Rightarrow \alpha'}.$$

При этом, y по-прежнему не входит (как свободная переменная) в нижнюю секвенцию. Но это в точности применение правила LK-13* к верхней секвенции.

5. Пусть (1.1.76) получено применением правила LK-14*, то есть имеет вид

$$\frac{\alpha\big|_{x=y}, \Gamma \vdash \Delta}{\exists x\, \alpha, \Gamma \vdash \Delta}$$

— где y не входит (как свободная переменная) в нижнюю секвенцию. Это преобразуется в переход

$$\frac{\Big(\alpha\big|_{x=y}\Big)', \Gamma' \vdash \Delta'}{\Big(\exists x\, \alpha\Big)', \Gamma' \vdash \Delta'}$$

который по правилам преобразования (1.1.72) и (1.1.70) расшифровывается так:

$$\frac{U(y) \Rightarrow \alpha'\big|_{x=y}, \Gamma' \vdash \Delta'}{\exists x\ U(x)\ \&\ \alpha', \Gamma' \vdash \Delta'} \tag{1.1.80}$$

Теперь чтобы доказать, что из верхней секвенции здесь выводится нижняя, заметим, что выведенную нами выше секвенцию (0.2.76) можно записать применительно к нашим условиям в виде

$$U(y)\ \&\ \alpha'\big|_{x=y} \vdash U(y) \Rightarrow \alpha'\big|_{x=y}$$

или, что эквивалентно, в виде

$$\big(U(x)\ \&\ \alpha'\big)\big|_{x=y} \vdash U(y) \Rightarrow \alpha'\big|_{x=y}$$

Добавив эту секвенцию слева к верхней секвенции в (1.1.80), мы получим дерево Генцена

$$\cfrac{\cfrac{\big(U(x)\ \&\ \alpha'\big)\big|_{x=y} \vdash U(y) \Rightarrow \alpha'\big|_{x=y} \qquad U(y) \Rightarrow \alpha'\big|_{x=y}, \Gamma' \vdash \Delta'}{\big(U(x)\ \&\ \alpha'\big)\big|_{x=y}, \Gamma' \vdash \Delta'}\,(1.1.9)}{\exists x\ U(x)\ \&\ \alpha', \Gamma' \vdash \Delta'}\,(1.1.19)$$

Оно и есть нужное нам дополнение картинки (1.1.80).

6. Пусть (1.1.76) получено применением правила LK-15*, то есть имеет вид

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, \alpha\big|_{x=\tau}}{\Gamma \vdash \Delta, \exists x\, \alpha}$$

— где x — переменная, а τ – терм. Это преобразуется в переход

$$\frac{\Gamma' \vdash \Delta', \Big(\alpha\big|_{x=\tau}\Big)'}{\Gamma' \vdash \Delta', \Big(\exists x\, \alpha\Big)'}.$$

По правилам преобразования (1.1.72) и (1.1.70) этот переход расшифровывается так:

$$\frac{\Gamma' \vdash \Delta', U(y) \Rightarrow \alpha'\big|_{x=\tau'}}{\Gamma' \vdash \Delta', \exists x\ U(x)\ \&\ \alpha'}. \tag{1.1.81}$$

— где как и раньше, в соответствии с соглашением (1.1.78), под $U(y)$ понимается $U(y_1)\ \&\ ...\ \&\ U(y_n)$.

Заметим, что по теореме 1.1.1 секвенция

$$\Gamma' \vdash \Delta', U(y) \Rightarrow \alpha'\big|_{x=\tau'}$$

выводима если и только если выводима секвенция

$$U(y), \mathit{\Gamma}' \vdash \mathit{\Delta}', \alpha'\big|_{x=\tau'}$$

Поэтому (1.1.81) можно переписать в виде

$$\frac{U(y), \mathit{\Gamma}' \vdash \mathit{\Delta}', \alpha'\big|_{x=\tau'}}{\mathit{\Gamma}' \vdash \mathit{\Delta}', \exists x\ U(x)\ \&\ \alpha'}. \tag{1.1.82}$$

Теперь рассмотрим дерево Генцена

$$\dfrac{\vdash \exists y_n\ U(y_n) \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\vdash \exists y_1\ U(y_1) \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{U(y) \vdash U(\tau'(y))}{U(y), \mathit{\Gamma}' \vdash \mathit{\Delta}', U(\tau'(y))}{\scriptstyle (1.1.6)} \qquad U(y), \mathit{\Gamma}' \vdash \mathit{\Delta}', \alpha'\big|_{x=\tau'}}{U(y), \mathit{\Gamma}' \vdash \mathit{\Delta}', U(\tau'(y))\ \&\ \alpha'\big|_{x=\tau'}}{\scriptstyle (1.1.11)}}{U(y), \mathit{\Gamma}' \vdash \mathit{\Delta}', \exists x\ U(x)\ \&\ \alpha'(x)}{\scriptstyle (1.1.20)}}{U(y_1)\ \&\ U(y_2)\ \&\ ...\ \&\ U(y_n), \mathit{\Gamma}' \vdash \mathit{\Delta}', \exists x\ U(x)\ \&\ \alpha'(x)}{\scriptstyle (1.1.78)}}{U(y_1), U(y_2), ..., U(y_n), \mathit{\Gamma}' \vdash \mathit{\Delta}', \exists x\ U(x)\ \&\ \alpha'(x)}{\scriptstyle \text{Теорема 0.2.1}}}{\exists y_1\ U(y_1), U(y_2), ..., U(y_n), \mathit{\Gamma}' \vdash \mathit{\Delta}', \exists x\ U(x)\ \&\ \alpha'(x)}{\scriptstyle (1.1.19)}}{U(y_2), ..., U(y_n), \mathit{\Gamma}' \vdash \mathit{\Delta}', \exists x\ U(x)\ \&\ \alpha'(x)}{\scriptstyle (1.1.9)}}{\dots}{\scriptstyle (1.1.9)}}{U(y_n), \mathit{\Gamma}' \vdash \mathit{\Delta}', \exists x\ U(x)\ \&\ \alpha'(x)}{\scriptstyle (1.1.9)}}{\mathit{\Gamma}' \vdash \mathit{\Delta}', \exists x\ U(x)\ \&\ \alpha'(x)}{\scriptstyle (1.1.9)}$$

Здесь самая правая вершина — секвенция $U(y), \mathit{\Gamma}' \vdash \mathit{\Delta}', \alpha'\big|_{x=\tau'}$ — верхняя секвенция в (1.1.82). Вершина на самом верху — секвенция $U(y) \vdash U(\tau')$ — правило (1.1.66), записанное для терма τ'. Остальные вершины — секвенции $\vdash \exists y_i\ U(y_i)$ — представляют собой правило (1.1.65) непустоты универсума, записанное для переменных y_i. С их помощью мы последовательно избавляемся от формул $U(y_i)$ в антецеденте получающейся секвенции $U(y_1), ..., U(y_n), \mathit{\Gamma}' \vdash \mathit{\Delta}', \exists x\ U(x)\ \&\ \alpha'(x)$. Из этого дерева видно, что если выводится $U(y), \mathit{\Gamma}' \vdash \mathit{\Delta}', \alpha'\big|_{x=\tau'}$, то выводится и $\mathit{\Gamma}' \vdash \mathit{\Delta}', \exists x\ U(x)\ \&\ \alpha'(x)$. □

◇ **1.1.14.** *Интерпретация арифметики Пеано* PA *в теории множеств* MK. Рассмотрим сигнатуру теории PA, описанную в примере 1.1.5:

$$0,\ \mathsf{S},\ +,\ \cdot$$

Вспомним определения, которые мы давали этим символам в теории MK. Оставим эти определения, подкорректировав только одно из них, для функции S, а именно: пусть символ 0 обозначает пустое множество $\varnothing$ (то есть определяется формулой (0.3.279))

$$0 = \varnothing,$$

символ S – ограничение отображения S, определенного формулой (0.3.312), на множество `FinOrd` конечных ординалов

$$\mathsf{S}(X) = X \cup \{X\},$$

символ + определяется теоремой 2.1.1, а символ $\cdot$ – теоремой 2.1.3. Тогда

— условие (1.1.33) будет выполняться в силу свойства 2^0 на с.55,

— условие (1.1.34) будет выполняться в силу свойства 6^0 на с.56,

— условие (1.1.35) будет выполняться в силу (2.1.45),

— условие (1.1.36) будет выполняться в силу (2.1.46),

— условие (1.1.37) будет выполняться в силу (2.1.69),

— условие (1.1.38) будет выполняться в силу (2.1.70),

— условие (1.1.39) будет выполняться по теореме 0.3.48 (принцип обыкновенной индукции).

Вместе все это означает, что такая система определений для символов 0, S, $+$, $\cdot$ в теории MK будет интерпретацией теории PA в теории MK (с универсумом $\mathtt{FinOrd}$).

Теорема 1.1.15. *Пусть задана интерпретация $\mathcal{S}'$ теории $\mathcal{S}$ в теории $\mathcal{T}$. Тогда*

— *если теория $\mathcal{S}$ противоречива, то теория $\mathcal{T}$ тоже противоречива,*

— *если теория $\mathcal{T}$ непротиворечива, то теория $\mathcal{S}$ тоже непротиворечива,*

Доказательство. Здесь достаточно проверить первое утверждение. Если φ – формула в теории $\mathcal{S}$, являющаяся одновременно выводимой и опровержимой, то по теореме 1.1.13 соответствующая формула φ' в теории $\mathcal{T}$ также будет одновременно выводимой и опровержимой. □

Теоремы Гёделя о непротиворечивости. Формальная теория $\mathcal{T}$ называется *полной*, если в ней любая формула φ либо выводима, либо опровержима. В противном случае (то есть когда в $\mathcal{T}$ существует такая формула φ, что ни φ, ни $\neg\varphi$ не выводимы) теория $\mathcal{T}$ называется *неполной*.

Следующие два результата австрийского математика Курта Гёделя считаются ключевыми в математической логике. В энциклопедиях и в популярной литературе они традиционно приводятся с довольно туманными формулировками из-за громоздкости деталей. Мы также приводим эти утверждения в их нестрогом виде, отсылая читателя за подробностями к книге Питера Смита "Введение в теоремы Гёделя"[10]. Отметим только, что под выражением “теория $\mathcal{T}$ содержит арифметику Пеано” здесь понимается несколько естественных условий, среди которых, в частности, требование, чтобы теория Пеано PA имела интерпретацию в $\mathcal{T}$ (в смысле определения на с.95). Все стандартные аксиоматические теории множеств ZFC, NBG, MK (из которых только последняя, MK, описана в этой книге, а сведения об остальных можно найти в других руководствах) удовлетворяют посылкам теорем 1.1.16 и 1.1.17.

Теорема 1.1.16 (первая теорема Гёделя о неполноте)**.** *Пусть $\mathcal{T}$ – формальная теория, содержащая арифметику Пеано. Тогда теория $\mathcal{T}$ либо противоречива, либо неполна.*

Теорема 1.1.17 (вторая теорема Гёделя о неполноте)**.** *Пусть $\mathcal{T}$ – формальная теория, содержащая арифметику Пеано. Тогда либо теория $\mathcal{T}$ противоречива, либо утверждение о ее непротиворечивости невыводимо в $\mathcal{T}$.*

Второе из этих утверждений может быть интерпретировано, как, ни много, ни мало, свидетельство того, что непротиворечивость арифметики, теории множеств, а вместе с ними и математики в целом, доказать (в рамках логики предикатов) невозможно. Действительно, для доказательства непротиворечивости любой более или менее содержательной теории $\mathcal{T}$ (то есть, теории, включающей арифметику, как, скажем, теория множеств) нужно, как выясняется, строить новую теорию $\mathcal{T}'$ (обычно под $\mathcal{T}'$ понимается какая-то более широкая теория, хотя это необязательно, достаточно просто чтобы $\mathcal{T}$ интерпретировалась в $\mathcal{T}'$), после чего немедленно встает вопрос о том, не будет ли $\mathcal{T}'$ сама противоречива. Это важно, потому что по теореме 1.1.9 если $\mathcal{T}'$ противоречива, то в ней вместе с утверждением о непротиворечивости $\mathcal{T}$ становится выводимым и утверждение о противоречивости $\mathcal{T}$ (и таким образом, теорема «в $\mathcal{T}'$ выводится непротиворечивость $\mathcal{T}$» обесценивается противоположной теоремой «в $\mathcal{T}'$ выводится противоречивость $\mathcal{T}$»).

Это наблюдение имеет важное следствие для математической логики и всей математики. Из невозможности доказать непротиворечивость теорий, лежащих в основаниях математики, в частности, какой-нибудь аксиоматической теории множеств, эту непротиворечивость приходится *предполагать*. Это означает, что *все утверждения в той части математики, где используется теория множеств (то есть, фактически везде, или, если быть точным, везде вне некоторых совсем узких разделов логики), формулируются с дополнительным предположением, что используемый рабочий вариант теории множеств (в нашем случае это теория Морса-Келли* MK*) непротиворечив.* Математики почти никогда не следуют этому правилу формально (то есть нигде в формулировках не говорят явно “мы предполагаем, что теория множеств непротивроречива”), однако это всюду предполагается по умолчанию.[11] Мы в этом параграфе будем эту фразу произносить, чтобы она отпечаталсь у читателя в сознании (в частности, это будет вставленно в формулировки теорем 1.1.19 и 1.1.20 ниже), однако в дальнейшем мы об этом также забудем и вспоминать не будем.

[10] P. Smith. An intoduction to Gödel's theorems. Cambridge University Press. 2007.

[11] Правильнее было бы сказать “те математики, кто продумывал эти детали, считают это предполагающимся по умолчанию”, потому что большая часть из них об этих вещах не задумывается.

Модели и контрмодели. Частным случаем понятия интерпретации является следующая конструкция.

- Пусть $\mathcal{S}$ – произвольная формальная теория с сигнатурой Σ, и пусть

  — выделено некоторое непустое множество U (как объект теории MK),

  — всякому предикатному символу η валентности n из сигнатуры Σ поставлен в соответствие некий класс $\eta' \subseteq U^n$,

  — всякому функциональному символу η валентности n из сигнатуры Σ поставлено в соответствие некое отображение $\eta' : U^n \to U$.

  Если относиться к η' как к присоединенным предикатным и функциональным символам, то мы получим некое дефинициальное расширение $\mathcal{S}'$ теории MK. По аналогии с тем, как это делалось на с.96, каждой формуле φ теории $\mathcal{S}$ поставим в соответствие формулу φ' теории $\mathcal{S}'$ по следующим правилам:

— каждый предикатный символ η, примененный к термам $\tau_1, ..., \tau_n$, в φ нужно заменить на формулу $(\tau_1, ..., \tau_n) \in \eta'$,

— каждый функциональный символ η в φ нужно заменить на соответствующий символ η' (при этом каждый терм τ заменится на некий терм τ'),

— каждую подформулу
$$\forall x\ \alpha \tag{1.1.83}$$
нужно заменить на подформулу
$$\forall x\ \Big(x \in U\ \Rightarrow\ (\alpha)\Big) \tag{1.1.84}$$

— каждую подформулу
$$\exists x\ \alpha \tag{1.1.85}$$
нужно заменить на подформулу
$$\exists x\ \Big(x \in U\ \&\ (\alpha)\Big) \tag{1.1.86}$$

— если в φ есть свободные переменные $x_1, ..., x_n$, то заменяем φ на формулу
$$(x_1 \in U\ \&\ ...\ \&\ x_n \in U) \Rightarrow\ (\varphi) \tag{1.1.87}$$

Теория $\mathcal{S}'$ называется *моделью* теории $\mathcal{S}$, если для всякой аксиомы φ теории $\mathcal{S}$ соответствующая формула φ' выводима в $\mathcal{S}'$ (разумеется, это эквивалентно тому, что теория $\mathcal{S}'$ является интерпретацией $\mathcal{S}$ в смысле определения на с.95). Множество U при этом называется *универсумом* этой модели, а формула φ' — *переводом формулы* φ в этой модели.

Из теоремы 1.1.13 сразу следует

Теорема 1.1.18. *Если формула φ теории $\mathcal{S}$ выводима (соответственно, опровержима) в $\mathcal{S}$, то в любой модели $\mathcal{S}'$ теории $\mathcal{S}$ ее перевод φ' также выводим (соответственно, опровержим).*

Отсюда, в свою очередь, мы получаем два важных следствия.

Теорема 1.1.19. *В предположении, что теория* MK *непротиворечива,*

(i) всякая модель $\mathcal{S}'$ в MK *любой формальной теории $\mathcal{S}$ непротиворечива,*

(ii) если формальная теория $\mathcal{S}$ противоречива, то у нее нет модели в MK*;*

(iii) если формальная теория $\mathcal{S}$ обладает моделью в MK*, то теория $\mathcal{S}$ непротиворечива.*

Доказательство. 1. Пусть какая-то модель $\mathcal{S}'$ теории $\mathcal{S}$ противоречива, то есть в ней выводится какая-то формула ψ и ее отрицание $\neg\psi$. Поскольку $\mathcal{S}'$ – дефинициальное расширение теории MK, это значит, что в MK тоже выводятся формулы ψ и $\neg\psi$. Значит, теория MK должна быть тоже противоречивой.

2. Если формальная теория $\mathcal{S}$ противоречива, то в ней выводится какая-то формула φ и ее отрицание $\neg\varphi$. Если у $\mathcal{S}$ есть модель $\mathcal{S}'$ в MK, то в этой модели $\mathcal{S}'$ выводятся формулы φ' и $(\neg\varphi') = \neg(\varphi')$. То есть $\mathcal{S}'$ должна быть противоречивой теорией, а это противоречит уже доказанному утверждению (i).

3. Если формальная теория $\mathcal{S}$ обладает моделью в MK, то в силу уже доказанного свойства (ii), $\mathcal{S}$ не может быть противоречивой теорией. □

Теорема 1.1.20. *Пусть $\mathcal{S}$ – формальная теория, $\mathcal{S}'$ – ее модель в* MK*, φ – формула в $\mathcal{S}$, и φ' – соответствующая ей формула в $\mathcal{S}'$. Тогда, в предположении, что теория* MK *непротиворечива,*

— *если формула φ' опровержима в $\mathcal{S}'$, то формула φ не может быть выводима в $\mathcal{S}$,*
— *если формула φ' выводима в $\mathcal{S}'$, то формула φ не может быть опровержима в $\mathcal{S}$.*

Доказательство. Докажем первую часть (вторая доказывается по аналогии). Пусть формула φ' опровержима в $\mathcal{S}'$, то есть в $\mathcal{S}'$ выводится формула $\neg\varphi'$. Если предположить дополнительно, что формула φ выводима в $\mathcal{S}$, то по теореме 1.1.18 формула φ' также выводима в $\mathcal{S}'$. Одновременно по нашему предположению, φ' опровержима в $\mathcal{S}'$. Значит, $\mathcal{S}'$ должна быть противоречивой, а это противоречит теореме 1.1.19. □

Покажем, как применяется понятие модели. Пусть нам дана какая-то формальная теория $\mathcal{S}$ и формула φ в ней. Чтобы понять, будет эта формула выводима в $\mathcal{S}$, конечно, никакого определенного алгоритма нет. Однако если удается подобрать модель $\mathcal{S}'$, в которой соответствующая формула φ' опровержима, то по теореме 1.1.20 это будет сразу означать, что в $\mathcal{S}$ формула φ не может быть выводимой (если предполагать, что теория множеств MK непротиворечива). Такая модель $\mathcal{S}'$, в которой формула φ' опровержима, называется *контрмоделью для формулы φ*.

◇ **1.1.15.** Пусть $\mathcal{S}$ – теория частичного порядка, описанная в примере 1.1.3. Рассмотрим в ней утверждение, что порядок всегда линеен:

$$\forall x\ \forall y \quad \big(x \leqslant y\ \vee\ y \leqslant x\big). \tag{1.1.88}$$

Рассмотрим в качестве модели множество $X = 3 = \{0,1,2\}$, с частичным порядком на множестве $U = 2^X$ всех подмножеств в X:

$$A \leqslant B \quad \Leftrightarrow \quad A \subseteq B.$$

Тогда множества

$$x = \{0,1\}, \quad y = \{0,2\}$$

будут обладать свойством

$$x \nsubseteq y \ \&\ y \nsubseteq x$$

то есть будет выполняться отрицание формулы (1.1.88):

$$\exists x\ \exists y \quad \big(x \nleqslant y\ \&\ y \nleqslant x\big)$$

Значит, в нашей модели выводимо отрицание формулы (1.1.88). То есть формула (1.1.88) опровержима в построенной модели, и поэтому не может быть выводимой в теории частичного порядка (если считать, что теория множеств MK непротиворечива).

▷ **1.1.16.** Пусть $\mathcal{S}$ – теория групп, описанная в примере 1.1.4. Покажите, что в ней утверждение

$$\forall x\ \forall y \quad \big(x\cdot y = y\cdot x\big) \tag{1.1.89}$$

— невыводимо.

Теорема Генкина. У теоремы 1.1.19 (iii) имеется обращение, которое чаще всего называют одним из вариантов теоремы Гёделя о полноте. Чтобы не путать его с приводимой ниже теоремой о семантизации 1.1.22, которую также обычно называют теоремой Гёделя о полноте, мы будем называть его теоремой Генкина[12], по имени человека, выделившего этот результат в первоначальных рассуждениях Гёделя и приведшего относительно простое его доказательство.

Теорема 1.1.21. *Если формальная теория $\mathcal{S}$ непротиворечива, то у нее существует модель в теории* MK.[13]

(d) Семантика

Для всякой формальной теории $\mathcal{S}$ ее модели представляют собой объекты теории MK, и при определенной предварительной работе по уточнению нужных терминов, можно говорить о классе $\mathsf{Mod}_{\mathcal{S}}$ всех моделей теории $\mathcal{S}$ в MK. Этот класс $\mathsf{Mod}_{\mathcal{S}}$ порождает некую новую формальную теорию $\mathcal{S}^*$, дефинициальное расширение теории MK, которая называется *семантизацией* теории $\mathcal{S}$. Оказывается, что эта теория $\mathcal{S}^*$ эквивалентна теории $\mathcal{S}$ в том смысле, что данная формула φ выводима в $\mathcal{S}$ тогда и только тогда, когда соответствующая ей по определенным правилам формула φ^* выводима

[12] Леон Генкин (1921-2006) — американский математик.
[13] Доказательство этого факта приводится в различных учебниках по математической логике, см. например, C.C.Leary, L.Kristiansen, A friendly introduction to mathematical logic, NY, 2015 (с. 75). См. также P.T.Johnstone, Notes on logic and set theory, 1987 (Theorem 3.7).

в $\mathcal{S}^*$. Этот результат принято называть *теоремой Гёделя о полноте* (ниже мы его приводим в виде теорем 1.1.22 и 1.1.23 для случаев конечной и бесконечной систем аксиом, которые мы называем *теоремами о семантизации*), и его ценность в том, что он позволяет свести изучение формальных теорий к изучению дефинициальных расширений теории множеств MK. Это в свою очередь позволяет математикам (по крайней мере, тем, кто не специализируется в математической логике) вообще забыть о формальных теориях, описывая все необходимые конструкции языком рабочей теории множеств (и выводя все нужные результаты внутри этой теории множеств).

Семантизация конечно аксиоматизируемой теории. Для случая, когда теория $\mathcal{S}$ имеет конечную систему аксиом, класс $\mathsf{Mod}_{\mathcal{S}}$ ее моделей определяется относительно просто, и сейчас мы опишем эту конструкцию. Она состоит из четырех частей.

1. Прежде всего, нужно расширить сигнатуру Σ теории $\mathcal{S}$. Выберем какой-нибудь символ, не лежащий в Σ, например, пусть таким символом будет $\sharp$. Дополним сигнатуру Σ этим символом: пусть $\Sigma_\sharp$ обозначает сигнатуру Σ с добавленным символом $\sharp$.
2. Затем нужно *превратить расширенную сигнатуру $\Sigma_\sharp$ в объект теории Морса-Келли.* Это можно сделать, просто пронумеровав элементы $\Sigma_\sharp$. Поскольку $\Sigma_\sharp$ — конечный набор символов, нам для этого понадобится конечный набор чисел. Когда мы занумеруем элементы $\Sigma_\sharp$, мы установим взаимно однозначное соответствие между $\Sigma_\sharp$ и некоторым натуральным числом $n = \{0, 1, ..., n-1\}$. После этого можно будет забыть о символах $\Sigma_\sharp$, заменяя их номерами из $n = \{0, 1, ..., n-1\}$, и это позволит считать $\Sigma_\sharp$ (а также его элементы) объектом теории MK, или, точнее, конечным множеством. Когда это уложилось в сознании, удобно сделать шаг назад: поскольку неважно, какими символами мы обозначаем элементы сингатуры $\Sigma_\sharp$, можно дальше забыть о нумерации, и с самого начала относиться к $\Sigma_\sharp$ как к объекту теории MK, точнее, как к конечному множеству.
3. Затем строится класс $\mathsf{Str}_{\mathcal{S}}$ так называемых *реляционных структур*, или просто *структур* теории $\mathcal{S}$: объект P теории MK (то есть класс) считается элементом класса $\mathsf{Str}_{\mathcal{S}}$ (и называется *реляционной структурой* или просто *структурой*), если он представляет собой семейство $\{\eta'; \eta \in \Sigma_\sharp\}$ (отображение $\eta \in \Sigma_\sharp \mapsto \eta' \in \mathtt{Set}$) со следующими свойствами:
   - множество $P_\sharp$ непусто,
   - для всякого предикатного символа η валентности n из сигнатуры Σ справедливо вложение $\eta' \subseteq (P_\sharp)^n$,
   - для всякого функционального символа η валентности n из сигнатуры Σ множество η' представляет собой отображение $\eta' : (P_\sharp)^n \to P_\sharp$.
4. На последнем этапе в классе $\mathsf{Str}_{\mathcal{S}}$ реляционных структур выделается подкласс $\mathsf{Mod}_{\mathcal{S}}$, состоящий из моделей теории $\mathcal{S}$: структура $\{\eta'; \eta \in \Sigma\}$ принадлежит классу $\mathsf{Mod}_{\mathcal{S}}$, если она представляет собой модель теории $\mathcal{S}$ с универсумом $P_\sharp$ в смысле определения на с.102. Как это делается, удобнее понять на примерах 1.1.18-1.1.19, которые мы приводим ниже. Важно, что *здесь существенно используется, что система аксиом теории $\mathcal{S}$ конечна: именно поэтому можно выстроить требования, выделяющие класс $\mathsf{Mod}_{\mathcal{S}}$ в виде конечной цепочки символов, то есть определить класс $\mathsf{Mod}_{\mathcal{S}}$ формулой языка* MK.[14]

- В результате мы получаем класс $\mathsf{Mod}_{\mathcal{S}}$ моделей теории $\mathcal{S}$, определенный формулой языка теории MK. К нему можно относиться как к присоединенному функциональному символу валентности 0, тогда теория MK с этим присоединенным символом превращается в дефинициальное расширение $\mathcal{S}^*$ теории MK. Теория $\mathcal{S}^*$ называется *семантизацией формальной теории $\mathcal{S}$ в теории* MK.

! **1.1.17.** Понятно, что семантизация $\mathsf{Mod}_{\mathcal{S}}$ всякой формальной теории $\mathcal{S}$ является также формальной теорией.

---

[14]Если система аксиом бесконечна (как, например, в самой теории MK), то такое описание класса $\mathsf{Mod}_{\mathcal{S}}$ становится бесконечно длинным (потому что у нас нет возможности применять кванторы по системе аксиом), и поэтому это описание перестает быть формулой MK. Как разрешается эта проблема в случае бесконечной системы аксиом мы поговорим на с.107.

◇ **1.1.18.** *Семантизация теории частичного порядка.* Напомним, что в примере 1.1.3 мы определили теорию частичного порядка как формальную теорию. Ее семантизацией в MK будет следующая конструкция. Рассмотрим в MK формулу, которая на человеческом языке описывается словами "X является частично упорядоченным множеством с отношением порядка R", а на формальном имеет вид

$$\begin{gathered}\exists M\ \exists R\ X=(M,R)\ \&\ R\subseteq M\times M\ \&\\ \&\ \Big(\forall x\ x\in M\Rightarrow (x,x)\in R\Big)\ \&\\ \&\ \Big(\forall x\ \forall y\ \big((x,y)\in R\ \&\ (y,x)\in R\ \Rightarrow\ x=y\big)\Big)\ \&\\ \&\ \Big(\forall x\ \forall y\ \forall z\ \big((x,y)\in R\ \&\ (y,z)\in R\ \Rightarrow\\ (x,z)\in R\big)\Big)\end{gathered}\tag{1.1.90}$$

Эта формула, обозначим ее η, имеет только одну свободную переменную, X, и поэтому ею определяется некий внешний предикатный символ валентности 1, в качестве него можно взять η. Определение η можно переписать так:

$$\begin{gathered}\eta(X)\quad\Longleftrightarrow\\ \exists M\ \exists R\ X=(M,R)\ \&\ R\subseteq M\times M\ \&\\ \&\ \Big(\forall x\ x\in M\Rightarrow (x,x)\in R\Big)\ \&\\ \&\ \Big(\forall x\ \forall y\ \big((x,y)\in R\ \&\ (y,x)\in R\ \Rightarrow\ x=y\big)\Big)\ \&\\ \&\ \Big(\forall x\ \forall y\ \forall z\ \big((x,y)\in R\ \&\ (y,z)\in R\ \Rightarrow\\ (x,z)\in R\big)\Big)\end{gathered}\tag{1.1.91}$$

Если к сигнатуре теории множеств MK присоединить символ η, а к системе ее аксиом формулу (1.1.91), то полученная формальная теория будет семантизацией теории частичного порядка (или просто теорией частичного порядка в классическом его понимании).

◇ **1.1.19.** *Семантизация теории групп.* В примере 1.1.4 мы определили теорию групп как формальную теорию. Ее семантизацией в MK будет следующая конструкция. Рассмотрим в MK формулу, которая на человеческом языке описывается словами "G является группой", а на формальном имеет вид

$$\begin{gathered}\exists M\ \exists e\ \exists f\\ G=(M,e,f)\ \&\ e\in M\ \&\ f:M\times M\to M\ \&\\ \&\ \Big(\forall x\ \forall y\ \forall z\ f((x,y),z)=f(x,(y,z))\Big)\ \&\\ \&\ \Big(\forall x\ f(x,e)=x\ \&\ f(e,x)=x\Big)\ \&\\ \&\ \Big(\forall x\ \exists y\ f(x,y)=e\ \&\ f(y,x)=e\Big)\end{gathered}\tag{1.1.92}$$

Эта формула, обозначим ее η, имеет только одну свободную переменную, G, и поэтому ею определяется некий внешний предикатный символ валентности 1, в качестве него можно взять букву η. Определение η можно переписать так:

$$\begin{gathered}\eta(G)\quad\Longleftrightarrow\\ \exists M\ \exists e\ \exists f\quad G=(M,e,f)\ \&\\ \&\ e\in M\ \&\ f:M\times M\to M\ \&\\ \&\ \Big(\forall x\ \forall y\ \forall z\ f((x,y),z)=f(x,(y,z))\Big)\ \&\\ \&\ \Big(\forall x\ f(x,e)=x\ \&\ f(e,x)=x\Big)\ \&\\ \&\ \Big(\forall x\ \exists y\ f(x,y)=e\ \&\ f(y,x)=e\Big)\end{gathered}\tag{1.1.93}$$

Если к сигнатуре теории множеств MK присоединить символ η, а к системе ее аксиом формулу (1.1.93), то полученная формальная теория будет семантизацией теории групп (или просто теорией групп в классическом ее понимании).

- По аналогии с тем, как это делалось на с.102, каждой формуле φ теории $\mathcal{S}$ поставим в соответствие формулу φ^* теории $\mathcal{S}^*$ по следующим правилам:
  - — каждый предикатный символ η, примененный к переменным $x_1,...,x_n$, в φ нужно заменить на формулу $(x_1,...,x_n)\in\eta'$,
  - — каждый функциональный символ η в φ нужно заменить на соответствующий символ η',
  - — если в φ есть свободная переменная x, то заменяем φ на формулу
  $$x\in P_\sharp\ \Rightarrow\ (\varphi)\tag{1.1.94}$$
  (это нужно проделать последовательно со всеми свободными переменными в φ и остановиться),
  - — каждую подформулу
  $$\forall x\ \alpha\tag{1.1.95}$$
  нужно заменить на подформулу
  $$\forall x\ \Big(x\in P_\sharp\ \Rightarrow\ (\alpha)\Big)\tag{1.1.96}$$

— каждую подформулу
$$\exists x\ \alpha \tag{1.1.97}$$
нужно заменить на подформулу
$$\exists x\ \Big(x \in P_\sharp\ \&\ (\alpha)\Big) \tag{1.1.98}$$

— на заключительном этапе мы получаем формулу, которую полезно как-то обозначить, пусть это будет φ_P; формула φ^* получается из φ_P добавлением квантора всеобщности по переменной P:
$$\forall P \quad \Big(P \in \mathsf{Mod}_{\mathcal{S}} \Rightarrow \varphi_P\Big). \tag{1.1.99}$$

Формула φ^* называется *семантизацией формулы φ в теории $\mathcal{S}$*.

! **1.1.20.** По определению класса $\mathsf{Mod}_{\mathcal{S}}$, если φ – аксиома теории $\mathcal{S}$, то соответствующая формула φ_P выводима в модели P как в формальной теории. Поэтому семантизация φ^* всякой аксиомы φ теории $\mathcal{S}$ выводима в семантизации $\mathcal{S}^*$ теории $\mathcal{S}$.

Следующее утверждение представляет собой ослабленный вариант одного из ключевых результатов в этой науке, который принято называть *теоремой Гёделя о полноте*[15]. Мы приводим его под другим названием, поскольку по нашему мнению, упоминание о полноте здесь излишне. Это утверждение показывает, что всякая формальная теория $\mathcal{S}$ в определенном смысле эквивалентна своей семантизации $\mathcal{S}^*$ (в MK или, в действительности, в любой другой рабочей теории множеств).

Теорема 1.1.22 (о семантизации для конечно аксиоматизированной теории)**.** *В предположении, что теория* MK *непротиворечива, для любой конечно аксиоматизированной теории $\mathcal{S}$ над логикой предикатов и любой формулы φ в ней следующие условия эквивалентны:*

(i) формула φ выводима в $\mathcal{S}$,

(ii) ее семантизация φ^* выводима в семантизации $\mathcal{S}^*$ теории $\mathcal{S}$.

! **1.1.21.** Несколько огрубляя картину, можно сказать, что условие (ii) здесь эквивалентно тому, что в каждой модели $P \in \mathsf{Mod}_{\mathcal{S}}$ теории $\mathcal{S}$ соответствующая формула φ_P выводима (как в формальной теории, какую представляет собой модель P).

Доказательство теоремы 1.1.22. В прямую сторону это утверждение уже отмечалось в замечании 1.1.20: если формула φ в формальной теории $\mathcal{S}$ выводима, то формула φ^* выводима в семантизации $\mathcal{S}^*$ (это проверяется так же, как в теореме 1.1.13 об интерпретации). Нетривиальной частью является обратное утверждение: если φ невыводима в $\mathcal{S}$, то φ^* невыводима в $\mathcal{S}^*$.

Заметим теперь, что формулу φ можно считать замкнутой, потому что по предложению 1.1.6, φ и ее замыкание всеобщности $\overline{\varphi}$ выводятся друг из друга. Пусть далее формула φ невыводима в теории $\mathcal{S}$. Тогда, по теореме 1.1.11, теория $\mathcal{S} + \neg\varphi$ непротиворечива. По теореме 1.1.21 Генкина это означает, что для теории $\mathcal{S} + \neg\varphi$ найдется модель M в теории Морса-Келли MK. В этой модели формула $(\neg\varphi)_M = \neg(\varphi_M)$ выводима. Мы получаем, что $\neg(\varphi_M)$ выводима и φ_M выводима тоже (потому что φ^* выводима). Значит, теория M, описывающая модель, противоречива, а вместе с ней и содержащая ее теория MK тоже должна быть противоречива. $\square$

Семантизация $\mathcal{S}^*$ теории $\mathcal{S}$, будучи эквивалентна $\mathcal{S}$ на уровне утверждений теории $\mathcal{S}$ (то есть в смысле теоремы 1.1.22), не эквивалентна $\mathcal{S}$ в обычном, широком смысле. Точнее, можно сказать, что *все, что утверждается (и выводится) в исходной теории $\mathcal{S}$, утверждается (и выводится) и в ее семантизации $\mathcal{S}^*$, но не наоборот*: в семантизации $\mathcal{S}^*$ сигнатура шире (в ней содержатся дополнительные символы из теории множеств) и аксиом гораздо больше, чем в $\mathcal{S}$, и как следствие, выводимых утверждений в ней тоже гораздо больше.

Вот примеры, иллюстрирующие это замечание.

$\diamond$ **1.1.22.** Построенная нами в примере 1.1.18 семантизация теории частичного порядка не эквивалентна самой этой теории (представленной как формальная теория в примере 1.1.3), потому что, например, все, что связано с гомоморфизмами частично упорядоченных множеств, описывается только в семантизации теории частичного порядка (а в самой формальной теории частичного

[15] См. напр. Г.Такеути. Теория доказательств. М.: Мир, 1978.

порядка из примера 1.1.3 понятие гомоморфизма определить невозможно).

◇ **1.1.23.** Точно так же описанная в примере 1.1.19 семантизация теории групп не эквивалентна формальной теории групп из примера 1.1.4, потому что, например, понятие гомоморфизма групп можно определить только в семантизации этой теории (но не в самой формальной теории групп).

Семантизация теории с бесконечной системой аксиом. В определении семантизации $\mathcal{S}^*$ формальной теории $\mathcal{S}$, которое мы привели на с.104, существенную роль играло то, что теория $\mathcal{S}$ имела конечный набор аксиом. Если аксиом бесконечно много (как, например, в теории MK), то определить класс моделей $\mathsf{Mod}_{\mathcal{S}}$ и семантизацию $\mathcal{S}^*$ способом, описанным на с.104, невозможно. Для этого приходится использовать гораздо более сложную конструкцию, которую мы опишем в этом пункте.

Пусть теория $\mathcal{S}$ имеет произвольную (необязательно конечную) систему аксиом. Класс $\mathsf{Mod}_{\mathcal{S}}$ ее моделей строится как модификация конструкции, описанной на с.104.

1. Прежде всего, как и на с.104, мы расширяем сигнатуру $\varSigma$ теории $\mathcal{S}$. Выберем какой-нибудь символ, не лежащий в $\varSigma$, например, пусть таким символом будет $\sharp$. Дополним сигнатуру $\varSigma$ этим символом: пусть $\varSigma_\sharp$ обозначает сигнатуру $\varSigma$ с добавленным символом $\sharp$.
2. Затем нужно *превратить расширенную сигнатуру $\varSigma_\sharp$ в объект теории Морса-Келли.* Это, как и на с.104, можно сделать, просто пронумеровав элементы $\varSigma_\sharp$. После этого мы сможем относиться к $\varSigma_\sharp$ как к объекту теории MK (точнее, как к множеству, в данном случае, конечному).
3. Далее класс $\mathsf{Str}_{\mathcal{S}}$ *реляционных структур*, или просто *структур* теории $\mathcal{S}$ строится так же как на с.104: объект P теории MK (то есть класс) считается элементом класса $\mathsf{Str}_{\mathcal{S}}$ (и называется *реляционной структурой* или просто *структурой*), если он представляет собой семейство $\{\eta'; \eta\in\varSigma_\sharp\}$ (отображение $\eta\in\varSigma_\sharp\mapsto\eta'\in\mathtt{Set}$) со следующими свойствами:
   - — множество $P_\sharp$ непусто,
   - — для всякого предикатного символа η валентности n из сигнатуры $\varSigma$ справедливо вложение $\eta'\subseteq(P_\sharp)^n$,
   - — для всякого функционального символа η валентности n из сигнатуры $\varSigma$ множество η' представляет собой отображение $\eta':(P_\sharp)^n\to P_\sharp$.
4. Важное нововведение по сравнению с конструкцией на с.104: мы превращаем алфавит $\mathcal{A}$ теории $\mathcal{S}$ в объект теории MK точно таким же образом, нумеруя его элементы, вкладывая таким образом $\mathcal{A}$ в MK, а затем забывая об этой нумерации.
5. Систему логических символов $\neg$, &, $\vee$, $\exists$, $\forall$, $=$ тоже нужно превратить в объект теории MK.
6. После того, как $\varSigma_\sharp$ и $\mathcal{A}$ превращены в объекты теории MK, систему термов теории $\mathcal{S}$ также нужно превратить в некий объект $\mathsf{Term}_{\mathcal{S}}$ теории MK. Это делается по индукции (напомним, что в теории MK определения по индукции уже были нами описаны, поэтому сейчас это законный прием):
   - — сначала все элементы алфавита $\mathcal{A}$, то есть все переменные теории $\mathcal{S}$ объявляются термами,
   - — после этого для любого функционального символа $\beta\in\varSigma_\sharp$ валентности n и любой последовательности термов $(\tau_1,...,\tau_n)$ последовательность
   $$(\beta,\tau_1,...,\tau_n)$$
   синтаксический смысл которой — терм $\beta(\tau_1,...,\tau_n)$ — тоже объявляется термом.
7. Затем то же самое проделывается с системой формул теории $\mathcal{S}$: она также превращается в некий объект $\mathsf{Form}_{\mathcal{S}}$ теории MK. И это тоже делается по индукции:
   - — если $\tau_1,...,\tau_n$ – термы, и α – предикатный символ (возможно, равенство) валентности n, то последовательность
   $$(\alpha,\tau_1,...,\tau_n)$$
   синтаксический смысл которой — формула $\alpha(\tau_1,...,\tau_n)$ — объявляется элементом $\mathsf{Form}_{\mathcal{S}}$.

— для всякого $\varphi \in \mathsf{Form}_{\mathcal{S}}$ строка $(\neg, \varphi)$, смысл которой — формула $\neg\ \varphi$ — также объявляется элементом $\mathsf{Form}_{\mathcal{S}}$,

— для любых двух элементов $\varphi, \psi \in \mathsf{Form}_{\mathcal{S}}$ строки

$$(\&, \varphi, \psi), \qquad (\vee, \varphi, \psi), \qquad (\Rightarrow, \varphi, \psi), \qquad (\Leftrightarrow, \varphi, \psi),$$

смысл которых — формулы

$$(\varphi)\ \&\ (\psi), \qquad (\varphi)\ \vee\ (\psi), \qquad (\varphi) \Rightarrow (\psi), \qquad (\varphi) \Leftrightarrow (\psi),$$

— также объявляются элементами $\mathsf{Form}_{\mathcal{S}}$,

— если $\alpha \in \mathcal{A}$ (переменная), а $\varphi \in \mathsf{Form}_{\mathcal{S}}$ (формула), то следующие две строки

$$(\forall, \alpha, \varphi), \qquad (\exists, \alpha, \varphi). \tag{1.1.100}$$

кодирующие формулы

$$\forall\alpha\ (\varphi), \qquad \exists\alpha\ (\varphi).$$

— также считаются элементами $\mathsf{Form}_{\mathcal{S}}$.

8. Важным элементом этой картины должно быть то, что в классе $\mathsf{Form}_{\mathcal{S}}$ формул теории $\mathcal{S}$ выделяется подкласс $\mathsf{Ax}_{\mathcal{S}}$ аксиом. То есть должна строиться формула в теории MK, выделяющая $\mathsf{Ax}_{\mathcal{S}}$ в $\mathsf{Form}_{\mathcal{S}}$. Как пример, $\mathsf{Ax}_{\mathcal{S}}$ может выделяться каким-нибудь индуктивным правилом.

9. Далее определяется так называемый *предикат истинности* теории $\mathcal{S}$. Это отображение $\mathsf{True}_{\mathcal{S}}$, которое каждой структуре $P \in \mathsf{Str}_{\mathcal{S}}$, каждой формуле $\varphi \in \mathsf{Form}_{\mathcal{S}}$ и каждому отображению $f : \mathcal{A} \to P_\sharp$, называемому *оценкой*, ставит в соответствие конечный ординал[16] 0 или 1 по следующим индуктивным правилам:

   — если $\tau_1, ..., \tau_n$ – термы, α – предикатный символ (возможно, равенство) валентности n, то для формулы $\varphi = (\alpha, \tau_1, ..., \tau_n)$ со свободными переменными $x_1, ..., x_k$, и оценки $f : \mathcal{A} \to P_\sharp$ значение $\mathsf{True}_{\mathcal{S}}(P, \varphi, f)$ равно 1, если строка $(f(x_1), ..., f(x_k))$ принадлежит множеству

$$A_{P,\alpha} = \{z :\ \exists y_1\ ...\ \exists y_k\ z = (y_1, ..., y_k)\ P_\alpha(\tau_1(y_1, ..., y_k), ..., \tau_n(y_1, ..., y_k))\}$$

   и 0 в противном случае (иными словами, $\mathsf{True}_{\mathcal{S}}(P, \varphi, f)$ совпадает со значениями характеристической функции множества $A_{P,\alpha}$, которую мы определили в примере 0.3.15),

   — для всякой строки $\varphi \in \mathsf{Form}_{\mathcal{S}}$ и оценки $f : \mathcal{A} \to P_\sharp$ значение $\mathsf{True}_{\mathcal{S}}(P, (\neg, \varphi), f)$ меняется на противоположное по сравнению с $\mathsf{True}_{\mathcal{S}}(P, \varphi, f)$:

$$\mathsf{True}_{\mathcal{S}}(P, \varphi, f) = \begin{cases} 1, & \mathsf{True}_{\mathcal{S}}(P, \varphi, f) = 0 \\ 0, & \mathsf{True}_{\mathcal{S}}(P, \varphi, f) = 1 \end{cases}$$

   — для любых двух элементов $\varphi, \psi \in \mathsf{Form}_{\mathcal{S}}$ полагаем

$$\mathsf{True}_{\mathcal{S}}(P, (\&, \varphi, \psi), f) = \begin{cases} 1, & \mathsf{True}_{\mathcal{S}}(P, \varphi, f) = 1\ \&\ \mathsf{True}_{\mathcal{S}}(P, \psi, f) = 1 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

$$\mathsf{True}_{\mathcal{S}}(P, (\vee, \varphi, \psi), f) = \begin{cases} 0, & \mathsf{True}_{\mathcal{S}}(P, \varphi, f) = 0\ \&\ \mathsf{True}_{\mathcal{S}}(P, \psi, f) = 0 \\ 1, & \text{иначе} \end{cases}$$

$$\mathsf{True}_{\mathcal{S}}(P, (\Rightarrow, \varphi, \psi), f) = \begin{cases} 0, & \mathsf{True}_{\mathcal{S}}(P, \varphi, f) = 1\ \&\ \mathsf{True}_{\mathcal{S}}(P, \psi, f) = 0 \\ 1, & \text{иначе} \end{cases}$$

$$\mathsf{True}_{\mathcal{S}}(P, (\Leftrightarrow, \varphi, \psi), f) = \begin{cases} 1, & \begin{matrix} \Big(\mathsf{True}_{\mathcal{S}}(P, \varphi, f) = 1\ \&\ \mathsf{True}_{\mathcal{S}}(P, \psi, f) = 1\Big) \vee \\ \vee\Big(\mathsf{True}_{\mathcal{S}}(P, \varphi, f) = 0\ \&\ \mathsf{True}_{\mathcal{S}}(P, \psi, f) = 0\Big) \end{matrix} \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

[16] Напомним, что ординалы $0 = \varnothing$ и $1 = \{\varnothing\}$ были определены выше формулами (0.3.279) и (0.3.280), а в свойстве 1° на с.61 отмечалось, что они являются элементами `FinOrd`.

— если $\alpha \in \mathcal{A}$ (переменная), а $\varphi \in \mathsf{Form}_{\mathcal{S}}$ (формула), то

$$\mathsf{True}_{\mathcal{S}}(P,(\forall,\alpha,\varphi),f) = \begin{cases} 1, & \forall g \in P_{\sharp}^{\mathcal{A}} \quad \big(g(\alpha)=f(\alpha) \ \Rightarrow\ \mathsf{True}_{\mathcal{S}}(P,\varphi,g)=1\big) \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

$$\mathsf{True}_{\mathcal{S}}(P,(\exists,\alpha,\varphi),f) = \begin{cases} 1, & \exists g \in P_{\sharp}^{\mathcal{A}} \quad g(\alpha)=f(\alpha)\ \&\ \mathsf{True}_{\mathcal{S}}(P,\varphi,g)=1 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

10. На последнем этапе в классе $\mathsf{Str}_{\mathcal{S}}$ реляционных структур выделяется подкласс $\mathsf{Mod}_{\mathcal{S}}$, состоящий из моделей теории $\mathcal{S}$. Под моделью теории $\mathcal{S}$ понимается реляционная структура $P \in \mathsf{Str}_{\mathcal{S}}$, у которой на всякой аксиоме φ теории $\mathcal{S}$ при любой оценке $f : \mathcal{A} \to P_{\sharp}$ предикат истинности имеет значение 1:

$$\forall \varphi \in \mathsf{Ax}_{\mathcal{S}} \quad \forall f \in P_{\sharp}^{\mathcal{A}} \quad \mathsf{True}_{\mathcal{S}}(P,\varphi,f)=1.$$

- В результате мы получаем класс $\mathsf{Mod}_{\mathcal{S}}$ моделей теории $\mathcal{S}$, определенный формулой языка теории MK. К конструкциям $\mathsf{Form}_{\mathcal{S}}$, $\mathsf{Ax}_{\mathcal{S}}$, $\mathsf{True}_{\mathcal{S}}$ и $\mathsf{Mod}_{\mathcal{S}}$ можно относиться как к присоединенным функциональным символам (валентности 0, 0, 3 и 0 соответственно), тогда теория MK с этими присоединенными символами превращается в дефинициальное расширение $\mathcal{S}^*$ теории MK. Теория $\mathcal{S}^*$ называется *семантизацией формальной теории $\mathcal{S}$ в теории* MK.

- В противоположность интуитивно ясному определению на с.105 *семантизация φ^* формулы φ теории $\mathcal{S}$* определяется теперь как формула теории $\mathcal{S}^*$

$$\forall P \in \mathsf{Mod}_{\mathcal{S}} \quad \forall f \in P_{\sharp}^{\mathcal{A}} \quad \mathsf{True}(P,\varphi,f)=1 \tag{1.1.101}$$

Для фиксированной модели $P \in \mathsf{Mod}_{\mathcal{S}}$ формула

$$\forall f \in P_{\sharp}^{\mathcal{A}} \quad \mathsf{True}(P,\varphi,f)=1 \tag{1.1.102}$$

называется *семантизацией формулы φ в модели P* и обозначается φ_P.

! **1.1.24.** По определению класса $\mathsf{Mod}_{\mathcal{S}}$, семантизация φ^* всякой аксиомы φ теории $\mathcal{S}$ выводима в семантизации $\mathcal{S}^*$ теории $\mathcal{S}$.

Следующее утверждение представляет собой усиление теоремы 1.1.22, вариант *теоремы Гёделя о полноте* для произвольных формальных теорий. Оно показывает, что всякая рекурсивно аксиоматизированная формальная теория $\mathcal{S}$ в определенном смысле эквивалентна своей семантизации $\mathcal{S}^*$ в MK.

Теорема 1.1.23 (о семантизации для рекурсивно аксиоматизированной теории)**.** *В предположении, что теория* MK *непротиворечива, для любой рекурсивно аксиоматизированной теории $\mathcal{S}$ над логикой предикатов и любой формулы φ в ней следующие условия эквивалентны:*

(i) формула φ выводима в $\mathcal{S}$,

(ii) ее семантизация φ^* выводима в семантизации $\mathcal{S}^*$ теории $\mathcal{S}$.

! **1.1.25.** Как и в теореме 1.1.22, огрубляя картину, можно сказать, что условие (ii) здесь эквивалентно тому, что в каждой модели $P \in \mathsf{Mod}_{\mathcal{S}}$ теории $\mathcal{S}$ соответствующая формула φ_P выводима (как в формальной теории, какую представляет собой модель P).

Доказательство. ????????????????????????? Здесь повторяется доказательство теоремы 1.1.22, но в качестве аналога теоремы Генкина 1.1.21 используется результат, называемый теоремой Гильберта-Бернайса, в котором вместо модели доказывается существование интерпретации в теории Пеано PA[17]: если рекурсивно аксиоматизированная теория $\mathcal{S}$ непротиворечива, то у нее существует интерпретация в теории Пеано PA. Отсюда следует, что для $\mathcal{S}$ можно построить модель (интерпретацию) M также и в теории Морса-Келли MK. □

[17] См. К. Сморинский. Теоремы о неполноте. В: Справочная книга по математической логике. Ред. Дж.Барвайс. Т.4. М.: Наука, 1983 (теорема 6.1.1).

Семантические теории. Мы уже говорили выше, что теоремы о семантизации 1.1.22 и 1.1.23 позволяют математикам свести изучение общих формальных теорий к изучению дефинициальных расширений теории множеств MK. Выработанная в теории множеств интуиция фактически позволяет вообще забыть определение формальной теории (приведенное нами на с.79) и рассматривать любую теорию как дефинициальное расширение рабочей теории множеств. По этой причине мы для дальнейших построений вводим следующее определение.

- *Семантической теорией* мы будем называть произвольное дефинициальное расширение теории множеств MK (или любой другой рабочей теории множеств). При этом *аксиомами семантической теории* будут называться просто определения этого дефинициального расширения (то есть новые формулы, добавленные в список аксиом теории MK).

Понятно, что семантизация формальной теории будет семантической теорией, поэтому всякую формальную теорию $\mathcal{S}$ можно по теореме 1.1.23 представить как семантическую (то есть подобрать для $\mathcal{S}$ эквивалентную ей в смысле теоремы 1.1.23 семантическую теорию $\mathcal{S}^*$), а, с другой стороны, всякая семантическая теория по замечанию 1.1.17 является и формальной. Эти две операции — превращение формальной теории в семантическую и наоборот — не будут, конечно, взаимно обратными, но все же переход по ним дает в некотором смысле эквивалентную теорию (на уровне утверждений, формулируемых в теории $\mathcal{S}$, но, конечно, не в обычном смысле, как мы уже говорили перед примерами 1.1.22 и 1.1.23).

Эта установка — сводить все теории к семантическим — настолько естественна для математиков, что подавляющее большинство из них о формальных теориях не задумывается. Считается, что теорию достаточно описать как дефинициальное расширение рабочей теории множеств, а вопрос, нельзя ли ее представить как семантизацию какой-то формальной теории, обычно вообще не возникает. Это оправдывается тем, что такое представление очень часто, почти всегда бывает чрезвычайно громоздким, а иногда и вовсе невозможным. Вот некоторые примеры таких "трудноупрощаемых" и "неупрощаемых" семантических теорий.

◇ **1.1.26.** Общая топология. *Топологическим пространством* называется всякая пара (M,τ), в которой M — множество, а τ — система подмножеств в M, то есть множество

$$\tau \subseteq 2^M,$$

такое, что выполняются следующие условия, называемые *аксиомами общей топологии*:

$$\varnothing \in \tau, \tag{1.1.103}$$

$$M \in \tau, \tag{1.1.104}$$

$$U,V \in \tau \ \Rightarrow\ U\cap V \in \tau, \tag{1.1.105}$$

$$\mathcal{U} \subseteq \tau \ \Rightarrow\ \cup\,\mathcal{U} \in \tau \tag{1.1.106}$$

Класс таких объектов образует семантическую теорию в MK, называемую *общая топология*. Это очень важная теория в тех частях математики, которые каким-то образом связаны с анализом, но она, по-видимому, не представима как семантизация какой-то формальной теории.

Это был пример, апеллирующий к общематематической эрудиции, а вот еще несколько примеров теорий, описываемых в самом нашем учебнике.

◇ **1.1.27.** Теория вещественных чисел, как семантическая теория, описывается на с.122.

◇ **1.1.28.** Теория векторных пространств, как семантическая теория, описывается на с.675.

◇ **1.1.29.** Теория евклидовых пространств, как семантическая теория, описывается на с.755.

◇ **1.1.30.** Теория инвариантной меры, как семантическая теория, описывается на с.891.

6-я проблема Гильберта. Вопрос о том, можно ли считать данную теорию формальной (или семантической, что, как мы теперь понимаем, эквивалентно), полезно обсуждать не только в математике, но также и (по крайней мере) в тех науках, которые используют математику, но формально не являются ее частью. Это приводит к любопытным и совсем неочевидным (по крайней мере, для неспециалиста по логике) выводам. Разговор об этом удобно начать с упоминания о шестой проблеме Гильберта.

В 1900 году на II Математическом конгрессе Давид Гильберт предложил некий список первоочередных задач математики (так, как он их понимал), и среди них, между прочим, была такая:

аксиоматизировать физику.

Утверждается, что в момент своего выступления Гильберт сформулировал это как одну из 10 задач. Позже он этот список расширил до 23-х, и в нем эта проблема получила номер 6. С тех пор она называется *6-й проблемой Гильберта.*

Во времена, когда она была поставлена, математическая логика еще не оформилась в строгую дисциплину, и, в частности, что следует понимать под аксиоматизацией, еще не было толком понятно. Очевидно, по этой причине до сих пор не существует единого мнения о том, насколько далеко продвинулись математики в решении этой задачи. Мнения сходятся только в том, что даже при самом нетребовательном понимании аксиоматизации, которое можно встретить среди далеких от логики математиков (и, в больше мере, физиков), эту проблему нельзя считать решенной (хотя бы потому что "единой физической теории" пока не построено).

В свете того, что мы уже знаем про аксиоматические теории, задачу, поставленную Гильбертом, можно понимать либо как предписание построить формальную теорию (другими словами, теорию 1 порядка), описывающую законы физики, и на уровне определений не связанную с теорией множеств. Либо как семантическую теорию, то есть дефинициальное расширение какой-нибудь рабочей теории множеств, например, теории MK. По теореме о семантизации 1.1.23 эти два решения будут эквивалентны. С другой стороны, как показывают примеры на с.110, второе из них ближе к традиции, и может считаться более удобным.

Как мы уже говорили, общей для всей физики теории построить не удалось. Однако некоторые конкретные области этой науки можно считать аксиоматизированными, и именно в том смысле, что они описаны ныне как семантические теории. Следующие примеры дают некоторое представление о прогрессе в этой области.

◇ **1.1.31.** Классическая механика может считаться в настоящее время аксиоматизированной, поскольку ее удалось описать как семантическую теорию в современных вариантах Лагранжевой и Гамильтоновой механики.[18]

◇ **1.1.32.** Теория относительности также может считаться аксиоматизированной, поскольку она описывается как семантическая теория, дефинициальное расширение современной дифференциальной геометрии[19] (которая в свою очередь представляет собой дефинициальное расширение теории вещественных чисел[20]).

◇ **1.1.33.** Квантовую механику, по контрасту с предыдущими примерами, к настоящему времени нельзя считать аксиоматизированной, потому что ее пока не удалось описать ни как семантическую теорию, ни тем более как теорию 1 порядка. Отношение нынешних специалистов к этой проблеме иллюстрирует разницу между математическим и физическим образованием: физики, услышав такое, энергично протестуют, ссылаясь на то, что они называют "постулатами Дирака-фон Неймана квантовой механики".

Одна из причин, почему мы подробно обсуждали понятия математической логики в этом параграфе, состояла как раз в том, чтобы дать читателю возможность проверить детали в подобных спорах. Поглядев на рассуждения физиков на эту тему, читатель теперь может сам убедиться, что постулаты Дирака-фон Неймана в том виде, как их описывают в нынешних учебниках по квантовой теории[21] невозможно интерпретировать ни как аксиомы формальной теории (потому что никакая формальная теория в этой науке не описывается), ни как определения в теории операторов на гильбертовом пространстве, по крайней мере, если целью ставится вывод каких-то утверждений о строении или свойствах атомов, молекул или каких-то элементарных частиц (потому что ни атомам, ни молекулам, ни частицам определений в этой теории тоже не дается).

Как следствие, например, таблица Д. И. Менделеева, которая, казалось бы, должна быть первым и главным, о доказательстве чего следовало бы думать в квантовой механике, не является теоремой этой науки. Почему, скажем, на первой электронной оболочке может уместиться только 2 электрона, на второй – 8, на третьей – опять 8, и т.д. – с точки зрения логики остается загадкой (как и другие закономерности в строении атомов).

◇ **1.1.34.** Теория вероятностей представляет собой показательный пример дисциплины, аксиоматизация которой была найдена уже после доклада Гильберта. В 1933 году ее описание как семантической теории (дефинициального расширения теории меры) было дано А. Н. Колмого-

[18] См.: В.И.Арнольд. Математические методы классической механики. М.: Наука, 1974.
[19] См.: А.Бессе. Многообразия Эйнштейна. Т.1,2. М.: Мир, 1990.
[20] Теорию вещественных чисел как дефинициальное расширение теории множеств мы описываем ниже в главе 2.
[21] См., напр., Ф.А.Березин, М.А.Шубин. Уравнение Шредингера. М.: МГУ, 1983.

ровым.[22] Физики не считают эту область своей, объявляя ее частью математики. Мне этот тезис кажется спорным, из-за того, что трудно понять, не является ли он следствием общей для подобных ситуаций закономерности: как только наука получает строгую математическую интерпретацию, она сразу становится частью математики, независимо от того, к какой области ее относили до этого. По этой причине я привожу этот пример в списке физических теорий.

---

§ 2 Другие логические системы

(a) Логика высказываний

Помимо логики предикатов в математике (и еще больше в ее приложениях) очень популярна логическая система, называемая *логикой высказываний.* Она получается из логики предикатов выбрасыванием алфавита, сигнатуры и всего, что с ними связано (включая кванторы). Мы здесь бегло ее опишем, только чтобы оттенить детали, связанные с логикой предикатов. Доказательство утверждений мы оставляем читателю.

Различные аксиоматизации логики высказываний. Как и логику предикатов, логику высказываний можно описывать разными аксиоматическими системами. Мы здесь отметим те, что получаются как модификации систем LK, CQC и G3c. В этих модификациях рассматривается только то, что остается после выбрасывания переменных (а вместе с ними, термов и формул), с сохранением одних обозначений для формул

$$\alpha, \beta, \gamma, ..., \varphi, \chi, \psi, \omega,$$

и их композиций с помощью логических связок

$$\neg\alpha, \quad \alpha \mathbin{\&} \beta, \quad \alpha \vee \beta, \quad \alpha \Rightarrow \beta, \quad \alpha \Leftrightarrow \beta$$

которые называются *пропозициональными формулами* (понятно,что связок может быть много). Число букв, входящих в данную пропозициональную формулу, называется *валентностью* этой формулы.

◇ **1.2.1.** Следующие пропозициональные формулы

$$\alpha$$

$$\neg\alpha$$

$$\alpha \mathbin{\&} \beta,$$

$$(\alpha \vee \beta) \Rightarrow \gamma,$$

$$\alpha \Rightarrow (\alpha \vee \beta)$$

имеют валентности, соответственно, 1,1,2,3,2.

A. *Исчисление высказываний* LKp получается из LK.

- *Аксиома исчисления* LKp одна и такая же как в LK:

$$\text{LKp-0:} \qquad \varphi \vdash \varphi. \tag{1.2.107}$$

- *Правила вывода в исчислении* LKp получаются выбрасыванием из LK правила сечения и правил с кванторами:

  — ослабление:

$$\text{LKp-1:} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta}{\varphi, \Gamma \vdash \Delta} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \Delta, \varphi} \tag{1.2.108}$$

  — сокращение:

$$\text{LKp-2:} \qquad \frac{\varphi, \varphi, \Gamma \vdash \Delta}{\varphi, \Gamma \vdash \Delta} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, \varphi, \varphi}{\Gamma \vdash \Delta, \varphi} \tag{1.2.109}$$

[22] См. A. N. Kolmogorov. Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitrechnung, in Ergebnisse der Mathematik. — Berlin, 1933. Русский перевод: А. Н. Колмогоров. Основные понятия теории вероятностей. — М.: Наука, 1974.

— перестановка:

$$\text{LKp-3:}\qquad \frac{\varphi,\chi,\psi,\Gamma\vdash\Delta}{\varphi,\psi,\chi,\Gamma\vdash\Delta}\qquad\qquad \frac{\Gamma\vdash\Delta,\varphi,\chi,\psi}{\Gamma\vdash\Delta,\chi,\varphi,\psi} \tag{1.2.110}$$

— переброс отрицания:

$$\text{LKp-4:}\qquad \frac{\Gamma\vdash\Delta,\varphi}{\neg\varphi,\Gamma\vdash\Delta}\qquad\qquad \frac{\varphi,\Gamma\vdash\Delta}{\Gamma\vdash\Delta,\neg\varphi} \tag{1.2.111}$$

— пересечение сукцедентов:

$$\text{LKp-5:}\qquad \frac{\Gamma\vdash\Delta,\varphi\qquad \Gamma\vdash\Delta,\chi}{\Gamma\vdash\Delta,\varphi\&\chi} \tag{1.2.112}$$

— добавление в антецеденте:

$$\text{LKp-6:}\qquad \frac{\varphi,\Gamma\vdash\Delta}{\varphi\&\chi,\Gamma\vdash\Delta}\qquad\qquad \frac{\varphi,\Gamma\vdash\Delta}{\chi\&\varphi,\Gamma\vdash\Delta} \tag{1.2.113}$$

— объединение в антецеденте:

$$\text{LKp-7:}\qquad \frac{\varphi,\Gamma\vdash\Delta\qquad \chi,\Gamma\vdash\Delta}{\varphi\vee\chi,\Gamma\vdash\Delta} \tag{1.2.114}$$

— добавление в сукцеденте:

$$\text{LKp-8:}\qquad \frac{\Gamma\vdash\Delta,\varphi}{\Gamma\vdash\Delta,\varphi\vee\chi}\qquad\qquad \frac{\Gamma\vdash\Delta,\varphi}{\Gamma\vdash\Delta,\chi\vee\varphi} \tag{1.2.115}$$

— объединение с импликацией:

$$\text{LKp-9:}\qquad \frac{\Gamma\vdash\Delta,\varphi\quad \chi,\Pi\vdash\Lambda}{\varphi\Rightarrow\chi,\Gamma,\Pi\vdash\Delta,\Lambda} \tag{1.2.116}$$

— перенос с импликацией в сукцедент:

$$\text{LKp-10:}\qquad \frac{\varphi,\Gamma\vdash\Delta,\chi}{\Gamma\vdash\Delta,\varphi\Rightarrow\chi} \tag{1.2.117}$$

B) *Исчисление высказываний* CQCp получается из CQC тем же приемом.

- *Аксиомами исчисления* CQCp называются следующие формулы:

$$\text{CQCp}-1:\qquad \varphi\Rightarrow(\chi\Rightarrow\varphi) \tag{1.2.118}$$
$$\text{CQCp}-2:\qquad (\varphi\Rightarrow(\chi\Rightarrow\psi))\Rightarrow((\varphi\Rightarrow\chi)\Rightarrow(\varphi\Rightarrow\psi)) \tag{1.2.119}$$
$$\text{CQCp}-3:\qquad (\varphi\ \&\ \chi)\Rightarrow\varphi \tag{1.2.120}$$
$$\text{CQCp}-4:\qquad (\varphi\ \&\ \chi)\Rightarrow\chi \tag{1.2.121}$$
$$\text{CQCp}-5:\qquad \varphi\Rightarrow(\chi\Rightarrow(\varphi\Rightarrow\chi)) \tag{1.2.122}$$
$$\text{CQCp}-6:\qquad \varphi\Rightarrow(\varphi\ \vee\ \chi) \tag{1.2.123}$$
$$\text{CQCp}-7:\qquad \chi\Rightarrow(\varphi\ \vee\ \chi) \tag{1.2.124}$$
$$\text{CQCp}-8:\qquad (\varphi\Rightarrow\psi)\Rightarrow((\chi\Rightarrow\psi)\Rightarrow((\varphi\ \vee\ \chi)\Rightarrow\psi)) \tag{1.2.125}$$
$$\text{CQCp}-9:\qquad (\neg\varphi)\Rightarrow(\varphi\Rightarrow\chi) \tag{1.2.126}$$
$$\text{CQCp}-10:\qquad (\varphi\Rightarrow\chi)\Rightarrow((\varphi\Rightarrow(\neg\chi))\Rightarrow(\neg\varphi)) \tag{1.2.127}$$
$$\text{CQCp}-11:\qquad \varphi\vee(\neg\varphi) \tag{1.2.128}$$

- *Правилом вывода* в исчислении CQCp считается

modus ponens: если выводимы формулы φ и $\varphi\Rightarrow\psi$, то выводима формула ψ; это изображается дробью

$$\frac{\varphi,\ \varphi\Rightarrow\psi}{\psi} \tag{1.2.129}$$

C) *Исчисление высказываний* G3cp получается из G3c так же.

Напомними, что в языке этой системы добавляются два символа: символ $\bot$, означающий “абстрактную ложь”, и символ $\top$, означающий “абстрактную истину”. Кроме того, отрицание $\neg\alpha$ понимается как сокращение для формулы $\alpha \Rightarrow \bot$, а эквивалентность $\alpha \Leftrightarrow \beta$ как сокращение формулы $(\alpha \Rightarrow \beta)\ \&\ (\beta \Rightarrow \alpha)$.

- *Аксиомами* исчисления G3cp считаются следующие три вида секвенций:

$$\varGamma, \bot \vdash \varDelta \qquad\qquad \varGamma, \varphi \vdash \varphi, \varDelta \qquad\qquad \varGamma \vdash \top, \varDelta. \tag{1.2.130}$$

- *Правила вывода* в исчислении G3cp такие:

$$\frac{\varGamma, \varphi, \chi \vdash \varDelta}{\varGamma, \varphi\ \&\ \chi \vdash \varDelta} \qquad\qquad \frac{\varGamma \vdash \varphi, \varDelta \quad \varGamma \vdash \chi, \varDelta}{\varGamma \vdash \varphi\ \&\ \chi, \varDelta} \tag{1.2.131}$$

$$\frac{\varGamma, \varphi \vdash \varDelta \quad \varGamma, \chi \vdash \varDelta}{\varGamma, \varphi \vee \chi \vdash \varDelta} \qquad\qquad \frac{\varGamma \vdash \varphi, \chi, \varDelta}{\varGamma \vdash \varphi \vee \chi, \varDelta} \tag{1.2.132}$$

$$\frac{\varGamma \vdash \varphi, \varDelta \quad \varGamma, \chi \vdash \varDelta}{\varGamma, \varphi \Rightarrow \chi \vdash \varDelta} \qquad\qquad \frac{\varGamma, \varphi \vdash \chi, \varDelta}{\varGamma \vdash \varphi \Rightarrow \chi, \varDelta} \tag{1.2.133}$$

Эквивалетность исчислений высказываний. Описанные выше исчисления LKp, CQCp и G3cp эквивалентны. Мы приведем несколько примеров, иллюстрирующих эту эквивалентность, а полную проверку мы оставляем читателю.

◇ **1.2.2.** Вывод формулы (1.2.118) в LKp будет таким:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\varphi \vdash \varphi}{\chi, \varphi \vdash \varphi}{\scriptstyle (1.2.108)}}{\varphi \vdash \chi \Rightarrow \varphi}{\scriptstyle (1.2.117)}}{\vdash \varphi \Rightarrow (\chi \Rightarrow \varphi)}{\scriptstyle (1.2.117)}$$

◇ **1.2.3.** Вывод формулы (1.2.119) в LKp будет таким:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\varphi \vdash \varphi \qquad \dfrac{\dfrac{\varphi \vdash \varphi \qquad \dfrac{\chi \vdash \chi \quad \psi \vdash \psi}{\chi \Rightarrow \psi, \chi \vdash \psi}{\scriptstyle (1.2.116)}}{\varphi \Rightarrow (\chi \Rightarrow \psi), \varphi, \chi \vdash \psi}{\scriptstyle (1.2.116)}}{\chi, \varphi, \varphi \Rightarrow (\chi \Rightarrow \psi) \vdash \psi}{\scriptstyle (1.2.110)}}{\varphi \Rightarrow \chi, \varphi, \varphi, \varphi \Rightarrow (\chi \Rightarrow \psi) \vdash \psi}{\scriptstyle (1.2.116)}}{\varphi \Rightarrow \chi, \varphi, \varphi \Rightarrow (\chi \Rightarrow \psi) \vdash \psi}{\scriptstyle (1.2.109)}}{\varphi, \varphi \Rightarrow \chi, \varphi \Rightarrow (\chi \Rightarrow \psi) \vdash \psi}{\scriptstyle (1.2.110)}}{\varphi \Rightarrow \chi, \varphi \Rightarrow (\chi \Rightarrow \psi) \vdash \varphi \Rightarrow \psi}{\scriptstyle (1.2.117)}}{\varphi \Rightarrow (\chi \Rightarrow \psi) \vdash (\varphi \Rightarrow \chi) \Rightarrow (\varphi \Rightarrow \psi)}{\scriptstyle (1.2.117)}}{\vdash (\varphi \Rightarrow (\chi \Rightarrow \psi)) \Rightarrow ((\varphi \Rightarrow \chi) \Rightarrow (\varphi \Rightarrow \psi))}{\scriptstyle (1.2.117)}$$

Выводимость в логике высказываний. В отличие от логики предикатов, в логике высказываний имеется (и очень простой) алгоритм, позволяющий понять, выводима данная секвенция, или нет. Он состоит в том, чтобы строить дерево Генцена в исчислении G3cp: как может заметить читатель, в правилах G3cp нет таких, которые позволяют дереву расти бесконечно высоко, и поэтому на каком-то конечном шаге построение должно обязательно закончиться. Если на вершинах при этом окажутся аксиомы, то полученное дерево будет выводом, а исходная секвенция будет выводимой. Если же на какой-то вершине будет не аксиома, то это будет означать, что полученное дерево – не вывод, а исходная секвенция невыводима. Приведем пример.

◇ **1.2.4.** Рассмотрим секвенцию

$$\vdash (\alpha \Rightarrow \beta) \Rightarrow (\alpha \Rightarrow \gamma)$$

Для нее дерево Генцена в G3cp будет таким:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\alpha \vdash \alpha, \gamma}{\vdash \alpha, \alpha \Rightarrow \gamma}{\scriptstyle (1.2.133)} \qquad \dfrac{\beta, \alpha \vdash \gamma}{\beta \vdash \alpha \Rightarrow \gamma}{\scriptstyle (1.2.133)}}{\alpha \Rightarrow \beta \vdash \alpha \Rightarrow \gamma}{\scriptstyle (1.2.133)}}{\vdash (\alpha \Rightarrow \beta) \Rightarrow (\alpha \Rightarrow \gamma)}{\scriptstyle (1.2.133)}$$

Видно, что на вершине справа стоит не аксиома, поэтому такая секвенция невыводима.

▷▷ **1.2.5.** Проверьте выводимость следующих формул в исчислении высказываний:

$$(\alpha \Rightarrow \beta)\ \&\ (\alpha \Rightarrow \neg\beta)$$
$$(\alpha \Rightarrow \beta) \vee (\alpha \Rightarrow \neg\beta)$$
$$(\alpha \Rightarrow \beta)\ \&\ (\neg\beta \Rightarrow \neg\alpha)$$
$$(\alpha \Rightarrow \beta) \Rightarrow (\neg\beta \Rightarrow \neg\alpha)$$
$$\Big((\alpha \Rightarrow \beta)\ \&\ \neg\beta\Big) \Rightarrow \neg\alpha$$

$\Big((\alpha \vee \beta) \Rightarrow \gamma\Big) \ \vee \ \alpha \ \vee \ \beta$

$(\alpha \vee \beta) \ \& \ (\neg\alpha \ \& \ \neg\beta)$

$\Big(\alpha \Rightarrow (\beta \vee \gamma)\Big) \ \vee \ (\gamma \Rightarrow \neg\alpha)$

$\Big(\alpha \Rightarrow (\beta \Rightarrow \gamma)\Big) \Rightarrow \Big((\alpha \Rightarrow \beta) \Rightarrow (\alpha \Rightarrow \gamma)\Big)$

$\Big(\alpha \Rightarrow (\beta \Rightarrow \gamma)\Big) \Rightarrow \Big((\alpha \Rightarrow \beta) \Rightarrow (\gamma \Rightarrow \alpha)\Big)$

$(\alpha \vee \beta) \ \& \ \Big(\alpha \Rightarrow (\beta \ \& \ \gamma)\Big) \ \& \ \Big(\beta \Rightarrow (\alpha \ \& \ \neg\gamma)\Big)$

Теорема о полноте для логики высказываний. Каждой пропозициональной формуле валентности n можно поставить в соответствие некое отображение $f : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$, называемой *функцией истинности* по следующему алгоритму:

1) для формулы не содержащей ни одной логической связки

$$\alpha$$

соответствующая функция истинности $f : \{0,1\} \to \{0,1\}$ определяется равенством

$$f(\alpha) = \alpha$$

(на переменную α здесь нужно глядеть как на элемент множества $\{0,1\}$),

2) для формулы

$$\neg\alpha$$

соответствующая функция истинности $f : \{0,1\} \to \{0,1\}$ обозначается тем же символом $\neg$ и определяется равенством

$$f(\alpha) = \neg\alpha = \begin{cases} 1, & \alpha = 0 \\ 0, & \alpha = 1 \end{cases}$$

3) для формулы

$$\alpha \ \& \ \beta$$

соответствующая функция истинности $f : \{0,1\}^2 \to \{0,1\}$ обозначается тем же символом & и определяется равенством

$$f(\alpha,\beta) = \alpha \ \& \ \beta = \begin{cases} 1, & \alpha = 1 \text{ и } \beta = 1 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

4) для формулы

$$\alpha \vee \beta$$

соответствующая функция истинности $f : \{0,1\}^2 \to \{0,1\}$ обозначается тем же символом $\vee$ и определяется равенством

$$f(\alpha,\beta) = \alpha \vee \beta = \begin{cases} 0, & \alpha = 0 \text{ и } \beta = 0 \\ 1, & \text{иначе} \end{cases}$$

5) для формулы

$$\alpha \Rightarrow \beta$$

соответствующая функция истинности $f : \{0,1\}^2 \to \{0,1\}$ обозначается тем же символом $\Rightarrow$ и определяется равенством

$$f(\alpha,\beta) = \alpha \Rightarrow \beta = \begin{cases} 0, & \alpha = 1 \text{ и } \beta = 0 \\ 1, & \text{иначе} \end{cases}$$

6) для формулы

$$\alpha \Leftrightarrow \beta$$

соответствующая функция истинности $f : \{0,1\}^2 \to \{0,1\}$ обозначается тем же символом $\Leftrightarrow$ и определяется равенством

$$f(\alpha,\beta) = \alpha \Leftrightarrow \beta = \begin{cases} 1, & (\alpha = 1 \text{ и } \beta = 1) \text{ или } (\alpha = 0 \text{ и } \beta = 0) \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}.$$

7) для остальных пропозициональных формул булевы функции строятся как композиции уже описанных.

◇ **1.2.6.** Описанный алгоритм позволяет ко всякой формуле в исчислении высказываний относиться как к булевой функции. Например, для формулы

$$(\alpha \vee \beta) \Rightarrow \gamma \tag{1.2.134}$$

соответствующая функция истинности

$$f(\alpha,\beta,\gamma) = (\alpha \vee \beta) \Rightarrow \gamma,$$

на аргументах $\alpha = 1$, $\beta = 0$, $\gamma = 0$ принимает значение

$$f(1,0,0) = (1 \vee 0) \Rightarrow 0 = 1 \Rightarrow 0 = 0.$$

Следующий результат считается главным в логике высказываний:

Теорема 1.2.1 (полнота исчисления высказываний)**.** [23] *Выводимость пропозициональной формулы в исчислении высказываний эквивалентна тождественному равенству единице ее булевой функции.*

◇ **1.2.7.** Например, рассмотренная выше формула (1.2.134)

$$(\alpha \vee \beta) \Rightarrow \gamma$$

– невыводима, потому что, как мы уже отмечали в примере 1.2.6, ее функция истинности

$$f(\alpha,\beta,\gamma) = (\alpha \vee \beta) \Rightarrow \gamma,$$

равну нулю на значениях $\alpha = 1$, $\beta = 0$, $\gamma = 0$.

◇ **1.2.8.** Вспомним, что в примере 1.2.4 мы доказали невыводимость формулы

$$(\alpha \Rightarrow \beta) \Rightarrow (\alpha \Rightarrow \gamma)$$

Соответствующее дерево Генцена в $\mathsf{G3cp}$ выглядело так:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\alpha \vdash \alpha,\gamma}{\vdash \alpha, \alpha \Rightarrow \gamma}(1.2.133) \qquad \dfrac{\beta,\alpha \vdash \gamma}{\beta \vdash \alpha \Rightarrow \gamma}(1.2.133)}{\alpha \Rightarrow \beta \vdash \alpha \Rightarrow \gamma}(1.2.133)}{\vdash (\alpha \Rightarrow \beta) \Rightarrow (\alpha \Rightarrow \gamma)}(1.2.133)$$

По этому дереву можно сразу понять, при каких аргументах функция истинности для нашей формулы

$$f(\alpha,\beta,\gamma) = (\alpha \Rightarrow \beta) \Rightarrow (\alpha \Rightarrow \gamma)$$

будет обращаться в нуль: для этого надо рассмотреть вершину дерева, не являющуюся аксиомой, в данном случае, правую вершину,

$$\beta, \alpha \vdash \gamma$$

и переменные, слева от символа секвенции, положить равными единице

$$\beta = 1, \qquad \alpha = 1,$$

а переменные справа — равными нулю:

$$\gamma = 0.$$

На этих значениях мы получим

$$f(1,1,0) = (1 \Rightarrow 1) \Rightarrow (1 \Rightarrow 0) = 1 \Rightarrow 0 = 0.$$

▷▷ **1.2.9.** Постройте функции истинности для примеров из упражнений 1.2.5 и, в случае, если формула невыводима, подберите значения переменных для ее функции истинности, на которых она принимает нулевое значение.

(b) Интуиционистская логика

Довольно неожиданно, что одно небольшое изменение в правилах исчисления LK ведет к системе, которая, как оказывается, формализует знаменитую интуиционистскую логику, пропагандировавшуюся математиками Яном Брауэром, Германом Вейлем и Арендом Гейтингом в первой половине 20 века в качестве альтернативы гильбертовскому формализму (и расселовскому логицизму). Свои взгляды интуиционисты описывали довольно невнятно, до тех пор, пока в 1930-х годах Генцен не

[23] P.T.Johnstone, Notes on logic and set theory, 1987 (Proposition 3.7, Theorem 2.6).

заметил, как их философия может быть формализована исчислением секвенций. Соответствующую систему он обозначил аббревиатурой LJ (в которой буква “J” означает интуиционизм), и от системы LK она отличается только тем, что в ее правилах *сукцеденты всех секвенций могут содержать не более одной формулы.* Мы приведем правила системы LJ, а также правила соответствующей логики высказываний LJp (которая тоже меняется в соответствии с общим принципом “не более одной формулы в сукцеденте”).

Интуиционистская логика предикатов. Вот правила интуиционистской логики предикатов LJ (здесь φ, χ, ψ, ω — произвольные формулы, а $\mathit{\Gamma}$, $\mathit{\Pi}$ — произвольные наборы формул)[24]:

a. Структурные правила:

— ослабление:

$$\text{LJ-1:} \qquad \frac{\mathit{\Gamma} \vdash \omega}{\varphi, \mathit{\Gamma} \vdash \omega} \qquad \frac{\mathit{\Gamma} \vdash}{\mathit{\Gamma} \vdash \varphi} \tag{1.2.135}$$

— сокращение:

$$\text{LJ-2:} \qquad \frac{\varphi, \varphi, \mathit{\Gamma} \vdash \omega}{\varphi, \mathit{\Gamma} \vdash \omega} \tag{1.2.136}$$

— перестановка:

$$\text{LJ-3:} \qquad \frac{\varphi, \chi, \psi, \mathit{\Gamma} \vdash \omega}{\varphi, \psi, \chi, \mathit{\Gamma} \vdash \omega} \tag{1.2.137}$$

— сечение:

$$\text{LJ-4:} \qquad \frac{\mathit{\Gamma} \vdash \varphi \quad \varphi, \mathit{\Pi} \vdash \omega}{\mathit{\Gamma}, \mathit{\Pi} \vdash \omega} \tag{1.2.138}$$

b. Правила введения логических связок:

— переброс отрицания:

$$\text{LJ-5:} \qquad \frac{\mathit{\Gamma} \vdash \varphi}{\neg \varphi, \mathit{\Gamma} \vdash} \qquad \frac{\varphi, \mathit{\Gamma} \vdash}{\mathit{\Gamma} \vdash \neg \varphi} \tag{1.2.139}$$

— конъюнкция в сукцеденте:

$$\text{LJ-6:} \qquad \frac{\mathit{\Gamma} \vdash \varphi \qquad \mathit{\Gamma} \vdash \chi}{\mathit{\Gamma} \vdash \varphi \& \chi} \tag{1.2.140}$$

— добавление в антецеденте:

$$\text{LJ-7:} \qquad \frac{\varphi, \mathit{\Gamma} \vdash \omega}{\varphi \& \chi, \mathit{\Gamma} \vdash \omega} \qquad \frac{\varphi, \mathit{\Gamma} \vdash \omega}{\chi \& \varphi, \mathit{\Gamma} \vdash \omega} \tag{1.2.141}$$

— дизъюнкция в антецеденте:

$$\text{LJ-8:} \qquad \frac{\varphi, \mathit{\Gamma} \vdash \omega \qquad \chi, \mathit{\Gamma} \vdash \omega}{\varphi \vee \chi, \mathit{\Gamma} \vdash \omega} \tag{1.2.142}$$

— добавление в сукцеденте:

$$\text{LJ-9:} \qquad \frac{\mathit{\Gamma} \vdash \varphi}{\mathit{\Gamma} \vdash \varphi \vee \chi} \qquad \frac{\mathit{\Gamma} \vdash \varphi}{\mathit{\Gamma} \vdash \chi \vee \varphi} \tag{1.2.143}$$

— перенос с импликацией в антецедент:

$$\text{LJ-10:} \qquad \frac{\mathit{\Gamma} \vdash \varphi \quad \chi, \mathit{\Pi} \vdash \omega}{\varphi \Rightarrow \chi, \mathit{\Gamma}, \mathit{\Pi} \vdash \omega} \tag{1.2.144}$$

— перенос с импликацией в сукцедент:

$$\text{LJ-11:} \qquad \frac{\varphi, \mathit{\Gamma} \vdash \chi}{\mathit{\Gamma} \vdash \varphi \Rightarrow \chi} \tag{1.2.145}$$

[24] Читатель может заметить, что среди правил LJ отсутствуют сокращение справа и перестановка справа, поскольку требование “не более одной формулы в сукцеденте” не оставляет им места.

— добавление квантора всеобщности в антецедент: если подстановка $\varphi\big|_{x=\tau}$ корректна[25] (здесь x — переменная, а τ – терм), то

$$\text{LJ-12:}^{*} \qquad \frac{\varphi\big|_{x=\tau}, \varGamma \vdash \omega}{\forall x\, \varphi, \varGamma \vdash \omega} \tag{1.2.146}$$

— добавление квантора всеобщности в сукцедент: если переменная y не входит (как свободная переменная) в нижнюю секвенцию (то есть в наборы формул $\varGamma$, ω, $\forall x\, \varphi$), то

$$\text{LJ-13:} \qquad \frac{\varGamma \vdash \varphi\big|_{x=y}}{\varGamma \vdash \forall x\, \varphi} \tag{1.2.147}$$

— добавление квантора существования в антецедент: если переменная y не входит (как свободная переменная) в нижнюю секвенцию (то есть в наборы формул $\exists x\, \varphi$, $\varGamma$, ω), то

$$\text{LJ-14:} \qquad \frac{\varphi\big|_{x=y}, \varGamma \vdash \omega}{\exists x\, \varphi, \varGamma \vdash \omega} \tag{1.2.148}$$

— добавление квантора существования в сукцедент: если подстановка $\varphi\big|_{x=\tau}$ корректна[26] (здесь x — переменная, а τ – терм), то

$$\text{LJ-15:}^{*} \qquad \frac{\varGamma \vdash \varphi\big|_{x=\tau}}{\varGamma \vdash \exists x\, \varphi} \tag{1.2.149}$$

◇ **1.2.10.** Вспомним **закон исключенного третьего**, о котором мы говорили в примере 0.2.26, и который в исчислении LK представляет собой утверждение о выводимости секвенции

$$\vdash \alpha \vee \neg\alpha. \tag{1.2.150}$$

По контрасту с LK, в исчислении LJ эта секвенция не выводима (и это одна из причин, почему считается, что исчисление LJ формализует интуиционистскую логику).

Во-первых, нужно заметить, что рассуждение, использовавшееся в примере 0.2.26, здесь не проходит, потому что там сукцедент состоял из двух формул, а в LJ такое запрещено. А, во-вторых, среди правил вывода LJ-1—LJ-15 есть только одно, содержащее логическую связку $\vee$ в сукцеденте, а именно, LJ-9[27], и если с его помощью пытаться достроить дерево вверх, то мы получим либо дерево

$$\frac{\vdash \alpha}{\vdash \alpha \vee \neg\alpha}\,{\scriptstyle(1.2.143)} \tag{1.2.151}$$

либо дерево

$$\frac{\vdash \neg\alpha}{\vdash \alpha \vee \neg\alpha}\,{\scriptstyle(1.2.143)} \tag{1.2.152}$$

Первое из них можно превратить в вывод, если подклеить к нему сверху вывод секвенции

$$\vdash \alpha$$

(а для этого нужно, чтобы такой вывод существовал), а второе точно так же можно превратить в вывод, если подклеить к нему сверху вывод секвенции

$$\vdash \neg\alpha$$

(а для этого нужно, чтобы такой вывод существовал). Но если ни одна из этих секвенций не выводима (например, если формула α атомарна, и ни α, ни $\neg\alpha$ не входят в систему аксиом), то ни (1.2.151), ни (1.2.152) в вывод не превратишь.

Это значит, что секвенция (1.2.150) не выводима в LJ (по крайней мере) для атомарных формул α, таких, что ни α, ни $\neg\alpha$ не входят в аксиомы теории. Иными словами, *если в теории над исчислением LJ существует хотя бы одна атомарная формула α, такая, что ни α, ни $\neg\alpha$ не входят в систему ее аксиом, то в этой теории секвенция* (1.2.150) *не выводима.*

---

[25] Определение корректной подстановки дано на с. 8.

[26] См. определение на с. 8.

[27] В исчислении LK это рассуждение не работает, потому что там по правилу LK-2 можно, двигаясь вверх по дереву, формулы в сукцеденте множить, что в LJ невозможно.

Интуиционистская логика высказываний. Логика высказываний в интуиционистской теории также претерпевает изменения. Возникающая в результате система LJp отличается от системы LKp (которую мы описывали на с.112) тем, что в LJp каждый сукцедент, в соответствии с общим принципом LJ, может иметь не более одной формулы (или, эквивалентно, LJp можно получить из LJ выбросив правило сечения и правила с кванторами). Вот правила этой системы (φ, χ, ψ, ω — произвольные формулы, а $\varGamma$, $\varPi$ — произвольные наборы формул):

— ослабление:

$$\text{LJp-1:} \qquad \frac{\varGamma \vdash \omega}{\varphi, \varGamma \vdash \omega} \qquad \frac{\varGamma \vdash}{\varGamma \vdash \varphi} \tag{1.2.153}$$

— сокращение:

$$\text{LJp-2:} \qquad \frac{\varphi, \varphi, \varGamma \vdash \omega}{\varphi, \varGamma \vdash \omega} \tag{1.2.154}$$

— перестановка:

$$\text{LJp-3:} \qquad \frac{\varphi, \chi, \psi, \varGamma \vdash \omega}{\varphi, \psi, \chi, \varGamma \vdash \omega} \tag{1.2.155}$$

— переброс отрицания:

$$\text{LJp-4:} \qquad \frac{\varGamma \vdash \varphi}{\neg\varphi, \varGamma \vdash} \qquad \frac{\varphi, \varGamma \vdash}{\varGamma \vdash \neg\varphi} \tag{1.2.156}$$

— пересечение сукцедентов:

$$\text{LJp-5:} \qquad \frac{\varGamma \vdash \varphi \qquad \varGamma \vdash \chi}{\varGamma \vdash \varphi \& \chi} \tag{1.2.157}$$

— добавление в антецеденте:

$$\text{LJp-6:} \qquad \frac{\varphi, \varGamma \vdash \omega}{\varphi \& \chi, \varGamma \vdash \omega} \qquad \frac{\varphi, \varGamma \vdash \omega}{\chi \& \varphi, \varGamma \vdash \omega} \tag{1.2.158}$$

— объединение в антецеденте:

$$\text{LJp-7:} \qquad \frac{\varphi, \varGamma \vdash \omega \qquad \chi, \varGamma \vdash \omega}{\varphi \vee \chi, \varGamma \vdash \omega} \tag{1.2.159}$$

— добавление в сукцеденте:

$$\text{LJp-8:} \qquad \frac{\varGamma \vdash \varphi}{\varGamma \vdash \varphi \vee \chi} \qquad \frac{\varGamma \vdash \varphi}{\varGamma \vdash \chi \vee \varphi} \tag{1.2.160}$$

— объединение с импликацией:

$$\text{LJp-9:} \qquad \frac{\varGamma \vdash \varphi \quad \chi, \varPi \vdash \omega}{\varphi \Rightarrow \chi, \varGamma, \varPi \vdash \omega} \tag{1.2.161}$$

— перенос с импликацией в сукцедент:

$$\text{LJp-10:} \qquad \frac{\varphi, \varGamma \vdash \chi}{\varGamma \vdash \varphi \Rightarrow \chi} \tag{1.2.162}$$

Часть II

ФУНКЦИИ ОДНОЙ ВЕЩЕСТВЕННОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Глава 2

ВЕЩЕСТВЕННЫЕ ЧИСЛА

Понятие вещественного числа является естественным развитием идеи *измерения по эталону*, уходящей корнями в глубокую древность и опирающейся на следующие два фундаментальных допущения.

1. Первое из них — *возможность сравнивать с эталоном* — заключается в том, что *среди значений физической величины можно выбирать эталонные*, то есть такие, которыми можно (в целых числах) оценивать все остальные значения этой величины. Например, имея эталон длины – метр – можно длину x любого физического тела оценивать в метрах (то есть найти, сколько метров в этой длине укладывается, а сколько – нет):
$$k \leqslant x < k+1.$$
При этом важно, что организовать методы измерения можно так, чтобы результаты не зависели от попыток.

2. Второе же — *возможность измельчения эталона* — предполагает, что *любой эталон можно делить на равные части (точнее, на произвольное фиксированное число равных частей), которые также можно принимать за эталоны.* Из этого принципа следует, что мы можем поделить наш исходный эталон длины, скажем, на 10 равных частей, принять их длины за новые эталоны, и после этого поглядеть, не войдут ли в оставшуюся часть длины $x-k$ (куда уже не входит наш исходный эталон) новые, меньшие эталоны:
$$\frac{l}{10} \leqslant x-k < \frac{l+1}{10}.$$
Так мы получим уже оценку в десятых долях эталона (то есть можно будет сказать, сколько десятых долей эталона укладывается в величине, которую мы измеряем):
$$k+\frac{l}{10} \leqslant x < k+\frac{l+1}{10}$$

Поскольку (согласно второму допущению) измельчать эталон можно сколь угодно долго, мы получаем, что физическую величину x можно оценивать сверху и снизу рациональными числами (количеством долей эталона)
$$\frac{m}{n} \leqslant x < \frac{m+1}{n},$$
причем с любой точностью (то есть так, чтобы числа $\frac{m}{n}$ и $\frac{m+1}{n}$ отличались друг от друга как угодно мало). В этом состоит применяемый в естествознании *алгоритм измерения физической величины по эталону*, и интерпретировать его удобнее всего, как приближение к некоему идеальному значению, изначально имеющемуся у данной измеряемой величины x.

Разумеется, не всякая физическая величина допускает измерение по эталону так, как мы это описали. Например, у векторных величин (таких, как скорость или сила) оценивать при измерении необходимо не одну, а сразу несколько числовых характеристик (скажем, проекции данной величины на заранее выбранные координатные оси), а у целочисленных величин (таких, как количество однотипных предметов в данном объеме пространства) допущение о делимости эталонов не будет справедливым. Более того, развитие физики показало, что даже для величин, измерение которых традиционно организуется именно сравнением с эталоном (таких как длина, масса или объем), деление эталона тоже не может быть бесконечным, потому что, когда Вы доходите до планковских размеров, дальнейшее деление утрачивает смысл (то есть попросту становится непонятно, что значит делить дальше).

Тем не менее, вера в эти принципы (или, точнее сказать, невозможность на данном этапе развития науки заменить их чем-то более эффективным) приводит к тому, что физическая величина представляется такой, что ее можно с любой точностью оценивать рациональными числами в эталонных единицах измерения. Само по себе это еще не означает, что значения физической величины должны непременно описываться вещественными числами, какими их изображают в математическом анализе (дело в том, что в математике имеются альтернативные теории, например, «нестандартный анализ», где числа описываются иначе). Но при некоторых дополнительных предположениях, в частности, что величины могут быть отрицательными, и что в качестве эталона можно выбирать любое ненулевое значение физической величины, математическая теория, формализующая идею измерения по эталону, оказывается единственной, и ее аксиоматика выглядит следующим образом.

§ 1 Вещественные числа и числовые множества

В математике имеется три главных способа объяснить, что такое число:

1) построить формальную теорию[1] чисел (наподобие теории множеств, но не связанную с ней),
2) описать теорию чисел абстрактно, как дефинициальное расширение[2] рабочей теории множеств,
3) построить явную конструкцию числа в рабочей теории множеств.

Смысл того, что представляет из себя первый способ, можно понять по примеру 1.1.5 на странице 84, в котором описывалась формальная теория Пеано натуральных чисел. Мы это не обсуждаем в тексте, но по аналогии с теорией Пеано можно построить формальную теорию вещественных чисел (с другими аксиомами). Недостаток такого подхода, однако, в том, что для привязки к остальной математике получаемую теорию все равно приходится интерпретировать в теории множеств, а это делает вообще излишним построение теории чисел как формальной теории.

Второй способ можно считать самым удобным, потому что он избавляет зрителя от необходимости следить за громоздкими деталями, которые нигде, кроме самых первых утверждений этой теории, не используются. Но у него есть важный недостаток: доказательство, что описываемая в этой теории конструкция (множество вещественных чисел $\mathbb{R}$) действительно существует (то есть ее существование вытекает из аксиом рабочей теории множеств), нужно проводить отдельно, и это приводит нас к третьему способу.

Третий способ состоит в том, чтобы строить числа прямиком из аксиом рабочей теории множеств, так, чтобы их существование (внутри теории множеств) не вызывало сомнений.

Оба последних способа, второй и третий, мы описываем в этой главе (второй – на с.122, а третий на с.126).

(a) Вещественные числа $\mathbb{R}$ как семантическая теория

Вот как выглядит описание теории вещественных чисел как семантической теории (точнее, как дефинициального расширение теории множеств MK).

Аксиомы теории вещественных чисел. Под *моделью вещественных чисел*, понимается произвольная шестерка[3] $(\mathbb{R}, 0, 1, +, \cdot, \leqslant)$, в которой $\mathbb{R}$ — некое множество, элементы которого называются *вещественными числами*, 0 и 1 — его элементы, $+$ и $\cdot$ — отображения $\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, называемые соответственно *сложением* и *умножением*, а $\leqslant$ — бинарное отношение, называемая *порядком*, такие что выполняются следующие две группы требований I и II.

I. Арифметические операции над вещественными числами

`A1.` **Коммутативность сложения:** для любых чисел a и b выполняется равенство

$$a + b = b + a \tag{2.1.1}$$

[1]Что такое формальная теория мы объясним на с.79.
[2]Понятие дефинициального расширения было введено на с.89.
[3]Понятие шестерки (строки длины 6) было введено на с.73.

A2. **Ассоциативность сложения:** для любых чисел a, b и c выполняется равенство

$$(a+b)+c = a+(b+c) \tag{2.1.2}$$

A3. **Коммутативность умножения:** для любых чисел a и b выполняется равенство

$$a\cdot b = b\cdot a \tag{2.1.3}$$

A4. **Ассоциативность умножения:** для любых чисел a и b выполняется равенство

$$(a\cdot b)\cdot c = a\cdot (b\cdot c) \tag{2.1.4}$$

A5. **Дистрибутивность:** для любых чисел a, b, c выполняется равенство

$$(a+b)\cdot c = a\cdot c + b\cdot c \tag{2.1.5}$$

A6. **Существование нуля:** существует число 0 такое, что

$$a+0=a \tag{2.1.6}$$

A7. **Существование противоположного числа:** для любого числа a существует такое число $-a$ (называемое *противоположным числом* к числу a) что

$$a+(-a)=0 \tag{2.1.7}$$

A8. **Существование единицы:** существует число $1\neq 0$ такое, что для любого числа $a\neq 0$ справедливо равенство

$$a\cdot 1 = a \tag{2.1.8}$$

A9. **Существование обратного числа:** для любого числа $a\neq 0$ существует такое число a^{-1} (называемое *обратным числом* к числу a), что

$$a\cdot a^{-1} = 1 \tag{2.1.9}$$

II. Сравнение вещественных чисел

Для любых вещественных чисел a и b имеет смысл высказывание «a меньше, либо равно b», записываемое $a\leqslant b$. Оно может быть верно или неверно, но при этом выполняются следующие правила.

A10. **Рефлексивность:** для любого числа a справедливо $a\leqslant a$.

A11. **Транзитивность:** если $a\leqslant b$ и $b\leqslant c$, то $a\leqslant c$.

A12. **Антисимметричность:** если $a\leqslant b$ и $b\leqslant a$, то $a=b$.

A13. **Линейность:** для любых чисел a и b
- либо $a\leqslant b$;
- либо $b\leqslant a$.

A14. **Монотонность сложения:** если $a\leqslant b$, то для любого c справедливо $a+c\leqslant b+c$.

A15. **Сохранение знака + при умножении:** если $0\leqslant a$ и $0\leqslant b$, то $0\leqslant a\cdot b$.

A16. **Непрерывность вещественной прямой:** пусть X и Y – два непустых множества вещественных чисел, причем для любых чисел $x\in X$ и $y\in Y$ выполняется неравенство $x\leqslant y$; тогда существует хотя бы одно число c такое, что для любых $x\in X$ и $y\in Y$ выполняется неравенство $x\leqslant c\leqslant y$.

- Класс всех моделей вещественных чисел естественно назвать *теорией вещественных чисел.*

◇ **2.1.1.** Дедекиндовы сечения. Из теорем 2.1.18 и 2.1.19 следует, что множество всех дедекиндовых сечений множества $\mathbb{Q}$ рациональных чисел является моделью вещественных чисел. Из этого примера видно, что класс всех моделей вещественных чисел непуст.

Из аксиом A1 - A16 следуют все остальные свойства вещественных чисел (и, в частности, все теоремы математического анализа).

Помимо отношения «меньше, либо равно» $a \leqslant b$ на множестве вещественных чисел $\mathbb{R}$ вводятся еще три отношения, а именно,

– «меньше» $a < b$, означающее, что $a \leqslant b$ и одновременно $a \neq b$;
– «больше, либо равно» $a \geqslant b$ означающее, что $b \leqslant a$;
– «больше» $a > b$, означающее, что $b \leqslant a$ и одновременно $b \neq a$.

Из аксиомы линейности A13 следует, что множество вещественных чисел $\mathbb{R}$ удобно изображать в виде прямой, а сами вещественные числа – в виде точек на ней. Именно так и делают математики:

◇ **2.1.2.** Покажем, что из аксиом A6 (о существовании нуля) и A1 (коммутативности) следует, что нуль единственен. Действительно, если 0 и $\tilde{0}$ – два разных объекта со свойствами нуля

$$\forall a \quad a + 0 = a, \tag{2.1.10}$$

$$\forall a \quad a + \tilde{0} = a \tag{2.1.11}$$

то мы получили бы

$$\tilde{0} = (2.1.10) = \tilde{0} + 0 = (A1) = 0 + \tilde{0} = (2.1.11) = 0$$

(в скобках мы указываем формулы или аксиомы, которые в данный момент используем в своих рассуждениях).

◇ **2.1.3.** Покажем, что для данного числа a противоположное число $-a$, существование которого постулируется в аксиоме A7, тоже должно быть единственно. Действительно, если бы существовали два числа x и y со свойствами $a + x = 0$ и $a + y = 0$, то мы получили бы

$$\begin{aligned} x = (A6) = x + 0 = x + (a + y) = (A2) = \\ = (x + a) + y = (A1) = (a + x) + y = 0 + y = \\ = (A1) = y + 0 = y \end{aligned}$$

▷ **2.1.4.** Докажите равенство:

$$-0 = 0 \tag{2.1.12}$$

◇ **2.1.5.** Покажем, что справедлива следующая эквивалентность, означающая, что уравнения вида $a + x = b$ однозначно разрешимы в $\mathbb{R}$:

$$a + x = b \iff x = b + (-a) \tag{2.1.13}$$

Доказательство.

$$\begin{gathered} a + x = b \\ \Updownarrow \\ (a + x) + (-a) = b + (-a) \\ \Updownarrow \\ (x + a) + (-a) = b + (-a) \\ \Updownarrow \\ x + (a + (-a)) = b + (-a) \\ \Updownarrow \\ x + 0 = b + (-a) \\ \Updownarrow \\ x = b + (-a) \end{gathered}$$

□

◇ **2.1.6.** Справедливы следующие тождества:

$$0 \cdot a = 0 \tag{2.1.14}$$

$$-(-a) = a \tag{2.1.15}$$

$$(-1) \cdot a = -a \tag{2.1.16}$$

$$(-a) \cdot (-a) = a \cdot a \tag{2.1.17}$$

Доказательство. 1. Докажем (2.1.14):

$$\begin{gathered} 0 \cdot a = (0 + 0) \cdot a = 0 \cdot a + 0 \cdot a \\ \Downarrow \ \text{(2.1.13)} \\ 0 \cdot a + (-0 \cdot a) = 0 \cdot a \\ \Downarrow \ \text{(A7)} \\ 0 = 0 \cdot a \end{gathered}$$

2. Для (2.1.15) доказательство выглядит так:

$$\begin{gathered} a + (-a) = 0 \\ \Downarrow \\ (-a) + a = 0 \\ \Downarrow \end{gathered}$$

$$a \text{ – противоположное число для } -a$$
$$\Downarrow \quad \begin{pmatrix} \text{у } -a \text{ не может} \\ \text{быть двух} \\ \text{противоположных} \\ \text{чисел} \end{pmatrix}$$
$$a = -(-a)$$

3. Для (2.1.16) доказательство такое:

$$(A7)$$
$$\Downarrow$$
$$1 + (-1) = 0$$
$$\Downarrow$$
$$(1 + (-1)) \cdot a = 0 \cdot a$$
$$\Downarrow \quad \text{(A5),(2.1.14)}$$
$$1 \cdot a + (-1) \cdot a = 0$$
$$\Downarrow$$
$$a + (-1) \cdot a = 0$$
$$\Downarrow$$
$$(-1) \cdot a \text{ – противоположное число для } a$$
$$\Downarrow$$
$$(-1) \cdot a = -a$$

4. Докажем (2.1.17):

$$\begin{aligned}(-a) \cdot (-a) &= (2.1.16) = ((-1) \cdot a) \cdot (-a) = \\ &= (A3) = (a \cdot (-1)) \cdot (-a) = (A4) = \\ &= a \cdot ((-1) \cdot (-a)) = (2.1.16) = \\ &= a \cdot (-(-a)) = (2.1.15) = a \cdot a\end{aligned}$$

□

▷ **2.1.7.** Докажите, по аналогии с примером 2.1.2, что единица 1, существование которой постулируется в аксиоме A8, тоже единственна.

▷ **2.1.8.** Докажите равенство:

$$1^{-1} = 1 \tag{2.1.18}$$

▷ **2.1.9.** По аналогии с примером 2.1.3 докажите, что для данного числа $a \neq 0$ обратное число a^{-1} (о котором идет речь в аксиоме A9), должно быть единственно (то есть, не может существовать двух чисел x и y со свойствами $a \cdot x = 1$ и $a \cdot y = 1$).

▷ **2.1.10.** Докажите тождество:

$$\left(a^{-1}\right)^{-1} = a \tag{2.1.19}$$

◇ **2.1.11.** Справедливо тождество

$$(-a)^{-1} = -a^{-1} \tag{2.1.20}$$

Доказательство.

$$(-a^{-1}) \cdot (-a) = (2.1.17) = a^{-1} \cdot a = 1$$
$$\Downarrow \quad \begin{pmatrix} \text{в силу} \\ \text{упражнения 2.1.9,} \\ \text{у } -a \text{ не может} \\ \text{быть двух} \\ \text{обратных} \\ \text{чисел} \end{pmatrix}$$
$$(-a)^{-1} = -a^{-1}$$

□

▷ **2.1.12.** Докажите следующие утверждения:

$$x < y \implies \forall a \quad x + a < y + a \tag{2.1.21}$$
$$x \cdot y = 0 \implies x = 0 \ \bigvee \ y = 0 \tag{2.1.22}$$
$$x > 0 \ \& \ y > 0 \implies x \cdot y > 0 \tag{2.1.23}$$
$$x < 0 \ \& \ y < 0 \implies x \cdot y > 0 \tag{2.1.24}$$
$$x < 0 \ \& \ y > 0 \implies x \cdot y < 0 \tag{2.1.25}$$
$$1 > 0 \tag{2.1.26}$$
$$-1 < 0 \tag{2.1.27}$$
$$x < y \implies -x > -y \tag{2.1.28}$$
$$x > 0 \implies x^{-1} > 0 \tag{2.1.29}$$
$$x < 0 \implies x^{-1} < 0 \tag{2.1.30}$$
$$0 < x < y \implies x^{-1} > y^{-1} \tag{2.1.31}$$
$$x < y < 0 \implies x^{-1} > y^{-1} \tag{2.1.32}$$
$$x < y \ \& \ a > 0 \implies a \cdot x < a \cdot y \tag{2.1.33}$$
$$x < y \ \& \ a < 0 \implies a \cdot x > a \cdot y \tag{2.1.34}$$
$$a > 1 \iff 0 < a < 1 \tag{2.1.35}$$
$$x > 0 \ \& \ a > 1 \implies a \cdot x > x \tag{2.1.36}$$
$$x > 0 \ \& \ 0 < a < 1 \implies a \cdot x < x \tag{2.1.37}$$

Числа $2, ..., 10$. Напомним, что обозначения 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 были введены нами в теории MK в формулах (0.3.279)—(0.3.288). Сейчас мы описываем теорию вещественных чисел, как дефинициальное расширение теории множеств, для понимания которого такие детали как определения (0.3.279)—(0.3.288) не нужны, и более того, при желании читатель может вообще обходиться наивным пониманием теории множеств. Поэтому помнить об определениях на с.50 не обязательно, а если помнить, то то надо понимать, что определения тех же чисел от 0 до 9 в описываемой теперь теории будет другим (и формально это будут другие объекты).

В частности, число 2 определяется равенством

$$2 := 1 + 1 \tag{2.1.38}$$

Точно также, числа 3, 4, 5 можно определить равенствами

$$\begin{aligned} &3 := 1 + (1 + 1), \\ &4 := 1 + (1 + (1 + 1)), \\ &5 := 1 + (1 + (1 + (1 + 1))) \end{aligned} \tag{2.1.39}$$

Полезно заметить, что одно и то же число можно определять по-разному. Например, 3, 4, 5 можно иначе определить так:

$$\begin{aligned} 3 &:= (1+1)+1, \\ 4 &:= ((1+1)+1)+1, \\ 5 &:= (((1+1)+1)+1)+1 \end{aligned} \tag{2.1.40}$$

Строго говоря, это будут другие определения, потому что записи в (2.1.39) и (2.1.40) не одинаковы (с точки зрения языка, последовательность символов $1+(1+1)$ — совсем не то же самое, что последовательность символов $(1+1)+1$).

Тем не менее, определения (2.1.39) и (2.1.40) эквивалентны, потому что из аксиом A1 – A16 можно логическими средствами вывести, что числа, определяемые формулами (2.1.39) — те же самые, что числа, определяемые формулами (2.1.40). Действительно, эквивалентность определений для числа 3 получается подстановкой в тождество из аксиомы A2 вместо a, b, c, символа 1:

$$(1+1)+1 = (a+b)+c\,\Big|_{\substack{a=1\\ b=1\\ c=1}} = (A2) =$$
$$= a+(b+c)\,\Big|_{\substack{a=1\\ b=1\\ c=1}} = 1+(1+1)$$

(символ $|$ означает подстановку, а фрагмент $=(A2)=$ есть ссылка на аксиому A2, применяемую в этот момент). Эту запись можно сократить так:

$$(1+1)+1 = (A2) = 1+(1+1)$$

— здесь читателю предлагается самому догадаться, какой должна быть подстановка, чтобы можно было применить аксиому A2. Читатель теперь может самостоятельно расшифровать сокращенную запись доказательства эквивалентности определений числа 4:

$$\begin{aligned} ((1+1)+1)+1 = (A2) = (1+1)+(1+1) = \\ = (A2) = 1+(1+(1+1)) \end{aligned}$$

Что же касается числа 5, то нам теперь достаточно сказать, что эквивалентность определений для него доказывается по аналогии.

Итак, одни и те же собственные обозначения можно задавать формально по-разному, нужно только следить, чтобы выписываемые тобой определения для одного и того же символа были эквивалентны. Естественный (и самый распространенный) способ вводить новые обозначения – так называемый последовательный, в котором при определении нового обозначения используются обозначения, введенные ранее. Например, числа 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 можно последовательно определить так:

$$\begin{aligned} 3 &:= 2+1, & 4 &:= 3+1, \\ 5 &:= 4+1, & 6 &:= 5+1, \\ 7 &:= 6+1, & 8 &:= 7+1, \\ 9 &:= 8+1, & 10 &:= 9+1 \end{aligned}$$

Числа вида $-a$. Когда определены числа 1,...,10, их противоположные числа $-1,...,-10$ определять уже не нужно, поскольку они автоматически определяются аксиомой A7 о существовании противоположного числа (дело в том, что, как мы отмечали в упражнении 2.1.3, из аксиомы A7 и других аксиом следует, что противоположное число определяется единственным образом).

Вообще, всякий раз, когда мы дали собственное обозначение a какому-нибудь числу, аксиома A7 определяет его противоположное число и дает ему собственное обозначение $-a$.

Числа вида a^{-1}. Точно также, всякий раз, когда мы даем собственное обозначение a какому-нибудь числу ($a \neq 0$), аксиома A9 дает собственное обозначение обратному числу a^{-1}. В частности, обратные числа к $2,...,10$ имеют собственные обозначения 2^{-1},...,10^{-1}.

Дроби определяются равенством

$$\frac{a}{b} = a \cdot b^{-1} = b^{-1} \cdot a, \qquad (b \neq 0)$$

Например,

$$\frac{1}{2} := 2^{-1}, \qquad \frac{2}{3} := 2 \cdot 3^{-1}, \qquad \frac{3}{5} := 3 \cdot 5^{-1}$$

▷ **2.1.13.** Докажите тождества:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d + b \cdot c}{b \cdot d} \tag{2.1.41}$$

$$\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d - b \cdot c}{b \cdot d} \tag{2.1.42}$$

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d} \tag{2.1.43}$$

(b) Числа как явная конструкция в теории множеств

На с.122 мы описали вещественные числа как семантическую теорию, то есть как абстрактную конструкцию внутри теории множеств. Однако пока непонятно, из чего следует, что такой объект действительно существует. Здесь мы опишем явную конструкцию в теории множеств, обладающую свойствами модели вещественных чисел, описанными на с.122. Описываемые здесь модели числовых множеств $\mathbb{Z}_+$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ мы будем снабжать верхним индексом * — $\mathbb{Z}_+^*$, $\mathbb{Z}^*$, $\mathbb{Q}^*$, $\mathbb{R}^*$ — чтобы читатель понимал, что это конкретные модели, а не абстрактные конструкции, которые у нас появятся ниже в § 2 (а $\mathbb{R}$ уже появилась выше на с.122).

Множество неотрицательных целых чисел $\mathbb{Z}_+^*$. Напомним, что множество `FinOrd` конечных ординалов было определено на с.61. С этого момента удобно присвоить ему новое название, *множество неотрицательных целых чисел*, и новое обозначение,

$$\mathbb{Z}_+^* := \texttt{FinOrd}. \tag{2.1.44}$$

Его элементы (конечные ординалы) мы далее будем называть *неотрицательными целыми числами.*

Теорема 2.1.1. *Существует единственное отображение $(m,n) \in \mathbb{Z}_+^* \times \mathbb{Z}_+^* \mapsto m+n \in \mathbb{Z}_+^*$ со следующими свойствами:*

$$m + 0 = m \qquad m \in \mathbb{Z}_+^* \tag{2.1.45}$$

$$m + \mathsf{S}(n) = \mathsf{S}(m+n) \qquad m,n \in \mathbb{Z}_+^* \tag{2.1.46}$$

- Отображение $(m,n) \in \mathbb{Z}_+^* \times \mathbb{Z}_+^* \mapsto m+n \in \mathbb{Z}_+^*$ называется *операцией сложения* на $\mathbb{Z}_+^*$.

Доказательство. Здесь используется теорема 0.3.46. Рассмотрим отображение $H : {\mathbb{Z}_+^*}^{\mathbb{Z}_+^*} \to {\mathbb{Z}_+^*}^{\mathbb{Z}_+^*}$, действующее по формуле

$$H(f)(m) = \mathsf{S}(f(m)), \qquad f \in {\mathbb{Z}_+^*}^{\mathbb{Z}_+^*},\ m \in \mathbb{Z}_+^*. \tag{2.1.47}$$

По теореме 0.3.46 оно однозначно определяет некое отображение $K : \mathbb{Z}_+^* \to {\mathbb{Z}_+^*}^{\mathbb{Z}_+^*}$ со свойствами

$$K(0) = \mathrm{id}_{\mathbb{Z}_+^*}, \qquad K(\mathsf{S}(n)) = H(K(n)). \tag{2.1.48}$$

Теперь надо воспользоваться теоремой 0.3.21: отображение $K : \mathbb{Z}_+^* \to {\mathbb{Z}_+^*}^{\mathbb{Z}_+^*}$ является элементом множества $({\mathbb{Z}_+^*}^{\mathbb{Z}_+^*})^{\mathbb{Z}_+^*}$, и поэтому при биекции $({\mathbb{Z}_+^*}^{\mathbb{Z}_+^*})^{\mathbb{Z}_+^*} \to {\mathbb{Z}_+^*}^{\mathbb{Z}_+^* \times \mathbb{Z}_+^*}$ (заданной формулой (0.3.241)) ему соответствует некий элемент $L \in {\mathbb{Z}_+^*}^{\mathbb{Z}_+^* \times \mathbb{Z}_+^*}$, то есть отображение $L : \mathbb{Z}_+^* \times \mathbb{Z}_+^* \to \mathbb{Z}_+^*$:

$$L(m,n) = K(n)(m). \tag{2.1.49}$$

Если значение $L(m,n)$ обозначить $m+n$, то мы, во-первых, получим (2.1.45):

$$m + 0 = L(m,0) = (2.1.49) = K(0)(m) = (2.1.48) = \mathrm{id}_{\mathbb{Z}_+^*}(m) = (0.3.235) = m.$$

И, во-вторых, (2.1.46):

$$\begin{aligned} m + \mathsf{S}(n) = L(m,\mathsf{S}(n)) = (2.1.49) = K(\mathsf{S}(n))(m) = (2.1.48) = \\ = H(K(n))(m) = (2.1.47) = \mathsf{S}(K(n)(m)) = \mathsf{S}(L(m,n)) = \mathsf{S}(m+n). \end{aligned}$$

Осталось проверить единственность отображения $+$. Предположим, что $\oplus$ – другое отображение с теми же свойствами:

$$m \oplus 0 = m \qquad m \in \mathbb{Z}_+^* \tag{2.1.50}$$

$$m \oplus \mathsf{S}(n) = \mathsf{S}(m \oplus n) \qquad m,n \in \mathbb{Z}_+^* \tag{2.1.51}$$

Покажем, что

$$m + n = m \oplus n. \tag{2.1.52}$$

Зафиксируем $m \in \mathbb{Z}_+^*$ и проведем индукцией по $n \in \mathbb{Z}_+^*$. При $n = 0$ мы получим

$$m + 0 = (2.1.45) = m = (2.1.50) = m \oplus 0.$$

Предположим, что (2.1.52) верно при каком-то $n \in \mathbb{Z}_+^*$. Тогда для $\mathsf{S}(n)$ мы получим:

$$m + \mathsf{S}(n) = (2.1.46) = \mathsf{S}(m+n) = (2.1.52) = \mathsf{S}(m \oplus n) = (2.1.51) = m \oplus \mathsf{S}(n).$$

$\square$

Свойства операции сложения на $\mathbb{Z}_+^*$:

$$\mathsf{S}(n) = n + 1, \qquad n \in \mathbb{Z}_+^* \tag{2.1.53}$$

$$0 + n = n = n + 0, \qquad n \in \mathbb{Z}_+^* \tag{2.1.54}$$

$$m + n = n + m, \qquad m, n \in \mathbb{Z}_+^* \tag{2.1.55}$$

$$l + (m + n) = (l + m) + n, \qquad l, m, n \in \mathbb{Z}_+^* \tag{2.1.56}$$

$$l + m = l + n \quad \Rightarrow \quad m = n, \qquad l, m, n \in \mathbb{Z}_+^* \tag{2.1.57}$$

Доказательство. 1. Свойство (2.1.53):

$$n + 1 = n + \mathsf{S}(0) = (2.1.46) = \mathsf{S}(n + 0) = (2.1.45) = \mathsf{S}(n).$$

2. В (2.1.54) правая часть есть тождество (2.1.45), поэтому нужно доказать только левую. Это делается индукцией по n. Для $n = 0$ мы получаем

$$0 + 0 = (2.1.45) = 0.$$

Если же (2.1.54) верно для какого-то $n \in \mathbb{Z}_+^*$,

$$0 + n = n \tag{2.1.58}$$

то для $\mathsf{S}(n)$ мы получаем:

$$0 + \mathsf{S}(n) = (2.1.46) = \mathsf{S}(0 + n) = (2.1.58) = \mathsf{S}(n).$$

3. Свойство (2.1.55) доказывается двойной индукцией, внешей по m, и внутренней по n. При $m = 0$ утверждение вытекает для всех n из (2.1.54) и (2.1.45):

$$\forall n \in \mathbb{Z}_+^* \quad 0 + n = (2.1.54) = n = (2.1.45) = n + 0.$$

Предположим, что (2.1.55) верно для некоторого m при всех n:

$$\forall n \in \mathbb{Z}_+^* \quad m + n = n + m \tag{2.1.59}$$

Тогда для $\mathsf{S}(m)$ оно доказывается индукцией по n. При $n = 0$ мы получаем

$$\mathsf{S}(m) + 0 = (2.1.45) = \mathsf{S}(m) = (2.1.54) = 0 + \mathsf{S}(m).$$

Если же это верно для какого-то n,

$$\mathsf{S}(m) + n = n + \mathsf{S}(m) \tag{2.1.60}$$

то для $\mathsf{S}(n)$ мы получаем:

$$\begin{aligned} \mathsf{S}(m) + \mathsf{S}(n) &= (2.1.46) = \mathsf{S}\big(\mathsf{S}(m) + n\big) = (2.1.60) = \mathsf{S}\big(n + \mathsf{S}(m)\big) = (2.1.46) = \mathsf{S}\big(\mathsf{S}(n + m)\big) = \\ &= (2.1.59) = \mathsf{S}\big(\mathsf{S}(m + n)\big) = (2.1.46) = \mathsf{S}\big(m + \mathsf{S}(n)\big) = (2.1.59) = \mathsf{S}\big(\mathsf{S}(n) + m\big) = (2.1.46) = \\ &= \mathsf{S}(n) + \mathsf{S}(m). \end{aligned}$$

4. Свойство (2.1.56) доказывается индукцией по n. При $n = 0$ мы получаем

$$l + (m + 0) = (2.1.45) = l + m = (2.1.45) = (l + m) + 0.$$

Если (2.1.56) верно для какого-то $n \in \mathbb{Z}_+^*$,

$$l + (m + n) = (l + m) + n, \tag{2.1.61}$$

то для $\mathsf{S}(n)$ мы получим:

$$\begin{aligned} l + (m + \mathsf{S}(n)) &= (2.1.46) = l + \mathsf{S}(m + n) = (2.1.46) = \mathsf{S}\big(l + (m + n)\big) = (2.1.61) = \\ &= \mathsf{S}\big((l + m) + n\big) = (2.1.61) = (l + m) + \mathsf{S}(n). \end{aligned}$$

5. Свойство (2.1.57) доказывается инукцией по l. При $l = 0$ получаем

$$0 + m = 0 + n \quad \Rightarrow \quad m = n.$$

Если (2.1.57) верно для какого-то l,

$$l+m=l+n \quad \Rightarrow \quad m=n, \tag{2.1.62}$$

то для $\mathsf{S}(l)$ мы получим:

$$\mathsf{S}(l)+m=\mathsf{S}(l)+n \quad \overset{(2.1.53)}{\Rightarrow} \quad (l+1)+m=(l+1)+n \quad \overset{(2.1.56)}{\Rightarrow} \quad l+(1+m)=l+(1+n) \quad \overset{(2.1.62)}{\Rightarrow}$$
$$\Rightarrow \quad 1+m=1+n \quad \overset{(2.1.55)}{\Rightarrow} \quad m+1=n+1 \quad \overset{(2.1.53)}{\Rightarrow} \quad \mathsf{S}(m)=\mathsf{S}(n) \quad \overset{\text{свойство } 7^\circ \text{ на с.56}}{\Rightarrow} \quad m=n.$$

□

⊳⊳ **2.1.14.** Докажите следующие свойства операции сложения в $\mathbb{Z}_+^*$ ($l,m,n\in\mathbb{Z}_+^*$):

$$m<n \;\Leftrightarrow\; \exists l>0 \quad l+m=n \tag{2.1.63}$$

$$m<n \;\Rightarrow\; \forall l\in\mathbb{Z}_+^* \quad l+m<l+n \tag{2.1.64}$$

$$m\leqslant m+n, \tag{2.1.65}$$

Теорема 2.1.2. *Если X и Y – конечные непресекающиеся множества, то*

$$\operatorname{card}(X\cup Y)=\operatorname{card}X+\operatorname{card}Y \tag{2.1.66}$$

Доказательство. Проведем индукцию по $\operatorname{card}Y$.

0. Заметим, что при $\operatorname{card}Y=0$, то есть $Y=\varnothing$, (2.1.66) верно:

$$\operatorname{card}(X\cup Y)=\operatorname{card}(X\cup\varnothing)=\operatorname{card}X=(2.1.45)=\operatorname{card}X+0=\operatorname{card}X+\operatorname{card}Y.$$

1. Покажем далее, что (2.1.66) верно при $\operatorname{card}Y=1$:

$$\Big(X\cap Y=\varnothing \;\&\; \operatorname{card}(Y)=1\Big) \quad\Longrightarrow\quad \operatorname{card}(X\cup Y)=\operatorname{card}X+\operatorname{card}Y. \tag{2.1.67}$$

Пусть $f:X\to\operatorname{card}X$ – биекция. Обозначим буквой y единственный элемент Y. Поскольку $y\notin X$, отображение

$$g(A)=\begin{cases} f(A), & A\in X\\ \{\operatorname{card}X\}, & A=y\end{cases}$$

будет биекцией между $X\cup Y$ и $\mathsf{S}(\operatorname{card}X)=\operatorname{card}X\cup\{\operatorname{card}X\}$. Поэтому

$$\operatorname{card}(X\cup Y)=\mathsf{S}(\operatorname{card}X)=(2.1.53)=\operatorname{card}X+1=\operatorname{card}X+\operatorname{card}Y.$$

2. Теперь предположим, что формула (2.1.66) доказана для всех Y мощности $\operatorname{card}Y=n$:

$$\Big(X\cap Y=\varnothing \;\&\; \operatorname{card}(Y)=n\Big) \quad\Longrightarrow\quad \operatorname{card}(X\cup Y)=\operatorname{card}X+\operatorname{card}Y. \tag{2.1.68}$$

Покажем, что тогда она верна и для случая $\operatorname{card}Y=\mathsf{S}(n)$. Пусть $f:Y\to\mathsf{S}(n)$ – биекция. Рассмотрим элемент[4]

$$y=f^{-1}(n)\in Y.$$

Отображение $f|_{Y\setminus\{y\}}$ будет биекцией между $Y\setminus\{y\}$ и n, поэтому $\operatorname{card}(Y\setminus\{y\})=n$. Отсюда мы получаем:

$$\operatorname{card}(X\cup Y)=\operatorname{card}\Big((X\cup\{y\})\cup(\underbrace{Y\setminus\{y\}}_{\substack{\uparrow\\ \operatorname{card}(Y\setminus\{y\})=n}})\Big)=(2.1.68)=\underbrace{\operatorname{card}(X\cup\{y\})}_{\substack{\| \; (2.1.67)\\ \operatorname{card}X+\operatorname{card}\{y\}\\ \|\\ \operatorname{card}X+1}}+\underbrace{\operatorname{card}(Y\setminus\{y\})}_{\substack{\|\\ n}}=$$

$$=(\operatorname{card}X+1)+n)=(2.1.56)=\operatorname{card}X+(1+n)=(2.1.55)=\operatorname{card}X+(n+1)=(2.1.53)=$$
$$=\operatorname{card}X+\mathsf{S}(n)=\operatorname{card}X+\operatorname{card}Y.$$

□

[4]Напомним, что $\mathsf{S}(n)=n\cup\{n\}$, поэтому $n\in\mathsf{S}(n)$.

Теорема 2.1.3. *Существует единственное отображение* $(m,n) \in \mathbb{Z}_+^* \times \mathbb{Z}_+^* \to m \cdot n \in \mathbb{Z}_+^*$ *со следующими свойствами:*

$$m \cdot 0 = 0 \qquad m \in \mathbb{Z}_+^* \tag{2.1.69}$$

$$m \cdot \mathsf{S}(n) = m \cdot n + m \qquad m,n \in \mathbb{Z}_+^* \tag{2.1.70}$$

- Отображение $(m,n) \in \mathbb{Z}_+^* \times \mathbb{Z}_+^* \mapsto m \cdot n \in \mathbb{Z}_+^*$ называется *операцией умножения* на $\mathbb{Z}_+^*$.

Доказательство. Здесь, как и в доказательстве теоремы 2.1.1, используется теорема 0.3.46. Рассмотрим отображение $H : {\mathbb{Z}_+^*}^{\mathbb{Z}_+^*} \to {\mathbb{Z}_+^*}^{\mathbb{Z}_+^*}$, действующее по формуле

$$H(f)(m) = f(m) + m, \qquad f \in {\mathbb{Z}_+^*}^{\mathbb{Z}_+^*},\ m \in \mathbb{Z}_+^*. \tag{2.1.71}$$

По теореме 0.3.46 оно однозначно определяет некое отображение $K : \mathbb{Z}_+^* \to {\mathbb{Z}_+^*}^{\mathbb{Z}_+^*}$ со свойствами

$$K(0)(m) = 0 \quad (m \in \mathbb{Z}_+^*), \qquad K(\mathsf{S}(n)) = H(K(n)). \tag{2.1.72}$$

Теперь надо воспользоваться теоремой 0.3.21: отображение $K : \mathbb{Z}_+^* \to {\mathbb{Z}_+^*}^{\mathbb{Z}_+^*}$ является элементом множества $({\mathbb{Z}_+^*}^{\mathbb{Z}_+^*})^{\mathbb{Z}_+^*}$, и поэтому при биекции $({\mathbb{Z}_+^*}^{\mathbb{Z}_+^*})^{\mathbb{Z}_+^*} \to {\mathbb{Z}_+^*}^{\mathbb{Z}_+^* \times \mathbb{Z}_+^*}$ (заданной формулой (0.3.241)) ему соответствует некий элемент $L \in {\mathbb{Z}_+^*}^{\mathbb{Z}_+^* \times \mathbb{Z}_+^*}$, то есть отображение $L : \mathbb{Z}_+^* \times \mathbb{Z}_+^* \to \mathbb{Z}_+^*$:

$$L(m,n) = K(n)(m). \tag{2.1.73}$$

Если значение $L(m,n)$ обозначить $m \cdot n$, то мы, во-первых, получим (2.1.69):

$$m \cdot 0 = L(m,0) = (2.1.73) = K(0)(m) = (2.1.72) = 0.$$

И, во-вторых, (2.1.70):

$$\begin{aligned} m \cdot \mathsf{S}(n) = L(m,\mathsf{S}(n)) = (2.1.73) = K(\mathsf{S}(n))(m) = (2.1.72) = \\ = H(K(n))(m) = (2.1.71) = K(n)(m) + m = L(m,n) + m = m \cdot n + m. \end{aligned}$$

Осталось проверить единственность отображения $\cdot$. Предположим, что $\odot$ – другое отображение с теми же свойствами:

$$m \odot 0 = 0 \qquad m \in \mathbb{Z}_+^* \tag{2.1.74}$$

$$m \odot \mathsf{S}(n) = m \odot n + m \qquad m,n \in \mathbb{Z}_+^* \tag{2.1.75}$$

Покажем, что

$$m \cdot n = m \odot n. \tag{2.1.76}$$

Зафиксируем $m \in \mathbb{Z}_+^*$ и проведем индукцией по $n \in \mathbb{Z}_+^*$. При $n = 0$ мы получим

$$m \cdot 0 = (2.1.69) = 0 = (2.1.74) = m \odot 0.$$

Предположим, что (2.1.76) верно при каком-то $n \in \mathbb{Z}_+^*$. Тогда для $\mathsf{S}(n)$ мы получим:

$$m \cdot \mathsf{S}(n) = (2.1.70) = m \cdot n + m = (2.1.76) = m \odot n + m = (2.1.75) = m \odot \mathsf{S}(n).$$

□

Свойства операции умножения на $\mathbb{Z}_+^*$:

$$0 \cdot n = 0 = n \cdot 0, \qquad n \in \mathbb{Z}_+^* \tag{2.1.77}$$

$$1 \cdot n = n = n \cdot 1, \qquad n \in \mathbb{Z}_+^* \tag{2.1.78}$$

$$m \cdot n = \cdot m, \qquad m,n \in \mathbb{Z}_+^* \tag{2.1.79}$$

$$l \cdot (m \cdot n) = (l \cdot m) \cdot n, \qquad l,m,n \in \mathbb{Z}_+^* \tag{2.1.80}$$

$$l \cdot (m + n) = l \cdot m + l \cdot n, \qquad l,m,n \in \mathbb{Z}_+^* \tag{2.1.81}$$

Доказательство. 1. В (2.1.77) правая часть есть тождество (2.1.69), поэтому нужно доказать только левую. Это делается индукцией по n. Для $n = 0$ мы получаем

$$0 \cdot 0 = (2.1.69) = 0.$$

Если же левая часть (2.1.77) верна для какого-то $n \in \mathbb{Z}_+^*$,

$$0 \cdot n = n \tag{2.1.82}$$

то для $\mathsf{S}(n)$ мы получаем:

$$0 \cdot \mathsf{S}(n) = (2.1.70) = 0 \cdot n + 0 = (2.1.82) = 0 + 0 = (2.1.45) = 0.$$

2. В (2.1.78) правая часть выводится из (2.1.70):

$$n \cdot 1 = n \cdot \mathsf{S}(0) = (2.1.70) = n \cdot 0 + n = (2.1.77) = 0 + n = (2.1.54) = n.$$

А левая часть доказывается индукцией по n. При $n = 0$ мы получаем

$$1 \cdot 0 = (2.1.69) = 0.$$

Если левая часть (2.1.78) верна для какого-то $n \in \mathbb{Z}_+^*$,

$$1 \cdot n = n \tag{2.1.83}$$

то для $\mathsf{S}(n)$ мы получаем:

$$1 \cdot \mathsf{S}(n) = (2.1.70) = 1 \cdot n + 1 = (2.1.83) = n + 1 = (2.1.53) = \mathsf{S}(n).$$

3. Свойство (2.1.79) доказывается двойной индукцией, внешей по m, и внутренней по n. При $m = 0$ утверждение вытекает для всех n из (2.1.77):

$$\forall n \in \mathbb{Z}_+^* \quad 0 \cdot n = (2.1.77) = 0 = (2.1.77) = n \cdot 0.$$

Предположим, что (2.1.79) верно для некоторого m при всех n:

$$\forall n \in \mathbb{Z}_+^* \quad m \cdot n = n \cdot m. \tag{2.1.84}$$

Тогда для $\mathsf{S}(m)$ оно доказывается индукцией по n. При $n = 0$ мы получаем

$$\mathsf{S}(m) \cdot 0 = (2.1.77) = 0 = (2.1.77) = 0 \cdot \mathsf{S}(m).$$

Если же это верно для какого-то n,

$$\mathsf{S}(m) \cdot n = n \cdot \mathsf{S}(m) \tag{2.1.85}$$

то для $\mathsf{S}(n)$ мы получаем:

$$\begin{aligned}\mathsf{S}(m) \cdot \mathsf{S}(n) = (2.1.70) = \mathsf{S}(m) \cdot n + \mathsf{S}(m) = (2.1.85) = n \cdot \mathsf{S}(m) + \mathsf{S}(m) = (2.1.70) = (n \cdot m + n) + \mathsf{S}(m) = \\ = (2.1.53) = (n \cdot m + n) + (m + 1) = (2.1.56) = ((n \cdot m + n) + m) + 1 = (2.1.56) = ((n \cdot m + (n + m)) + 1 = \\ = (2.1.55) = ((n \cdot m + (m + n)) + 1 = (2.1.56) = ((n \cdot m + m) + n) + 1 = (2.1.84) = ((m \cdot n + m) + n) + 1 = \\ = (2.1.70) = (m \cdot \mathsf{S}(n) + n) + 1 = (2.1.56) = m \cdot \mathsf{S}(n) + (n + 1) = (2.1.53) = m \cdot \mathsf{S}(n) + \mathsf{S}(n) = (2.1.84) = \\ = \mathsf{S}(n) \cdot m + \mathsf{S}(n) = (2.1.70) = \mathsf{S}(n) \cdot \mathsf{S}(m).\end{aligned}$$

4. После того, как доказано (2.1.79), свойство (2.1.81) можно переписать в виде

$$(m + n) \cdot l = m \cdot l + n \cdot l, \tag{2.1.86}$$

и доказать это индукцией по l. При $l = 0$ мы получим

$$(m + n) \cdot 0 = (2.1.74) = 0 = (2.1.45) = 0 + 0 = (2.1.74) = m \cdot 0 + n \cdot 0.$$

Предположим, что (2.1.86) верно для некоторого l. Тогда для $\mathsf{S}(l)$ мы получим

$$\begin{aligned}(m + n) \cdot \mathsf{S}(l) = (2.1.70) = (m + n) \cdot l + (m + n) = (2.1.86) = (m \cdot l + n \cdot l) + (m + n) = \\ = (2.1.56) = (m \cdot l + m) + (n \cdot l + n) = (2.1.70) = m \cdot \mathsf{S}(l) + n \cdot \mathsf{S}(l).\end{aligned}$$

□

$\triangleright\triangleright$ **2.1.15.** Докажите следующие свойства операции умножения в $\mathbb{Z}_+^*$.

$$0 \leqslant l \quad \Rightarrow \quad \forall n \in \mathbb{Z}_+^* \quad n \leqslant l \cdot n, \tag{2.1.87}$$

$$1 < l \quad \Rightarrow \quad n < l \cdot n, \tag{2.1.88}$$

$$l \neq 0 \ \& \ m < n \quad \Rightarrow \quad l \cdot m < l \cdot n, \tag{2.1.89}$$

$$m \neq n \quad \Rightarrow \quad l \cdot m \leqslant l \cdot n, \tag{2.1.90}$$

$$2 \cdot n = n + n, \tag{2.1.91}$$

$$1 < m \ \& \ 1 < n \quad \Rightarrow \quad m + n \leqslant m \cdot n, \tag{2.1.92}$$

$$m \neq 0 \ \& \ n \neq 0 \quad \Rightarrow \quad m \cdot n \neq 0, \tag{2.1.93}$$

Теорема 2.1.4. *Если X и Y – конечные множества, то*

$$\operatorname{card}(X \times Y) = \operatorname{card} X \cdot \operatorname{card} Y. \tag{2.1.94}$$

Доказательство. Нужно провести индукцию по мощности Y.

Если $\operatorname{card} Y = 0$, то $Y\varnothing$, и поэтому $X \times Y = \varnothing$, и мы получаем

$$\operatorname{card}(X \times Y) = \operatorname{card} \varnothing = 0 = (2.1.77) = \operatorname{card} X \cdot 0 = \operatorname{card} X \cdot \operatorname{card} Y.$$

Предположим, мы доказали (2.1.94) для случая $\operatorname{card} Y = n$:

$$\operatorname{card} Y = n \quad \Longrightarrow \quad \forall X \quad \operatorname{card}(X \times Y) = \operatorname{card} X \cdot n. \tag{2.1.95}$$

Рассмотрим случай $\operatorname{card} Y = \mathsf{S}(n)$. Пусть $f : Y \to \mathsf{S}(n) = n \cup \{n\}$. Обозначим $y = f^{-1}(n)$. Тогда $f|_{Y \setminus \{y\}} : Y \to n$ будет биекция, и поэтому $\operatorname{card}(Y \setminus \{y\}) = n$. С другой стороны, отобюражение $A \in X \mapsto (A, y) \in X \times \{y\}$ также будет биекцией. Поэтому

$$\operatorname{card}(X \times Y) = \operatorname{card}\Big(\big(X \times (Y \setminus \{y\})\big) \cup (X \times \{y\})\Big) = \underbrace{\operatorname{card}\big(X \times (Y \setminus \{y\})\big)}_{\substack{\parallel\ (2.1.95) \\ \operatorname{card} X \cdot n}} + \underbrace{\operatorname{card}(X \times \{y\})}_{\substack{\parallel \\ \operatorname{card} X}} =$$

$$= (2.1.66) = \operatorname{card} X \cdot n + \operatorname{card} X = (2.1.70) = \operatorname{card} X \cdot \mathsf{S}(n) = \operatorname{card} X \cdot \operatorname{card} Y.$$

$\square$

Целые числа $\mathbb{Z}^*$. На странице 127 мы определили множество $\mathbb{Z}_+^*$ целых неотрицательных чисел (как множество всех конечных ординалов `FinOrd`, определенное ранее), а в теоремах 2.1.1 и 2.1.3 мы описали операции $+$ и $\cdot$ на нем. Рассмотрим декартово произведение $\mathbb{Z}_+^* \times \mathbb{Z}_+^*$ и введем на нем следующее отношение:

$$(n, m) \sim (n', m') \quad \Leftrightarrow \quad n + m' = n' + m. \tag{2.1.96}$$

Предложение 2.1.5. *Отношение $\sim$ является отношением эквивалентности на множестве $\mathbb{Z}_+^* \times \mathbb{Z}_+^*$.*

Доказательство. Свойство рефлексивности очевидно:

$$(n, m) \sim (n, m) \quad \overset{(2.1.96)}{\Rightarrow} \quad n + m = n + m$$

(последнее верно в силу тождества (0.3.122)). Симметричность:

$$(n, m) \sim (n', m') \quad \overset{(2.1.96)}{\Rightarrow} \quad n + m' = n' + m \quad \overset{(0.3.123)}{\Leftrightarrow} \quad n' + m = n + m' \quad \overset{(2.1.96)}{\Rightarrow} \quad (n', m') \sim (n, m).$$

Транзитивность:

$$(n, m) \sim (n', m') \ \& \ (n', m') \sim (n'', m'') \quad \Rightarrow \quad n + m' = n' + m \ \& \ n' + m'' = n'' + m' \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad (n + m') + (n' + m'') = (n' + m) + (n'' + m') \quad \overset{(2.1.56),(2.1.55)}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow \quad (n'+m')+(n+m'') = (n'+m')+(n''+m) \quad \overset{(2.1.57)}{\Rightarrow} \quad n+m'' = n''+m \quad \overset{(2.1.96)}{\Rightarrow} \quad (n, m) \sim (n'', m'').$$

$\square$

Из предложения 2.1.5 и теоремы 0.3.26 следует, что определено фактор-множество

$$\mathbb{Z}^* = (\mathbb{Z}^*_+ \times \mathbb{Z}^*_+)/\sim \tag{2.1.97}$$

Для всякого элемента $(n, m) \in \mathbb{Z}^*_+ \times \mathbb{Z}^*_+$ обозначим символом $[(n, m)]$ класс эквивалентности, которому принадлежит (n, m):

$$(n, m) \in [(n, m)] \in (\mathbb{Z}^*_+ \times \mathbb{Z}^*_+)/\sim .$$

Тогда на множестве $\mathbb{Z}^*$ можно определить отношение порядка

$$[(n, m)] \leqslant [(n', m')] \quad \Longleftrightarrow \quad n + m' \leqslant n' + m \tag{2.1.98}$$

и операции сложения и умножения

$$[(n, m)] + [(n', m')] = [(n + n', m + m')] \tag{2.1.99}$$

$$[(n, m)] \cdot [(n', m')] = [(n \cdot n' + m \cdot m', n \cdot m' + m \cdot n')] \tag{2.1.100}$$

Свойства алгебраических операций на $\mathbb{Z}^*$:

$$0 + p = p = p + 0, \qquad p \in \mathbb{Z}^* \tag{2.1.101}$$

$$p + q = q + p, \qquad p, q \in \mathbb{Z}^* \tag{2.1.102}$$

$$p + (q + r) = (p + q) + r, \qquad p, q, r \in \mathbb{Z}^* \tag{2.1.103}$$

$$0 \cdot p = 0 = p \cdot 0, \qquad p \in \mathbb{Z}^* \tag{2.1.104}$$

$$1 \cdot p = p = p \cdot 1, \qquad p \in \mathbb{Z}^* \tag{2.1.105}$$

$$p \cdot q = q \cdot p, \qquad p, q \in \mathbb{Z}^* \tag{2.1.106}$$

$$p \cdot (q \cdot r) = (p \cdot q) \cdot r, \qquad p, q, r \in \mathbb{Z}^* \tag{2.1.107}$$

$$p \cdot (q + r) = p \cdot q + p \cdot r, \qquad p, q, r \in \mathbb{Z}^* \tag{2.1.108}$$

$$p \cdot q = 0 \;\Rightarrow\; p = 0 \;\vee\; q = 0, \qquad p, q \in \mathbb{Z}^* \tag{2.1.109}$$

$$(p \neq 0 \;\&\; p \cdot q = p \cdot r) \;\Rightarrow\; q = r, \qquad p, q, r \in \mathbb{Z}^* \tag{2.1.110}$$

Рациональные числа $\mathbb{Q}^*$. После того, как построено множество $\mathbb{Z}^*$ целых чисел, мы рассмотрим декартово произведение $\mathbb{Z}^* \times (\mathbb{Z}^* \setminus \{0\})$ и определяем на нем отношение

$$(p, q) \sim (p', q') \quad \Leftrightarrow \quad p \cdot q' = p' \cdot q. \tag{2.1.111}$$

Предложение 2.1.6. *Отношение $\sim$ является отношением эквивалентности на множестве $\mathbb{Z}^* \times (\mathbb{Z}^* \setminus \{0\})$.*

Доказательство. Здесь (с очевидными поправками) повторяются те же рассуждения, что и в предложении 2.1.5. Рефлексивность:

$$(p, q) \sim (p, q) \quad \overset{(2.1.111)}{\Rightarrow} \quad p + q = p + q$$

(последнее верно в силу тождества (0.3.122)). Симметричность:

$$(p, q) \sim (p', q') \quad \overset{(2.1.111)}{\Rightarrow} \quad p \cdot q' = p' \cdot q \quad \overset{(0.3.123)}{\Leftrightarrow} \quad p' \cdot q = p \cdot q' \quad \overset{(2.1.111)}{\Rightarrow} \quad (p', q') \sim (p, q).$$

Для доказательсва транзитивности нужно рассмотреть два случая. Пусть

$$(p, q) \sim (p', q') \;\&\; (p', q') \sim (p'', q'')$$

Сначала предположим, что $p' = 0$. Тогда получается цепочка

$$(p, q) \sim (0, q') \;\&\; (0, q') \sim (p'', q'') \quad \overset{(2.1.111)}{\Rightarrow} \quad p \cdot q' = \underbrace{0 \cdot q}_{\substack{\| \\ 0}} \;\&\; \underbrace{0 \cdot q''}_{\substack{\| \\ 0}} = p'' \cdot q' \quad \Rightarrow$$

$$\overset{(2.1.109)}{\Rightarrow} \quad p = 0 \;\&\; p'' = 0 \quad \Rightarrow \quad p \cdot q'' = 0 \cdot q'' = 0 = 0 \cdot q = p'' \cdot q \quad \overset{(2.1.111)}{\Rightarrow} \quad (p, q) \sim (p'', q'')$$

После этого предположим, что $p' \neq 0$. Тогда

$$(p,q) \sim (p',q') \ \& \ (p',q') \sim (p'',q'') \quad \Rightarrow \quad p \cdot q' = p' \cdot q \ \& \ p' \cdot q'' = p'' \cdot q' \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad (p \cdot q') \cdot (p' \cdot q'') = (p' \cdot q) \cdot (p'' \cdot q') \quad \overset{(2.1.107),(2.1.106)}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow \quad \underbrace{(p' \cdot q')}_{\substack{\not\Downarrow \\ 0}} \cdot (p \cdot q'') = \underbrace{(p' \cdot q')}_{\substack{\not\Downarrow \\ 0}} \cdot (p'' \cdot q) \quad \overset{(2.1.110)}{\Rightarrow} \quad p \cdot q'' = p'' \cdot q \quad \overset{(2.1.111)}{\Rightarrow} \quad (p,q) \sim (p'',q'')$$

$\square$

Из предложения 2.1.6 и теоремы 0.3.26 следует, что определено фактор-множество

$$\mathbb{Q}^* = \Big(\mathbb{Z}^* \times (\mathbb{Z}^* \setminus \{0\})\Big) / \sim \tag{2.1.112}$$

Для всякого элемента $(p,q) \in \mathbb{Z}^* \times (\mathbb{Z}^* \setminus \{0\})$ обозначим символом $[(p,q)]$ класс эквивалентности, которому принадлежит (p,q):

$$(p,q) \in [(p,q)] \in \Big(\mathbb{Z}^* \times (\mathbb{Z}^* \setminus \{0\})\Big) / \sim .$$

Тогда на множестве $\mathbb{Q}^*$ можно определить отношение порядка,

$$[(p,q)] \leqslant [(p',q')] \quad \Longleftrightarrow \quad 0 \leqslant q \ \& \ 0 \leqslant q' \ \& \ p \cdot q' \leqslant p' \cdot q \tag{2.1.113}$$

и операции сложения и умножения:

$$[(p,q)] + [(p',q')] = [(p \cdot q' + p' \cdot q, q \cdot q')] \tag{2.1.114}$$

$$[(p,q)] \cdot [(p',q')] = [(p \cdot p', q \cdot q')] \tag{2.1.115}$$

Свойства отношения порядка и алгебраических операций на $\mathbb{Q}^*$:

$$0 + a = a = a + 0, \qquad a \in \mathbb{Q}^* \tag{2.1.116}$$

$$a + b = b + a, \qquad a,b \in \mathbb{Q}^* \tag{2.1.117}$$

$$a + (b + c) = (a + b) + c, \qquad a,b,c \in \mathbb{Q}^* \tag{2.1.118}$$

$$0 \cdot a = 0 = a \cdot 0, \qquad a \in \mathbb{Q}^* \tag{2.1.119}$$

$$1 \cdot a = a = a \cdot 1, \qquad a \in \mathbb{Q}^* \tag{2.1.120}$$

$$a \cdot b = b \cdot a, \qquad a,b \in \mathbb{Q}^* \tag{2.1.121}$$

$$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c, \qquad a,b,c \in \mathbb{Q}^* \tag{2.1.122}$$

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c, \qquad a,b,c \in \mathbb{Q}^* \tag{2.1.123}$$

$$a \cdot b = 0 \ \Rightarrow \ a = 0 \ \vee \ b = 0, \qquad a,b \in \mathbb{Q}^* \tag{2.1.124}$$

$$(a \neq 0 \ \& \ a \cdot b = a \cdot c) \ \Rightarrow \ b = c, \qquad a,b,c \in \mathbb{Q}^* \tag{2.1.125}$$

$$a \leqslant a, \qquad a \in \mathbb{Q}^* \tag{2.1.126}$$

$$(a \leqslant b \ \& \ b \leqslant a) \ \Rightarrow \ a = b, \qquad a,b \in \mathbb{Q}^* \tag{2.1.127}$$

$$(a \leqslant b \ \& \ b \leqslant c) \ \Rightarrow \ a \leqslant c, \qquad a,b,c \in \mathbb{Q}^* \tag{2.1.128}$$

$$\forall a \ \forall b \ (a \leqslant b \ \vee \ b \leqslant a), \qquad a,b \in \mathbb{Q}^* \tag{2.1.129}$$

$$(a < x \ \& \ b < y) \ \Rightarrow \ a + x < b + y, \qquad a,b,x,y \in \mathbb{Q}^* \tag{2.1.130}$$

$$(0 \leqslant a \ \& \ 0 \leqslant b) \ \Rightarrow \ 0 \leqslant a \cdot b, \qquad a,b \in \mathbb{Q}^* \tag{2.1.131}$$

$$(0 < a \ \& \ 0 < b) \ \Rightarrow \ 0 < a \cdot b, \qquad a,b \in \mathbb{Q}^* \tag{2.1.132}$$

$$(0 < a < x \ \& \ 0 < b < y) \ \Rightarrow \ 0 < a \cdot b < x \cdot y, \qquad a,b,x,y \in \mathbb{Q}^* \tag{2.1.133}$$

$$(0 < a \ \& \ x < y) \ \Rightarrow \ a \cdot x < a \cdot y, \qquad a,x,y \in \mathbb{Q}^* \tag{2.1.134}$$

$$0 < a < 1 \ \Rightarrow \ a^{-1} > 1, \qquad a \in \mathbb{Q}^* \tag{2.1.135}$$

$$a < b \ \Rightarrow \ \exists x \quad a < x < b, \qquad a,b,x \in \mathbb{Q}^* \tag{2.1.136}$$

- Элементы $n \in \mathbb{Z}^*$ принято отождествлять с элементами $[(n,1)] \in \mathbb{Q}^*$:

$$n = [(n,1)], \qquad n \in \mathbb{Z}^*. \tag{2.1.137}$$

Теорема 2.1.7. *Для любого $x \in \mathbb{Q}^*$ найдется число $n \in \mathbb{Z}^*$ такое что $0 < n$ и $x < n$.*

Вещественные числа $\mathbb{R}^*$. *Дедекиндовым сечением* множества $\mathbb{Q}^*$ рациональных чисел называется пара (A, A') подмножеств $\mathbb{Q}^*$ со следующими свойствами:

(i) A и A' непусты:
$$A \neq \varnothing \neq A'. \tag{2.1.138}$$

(ii) A и A' образуют разбиение множества $\mathbb{Q}^*$:
$$A \cap A' = \varnothing, \qquad A \cup A' = \mathbb{Q}^* \tag{2.1.139}$$

(iii) A лежит левее A':
$$\forall a \in A \quad \forall x \in A' \quad a \leqslant x \tag{2.1.140}$$

(iv) A не содержит максимального элемента:
$$\forall x \in \mathbb{Q}^* \quad \Big((\forall a \in A \ \ a \leqslant x) \quad \Longrightarrow \quad x \notin A \Big) \tag{2.1.141}$$

◇ **2.1.16.** Для всякого элемента $a \in \mathbb{Q}^*$ рассмотрим множества
$$(a) = \{x \in \mathbb{Q}^* : \ x < a\} \tag{2.1.142}$$
и
$$(a)' = \{x \in \mathbb{Q}^* : \ a \leqslant x\} \tag{2.1.143}$$
Тогда пара (A, A'), в которой $A = (a)$, $A' = (a)'$, является является дедекиндовым сечением в $\mathbb{Q}^*$. Такое сечение назвывается *сечением, порожденным элементом* $a \in \mathbb{Q}^*$.

◇ **2.1.17.** Помимо сечений из примера 2.1.16 бывают и другие. Например, можно рассмотреть пару (A, A'), в которой
$$A = \{x \in \mathbb{Q}^* : \ x < 0 \ \vee \ x \cdot x < 2\}$$
и
$$A' = \{x \in \mathbb{Q}^* : \ 0 \leqslant x \ \& \ 2 \leqslant x \cdot x\}$$
и это будет дедекиндово сечение, не порожденное никаким элементом $\mathbb{Q}^*$.

Из (2.1.139) следует, что в дедекиндовом сечении (A, A') левый элемент, A полностью определяет правый, A':
$$A' = \mathbb{Q}^* \setminus A.$$
Поэтому можно описывать дедекиндовы сечения свойствами левой компоненты:

Теорема 2.1.8. *Множество $A \subseteq \mathbb{Q}^*$ тогда и только тогда является первой компонентой некоторого дедекиндова сечения, когда оно удовлетворяет следующим свойствам:*

(i) A непусто и не совпадает с $\mathbb{Q}^*$:
$$\varnothing \neq A \neq \mathbb{Q}^*, \tag{2.1.144}$$

(ii) A замкнуто относительно переходов влево:
$$\forall x \ \forall a \quad x \leqslant a \in A \quad \Longrightarrow \quad x \in A, \tag{2.1.145}$$

(iii) A не содержит максимального элемента:
$$\forall x \in A \ \exists a \in A \quad x < a \tag{2.1.146}$$

С этого момента условимся под дедекиндовым сечением понимать его левую компоненту, то есть произвольное множество $A \subseteq \mathbb{Q}^*$, удовлетворяющее условиям (i)—(iii) теоремы 2.1.8.

Теорема 2.1.9. *Если A – дедекиндово сечение, то справедливо утверждение, двойственное* (2.1.145)*:*
$$\forall z \ \forall y \quad z \geqslant y \notin A \quad \Longrightarrow \quad z \notin A, \tag{2.1.147}$$

Доказательство. Предположим, что $z \geqslant y \notin A$, но $z \in A$. Тогда мы получим $y < z \in A$, и по условию (2.1.145) это означает, что $y \in A$. Это противоречит исходному предположению, что $y \notin A$. □

Пусть символ $\mathbb{R}^*$ обозначает множество всех дедекиндовых сечений множества $\mathbb{Q}^*$ (то есть, в соответствии с нашим соглашением, множество всех подмножеств $A \subseteq \mathbb{Q}^*$, удовлетворяющих условиям теоремы 2.1.8). Определим на $\mathbb{R}^*$ отношение порядка

$$A \leqslant B \quad \Longleftrightarrow \quad A \subseteq B \tag{2.1.148}$$

и отношение строгого порядка

$$A < B \quad \Longleftrightarrow \quad A \subset B \tag{2.1.149}$$

(отношения $\subseteq$ и $\subset$ были определены на с.31).

Теорема 2.1.10. *Отношение $<$ на множестве $\mathbb{R}^*$ дедекиндовых сечений множества Q обладает следующими свойствами:*

- *(i) линейность: для любых сечений A и B либо $A = B$, либо $A < B$, либо $B < A$.*
- *(ii) транзитивность: для любых сечений A, B, C*

$$A < B < C \quad \Longrightarrow \quad A < C. \tag{2.1.150}$$

Доказательство. 1. Свойство (i) можно проще записать формулой

$$A \ne B \ \&\ A \not< B \quad \Longrightarrow \quad B < A,$$

которая доказывается цепочкой

$$A \ne B \ \&\ A \not< B \quad \Longrightarrow \quad A \ne B \ \&\ \neg(A \ne B \ \&\ A \subseteq B) \quad \Longrightarrow \quad A \ne B \ \&\ (A = B \ \vee\ A \nsubseteq B) \quad \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow \quad A \nsubseteq B \quad \Longrightarrow \quad \underbrace{A \setminus B \ne \varnothing \quad \Longrightarrow \quad \exists a \in A \quad \underbrace{\underbrace{a \notin B}_{\substack{\Downarrow\ (2.1.140)\\ \forall b \in B \quad b < a}}}_{\substack{\Downarrow\ (2.1.145)\\ \forall b \in B \quad b \in A\\ \Downarrow\\ B \subseteq A}}}_{\substack{\Downarrow\\ B \subset A}}$$

2. Свойство (ii) вытекает сразу из определения отношения $<$. $\square$

Лемма 2.1.11. *Если $A > (0)$, то найдется $a \in A$ такой что $a > 0$.*

Доказательство. Если $A > (0)$, то $(0) \subseteq A$ и $(0) \ne A$. Значит, найдется число $x \in A \setminus (0)$. Условие $x \notin (0)$ означает, что $x \geqslant 0$. Воспользуемся теперь условием (2.1.146) и подберем $a \in A$ так, чтобы $x < a$. Тогда мы получим $0 \leqslant x < a \in A$, и отсюда $0 < a \in A$. $\square$

Лемма 2.1.12. *Для всякого сечения A и любого числа $q \in \mathbb{Q}^*$, $q > 0$, найдется такое число $a \in A$ и такое число $r \in \mathbb{Q}^*$, $r > 0$, что*

$$a \in A \ \&\ a + q - r \notin A \tag{2.1.151}$$

Доказательство. Зафиксируем $b \in A$ и рассмотрим последовательность

$$x_n = b + q \cdot n.$$

Предположим, что все элементы этой последовательности лежат в A:

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad x_n = b + q \cdot n \in A. \tag{2.1.152}$$

Тогда если взять какой-нибудь элемент $y \notin A$, то мы получим

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad x_n = b + q \cdot n \leqslant y.$$

То есть

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad n \leqslant \frac{y - b}{q}.$$

Это противоречит теореме 2.1.7. Значит, наше предположение (2.1.152) неверно, и выполняется обратное:

$$\exists n \in \mathbb{N}^* \quad x_n = b + q \cdot n \notin A. \tag{2.1.153}$$

Рассмотрим множество $M = \{n \in \mathbb{N}^* : \ b + q \cdot n \notin A\}$ и пусть m – его минимальный элемент[5], то есть

$$b + q \cdot m - q \in A \ \& \ b + q \cdot m \notin A. \tag{2.1.154}$$

Рассмотрим два случая.

1. Если $b + q \cdot m$ — не минимальный элемент множества $\mathbb{Q}^* \setminus A$, то есть существует $x \notin A$ такой что $x < b + q \cdot m$, то мы полагаем $a = b + q \cdot m - q$, $r = b + q \cdot m - x$ и тогда у нас получается:

$$a = b + q \cdot m - q \in A \quad \& \quad a + q - r = b + q \cdot m - (b + q \cdot m - x) = x \notin A.$$

2. Если же $b + q \cdot m$ — минимальный элемент множества $\mathbb{Q}^* \setminus A$, то есть для любого $x \notin A$ выполняется $b + q \cdot m \leqslant x$, то мы полагаем $a = b + q \cdot m - \frac{q}{2}$, $r = \frac{q}{2}$ и тогда у нас получается:

$$a = b + q \cdot m - \frac{q}{2} \in A \quad \& \quad a + q - r = b + q \cdot m + \frac{q}{2} - \frac{q}{2} = b + q \cdot m \notin A.$$

□

- *Сумма сечений* определяется равенством

$$A + B = \{a + b; \ a \in A, \ b \in B\} \tag{2.1.155}$$

Теорема 2.1.13. *Если A и B – сечения, то $A + B$ – тоже сечение.*

Доказательство. Надо проверить условия (i)-(iii) теоремы 2.1.8.

1. Прежде всего, $A + B \neq \varnothing$, потому что

$$A \neq \varnothing \ \& \ B \neq \varnothing \quad \Longrightarrow \quad \exists a \in A \ \& \ \exists b \in B \quad \Longrightarrow \quad \exists a + b \in A + B.$$

С другой стороны, $A + B \neq \mathbb{Q}^*$, потому что

$$\begin{aligned} A \neq \mathbb{Q}^* \ \& \ B \neq \mathbb{Q}^* \quad &\Longrightarrow \quad \exists x \notin A \ \& \ \exists y \notin B \quad \Longrightarrow \\ &\Longrightarrow \quad \exists x \in \mathbb{Q}^* \quad (\forall a \in A \quad a < x) \ \& \ \exists y \in \mathbb{Q}^* \quad (\forall b \in B \quad b < y) \quad \Longrightarrow \\ &\Longrightarrow \quad \exists x, y \in \mathbb{Q}^* \quad \forall a \in A \quad \forall b \in B \quad a + b < x + y \quad \Longrightarrow \quad A + B \neq \mathbb{Q}^*. \end{aligned}$$

2. Пусть $z < c \in A + B$, то есть $z < a + b$, где $a \in A$ и $b \in B$. Положим $t = z - b$. Тогда

$$t < a \in A \quad \Longrightarrow \quad t \in A \quad \Longrightarrow \quad z = \underset{A}{\underset{\Cap}{t}} + \underset{B}{\underset{\Cap}{b}} \in A + B$$

3. Если $z \in A + B$, то $z = x + y$ для некоторых $x \in A$ и $y \in B$. Для них, воспользовавшись (2.1.146), можно подобрать a и b такие что $x < a \in A$ и $y < b \in B$, и мы получим $z = x + y < a + b \in A + B$. □

- *Противоположное сечение* к сечению A определяется равенством:

$$-A = \{x \in \mathbb{Q}^* : \ \exists y \in \mathbb{Q}^* \quad y > 0 \ \& \ -x - y \notin A\} \tag{2.1.156}$$

Теорема 2.1.14. *Если A – сечение, то $-A$ – тоже сечение.*

Доказательство. Надо проверить условия (i)-(iii) теоремы 2.1.8.

1. Прежде всего, из $A \neq \mathbb{Q}^*$ следует, что существует $z \notin A$. Положим $x = -z - 1$, тогда $-x - 1 \notin A$. Поскольку $0 < 1 \in \mathbb{Q}^*$, это означает, что $x \in -A$. Поэтому мы можем сделать вывод, что $-A \neq \varnothing$.

С другой стороны, $A \neq \varnothing$, потому существует $a \in A$. Положим $x = -a$, тогда $-x = a \in A$, и поэтому для всякого $y > 0$ мы получим

$$-x - y = a - y < a \in A \quad \overset{(2.1.145)}{\Longrightarrow} \quad -x - y \in A$$

Это верно для любого $y > 0$, поэтому $x \notin -A$. Мы можем таким образом заключить, что $-A \neq \mathbb{Q}^*$.

2. Пусть $x < b \in -A$. Условие $b \in -A$ означает, что $-b - y \notin A$ для некоторого $y > 0$. Теперь мы получаем:

$$-x > -b \quad \Longrightarrow \quad -x - y > -b - y \notin A \quad \overset{(2.1.147)}{\Longrightarrow} \quad -x - y \notin A \quad \Longrightarrow \quad x \in -A.$$

[5]Напомним, что минимальный элемент ординала был определен на с.51.

3. Пусть $x \in -A$, то есть $-x-y \notin A$ для некоторого $y > 0$. Тогда, положив $b = x+\frac{y}{2} = x+y\cdot 2^{-1}$, мы получим, с одной стороны,

$$x < x + \frac{y}{2} = b,$$

а, с другой,

$$-b - \frac{y}{2} = -x - y \notin A \quad \Longrightarrow \quad b \in -A.$$

□

- *Произведение сечений* определяется сначала для неотрицательных сечений

$$(0) < A \ \&\ (0) < B \quad \Longrightarrow \quad A \cdot B = \{x \in \mathbb{Q}^* : \ \exists a \in A\ \exists b \in B \quad a > \ \&\ b > 0 \ \&\ x \leqslant a \cdot b\}, \tag{2.1.157}$$

а после этого для остальных сечений:

$$A \cdot B = \begin{cases} (-A)\cdot(-B), & A < (0)\ \&\ B < (0) \\ -((-A)\cdot B), & A < (0) < B \\ -(A\cdot(-B)), & B < (0) < A \\ (0), & A = (0)\ \vee\ B = (0) \end{cases} \tag{2.1.158}$$

Теорема 2.1.15. *Если A и B – сечения, то $A \cdot B$ – тоже сечение.*

Доказательство. Здесь, как и раньше проверяются условия (i)-(iii) теоремы 2.1.8. В силу (2.1.158), нам достаточно рассмотреть случай $A > (0)$ и $B > (0)$.

1. Из $A > (0)$ по лемме 2.1.11 следует, что существует $a \in A$ такой что $a > 0$. По той же причине из $B > (0)$ следует, что существует $b \in B$ такой что $b > 0$. В силу (2.1.132), $0 < a \cdot b$. Значит, в силу (2.1.157), $0 \in A \cdot B$. Из этого мы делаем вывод, что $A \cdot B \neq \varnothing$.

Далее, из $A \neq \mathbb{Q}^*$ следует, что существует $x \notin A$. По той же причине, существует $y \notin B$. Покажем, что

$$x \cdot y \notin A \cdot B. \tag{2.1.159}$$

Предположим, что это не так:

$$x \cdot y \in A \cdot B. \tag{2.1.160}$$

Тогда существуют $a \in A$ и $b \in B$ такие, что $a > 0$, $b > 0$ и

$$x \cdot y \leqslant a \cdot b \tag{2.1.161}$$

Но из $a \in A$ и $x \notin A$ следует

$$a < x.$$

А из $b \in B$ и $y \notin B$ следует

$$b < y.$$

Добавив условия $a > 0$, $b > 0$, мы получим

$$0 < a < x \ \&\ 0 < b < y.$$

откуда, в силу (2.1.133),

$$0 < a \cdot b < x \cdot y.$$

Это противоречит условию (2.1.161), и значит, наше предположение (2.1.160) также неверно. То есть верно (2.1.159), и поэтому $A \cdot B \neq \mathbb{Q}^*$.

2. Пусть $z \leqslant c \in A \cdot B$. Из $c \in A \cdot B$ следует, что существуют $a \in A$ и $b \in B$ такие, что $a > 0$, $b > 0$ и $c \leqslant a \cdot b$. Применяя (2.1.128), получаем $z \leqslant a \cdot b$, что в силу (2.1.157) дает $z \in A \cdot B$.

3. Пусть $z \in A \cdot B$. В силу (2.1.157) это означает, что существуют $x \in A$ и $y \in B$ такие, что $x > 0$, $y > 0$ и $z \leqslant x \cdot y$. Воспользуемся (2.1.146) и подберем a и b так, чтобы $x < a \in A$ и $y < b \in B$. Тогда

$$0 < x < a \ \&\ 0 < y < b \quad \Longrightarrow \quad 0 < x \cdot y < a \cdot b \quad \Longrightarrow \quad z \leqslant x \cdot y < a \cdot b.$$

Положив $c = a \cdot b$, мы в силу (2.1.157), получим $z < c \in A \cdot B$. □

- *Обратное сечение* A^{-1} определяется правилом

$$A^{-1} = \begin{cases} \{x \in \mathbb{Q}^* : \ x \leqslant 0 \ \vee\ \exists y \in \mathbb{Q}^* \quad y > 0 \ \&\ x^{-1} - y \notin A\}, & A > (0) \\ -((-A)^{-1}), & A < (0) \end{cases} \tag{2.1.162}$$

Лемма 2.1.16. *Если $A > (0)$, то $A^{-1} > (0)$.*

Доказательство. По лемме 2.1.11 найдется $a \in A$ такой, что $a > 0$. Выберем какой-нибудь $z \notin A$. Поскольку $0 < a < z$, мы получаем, что $0 < z$. Положим $c = (z+1)^{-1}$. Тогда

$$c^{-1} - 1 = (z+1) - 1 = z \notin A \quad \Longrightarrow \quad c \in A^{-1}.$$

При этом,

$$z > 0 \quad \Longrightarrow \quad c = (z+1)^{-1} > 0.$$

□

Теорема 2.1.17. *Если A – сечение, то A^{-1} – тоже сечение.*

Доказательство. Здесь, как и раньше проверяются условия (i)-(iii) теоремы 2.1.8. При этом достаточно рассмотреть случай $A > (0)$.

1. Из $A \neq \mathbb{Q}^*$ следует, что $\exists p \notin A$. Выберем произвольный $x \in \mathbb{Q}^*$ так чтобы $x^{-1} > p$. Тогда мы получим, что

$$\exists y > 0 \quad x^{-1} - y > p \notin A \quad \overset{(2.1.147)}{\Longrightarrow} \quad x^{-1} - y \notin A \quad \overset{(2.1.162)}{\Longrightarrow} \quad x \in A^{-1} \quad \Longrightarrow \quad A^{-1} \neq \varnothing.$$

С другой стороны, из леммы 2.1.11 следует, что существует $a \in A$ такой что $a > 0$. Воспользуемся (2.1.136) м выберем x так, чтобы $0 < \frac{1}{x} < a$. Тогда для всякого $y > 0$ мы получим

$$\frac{1}{x} - y < a \in A \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{x} - y \in A \quad \Longrightarrow \quad x \notin A^{-1} \quad \Longrightarrow \quad A^{-1} \neq \varnothing.$$

2. Пусть $x < b \in A^{-1}$. Если $x \leqslant 0$, то по формуле (2.1.162) мы сразу получаем, что $x \in A^{-1}$. Поэтому для нас важен случай $x > 0$. Тогда возникает система импликаций

$$\begin{array}{ccccc}
0 < x < b \in A^{-1} & \Longrightarrow & 0 < b \in A^{-1} & \Longrightarrow & \exists y > 0 \quad b^{-1} - y \notin A \\
\Downarrow & & & & \Downarrow \\
0 < x < b & \Longrightarrow & x^{-1} > b^{-1} & \Longrightarrow & \exists y > 0 \quad x^{-1} - y > b^{-1} - y \notin A \\
 & & & & \Downarrow \scriptstyle (2.1.147) \\
 & & & & \exists y > 0 \quad x^{-1} - y \notin A \\
 & & & & \Downarrow \scriptstyle (2.1.162) \\
 & & & & x \in A^{-1}.
\end{array}$$

3. Пусть $x \in A^{-1}$. Снова рассмотрим два случая. Если $x \leqslant 0$, то, по лемме 2.1.16, $A^{-1} > 0$, поэтому по лемме 2.1.11 существует $c \in A^{-1}$ такой что $c > 0$, и мы получаем $x \leqslant 0 < c \in A^{-1}$. Если же $x > 0$, то условие $x \in A^{-1}$ означает, что существует $y > 0$ такой что $x^{-1} - y \notin A$. Это число y можно при необходимости уменьшить, чтобы $0 < y < x^{-1}$. Зафиксируем такой y и выберем a так, чтобы

$$a^{-1} = x^{-1} - \frac{y}{2}.$$

Тогда

$$a^{-1} - \frac{y}{2} = x^{-1} - y \notin A \quad \overset{(2.1.147)}{\Longrightarrow} \quad a \in A^{-1}.$$

С другой стороны,

$$a^{-1} = x^{-1} - \frac{y}{2} \quad \Longrightarrow \quad a^{-1} < x^{-1}$$

и

$$0 < y < x^{-1} \quad \Longrightarrow \quad a^{-1} = x^{-1} - \frac{y}{2} > \frac{y}{2} > 0 \quad \Longrightarrow \quad a^{-1} > 0$$

и поэтому

$$0 < a^{-1} < x^{-1} \quad \Longrightarrow \quad 0 < x < a.$$

□

Теорема 2.1.18. *Отношение $\leqslant$ и операции $+$ и $\cdot$ на множестве $\mathbb{R}^*$ дедекиндовых сечений множества $\mathbb{Q}^*$ обладают свойствами*

$$A + B = B + A \tag{2.1.163}$$

$$(A + B) + C = A + (B + C) \tag{2.1.164}$$

$$A + (0) = A \tag{2.1.165}$$
$$A + (-A) = (0) \tag{2.1.166}$$
$$-(-A) = A \tag{2.1.167}$$
$$-(A + B) = (-A) + (-B) \tag{2.1.168}$$
$$A > (0) \iff -A < (0) \tag{2.1.169}$$
$$A < (0) \iff -A > (0) \tag{2.1.170}$$
$$A > (0)\ \&\ B > (0) \implies A \cdot B > (0) \tag{2.1.171}$$
$$A < (0) < B \implies A \cdot B < (0) \tag{2.1.172}$$
$$A < (0)\ \&\ B < (0) \implies A \cdot B > (0) \tag{2.1.173}$$
$$A \leqslant B \implies \forall C \quad A + C \leqslant B + C \tag{2.1.174}$$
$$(-A) \cdot B = -(A \cdot B) \tag{2.1.175}$$
$$A \cdot B = B \cdot A \tag{2.1.176}$$
$$(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C) \tag{2.1.177}$$
$$A \cdot (1) = A \tag{2.1.178}$$
$$A \cdot A^{-1} = (1), \quad A \neq (0) \tag{2.1.179}$$
$$(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C \tag{2.1.180}$$

Доказательство. 1. Тождество (2.1.163):

$$A + B = (2.1.155) = \{a + b;\ a \in A,\ b \in B\} = \{b + a;\ a \in A,\ b \in B\} = (2.1.155) = B + A.$$

2. Тождество (2.1.164):

$$\begin{aligned}(A + B) + C = \{a + b;\ a \in A,\ b \in B\} + C = \{(a + b) + c;\ a \in A,\ b \in B,\ c \in C\} = \\ = \{a + (b + c);\ a \in A,\ b \in B,\ c \in C\} = A + \{b + c;\ b \in B,\ c \in C\} = A + (B + C).\end{aligned}$$

3. Тождество (2.1.165):

$$A + (0) = \{a + b;\ a \in A,\ b \in (0)\} = \{a + b;\ a \in A,\ b < 0\} = A$$

4. Тождество (2.1.166) доказывается так. Пусть сначала $z \in A + (-A)$. Это значит, что $z = a + x$ для некоторых $a \in A$ и $x \in -A$. Второе означает, что $-x - y \notin A$ для некоторого $y > 0$. Поскольку $a \in A$ и $-x - y \notin A$, мы получаем цепочку

$$a < -x - y \implies a + x < -y < 0 \implies z = a + x \in (0).$$

Это доказывает включение $A + (-A) \subseteq (0)$. Наоборот, пусть $z \in (0)$, то есть $z < 0$. Воспользуемся леммой 2.1.12 и выберем $a \in A$ так, чтобы для некоторого $r > 0$ выполнялось

$$a - z - r \notin A.$$

Тогда если взять $x = z - a$, то мы получим, во-первых,

$$-x - r = a - z - r \notin A \implies x \in -A,$$

и, во-вторых,

$$z = a + x \in A + (-A).$$

Это доказывает включение $(0) \subseteq A + (-A)$.

5. Тождество (2.1.168). Сначала система импликаций

$$\begin{aligned} z \in (-A) + (-B) \implies \exists x \in -A\ \exists y \in -B \quad z = x + y \implies \\ \implies \exists x\ \exists y\ \exists p > 0\ \exists q > 0 \quad \underbrace{\underbrace{-x - p \notin A}_{\substack{\Downarrow \\ \forall a \in A\ -x-p > a}} \quad \& \quad \underbrace{-y - q \notin B}_{\substack{\Downarrow \\ \forall b \in B\ -y-q > b}}}_{\substack{\Downarrow \\ \forall a \in A\ \forall b \in B\ -z-p-q = -x-p-y-q > a+b \\ \Downarrow \\ -z-p-q \notin A+B \\ \Downarrow \\ z \in -(A+B)}} \quad \& \ z = x + y \end{aligned}$$

– доказывает включение
$$(-A)+(-B)\subseteq -(A+B).$$
А затем обратное включение
$$-(A+B)\subseteq (-A)+(-B) \tag{2.1.181}$$
– доказывается следующими рассуждениями. Пусть $z\in -(A+B)$, то есть
$$-z-r\notin A+B \tag{2.1.182}$$
для некоторого $r>0$. Воспользуемся леммой 2.1.12 и подберем $a'\in A$ так, чтобы
$$a'+\frac{r}{2}-s\notin A, \tag{2.1.183}$$
для некоторого $s>0$. Положим
$$x=-a'-\frac{r}{2}$$
Тогда условие (2.1.183) будет означать, что
$$x\in -A.$$
Обозначим
$$y=-z-x.$$
Условие (2.1.182) можно переписать так:
$$\forall a\in A\ \forall b\in B\quad a+b<-z-r.$$
Если вместо a подставить a', то мы получим цепочку:
$$\forall b\in B\quad a'+b<-z-r \quad\Longrightarrow\quad \forall b\in B\quad b<-z-a'-r=-z\underbrace{-a'-\frac{r}{2}}_{\substack{\parallel\\ -x}}-\frac{r}{2}=y-\frac{r}{2}\quad\Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow\quad y-\frac{r}{2}\notin B\quad\Longrightarrow\quad y\in -B.$$
Это доказывает (2.1.181).

6. Тождество (2.1.167) доказывается цепочкой
$$x\in-(-A)\quad\Longleftrightarrow\quad \exists y>0\quad -x-y\notin -A\quad\Longleftrightarrow$$
$$\Longleftrightarrow\quad \exists y>0\ \forall z>0\quad x+y-z\in A\quad\overset{(2.1.145),(2.1.146)}{\Longleftrightarrow}\quad x\in A$$

7. Свойство (2.1.169) доказывается цепочкой
$$-A<(0)\quad\Longleftrightarrow\quad\exists z<0\quad z\notin -A\quad\Longleftrightarrow\quad \exists z<0\ \forall y>0\quad -z-y\in A\quad\Longleftrightarrow$$
$$\Longleftrightarrow\quad \exists x>0\ \forall y>0\quad x-y\in A\quad\Longleftrightarrow\quad \exists x>0\quad x\in A\quad\Longleftrightarrow\quad A>(0).$$

8. Свойство (2.1.170) следует из (2.1.169) и (2.1.167).

9. Свойство (2.1.171):
$$A>(0)\ \&\ B>(0)\quad\Longrightarrow\quad\Big(\exists a\in A\quad a>0\Big)\ \&\ \Big(\exists b\in B\quad b>0\Big)\quad\Longleftrightarrow$$
$$\Longleftrightarrow\quad \exists a\in A\ \exists b\in B\quad 0<a\cdot b\quad\Longrightarrow\quad 0\in A\cdot B\quad\Longrightarrow\quad A\cdot B>(0)$$

10. Свойство (2.1.172):
$$A<(0)<B\quad\overset{(2.1.170)}{\Longrightarrow}\quad -A>(0)\ \&\ B>(0)\quad\overset{(2.1.171)}{\Longrightarrow}$$
$$\Longrightarrow\quad(-A)\cdot B>(0)\quad\overset{(2.1.169)}{\Longrightarrow}\quad A\cdot B=(2.1.158)=-((-A)\cdot B)<(0)$$

11. Свойство (2.1.173) доказывается по аналогии с (2.1.172).

12. Свойство (2.1.174):

$$A \leqslant B \overset{(2.1.148)}{\Longrightarrow} A \subseteq B \overset{(2.1.171)}{\Longrightarrow}$$
$$\Longrightarrow \quad A + C = \{a + c;\ a \in A,\ c \in C\} \subseteq \{b + c;\ b \in B,\ c \in C\} = B + C$$

13. Для доказательства (2.1.175) нужно рассмотреть несколько случаев. Если $A > (0)$ и $B > (0)$, то

$$\underbrace{(-A)}_{\substack{\wedge\,(2.1.169)\\ 0}} \cdot B = (2.1.158) = -((-(-A)) \cdot B) = (2.1.167) = -(A \cdot B).$$

Если $A < (0)$ и $B < (0)$, то

$$\underbrace{(-A)}_{\substack{(2.1.170)\ \vee\\ 0}} \cdot \underset{\substack{\wedge\\ 0}}{B} = (2.1.158) = -((-A) \cdot (-B)) = (2.1.158) = -(A \cdot B).$$

И так же для остальных случаев.

14. Для (2.1.176) нужно рассмотреть несколько случаев. Если $A > (0)$ и $B > (0)$, то

$$A \cdot B = (2.1.157) = \{x \in \mathbb{Q}^* :\ \exists a \in A\ \exists b \in B \quad a > 0\ \&\ b > 0\ \&\ x \leqslant a \cdot b\} =$$
$$= \{x \in \mathbb{Q}^* :\ \exists a \in A\ \exists b \in B \quad a > 0\ \&\ b > 0\ \&\ x \leqslant b \cdot a\} = (2.1.157) = B \cdot A.$$

Если $(0) > A$ и $(0) > B$, то

$$A \cdot B = (2.1.158) = (-A) \cdot (-B) = {\scriptstyle (\text{уже доказано})} = (-B) \cdot (-A) = (2.1.158) = B \cdot A.$$

Если $A < (0) < B$, то

$$A \cdot B = (2.1.158) = -((-A) \cdot B) = {\scriptstyle (\text{уже доказано})} = -(B \cdot (-A)) = (2.1.158) = B \cdot A.$$

Если $B < (0) < A$, то

$$A \cdot B = (2.1.158) = -(A \cdot (-B)) = {\scriptstyle (\text{уже доказано})} = -((-B) \cdot A) = (2.1.158) = B \cdot A.$$

Если $A = (0)$ или $B = (0)$, то

$$A \cdot B = (2.1.158) = (0) = (2.1.158) = B \cdot A.$$

15. Тем же приемом доказывается тождество (2.1.177). Если $A > (0)$, $B > (0)$ и $C > (0)$, то

$$(A \cdot B) \cdot C = (2.1.157) = \{x \in \mathbb{Q}^* :\ \exists y \in A \cdot B\ \exists c \in C \quad y > 0\ \&\ c > 0\ \&\ x \leqslant y \cdot c\} =$$
$$= (2.1.157) = \{x \in \mathbb{Q}^* :\ \exists a \in A\ \exists b \in B\ \exists c \in C \quad a > 0\ \&\ b > 0\ \&\ c > 0\ \&\ x \leqslant (a \cdot b) \cdot c\} =$$
$$= \{x \in \mathbb{Q}^* :\ \exists a \in A\ \exists b \in B\ \exists c \in C \quad a > 0\ \&\ b > 0\ \&\ c > 0\ \&\ x \leqslant a \cdot (b \cdot c)\} = (2.1.157) =$$
$$= \{x \in \mathbb{Q}^* :\ \exists a \in A\ \exists z \in B \cdot C \quad a > 0\ \&\ z > 0\ \&\ x \leqslant a \cdot z\} = (2.1.157) = A \cdot (B \cdot C).$$

Остальные варианты рассматриваются так же как при доказательстве (2.1.176). Например, для $A < (0) < B$ и $C > (0)$ получаем:

$$(\underset{\substack{\wedge\\ 0}}{A} \cdot \underset{\substack{\vee\\ 0}}{B}) \cdot C = (2.1.158) = \underbrace{(-((-A) \cdot B))}_{\substack{\wedge\,(2.1.169),(2.1.171)\\ 0}} \cdot C = (2.1.175) = -(((-A) \cdot B) \cdot C) =$$
$$= {\scriptstyle (\text{уже доказано})} = -((-A) \cdot \underbrace{(B \cdot C)}_{\substack{\vee\,(2.1.171)\\ 0}}) = (2.1.158) = \underset{\substack{\wedge\\ 0}}{A} \cdot \underbrace{(B \cdot C)}_{\substack{\vee\\ 0}}.$$

16. Тождество (2.1.178). Пусть сначала $A > (0)$. Тогда, прежде всего,

$$x \in A \cdot (1) \quad \Longrightarrow \quad \exists a \in A\ \exists b \in (1) \quad a > 0\ \&\ b > 0\ \&\ x < a \cdot b \quad \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow \quad \exists a \in A\ \exists b \quad a > 0\ \&\ 0 < b < 1\ \&\ x < a \cdot b < (2.1.133) < a \cdot 1 = (2.1.120) = a \quad \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \quad \exists a\in A \quad x<a \quad \overset{(2.1.145)}{\Longrightarrow} \quad x\in A,$$

и это доказывает включение

$$A\cdot(1)\subseteq A$$

Докажем далее обратное включение. Пусть $x\in A$. Если $x\leqslant 0$, то выбрав произвольные $a\in A$, $a>0$ и $b\in(1)$, $b>0$, мы получим

$$x\leqslant 0<a\cdot b,$$

и это означает, что $x\in A\cdot(1)$. Поэтому важен более сложный случай, когда $x>0$. Для него мы получим:

$$x\in A \quad\Longrightarrow\quad \exists a\in A \quad a>0\ \&\ x<a \quad\overset{(2.1.134)}{\Longrightarrow}\quad \exists a\in A \quad a>0\ \&\ x\cdot a^{-1}<a\cdot a^{-1}=1 \quad\overset{(2.1.136)}{\Longrightarrow}$$
$$\Longrightarrow\quad \exists a\in A\ \exists b \quad a>0\ \&\ \underbrace{x\cdot a^{-1}}_{\substack{\vee\\ 0}}<b<1 \quad\Longrightarrow\quad \exists a\in A\ \exists b\in(1) \quad a>0\ \&\ b>0\ \&\ x\cdot a^{-1}<b \quad\overset{(2.1.136)}{\Longrightarrow}$$
$$\Longrightarrow\quad \exists a\in A\ \exists b\in(1) \quad a>0\ \&\ b>0\ \&\ x=x\cdot a^{-1}\cdot a<b\cdot a=a\cdot b \quad\Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow\quad \exists a\in A\ \exists b\in(1) \quad a>0\ \&\ b>0\ \&\ x<a\cdot b \quad\Longrightarrow\quad x\in A\cdot(1).$$

Это доказывает включение

$$A\subseteq A\cdot(1),$$

и, вместе с ним, равенство (2.1.178) для случая $A>(0)$. Теперь если $A<(0)$, то мы получаем

$$A\cdot(1)=(2.1.158)=-((-A)\cdot(1))=\text{(уже доказано)}=-(-A)=(2.1.167)=A.$$

А если $A=(0)$, то

$$A\cdot(1)=(0)\cdot(1)=(2.1.158)=(0)=A.$$

17. Тождество (2.1.179). Пусть сначала $A>(0)$. Тогда по лемме 2.1.16, $A^{-1}>(0)$, и мы, прежде всего, получаем цепочку

$$x\in A\cdot A^{-1} \quad\Longrightarrow\quad \exists a\in A\ \exists b\in A^{-1} \quad a>0\ \&\ b>0\ \&\ x<a\cdot b \quad\overset{(2.1.162)}{\Longrightarrow}$$
$$\Longrightarrow\quad \exists a>0\ \exists b>0\ \exists y>0 \quad \underbrace{\underbrace{a\in A\ \&\ b^{-1}-y\notin A}_{\substack{\Downarrow\\ a<b^{-1}-y\\ \Downarrow\\ a\cdot b<(b^{-1}-y)\cdot b=1-y\cdot b<1}}\ \&\ x<a\cdot b}_{\substack{\Downarrow\\ x<a\cdot b<1}} \quad\Longrightarrow\quad x<1 \quad\Longrightarrow\quad x\in(1),$$

доказывающую включение

$$A\cdot A^{-1}\subseteq(1).$$

Чтобы доказать обратное включение,

$$(1)\subseteq A\cdot A^{-1}, \tag{2.1.184}$$

зафиксируем $x\in(1)$, то есть $x<1$. Если $x\leqslant 0$, то мы сразу можем выбрать $a\in A$, $a>0$, и $b\in A^{-1}$, $b>0$, для которых получится

$$x\leqslant 0<a\cdot b \quad\Longrightarrow\quad x\in x\in A\cdot A^{-1}.$$

Поэтому важнен немного более сложный случай $0<x<1$. Для него по формуле (2.1.135), $x^{-1}>1$, поэтому положив $p=1-x^{-1}$, мы получим

$$x^{-1}=1+p,\quad p>0 \tag{2.1.185}$$

Поскольку $a\cdot p>0$, по лемме 2.1.12 существуют $r>0$ и $a\in A$ такие, что

$$a\in A\ \&\ a+a\cdot p-r\notin A$$

Положив $c=x\cdot a^{-1}$, мы получим

$$c^{-1}-r=a\cdot x^{-1}-r=a\cdot(1+p)-r=a+a\cdot p-r\notin A \quad\Longrightarrow\quad c\in A^{-1}.$$

Теперь если мы возьмем какое-нибудь $b \in A^{-1}$ так, чтобы $c < b$, мы получим:

$$x = a \cdot b < (2.1.134) < a \cdot c \quad \Longrightarrow \quad x \in A \cdot A^{-1}.$$

Это доказывает включение (2.1.184), и вместе с ним, формулу (2.1.179) для случая $A > (0)$. Случай $A < (0)$ будет его следствием:

$$A \cdot A^{-1} = (2.1.158) = (-A) \cdot (-(A^{-1})) = (2.1.162) =$$
$$= (-A) \cdot (-(-(-A)^{-1})) = (2.1.167) = (-A) \cdot (-A)^{-1} = \text{(уже доказано)} = (1).$$

18. В тождестве (2.1.180) сначала мы предполагаем, что $A + B > (0)$ и $C > (0)$. Тогда

$$x \in (A+B) \cdot C \quad \Longleftrightarrow \quad \exists y \in A + B \ \exists c \in C \quad x \leqslant y \cdot c \quad \Longleftrightarrow$$
$$\Longleftrightarrow \quad \exists a \in A \ \exists b \in B \ \exists c \in C \quad x \leqslant (a+b) \cdot c = \underbrace{a \cdot c}_{\substack{\cap \\ A \cdot C}} + \underbrace{b \cdot c}_{\substack{\cap \\ B \cdot C}} \in A \cdot C + B \cdot C \quad \Longleftrightarrow$$
$$\Longleftrightarrow \quad x \in A \cdot C + B \cdot C$$

После этого рассматриваются остальные случаи. Например, при $A + B < (0)$ и $C > (0)$ мы получаем

$$(A+B) \cdot C = (2.1.158) = -((-(A+B)) \cdot C) = (2.1.168) = -(((-A) + (-B)) \cdot C) = \text{(уже доказано)} =$$
$$= -((-A) \cdot C + (-B) \cdot C) = (2.1.168) = (-(-A) \cdot C) + (-(-B) \cdot C) = (2.1.175) =$$
$$= (-(-A)) \cdot C + (-(-B)) \cdot C = (2.1.167) = A \cdot C + B \cdot C.$$

Случаи $A + B > (0)$ & $C < (0)$ и $A + B < (0)$ & $C < (0)$ рассматриваются так же. Случай $C = (0)$ тоже очевиден. Остается случай $A + B = (0)$, то есть $B = (-A)$. Для него мы получаем

$$(A+B) \cdot C = (0) \cdot C = (2.1.158) = (0) = A \cdot C + (-(A \cdot C)) = (2.1.175) = A \cdot C + ((-A) \cdot C) = A \cdot C + B \cdot C.$$

□

Теорема 2.1.19 (Р. Дедекинд). *Пусть X и Y – два непустых множества в $\mathbb{R}^*$, причем*

$$\forall A \in X \ \forall B \in Y \quad A \leqslant B. \tag{2.1.186}$$

Тогда найдется сечение $C \in \mathbb{R}^*$ такое что

$$\forall A \in X \ \forall B \in Y \quad A \leqslant C \leqslant B. \tag{2.1.187}$$

Доказательство. Положим

$$C = \cup X = \bigcup_{A \in X} A.$$

1. Проверим сначала, что C — сечение. Прежде всего, поскольку множество X непусто, найдется $A \in X$, и поскольку A – сечение, это множество тоже должно быть непусто. Мы получаем, что

$$\varnothing \neq A \subseteq C \quad \Longrightarrow \quad C \neq \varnothing.$$

С другой стороны, поскольку Y непусто, найдется $B \in Y$, и для него будет справедливо неравенство $A \leqslant B$, при любом $A \in X$. Это означает, что все элементы $A \in X$ содержатся в B, и мы получаем цепочку[6]

$$\forall A \in X \quad A \subseteq B \quad \Longrightarrow \quad C = \bigcup_{A \in X} A \subseteq B \subset \mathbb{Q}^* \quad \Longrightarrow \quad C \neq \mathbb{Q}^*.$$

Свойство (2.1.145) для C доказывается цепочкой

$$x < a \in C = \bigcup_{A \in X} A \quad \Longrightarrow \quad \exists A \in X \quad x < a \in A \quad \overset{A \in \mathbb{R}^*}{\Longrightarrow} \quad \exists A \in X \quad x \in A \quad \overset{A \subseteq C}{\Longrightarrow} \quad x \in C$$

А свойство (2.1.146) — цепочкой

$$x \in C = \bigcup_{A \in X} A \quad \Longrightarrow \quad \exists A \in X \quad x \in A \quad \overset{A \in \mathbb{R}^*}{\Longrightarrow} \quad \exists A \in X \quad \exists a \in A \quad x < a \in A \quad \overset{A \subseteq C}{\Longrightarrow} \quad x < a \in C$$

[6]Напомним, что отношение $M \subset N$ было определено на с.32 и означает, что $M \subseteq N$ и $M \neq N$.

2. После этого остается убедиться, что справедливо условие (2.1.187). Первое неравенство в нем,

$$\forall A \in X \quad A \leqslant C,$$

эквивалентно включению

$$\forall A \in X \quad A \subseteq C,$$

справедливому, потому что $C = \bigcup_{A\in X} A$. А второе неравенство

$$\forall B \in Y \quad C \leqslant B,$$

эквивалентно включению

$$\forall B \in Y \quad C \subseteq B,$$

которое доказывается цепочкой

$$\forall A \in X \quad A \leqslant B \quad \Longrightarrow \quad \forall A \in X \quad A \subseteq B \quad \Longrightarrow \quad C = \bigcup_{A\in X} A \subseteq B.$$

$\square$

(c) Числовые множества

Как мы уже говорили, числа также образуют множества. При этом, поскольку мы строим теорию вещественных чисел, опираясь на теорию множеств, нам не нужно давать строгое определение этому понятию. Здесь мы приведем простейшие примеры числовых множеств и обсудим некоторые их свойства, которые понадобятся в дальнейшем.

◇ **2.1.18. Множества, определяемые явным перечислением своих элементов.** Это самый простой пример числовых множеств. Например, запись

$$\left\{-1; \frac{1}{2}; 3\right\}$$

обозначает множество, состоящее из трех элементов: -1, $\frac{1}{2}$ и 3.

◇ **2.1.19. Числовые множества, определяемые отношениями порядка.** Отношения $\leqslant$, $<$, $\geqslant$, $>$ определяют на прямой $\mathbb{R}$ множества, известные как интервал, отрезок и полуинтервалы:

$$(a,b) = \big\{x \in \mathbb{R} : \quad a < x < b\big\}$$
$$[a,b] = \big\{x \in \mathbb{R} : \quad a \leqslant x \leqslant b\big\}$$
$$(a,b] = \big\{x \in \mathbb{R} : \quad a < x \leqslant b\big\}$$
$$[a,b) = \big\{x \in \mathbb{R} : \quad a \leqslant x < b\big\}$$
$$(a,+\infty) = \big\{x \in \mathbb{R} : \quad a < x\big\}$$
$$[a,+\infty) = \big\{x \in \mathbb{R} : \quad a \leqslant x\big\}$$
$$(-\infty,b) = \big\{x \in \mathbb{R} : \quad x < b\big\}$$
$$(-\infty,b] = \big\{x \in \mathbb{R} : \quad x \leqslant b\big\}$$

Точнее, в этом списке множество (a,b) называется *интервалом*, $[a,b]$ – *отрезком*, $(a,b]$ – *полуинтервалом с замкнутым правым концом*, $[a,b)$ – полуинтервалом с замкнутым левым концом, $(a,+\infty)$ – открытым полуинтервалом с бесконечным правым концом, $[a,+\infty)$ – замкнутым полуинтервалом с бесконечным правым концом, и так далее.

Алгебраические операции над числовыми множествами и неравенства между ними.

- Если $X \subseteq \mathbb{R}$ — числовое множество и $a \in \mathbb{R}$ – число, то
  - символом $-X$ обозначается множество, состоящее из чисел, противоположных числам из X:
$$-X := \{y \in \mathbb{R} : \ \exists x \in X \quad -x = y\} \tag{2.1.188}$$
  - символами $X+a$ и $X-a$ обозначаются числовые множества, получаемые сдвигом X на a вправо и влево:
$$X + a = \{y \in \mathbb{R} : \ \exists x \in X \quad x + a = y\}, \tag{2.1.189}$$
$$X - a = \{y \in \mathbb{R} : \ \exists x \in X \quad x - a = y\} \tag{2.1.190}$$

— символами $a \cdot X$ и $X \cdot a$ обозначается числовое множество, получаемое умножением X на a:

$$a \cdot X = X \cdot a = \{y \in \mathbb{R} : \exists x \in X \quad a \cdot x = y\}, \tag{2.1.191}$$

— неравенство

$$a \leqslant X, \tag{2.1.192}$$

означает, что любой элемент множества X не меньше числа a

$$\forall x \in X \quad a \leqslant x;$$

точно так же формулы

$$a < X, \quad X \leqslant a, \quad X < a$$

являются сокращенными записями следующих утверждений соответственно:

$$\forall x \in X \quad a < x, \qquad \forall x \in X \quad x \leqslant a, \qquad \forall x \in X \quad x < a$$

- Если X и Y — два числовых множества, то

— символами $X + Y$, $X - Y$, $X \cdot Y$, $\frac{X}{Y}$ обозначаются множества, определяемые формулами

$$X + Y = \{z \in \mathbb{R} : \exists x \in X \quad \exists y \in Y \quad x + y = z\} \tag{2.1.193}$$

$$X - Y = \{z \in \mathbb{R} : \exists x \in X \quad \exists y \in Y \quad x - y = z\} \tag{2.1.194}$$

$$X \cdot Y = \{z \in \mathbb{R} : \exists x \in X \quad \exists y \in Y \quad x \cdot y = z\} \tag{2.1.195}$$

$$\frac{X}{Y} = \left\{z \in \mathbb{R} : \exists x \in X \quad \exists y \in Y \quad \frac{x}{y} = z\right\} \tag{2.1.196}$$

— неравенство

$$X \leqslant Y$$

по определению означает, что любой элемент множества X не превосходит любого элемента множества Y:

$$\forall x \in X \quad \forall y \in Y \qquad x \leqslant y$$

а неравенство

$$X < Y$$

– что любой элемент множества X меньше любого элемента множества Y:

$$\forall x \in X \quad \forall y \in Y \qquad x < y$$

$\triangleright$ **2.1.20.** Проверьте справедливость равенств:

$$\left\{-1; \frac{1}{2}; 3\right\} + 4 = \left\{3; \frac{9}{2}; 7\right\}$$

$$\left\{-1; \frac{1}{2}; 3\right\} - 4 = \left\{-5; -\frac{7}{2}; -1\right\}$$

$$(a; b) + c = (a + c; b + c)$$

$$[a; b] + c = [a + c; b + c]$$

$$(a; +\infty) + c = (a + c; +\infty)$$

$$(-\infty; a) + c = (-\infty; a + c)$$

Минимум и максимум числового множества.

- Пусть X — числовое множество. Число a называется *минимумом* множества X, если a принадлежит X, и все остальные элементы X не меньше a:

$$a \in X \quad \& \quad a \leqslant X \qquad (\text{то есть } a \in X \text{ и } \forall x \in X \ a \leqslant x)$$

В таких случаях пишут

$$a = \min X$$

- Аналогично, число b называется *максимумом* множества X, если b принадлежит X, и все остальные элементы X не больше b:

$$b \in X \quad \& \quad X \leqslant b \qquad (\text{то есть } b \in X \text{ и } \forall x \in X \ x \leqslant b)$$

и в таких случаях пишут

$$b = \max X$$

$\diamond\diamond$ **2.1.21.** Нетрудно сообразить, что минимум и максимум отрезка $X = [a; b]$ совпадают с его концами:

$$a = \min[a; b], \qquad b = \max[a; b]$$

Но при этом у интервала $X = (a; b)$ нет ни минимума, ни максимума:

$$\nexists \min(a; b), \qquad \nexists \max(a; b) \tag{2.1.197}$$

«Наглядное» объяснение этому выглядит так: минимумом множества $(a; b)$ может быть только число a, но оно не принадлежит $(a; b)$; и то же самое с максимумом.

Разумеется, такие рассуждения нельзя считать строгим доказательством. Чтобы провести аккуратные выкладки нам понадобится следующее утверждение:

$$x < y \quad \Longrightarrow \quad x < \frac{x+y}{2} < y. \tag{2.1.198}$$

Для его доказательства в свою очередь понадобится вот что:

$$0 < a \quad \Longrightarrow \quad 0 < \frac{a}{2} < a. \tag{2.1.199}$$

Это доказывается так: с одной стороны, из (2.1.23) получаем

$$0 < a \quad \Longrightarrow \quad 0 < \frac{a}{2}$$

отсюда, в силу (2.1.21) следует

$$\frac{a}{2} = 0 + \frac{a}{2} < \frac{a}{2} + \frac{a}{2} = a$$

и вместе это дает (2.1.199).

Теперь из (2.1.199) следует (2.1.198):

$$\begin{gathered} x < y \\ \Downarrow \\ 0 < y - x \\ \Downarrow \ {\scriptstyle (2.1.199)} \\ 0 < \frac{y-x}{2} < y - x \end{gathered}$$

Наконец, доказываем (2.1.197):

$$\begin{gathered} c = \min(a; b) \\ \Downarrow \\ c \in (a; b) \\ \Downarrow \\ a < c < b \\ \Downarrow \ {\scriptstyle (2.1.198)} \\ a < \frac{a+c}{2} < c \\ \Downarrow \\ \exists z = \frac{a+c}{2} \in (a; b) \quad z < c \\ \Downarrow \\ c \neq \min(a; b) \end{gathered}$$

И то же самое с максимумом.

Свойства $\min$ **и** $\max$**:**

1° **Монотонность:** *если множества X и Y имеют минимум (максимум), то*

$$X \subseteq Y \quad \Longrightarrow \quad \min X \geqslant \min Y \quad \Big(\max X \leqslant \max Y \Big) \tag{2.1.200}$$

2° **Инвариантность относительно сдвига:** *если множество X имеет минимум (максимум), то любой его сдвиг $X + a$ тоже имеет минимум (максимум), причем*

$$\min(X + a) = (\min X) + a \qquad \Big(\max(X + a) = (\max X) + a \Big) \tag{2.1.201}$$

3° **Двойственность:** *если множество X имеет минимум (максимум), то противоположное множество $-X$ имеет максимум (минимум), и*

$$\max(-X) = -\min X \qquad \Big(\min(-X) = -\max X \Big) \tag{2.1.202}$$

Доказательство. Мы докажем первую половину каждого утверждения (вторая доказывается по аналогии).

1. Пусть $X \subseteq Y$. Тогда

$$a = \min X \quad \Longrightarrow \quad a \in X \subseteq Y \quad \Longrightarrow \quad a \geqslant \min Y$$

2.

$$p = \min X \quad \Longrightarrow \quad p \in X \quad \& \quad p \leqslant X \quad \Longrightarrow \\ \Longrightarrow \quad p + a \in X + a \quad \& \quad p + a \leqslant X + a \quad \Longrightarrow \quad p + a = \min(X + a)$$

3.

$$p = \min X \quad \Longrightarrow \quad p \in X \quad \& \quad p \leqslant X \quad \Longrightarrow \quad -p \in -X \quad \& \quad -p \geqslant -X \quad \Longrightarrow \quad -p = \max(-X)$$

□

Минимум и максимум двух чисел.

- Из аксиомы A13 следует, что формулы

$$a \wedge b := \begin{cases} a, & a \leqslant b \\ b, & a > b \end{cases} \qquad (2.1.203)$$

$$a \vee b := \begin{cases} b, & a \leqslant b \\ a, & a > b \end{cases} \qquad (2.1.204)$$

корректно определяют две операции над вещественными числами.

Теорема 2.1.20. *Для любых двух чисел $a, b \in \mathbb{R}$ множество $\{a, b\}$ обладает минимумом и максимумом, и справедливы формулы:*

$$a \wedge b = \min\{a, b\} \qquad (2.1.205)$$

$$a \vee b = \max\{a, b\} \qquad (2.1.206)$$

Доказательство. По аксиоме A13, выполняется одно из двух: либо $a \leqslant b$, либо $a > b$.

В первом случае (когда $a \leqslant b$) мы получим:

$$a \wedge b = a = \min\{a, b\}.$$

Здесь первое равенство выполняется по определению $a \wedge b$, а второе – потому что $a \in \{a, b\}$ и $a \leqslant \{a, b\}$. И точно так же

$$a \vee b = b = \max\{a, b\},$$

и первое равенство выполняется по определению $a \vee b$, а второе – потому что $b \in \{a, b\}$ и $\{a, b\} \leqslant b$.

А во втором случае (когда $a > b$) мы получаем

$$a \wedge b = b = \min\{a, b\},$$

где второе равенство выполняется потому что $b \in \{a, b\}$ и $\{a, b\} \geqslant b$. И, с другой стороны,

$$a \vee b = a = \max\{a, b\},$$

где второе равенство верно потому что $a \in \{a, b\}$ и $a \geqslant \{a, b\}$. □

◇ **2.1.22.** Очевидно,

$$0 \wedge 1 = 0, \qquad 0 \vee 1 = 1$$
$$0 \wedge (-1) = -1, \qquad 0 \vee (-1) = 0.$$

▷ **2.1.23.** Докажите, что выполняются следующие тождества:

$$a \wedge b = b \wedge a$$
$$a \vee b = b \vee a$$
$$(a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c)$$
$$(a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c)$$
$$(a \wedge b) \vee c = (a \vee c) \wedge (b \vee c)$$
$$(a \vee b) \wedge c = (a \wedge c) \vee (b \wedge c)$$

▷ **2.1.24.** Докажите, что не существует числа $b \in \mathbb{R}$ такого, что равенство

$$a \wedge b = a$$

выполнялось бы для всех $a \in \mathbb{R}$.

▷ **2.1.25.** Докажите, что не существует числа $b \in \mathbb{R}$ такого, что равенство

$$a \vee b = a$$

выполнялось бы для всех $a \in \mathbb{R}$.

▷ **2.1.26.** Докажите неравенства:

$$a \leqslant a \vee b, \qquad a, b \in \mathbb{R} \qquad (2.1.207)$$

$$a \vee b \leqslant a + b \leqslant 2 \cdot a \vee b, \qquad a, b \geqslant 0 \qquad (2.1.208)$$

$$\big(a \vee b\big)^2 \leqslant a^2 + b^2 \leqslant 2\big(a \vee b\big)^2, \qquad a, b \geqslant 0 \qquad (2.1.209)$$

▷ **2.1.27.** Проверьте, какие из следующих тождеств верны:

$$(a \wedge b) + c = (a + c) \wedge (b + c)$$

$$(a+b)\wedge c = (a\wedge c) + (b\wedge c)$$
$$(a\vee b) + c = (a+c)\vee(b+c)$$
$$(a+b)\vee c = (a\vee c) + (b\vee c)$$

Предложение 2.1.21. *Если числовые множества A и B оба обладают минимумом (максимумом), то их объединение $A\cup B$ тоже обладает минимумом (максимумом), причем выполняется равенство:*

$$\min(A\cup B) = (\min A)\wedge(\min B) \tag{2.1.210}$$
$$\Big(\max(A\cup B) = (\max A)\vee(\max B)\Big) \tag{2.1.211}$$

Нижняя и верхняя грани числового множества.

- Говорят, что числовое множество X *ограничено снизу*, если существует число s такое, что для всякого $x\in X$ выполняется неравенство $s\leqslant x$. Коротко это условие можно записать с помощью неравенств, в которых сравниваются числа и множества (мы определяли такие неравенства на с.146):
$$\exists s\in\mathbb{R}\quad s\leqslant X.$$
В таких случаях принято говорить также, что число s *ограничивает множество X снизу.*
- Аналогично, говорят, что числовое множество X *ограничено сверху*, если существует число t такое, что для всякого $x\in X$ выполняется неравенство $x\leqslant t$. Это можно записать так:
$$\exists t\in\mathbb{R}\quad X\leqslant t.$$
В таких случаях принято говорить также, что число d *ограничивает множество X сверху.*
- Если множество X ограничено и снизу, и сверху, то говорят, что множество X ограничено.
- *Точной нижней гранью* (или *точной нижней границей*) $\inf X$ числового множества X называется
  - — символ $-\infty$, если X не ограничено снизу; в этом случае точная нижняя грань не является числом: запись
$$\inf X = -\infty$$
просто означает, что множество X не ограничено снизу;
  - — наибольшее из чисел s, ограничивающих X снизу, если X ограничено снизу:
$$\inf X = \max\{s\in\mathbb{R}:\quad s\leqslant X\} \tag{2.1.212}$$
запись
$$\inf X > -\infty$$
принято использовать в случаях, когда нужно коротко дать понять, что множество X ограничено снизу.
- *Точной верхней гранью* (или *точной верхней границей*) $\sup X$ числового множества X называется
  - — символ $+\infty$, если X не ограничено сверху; опять же в этом случае точная нижняя грань не является числом: запись
$$\inf X = +\infty$$
просто означает, что множество X не ограничено сверху;
  - — наименьшее из чисел t, ограничивающих X сверху, если X ограничено сверху:
$$\sup X = \min\{t\in\mathbb{R}:\quad X\leqslant t\} \tag{2.1.213}$$
запись
$$\sup X < +\infty$$
принято использовать в случаях, когда множество X ограничено сверху.

◇ **2.1.28.** Пусть $X = (a, b)$ — интервал на вещественной прямой $\mathbb{R}$.

Легко видеть, что любое число $t \geqslant b$ ограничивает множество X сверху. А наименьшее из всех таких чисел, то есть число $B = b$ будет точной верхней гранью множества X. С другой стороны, любое число $s \leqslant a$ ограничивает X снизу. А наибольшее из всех таких чисел, то есть число $A = a$ будет точной нижней гранью множества X. Таким образом,

$$\inf(a, b) = a \qquad \sup(a, b) = b$$

Точно также для отрезка и полуинтервалов

$$\inf[a, b] = \inf(a, b] = \inf[a, b) = a$$

$$\sup[a, b] = \sup(a, b] = \sup[a, b) = b$$

Теорема 2.1.22. *Если множество X обладает минимумом (максимумом), то он совпадает с точной нижней (верхней) гранью этого множества:*

$$\exists \min X \quad \Longrightarrow \quad \min X = \inf X \qquad \Big(\exists \max X \quad \Longrightarrow \quad \max X = \inf X\Big)$$

Теорема 2.1.23 (о точной границе)**.** *Если X – непустое ограниченное снизу множество, то оно имеет точную нижнюю грань. Аналогично, если X – непустое ограниченное сверху множество, то оно имеет точную верхнюю грань.*

Доказательство. Рассмотрим случай, когда X – непустое ограниченное сверху множество (случай, когда X ограничено снизу рассматривается аналогично). Обозначим буквой Y множество всех чисел, ограничивающих X сверху:

$$Y = \{y \in \mathbb{R} : \ X \leqslant y\} = \{y \in \mathbb{R} : \ \forall x \in X \quad x \leqslant y\}$$

(поскольку X ограничено сверху, хотя бы одно такое число y существует, и значит, Y – непустое множество). Тогда

$$\forall x \in X \quad \forall y \in Y \quad x \leqslant y$$

и по аксиоме непрерывности вещественной прямой A16, найдется такое число c, что

$$\forall x \in X \quad \forall y \in Y \quad x \leqslant c \leqslant y$$

Первое неравенство здесь означает, что c ограничивает X сверху, то есть, что $c \in Y$. А второе – что c есть наименьшее число, лежащее в Y. То есть $c = \min Y = \min\{y \in \mathbb{R} : \ X \leqslant y\} = \sup X$. □

Свойства $\inf$ **и** $\sup$**:**

1° **Монотонность:** *если X и Y ограничены снизу (сверху), то*

$$X \subseteq Y \quad \Longrightarrow \quad \inf X \geqslant \inf Y \quad \Big(\sup X \leqslant \sup Y\Big).$$

2° **Инвариантность относительно сдвига:** *если множество X ограничено снизу (сверху), то любой его сдвиг $X + a$ тоже ограничен снизу (сверху), причем*

$$\inf(X + a) = (\inf X) + a \qquad \Big(\sup(X + a) = (\sup X) + a\Big)$$

3° **Двойственность:** *если множество X ограничено снизу (сверху), то противоположное множество $-X$ ограничено сверху (снизу), и*

$$\sup(-X) = -\inf X \qquad \Big(\sup(-X) = -\inf X\Big)$$

Доказательство. Здесь мы также докажем только первую половину каждого утверждения (предложив читателю самостоятельно по аналогии доказать вторую).

1. В первом случае получаем цепочку:

$$X \subseteq Y$$

$$\Downarrow$$
$$\forall c\in\mathbb{R}\quad c\leqslant Y \implies c\leqslant X$$
$$\Downarrow$$
$$\{c\in\mathbb{R}:\ c\leqslant Y\}\subseteq\{c\in\mathbb{R}:\ c\leqslant X\}$$
$$\Downarrow\qquad \big(\text{свойство } 1^\circ \text{ на с. 147 }\big)$$
$$\inf Y=\max\{c\in\mathbb{R}:\ c\leqslant Y\}\leqslant\max\{c\in\mathbb{R}:\ c\leqslant X\}=\inf X$$

2. Обозначим
$$B=\{b\in\mathbb{R}:\ b\leqslant X\},\qquad C=\{c\in\mathbb{R}:\ c\leqslant X+a\}$$
Тогда получаем цепочку
$$b\in B\iff b\leqslant X\iff b+a\leqslant X+a\iff b+a\in C$$
$$\Downarrow$$
$$B+a=C$$
$$\Downarrow$$
$$\Big(\inf X\Big)+a=\Big(\max B\Big)+a=\big(\text{свойство } 2^\circ \text{ на с. 147}\big)=\max(B+a)=\max C=\inf(X+a)$$

3. Обозначим
$$B=\{b\in\mathbb{R}:\ b\leqslant X\},\qquad C=\{c\in\mathbb{R}:\ -X\leqslant c\}$$
Тогда получаем цепочку
$$c\in C\iff -X\leqslant c\iff -c\leqslant X\iff -c\in B\iff c\in -B$$
$$\Downarrow$$
$$-B=C$$
$$\Downarrow$$
$$-\inf X=-\max B=\big(\text{свойство } 3^\circ \text{ на с. 147}\big)=\min\Big(-B\Big)=\min C=\sup(-X)$$

□

§ 2 Натуральные, целые и рациональные числа

Если задана какая-то модель вещественных чисел $(\mathbb{R},0,1,+,\cdot,\leqslant)$, то внутри нее можно построить другие стандартные классы чисел, считающихся также вещественными, а именно, класс $\mathbb{N}$ натуральных чисел, класс $\mathbb{Z}$ целых чисел, класс $\mathbb{Q}$ рациональных чисел, и так далее. В этом параграфе мы покажем, как выглядит эти конструкции. Мы при этом следуем традициям российской математической школы, в которой принято множество $\mathbb{N}$ начинать с единицы (этот выбор, конечно, несуществен).

(a) Натуральные числа $\mathbb{N}$ и целые неотрицательные числа $\mathbb{Z}_+$

Определение натуральных чисел $\mathbb{N}$. Вначале нам понадобится вспомогательное определение:

- Множество вещественных чисел X называется *индуктивным*, если
  1) X содержит единицу (о которой говорится в аксиоме A8):
  $$1\in X$$
  2) вместе с каждым числом $x\in X$ ему принадлежит также число $x+1$:
  $$\forall x\in X\qquad x+1\in X$$

$\diamond\diamond$ **2.2.1.** Само множество $\mathbb{R}$ является индуктивным. Полуинтервалы вида (a,∞) где $a<1$, или $[a,\infty)$ где $a\leqslant 1$ также являются индуктивными множествами. Наоборот, скажем, множества $(1,\infty)$, $[2,\infty)$, $[0,5]$ не являются индуктивными.

Теперь главное определение:

- Наименьшее индуктивное множество обозначается символом $\mathbb{N}$ и называется *множеством натуральных чисел*, или *натуральным рядом*. Слово "наименьшее" здесь означает, что выполняются два условия:
  - (i) $\mathbb{N}$ является индуктивным множеством;
  - (ii) если X – какое-нибудь другое индуктивное множество, то $\mathbb{N}$ содержится в X.

Доказательство существования и единственности. 1. Покажем сначала, что такое множество $\mathbb{N}$ действительно существует. Обозначим через $\mathbb{N}$ пересечение всех индуктивных множеств X:

$$\mathbb{N}=\bigcap_{\substack{X\text{ – индуктивное}\\ \text{множество}}} X \tag{2.2.214}$$

Иными словами,

$$y\in\mathbb{N}\quad\Leftrightarrow\quad y\text{ принадлежит любому индуктивному множеству }X$$

Тогда мы получим:

1) $1\in\mathbb{N}$, потому что 1 лежит в любом множестве X, и
2) если $x\in\mathbb{N}$, то есть $x\in\mathbb{N}$ для всякого индуктивного множества X, то $x+1\in X$ (поскольку X индуктивно); значит, $x+1\in X$ для всякого индуктивного множества X, поэтому $x+1\in\mathbb{N}$.

Таким образом, $\mathbb{N}$ – индуктивное множество. С другой стороны, $\mathbb{N}$ содержится в любом множестве X, то есть, в любом другом индуктивном множестве. Значит, $\mathbb{N}$ как раз и есть множество натуральных чисел.

2. Убедимся, что $\mathbb{N}$ – наименьшее индуктивное множество, то есть оно удовлетворяет условию (ii) на с.152. Действительно, если Y – какое-нибудь индуктивное множество, то оно содержится в семействе множеств X, по которому устраивается пересечение в формуле (2.2.214). Поэтому $\mathbb{N}\subseteq Y$.

3. Убедимся, что множество $\mathbb{N}$ определяется однозначно. Действительно, если бы нам было дано какое-то другое множество $\widetilde{\mathbb{N}}$ с теми же свойствами, то мы получили бы, что, во-первых,

$$\mathbb{N}\subseteq\widetilde{\mathbb{N}}$$

(потому что $\mathbb{N}$ содержится в любом индуктивном множестве, в частности, в $\widetilde{\mathbb{N}}$), и, во-вторых,

$$\widetilde{\mathbb{N}}\subseteq\mathbb{N}$$

(потому что $\widetilde{\mathbb{N}}$ содержится в любом индуктивном множестве, в частности, в $\mathbb{N}$). Вместе это означает, что

$$\mathbb{N}=\widetilde{\mathbb{N}}.$$

$\square$

Принцип математической индукции. Напомним, что в предыдущей главе мы описали принцип обыкновенной индукции для класса `FinOrd` конечных ординалов (теорема 0.3.48). Следующее утверждение показывает, что множество $\mathbb{N}$ обладает тем же свойством (несмотря на внешнее сходство, $\mathbb{N}$ и `FinOrd` – формально разные множества, поэтому этот факт не очевиден).

Теорема 2.2.1 (принцип математической индукции в абстрактной форме)**.** *Пусть E – какое-нибудь подмножество в $\mathbb{N}$, обладающее свойствами:*

(a) $1\in E$

(b) $\forall n\in E\quad n+1\in E$

Тогда $E=\mathbb{N}$.

Доказательство. С одной стороны, нам дано, что $E \subseteq \mathbb{N}$. С другой же стороны, свойства $(a), (b)$ означают, что E является индуктивным множеством. Поэтому, в силу условия (ii) определения 3.2, $\mathbb{N}$ содержится в E: $\mathbb{N} \subseteq E$. Итак,

$$E \subseteq \mathbb{N} \quad \& \quad \mathbb{N} \subseteq E$$

то есть, $E = \mathbb{N}$. □

На практике удобно пользоваться следующей переформулировкой принципа математической индукции.

Теорема 2.2.2 (принцип математической индукции)**.** *Пусть дана последовательность утверждений*

$$\Phi_n \qquad\qquad n \in \mathbb{N} \tag{2.2.215}$$

со следующими свойствами:

- (a') *первое утверждение Φ_1 истинно;*
- (b') *если при каком-нибудь $n \in \mathbb{N}$ истинно утверждение Φ_n, то истинно и утверждение Φ_{n+1}.*

Тогда все утверждения Φ_n истинны (для всех $n \in \mathbb{N}$).

Доказательство. Обозначим через E множество всех таких чисел $n \in \mathbb{N}$, для которых утверждение Φ_n истинно. Тогда условие (a') будет эквивалентно условию (a) теоремы 2.2.1, а условие (b') будет эквивалентно условию (b). Значит, $E = \mathbb{N}$, то есть Φ_n истинно для каждого $n \in \mathbb{N}$. □

Свойства натуральных чисел. Первое следствие из принципа математической индукции выглядит так:

Теорема 2.2.3. *Множество $\mathbb{N}$ натуральных чисел замкнуто относительно сложения и умножения: если $m, n \in \mathbb{N}$, то $m + n \in \mathbb{N}$ и $m \cdot n \in \mathbb{N}$.*

Доказательство. 1. Зафиксируем $m \in \mathbb{N}$ и обозначим через E множество чисел $n \in \mathbb{N}$ таких, что $m + n \in \mathbb{N}$:

$$E = \{n \in \mathbb{N} : \quad m + n \in \mathbb{N}\}$$

Нам нужно убедиться, что $E = \mathbb{N}$. Это делается индукцией. Сначала замечаем, что $1 \in E$, потому что из $m \in \mathbb{N}$ следует $m + 1 \in \mathbb{N}$. Затем берем какое-нибудь $k \in E$, то есть

$$m + k \in \mathbb{N}$$

и замечаем, что тогда $k + 1 \in E$, потому что

$$m + (k + 1) = (m + k) + 1 \in \mathbb{N}$$

По принципу индукции все это означает, что $E = \mathbb{N}$.

2. Опять фиксируем $m \in \mathbb{N}$ и обозначаем через E множество чисел $n \in \mathbb{N}$ таких, что $m \cdot n \in \mathbb{N}$:

$$E = \{n \in \mathbb{N} : \quad m \cdot n \in \mathbb{N}\}$$

Нам нужно убедиться, что $E = \mathbb{N}$. Это тоже делается индукцией. Сначала замечаем, что $1 \in E$, потому что из $m \in \mathbb{N}$ следует $m \cdot 1 = m \in \mathbb{N}$. Затем берем какое-нибудь $k \in E$, то есть

$$m \cdot k \in \mathbb{N}$$

и замечаем, что тогда $k + 1 \in E$, потому что из только что доказанной замкнутости $\mathbb{N}$ относительно сложения следует

$$m \cdot k \in \mathbb{N} \quad \Longrightarrow \quad m \cdot (k + 1) = (m \cdot k) + m \in \mathbb{N}$$

Снова по принципу индукции $E = \mathbb{N}$. □

Ниже нам понадобятся еще несколько утверждений об $\mathbb{N}$.

- *Дискретным интервалом* с концами $m \in \mathbb{N}$ и $n \in \mathbb{N}$ называется множество

  $$\{m, ..., n\} := \{k \in \mathbb{N} : \ m \leqslant k \leqslant n\}$$

  (очевидно, если $m > n$, то $\{m, ..., n\} = \varnothing$).

- *Начальным дискретным интервалом* называется дискретный интервал, у которого левый конец равен 1:
$$\{1,...,n\} = \{k \in \mathbb{N}: \ k \leqslant n\}$$

Свойства натуральных чисел

1°. *Для всякого $n \in \mathbb{N}$ выполняется $n \geqslant 1$. Поэтому,*
$$\min \mathbb{N} = 1 \tag{2.2.216}$$

2°. *Если $n \in \mathbb{N}$ и $n \neq 1$, то $n-1 \in \mathbb{N}$.*

3°. *Для любого $n \in \mathbb{N}$ множество чисел $x \in \mathbb{N}$, больших $n-1$, имеет наименьший элемент, а именно n:*
$$\min\{x \in \mathbb{N}: \ n-1 < x\} = n \tag{2.2.217}$$

4°. *Каждое непустое подмножество $M \subseteq \mathbb{N}$ обладает минимальным элементом.*

5°. *Для любых $m, n \in \mathbb{N}$ справедливы импликации:*
$$m < n+1 \qquad \Longrightarrow \qquad m \leqslant n \tag{2.2.218}$$
$$m < n \qquad \Longrightarrow \qquad m+1 \leqslant n \tag{2.2.219}$$

6°. *Если $m, n \in \mathbb{N}$ и $m < n$, то $n - m \in \mathbb{N}$.*

7°. *Пусть I – подмножество в начальном интервале $\{1,...,n\}$, удовлетворяющее условиям*

 (a) $1 \in I$

 (b) $\forall k < n \qquad \Big(k \in I \implies k+1 \in I\Big)$

тогда $I = \{1,...,n\}$.

8°. *Пусть E – подмножество в $\mathbb{N}$, удовлетворяющее условиям*

 (a) $1 \in E$

 (b) $\forall k \in E \qquad \{1,...,k\} \subseteq E$

Тогда

 — *либо $E = \mathbb{N}$,*

 — *либо E – начальный интервал:*
$$\exists n \in E \qquad \{1,...,n\} = E \tag{2.2.220}$$

Доказательство. Все эти утверждения доказываются математической индукцией.

1. Формула $n \geqslant 1$ верна для любого $n \in \mathbb{N}$, потому что, во-первых, она верна при $n = 1$: $1 \geqslant 1$. И, во-вторых, если она верна при некотором $n = m$, $m \geqslant 1$, то и при $n = m+1$ она тоже верна: $m+1 \geqslant 1+1 \geqslant 1$.

2. Рассмотрим множество
$$E = \{1\} \cup (\mathbb{N}+1) = \{x \in \mathbb{R}: \quad x = 1 \bigvee \exists n \in \mathbb{N} \quad x = n+1\}$$
и заметим, что $E = \mathbb{N}$. Действительно, во-первых, $1 \in E$, а во-вторых, если $m \in E$, то либо $m = 1$, и тогда $m+1 \in \mathbb{N}+1 \subseteq E$, либо $m = n+1$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$, и тогда $m+1 = (n+1)+1 \in \mathbb{N}+1 \subseteq E$. Теперь из $E = \mathbb{N}$ получаем: если $n \in \mathbb{N} = E = \{1\} \cup (\mathbb{N}+1)$ и $n \neq 1$, то $n \in \mathbb{N}+1$, то есть $n = k+1$ для некоторого $k \in \mathbb{N}$.

3. Обозначим $X_n = \{x \in \mathbb{N}: \ n-1 < x\}$ и заметим, что
$$\underbrace{X_{n+1}}_{\substack{\| \\ \{y \in \mathbb{N}: \ n < y\}}} \qquad = \qquad \underbrace{X_n + 1}_{\substack{\| \\ \{y \in \mathbb{R}: \ \exists x \in X_n \quad y = x+1\}}} \tag{2.2.221}$$

Действительно, с одной стороны, $X_n + 1 \subseteq X_{n+1}$, потому что
$$y \in X_n + 1 \implies \exists x \in X_n \quad y = x+1 \implies \exists x \in \mathbb{N} \quad n-1 < x \ \& \ y = x+1 \implies$$

$$\Longrightarrow \quad \exists x\in\mathbb{N}\quad n<x+1=y \quad\Longrightarrow\quad y\in X_{n+1}$$

а, с другой – $X_{n+1}\subseteq X_n+1$, потому что

$$y\in X_{n+1} \quad\Longrightarrow\quad y\in\mathbb{N}\ \&\ \underbrace{n<y}_{\substack{\Downarrow\\ y>\min\mathbb{N}=1\\ \Downarrow\\ 2^\circ\\ \Downarrow\\ x:=y-1\in\mathbb{N}}} \quad\Longrightarrow\quad \exists x\in\mathbb{N}\quad y=x+1\ \&\ n<x+1 \quad\Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow\quad \exists x\in\mathbb{N}\quad y=x+1\ \&\ n-1<x \quad\Longrightarrow\quad \exists x\in X_n\quad y=x+1 \quad\Longrightarrow\quad y\in X_n+1$$

Теперь доказываем (2.2.217) по индукции. Во-первых, убеждаемся, что эта формула верна при $n=1$. Действительно,

$$\underbrace{x\in\mathbb{N}\quad\overset{1^\circ}{\Longrightarrow}\quad x\geqslant 1>0\quad\Longrightarrow\quad x\in X_1}$$
$$\Downarrow$$
$$\mathbb{N}\subseteq X_1$$
$$\Downarrow$$
$$X_1=\mathbb{N}$$
$$\Downarrow$$
$$\min X_1=\min\mathbb{N}=1$$

Далее предполагаем, что (2.2.217) верна при $n=m$:

$$\min X_m=m \tag{2.2.222}$$

и докажем, что тогда она верна при $n=m+1$:

$$\min X_{m+1}=(2.2.221)=\min(X_m+1)=(\min X_m)+1=(2.2.222)=m+1$$

4. Пусть $M\subseteq\mathbb{N}$ и $M\neq\varnothing$. Если $1\in M$, то доказывать нечего, потому что тогда $1=\min M$. Поэтому будем считать, что $1\notin M$. Тогда множество $E=\mathbb{N}\setminus M$, наоборот, должно содержать 1:

$$1\in E$$

Покажем, что существует такое $n\in\mathbb{N}$, что

$$\{1,...,n\}\subseteq E\quad \&\quad n+1\notin E \tag{2.2.223}$$

Действительно, если бы это было не так, то есть при любом $n\in E$ мы получали бы, что из $\{1,...,n\}\subseteq E$ следует $n+1\in E$, то это означало бы, что $E=\mathbb{N}$, то есть $M=\varnothing$.

Теперь, возвращаясь от E к M, условие (2.2.223) можно переформулировать так:

$$\{1,...,n\}\cap M=\varnothing\quad \&\quad n+1\in M$$

Это и означает, что $n+1=\min M$.

5. Пусть $m,n\in\mathbb{N}$ и $m<n+1$, то есть $m-1<n$. Тогда $n\in\{x\in\mathbb{N}:\ m-1<x\}$ и по свойству 3° получаем $n\geqslant\min\{x\in\mathbb{N}:\ m-1<x\}=m$. Это доказывает импликацию (2.2.218). А из нее следует (2.2.219):

$$m<n\quad\overset{(2.1.21)}{\Longrightarrow}\quad m+1<n+1\quad\overset{(2.2.218)}{\Longrightarrow}\quad m+1\leqslant n$$

6. Пусть $m\in\mathbb{N}$. Рассмотрим множество

$$E=\{1,...,m\}\cup(\mathbb{N}+m)$$

и заметим, что $E=\mathbb{N}$. Действительно, во-первых, $1\in E$, а во-вторых, если $k\in E$, то возможны три случая, в каждом из которых получается $k+1\in E$:

1) $k<m=(m-1)+1 \quad\Longrightarrow\quad$ (применяем 5°) $\quad\Longrightarrow\quad k\leqslant m-1 \quad\Longrightarrow\quad k+1\leqslant m \quad\Longrightarrow\quad k+1\in E$;

2) $k = m \implies k+1 = 1+m \in (\mathbb{N}+m) \subseteq E$;

3) $k > m \implies k \notin \{1, ..., m\} \implies k \in (\mathbb{N}+m) \implies k = n+m \quad (n \in \mathbb{N}) \implies k+1 = (n+1)+m \quad (n+1 \in \mathbb{N}) \implies k+1 \in (\mathbb{N}+m) \subseteq E$;

Таким образом, получается что $\mathbb{N} = E = \{1, ..., m\} \cup (\mathbb{N}+m)$, и поэтому если $n \in \mathbb{N}$, $n > m$, то, поскольку $n \notin \{1, ..., m\}$, имеем $n \in \mathbb{N}+m$, то есть $n = m+k$, $k \in \mathbb{N}$, или, иными словами, $n - m = k \in \mathbb{N}$.

7. Рассмотрим множество $M = \mathbb{N} \setminus I$. Тогда получаем цепочку

$$I \subseteq \{1, ..., n\} \implies n+1 \notin I \implies n+1 \in M \implies n+1 \geqslant \underbrace{\min M}_{\substack{\uparrow \\ \text{существует} \\ \text{в силу } 4^\circ}}$$

Нам нужно убедиться, что $\min M = n+1$: тогда получится, что $\{1, ..., n\} \cap M = \varnothing$, то есть $\{1, ..., n\} \subseteq I$ и значит $I = \{1, ..., n\}$.

Предположим, что это не так: $\min M \ne n+1$. Тогда $\min M < n+1$, и по свойству 5° $\min M \leqslant n$. С другой стороны, в силу (a), $1 \in I$, поэтому $1 \notin M$, и значит $\min M > 1$, то есть по свойству 5°, $\min M - 1 \geqslant 1$, и

$$2 \leqslant \min M \leqslant n$$

Если теперь положить $k = \min M - 1$, то получается вот что:

$$1 \leqslant k < n \quad \& \quad k \notin M \implies k \in I \quad \& \quad k < n \overset{(b)}{\implies} k+1 = \underbrace{\min M \in I}_{\substack{\uparrow \\ \text{невозможно,} \\ \text{потому что} \\ M \cap I = \varnothing}}$$

8. Если $E \ne \mathbb{N}$, то найдется $x \in \mathbb{N}$ такое что $x \notin E$. То есть множество

$$M = \{x \in \mathbb{N} : \quad x \notin E\}$$

непусто. Значит, по уже доказанному свойству 4°, M имеет минимальный элемент:

$$m = \min M$$

По условию (a), $1 \in E$, и поэтому $1 \notin M$. С другой стороны, по уже доказанному свойству 1°, $1 \leqslant m$. Значит, $1 < m$. Поэтому по свойству 6°, число $n = m - 1$ тоже лежит в $\mathbb{N}$:

$$n = m - 1 \in \mathbb{N}$$

Тогда, во-первых, $n \notin M$ (потому что иначе число $m = n+1$ не было бы минимумом для M), и значит $n \in E$, откуда в силу (b),

$$\{1, ..., n\} \subseteq E \tag{2.2.224}$$

А, во-вторых, для $x \in \mathbb{N}$ справедлива импликация

$$x > n \implies x \notin E, \tag{2.2.225}$$

потому что иначе мы получили бы

$$\underbrace{\begin{matrix} n < x & & x \in E \\ (2.2.219)\ \Downarrow & & \Downarrow\ (\mathrm{b}) \\ m = n+1 \leqslant x & & \{1, ..., x\} \subseteq E \end{matrix}}$$

$$\Downarrow$$

$$m \in E$$

а это невозможно, поскольку $m \in M$. Утверждения (2.2.224) и (2.2.225) вместе означают, что $\{1, ..., n\} = E$. $\square$

Целые неотрицательные числа $\mathbb{Z}_+$.

- Множество целых неотрицательных чисел, обозначаемое символом $\mathbb{Z}_+$ (и называемое иногда *расширенным натуральным рядом*), определяется как объединение множества $\mathbb{N}$ натуральных чисел и нуля $\{0\}$:
$$\mathbb{Z}_+ = \{0\} \cup \mathbb{N} \tag{2.2.226}$$

Для этого множества, как и для $\mathbb{N}$ справедлив принцип математической индукции:

Теорема 2.2.4 (принцип математической индукции в абстрактной форме для $\mathbb{Z}_+$). *Пусть E – какое-нибудь подмножество в $\mathbb{Z}_+$, обладающее свойствами:*

(a) $0 \in E$

(b) $\forall n \in E \quad n+1 \in E$

Тогда $E = \mathbb{Z}_+$.

Теорема 2.2.5 (принцип математической индукции для $\mathbb{Z}_+$). *Пусть дана последовательность утверждений*
$$\varPhi_n \qquad n \in \mathbb{Z}_+ \tag{2.2.227}$$
со следующими свойствами:

(a') *первое утверждение $\varPhi_0$ верно;*

(b') *если при каком-нибудь $n \in \mathbb{N}$ верно утверждение $\varPhi_n$, то верно и утверждение $\varPhi_{n+1}$.*

Тогда все утверждения $\varPhi_n$ справедливы (для всех $n \in \mathbb{Z}_+$).

Определения по индукции. Читатель мог заметить, что среди примеров собственных обозначений для чисел на странице 125 не было чисел, больших 10. Мы могли бы, конечно, по аналогии последовательно определить числа 11, 12, или присвоить собственные обозначения вообще любому конечному набору натуральных чисел, но чтобы дать собственные обозначения *всем* натуральным числам (которых бесконечно много), нужно использовать так называемый прием определения по индукции. О собственных обозначениях для чисел из $\mathbb{N}$ (точнее, об их десятичной записи) мы поговорим ниже на странице 172, а здесь мы приведем две теоремы, служащие обоснованием приема определения по индукции и проиллюстрируем их примерами. Первая из них используется в случаях, когда нужно определить бесконечную последовательность элементов[7]:

Теорема 2.2.6 (об определениях полной индукцией). *Пусть X – произвольное множество (необязательно числовое) и дано отображение G, которое* **каждой** *конечной последовательности элементов $x_1, ..., x_n \in X$, $n \in \mathbb{N}$, ставит в соответствие определенный элемент $G(x_1, ..., x_n) \in X$. Тогда для всякого начального элемента $x_1 \in X$ отображение G однозначно определяет бесконечную последовательность $\{x_n\} \subseteq X$, содержащую x_1 в качестве первого элемента и удовлетворяющую условию*
$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad G(x_1, ..., x_n) = x_{n+1} \tag{2.2.228}$$

Доказательство. Зафиксируем $x_1 \in X$ и обозначим через E подмножество в $\mathbb{N}$, состоящее из таких $n \in \mathbb{N}$, для которых существует конечная последовательность $x_1, ..., x_n \in X$ со следующим свойством:
$$\forall k = 2, ..., n \qquad G(x_1, ..., x_{k-1}) = x_k \tag{2.2.229}$$
Тогда, во-первых, $1 \in E$, потому что для $n = 1$ нужная последовательность должна состоять только из одного числа, и таким числом будет x_1. И, во-вторых, если $n \in E$, то это значит, что существует последовательность $x_1, ..., x_n \in X$ для которой выполняется (2.2.229). Тогда можно положить $x_{n+1} = G(x_1, ..., x_n)$, и мы получим что $n+1 \in E$.

Таким образом, по принципу математической индукции (2.2.1), $E = \mathbb{N}$. Отсюда следует, что для всякого $n \in \mathbb{N}$ можно выбрать x_n по такому правилу: выбираем какую-нибудь конечную последовательность $\{x_1, ..., x_n\}$, подчиненную условию (2.2.229) (такая последовательность существует поскольку $n \in E$), и в качестве x_n берем ее последний элемент. Нам нужно только убедиться, что число x_n определяется таким алгоритмом однозначно. Действительно, если предположить, что существует какое-то другое число x'_n, которое можно определить таким же образом, то есть для которого можно построить конечную последовательность $\{x'_1, ..., x'_n\}$ так, чтобы
$$x'_1 = x_1 \qquad \& \qquad \forall k = 1, ..., n-1 \qquad G(x'_1, ..., x'_k) = x'_{k+1}$$

[7]Напомним, что понятие бесконечной последовательности было определено на с.73.

то, рассмотрев множество индексов

$$I = \{k = 1, ..., n : \quad \forall i \leqslant k \quad x'_i = x_i\}$$

мы получим, что, во-первых, $1 \in I$ (потому что $x'_1 = x_1$), и, во-вторых,

$$\begin{gathered} k < n \qquad \& \qquad k \in I \\ \Downarrow \\ k < n \qquad \& \qquad \forall i \leqslant k \quad x'_i = x_i \\ \Downarrow \\ x'_{k+1} = G(x'_1, ..., x'_k) = G(x_1, ..., x_k) = x_{k+1} \\ \Downarrow \\ k+1 \leqslant n \qquad \& \qquad \forall i \leqslant k+1 \quad x'_i = x_i \\ \Downarrow \\ k+1 \in I \end{gathered}$$

Отсюда, по принципу конечной индукции (свойство 7° на с.154), $I = \{1, ..., n\}$, то есть, в частности, $x'_n = x_n$. □

Вторая теорема бывает нужна, когда нет гарантии, что определяемая тобой последовательность будет бесконечной[8]:

Теорема 2.2.7 (об определениях частной индукцией). *Пусть X – произвольное множество (необязательно числовое) и дано отображение G, которое* **некоторым** *конечным последовательностям элементов $x_1, ..., x_n \in X$, $n \in \mathbb{N}$, ставит в соответствие определенные элементы $G(x_1, ..., x_n) \in X$. Тогда для всякого начального элемента $x_1 \in X$ это правило однозначно определяет (конечную или бесконечную) последовательность $\{x_n\} \subseteq X$, содержащую x_1 в качестве первого элемента и удовлетворяющую условию*

$$G(x_1, ..., x_n) = x_{n+1}, \qquad n < N \tag{2.2.230}$$

где величина N зависит от множества X, отображения G и начального элемента x_1, и определяется условием:

$$N = \sup\Big\{ n \in \mathbb{N} : \quad \exists\{x_2, ..., x_n\} \subseteq X \quad \forall k \in \{2, ..., n\} \qquad G(x_1, ..., x_{k-1}) = x_k \Big\} \tag{2.2.231}$$

Если N конечна, то она представляет собой длину последовательности $\{x_n\}$.

Доказательство. Зафиксируем x_1 и обозначим через E подмножество в $\mathbb{N}$, от которого берется верхняя грань в формуле (2.2.231)

$$N = \sup E,$$

то есть состоящее из таких $n \in \mathbb{N}$, для которых существует конечная последовательность $x_2, ..., x_n \in X$ со следующим свойством:

$$\forall k = 2, ..., n \qquad G(x_1, ..., x_{k-1}) = x_k \tag{2.2.232}$$

Это множество E будет удовлетворять условиям (a) и (b) свойства 8° на с.154:

- (a) $1 \in E$ (потому что для $n = 1$ нужная последовательность должна состоять только из одного числа, и таким числом будет x_1), и
- (b) $\forall n \in E$ $\{1, ..., n\} \subseteq E$ (потому что если $n \in E$, то есть существуют $x_1, ..., x_n \in X$ со свойством (2.2.232), то для всякого $k \leqslant n$ последовательность $x_2, ..., x_k$ будет обладать теми же свойствами, только с заменой k на какое-нибудь i, а после этого n на k).

По свойству 8° на с.154 отсюда следует, что либо $E = \mathbb{N}$, либо $E = \{1, ..., N\}$ для некоторого $N \in \mathbb{N}$. В обоих случаях мы получаем, что каждому $n \in E$ можно поставить в соответствие некоторый элемент x_n по такому правилу: выбираем какую-нибудь конечную последовательность $\{x_2, ..., x_n\}$, подчиненную условию (2.2.229) (такая последовательность существует поскольку $n \in E$), и в качестве x_n берем ее последний элемент. Здесь нужно только убедиться, что элемент x_n определяется таким алгоритмом однозначно. Это делается в точности так же, как при доказательстве теоремы 2.2.6. □

[8] Понятие конечной последовательности было определено на с.73.

Поговорим теперь о примерах применения теоремы 2.2.6.

Степени с натуральным показателем.

- *Степенью* a^n числа $a \in \mathbb{R}$ с показателем $n \in \mathbb{N}$, как известно, называется число

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot ... \cdot a}_{n \text{ множителей}}$$

Теорема 2.2.6 позволяет придать точный смысл этим словам: чтобы определить a^n для любого $n \in \mathbb{N}$, нужно зафиксировать число $a \in \mathbb{R}$ и рассмотреть отображение G, которое любой последовательности $(x_1, ..., x_n)$ чисел из $\mathbb{R}$ ставит в соответствие число

$$G(x_1, ..., x_n) = x_1 \cdot x_n.$$

Применив к этому отображению теорему 2.2.6, мы для начального значения

$$x_1 = a$$

получим последовательность со свойствами

$$x_1 = a, \qquad x_{n+1} = a \cdot x_n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Если обозначить

$$a^n = x_n,$$

то эти свойства переписываются в виде

$$a^1 = a \tag{2.2.233}$$

$$a^{n+1} = a \cdot a^n \tag{2.2.234}$$

Это и есть формальное определение степени.

Обычно при определении по индукции указываются только эти соотношения, без уточнения, каким должно быть отображение G, потому что о его виде всегда можно догадаться.

В дальнейшем нам будет удобно отдельно положить

$$a^0 = 1 \qquad (a \in \mathbb{R}),$$

и тогда индуктивное определение для a^n можно будет переписать в виде

$$a^0 = 1, \quad a^{n+1} = a \cdot a^n \quad (a \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{Z}_+) \tag{2.2.235}$$

! **2.2.2.** Это определение, между прочим, предполагает, что 0^0 равно единице:

$$0^0 = 1 \tag{2.2.236}$$

Факториал $n!$ и двойной факториал $n!!$.

- *Факториал* числа $n \in \mathbb{Z}_+$ определяется по индукции следующим правилом:

$$0! = 1, \qquad (n+1)! = (n+1) \cdot n! \tag{2.2.237}$$

– здесь отображение G определяется формулой

$$G(x_1, ..., x_n) = (n+1) \cdot x_n,$$

а начальным значением последовательности x_n будет единица:

$$x_1 = 1.$$

- *Двойной факториал* числа $n \in \mathbb{Z}_+$ определяется по индукции следующими правилами:

— если число n четно, то есть имеет вид $n = 2m$, $m \in \mathbb{Z}_+$, то

$$0!! = 1, \quad (2m+2)!! = (2m+2) \cdot (2m)!! \tag{2.2.238}$$

— если число n нечетно, то есть имеет вид $n = 2m-1$, $m \in \mathbb{N}$, то

$$1!! = 1, \quad (2m+1)!! = (2m+1) \cdot (2m-1)!! \tag{2.2.239}$$

Индуктивная сумма $\sum_{k=1}^n a_k$ и индуктивное произведение $\prod_{k=1}^n a_k$ элементов последовательности $\{a_n\}$ определяются индуктивными правилами так:

$$\sum_{k=1}^{1} a_k = a_1, \qquad \sum_{k=1}^{n+1} a_k = \left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right) + a_{n+1} \tag{2.2.240}$$

$$\prod_{k=1}^{1} a_k = a_1, \qquad \prod_{k=1}^{n+1} a_k = \left(\prod_{k=1}^{n} a_k\right) \cdot a_{n+1} \tag{2.2.241}$$

– здесь (последовательность $\{a_n\}$ считается заранее фиксированной, и) в первом случае отображение G определяется формулой

$$G(x_1, ..., x_n) = x_n + a_{n+1},$$

а во втором — формулой

$$G(x_1, ..., x_n) = x_n \cdot a_{n+1};$$

начальным же значением последовательности x_n в обоих случаях будет первый элемент последовательности $\{a_n\}$:

$$x_1 = a_1.$$

Часто приходится рассматривать также суммы и произведения по интервалам натуральных чисел $\{m, ..., n\}$. Читатель может по аналогии дать индуктивные определения этим понятиям, мы же воспользуемся уже записанными формулами, и положим

$$\sum_{k=m}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} a_k - \sum_{k=1}^{m-1} a_k$$

$$\prod_{k=m}^{n} a_k = \prod_{k=1}^{n} a_k \Big/ \prod_{k=1}^{m-1} a_k \qquad (\text{если } a_k \neq 0).$$

⊳⊳ **2.2.3.** Найдите формулы для последовательностей, определяемых следующими условиями:

1) $G(x_1, ..., x_n) = x_1 + x_n$, $x_1 = a$. (Ответ: $x_n = a \cdot n$.)
2) $G(x_1, ..., x_n) = \frac{x_n}{n}$, $x_1 = a$. (Ответ: $x_n = \frac{a}{(n-1)!}$.)
3) $G(x_1, ..., x_n) = \frac{1}{x_n}$, $x_1 = a$, $a \neq 0$. (Ответ: $x_n = a^{(-1)^{n+1}}$.)
4) $G(x_1, ..., x_n) = \frac{x_1}{x_n}$, $x_1 = a$, $a \neq 0$. (Ответ: $x_n = \begin{cases} a, & n = 1 \\ 1, & n > 1 \end{cases}$.)

Доказательство формул по индукции. Здесь мы покажем, как с помощью математической индукции доказываются разные формулы. Те, что мы докажем, понадобятся нам в дальнейшем.

◇ **2.2.4. Неравенство Бернулли.** *Для любых $n \in \mathbb{N}$ и $\alpha > -1$ выполняется неравенство*

$$(1 + \alpha)^n \geqslant 1 + n \cdot \alpha \qquad (2.2.242)$$

Доказательство. Действительно, при $n = 1$ получается

$$(1 + \alpha)^1 \geqslant 1 + 1 \cdot \alpha,$$

то есть в этом случае неравенство верно. Предположим, что оно верно для какого-нибудь $n = k$, то есть, что справедливо

$$(1 + \alpha)^k \geqslant 1 + k \cdot \alpha \qquad (2.2.243)$$

Тогда для $n = k + 1$ мы получаем

$$(1 + \alpha)^n = (1 + \alpha)^{k+1} = (1 + \alpha) \cdot (1 + \alpha)^k \geqslant$$
$$\geqslant (\text{применяем } (2.2.243)) \geqslant (1 + \alpha) \cdot (1 + k \cdot \alpha) =$$
$$= 1 + (k+1) \cdot \alpha + k \cdot \alpha^2 \geqslant 1 + (k+1) \cdot \alpha = 1 + n \cdot \alpha$$

Мы получили, что из того, что (2.2.242) выполняется для какого-то $n = k$ автоматически следует, что оно выполняется для $n = k + 1$. Таким образом, (2.2.242) обладает свойствами (a') и (b') теоремы 2.2.2, и поэтому оно выполняется для любых $n \in \mathbb{N}$. □

◇ **2.2.5.** При $n \in \mathbb{Z}_+$ справедливо неравенство

$$n! \geqslant 2^{n-1} \qquad (2.2.244)$$

Доказательство. 1. Докажем сначала это неравенство для $n \in \mathbb{N}$. При $n = 1$ это верно:

$$\underbrace{1!}_{1} \leqslant \underbrace{2^0}_{1}$$

Предположим, что это верно при $n = k$:

$$k! \geqslant 2^{k-1}$$

Тогда при $n = k + 1$ получаем:

$$k \in \mathbb{N}$$
$$\Downarrow$$
$$k \geqslant 1$$
$$\Downarrow$$
$$n = k + 1 \geqslant 2$$
$$\Downarrow$$
$$n! = (k + 1)! = \underbrace{(k + 1)}_{\substack{\vee\!\shortparallel \\ 2}} \cdot \underbrace{k!}_{\substack{\vee\!\shortparallel \\ 2^{k-1}}} \geqslant$$
$$\geqslant 2 \cdot 2^{k-1} = 2^k = 2^{n-1}$$

2. После того, как (2.2.244) доказано для $n \in \mathbb{N}$, остается заметить, что при $n = 0$ оно тоже верно:

$$0! = 1 \geqslant \frac{1}{2} = 2^{-1}.$$

Следовательно, оно верно для $n \in \mathbb{Z}_+$. □

◇ **2.2.6.** При $n, m \in \mathbb{Z}_+$ справедливо неравенство

$$(n + m)! \geqslant n! \cdot (n + 1)^m \qquad (2.2.245)$$

Доказательство. Проведем индукцию по $m \in \mathbb{Z}_+$. При $m = 0$ это неравенство верно:

$$(n + 0)! = n! \geqslant n! \cdot (n + 1)^0$$

Предположим, что оно верно при $m = k$:

$$(n + k)! \geqslant n! \cdot (n + 1)^k$$

Тогда при $m = k + 1$ получаем:

$$(n + m)! = (n + k + 1)! =$$
$$= \underbrace{(n + k + 1)}_{\substack{\vee\!\shortparallel \\ n+1}} \cdot \underbrace{(n + k)!}_{\substack{\vee\!\shortparallel \\ n! \cdot (n+1)^k}} \geqslant (n + 1) \cdot n! \cdot (n + 1)^k =$$
$$= n! \cdot (n + 1)^{k+1} = n! \cdot (n + 1)^m$$

□

◇ **2.2.7. Сумма отрезка геометрической прогрессии.** *Для всякого вещественного числа $q \ne 1$ и любых чисел $m,n \in \mathbb{Z}_+$, $m \leqslant n$, справедливы формулы:*

$$\sum_{i=0}^{n} q^i = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}, \qquad (2.2.246)$$

$$\sum_{i=m}^{n} q^i = \frac{q^m-q^{n+1}}{1-q} \qquad (2.2.247)$$

Доказательство. 1. Докажем сначала (2.2.246). При $n=0$ формула верна:

$$\sum_{i=0}^{0} q^i = q^0 = 1 = \frac{1-q^1}{1-q}.$$

Предположим, что формула верна при $n=k$:

$$\sum_{i=0}^{k} q^i = \frac{1-q^{k+1}}{1-q}, \qquad (2.2.248)$$

Тогда при $n=k+1$ получаем:

$$\sum_{i=0}^{k+1} q^i = \sum_{i=0}^{k} q^i + q^{k+1} = (2.2.248) = \\ = \frac{1-q^{k+1}}{1-q} + q^{k+1} = \frac{1-q^{k+1}+q^{k+1}-q^{k+2}}{1-q} = \\ = \frac{1-q^{k+2}}{1-q},$$

что и есть формула (2.2.246) при $n=k+1$.

2. После того, как (2.2.246) доказано, формула (2.2.247) получается вычислением:

$$\sum_{i=m}^{n} q^i = \sum_{i=0}^{n} q^i - \sum_{i=0}^{m-1} q^i = \\ = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} - \frac{1-q^m}{1-q} = \frac{q^m-q^{n+1}}{1-q}$$

□

Число сочетаний C_n^k. Для любых $n,k \in \mathbb{Z}_+$, $k \leqslant n$ число

$$C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!\cdot k!}, \qquad (0 \leqslant k \leqslant n) \qquad (2.2.249)$$

называется *числом сочетаний из n по k*.

Предложение 2.2.8. *Справедливо следующее тождество*

$$C_n^k + C_n^{k-1} = C_{n+1}^k, \qquad (2.2.250)$$

называемое тождеством Паскаля.

Доказательство. Это доказывается простой проверкой:

$$C_n^k + C_n^{k-1} = C_{n+1}^k$$
$$\Updownarrow$$
$$\frac{n!}{(n-k)!k!} + \frac{n!}{(n-k+1)!(k-1)!} = \frac{(n+1)!}{(n+1-k)!k!}$$
$$\Updownarrow \ \text{(делим на } n!)$$
$$\frac{1}{(n-k)!k!} + \frac{1}{(n-k+1)!(k-1)!} = \frac{n+1}{(n+1-k)!k!}$$
$$\Updownarrow \ \text{(умножаем на } k!)$$
$$\frac{1}{(n-k)!} + \frac{k}{(n-k+1)!} = \frac{n+1}{(n+1-k)!}$$
$$\Updownarrow \ \text{(умножаем на } (n+1-k)!)$$
$$n-k+1+k = n+1$$

□

◇ **2.2.8. Бином Ньютона.** *Для любых $a,b \in \mathbb{R}$ и $n \in \mathbb{N}$ справедливо равенство*

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \cdot a^{n-k} \cdot b^k \qquad (2.2.251)$$

где C_n^k – число сочетаний, определенное выше формулой (2.2.249).

Доказательство. Сначала проверяем ее при $n=1$:

$$\underbrace{(a+b)^1}_{\substack{\| \\ a+b}} = \underbrace{\sum_{k=0}^{1} C_1^k \cdot a^{1-k} \cdot b^k}_{\substack{\| \\ C_1^0\cdot a^1\cdot b^0 + C_1^1\cdot a^0\cdot b^1}}$$

Затем предполагаем, что она верна при $n=m$

$$(a+b)^m = \sum_{k=0}^{m} C_m^k \cdot a^{m-k} \cdot b^k \qquad (2.2.252)$$

и проверяем, что тогда она будет верна при $n=m+1$:

$$(a+b)^{m+1} = (a+b)\cdot(a+b)^m = (2.2.252) = \\ = (a+b)\cdot \sum_{k=0}^{m} C_m^k \cdot a^{m-k} \cdot b^k = \\ = \sum_{k=0}^{m} C_m^k \cdot a^{m+1-k} \cdot b^k + \underbrace{\sum_{k=0}^{m} C_m^k \cdot a^{m-k} \cdot b^{k+1}}_{\text{заменяем } k \text{ на } i-1} = \\ = \sum_{k=0}^{m} C_m^k \cdot a^{m+1-k} \cdot b^k + \underbrace{\sum_{i=1}^{m+1} C_m^{i-1} \cdot a^{m+1-i} \cdot b^i}_{\text{заменяем } i \text{ на } k} = \\ = \sum_{k=0}^{m} C_m^k \cdot a^{m+1-k} \cdot b^k + \sum_{k=1}^{m+1} C_m^{k-1} \cdot a^{m+1-k} \cdot b^k = \\ = a^{m+1} + \sum_{k=1}^{m} C_m^k \cdot a^{m+1-k} \cdot b^k +$$

$$+\sum_{k=1}^{m} C_m^{k-1}\cdot a^{m+1-k}\cdot b^k + b^{m+1} =$$

$$= a^{m+1} + \sum_{k=1}^{m} \underbrace{(C_m^k + C_m^{k-1})}_{\substack{\| \\ C_{n+1}^k, \\ \text{по тождеству} \\ \text{Паскаля (2.2.250)}}} \cdot a^{m+1-k}\cdot b^k + b^{m+1} =$$

$$= a^{m+1} + \sum_{k=1}^{m} C_{m+1}^k \cdot a^{m+1-k}\cdot b^k + b^{m+1} =$$

$$= \sum_{k=0}^{m+1} C_{m+1}^k \cdot a^{m+1-k}\cdot b^k$$

□

▷ **2.2.9. Сумма отрезка арифметической прогрессии.** Докажите методом математической индукции формулу:

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n\cdot(n+1)}{2} \qquad (2.2.253)$$

▷ **2.2.10.** Докажите следующие тождества для двойного факториала:

$$n!! = n\cdot(n-2)!!, \qquad n \geqslant 2 \qquad (2.2.254)$$

$$n! = n!!\cdot(n-1)!!, \qquad n\in\mathbb{N} \qquad (2.2.255)$$

$$(2m)!! = 2^m\cdot m!, \qquad m\in\mathbb{Z}_+ \qquad (2.2.256)$$

$$(2m-1)!! = \frac{(2m-1)!}{2^{m-1}\cdot(m-1)!}, \qquad m\in\mathbb{N}. \qquad (2.2.257)$$

▷▷ **2.2.11.** Докажите методом математической индукции:

1) $1^2+3^2+...+(2n-1)^2 = \frac{n(4n^2-1)}{3}$
2) $\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+...+\frac{1}{3n+1} > 1$
3) $\sum_{k=1}^n k(3k-1) = n^2(n+1)$
4) $\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+...+\frac{1}{2n} > \frac{11}{24}$
5) $\sum_{k=1}^n \frac{1}{(4k-3)\cdot(4k+1)} = \frac{n}{4n+1}$
6) $\prod_{k=1}^n \left(1-\frac{1}{(k+1)^2}\right) = \frac{n+2}{2n+2}$
7) $1\cdot 2^2 + 2\cdot 3^2 + ... + (n-1)\cdot n^2 = \frac{n\cdot(n^2-1)\cdot(3n+2)}{12}$ $(n\geqslant 2)$,
8) $\frac{n}{2} < \sum_{k=0}^{2n-1}\frac{1}{k} < n$.

▷▷ **2.2.12.** Докажите методом математической индукции[9] (используя бином Ньютона):

1) $\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot...\frac{2n-1}{2n} \leqslant \frac{1}{\sqrt{3n+1}}$
2) $\sqrt{n} < \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} < 2\sqrt{n}$ $(n\geqslant 2)$.

▷ **2.2.13.** Докажите индукцией следующие тождества:

$$a^n = \prod_{k=1}^n a, \qquad a\in\mathbb{R},\ n\in\mathbb{N} \qquad (2.2.258)$$

$$n! = \prod_{k=1}^n k, \qquad n\in\mathbb{N} \qquad (2.2.259)$$

$$(2m)!! = \prod_{k=1}^m (2k), \qquad m\in\mathbb{Z}_+ \qquad (2.2.260)$$

$$(2m-1)!! = \prod_{k=1}^m (2k-1), \qquad m\in\mathbb{N} \qquad (2.2.261)$$

▷ **2.2.14.** Покажите индукцией, что для любой последовательности чисел $x_1,...,x_n$ выполняются соотношения:

$$\left|\sum_{k=1}^n x_k\right| \leqslant \sum_{k=1}^n |x_k|, \qquad (2.2.262)$$

$$\left|\prod_{k=1}^n x_k\right| = \prod_{k=1}^n |x_k| \qquad (2.2.263)$$

Принцип Архимеда.

Теорема 2.2.9. *Множество натуральных чисел* $\mathbb{N}$ *не ограничено сверху.*

Доказательство. Предположим, что наоборот, $\mathbb{N}$ ограничено сверху. Тогда по теореме 2.1.23, $\mathbb{N}$ должно иметь точную верхнюю грань:

$$\exists \sup\mathbb{N} = B\in\mathbb{R} \qquad (2.2.264)$$

Поскольку B – точная верхняя грань (то есть наименьшее из чисел, ограничивающих $\mathbb{N}$ сверху), число $B-1$ не может ограничивать $\mathbb{N}$ сверху. Значит, существует какое-то $n\in\mathbb{N}$, большее чем $B-1$: $n > B-1$. То есть

$$B < n+1$$

Это означает, что B не может ограничивать $\mathbb{N}$ сверху (потому что B меньше некоторого числа $n+1\in\mathbb{N}$). Таким образом, мы получили противоречие с (2.2.264). Оно означает, что наше предположение о том, что $\mathbb{N}$ ограничено сверху неверно. □

[9]Функция $f(x)=\sqrt{x}$ будет определена только в следующей главе, на с.280, и здесь мы рассчитываем школьные знания читателя.

Из теоремы 2.2.9 следует важный вывод:

Теорема 2.2.10 (принцип Архимеда)**.** *Для любого вещественного числа $C \in \mathbb{R}$ найдется натуральное число $n \in \mathbb{N}$ такое, что $n > C$.*

Доказательство. Зафиксируем число $C \in \mathbb{R}$, и предположим противное, то есть что для него не существует такого $n \in \mathbb{N}$, чтобы $n > C$. Тогда для всякого $n \in \mathbb{N}$ мы получаем $n \leqslant C$. Иными словами, C ограничивает $\mathbb{N}$ сверху. Этого не может быть по теореме 2.2.9. Значит, наше предположение неверно. □

Конечные множества в $\mathbb{R}$ и $\mathbb{N}$.

Теорема 2.2.11. *Всякое конечное множество X в $\mathbb{R}$ обладает минимумом и максимумом.*

Доказательство. Покажем, что X имеет минимум (существование максимума доказывается по аналогии). Проведем индукцию по мощности $\operatorname{card} X$ (числу элементов) множества X.

1. При $\operatorname{card} X = 1$ мы получаем, что X состоит всего из одного элемента a, и ясно, что a будет минимумом X:

$$a = \min X$$

2. Предположим, что мы доказали наше утверждение для всех множеств X мощности $\operatorname{card} X = k$, где $k \in \mathbb{N}$.

3. Пусть X – множество мощности $\operatorname{card} X = k + 1$. Рассмотрим какую-нибудь биекцию $f : \{1, ..., k+1\} \to X$ и обозначим $K = \{f(i);\ i \in \{1, ..., k\}\}$. Тогда:

$$X = K \cup \{f(k+1)\},$$

Рассмотрим число

$$a = (\min K) \wedge f(k+1)$$

(напомним, что мы определили операцию $\wedge$ формулой (2.1.203)). Это число a будет минимумом множества X, потому что, во-первых,

$$a = (\min K) \wedge f(k+1) = \min\{\min K, f(k+1)\}$$

$$\Downarrow$$

$$a = \min K \quad \bigvee \quad a = f(k+1)$$

$$\Downarrow$$

$$a \in K \quad \bigvee \quad a \in \{f(k+1)\}$$

$$\Downarrow$$

$$a \in K \cup \{f(k+1)\} = X$$

И, во-вторых,

$$a = (\min K) \wedge f(k+1) = \min\{\min K, f(k+1)\}$$

$$\Downarrow$$

$$a \leqslant \min K \quad \& \quad a \leqslant f(k+1)$$

$$\Downarrow$$

$$a \leqslant K \quad \& \quad a \leqslant f(k+1)$$

$$\Downarrow$$

$$a \leqslant K \cup \{f(k+1)\} = X$$

□

Теорема 2.2.12. *Множество A в $\mathbb{N}$ конечно тогда и только тогда, когда оно ограничено:*

$$\operatorname{card} A < \infty \quad \Longleftrightarrow \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad A \subseteq \{1, ..., N\}$$

Доказательство. Первая половина этого утверждение следует из теоремы 2.2.11: если множество A конечно, то оно либо пусто, и тогда ограничено, либо непусто, и тогда оно является образом $\mathsf{R}(f)$ некоторого инъективного отображения $f : \{1, ..., n\} \to \mathbb{N}$. Отсюда по теореме 2.2.11 получаем, что A имеет максимум, и поэтому ограничено сверху. С другой стороны, оно всегда ограничено снизу единицей 1, и значит оно просто ограничено.

Докажем, что, наоборот, если A ограничено, то оно конечно. Опять, если A пусто, то доказывать ничего не нужно, поэтому мы будем считать, что $A \neq \varnothing$. Тогда, положив

$$a_1 = \min A,$$

можно определить отображение G, которое некоторым последовательностям $\{a_1, ..., a_k\} \subseteq A$ будет ставить в соответствие число

$$G(a_1, ..., a_k) = \min A \setminus \{a_1, ..., a_k\}$$

(если множество $A \setminus \{a_1, ..., a_k\}$ непусто, то такое число существует по свойству 4° на с.154). По теореме 2.2.7 об определениях частной индукцией, отображение G определяет некую последовательность $\{a_n\} \subseteq A$, удовлетворяющую условию

$$G(a_1, ..., a_n) = a_{n+1},$$

для всех n, меньших длины N этой последовательности.

1. Докажем, что она строго возрастает:

$$\forall n < N \qquad a_n < a_{n+1} \tag{2.2.265}$$

Действительно, во-первых,

$$\begin{gathered} \{1, ..., a_{n-1}\} \subseteq \{1, ..., a_{n-1}, a_n\} \\ \Downarrow \\ A \setminus \{1, ..., a_{n-1}\} \supseteq A \setminus \{1, ..., a_{n-1}, a_n\} \\ \Downarrow \scriptstyle (2.1.200) \end{gathered}$$

$$a_n = \min A \setminus \{1, ..., a_{n-1}\} \leqslant \\ \leqslant \min A \setminus \{1, ..., a_{n-1}, a_n\} = a_{n+1}$$

И, во-вторых, если бы оказалось, что $a_n = a_{n+1}$, то мы получили бы

$$\begin{gathered} a_n = a_{n+1} = \min A \setminus \{1, ..., a_n\} \\ \Downarrow \\ a_n \in A \setminus \{1, ..., a_n\}, \end{gathered}$$

что невозможно.

2. Из (2.2.265) следует условие

$$\forall n \qquad n \leqslant a_n \tag{2.2.266}$$

Его можно доказать индукцией. При $n = 1$ оно очевидно:

$$1 \leqslant a_1.$$

А если оно верно при $n = k$

$$k \leqslant a_k,$$

то из этого следует

$$\begin{gathered} k \leqslant a_k < a_{k+1} \\ \Downarrow \scriptstyle (2.2.219) \\ k + 1 \leqslant a_{k+1} \end{gathered}$$

То есть (2.2.266) будет верно и при $n = k + 1$.

3. Заметим теперь, что поскольку A ограничено, существует $c \in \mathbb{R}$ такое что

$$A \leqslant c$$

По принципу Архимеда (теорема 2.2.10), должно существовать $m \in \mathbb{N}$ такое что

$$A \leqslant c < m$$

Отсюда следует, что последовательность $\{a_n\}$ конечна. Действительно, если бы она была бесконечной, то мы получили бы, что ее элемент с номером m лежит в A

$$a_m \in A$$

А с другой стороны, это невозможно, потому что

$$A < m \leqslant a_m$$

4. Итак, мы имеем конечную последовательность $\{a_n\} \subseteq A$, то есть отображение

$$f : \{1, ..., N\} \to A, \qquad f(n) = a_n$$

где $N \in \mathbb{N}$ – длина последовательности. Это отображение инъективно, потому что

$$m < n$$
$$\Downarrow$$
$$f(m) = a_m < a_n = f(n)$$
$$\Downarrow$$
$$f(m) \neq f(n)$$

Нам остается проверить, что оно сюръективно. Действительно, если бы оказалось, что

$$A \setminus \{a_1, ..., a_N\} \neq \varnothing,$$

то положив

$$a_{N+1} = \min A \setminus \{a_1, ..., a_N\}$$

мы получили бы, что N не может быть длиной последовательности $\{a_n\}$, определяемой отображением G по теореме 2.2.7:

$$\exists \{a_2, ..., a_{N+1}\} \subseteq A \quad \forall k \in \{2, ..., N+1\} \qquad G(a_1, ..., a_{k-1}) = a_k$$
$$\Downarrow$$
$$N + 1 \leqslant \sup \Big\{ n \in \mathbb{N} : \quad \exists \{a_2, ..., a_n\} \subseteq A \quad \forall k \in \{2, ..., n\} \qquad G(a_1, ..., a_{k-1}) = a_k \Big\}$$
$$\Downarrow$$
$$N \neq \sup \Big\{ n \in \mathbb{N} : \quad \exists \{a_2, ..., a_n\} \subseteq A \quad \forall k \in \{2, ..., n\} \qquad G(a_1, ..., a_{k-1}) = a_k \Big\}$$

□

(b) Целые числа $\mathbb{Z}$

Определение множества целых чисел.

- Число $x \in \mathbb{R}$ называется *целым*, если оно
  - либо натуральное,
  $$x \in \mathbb{N}$$
  - либо равно нулю
  $$x = 0$$

– либо противоположно натуральному

$$x \in -\mathbb{N}$$

(то есть x имеет вид $x = -n$, где $n \in \mathbb{N}$).

В соответствии с этим, множество целых чисел, обозначаемое символом $\mathbb{Z}$, описывается формулой

$$\mathbb{Z} = (-\mathbb{N}) \cup \{0\} \cup \mathbb{N} \tag{2.2.267}$$

Теорема 2.2.13. *Множество целых чисел $\mathbb{Z}$ замкнуто относительно сложения, вычитания и умножения: если $m, n \in \mathbb{Z}$, то $m + n \in \mathbb{Z}$, $m - n \in \mathbb{Z}$ и $m \cdot n \in \mathbb{Z}$.*

Доказательство. 1. Пусть $m, n \in \mathbb{Z}$. Покажем сначала, что $m + n \in \mathbb{Z}$. Для этого придется рассмотреть несколько случаев.

Во-первых, заметим, что если какое-то из этих чисел равно нулю, например, $m = 0$, то их сумма очевидно, принадлежит $\mathbb{Z}$: $m + n = n \in \mathbb{Z}$. Поэтому будем считать, что оба они отличны от нуля: $m \neq 0$, $n \neq 0$.

Далее рассматриваем три случая:

— если $m > 0$ и $n > 0$, то $m, n \in \mathbb{N}$, и по теореме 2.2.3 получаем $m + n \in \mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$;

— если $m < 0$ и $n < 0$, то $m, n \in -\mathbb{N}$, то есть $-m \in \mathbb{N}$ и $-n \in \mathbb{N}$ и опять по теореме 2.2.3 получаем $-m - n \in \mathbb{N}$, откуда $m + n \in -\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$;

— если $m < 0$ и $n > 0$, то $m \in -\mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$, то есть $-m = k \in \mathbb{N}$ и $n \in \mathbb{N}$; здесь нужно рассмотреть три частных случая:

  — если $k < n$, то по свойству 7° на с. 154, $n + m = n - k \in \mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$;

  — если $k = n$, то $n + m = n - k = 0 \in \mathbb{Z}$;

  — если $k > n$, то по свойству 7° на с. 154, $-(n + m) = k - n \in \mathbb{N}$, откуда $n + m \in -\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$;

2. Когда доказано, что $\mathbb{Z}$ замкнуто относительно сложения, замкнутость относительно вычитания становится очевидной, потому что из самого определения $\mathbb{Z}$ ясно, что если $n \in \mathbb{Z}$, то $-n \in \mathbb{Z}$. Поэтому при $m, n \in \mathbb{Z}$ получаем $-n \in \mathbb{Z}$ и можно применить уже доказанную замкнутость относительно сложения: $m - n = m + (-n) \in \mathbb{Z}$.

3. Замкнутость относительно умножения доказывается так же, как и относительно сложения. Пусть $m, n \in \mathbb{Z}$. Чтобы убедиться, что $m \cdot n \in \mathbb{Z}$, нужно рассмотреть несколько случаев.

Во-первых, опять же нужно заметить, что если какое-то из этих чисел равно нулю, например, $m = 0$, то их сумма очевидно, принадлежит $\mathbb{Z}$: $m \cdot n = 0 \in \mathbb{Z}$. Поэтому будем считать, что оба они отличны от нуля: $m \neq 0$, $n \neq 0$.

Далее рассматриваем три случая:

— если $m > 0$ и $n > 0$, то $m, n \in \mathbb{N}$, и по теореме 2.2.3 получаем $m \cdot n \in \mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$;

— если $m < 0$ и $n < 0$, то $m, n \in -\mathbb{N}$, то есть $-m \in \mathbb{N}$ и $-n \in \mathbb{N}$ и опять по теореме 2.2.3 получаем $m \cdot n = (-m) \cdot (-n) \in \mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$;

— если $m < 0$ и $n > 0$, то $m \in -\mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$, то есть $-m \in \mathbb{N}$ и $n \in \mathbb{N}$; опять по теореме 2.2.3 получаем $-m \cdot n = (-m) \cdot n \in -\mathbb{N}$, откуда $m \cdot n \in -\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$.

□

Теорема 2.2.14. *Для любых $m, n \in \mathbb{Z}$*

$$m < n + 1 \quad \Longrightarrow \quad m \leqslant n \tag{2.2.268}$$

Доказательство. Здесь нужно рассмотреть несколько случаев.

1. Если $m \in \mathbb{N}$, то $1 \leqslant m$, поэтому $0 \leqslant m - 1 < n$, и, поскольку $n \in \mathbb{Z} = (-\mathbb{N}) \cup \{0\} \cup \mathbb{N}$, такое возможно только если $n \in \mathbb{N}$. Мы получаем, что оба числа m и n лежат в $\mathbb{N}$, а этот случай уже рассмотрен в свойстве 5° на с.154.

2. Если $m = 0$, то $0 < n + 1$, то есть $-1 < n$, поэтому либо $n = 0$, и тогда $m = 0 \leqslant 0 = n$, либо $n \in \mathbb{N}$, и тогда $n \geqslant 1 > 0$, откуда $m = 0 \leqslant n$.

3. Если $m < 0$, то $m \in -\mathbb{N}$, и приходится рассматривать несколько частных случаев.

— если $n \in \mathbb{N}$, то мы получаем $m \leqslant 0 \leqslant n$.

— если $n = 0$, то $m \leqslant 0 = n$.

— если $n < 0$, то $n \in -\mathbb{N}$, и мы получаем

$$m < n+1 \quad \Longrightarrow \quad -m > -n-1 \quad \Longrightarrow \quad -n < -m+1;$$

поскольку при этом $-m \in \mathbb{N}$ и $-n \in \mathbb{N}$, мы опять попадаем в ситуацию, описанную в свойстве 5° на с.154, и получаем, что $-n \leqslant -m$. То есть $m \leqslant n$.

$\square$

Следствие 2.2.15. *Если $m, n \in \mathbb{Z}$, причем $n \leqslant m < n+1$, то $m = n$.*

Доказательство. Из (2.2.268) получаем: $m < n+1 \Longrightarrow m \leqslant n$, и вместе с неравенством $n \leqslant m$ это означает, что $m = n$. $\square$

Теорема 2.2.16. *Любое непустое ограниченное снизу (сверху) множество целых чисел $E \subseteq \mathbb{Z}$ имеет минимальный (максимальный) элемент.*

$$\exists \min E \qquad (\max E)$$

причем

$$n < E \quad \Longrightarrow \quad n < \min E \qquad \left(E < n \quad \Longrightarrow \quad \max E < n\right) \tag{2.2.269}$$

Доказательство. Пусть E ограничено сверху. Тогда по принципу Архимеда 2.2.10, найдется натуральное число $n \in \mathbb{N}$ ограничивающее E сверху. Теперь получаем:

$$\begin{array}{ll}
E < n & \\
\Downarrow & \\
-n < -E & \\
\Downarrow & \\
0 < -E+n & (\text{причем } -E+n \subseteq \mathbb{Z}, \text{ по теореме 2.2.13}) \\
\Downarrow & {\scriptstyle (2.2.267)} \\
-E+n \subseteq \mathbb{N} & \\
\Downarrow & {\scriptstyle \big(\text{свойство } 5^\circ \text{ на с. } 154\big)} \\
\exists \min(-E+n) = \min(-E)+n > 0 & \\
\Downarrow & {\scriptstyle \big(\text{свойство } 2^\circ(i) \text{ на с. } 147\big)} \\
\exists \min(-E) > -n & \\
\Downarrow & {\scriptstyle \big(\text{свойство } 2^\circ(ii) \text{ на с. } 147\big)} \\
\exists \max E = -\min(-E) < n &
\end{array}$$

$\square$

Степени с целым показателем. Напомним, что на странице 159 мы уже определили степень a^n с показателем $n \in \mathbb{Z}_+$ индуктивной формулой (2.2.235):

$$a^0 = 1, \quad a^{n+1} = a^n \cdot a, \qquad n \in \mathbb{Z}_+ \tag{2.2.235}$$

(при этом a может быть любым). Для целых отрицательных показателей степень определяется формулой

$$a^{-n} := (\underbrace{a^{-1}}_{\substack{\text{обратный}\\ \text{элемент}\\ \text{для } a\\ \text{из аксиомы}\\ A9}})^n = \left(\frac{1}{a}\right)^n, \qquad n \in \mathbb{N}, \tag{2.2.270}$$

(в этом случае a должно быть ненулевым).

- Отображение $(a, n) \mapsto a^n$ называется *степенным отображением* с целым показателем. Его свойства удобно собрать в следующей теореме.

Теорема 2.2.17 (о степенном отображении). *Отображение*

$$(a, n) \mapsto a^n,$$

обладает следующими свойствами:

Z_0: *оно определено в следующих двух ситуациях:*

— *при $a \neq 0$ и $n \in \mathbb{Z}$,*

— *при $a = 0$ и $n \in \mathbb{Z}_+$,*

или, что то же самое, в следующих двух:

— *при* $n \in \mathbb{Z}_+$ *и тогда* $a \in \mathbb{R}$,

— *при* $n \in -\mathbb{N}$ *и тогда* $a \neq 0$;

Z_1: *следующие две группы тождеств выполняются всякий раз, когда обе части тождества определены:*

— **показательные законы**:

$$a^0 = 1, \qquad (2.2.271)$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}, \qquad (2.2.272)$$

$$a^{m+n} = a^m \cdot a^n; \qquad (2.2.273)$$

— **степенные законы**:

$$1^n = 1, \qquad (2.2.274)$$

$$\left(\frac{1}{a}\right)^n = \frac{1}{a^n}, \qquad (2.2.275)$$

$$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n \qquad (2.2.276)$$

Z_2: *тождество, называемое* **накопительным законом**,

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n} \qquad (2.2.277)$$

выполняется для следующих значений переменных:

— *при* $a \neq 0$ *и* $m, n \in \mathbb{Z}$,

— *при* $a = 0$ *и* $m, n \in \mathbb{Z}_+$;

Z_3: *для* **нулевого основания** *степень, в случаях, когда она определена, описывается формулой*

$$0^n = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 0, & n > 0 \end{cases} \qquad (2.2.278)$$

а для **положительных оснований** *выполняется следующее* **условие сохранения знака**:

$$a > 0 \quad \Rightarrow \quad a^n > 0 \quad (n \in \mathbb{Z}) \qquad (2.2.279)$$

Z_4: *для положительных оснований выполняются следующие* **условия монотонности**:

— *если* $n > 0$, *то возведение в степень* n *сохраняет знак неравенства:*

$$0 < x < y \quad \Longrightarrow \quad x^n < y^n \qquad (2.2.280)$$

— *если* $n < 0$, *то возведение в степень* n *меняет знак неравенства:*

$$0 < x < y \quad \Longrightarrow \quad x^n > y^n \qquad (2.2.281)$$

— *если* $a > 1$, *то потенцирование с основанием* a *сохраняет знак неравенства:*

$$m < n \quad \Longrightarrow \quad a^m < a^n \qquad (2.2.282)$$

— *если* $0 < a < 1$, *то потенцирование с основанием* a *меняет знак неравенства:*

$$m < n \quad \Longrightarrow \quad a^m > a^n \qquad (2.2.283)$$

Доказательство. 1. Начнем с показательных законов. Формула (2.2.271) есть просто часть определения (2.2.235) степени a^n с неотрицательным показателем. Формула (2.2.272) доказывается рассмотрением трех случаев: если $n \in \mathbb{N}$, то

$$a^{-n} = (2.2.270) = \frac{1}{a^n}$$

если $n = 0$, то

$$a^{-n} = a^0 = (2.2.271) = 1 = \\ = \frac{1}{1} = (2.2.271) = \frac{1}{a^0} = \frac{1}{a^n}$$

а если $n \in -\mathbb{N}$, то есть $n = -k$, $k \in \mathbb{N}$, то поскольку (2.2.272) уже доказано для положительных степеней, должно выполняться $a^{-k} = \frac{1}{a^k}$, или, что то же самое, $\frac{1}{a^{-k}} = a^k$, поэтому

$$a^{-n} = a^k = \frac{1}{a^{-k}} = \frac{1}{a^n}$$

Для доказательства (2.2.273) нам понадобится следующее вспомогательное тождество:

$$a^{m+1} = a^m \cdot a, \qquad m \in \mathbb{Z} \qquad (2.2.284)$$

При $m \in \mathbb{Z}_+$ оно является просто частью определения (2.2.235), поэтому для его доказательства нам нужно лишь проверить, что оно верно при $m \in -\mathbb{N}$, то есть при $m = -k$, где $k \in \mathbb{N}$:

$$a^{1-k} = a^{-k} \cdot a, \qquad k \in \mathbb{N}$$

Если сделать замену $k - 1 = n$, $n \in \mathbb{Z}_+$, то мы получим эквивалентную формулу

$$a^{-n} = a^{-n-1} \cdot a, \qquad n \in \mathbb{Z}_+$$

которую можно переписать так:

$$\frac{a^{-n}}{a} = a^{-n-1}, \qquad n \in \mathbb{Z}_+$$

и доказывается это цепочкой:

$$a^{-n-1} = (2.2.272) = \frac{1}{a^{n+1}} = (2.2.235) = \frac{1}{a^n \cdot a} = \\ = (2.1.43) = \frac{1}{a^n} \cdot \frac{1}{a} = (2.2.272) = \frac{a^{-n}}{a}$$

Докажем теперь (2.2.273). Зафиксируем $m \in \mathbb{Z}$. Для $n \in \mathbb{Z}_+$ это доказывается индукцией:

$$a^{m+0} = a^m = a^m \cdot a = a^m \cdot a^0$$

$$a^{m+n+1} \overset{(2.2.284)}{=} \underbrace{a^{m+n}}_{\substack{\| \\ a^m\cdot a^n, \\ \text{посылка} \\ \text{индукции}}} \cdot a = a^m \cdot a^n \cdot a = \overset{(2.2.284)}{=} a^m \cdot a^{n+1}$$

Для $n \in -\mathbb{N}$, то есть $n = -k$, где $k \in \mathbb{N}$, формула (2.2.273) переписывается так:

$$a^{m-k} = a^m \cdot a^{-k} = (2.2.272) = \frac{a^m}{a^k}$$

то есть так:

$$a^{m-k} \cdot a^k = a^m$$

Заменив $m - k = l$, мы получим:

$$a^l \cdot a^k = a^{k+l}, \qquad l \in \mathbb{Z},\ k \in \mathbb{N}$$

Это просто иначе записанное равенство (2.2.273), в котором одна из степеней неотрицательна, и для этого случая мы его уже доказали.

2. Проверим степенные законы. Они все доказываются сначала для неотрицательных степеней индукцией, а затем для отрицательных степеней выводятся из уже доказанных формул. Например, формулу (2.2.274) нужно доказать сначала для $n \in \mathbb{Z}_+$ индукцией:

$$1^0 = (2.2.235) = 1,$$
$$1^{n+1} = (2.2.235) = \underbrace{1^n}_{\substack{\| \\ 1, \\ \text{посылка} \\ \text{индукции}}} \cdot 1 = 1 \cdot 1 = 1$$

А отсюда уже становится ясно, что она верна и при $n \in -\mathbb{N}$, то есть при $n = -k$, $k \in \mathbb{N}$:

$$1^n = 1^{-k} = (2.2.270) = \left(1^{-1}\right)^k = (2.1.18) = \underbrace{1^k = 1}_{\substack{\text{для } k \geqslant 0 \\ \text{уже} \\ \text{доказано}}}$$

Точно так же формула (2.2.275) доказывается сначала для $n \in \mathbb{Z}_+$ индукцией:

$$\left(\frac{1}{a}\right)^0 \overset{(2.2.235)}{=} 1 = \frac{1}{1} \overset{(2.2.235)}{=} \frac{1}{a^0},$$
$$\left(\frac{1}{a}\right)^{n+1} \overset{(2.2.235)}{=} \underbrace{\left(\frac{1}{a}\right)^n}_{\substack{\| \\ \frac{1}{a^n}, \\ \text{посылка} \\ \text{индукции}}} \cdot \frac{1}{a} = \frac{1}{a^n} \cdot \frac{1}{a} \overset{(2.1.43)}{=} \frac{1}{a^n \cdot a} \overset{(2.2.235)}{=} \frac{1}{a^{n+1}}$$

А затем для $n = -k$, $k \in \mathbb{N}$ мы получаем:

$$\left(\frac{1}{a}\right)^n = \left(\frac{1}{a}\right)^{-k} = (2.2.272) = \underbrace{\frac{1}{\left(\frac{1}{a}\right)^k} = \frac{1}{\frac{1}{a^k}}}_{\substack{\text{здесь применяется} \\ (2.2.275), \\ \text{уже доказанное} \\ \text{для } k \geqslant 0}} = (2.2.272) = \frac{1}{a^{-k}} = \frac{1}{a^n}$$

Ну и формула (2.2.276) тоже доказывается сначала для $n \in \mathbb{Z}_+$ индукцией:

$$(a \cdot b)^0 \overset{(2.2.235)}{=} 1 = 1 \cdot 1 \overset{(2.2.235)}{=} a^0 \cdot b^0,$$
$$(a \cdot b)^{n+1} \overset{(2.2.235)}{=} \underbrace{(a \cdot b)^n}_{\substack{\| \\ a^n\cdot b^n, \\ \text{посылка} \\ \text{индукции}}} \cdot (a \cdot b) = a^n \cdot b^n \cdot a \cdot b = a^n \cdot a \cdot b^n \cdot b \overset{(2.2.235)}{=} a^{n+1} \cdot b^{n+1}$$

А затем для $n = -k$, $k \in \mathbb{N}$, получается как следствие из уже доказанного:

$$(a \cdot b)^n = (a \cdot b)^{-k} = (2.2.272) = \underbrace{\frac{1}{(a \cdot b)^k} = \frac{1}{a^k \cdot b^k}}_{\substack{\text{здесь применяется} \\ (2.2.276), \\ \text{уже доказанное} \\ \text{для } k \geqslant 0}} \overset{(2.1.43)}{=} \frac{1}{a^k} \cdot \frac{1}{b^k} = (2.2.272) = a^{-k} \cdot b^{-k} = a^n \cdot b^n$$

3. Докажем накопительный закон (2.2.277). Зафиксируем $m \in \mathbb{Z}$ и проведем сначала индукцию по $n \in \mathbb{Z}_+$.

$$(a^m)^0 \overset{(2.2.235)}{=} 1 \overset{(2.2.235)}{=} a^0 = a^{0 \cdot m},$$
$$(a^m)^{n+1} \overset{(2.2.235)}{=} \underbrace{(a^m)^n}_{\substack{\| \\ a^{m\cdot n}, \\ \text{посылка} \\ \text{индукции}}} \cdot a^m = a^{m \cdot n} \cdot a^m \overset{(2.2.235)}{=} a^{m \cdot n + m} = a^{m \cdot (n+1)}$$

Это доказывает формулу (2.2.277) для случая $m \in \mathbb{Z}$ и $n \in \mathbb{Z}_+$. Если же $n \in -\mathbb{N}$, то есть $n = k$, $k \in \mathbb{N}$, то мы получаем:

$$(a^m)^n = (a^m)^{-k} \overset{(2.2.272)}{=} \overbrace{\frac{1}{(a^m)^k} = \frac{1}{a^{m \cdot k}}}^{\substack{\text{здесь применяется} \\ (2.2.277), \\ \text{уже доказанное} \\ \text{для } k \geqslant 0}} \overset{(2.2.272)}{=} a^{-m \cdot k} = a^{m \cdot (-k)} = a^{m \cdot n}$$

4. Формулу (2.2.278) при $n = 0$ можно считать следствием (2.2.271) (или можно сказать что раньше мы отмечали это утверждение как

равенство (4.1.14)). Затем для $n = 1$ ее можно вывести из (2.2.235) (или, опять же, можно заявить, что мы уже этот факт отмечали в (2.2.233)):

$$0^1 = 0^0 \cdot 0 = 1 \cdot 0 = 0$$

А для остальных $n \in \mathbb{N}$ она доказывается индукцией:

$$0^{n+1} \overset{(2.2.235)}{=} \underbrace{0^n}_{\substack{\parallel \\ 0, \\ \text{посылка} \\ \text{индукции}}} \cdot 0 = 0$$

Условие сохранения знака (2.2.279) для $n \in \mathbb{Z}_+$ доказывается индукцией:

$$a^0 \overset{(2.2.235)}{=} 1 > 0,$$

$$a^{n+1} \overset{(2.2.235)}{=} \underbrace{a^n}_{\substack{\vee \\ 0, \\ \text{посылка} \\ \text{индукции}}} \cdot \underbrace{a}_{\substack{\vee \\ 0}} \overset{(2.1.23)}{>} 0$$

А после этого для $n \in -\mathbb{N}$, то есть для $n = k$, $k \in \mathbb{N}$, мы получаем:

$$a^k > 0 \qquad \text{(уже доказано)}$$

$$\Downarrow \qquad (2.1.29)$$

$$a^n = a^{-k} \overset{(2.2.272)}{=} \frac{1}{a^k} > 0$$

5. Импликация (2.2.280) доказывается индукцией по $n \in \mathbb{N}$. При $n = 1$ она становится *тавтологией* (то есть в ней следствие является частью посылки, и поэтому утверждение будет очевидно настолько, что в обычной речи это звучало бы глупо):

$$0 < x < y \implies x < y$$

Предположим, что мы доказали (2.2.280) для какого-то $n = k$

$$0 < x < y \implies x^k < y^k$$

Тогда для $n = k + 1$ мы получим:

$$\underbrace{\begin{matrix} x^k < y^k, & x < y \\ (2.1.33) \Downarrow & \Downarrow (2.1.33) \\ x \cdot x^k < x \cdot y^k, & x \cdot y^k < y \cdot y^k \end{matrix}}$$

$$\Downarrow$$

$$x^n = x^{k+1} = x \cdot x^k < x \cdot y^k < y \cdot y^k = y^{k+1} = y^n$$

Когда (2.2.280) доказано, (2.2.281) становится его следствием: если $n < 0$, то есть $n = -k$, $k > 0$, то

$$0 < x < y$$

$$\Downarrow \qquad (2.2.280)$$

$$x^k < y^k$$

$$\Downarrow \qquad (2.1.31)$$

$$x^n = x^{-k} = \frac{1}{x^k} > \frac{1}{y^k} = y^{-k} = y^n$$

6. Импликацию (2.2.282) можно доказать, например, с помощью следующего вспомогательного утверждения:

$$a > 1 \quad \Rightarrow \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad a^n > 1 \tag{2.2.285}$$

Оно доказывается индукцией: подставив $n = 1$ мы получим тавтологию,

$$a > 1 \quad \Rightarrow \quad a^1 = a > 1$$

а если оно верно при каком-то $n = k$

$$a > 1 \quad \Rightarrow \quad a^k > 1$$

то при $n = k + 1$ мы получим

$$a^n = a^{k+1} = \underbrace{a^k}_{\substack{\vee \\ 0}} \cdot \underbrace{a}_{\substack{\vee \\ 1}} \overset{(2.1.36)}{>} a^k > 1$$

Когда (2.2.285) доказано, (2.2.282) становится его следствием – при $a > 1$ получаем:

$$m < n$$

$$\Downarrow$$

$$n - m > 0$$

$$\Downarrow (2.2.285)$$

$$a^{n-m} > 1$$

$$\Downarrow$$

$$a^{n-m} - 1 > 0$$

$$\Downarrow$$

$$a^n - a^m = a^m(a^{n-m} - 1) \overset{(2.1.23)}{>} 0$$

$$\Downarrow$$

$$a^m < a^n$$

Наконец, из (2.2.282) выводится (2.2.283):

$$\underbrace{\begin{matrix} m < n & 0 < a < 1 \\ \Downarrow & \Downarrow (2.1.35) \\ -m > -n & \frac{1}{a} > 1 \end{matrix}}$$

$$\Downarrow$$

$$a^m = \left(\frac{1}{a}\right)^{-m} \overset{(2.2.282)}{>} \left(\frac{1}{a}\right)^{-n} = a^n$$

□

Целая и дробная части числа.

- *Целой частью* вещественного числа $x \in \mathbb{R}$ называется целое число $[x] \in \mathbb{Z}$, определяемое правилом
$$[x] = \max\{n \in \mathbb{Z} : \ n \leqslant x\}, \tag{2.2.286}$$
то есть, максимум множества $E = \{n \in \mathbb{Z} : \ n \leqslant x\}$ целых чисел, не превосходящих x (по теореме 2.2.16, такой максимум существует).

Свойства целой части:

1°. *Целая часть числа $x \in [0; 1)$ равна нулю:*
$$x \in [0; 1) \quad \Longrightarrow \quad [x] = 0 \tag{2.2.287}$$

2°. *Для любого $x \in \mathbb{R}$ справедливо двойное неравенство*
$$[x] \leqslant x < [x] + 1 \tag{2.2.288}$$

3°. *При сдвиге на целое число целая часть сдвигается на это число:*
$$[x + m] = [x] + m, \qquad x \in \mathbb{R}, \ m \in \mathbb{Z} \tag{2.2.289}$$

4°. *Тождественность на целых числах: если $x \in \mathbb{Z}$, то $[x] = x$.*

5°. *Монотонность: если $x, y \in \mathbb{R}$, то*
$$x \leqslant y \quad \Longrightarrow \quad [x] \leqslant [y] \tag{2.2.290}$$

6°. *Сохранение двойных неравенств с целыми концами: если $m, n \in \mathbb{Z}$ и $x \in \mathbb{R}$, то*
$$m \leqslant x < n \quad \Longrightarrow \quad m \leqslant [x] < n \tag{2.2.291}$$

Доказательство. 1. Если $x \in [0; 1)$, то с одной стороны,
$$0 \in \{n \in \mathbb{Z} : \ n \leqslant x\} \quad \Longrightarrow \quad 0 \leqslant \max\{n \in \mathbb{Z} : \ n \leqslant x\} = [x]$$
а с другой –
$$\{n \in \mathbb{Z} : \ n \leqslant x\} \leqslant x < 1 \quad \overset{(2.2.269)}{\Longrightarrow} \quad [x] = \max\{n \in \mathbb{Z} : \ n \leqslant x\} < 1$$
То есть $0 \leqslant [x] < 1$. По следствию 2.2.15 это означает, что $[x] = 0$.

2. Обозначим $E = \{n \in \mathbb{Z} : \ n \leqslant x\}$. Тогда, во-первых,
$$\{n \in \mathbb{Z} : \ n \leqslant x\} \leqslant x \quad \Longrightarrow \quad [x] = \max\{n \in \mathbb{Z} : \ n \leqslant x\} \leqslant x$$
и, во-вторых, если бы $[x] + 1 \leqslant x$, то мы получили бы цепочку
$$[x] + 1 \leqslant x \quad \Longrightarrow \quad [x] + 1 \in E \quad \Longrightarrow \quad [x] + 1 \leqslant \max E = [x]$$
Поскольку последнее невозможно, это означает, что $x < [x] + 1$.

3. Если $x \in \mathbb{Z}$, то $x \in \{n \in \mathbb{Z} : \ n \leqslant x\} \leqslant x$, и поэтому $\max\{n \in \mathbb{Z} : \ n \leqslant x\} = x$.

4. При $x \in \mathbb{R}$, $m \in \mathbb{Z}$ получаем:
$$[x + m] = \max\{n \in \mathbb{Z} : \ n \leqslant x + m\} = \max\{n \in \mathbb{Z} : \ n - m \leqslant x\} =$$
$$= \max\{k + m : \ k \in \mathbb{Z} \ \& \ k \leqslant x\} = \max\{k \in \mathbb{Z} : \ k \leqslant x\} + m$$

5. Если $x \leqslant y$, то $\{n \in \mathbb{Z} : \ n \leqslant x\} \subseteq \{n \in \mathbb{Z} : \ n \leqslant y\}$, и поэтому $[x] = \max\{n \in \mathbb{Z} : \ n \leqslant x\} \leqslant \max\{n \in \mathbb{Z} : \ n \leqslant y\} = [y]$.

6. Если $m \leqslant x$, то по уже доказанным свойствам 2° и 3°, $m = [m] \leqslant [x]$. А если $x < n$, то для всякого $k \in \mathbb{Z}$ условие $k \leqslant x$ автоматически влечет условие $k < n$ а это, в силу (2.2.268), влечет условие $k \leqslant n - 1$. Отсюда
$$[x] = \max\{k \in \mathbb{Z} : \ k \leqslant x\} \leqslant \max\{k \in \mathbb{Z} : \ k \leqslant n - 1\} = n - 1 < n$$
$\square$

- *Дробной частью* $\{x\}$ вещественного числа $x \in \mathbb{R}$ называется разность между x и его целой частью $[x]$:
$$\{x\} := x - [x] \qquad (2.2.292)$$

Свойства дробной части:

1°. Дробная часть числа $x \in [0;1)$ совпадает с x:
$$x \in [0;1) \quad \Longrightarrow \quad \{x\} = x \qquad (2.2.293)$$

2°. Для любого $x \in \mathbb{R}$ справедливо двойное неравенство
$$0 \leqslant \{x\} < 1 \qquad (2.2.294)$$

3°. При сдвиге на целое число дробная часть не меняется:
$$\{x+m\} = \{x\}, \qquad x \in \mathbb{R},\ m \in \mathbb{Z} \qquad (2.2.295)$$

Доказательство. 1. Если $x \in [0;1)$, то в силу (2.2.287), $[x] = 0$, поэтому $\{x\} = x - 0 = x$.

2. Неравенство (2.2.294) следует сразу из неравенства (2.2.288):
$$[x] \leqslant x < [x] + 1 \quad \Longrightarrow \quad 0 \leqslant x - [x] < 1$$

3. А тождество (2.2.295) – из (2.2.289):
$$\{x+m\} = (x+m) - [x+m] = (x+m) - ([x]+m) = x - [x] = \{x\}$$

□

Десятичная запись целых чисел. Как известно, целые неотрицательные числа $n \in \mathbb{Z}_+$ (мы определили это множество выше формулой (2.2.226)) можно записывать цифрами 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Например, записи 487 и 1204 означают числа
$$487 = 7 + 8 \cdot 10 + 4 \cdot 10^2,$$
$$1204 = 4 + 0 \cdot 10 + 2 \cdot 10^2 + 1 \cdot 10^3.$$

Тот факт, что любое число $n \in \mathbb{Z}_+$ можно записать таким образом, и что такая запись однозначно определяет число (то есть не может случиться, чтобы разные числа записывались одинаково), следует из принципа Архимеда 2.2.10, принципа математической индукции и свойств отображения $x \mapsto [x]$. Здесь мы объясним, почему это так.

Теорема 2.2.18. *Для всякого числа $x \in \mathbb{N}$ найдется число $n \in \mathbb{Z}_+$ и конечная последовательность чисел $a_0, a_1, ..., a_n \in \{0;1;2;...;9\}$ такая, что*
$$x = a_0 + a_1 \cdot 10 + a_2 \cdot 10^2 + ... + a_n \cdot 10^n = \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot 10^k \qquad (2.2.296)$$

Числа n и a_i в этой формуле можно выбрать так, чтобы старший коэффициент был ненулевым
$$a_n \neq 0, \qquad (2.2.297)$$
и тогда представление x в виде (2.2.296) *становится единственным.*

- Формула (2.2.296) называется *десятичным представлением* числа $x \in \mathbb{N}$, а последовательность цифр $\{a_n, a_{n-1}, ..., a_1, a_0\}$ – *последовательностью коэффициентов* этого представления. Коротко эту формулу принято записывать в виде
$$x = a_n ... a_1 a_0$$
и такая запись называется *десятичной записью* числа $x \in \mathbb{N}$. Например, запись
$$x = 1825$$
расшифровывается как равенство
$$x = 1 \cdot 10^3 + 8 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^1 + 5 \cdot 10^1$$

- Если $x \in -\mathbb{N}$, то по теореме 2.2.18 число $-x \in \mathbb{N}$ представимо в виде
$$-x = \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot 10^k$$
и для этого используется запись
$$x = -a_n ... a_1 a_0$$

называемая *десятичной записью* числа $x \in -\mathbb{N}$. Например, запись

$$x = -247$$

расшифровывается как равенство

$$-x = 2 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10^1 + 7 \cdot 10^1$$

или, что эквивалентно, как равенство

$$x = -2 \cdot 10^2 - 4 \cdot 10^1 - 7 \cdot 10^1$$

Для доказательства теоремы 2.2.18 нам понадобятся три леммы.

Лемма 2.2.19. *Для всякого $x \in \mathbb{R}$ найдется натуральное число $n \in \mathbb{Z}_+$ такое, что*

$$x < 10^{n+1} \tag{2.2.298}$$

Доказательство. Рассмотрим число $\frac{x-1}{9}$. По принципу Архимеда 2.2.10, для него найдется $n \in \mathbb{N}$ такое, что $\frac{x-1}{9} \leqslant n$. Отсюда получаем следствия:

$$\frac{x-1}{9} < n+1$$

$$\Downarrow$$

$$x - 1 < (n+1) \cdot 9$$

$$\Downarrow$$

$$x < 1 + (n+1) \cdot 9 \underset{\substack{\uparrow \\ \text{здесь мы применяем} \\ \text{неравенство Бернулли} \\ (2.2.242)}}{\leqslant} (1+9)^{n+1} = 10^{n+1}$$

□

Лемма 2.2.20. *Если $x \in \mathbb{R}$ и выполняется неравенство*

$$0 \leqslant x < 10^{n+1},$$

то найдется число $a \in \{0; 1; 2; ...; 9\}$ такое, что

$$a \cdot 10^n \leqslant x < (a+1) \cdot 10^n \tag{2.2.299}$$

Доказательство. Обозначим через a целую часть числа $\frac{x}{10^n}$:

$$a = \left[\frac{x}{10^n}\right]$$

Тогда, во-первых, из свойства целой части сохранять неравенства с целыми концами (2.2.291) следует, что $a \in \{0; 1; 2; ...; 9\}$,

$$0 \leqslant x < 10^{n+1}$$

$$\Downarrow$$

$$0 \leqslant \frac{x}{10^n} < 10$$

$$\Downarrow \quad (2.2.291)$$

$$0 \leqslant \underbrace{\left[\frac{x}{10^n}\right]}_{a} < 10$$

И, во-вторых, по определению целой части (2.2.288),

$$\underbrace{\left[\frac{x}{10^n}\right]}_{a} \leqslant \frac{x}{10^n} < \underbrace{\left[\frac{x}{10^n}\right] + 1}_{a+1}$$

$$\Downarrow$$

$$a \cdot 10^n \leqslant x < (a+1) \cdot 10^n$$

□

Лемма 2.2.21. *Если число x представлено в виде* (2.2.296), *то старший коэффициент a_n в этой формуле вычисляется по формуле*

$$a_n = \left[\frac{x}{10^n}\right] \tag{2.2.300}$$

Доказательство. Здесь применяется формула (2.2.246) для суммы первых членов геометрической прогрессии:

$$\sum_{k=0}^{n-1} \underbrace{a_k}_{\substack{\wedge\!\!\backslash \\ 9}} \cdot 10^k \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} 9 \cdot 10^k = 9 \cdot \sum_{k=0}^{n-1} 10^k =$$

$$= (2.2.246) = 9 \cdot \frac{10^n - 1}{10 - 1} = 9 \cdot \frac{10^n - 1}{9} = \\ = 10^n - 1 < 10^n$$

$$\Downarrow$$

$$0 \leqslant \frac{1}{10^n} \cdot \sum_{k=0}^{n-1} a_k \cdot 10^k < 1$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{x}{10^n} = \frac{1}{10^n} \cdot \left(\sum_{k=0}^{n-1} a_k \cdot 10^k + a_n \cdot 10^n \right) = \\ = \underbrace{\frac{1}{10^n} \cdot \sum_{k=0}^{n-1} a_k \cdot 10^k}_{\substack{\Cap \\ [0,1)}} + \underbrace{a_n}_{\substack{\Cap \\ \mathbb{Z}}}$$

$$\Downarrow$$

$$\left[\frac{x}{10^n}\right] = a_n$$

□

Доказательство теоремы 2.2.18. Пусть $x \in \mathbb{N}$. Применяя лемму 2.2.19, можно выбрать $n \in \mathbb{Z}_+$ так, чтобы выполнялось (2.2.298), то есть, (2.2.301):

$$0 \leqslant x < 10^{n+1}, \tag{2.2.301}$$

1. Покажем, что при выполнении этого неравенства x можно представить в виде (2.2.296).

Это доказывается индукцией по n.

1) При $n = 0$ условие (2.2.301) превращается в $0 \leqslant x < 10$, и формула (2.2.296) становится верна, если положить $a = x$.

2) Предположим, что наше утверждение верно при $n = m - 1$:

$$0 \leqslant x < 10^m \quad \Rightarrow \quad x = \sum_{k=0}^{m-1} a_k \cdot 10^k \tag{2.2.302}$$

и покажем, что тогда оно верно и при $n = m$:

$$0 \leqslant x < 10^{m+1} \quad \Rightarrow \quad x = \sum_{k=0}^{m} a_k \cdot 10^k$$

Действительно,

$$0 \leqslant x < 10^{m+1}$$

$$\Downarrow \quad \text{лемма 2.2.20}$$

$$\exists a_m \in \{0; 1; 2; ...; 9\} : \quad a_m \cdot 10^m \leqslant x < (a_m + 1) \cdot 10^m$$

$$\Downarrow \quad (\text{вычитаем } a_m \cdot 10^m)$$

$$0 \leqslant x - a_m \cdot 10^m < 10^m$$

$$\Downarrow \quad \begin{pmatrix}\text{применяем посылку}\\ \text{индукции: (2.2.302)}\end{pmatrix}$$

$$x - a_m \cdot 10^m = \sum_{k=0}^{m-1} a_k \cdot 10^k$$

$$\Downarrow \quad \begin{pmatrix}\text{переносим } a_m \cdot 10^m\\ \text{в правую часть}\end{pmatrix}$$

$$x = \sum_{k=0}^{m-1} a_k \cdot 10^k + a_m \cdot 10^m = \sum_{k=0}^{m} a_k \cdot 10^k$$

2. Мы доказали, что x представимо в виде (2.2.296). Теперь убедимся, что такое представление единственно, с точностью до добавления или исключения нулевых слагаемых (то есть слагаемых со старшими коэффициентами $a_n = 0$). Пусть нам даны два разных представления:

$$x = \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot 10^k \qquad \text{и} \qquad x = \sum_{k=0}^{l} b_k \cdot 10^k$$

Добавив слагаемые с нулевыми коэффициентами (то есть, взяв дополнительные $a_i = 0$ или $b_i = 0$), можно добиться, чтобы количество слагаемых в этих суммах стало одинаковым:

$$\sum_{k=0}^{n} a_k \cdot 10^k = \sum_{k=0}^{n} b_k \cdot 10^k \tag{2.2.303}$$

Нам нужно проверить, что тогда

$$a_k = b_k, \qquad k = 0, ..., n. \tag{2.2.304}$$

Это также делается индукцией по n.

1) Если $n = 0$, то (2.2.303) сразу превращается в (2.2.304): $a_0 = b_0$.

2) Предполагаем, что это верно при $n = m$,

$$\sum_{k=0}^{m} a_k \cdot 10^k = \sum_{k=0}^{m} b_k \cdot 10^k \quad \Rightarrow \quad \Rightarrow \quad \forall k = 0, ..., m \quad a_k = b_k \tag{2.2.305}$$

тогда для $n = m + 1$ получаем:

$$\sum_{k=0}^{m+1} a_k \cdot 10^k = \sum_{k=0}^{m+1} b_k \cdot 10^k \tag{2.2.306}$$

$$\Downarrow \quad (\text{лемма 2.2.21})$$

$$a_{m+1} = \left[\sum_{k=0}^{m+1} a_k \cdot 10^k\right] = \left[\sum_{k=0}^{m+1} b_k \cdot 10^k\right] = b_{m+1}$$

$$\Downarrow \quad \begin{pmatrix}\text{старшие слагаемые}\\ \text{в (2.2.306) равны,}\\ \text{и их можно}\\ \text{отбросить}\end{pmatrix}$$

$$\sum_{k=0}^{m} a_k \cdot 10^k = \sum_{k=0}^{m} b_k \cdot 10^k$$

$$\Downarrow \quad \begin{pmatrix}\text{применяем посылку}\\ \text{индукции: (2.2.305)}\end{pmatrix}$$

$$\forall k = 0, ..., m \quad a_k = b_k$$

$$\begin{pmatrix}\text{а при } k = m + 1 \text{ равенство}\\ a_k = b_k \text{ уже доказано.}\end{pmatrix}$$

3. Остается убедиться, что если $x \neq 0$, то n можно выбрать так, чтобы $a_n \neq 0$. Для этого можно рассмотреть множество E, состоящее из тех $n \in \mathbb{Z}_+$, для которых справедливо представление (2.2.296) и найти его минимум $n = \min E$. Тогда $a_n \neq 0$, потому что иначе мы получили бы, что старшее слагаемое в (2.2.296) можно выбросить,

$$x = \sum_{k=0}^{n-1} a_k \cdot 10^k + \underbrace{a_n \cdot 10^n}_{0} = \sum_{k=0}^{n-1} a_k \cdot 10^k$$

и это означало бы, что $n - 1 \in E$ (то есть n не может быть минимумом E). $\square$

(c) Деление с остатком и делимость

Деление с остатком.

Теорема 2.2.22 (о делении с остатком). *Для любых двух чисел $a \in \mathbb{R}$ и $b > 0$ существуют и единственны числа $q \in \mathbb{Z}$ и $r \in [0; b)$ такие, что*

$$a = b \cdot q + r, \tag{2.2.307}$$

Если вдобавок $a \in \mathbb{Z}$ и $b \in \mathbb{N}$, то $r \in \mathbb{Z}_+$.

Доказательство. Числа q и r можно определить формулами

$$q = \left[\frac{a}{b}\right], \qquad r = b \cdot \left\{\frac{a}{b}\right\}$$

Тогда по определению целой части $q \in \mathbb{Z}$, а по определению дробной части, $\frac{r}{b} \in [0; 1)$, и значит $r \in [0, b)$. Нам остается доказать, что такие числа q и r единственны. Предположим, что существуют два разложения одного числа a:

$$a = b \cdot q + r = b \cdot \tilde{q} + \tilde{r}$$

Тогда

$$q + \frac{r}{b} = \tilde{q} + \frac{\tilde{r}}{b}$$

Из этого следует, что $q = \tilde{q}$, потому что если бы это было не так, то есть например $q < \tilde{q}$, то, по свойству (2.2.268), мы получили бы, что $q + 1 \leqslant \tilde{q}$, и поскольку $\frac{r}{b} < 1$,

$$q + \frac{r}{b} < q + 1 \leqslant \tilde{q} \leqslant \tilde{q} + \frac{\tilde{r}}{b}$$

А с другой стороны, равенство $\frac{r}{b} = \tilde{q} - q + \frac{\tilde{r}}{b}$ означает, что $\frac{r}{b}$ и $\tilde{q} - q + \frac{\tilde{r}}{b}$ отличаются на целое число $\tilde{q} - q$, поэтому

$$\frac{r}{b} = \left\{\frac{r}{b}\right\} = \left\{\tilde{q} - q + \frac{\tilde{r}}{b}\right\} = (2.2.295) = \frac{\tilde{r}}{b},$$

и отсюда $r = \tilde{r}$.

Остается заметить, что поскольку $q \in \mathbb{Z}$, то при $a \in \mathbb{Z}$ и $b \in \mathbb{N}$ число $r = a - b \cdot q$ должно быть целым. □

Делимость в множестве $\mathbb{N}$ натуральных чисел.

- Говорят что число $a \in \mathbb{N}$ *делится* на число $b \in \mathbb{N}$, и записывают это формулой

  $$a \vdots b,$$

  если найдется число $m \in \mathbb{N}$ такое, что

  $$a = m \cdot b.$$

  В этом случае

  — число a называется *кратным* числа b,

  — число b называется *делителем* числа a.

- Если $A \subseteq \mathbb{N}$ и $B \subseteq \mathbb{N}$ – множества, то записи

  $$A \vdots b, \quad a \vdots B, \quad A \vdots B$$

  означают соответственно, что $a \vdots b$ выполняется для любого $a \in A$, для любого $b \in B$, и для любых $a \in A$ и $b \in B$.

◇ **2.2.15.** Следующие утверждения можно проверить, например, с помощью калькулятора:

$$6 \vdots 2, \quad 123 \vdots 3, \quad 430095 \vdots 541$$

Свойства отношения делимости:

1°. *Всегда $x \vdots 1$ и $x \vdots x$.*

2°. *Если $x \vdots y$, то $(a \cdot x) \vdots y$ для любого $a \in \mathbb{N}$.*

3°. *Если $x \vdots y$ и $y \vdots z$, то $x \vdots z$.*

4°. *Если $x \vdots a$ и $y \vdots a$, то $(x + y) \vdots a$, а если вдобавок $x > y$, то $(x - y) \vdots a$.*

5°. *Если $x \vdots y$, то $x \geqslant y$.*

Доказательство этих свойств мы оставляем читателю.

⊳⊳ **2.2.16.** Докажите методом математической индукции[10]:

1) $n^5 - n \vdots 5$ при любом $n \in \mathbb{N}$;

[10] В первых двух примерах нужно использовать бином Ньютона.

2) $n^7 - n \vdots 7$ при любом $n \in \mathbb{N}$;
3) $n \cdot (2n^2 - 3n + 1) \vdots 6$ при любом $n \in \mathbb{N}$;
4) $11^{n+1} + 12^{2n-1} \vdots 133$ при любом $n \in \mathbb{N}$;
5) $5 \cdot 2^{3n-2} + 3^{3n-1} \vdots 19$ при любом $n \in \mathbb{N}$.

Наибольший общий делитель и наименьшее общее кратное. Пусть $A \subseteq \mathbb{N}$.

- Число $x \in \mathbb{N}$ называется *общим кратным* множества A, если оно кратно любому числу $a \in A$ (то есть делится на любое $a \in A$):

$$\forall a \in A \qquad x \vdots a,$$

коротко это записывается формулой

$$x \vdots A.$$

Множество всех общих кратных для A обозначается $A^\triangledown$:

$$A^\triangledown := \{x \in \mathbb{N} : \ x \vdots A\} = \\ = \{x \in \mathbb{N} : \ \forall a \in A \quad x \vdots a\} \qquad (2.2.308)$$

Очевидно,

$$A^\triangledown \vdots A \qquad (2.2.309)$$

- *Наименьшее общее кратное* множества A (то есть наименьшее число среди всех $x \in A^\triangledown$) обозначается $\triangledown(A)$:

$$\triangledown(A) := \min A^\triangledown = \\ = \min\{x \in \mathbb{N} : \ \forall a \in A \quad x \vdots a\} \qquad (2.2.310)$$

В частном случае, когда A состоит из двух элементов a и b, наименьшее общее кратное множества A называется *наименьшим общим кратным чисел a и b* и обозначается

$$a \triangledown b := \triangledown\{a, b\} = \\ = \min\{x \in \mathbb{N} : \ x \vdots a \ \& \ x \vdots b\} \qquad (2.2.311)$$

Предложение 2.2.23. *Следующее соотношение справедливо для любых двух множеств $A \subseteq \mathbb{N}$ и $B \subseteq \mathbb{N}$:*

$$(A \cup B)^\triangledown = A^\triangledown \cap B^\triangledown \qquad (2.2.312)$$

Доказательство.

$$x \in (A \cup B)^\triangledown \\ \Updownarrow \\ x \vdots (A \cup B) \\ \Updownarrow \\ x \vdots A \quad \& \quad x \vdots B \\ \Updownarrow \\ x \in A^\triangledown \quad \& \quad x \in B^\triangledown \\ \Updownarrow \\ x \in A^\triangledown \cap B^\triangledown$$

$\square$

! **2.2.17.** Если в формуле (2.2.312) поменять местами $\cup$ и $\cap$, она перестает быть верной:

$$(A \cap B)^\triangledown \neq A^\triangledown \cup B^\triangledown$$

Например, при $A = \{2\}$ и $B = \{3\}$ мы получаем

$$(\{2\} \cap \{3\})^\triangledown = \varnothing^\triangledown = \mathbb{N},$$

но

$$\{2\}^\triangledown \cup \{3\}^\triangledown = 2\mathbb{N} \cup 3\mathbb{N}$$

Это не одно и то же, потому что, например,

$$5 \in \mathbb{N} \quad \& \quad 5 \notin 2\mathbb{N} \cup 3\mathbb{N}$$

Предложение 2.2.24. *Если A конечно (необязательно непусто), то $A^\triangledown$ непусто, и поэтому существует наименьшее общее кратное $\triangledown(A)$.*

Доказательство. Если A пусто, то число 1 будет его общим кратным, поскольку при $a \in A$ условие $1 \vdots a$ выполняется тривиально (из-за отсутствия таких a). Если же A непусто, то, поскольку оно конечно, его можно представить в виде конечной последовательности (с неповторяющимися элементами)

$$A = \{a_1, ..., a_n\}$$

а затем рассмотреть произведение всех чисел, входящих в A

$$x = \prod_{a \in A} a = \prod_{i=1}^{n} a_i$$

Это число делится на любой элемент $a \in A$, то есть является общим кратным для множества A:

$$x \in A^\triangledown$$

Значит, множество $A^\triangledown$ непусто. Как любое непустое подмножество в $\mathbb{N}$, оно, в силу свойства 5° на с.154, должно иметь минимальный элемент $\min A^\triangledown = \triangledown(A)$. $\square$

Снова пусть $A \subseteq \mathbb{N}$.

- Число $x \in \mathbb{N}$ называется *общим делителем* множества A, если оно является делителем для любого числа $a \in A$ (то есть любое $a \in A$ делится на x):

$$\forall a \in A \qquad a \vdots x,$$

коротко это записывается формулой

$$A \vdots x.$$

Множество всех общих делителей для A обозначается $A^\vartriangle$:

$$A^\vartriangle := \{x \in \mathbb{N} : \ A \vdots x\} = \\ = \{x \in \mathbb{N} : \ \forall a \in A \quad a \vdots x\} \qquad (2.2.313)$$

Очевидно,

$$A \vdots A^\vartriangle \qquad (2.2.314)$$

- *Наибольший общий делитель* множества A (то есть наибольшее число среди всех $x \in A^{\vartriangle}$) обозначается $\vartriangle(A)$:

$$\vartriangle(A) = \max A^{\vartriangle} = \\ = \max\{x \in \mathbb{N}: \ \forall a \in A \quad a \vdots x\} \qquad (2.2.315)$$

В частном случае, когда A состоит из двух элементов a и b, наибольший общий делитель множества A называется *наибольшим общим делителем чисел a и b* и обозначается

$$a \vartriangle b := \max\{x \in \mathbb{N}: \ a \vdots x \ \& \ b \vdots x\} \qquad (2.2.316)$$

Предложение 2.2.25. *Следующее соотношение справедливо для любых двух множеств $A \subseteq \mathbb{N}$ и $B \subseteq \mathbb{N}$:*

$$(A \cup B)^{\vartriangle} = A^{\vartriangle} \cap B^{\vartriangle}. \qquad (2.2.317)$$

Доказательство. Это доказывается по аналогии с предложением 2.2.23:

$$x \in (A \cup B)^{\vartriangle}$$
$$\Updownarrow$$
$$(A \cup B) \vdots x$$
$$\Updownarrow$$
$$A \vdots x \quad \& \quad B \vdots x$$
$$\Updownarrow$$
$$x \in A^{\vartriangle} \quad \& \quad x \in B^{\vartriangle}$$
$$\Updownarrow$$
$$x \in A^{\vartriangle} \cap B^{\vartriangle}$$

□

! 2.2.18. Если в формуле (2.2.317) поменять местами $\cup$ и $\cap$, то она перестает быть верной:

$$(A \cap B)^{\vartriangle} \neq A^{\vartriangle} \cup B^{\vartriangle}$$

Например, при $A = \{2\}$ и $B = \{3\}$ мы получаем

$$(\{2\} \cap \{3\})^{\vartriangle} = \varnothing^{\vartriangle} = \mathbb{N},$$

но

$$\{2\}^{\vartriangle} \cup \{3\}^{\vartriangle} = \{1,2\} \cup \{1,3\} = \{1\}.$$

Предложение 2.2.26. *Если A непусто (необязательно конечно), то $A^{\vartriangle}$ непусто и конечно, и поэтому существует наибольший общий делитель $\vartriangle(A)$.*

Доказательство. Число 1, очевидно, является общим делителем для множества A:

$$A \vdots 1$$

Это значит, что $1 \in A^{\vartriangle}$, и поэтому $A^{\vartriangle}$ непусто. С другой стороны, если взять какое-нибудь $a \in A$ (поскольку A непусто, такое a найдется), то мы получим:

$$A^{\vartriangle} \subseteq \{a\}^{\vartriangle} \overset{\substack{5^\circ \text{ на} \\ \text{с.175} \\ \downarrow}}{\subseteq} \{1, ..., a\}$$

То есть $A^{\vartriangle}$ содержится в конечном множестве $\{1, ..., a\}$. Значит, по свойству 1° на с.70, $A^{\vartriangle}$ само конечно. После этого применяется теорема 2.2.11: поскольку множество $A^{\vartriangle}$ конечно, оно имеет максимальный элемент. □

Теорема 2.2.27. *Следующие соотношения справедливы для любого непустого конечного $A \subseteq \mathbb{N}$:*

$$\triangledown(A) \geqslant \max A \geqslant \min A \geqslant \vartriangle(A), \qquad (2.2.318)$$
$$A^{\triangledown} \vdots \triangledown(A) \vdots A \vdots \ \vartriangle(A) \vdots A^{\vartriangle}, \qquad (2.2.319)$$
$$\vartriangle(A) = \triangledown(A^{\vartriangle}), \qquad (2.2.320)$$
$$\triangledown(A) = \vartriangle(A^{\triangledown}). \qquad (2.2.321)$$

Доказательство. 1. В цепочке (2.2.318) нужно проверить два крайних неравенства.

$$\triangledown(A) \geqslant \max A, \qquad \min A \geqslant \vartriangle(A)$$

Они оба следуют из свойства 5° на с.175. Например, первое:

$$x \in A^{\triangledown}$$
$$\Downarrow$$
$$x \vdots A$$
$$\Downarrow \quad 5^\circ \text{ на с.175}$$
$$x \geqslant A$$
$$\Downarrow$$
$$x \geqslant \max A$$

Это верно для любого $x \in A^{\triangledown}$, значит

$$\triangledown(A) = \min A^{\triangledown} = \min_{x \in A^{\triangledown}} x \geqslant \max A,$$

И то же самое со вторым:

$$x \in A^{\vartriangle}$$
$$\Downarrow$$
$$A \vdots x$$
$$\Downarrow \quad 5^\circ \text{ на с.175}$$
$$A \geqslant x$$
$$\Downarrow$$
$$\min A \geqslant x$$

Это верно для любого $x \in A^{\vartriangle}$, значит

$$\min A \geqslant \max_{x \in A^{\vartriangle}} x = \max A^{\vartriangle} = \vartriangle(A)$$

2. В цепочке (2.2.319) середина очевидна:

$$\triangledown(A) \vdots A \vdots \ \vartriangle(A) \qquad (2.2.322)$$

– с одной стороны,

$$\underbrace{A^\nabla \vdots A}_{(2.2.309)} \quad \Rightarrow \quad \nabla(A) = \min A^\nabla \vdots A$$

а с другой,

$$\underbrace{A \vdots A^\vartriangle}_{(2.2.314)} \quad \Rightarrow \quad A \vdots \max A^\vartriangle = \vartriangle(A)$$

Поэтому нужно доказать только два крайних соотношения:

$$A^\nabla \vdots \nabla(A), \qquad \vartriangle(A) \vdots A^\vartriangle.$$

Мы будем их доказывать вместе с соотношениями (2.2.320) и (2.2.321), причем в следующей последовательности:

$$A^\nabla \vdots \nabla(A) \tag{2.2.323}$$

$$\Downarrow$$

$$\vartriangle(A) = \nabla(A^\vartriangle)$$

$$\Downarrow$$

$$\vartriangle(A) \vdots A^\vartriangle \tag{2.2.324}$$

$$\Downarrow$$

$$\nabla(A) = \vartriangle(A^\nabla)$$

3. Докажем первое звено в этой цепочке, то есть формулу (2.2.323). Пусть $x \in A^\nabla$, то есть $x \vdots A$. Нам нужно показать, что $x \vdots \nabla(A)$. Разделим x на $\nabla(A)$ с остатком: по теореме 2.2.22, существуют $q \in \mathbb{Z}$ и $r \in \mathbb{Z}$ такие, что

$$x = \nabla(A) \cdot q + r, \qquad 0 \leqslant r < \nabla(A)$$

Если $r = 0$, то мы сразу получаем, что $x \vdots \nabla(A)$. Если же $r > 0$, то для всякого $a \in A$ мы получаем цепочку:

$$\nabla(A) \vdots A \quad \text{(уже доказано)}$$

$$\Downarrow$$

$$\underbrace{x \vdots a, \quad \nabla(A) \cdot q \vdots a, \quad x > \nabla(A)}$$

$$\Downarrow \quad 4^\circ \text{ на с.175}$$

$$r = x - \nabla(A) \cdot q \vdots a$$

Это верно для любого $a \in A$, значит r – общее кратное для A:

$$r \vdots A$$

или, что то же самое,

$$r \in A^\nabla$$

С другой стороны,

$$r < \nabla(A) = \min A^\nabla$$

Это противоречие означает, что наше предположение, что $r > 0$, было неверно.

4. Докажем (2.2.320), то есть второе звено в нашей цепочке. Для этого расшифруем уже доказанную формулу (2.2.323) так:

$$x \vdots A \quad \Rightarrow \quad x \vdots \nabla(A) \tag{2.2.325}$$

Тогда из (2.2.314) мы получаем цепочку:

$$A \vdots A^\vartriangle$$

$$\Downarrow$$

$$\forall a \in A \quad a \vdots A^\vartriangle$$

$$\Downarrow \quad (2.2.325)$$

$$\forall a \in A \quad a \vdots \nabla(A^\vartriangle)$$

$$\Downarrow$$

$$A \vdots \nabla(A^\vartriangle)$$

$$\Downarrow$$

$$\nabla(A^\vartriangle) \in A^\vartriangle \tag{2.2.326}$$

С другой стороны, из (2.2.322) получаем:

$$\nabla(A^\vartriangle) \vdots A^\vartriangle$$

$$\Downarrow$$

$$\nabla(A^\vartriangle) \geqslant A^\vartriangle$$

Вместе с (2.2.326) это означает, что

$$\nabla(A^\vartriangle) = \max A^\vartriangle = \vartriangle(A),$$

то есть как раз справедливо (2.2.320).

5. Теперь формула (2.2.324), то есть третье звено в нашей цепочке, получается в одну строчку:

$$\vartriangle(A) \overset{(2.2.320)}{=} \nabla(A^\vartriangle) \overset{(2.2.322)}{\vdots} A^\vartriangle$$

6. Остается доказать последнее звено цепочки – формулу (2.2.321). Здесь последовательность рассуждений напоминает пункт 4. Сначала расшифруем уже доказанную формулу (2.2.324) так:

$$A \vdots x \quad \Rightarrow \quad \vartriangle(A) \vdots x \tag{2.2.327}$$

Тогда из (2.2.309) мы получаем цепочку:

$$A^\nabla \vdots A$$

$$\Downarrow$$

$$\forall a \in A \quad A^\nabla \vdots a$$

$$\Downarrow \quad (2.2.327)$$

$$\forall a \in A \quad \vartriangle(A^\nabla) \vdots a$$

$$\Downarrow$$

$$\vartriangle(A^\nabla) \vdots A$$

$$\Downarrow$$

$$\triangle\,(A^{\triangledown}) \in A^{\triangledown} \qquad (2.2.328)$$

С другой стороны, из (2.2.322) получаем:

$$A^{\triangledown} \vdots\ \triangle\,(A^{\triangledown})$$

$$\Downarrow$$

$$A^{\triangledown} \geqslant \triangle\,(A^{\triangledown})$$

Вместе с (2.2.328) это означает, что

$$\triangle\,(A^{\triangledown}) = \min A^{\triangledown} = \triangledown(A),$$

то есть как раз справедливо (2.2.321). $\square$

Теорема 2.2.28. *Для любых $a, b \in \mathbb{N}$ справедливы импликации*

$$\left\{\begin{matrix} x \vdots a \\ x \vdots b \end{matrix}\right\} \quad \Rightarrow \quad x \vdots (a \triangledown b) \qquad (2.2.329)$$

$$\left\{\begin{matrix} a \vdots x \\ b \vdots x \end{matrix}\right\} \quad \Rightarrow \quad (a \triangle b) \vdots x \qquad (2.2.330)$$

и равенство

$$(a \triangledown b) \cdot (a \triangle b) = a \cdot b \qquad (2.2.331)$$

Доказательство. 1. Импликации следуют из соотношений (2.2.319):

$$A^{\triangledown} \vdots \triangledown(A)$$

$$\Downarrow$$

$$\{a; b\}^{\triangledown} \vdots \triangledown\{a; b\}$$

$$\Downarrow$$

$$x \in \{a; b\}^{\triangledown} \quad \Rightarrow \quad x \vdots \triangledown\{a; b\} = (a \triangledown b)$$

$$\Downarrow$$

$$x \vdots \{a; b\} \quad \Rightarrow \quad x \vdots \triangledown\{a; b\} = (a \triangledown b)$$

$$\Downarrow$$

$$(2.2.329)$$

И точно так же,

$$\triangle\,(A) \vdots A^{\triangle}$$

$$\Downarrow$$

$$\triangle\,\{a; b\} \vdots \{a; b\}^{\triangle}$$

$$\Downarrow$$

$$x \in \{a; b\}^{\triangle} \quad \Rightarrow \quad \triangle\,\{a; b\} \vdots x$$

$$\Downarrow$$

$$x \vdots \{a; b\} \quad \Rightarrow \quad (a \triangle b) = \triangle\,\{a; b\} \vdots x$$

$$\Downarrow$$

$$(2.2.330)$$

2. Чтобы доказать (2.2.331), обозначим

$$x = \frac{a \cdot b}{a \triangledown b}$$

и заметим, что $x \in \mathbb{N}$, потому что

$$\underbrace{(a \cdot b) \vdots a, \quad (a \cdot b) \vdots b}$$

$$\Downarrow \ \text{(2.2.329)}$$

$$(a \cdot b) \vdots (a \triangledown b)$$

Нам нужно убедиться, что

$$x = a \triangle b$$

Для этого отдельно докажем два неравенства

$$a \triangle b \geqslant x, \qquad x \geqslant a \triangle b$$

Первое из них доказывается такой цепочкой:

$$\underbrace{a = x \cdot \frac{a \triangledown b}{b}, \qquad b = x \cdot \frac{a \triangledown b}{a}}$$

$$\Downarrow$$

$$\underbrace{a \vdots x, \qquad b \vdots x}$$

$$\Downarrow \ \text{(2.2.330)}$$

$$(a \triangle b) \vdots x$$

$$\Downarrow$$

$$a \triangle b \geqslant x$$

А второе так:

$$\underbrace{\frac{a \cdot b}{a \triangle b} = a \cdot \frac{b}{a \triangle b}, \qquad \frac{a \cdot b}{a \triangle b} = \frac{a}{a \triangle b} \cdot b}$$

$$\Downarrow$$

$$\underbrace{\frac{a \cdot b}{a \triangle b} \vdots a, \qquad \frac{a \cdot b}{a \triangle b} \vdots b}$$

$$\Downarrow \ \text{(2.2.329)}$$

$$\frac{a \cdot b}{a \triangle b} \vdots (a \triangledown b)$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{a \cdot b}{a \triangle b} \geqslant a \triangledown b$$

$$\Downarrow$$

$$x = \frac{a \cdot b}{a \triangledown b} \geqslant a \triangle b$$

$\square$

Основная теорема арифметики.

- Число $a \in \mathbb{N}$, $a > 1$, называется
  — *простым*, если оно делится только на 1 и на a:
  $$a^{\vartriangle} = \{1; a\}$$
  — *составным*, если кроме 1 и a у него есть еще какие-то делители:
  $$a^{\vartriangle} \neq \{1; a\}$$

◇ **2.2.19.** Число 2 является простым, потому что

$$2 \,\vdots\, x$$
$$\Downarrow$$
$$1 \leqslant x \leqslant 2$$
$$\Downarrow$$
$$x \in \{1; 2\}.$$

То есть
$$2^{\vartriangle} = \{1; 2\}$$

- Числа $a, b \in \mathbb{N}$ называются *взаимно простыми*, если они имеют только один общий делитель, а именно, число 1:
  $$\{a, b\}^{\vartriangle} = \{1\}$$
  Понятно, что это равносильно тому, что их наибольший общий делитель равен единице:
  $$a \vartriangle b = 1.$$
  Это в свою очередь означает, что
  $$a \triangledown b = a \cdot b, \qquad (2.2.332)$$
  поскольку
  $$(a \triangledown b) \cdot \underbrace{(a \vartriangle b)}_{1} \overset{(2.2.331)}{=} a \cdot b$$

◇ **2.2.20.** Если a и b – два различных простых числа, то они взаимно просты, потому что

$$a^{\vartriangle} = \{1; a\}, \quad b^{\vartriangle} = \{1; b\}$$
$$\Downarrow$$
$$\{a, b\}^{\vartriangle} = (2.2.317) = \{a\}^{\vartriangle} \cap \{b\}^{\vartriangle} = \\ = \{1; a\} \cap \{1; b\} = \{1\}$$

Предложение 2.2.29. *Если a и b – взаимно простые числа, то для любого $x \in \mathbb{N}$*

$$(x \cdot a) \,\vdots\, b \qquad \Longleftrightarrow \qquad x \,\vdots\, b$$

Доказательство. В обратную сторону это следует из 2° на с.175:

$$(x \cdot a) \,\vdots\, b \qquad \Longleftarrow \qquad x \,\vdots\, b$$

Покажем, что она верна в прямую сторону:

$$(x \cdot a) \,\vdots\, b \qquad \Longrightarrow \qquad x \,\vdots\, b$$

Для этого нужно добавить к $(x \cdot a) \,\vdots\, b$ очевидное соотношение $(x \cdot a) \,\vdots\, a$:

$$(x \cdot a) \,\vdots\, b$$
$$\Downarrow$$
$$\underbrace{(x \cdot a) \,\vdots\, a \quad \& \quad (x \cdot a) \,\vdots\, b}$$
$$\Downarrow \quad (2.2.329)$$
$$(x \cdot a) \,\vdots\, a \triangledown b \overset{(2.2.332)}{=} a \cdot b$$
$$\Downarrow$$
$$\frac{x}{b} = \frac{x \cdot a}{a \cdot b} \in \mathbb{N}$$
$$\Downarrow$$
$$x \,\vdots\, b$$

□

Предложение 2.2.30. *Если произведение простых чисел*
$$a_1 \cdot a_2 \cdot ... \cdot a_n$$
делится на простое число b, то b содержится в последовательности $a_1, ..., a_n$:

$$\exists i \in \{1, ..., n\} \qquad a_i = b$$

Доказательство. Это доказывается индукцией по n.

1. При $n = 1$ утверждение становится тривиальным:

$$a_1 \,\vdots\, b$$
$$\Downarrow$$
$$b \in \{a_1\}^{\vartriangle} = \{1; a_1\}$$
$$\Downarrow \quad (b > 1)$$
$$b = a_1$$

2. Предположим, что оно верно при $n = k$:

$$a_1 \cdot a_2 \cdot ... \cdot a_k \,\vdots\, b \quad \Rightarrow \quad \Big(\exists i = 1, ..., k \qquad a_i = b\Big) \qquad (2.2.333)$$

3. Покажем, что тогда оно будет верно и при $n = k + 1$. Пусть

$$a_1 \cdot a_2 \cdot ... \cdot a_k \cdot a_{k+1} \,\vdots\, b$$

Если $b = a_{k+1}$, то наше утверждение доказано. Если же $b \neq a_{k+1}$, то обозначив $x = a_1 \cdot a_2 \cdot ... \cdot a_k$, мы получим:
$$x \cdot a_{k+1} \,\vdots\, b,$$

причем a_{k+1} и b простые, не совпадающие числа, и значит, в силу примера 2.2.20, взаимно простые. Поэтому по предложению 2.2.29, x должно делиться на b:

$$x = a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_k \;\vdots\; b$$

Но тогда по предположению индукции (2.2.333), $b = a_i$ для некоторого $i = 1, \ldots, k$. То есть в любом случае мы получаем $b = a_i$ для некоторого $i = 1, \ldots, k, k + 1$. □

Теорема 2.2.31 (основная теорема арифметики)**.** *Каждое число $x \in \mathbb{N}$, $x > 1$, можно единственным образом разложить в произведение*

$$x = p_1^{n_1} \cdot p_2^{n_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{n_k}, \tag{2.2.334}$$

в котором k и $\{n_1, n_2, \ldots, n_k\}$ – натуральные числа, а $\{p_1, p_2, \ldots, p_k\}$ – простые, расположенные в порядке возрастания:

$$p_1 < p_2 < \ldots < p_k$$

Доказательство. Проведем индукцию по $x \in \mathbb{N}$, $x \geqslant 2$.

1. Пусть $x = 2$. Тогда в виде (2.2.334) его можно представить так:

$$2 = 2^1$$

(то есть в данном случае $k = 1$, $p_1 = 2$, $n_1 = 1$). Единственность такого разложения следует из того, что, как мы убедились в примере 2.2.19, число 2 простое: если

$$2 = q_1^{m_1} \cdot q_2^{m_2} \cdot \ldots \cdot q_l^{m_l} \tag{2.2.335}$$

– какое-нибудь другое разложение, то мы во-первых получим, что все числа q_i должны быть одинаковыми и равными двойке, потому что

$$2 \;\vdots\; q_i$$
$$\Downarrow$$
$$q_i \in 2^{\Delta} = \{1; 2\}$$
$$\Downarrow \quad (q_i > 1)$$
$$q_i = 2$$

То есть разложение (2.2.335) должно иметь вид

$$2 = 2^m$$

И, во-вторых, здесь m должно быть равно 1, потому что иначе, то есть при $m > 1$, мы получили бы

$$2 = 2^1 \overset{(2.2.282)}{<} 2^m$$

2. Предположим далее, что наше утверждение верно при всех x, меньших некоторого N,

$$x < N.$$

Покажем тогда, что оно верно и при $x = N$.

Здесь придется рассмотреть два случая. Во-первых, если $x = N$ – простое число, то наше утверждение для него верно по тем же причинам, по которым оно было верно для уже рассмотренного случая $x = 2$: те же рассуждения, но с заменой 2 на N приводят к тому же результату.

Во-вторых, если $x = N$ – составное число, то есть

$$N = K \cdot L \qquad (K, L \in \mathbb{N},\ K, L > 1)$$

то

$$K < N, \qquad L < N$$

поэтому по предположению индукции числа K и L раскладываются по формуле (2.2.334). Отсюда можно сделать вывод, что их произведение $N = K \cdot L$ тоже раскладывается по формуле (2.2.334).

Остается только объяснить, почему для такого N разложение будет единственно. Предположим, что этих разложений имеется два:

$$N = p_1^{n_1} \cdot \ldots \cdot p_k^{n_k} = q_1^{m_1} \cdot \ldots \cdot q_l^{m_l} \tag{2.2.336}$$

Поглядим на это с точки зрения предложения 2.2.30: число N делится на простое число q_1, а, с другой стороны, N является произведением простых чисел $p_1, \ldots, p_k$ (с разными степенями). Значит, среди чисел $p_1, \ldots, p_k$ какое-то должно быть равно q_1:

$$\exists i \in \{1, \ldots, k\} \qquad p_i = q_1$$

По той же причине среди чисел $q_1, \ldots, q_l$ какое-то должно быть равно p_1:

$$\exists j \in \{1, \ldots, l\} \qquad q_j = p_1$$

Поскольку числа $p_1, \ldots, p_k$ упорядочены по возрастанию, получаем

$$p_1 \leqslant p_i = q_1$$

С другой стороны, числа $q_1, \ldots, q_l$ тоже упорядочены по возрастанию, и поэтому

$$q_1 \leqslant q_j = p_1$$

Вместе это означает, что

$$p_1 = q_1$$

откуда следует, что $i = 1 = j$.

Теперь разложение (2.2.336) можно записать так:

$$N = p_1^{n_1} \cdot p_2^{n_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{n_k} = \underbrace{p_1^{m_1}}_{\substack{q_1 \\ \text{заменено} \\ \text{на } p_1}} \cdot q_2^{n_2} \cdot \ldots \cdot q_l^{m_l}$$

Отсюда можно вывести, что $n_1 = m_1$. Действительно, если бы оказалось, что $n_1 > m_1$, то поделив на $p_1^{m_1}$, мы получили бы

$$\frac{N}{p_1^{m_1}} = p_1^{n_1-m_1} \cdot p_2^{n_2} \cdot ... \cdot p_k^{n_k} = q_2^{m_2} \cdot ... \cdot q_l^{m_l}$$

и оказалось бы, что это число, будучи произведением простых чисел $q_2, ..., q_l$ (с разными степенями), делится на простое число p_1, которое не принадлежит последовательности $q_2, ..., q_l$ (потому что $p_1 = q_1$ меньше любого из этих чисел). И точно так же, если бы $n_1 < m_1$, то поделив на $p_1^{n_1}$, мы получили бы

$$\frac{N}{p_1^{n_1}} = p_2^{n_2} \cdot ... \cdot p_k^{n_k} = p_1^{m_1-n_1} \cdot q_2^{m_2} \cdot ... \cdot q_l^{m_l}$$

то есть произведение простых чисел $p_2, ..., p_k$ (с разными степенями), делилось бы на простое число p_1, которое не принадлежит последовательности $p_2, ..., p_k$ (потому что p_1 меньше любого из этих чисел).

Итак, $n_1 = m_1$, и поэтому разложение (2.2.336) можно переписать так:

$$N = p_1^{n_1} \cdot p_2^{n_2} \cdot ... \cdot p_k^{n_k} = \underbrace{p_1^{n_1}}_{\substack{q_1 \text{ и } m_1 \\ \text{заменены} \\ \text{на } p_1 \text{ и } n_1}} \cdot q_2^{n_2} \cdot ... \cdot q_l^{m_l}$$

Поделим это на $p_1^{n_1}$:

$$\frac{N}{p_1^{n_1}} = p_2^{n_2} \cdot ... \cdot p_k^{n_k} = q_2^{m_2} \cdot ... \cdot q_l^{m_l}$$

Из $p_1 > 1$ и $n_1 > 0$ следует, что $p_1^{n_1} > 1$, поэтому

$$\frac{N}{p_1^{n_1}} < N$$

и по предположению индукции, для числа $\frac{N}{p_1^{n_1}}$ разложение (2.2.334) должно быть единственно. То есть,

$$k = l \quad \& \quad \Big(\forall i = 2, ..., k \quad p_i = q_i \quad \& \quad n_i = m_i \Big)$$

С другой стороны, равенства $p_1 = q_1$ и $n_1 = m_1$ мы уже доказали раньше. То есть в формуле (2.2.336) числа справа и слева от последнего равенства совпадают, и это значит, что разложение N на множители однозначно. $\square$

(d) Рациональные числа $\mathbb{Q}$

Определение и свойства рациональных чисел.

- Число $x \in \mathbb{R}$ называется *рациональным*, если оно представимо в виде

$$x = \frac{a}{b}, \qquad a \in \mathbb{Z}, \quad b \in \mathbb{N}$$

В соответствии с этим, множество рациональных чисел, обозначаемое символом $\mathbb{Q}$, описывается формулой

$$\mathbb{Q} = \frac{\mathbb{Z}}{\mathbb{N}} \tag{2.2.337}$$

Свойства множества $\mathbb{Q}$:

1°. *Сумма $x + y$ двух рациональных чисел x и y, также является рациональным числом:*

$$x, y \in \mathbb{Q} \quad \Longrightarrow \quad x + y \in \mathbb{Q} \tag{2.2.338}$$

2°. *Число $-x$, противоположное рациональному числу x, также является рациональным числом:*

$$x \in \mathbb{Q} \quad \Longrightarrow \quad -x \in \mathbb{Q} \tag{2.2.339}$$

3°. *Произведение $x \cdot y$ двух рациональных чисел x и y, также является рациональным числом:*

$$x, y \in \mathbb{Q} \quad \Longrightarrow \quad x \cdot y \in \mathbb{Q} \tag{2.2.340}$$

4°. *Число x^{-1}, обратное рациональному числу $x \neq 0$, также является рациональным числом:*

$$x \in \mathbb{Q} \quad \Longrightarrow \quad x^{-1} \in \mathbb{Q} \tag{2.2.341}$$

Теорема 2.2.32. *В любом интервале (a, b) на вещественной прямой $\mathbb{R}$ найдутся рациональные числа.*

Доказательство. Пользуясь принципом Архимеда (теорема 2.2.10), подберем число $n \in \mathbb{N}$ такое, что

$$n > \frac{1}{b-a}$$

и положим

$$m = [a \cdot n] + 1$$

Тогда

$$a < \frac{m}{n} < b$$

Первое неравенство здесь доказывается напрямую:

$$a \cdot n \overset{(2.2.288)}{<} [a \cdot n] + 1 = m \quad \Longrightarrow \quad a < \frac{m}{n}$$

А правое – от противного: если бы оказалось, что $b \leqslant \frac{m}{n}$, то мы получили бы

$$[a \cdot n] \overset{(2.2.288)}{<} a \cdot n \quad \Longrightarrow \quad \frac{[a \cdot n]}{n} \leqslant a < b \leqslant \frac{m}{n} = \frac{[a \cdot n] + 1}{n} = \frac{[a \cdot n]}{n} + \frac{1}{n} \quad \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow \quad b - a \leqslant \frac{1}{n} \quad \Longrightarrow \quad n \leqslant \frac{1}{b-a},$$

и последнее противоречит выбору n. □

Несократимые дроби.

Теорема 2.2.33. *Всякое положительное рациональное число $x \in \mathbb{Q}$ представимо в виде дроби, в которой числитель и знаменатель взаимно просты:*

$$x = \frac{p}{q}, \qquad p, q \in \mathbb{N}, \qquad p \vartriangle q = 1 \qquad (2.2.342)$$

- Такие дроби называются *несократимыми.*

Доказательство. Поскольку x рационально, оно имеет вид $x = \frac{a}{b}$, где $a \in \mathbb{Z}$ и $b \in \mathbb{N}$. С другой стороны, x положительно, поэтому a тоже должно быть положительно, и значит $a \in \mathbb{N}$. Поскольку $a \vdots (a \vartriangle b)$ и $b \vdots (a \vartriangle b)$, числа

$$p = \frac{a}{a \vartriangle b}, \qquad q = \frac{b}{a \vartriangle b}$$

должны быть натуральными. Понятно, что

$$x = \frac{a}{b} = \frac{\frac{a}{a \vartriangle b}}{\frac{b}{a \vartriangle b}} = \frac{p}{q}$$

Остается проверить, что $p \vartriangle q = 1$. Это делается так:

$$x \in \{p; q\}^{\vartriangle}$$
$$\Downarrow$$
$$\begin{Bmatrix} p \vdots x \\ q \vdots x \end{Bmatrix}$$
$$\Downarrow$$
$$\begin{Bmatrix} a = p \cdot (a \vartriangle b) \vdots x \cdot (a \vartriangle b) \\ b = q \cdot (a \vartriangle b) \vdots x \cdot (a \vartriangle b) \end{Bmatrix}$$
$$\Downarrow$$
$$x \cdot (a \vartriangle b) \in \{a; b\}^{\vartriangle}$$
$$\Downarrow$$
$$x \cdot (a \vartriangle b) \leqslant \max\{a; b\}^{\vartriangle} = (a \vartriangle b)$$
$$\Downarrow$$
$$x \leqslant 1$$

Из этой цепочки видно, что

$$p \vartriangle q = \max\{p; q\}^{\vartriangle} = 1$$

□

Существование иррациональных чисел.

- Число $x \in \mathbb{R}$ называется *иррациональным*, если оно не является рациональным:

$$x \notin \mathbb{Q}$$

Следующий пример показывает, что такие числа в самом деле существуют.

◇ **2.2.21.** Существует число $c \in [1; 2]$, удовлетворяющее условию[11]

$$c^2 = 2 \qquad (2.2.343)$$

Это число иррационально:

$$c \notin \mathbb{Q}$$

[11] Читатель, конечно, узнает в числе c из примера 2.2.21 число $\sqrt{2}$. Мы не вставляем это в формулировку, потому что понятие корня будет определено нами только в § 1 главы 4.

Доказательство. 1. Рассмотрим два множества:

$$X = \{x \in \mathbb{R}: \quad x > 0 \quad \& \quad x^2 \leqslant 2\}$$

$$Y = \{y \in \mathbb{R}: \quad y > 0 \quad \& \quad y^2 \geqslant 2\}$$

Заметим, что $1 \in X$ и $2 \in Y$, поэтому X и Y непустые. Докажем неравенство для множеств

$$X \leqslant Y$$

Действительно, если бы для каких-то $x \in X$ и $y \in Y$ выполнялось обратное неравенство

$$x > y,$$

то, поскольку $y > 0$, по свойству степенного отображения (2.2.280), мы получили бы

$$x^2 > y^2$$

при том что из условий $x \in X$ и $y \in Y$ следует

$$x^2 \leqslant 2 \leqslant y^2.$$

Из неравенства $X \leqslant Y$, в силу аксиомы непрерывности A16, следует, что найдется число $c \in \mathbb{R}$, лежащее между X и Y:

$$X \leqslant c \leqslant Y$$

Заметим сразу, что, поскольку $1 \in X$ и $2 \in Y$, число c должно удовлетворять условию

$$1 \leqslant c \leqslant 2 \qquad (2.2.344)$$

2. Покажем, что

$$c^2 = 2$$

Предположим, что это не так, например, пусть

$$c^2 < 2 \qquad (2.2.345)$$

Тогда число $\varepsilon = 2 - c^2$ будет положительно:

$$\varepsilon = 2 - c^2 > 0$$

Отсюда сразу следует, что

$$c + \frac{\varepsilon}{3c} > c \geqslant X$$

и следовательно число $c + \frac{\varepsilon}{3c}$ не лежит в X. Но с другой стороны,

$$\underbrace{\begin{array}{cc} \begin{array}{c} (2.2.344) \\ \Downarrow \\ 1 \leqslant c^2 \\ \Downarrow \\ -c^2 \leqslant -1 \\ \Downarrow \\ \varepsilon = 2 - c^2 \leqslant 2 - 1 = 1 \end{array} & \begin{array}{c} (2.2.344) \\ \Downarrow \\ 0 < \frac{1}{c} \leqslant 1 \\ \Downarrow \\ 0 < \frac{1}{c^2} \leqslant 1 \end{array} \end{array}}$$

$$\Downarrow$$

$$\left(c + \frac{\varepsilon}{3c}\right)^2 = c^2 + 2 \cdot \frac{c \cdot \varepsilon}{3 \cdot c} + \left(\frac{\varepsilon}{3c}\right)^2 =$$

$$= c^2 + \frac{2}{3} \cdot \varepsilon + \underbrace{\frac{1}{9}}_{\substack{\wedge\!\!\!/ \\ \frac{1}{3}}} \cdot \underbrace{\frac{1}{c^2}}_{\substack{\wedge\!\!\!/ \\ 1}} \cdot \underbrace{\varepsilon^2}_{\substack{\wedge\!\!\!/ \\ \varepsilon, \\ \text{так как} \\ 0 < \varepsilon \leqslant 1}} \leqslant c^2 + \frac{2}{3} \cdot \varepsilon + \frac{1}{3} \cdot \varepsilon =$$

$$= c^2 + \varepsilon = c^2 + (2 - c^2) = 2$$

То есть

$$c + \frac{\varepsilon}{3c} > c > 0 \quad \& \quad \left(c + \frac{\varepsilon}{3c}\right)^2 \leqslant 2$$

и это значит, что число $c + \frac{\varepsilon}{3c}$ наоборот лежит в X. Это противоречие означает, что наше предположение (2.2.345) было неверным.

Предположим, наоборот, что

$$c^2 > 2 \qquad (2.2.346)$$

Тогда число $\varepsilon = c^2 - 2$ будет положительно

$$\varepsilon = c^2 - 2 > 0$$

Отсюда сразу следует, что

$$c - \frac{\varepsilon}{3c} < c \leqslant Y$$

и поэтому число $c - \frac{\varepsilon}{3c}$ не лежит в Y. Но с другой стороны, во-первых,

$$c - \frac{\varepsilon}{3c} = c - \frac{c^2 - 2}{3c} = \frac{2c^2 + 2}{3c} > 0$$

И, во-вторых,

$$\left(c - \frac{\varepsilon}{3c}\right)^2 = c^2 - \frac{2 \cdot \varepsilon}{3} + \left(\frac{\varepsilon}{3c}\right)^2 =$$

$$= c^2 - \varepsilon + \underbrace{\frac{\varepsilon}{3} + \left(\frac{\varepsilon}{3c}\right)^2}_{\substack{\vee \\ 0}} > c^2 - \varepsilon = c^2 - (c^2 - 2) = 2$$

То есть мы получаем

$$c - \frac{\varepsilon}{3c} > 0 \quad \& \quad \left(c - \frac{\varepsilon}{3c}\right)^2 \geqslant 2$$

и это значит, что число $c - \frac{\varepsilon}{3c}$ наоборот лежит в Y. Это противоречие говорит о том, что наше предположение (2.2.346) тоже было неверным.

3. Нам осталось доказать, что число c иррационально. Предположим, что оно рационально:

$$c \in \mathbb{Q}$$

Тогда, поскольку $c > 0$, по теореме 2.2.33 это число можно представить в виде несократимой дроби

$$c = \frac{m}{n}, \qquad m \vartriangle n = 1$$

Мы получаем цепочку:

$$\frac{m^2}{n^2} = c^2 = 2$$

$$\Downarrow$$
$$m^2 = 2 \cdot n^2$$
$$\Downarrow$$
$$m^2 \vdots 2$$
$$\Downarrow$$
в разложении (2.2.334) числа m^2
имеется множитель 2^s, $s \in \mathbb{N}$
$$\Downarrow$$
в разложении (2.2.334) числа m
имеется множитель 2^t, $t \in \mathbb{N}$
$$\Downarrow$$
$$m \vdots 2$$
$$\Downarrow$$
$$m = 2 \cdot k, \qquad k > 1$$
$$\Downarrow$$
$$4 \cdot k^2 = m^2 = 2 \cdot n^2$$
$$\Downarrow$$
$$2 \cdot k^2 = n^2$$
$$\Downarrow$$
$$n^2 \vdots 2$$
$$\Downarrow$$
по тем же причинам, что и для m,
в разложении (2.2.334) числа n
должен быть множитель 2^r, $r \in \mathbb{N}$
$$\Downarrow$$
$$n \vdots 2$$

Мы получаем, что оба числа m и n делятся на 2. Это противоречит тому, что у них наибольший общий делитель равен 1. Это означает, что наше предположение о рациональности c было ошибочным. □

Рациональные числа с нечетным знаменателем $\frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{N}-1}$. Напомним, что выше формулой (2.1.191) мы определили умножение числового множества X на число a:

$$a \cdot X = \{y \in \mathbb{R} : \ \exists x \in X \quad a \cdot x = y\}$$

формулой (2.1.190) – сдвиг множества

$$X - a = \{y \in \mathbb{R} : \ \exists x \in X \quad x - a = y\},$$

а формулой (2.1.196) – частное числовых множеств:

$$\frac{X}{Y} = \left\{z \in \mathbb{R} : \ \exists x \in X \quad \exists y \in Y \quad \frac{x}{y} = z\right\}$$

Этого достаточно, чтобы сообразить, что понимается под множеством $\frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{N}-1}$, о котором мы поведем речь здесь, но перед тем, как приступить собственно к изучению его свойств, мы рассмотрим несколько подготовительных примеров.

◇ **2.2.22.** Множество четных натуральных чисел $\{2, 4, 6, 8, ...\} = \{2n; \ n \in \mathbb{N}\}$ удобно записывать в виде

$$2\mathbb{N}.$$

Точно также множество нечетных натуральных чисел $\{1, 3, 5, 7, ...\} = \{2n-1; \ n \in \mathbb{N}\}$ удобно записывать в виде

$$2\mathbb{N} - 1.$$

◇ **2.2.23.** Выше мы уже приводили формулу (2.2.337)

$$\mathbb{Q} = \frac{\mathbb{Z}}{\mathbb{N}},$$

которую можно рассматривать, как определение множества рациональных чисел $\mathbb{Q}$.

◇ **2.2.24.** Непривычному взгляду не сразу будет очевидной справедливость равенства

$$\mathbb{Q} = \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{N}} \tag{2.2.347}$$

Доказательство. Ясно, что выполняется включение

$$\frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{Q}$$

Покажем, что верно и обратное включение:

$$\mathbb{Q} \subseteq \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{N}}$$

Действительно, если $r = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$, то положив $m = 2p$, мы получим:

$$r = \frac{p}{q} = \frac{m}{2q}, \quad m \in \mathbb{Z}, \ q \in \mathbb{N}$$

То есть $r \in \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{N}}$. □

▷ **2.2.25.** Докажите равенства:

$$\frac{2\mathbb{Z}}{2\mathbb{N}} = \mathbb{Q}$$
$$\frac{\mathbb{N}}{\mathbb{N}} = \{r \in \mathbb{Q} : \quad r > 0\}$$

◇ **2.2.26.** После примера 2.2.24 можно было бы ожидать, что если заменить в (2.2.347) четные числа $2\mathbb{N}$ на нечетные $2\mathbb{N}-1$, то равенство останется верным. Но это не так:

$$\mathbb{Q} \neq \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{N}-1}$$

Доказательство. Число $\frac{1}{2}$ лежит в $\mathbb{Q}$, но не в $\frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{N}-1}$ (потому что его невозможно представить в виде $\frac{\text{целое}}{\text{нечетное}}$). □

- Число $x \in \mathbb{Q}$ называется *рациональным числом с нечетным знаменателем*, если его можно представить в виде дроби, в которой числитель - целое число, а знаменатель – нечетное натуральное число:

$$x = \frac{m}{2n-1}, \qquad m \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{N}$$

Нетрудно сообразить, что это равносильно тому, что, будучи представлено в виде несократимой дроби, x имеет нечетный знаменатель. Множество всех рациональных чисел с нечетным знаменателем описывается формулой

$$\frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{N}-1} \tag{2.2.348}$$

Свойства множества $\frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{N}-1}$:

1°. *Сумма $x+y$ двух рациональных чисел x и y с нечетным знаменателем, также является рациональным с нечетным знаменателем:*

$$x, y \in \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{N}-1} \quad\Longrightarrow\quad x+y \in \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{N}-1}$$

2°. *Число $-x$, противоположное рациональному числу x с нечетным знаменателем, также является рациональным с нечетным знаменателем:*

$$x \in \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{N}-1} \quad\Longrightarrow\quad -x \in \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{N}-1}$$

3°. *Произведение $x \cdot y$ двух рациональных чисел x и y с нечетным знаменателем, также является рациональным с нечетным знаменателем:*

$$x, y \in \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{N}-1} \quad\Longrightarrow\quad x \cdot y \in \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{N}-1}$$

! **2.2.27.** Можно заметить, что для рациональных чисел с четным знаменателем, которые можно определить как те, которые будучи представлены в виде несократимой дроби имеют четный знаменатель (и, возможно, знак минус перед дробью), утверждение 2° в этом списке не будет справедливо: равенство

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

означает, что множество таких чисел не замкнуто относительно сложения. Однако, утверждения 1° и 3° для этого класса все же будут выполняться.

- Рациональное число x с нечетным знаменателем называется

— *четным*, если его можно представить в виде дроби с четным числителем и нечетным знаменателем:

$$x = \frac{2m}{2n-1}, \qquad m \in \mathbb{Z}, \quad n \in \mathbb{N}$$

это равносильно тому, что в разложении x на несократимую дробь числитель является четным числом; очевидно, что множество четных чисел с нечетным знаменателем описывается формулой:

$$\frac{2\mathbb{Z}}{2\mathbb{N}-1}$$

— *нечетным*, если его нельзя представить в виде дроби с четным числителем и нечетным знаменателем; это равносильно тому, что при любом представлении в виде дроби с нечетным знаменателем, числитель тоже будет нечетным:

$$x = \frac{2m-1}{2n-1}, \qquad m \in \mathbb{Z}, \quad n \in \mathbb{N}$$

в частности, в разложении x на несократимую дробь числитель должен быть нечетным числом; множество нечетных чисел с нечетным знаменателем описывается формулой:

$$\frac{2\mathbb{Z}-1}{2\mathbb{N}-1}$$

Доказательство следующей теоремы мы оставляем читателю:

Теорема 2.2.34. *Множества $\frac{2\mathbb{Z}}{2\mathbb{N}-1}$ и $\frac{2\mathbb{Z}-1}{2\mathbb{N}-1}$ не пересекаются и в объединении дают множество $\frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{N}-1}$:*

$$\frac{2\mathbb{Z}}{2\mathbb{N}-1} \cap \frac{2\mathbb{Z}-1}{2\mathbb{N}-1} = \varnothing$$
$$\frac{2\mathbb{Z}}{2\mathbb{N}-1} \cup \frac{2\mathbb{Z}-1}{2\mathbb{N}-1} = \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{N}-1}$$

- *Четностью* рационального числа x с нечетным знаменателем называется число $\operatorname{sgn}_2 x$, определяемое правилом:

$$\operatorname{sgn}_2 x = \begin{cases} +1, & x \text{ – четное} \\ -1, & x \text{ – нечетное} \end{cases} \tag{2.2.349}$$

Напомним, что выше (см.(2.1.204)) мы условились записью $a \vee b$ обозначать операцию взятия максимума двух чисел:

$$a \vee b = \max\{a, b\}$$

Такая запись позволяет придать "алгебраический" вид последнему из тождеств в следующем списке ($x, y \in \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{N}-1}$):

$$\operatorname{sgn}_2 x = \frac{1}{\operatorname{sgn}_2 x} \tag{2.2.350}$$
$$\operatorname{sgn}_2(-x) = \operatorname{sgn}_2 x \tag{2.2.351}$$
$$\operatorname{sgn}_2(x+y) = \operatorname{sgn}_2 x \cdot \operatorname{sgn}_2 y \tag{2.2.352}$$
$$\operatorname{sgn}_2(x \cdot y) = \operatorname{sgn}_2 x \ \vee\ \operatorname{sgn}_2 y \tag{2.2.353}$$

Доказательство. Здесь нужно просто рассмотреть несколько случаев. Для двух последних тождеств рассуждения выглядят так:

1) если $x, y \in \frac{2\mathbb{Z}}{2\mathbb{N}-1}$, то $x + y \in \frac{2\mathbb{Z}}{2\mathbb{N}-1}$ и $x \cdot y \in \frac{2\mathbb{Z}}{2\mathbb{N}-1}$, поэтому

$$\underbrace{\operatorname{sgn}_2(x+y)}_{\substack{\parallel\\ 1}} = \underbrace{\operatorname{sgn}_2 x}_{\substack{\parallel\\ 1}} \cdot \underbrace{\operatorname{sgn}_2 y}_{\substack{\parallel\\ 1}},$$

$$\underbrace{\operatorname{sgn}_2(x \cdot y)}_{\substack{\parallel\\ 1}} = \underbrace{\operatorname{sgn}_2 x}_{\substack{\parallel\\ 1}} \vee \underbrace{\operatorname{sgn}_2 y}_{\substack{\parallel\\ 1}},$$

2) если $x \in \frac{2\mathbb{Z}}{2\mathbb{N}-1}$, $y \in \frac{2\mathbb{Z}-1}{2\mathbb{N}-1}$, то $x + y \in \frac{2\mathbb{Z}-1}{2\mathbb{N}-1}$ и $x \cdot y \in \frac{2\mathbb{Z}}{2\mathbb{N}-1}$, поэтому

$$\underbrace{\operatorname{sgn}_2(x+y)}_{\substack{\parallel\\ -1}} = \underbrace{\operatorname{sgn}_2 x}_{\substack{\parallel\\ 1}} \cdot \underbrace{\operatorname{sgn}_2 y}_{\substack{\parallel\\ -1}},$$

$$\underbrace{\operatorname{sgn}_2(x \cdot y)}_{\substack{\parallel\\ 1}} = \underbrace{\operatorname{sgn}_2 x}_{\substack{\parallel\\ 1}} \vee \underbrace{\operatorname{sgn}_2 y}_{\substack{\parallel\\ -1}},$$

3) если $x, y \in \frac{2\mathbb{Z}-1}{2\mathbb{N}-1}$, то $x + y \in \frac{2\mathbb{Z}}{2\mathbb{N}-1}$ и $x \cdot y \in \frac{2\mathbb{Z}-1}{2\mathbb{N}-1}$, поэтому

$$\underbrace{\operatorname{sgn}_2(x+y)}_{\substack{\parallel\\ 1}} = \underbrace{\operatorname{sgn}_2 x}_{\substack{\parallel\\ -1}} \cdot \underbrace{\operatorname{sgn}_2 y}_{\substack{\parallel\\ -1}},$$

$$\underbrace{\operatorname{sgn}_2(x \cdot y)}_{\substack{\parallel\\ -1}} = \underbrace{\operatorname{sgn}_2 x}_{\substack{\parallel\\ -1}} \vee \underbrace{\operatorname{sgn}_2 y}_{\substack{\parallel\\ -1}}.$$

$\square$

Глава 3

ПРЕДЕЛ И НЕПРЕРЫВНОСТЬ

§ 1 Числовые функции

(a) Определение функции и примеры

Понятие функции формализует в математике идею взаимной зависимости физических величин. Идея же состоит в следующем.

Как мы уже говорили на с.122, физические величины, такие как расстояние, масса, скорость, и так далее, поддаются количественной оценке в числах. Люди находят и устанавливают правила, позволяющие измерять эти величины (сравнивая их с эталонами), то есть выражать их числами: 200 метров, 1,8 килограмма, и т.д. Собственно говоря, в этом состоит смысл самого понятия физической величины: параметр, существование которого предполагается теоретически, должен быть снабжен системой правил, позволяющих его измерять и сравнивать значения в различных ситуациях – только в этом случае он приобретает статус физической величины.

При этом очень важное наблюдение, с которого и начинаются технические науки, состоит в том, что при фиксированных правилах измерений обнаруживается, что разные величины могут быть связаны друг с другом довольно жесткими соотношениями (законами природы): если известны результаты измерений какой-то величины, то это, как правило, означает, что можно вычислить какие-то другие величины в рассматриваемой ситуации (без необходимости их измерять).

◇ **3.1.1.** Например, по результатам измерения диаметра окружности D, можно с достаточной точностью судить о том, какой будет ее длина l,

$$l = \pi D, \tag{3.1.1}$$

или площадь ограничиваемого ею круга:

$$S = \frac{\pi}{4} D^2. \tag{3.1.2}$$

Важно, что нам не нужно измерять l и S, если мы измерили D, потому что зависимости (3.1.1) и (3.1.2) позволяют вычислять l и S по данному D.

◇ **3.1.2.** Точно так же, зная (с достаточной точностью) массу тела m и плотность ρ материала, из которого оно изготовлено, мы можем (опять же, достаточно точно) определить объем V этого тела по формуле

$$V = \frac{m}{\rho}.$$

Нам для этого не нужно ставить экспериментов, требующих времени и денег (если, скажем, изучаемый нами предмет довольно громоздок) – все легко и быстро вычисляется на бумаге (или в уме).

В этих примерах одна величина выражается через другую с помощью логических правил, позволяющих проводить *вычисления*, то есть находить нужные значения, возможно приближенные, пользуясь заранее разработанными алгоритмами. Инженер, привыкший пользоваться подобными вычислениями на практике, обычно только так и понимает функциональную зависимость, но математику удобнее рассматривать эту зависимость в абстрактном виде, включая те ее разновидности, для которых алгоритмы вычислений еще не построены. Эти соображения приводят к следующему определению:

- *Числовой функцией на вещественной прямой* $\mathbb{R}$ называется произвольное отображение[1]

[1] Понятие отображения было определено выше на с.41.

$f : \mathsf{D}(f) \to \mathbb{R}$, у которого область определения $\mathsf{D}(f)$ содержится в $\mathbb{R}$. В дальнейшем мы будем использовать в таких случаях запись

$$f : \mathbb{R} \hookrightarrow \mathbb{R}$$

(которая будет означать, что f является отображением, у которого область определения и область значений содержатся в $\mathbb{R}$).

Интуитивно яснее, хотя и менее точно, звучит следующее неформальное описание:

- Пусть даны два числовых множества X и Y, и пусть задано некое правило, которое *каждому* элементу $x \in X$ ставит в соответствие *единственный* (зависящий от x) элемент $y = f(x) \in Y$. Такое правило обозначается $f : X \to Y$ или просто f и называется *числовой функцией* с *областью определения* X и *множеством значений* Y.

Напомним, что *формальное* определение на с.41 не различает отображение и его график. В соответствии с ним, мы можем сказать, что числовая функция $f : \mathbb{R} \hookrightarrow \mathbb{R}$ представляет из себя подмножество в декартовом произведении $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, удовлетворяющее условию (0.3.218). Обычно все же такое различие проводится: человеческому воображению удобно представлять себе функцию как правило, а не как подмножество, поэтому мы будем функцию $f : \mathbb{R} \hookrightarrow \mathbb{R}$ считать правилом, а к ее *графику* относиться как к множеству в декартовом произведении $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, состоящему из упорядоченных пар вида $(x; f(y))$, $x \in \mathsf{D}(f) \subseteq \mathbb{R}$.

$\diamond$ **3.1.3. Степенная функция с целым показателем.** Напомним, что на странице 167 мы определили степени с целым показателем. Степенной функцией с показателем $n \in \mathbb{Z}$ называется функция

$$f(x) = x^n$$

При $n \geqslant 0$ она определена на всей числовой прямой $\mathbb{R}$, а при $n < 0$ – только на множестве $\mathbb{R} \setminus \{0\} = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.

$\diamond$ **3.1.4. Модуль числа.** Выше формулой (3.1.5) мы определили модуль числа $x \in \mathbb{R}$:

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{если } x \geqslant 0 \\ x, & \text{если } x < 0 \end{cases}$$

Понятно, что правило $x \mapsto |x|$ будет функцией, определенной всюду на числовой прямой $\mathbb{R}$.

$\diamond$ **3.1.5. Целая часть числа.** Формулой (2.2.286) выше мы определили целую часть числа $x \in \mathbb{R}$:

$$[x] = \max\{n \in \mathbb{Z} : \ n \leqslant x\},$$

Правило $x \mapsto [x]$ будет функцией, определенной всюду на числовой прямой $\mathbb{R}$. Ее график интересен тем, что имеет бесконечно много разрывов (что такое разрыв мы объясним ниже на с. 242):

$\diamond$ **3.1.6. Дробная часть числа.** Формулой (2.2.292) мы определили дробную часть числа $x \in \mathbb{R}$:

$$\{x\} := x - [x]$$

Это тоже будет функция, определенная на $\mathbb{R}$, и ее график тоже имеет бесконечное число разрывов:

$\diamond$ **3.1.7. Сигнум** числа $x \in \mathbb{R}$ определяется правилом

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & \text{если } x > 0 \\ 0, & \text{если } x = 0 \\ -1, & \text{если } x < 0 \end{cases} \tag{3.1.3}$$

График этой функции имеет разрыв только в одной точке $x = 0$:

$\diamond$ **3.1.8. Функция Дирихле.** Функция D на $\mathbb{R}$, определенная правилом

$$D(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases} \tag{3.1.4}$$

называется *функцией Дирихле*. Ниже мы докажем формулу (9.1.4), выражающую эту функцию как двойной предел стандартных функций.

$\diamond$ **3.1.9. Пустая функция.** В список примеров полезно включить *пустую функцию*, то есть пустое отображение, определенное нами в примере 0.3.13, и рассматриваемое как отображение из $\varnothing$ в $\mathbb{R}$.

(b) Модуль

Модулем (или *абсолютной величиной*) вещественного числа $x \in \mathbb{R}$ называется число $|x|$, определяемое формулой

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{если } x \geqslant 0 \\ -x, & \text{если } x < 0 \end{cases} \tag{3.1.5}$$

Ниже на с.189 мы отметим, что отображение $x \mapsto |x|$ является функцией. Свойства этой функции так часто используются в анализе, что их изучению мы посвятим целый раздел.

Теорема 3.1.1. *Справедливо тождество*

$$|x| = \max\{-x; x\} = (-x) \vee x, \qquad x \in \mathbb{R} \tag{3.1.6}$$

Доказательство. Здесь нужно рассмотреть три случая:

1) если $x > 0$, то $|x| = x$ и, с другой стороны, $\max\{-x; x\} = x$, поэтому $|x| = \max\{-x; x\}$;
2) если $x = 0$, то $|x| = 0 = x$ и, с другой стороны, $\max\{-x; x\} = 0 = x$, поэтому $|x| = \max\{-x; x\}$;
3) если $x < 0$, то $|x| = -x$ и, с другой стороны, $\max\{-x; x\} = -x$, поэтому $|x| = \max\{-x; x\}$.

Мы получаем, что, (3.1.6) выполняется независимо от знака x. □

Алгебраические тождества с модулем.

Теорема 3.1.2. *Для любых $x, y \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ справедливы следующие равенства:*

$$|x \cdot y| = |x| \cdot |y| \tag{3.1.7}$$

$$|x^n| = |x|^n \tag{3.1.8}$$

Доказательство. Если оба знака у x и y положительны, получаем

$$\begin{cases} x \geqslant 0 \\ y \geqslant 0 \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \underbrace{|x \cdot y|}_{\substack{\| \\ x \cdot y}} = \underbrace{|x|}_{\substack{\| \\ x}} \cdot \underbrace{|y|}_{\substack{\| \\ y}}$$

Далее, если оба знака отрицательны,

$$\begin{cases} x \leqslant 0 \\ y \leqslant 0 \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \underbrace{|x \cdot y|}_{\substack{\| \\ x \cdot y}} = \underbrace{|x|}_{\substack{\| \\ -x}} \cdot \underbrace{|y|}_{\substack{\| \\ -y}}$$

Наконец, если знаки разные, например, $x \geqslant 0$, а $y \leqslant 0$, то

$$\begin{cases} x \geqslant 0 \\ y \leqslant 0 \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \underbrace{|x \cdot y|}_{\substack{\| \\ -x \cdot y}} = \underbrace{|x|}_{\substack{\| \\ x}} \cdot \underbrace{|y|}_{\substack{\| \\ -y}}$$

Это доказывает (3.1.7). Отсюда индукцией получается (3.1.8). □

Алгебраические неравенства с модулем.

Теорема 3.1.3. *Для любых $x, y \in \mathbb{R}$ справедливы следующие неравенства:*

$$|x| \geqslant 0, \quad \text{причем} \quad |x| = 0 \iff x = 0 \tag{3.1.9}$$

$$|x| - |y| \leqslant |x + y| \leqslant |x| + |y| \tag{3.1.10}$$

$$-|x - y| \leqslant |x| - |y| \leqslant |x - y| \tag{3.1.11}$$

Доказательство. 1. Если $x \geqslant 0$, то $|x| = x \geqslant 0$. Если же $x < 0$, то $|x| = -x > 0$. Далее, если $x = 0$, то $|x| = \max\{0; 0\} = 0$. И наоборот, если $|x| = 0$, то либо $|x| = x = 0$, либо $|x| = -x = 0$, то есть опять $x = 0$.

2. Докажем сначала правую половину (3.1.10):

$$|x + y| \leqslant |x| + |y| \tag{3.1.12}$$

Во-первых, если оба знака у x и y положительны, получаем

$$\begin{cases} x \geqslant 0 \\ y \geqslant 0 \end{cases} \implies \underbrace{|x + y|}_{\substack{\parallel \\ x+y}} \leqslant \underbrace{|x|}_{\substack{\parallel \\ x}} + \underbrace{|y|}_{\substack{\parallel \\ y}}$$

Во-вторых, если оба знака отрицательны,

$$\begin{cases} x \leqslant 0 \\ y \leqslant 0 \end{cases} \implies \underbrace{|x + y|}_{\substack{\parallel \\ -(x+y)}} \leqslant \underbrace{|x|}_{\substack{\parallel \\ -x}} + \underbrace{|y|}_{\substack{\parallel \\ -y}}$$

Наконец, если знаки разные, например, $x \geqslant 0$, а $y \leqslant 0$, то

$$\begin{cases} x \geqslant 0 \\ y \leqslant 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x + y = |x| - |y| \leqslant |x| + |y| \\ -x - y = -|x| + |y| \leqslant |x| + |y| \end{cases} \implies |x + y| = \max\{x + y; -x - y\} \leqslant |x| + |y|$$

Из (3.1.12) теперь получаем левую половину (3.1.10):

$$|x| = |(x + y) - y| \leqslant |x + y| + |-y| = |x + y| + |y| \implies |x| - |y| \leqslant |x + y|$$

3. Докажем правую половину (3.1.11):

$$|x| = |(x - y) + y| \leqslant (3.1.12) \leqslant |x - y| + |y| \implies |x| - |y| \leqslant |x - y|$$

После этого становится очевидной левая половина:

$$|y| - |x| \leqslant |y - x| \implies -|y| + |x| \geqslant -|y - x| = -|x - y|$$

□

Решение неравенств с модулем.

Теорема 3.1.4. *Справедливы следующие правила решения неравенств с модулем:*

$$|x| < \varepsilon \iff x \in (-\varepsilon,\varepsilon) \iff |x| \in (-\varepsilon, \varepsilon) \tag{3.1.13}$$

$$|x| > \varepsilon \iff x \in (-\infty; -\varepsilon) \cup (\varepsilon; +\infty) \iff |x| \in (-\infty; -\varepsilon) \cup (\varepsilon; +\infty) \tag{3.1.14}$$

Доказательство. 6. Если $x \geqslant 0$, то $|x| = x$, и цепочка (3.1.13) становится очевидной:

$$\underbrace{|x| < \varepsilon}_{\substack{\Updownarrow \\ 0 \leqslant x < \varepsilon}} \iff x \in (-\varepsilon, \varepsilon) \iff \underbrace{|x|}_{\substack{\parallel \\ x}} \in (-\varepsilon, \varepsilon)$$

Если же $x \leqslant 0$, то $|x| = -x$, и получается

$$\underbrace{|x| < \varepsilon}_{\substack{\Updownarrow \\ 0 \leqslant -x < \varepsilon \\ \Updownarrow \\ 0 \geqslant x > -\varepsilon}} \iff x \in (-\varepsilon, \varepsilon) \iff \underbrace{|x|}_{\substack{\parallel \\ -x}} \in (-\varepsilon, \varepsilon)$$

7. То же самое с 3°: если $x \geqslant 0$, то $|x| = x$, и цепочка (3.1.14) приобретает вид,

$$\underbrace{|x| > \varepsilon}_{\substack{\Updownarrow \\ x > \varepsilon}} \iff x \in (-\infty; \varepsilon) \cup (\varepsilon; +\infty) \iff \underbrace{|x|}_{\substack{\| \\ x}} \in (-\infty; \varepsilon) \cup (\varepsilon; +\infty)$$

а если $x \leqslant 0$, то $|x| = -x$, и получается

$$\underbrace{|x| > \varepsilon}_{\substack{\Updownarrow \\ -x > \varepsilon \\ \Updownarrow \\ x < -\varepsilon}} \iff x \in (-\infty; \varepsilon) \cup (\varepsilon; +\infty) \iff \underbrace{|x|}_{\substack{\| \\ -x}} \in (-\infty; \varepsilon) \cup (\varepsilon; +\infty)$$

□

(c) Функции с симметриями

Четные и нечетные функции.

- Функция f называется

  – *четной*, если

  (1) для всякой точки x из области определения $D(f)$ функции f точка $-x$ также лежит в области определения,
  $$\forall x \in D(f) \quad -x \in D(f)$$

  (2) выполняется тождество
  $$f(-x) = f(x)$$

  Эти условия означают, что график функции f должен быть симметричен относительно оси ординат:

  – *нечетной*, если

  (1) для всякой точки x из области определения $D(f)$ функции f точка $-x$ также лежит в области определения,
  $$\forall x \in D(f) \quad -x \in D(f)$$

  (2) выполняется тождество
  $$f(-x) = -f(x)$$

  Эти условия означают, что график функции f должен быть симметричен относительно начала координат:

◇ **3.1.10.** Степенная функция с четным показателем является четной:

$$(-x)^{2n} = x^{2n}, \qquad n \in \mathbb{Z} \tag{3.1.15}$$

Доказательство. Заметим, что это достаточно доказать для $n \geqslant 0$, потому что случай отрицательных степеней получается отсюда в качестве следствия:

$$(-x)^{-2n} = \frac{1}{(-x)^{2n}} = \frac{1}{x^{2n}} = x^{-2n}$$

Для $n \geqslant 0$ доказательство проводится по индукции.

1. При $n = 0$ утверждение очевидно:

$$(-x)^0 = 1 = x^0$$

2. Предположим, что мы доказали это для какого-то $n = k$:

$$(-x)^{2k} = x^{2k} \tag{3.1.16}$$

3. Тогда для $n = k + 1$ мы получаем:

$$(-x)^{2(k+1)} = (-x)^{2k+2} = \\ = \underbrace{(-x)^{2k}}_{\substack{\| \\ x^{2k}, \\ \text{в силу (3.1.16)}}} \cdot \underbrace{(-x)^2}_{\substack{\| \\ x^{2}, \\ \text{в силу (2.1.17)}}} = x^{2k} \cdot x^2 = \\ = x^{2k+2} = x^{2(k+1)}$$

□

◇ **3.1.11.** Степенная функция с нечетным показателем является нечетной:

$$(-x)^{2n-1} = -x^{2n-1}, \qquad n \in \mathbb{Z} \tag{3.1.17}$$

Доказательство. Как и в предыдущем примере, здесь достаточно доказать утверждение для $n \geqslant 0$, потому что для $n = -k$, $k \in \mathbb{Z}_+$, это выводится как следствие:

$$(-x)^{-2k-1} = \frac{1}{(-x)^{2k+1}} = -\frac{1}{x^{2k+1}} = -x^{-2k-1}$$

Для $n \geqslant 0$ доказательство проводится по индукции.

1. При $n = 0$ тождество (3.1.17) превращается в уже доказанное тождество (2.1.20):

$$(-x)^{-1} = -x^{-1}$$

2. Предположим, что мы доказали это для какого-то $n = k$:

$$(-x)^{2k-1} = -x^{2k-1} \tag{3.1.18}$$

3. Тогда для $n = k + 1$ мы получаем:

$$(-x)^{2(k+1)-1} = (-x)^{2k+1} = \\ = \underbrace{(-x)^{2k-1}}_{\substack{\| \\ -\,x^{2k-1}, \\ \text{в силу (3.1.18)}}} \cdot \underbrace{(-x)^2}_{\substack{\| \\ x^{2}, \\ \text{в силу (2.1.17)}}} = -x^{2k-1} \cdot x^2 = \\ = -x^{2k+1} = x^{2(k+1)-1}$$

□

◇ **3.1.12.** Модуль является четной функцией:

$$|-x| = |x| \tag{3.1.19}$$

Доказательство. Если $x > 0$, то

$$|\underbrace{-x}_{\substack{\wedge \\ 0}}| = -(-x) = x = |\underbrace{x}_{\substack{\vee \\ 0}}|$$

Если $x = 0$, то

$$|-x| = |-0| = |0| = |x|$$

Если $x < 0$, то

$$|\underbrace{-x}_{\substack{\vee \\ 0}}| = -x = |\underbrace{x}_{\substack{\wedge \\ 0}}|$$

□

! **3.1.13.** На всякий случай полезно заметить, что функции не обязаны быть только четными или нечетными. Например, функция

$$f(x) = 1 + x$$

не будет ни четной ни нечетной. Докажите это.

Периодические функции.

- Число T называется *периодом* числовой функции f, если
  (a) оно положительно:
  $$T > 0,$$
  (b) область определения $\mathsf{D}(f)$ функции f инвариантна относительно сдвигов на T вправо и влево:
  $$\mathsf{D}(f) - T = \mathsf{D}(f) = \mathsf{D}(f) + T$$

(то есть для любого $x \in \mathsf{D}(f)$ числа $x+T$ и $x-T$ тоже лежат в $\mathsf{D}(f)$),

(c) справедливо двойное тождество:

$$f(x-T) = f(x) = f(x+T), \qquad x \in \mathsf{D}(f) \tag{3.1.20}$$

(здесь из-за условия (b) достаточно выполнения какого-нибудь одного из этих двух равенств, например $f(x) = f(x+T)$).

- Число h называется *полупериодом* числовой функции f, если число $2h$ является периодом функции f.
- Числовая функция f называется
  — *периодической*, если она обладает каким-нибудь периодом T,
  — *T-периодической*, если число T является ее периодом,

◇ **3.1.14. Непериодические функции.** Понятно, что не всякая функция будет периодической. Например, функция

$$f(x) = x, \qquad x \in \mathbb{R}$$

– не периодическая, потому что для нее тождество (3.1.20) эквивалентно тождеству

$$x + T = x, \qquad x \in \mathbb{R}$$

которое выполняется только если $T = 0$. То есть периода (числа $T > 0$, удовлетворяющего (3.1.20)) у этой функции не существует.

◇ **3.1.15. Константы.** Всякую функцию, тождественно равную какому-нибудь числу $C \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = C, \qquad x \in \mathbb{R}$$

можно считать периодической, потому что для нее любое число $T > 0$ будет периодом:

$$f(x+T) = C = f(x), \qquad x \in \mathbb{R}$$

◇ **3.1.16. Дробная часть.** Функция $x \mapsto \{x\}$, сопоставляющая числу x его дробную часть $\{x\}$ (мы определили ее формулой (2.2.292)), является периодической, потому что, например, число 1 является для нее периодом:

$$\{x+1\} = \{x\}, \qquad x \in \mathbb{R}$$

Можно заметить, что вообще любое натуральное число $n \in \mathbb{N}$ является периодом для $x \mapsto \{x\}$:

$$\{x+n\} = \{x\}, \qquad x \in \mathbb{R}$$

Других же периодов здесь нет:

$$\Big\{T > 0 : \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \{x+n\} = \{x\}\Big\} = \mathbb{N}$$

Как следствие, эта функция обладает важным свойством, которое встречается не у всякой периодической функции (например, у констант его нет): у нее есть наименьший период – число 1.

◇ **3.1.17. Функция Дирихле** $x \mapsto D(x)$, определенная в главе 2 формулой (3.1.4), также будет периодической, потому что любое положительное рациональное число $r \in \mathbb{Q}$ является для нее периодом

$$D(x+r) = D(x), \qquad x \in \mathbb{R}$$

Однако среди таких чисел r не существует наименьшего. Поэтому D, будучи периодической, не обладает наименьшим периодом.

Теорема 3.1.5. *Если функция f является периодической и обладает наименьшим периодом M, то любой ее период T имеет вид*

$$T = n \cdot M$$

где $n \in \mathbb{N}$.

Доказательство. Разделим T на M с остатком по теореме 2.2.22:

$$T = n \cdot M + r, \qquad 0 \leqslant r < M$$

Если бы оказалось, что $r > 0$, то мы получили бы, что $r = T - n \cdot M$ – период функции f, меньший M. То есть M в этом случае не могло бы быть наименьшим периодом. Значит $r = 0$, и это то, что нам нужно. □

Теорема 3.1.6. *Если функция f является периодической, но не обладает наименьшим периодом M, то*

(i) *нижняя грань всех ее периодов равна нулю:*

$$\inf\Big\{T>0: \quad \forall x\in \mathsf{D}(f) \quad f(x+T)=f(x)\Big\}=0 \tag{3.1.21}$$

(ii) *на любом непустом интервале $I=(a,b)$ функция f принимает все свои значения:*

$$f\Big(I\cap \mathsf{D}(f)\Big)=f\Big(\mathsf{D}(f)\Big) \tag{3.1.22}$$

(иными словами, каковы бы ни были a и b, $a<b$, для любой точки $x\in \mathsf{D}(f)$ найдется точка $t\in(a,b)\cap \mathsf{D}(f)$ такая, что $f(t)=f(x)$).

Доказательство. 1. Обозначим буквой P множество всех периодов для f, а его нижнюю грань буквой α:

$$P=\Big\{T>0: \quad \forall x\in \mathsf{D}(f) \quad f(x+T)=f(x)\Big\}, \qquad \alpha=\inf P$$

Если $\alpha\notin P$, то для всякого $\beta>\alpha$ найдется $T\in P$ такое, что

$$\alpha<T<\beta$$

Возьмем произвольное $\varepsilon>0$. Для него существует какое-то $T_1\in P$ со свойством

$$\alpha<T_1<\alpha+\varepsilon$$

Поскольку $T_1>\alpha$, можно подобрать $T_2\in P$ такое, что

$$\alpha<T_2<T_1<\alpha+\varepsilon$$

Числа T_1 и T_2 являются периодами для f. Поэтому их разность $T=T_1-T_2$ (которая больше нуля, потому что $T_1>T_2$) тоже будет периодом для f:

$$f(x+T)=f(x+T_1-T_2)=f(x+T_1)=f(x)$$

С другой стороны, T_1 и T_2 лежат в интервале $(\alpha,\alpha+\varepsilon)$ длины ε, поэтому их разность должна быть меньше ε:

$$T=T_1-T_2<\varepsilon$$

Мы получили, что для всякого $\varepsilon>0$ найдется период $T\in P$, меньший ε. Значит, $\alpha=\inf P=0$

2. Рассмотрим сначала интервал $I=(-\varepsilon,\varepsilon)$, $\varepsilon>0$. В силу уже доказанной формулы (3.1.21), найдется период $T<\varepsilon$. Возьмем произвольную точку $x\in \mathsf{D}(f)$, и обозначим через n целую часть числа $\frac{x}{T}$:

$$n=\left[\frac{x}{T}\right]$$

Тогда точка $t=x-nT$ будет обладать нужными свойствами:

$$t\in(-\varepsilon,\varepsilon), \qquad t\in \mathsf{D}(f), \qquad f(t)=f(x)$$

Действительно, последние два условия – $t\in \mathsf{D}(f)$ и $f(t)=f(x)$ – выполняются потому что T – период. А первое следует из свойств целой части:

$$n=\left[\frac{x}{T}\right]$$

$$\Downarrow \ (2.2.288)$$

$$n\leqslant\frac{x}{T}<n+1<n+\frac{\varepsilon}{T}$$

$$\Downarrow$$

$$nT\leqslant x<nT+\varepsilon$$

$$\Downarrow$$

$$0\leqslant\underbrace{x-nT}_{t}<\varepsilon$$

$$\Downarrow$$

$$t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$$

3. Пусть, наконец, $I = (a, b)$ – произвольный интервал. Положим $\varepsilon = \frac{b-a}{3}$ и, пользуясь формулой (3.1.21), подберем период T так, чтобы

$$\frac{\varepsilon}{T} > 1$$

Тогда $a + \varepsilon < b - \varepsilon$, поэтому $\frac{a+\varepsilon}{T} < \frac{b-\varepsilon}{T}$, причем расстояние между точками $\frac{a+\varepsilon}{T}$ и $\frac{b-\varepsilon}{T}$ больше единицы:

$$\frac{b-\varepsilon}{T} - \frac{a+\varepsilon}{T} = \frac{(b-\varepsilon)-(a+\varepsilon)}{T} = \frac{(b-a)-2\varepsilon}{T} = \frac{3\varepsilon-2\varepsilon}{T} = \frac{\varepsilon}{T} > 1$$

Значит, между ними лежит хотя бы одно целое число $n \in \mathbb{Z}$:

$$\frac{a+\varepsilon}{T} < n < \frac{b-\varepsilon}{T}$$

Умножив на T мы получим:

$$a + \varepsilon < nT < b - \varepsilon$$

$$\Downarrow$$

$$a < nT - \varepsilon \quad \& \quad nT + \varepsilon < b$$

$$\Downarrow$$

$$(-\varepsilon; \varepsilon) + nT = (nT - \varepsilon; nT + \varepsilon) \subseteq (a; b)$$

То есть $(-\varepsilon; \varepsilon)$ – такой интервал, сдвиг которого на число nT, кратное периоду T, попадает в интервал $(a; b)$. Мы уже доказали, что для любой точки $x \in \mathsf{D}(f)$ в интервале $(-\varepsilon; \varepsilon)$ найдется точка t, на которой функция f определена и принимает то же значение:

$$f(t) = f(x)$$

Положив $s = t + nT$, мы получим точку из интервала $(nT - \varepsilon; nT + \varepsilon) \subseteq (a; b)$ с теми же свойствами:

$$f(s) = f(t + nT) = f(t) = f(x)$$

$\square$

(d) Свойства функций, связанные с отношением порядка

Ограниченные функции и точная грань функции на множестве. Пусть f – числовая функция и E – подмножество в ее области определения:

$$E \subseteq \mathsf{D}(f)$$

Образом этого множества под действием функции f называется множество

$$f(E) = \Big\{ f(x); \quad x \in E \Big\} = \Big\{ y : \ \exists x \in E \quad y = f(x) \Big\} \tag{3.1.23}$$

- Точная нижняя грань множества $f(E)$ называется *точной нижней гранью функции f на множестве E* и обозначается $\inf_{x\in E} f(x)$:

$$\inf_{x \in E} f(x) = \inf f(E) = \inf \Big\{ f(x); \quad x \in E \Big\} \tag{3.1.24}$$

Если функция f *ограничена снизу* на множестве E, то есть существует число A такое, что

$$\forall x \in E \quad A \leqslant f(x)$$

(это эквивалентно тому, что множество $f(E)$ ограничено снизу), то точная нижняя грань f на E совпадает с наибольшим из таких чисел A:

$$\inf_{x \in E} f(x) = \max\{A \in \mathbb{R} : \quad \forall x \in E \quad A \leqslant f(x)\}.$$

В таких случаях $\inf_{x\in E} f(x)$ само является числом (а не символом $-\infty$, как тоже иногда бывает), и это коротко записывается формулой:

$$\inf_{x \in E} f(x) > -\infty$$

В противном случае говорят, что функция f *не ограничена снизу* на множестве E, и записывается это формулой:

$$\inf_{x \in E} f(x) = -\infty$$

- Точная верхняя грань множества $f(E)$ называется *точной верхней гранью функции f на множестве E* и обозначается $\sup_{x\in E} f(x)$:

$$\sup_{x\in E} f(x) = \sup f(E) = \sup\Big\{ f(x); \quad x\in E\Big\} \tag{3.1.25}$$

Если функция f *ограничена сверху* на множестве E, то есть существует число B такое, что

$$\forall x\in E \quad f(x)\leqslant B$$

(это эквивалентно тому, что множество $f(E)$ ограничено сверху), то точная верхняя грань f на E совпадает с наименьшим из таких чисел B:

$$\sup_{x\in E} f(x) = \min\{B\in\mathbb{R}: \quad \forall x\in E \quad f(x)\leqslant B\}.$$

В таких случаях $\sup_{x\in E} f(x)$ является числом (а не символом $+\infty$), и это коротко записывается формулой:

$$\sup_{x\in E} f(x) < +\infty$$

В противном случае говорят, что функция f *не ограничена сверху* на множестве E, и записывается это формулой:

$$\sup_{x\in E} f(x) = +\infty$$

- Числовая функция f называется *ограниченной* на множестве $E\subseteq \mathsf{D}(f)$, если она ограничена на E сверху и снизу, то есть существуют числа A и B, такие что:

$$\forall x\in E \quad A\leqslant f(x)\leqslant B$$

Свойства точной верхней и точной нижней грани функции:

1° **Точная грань от константы:**

$$\Big(\forall x\in E \quad f(x)=C\Big) \quad\Longrightarrow\quad \inf_{x\in E} f(x) = C = \sup_{x\in E} f(x)$$

2° **Монотонность:**

$$\Big(\forall x\in E \quad f(x)\leqslant g(x)\Big) \quad\Longrightarrow\quad \inf_{x\in E} f(x)\leqslant \inf_{x\in E} g(x) \quad \& \quad \sup_{x\in E} f(x)\leqslant \sup_{x\in E} g(x)$$

3° **Антиоднородность:**

$$\begin{aligned} \inf_{x\in E}\Big(-f(x)\Big) &= -\sup_{x\in E} f(x) \\ \sup_{x\in E}\Big(-f(x)\Big) &= -\inf_{x\in E} f(x) \end{aligned} \tag{3.1.26}$$

4° **Полуаддитивность:**

$$\begin{aligned} \inf_{x\in E}\Big(f(x)+g(x)\Big) &\geqslant \inf_{x\in E} f(x) + \inf_{x\in E} g(x) \\ \sup_{x\in E}\Big(f(x)+g(x)\Big) &\leqslant \sup_{x\in E} f(x) + \sup_{x\in E} g(x) \end{aligned} \tag{3.1.27}$$

5° **Полумультипликативность:** если $f(x), g(x)\geqslant 0$, то

$$\begin{aligned} \inf_{x\in E}\Big(f(x)\cdot g(x)\Big) &\geqslant \inf_{x\in E} f(x)\cdot \inf_{x\in E} g(x) \\ \sup_{x\in E}\Big(f(x)\cdot g(x)\Big) &\leqslant \sup_{x\in E} f(x)\cdot \sup_{x\in E} g(x) \end{aligned} \tag{3.1.28}$$

6° **Связь с модулем:**[2]

$$\sup_{x,y\in E}\Big|f(x)-f(y)\Big| = \sup_{x,y\in E}\Big(f(x)-f(y)\Big) \tag{3.1.29}$$

Доказательство. В каждом пункте (за исключением 6°) мы докажем только первую половину утверждения (вторая доказывается по аналогии).

1.

$$\Big(\forall x\in E \quad f(x)=C\Big) \implies \{A:\ \forall x\in E \quad A\leqslant f(x)\}=\{A:\ A\leqslant C\}=(-\infty;C] \implies$$
$$\implies \inf_{x\in E} f(x)=\max\{A:\ \forall x\in E \quad A\leqslant f(x)\}=\max(-\infty;C]=C$$

2. Пусть $\forall x\in E \quad f(x)\leqslant g(x)$. Тогда

$$\{C:\ \forall x\in E\ \ C\leqslant f(x)\}\subseteq\{C:\ \forall x\in E\ \ C\leqslant g(x)\}$$
$$\Downarrow \quad \big(\text{свойство } 1^\circ \text{ на стр. 150}\big)$$
$$\inf_{x\in E} f(x)=\max\{C:\ \forall x\in E\ \ C\leqslant f(x)\}\leqslant\max\{C:\ \forall x\in E\ \ C\leqslant g(x)\}=\inf_{x\in E} g(x)$$

3.

$$\inf_{x\in E}\Big(-f(x)\Big)=\inf\Big(-f(E)\Big)=\big(\text{свойство } 3^\circ \text{ на стр. 150}\big)=-\sup f(E)=-\sup_{x\in E} f(x)$$

.

4.

$$\begin{cases}\forall x\in E \quad f(x)\geqslant\inf_{x\in E} f(x)\\ \forall x\in E \quad g(x)\geqslant\inf_{x\in E} g(x)\end{cases} \implies \forall x\in E \quad f(x)+g(x)\geqslant\inf_{x\in E} f(x)+\inf_{x\in E} g(x) \implies$$
$$\implies \inf_{x\in E}\Big(f(x)+g(x)\Big)\geqslant\inf_{x\in E} f(x)+\inf_{x\in E} g(x)$$

5.

$$\begin{cases}\forall x\in E \quad f(x)\geqslant\inf_{x\in E} f(x)\geqslant 0\\ \forall x\in E \quad g(x)\geqslant\inf_{x\in E} g(x)\geqslant 0\end{cases} \implies \forall x\in E \quad f(x)\cdot g(x)\geqslant\inf_{x\in E} f(x)\cdot\inf_{x\in E} g(x) \implies$$
$$\implies \inf_{x\in E}\Big(f(x)\cdot g(x)\Big)\geqslant\inf_{x\in E} f(x)\cdot\inf_{x\in E} g(x)$$

6. Во-первых, нужно заметить неравенство:

$$\sup_{x,y\in E}\Big(f(x)-f(y)\Big)\leqslant\sup_{x,y\in E}\Big|f(x)-f(y)\Big|$$

Оно следует из свойства монотонности:

$$\forall x,y\in E \qquad \Big(f(x)-f(y)\Big)\leqslant\Big|f(x)-f(y)\Big| \implies \sup_{x,y\in E}\Big(f(x)-f(y)\Big)\leqslant\sup_{x,y\in E}\Big|f(x)-f(y)\Big|$$

После этого нужно убедиться, что это неравенство не может быть строгим. Предположим, что

$$\sup_{x,y\in E}\Big(f(x)-f(y)\Big)<\sup_{x,y\in E}\Big|f(x)-f(y)\Big|$$

то есть что для каких-то элементов $a,b\in E$ выполняется

$$\forall x,y\in E \quad \Big(f(x)-f(y)\Big)<\Big|f(a)-f(b)\Big|$$

В частности, взяв $x=a, y=b$, мы получили бы

$$f(a)-f(b)<\Big|f(a)-f(b)\Big|$$

а, взяв $x=b, y=a$, получили бы

$$f(b)-f(a)<\Big|f(a)-f(b)\Big|$$

Вместе эти два неравенства выполняться не могут, потому что $\Big|f(a)-f(b)\Big|$ равен либо $f(a)-f(b)$, либо $f(b)-f(a)$. □

[2]Это тождество понадобится нам на с.434.

Монотонные функции

- Числовая функция f называется
  - *возрастающей* на множестве $E \subseteq \mathsf{D}(f)$, если для любых точек $x, y \in E$ таких что $x < y$ выполняется неравенство $f(x) < f(y)$;
  - *убывающей* на множестве $E \subseteq \mathsf{D}(f)$, если для любых точек $x, y \in E$ таких что $x < y$ выполняется неравенство $f(x) > f(y)$;
  - *невозрастающей* на множестве $E \subseteq \mathsf{D}(f)$, если для любых точек $x, y \in E$ таких что $x < y$ выполняется неравенство $f(x) \geqslant f(y)$;
  - *неубывающей* на множестве $E \subseteq \mathsf{D}(f)$, если для любых точек $x, y \in E$ таких что $x < y$ выполняется неравенство $f(x) \leqslant f(y)$;
  - *монотонной* на множестве $E \subseteq \mathsf{D}(f)$, если она невозрастающая или неубывающая;
  - *строго монотонной* на множестве $E \subseteq \mathsf{D}(f)$, если она возрастающая или убывающая.

Доказательство следующих свойств мы оставляем читателю:

Свойства монотонных функций

1° *Если функция f возрастает на множестве E, то она неубывает на множестве E.*

2° *Если функция f убывает на множестве E, то она невозрастает на множестве E.*

3° *Если функция f неубывает на множестве E, то на всяком ограниченном снизу (сверху) подмножестве $M \subseteq E$ таком, что* $\inf M \in E$ $(\sup M \in E)$ *функция f ограничена снизу* *(сверху) и удовлетворяет неравенству*

$$f(\inf M) \leqslant \inf_{x\in M} f(x) \qquad \Big(\sup_{x\in M} f(x) \leqslant f(\sup M)\Big) \tag{3.1.30}$$

4° *Если функция f невозрастает на множестве E, то на всяком ограниченном сверху (снизу) подмножестве $M \subseteq E$ таком, что $\sup M \in E$ ($\inf M \in E$) функция f ограничена снизу (сверху) и удовлетворяет неравенству*

$$f(\sup M) \leqslant \inf_{x\in M} f(x) \qquad \Big(\sup_{x\in M} f(x) \leqslant f(\inf M)\Big) \tag{3.1.31}$$

5° *Композиция $g \circ f$ функций f и g*

- *возрастает (неубывает), если обе функции f и g возрастают (неубывают), либо обе убывают (невозрастают),*
- *убывает (невозрастает), если одна из функций f и g возрастает (неубывает), а другая убывает (невозрастает).*

◇ **3.1.18.** Степенная функция $x \mapsto x^{2n}$, $n \in \mathbb{N}$,
— убывает на полуинтервале $(-\infty; 0]$,
— возрастает на полуинтервале $[0; +\infty)$.

Как следствие,

$$\boxed{x \ne 0 \quad \Longrightarrow \quad x^{2n} > 0} \tag{3.1.32}$$

Доказательство. Возрастание на полуинтервале $[0; +\infty)$ следует из теоремы 2.2.17: в силу (2.2.280), функция $x \mapsto x^{2n}$ возрастает на интервале $(0; +\infty)$:

$$0 < x < y \quad \Rightarrow \quad x^{2n} < y^{2n}$$

А случай $x = 0$ получается из условия сохранения знака (2.2.279):

$$0 < y \quad \Rightarrow \quad 0^{2n} \overset{(2.2.278)}{=} 0 < y^{2n}$$

С другой стороны, в силу (3.1.15), наша функция четная:

$$(-x)^{2n} = x^{2n}$$

Отсюда следует, что она убывает на полуинтервале $(-\infty; 0]$:

$$x < y \leqslant 0$$
$$\Downarrow$$
$$0 \leqslant -y < -x$$
$$\Downarrow$$
$$\underbrace{(-y)^{2n}}_{y^{2n}} < \underbrace{(-x)^{2n}}_{x^{2n}}$$
$$\Downarrow$$
$$y^{2n} < x^{2n}$$

Для доказательства (3.1.32) нужно просто рассмотреть два случая: $x > 0$ и $x < 0$. □

◇ **3.1.19.** Степенная функция $x \mapsto x^{2n-1}$, $n \in \mathbb{N}$, возрастает всюду на своей области определения (то есть на прямой $\mathbb{R}$). Как следствие,

$$\boxed{\begin{array}{lll} x > 0 & \Longrightarrow & x^{2n-1} > 0 \\ x < 0 & \Longrightarrow & x^{2n-1} < 0 \end{array}} \tag{3.1.33}$$

Доказательство. Возрастание на полуинтервале $[0; +\infty)$ здесь доказывается так же, как в предыдущем примере 3.1.18. Поскольку вдобавок, в силу (3.1.17), наша функция нечетная,

$$(-x)^{2n-1} = -x^{2n-1},$$

она должна возрастать и на полуинтервале $(-\infty; 0]$:

$$x < y \leqslant 0$$
$$\Downarrow$$
$$0 \leqslant -y < -x$$
$$\Downarrow$$
$$\underbrace{(-y)^{2n-1}}_{-y^{2n-1}} < \underbrace{(-x)^{2n-1}}_{-x^{2n-1}}$$
$$\Downarrow$$
$$-y^{2n-1} < -x^{2n-1}$$
$$\Downarrow$$
$$x^{2n-1} < y^{2n-1}$$

Остается заметить, что значения функции на полуинтервале $(-\infty; 0]$ меньше значений на $[0; +\infty)$. Это следует из того, что эти интервалы имеют общую точку 0:

$$x < 0 < y$$
$$\Downarrow$$

$$\underbrace{\underbrace{x^{2n-1}<0}_{\substack{\text{потому что}\\ x,0\in(-\infty;0]}} \quad \& \quad \underbrace{0<y^{2n-1}}_{\substack{\text{потому что}\\ 0,y\in[0;+\infty)}}}$$

$$\Downarrow$$

$$x^{2n-1}<0<y^{2n-1} \tag{3.1.34}$$

Формулы (3.1.33) можно вывести из возрастания функции $x\mapsto x^{2n-1}$, а можно объявить их следствием уже доказанного неравенства (3.1.34). □

◇ **3.1.20.** Степенная функция $x\mapsto x^{-2n}$, $n\in\mathbb{N}$,

— возрастает на интервале $(-\infty;0)$,

— убывает на интервале $(0;+\infty)$.

При этом,

$$\boxed{x\ne 0 \quad\Longrightarrow\quad x^{-2n}>0} \tag{3.1.35}$$

Доказательство. Убывание на интервале $(0;+\infty)$ следует из условия монотонности (2.2.281) теоремы 2.2.17. Из него и условия четности (3.1.15) выводится возрастание на интервале $(-\infty;0)$ по аналогии с тем, как это делалось в примере 3.1.18. Свойства (3.1.35) следуют из из условия сохранения знака (2.2.279) теоремы 2.2.17 и условия четности (3.1.15). □

◇ **3.1.21.** Степенная функция $x\mapsto x^{-(2n-1)}$, $n\in\mathbb{N}$,

— убывает на интервале $(-\infty;0)$,

— убывает на интервале $(0;+\infty)$.

При этом,

$$\boxed{\begin{array}{ccc} x>0 & \Longrightarrow & x^{-(2n-1)}>0 \\ x<0 & \Longrightarrow & x^{-(2n-1)}<0 \end{array}} \tag{3.1.36}$$

Доказательство. Как и в предыдущем примере убывание на интервале $(0;+\infty)$ следует из условия монотонности (2.2.281) теоремы 2.2.17. Из него и условия нечетности (3.1.17) выводится убывание на интервале $(-\infty;0)$ по аналогии с тем, как это делалось в примере 3.1.19. Свойства (3.1.36) следуют из из условия сохранения знака (2.2.279) теоремы 2.2.17 и условия нечетности (3.1.17). □

▷ **3.1.22.** Нарисуйте график какой-нибудь функции $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ со следующими свойствами:

1) на интервале $(-\infty;-1)$ функция f убывает и ограничена;
2) на интервале $(-1;0)$ функция f возрастает и ограничена;
3) на интервале $(0;1)$ функция f убывает, ограничена снизу, но не ограничена сверху;
4) на интервале $(1;+\infty)$ функция f возрастает и ограничена;

Понятно, что эта задача имеет неединственное решение. В качестве возможного ответа мы предлагаем следующую картинку:

▷ **3.1.23.** Нарисуйте график какой-нибудь функции $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ со следующими свойствами:

1) на интервале $(-\infty;-2)$ функция f возрастает и ограничена;
2) на интервале $(-2;0)$ функция f убывает, ограничена сверху, но не ограничена снизу;
3) на интервале $(0;1)$ функция f возрастает и не ограничена ни сверху, ни снизу;
4) на интервале $(1;+\infty)$ функция f возрастает и ограничена снизу.

Один из возможных ответов выглядит так:

§ 2 Предел последовательности

Напомним, что понятие бесконечной последовательности было определено на с.73. В частном случае, когда значения последовательности являются числами, такая последовательность называется числовой. Выпишем это определение для ссылок:

- *Числовой последовательностью* называется произвольное отображение $a:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$ (натурального ряда $\mathbb{N}$ в множество $\mathbb{R}$ вещественных чисел). Значения такого отображения принято записывать с помощью нижнего индекса

$$a_n=a(n),\qquad n\in\mathbb{N}.$$

а само отображение – в виде семейства $\{a_n;\ n\in\mathbb{N}\}$ или $\{a_n\}$. (Понятно, что вместо a может употребляться любая другая буква.)

Способы описания числовой последовательности. В математическом анализе имеется только три способа определить числовую последовательность. Мы перечислим их в следующих примерах.

◇ **3.2.1. Последовательности, заданные явно.** Первый способ – написать формулу вида

$$x_n = f(n), \tag{3.2.37}$$

в которой f – заранее определенная функция. Например, следующие формулы *явно задают последовательности*, поскольку функции в правых частях были уже нами определены:

$$x_n = \frac{1}{n}, \qquad x_n = n, \qquad x_n = (-1)^n.$$

Естественно, под f в формуле (3.2.37) можно также понимать какую-нибудь функцию, составленную из уже определенных, с помощью явно описанных операций, например, операции композиции,

$$x_n = 2^{n^2}$$

или алгебраических операций,

$$x_n = n^2 - n$$

или операции индуктивного суммирования,

$$x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

или каких-то других операций (например, дифференцирования и интегрирования которые мы опишем ниже). Во всех этих случаях считается, что формула задает последовательность явно.

◇ **3.2.2. Последовательности, заданные рекуррентно.** Второй способ – задать последовательность индуктивно с помощью теоремы 2.2.6 (об определениях полной индукцией). В таких случаях говорят также, что последовательность задана *рекуррентно*. Например, правило

$$x_1 = 2, \quad x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{1}{x_n}\right)$$

индуктивно задает некую числовую последовательность (ниже в примере 3.2.48 мы будем изучать ее свойства).

Другой пример – знаменитая *последовательность Фибоначчи*, задаваемая правилом

$$x_1 = x_2 = 1, \quad x_{n+2} = x_{n+1} + x_n, \tag{3.2.38}$$

(ниже в главе 10 мы докажем неочевидный факт, что эту последовательность можно задать и явной формулой (10.3.149)). Отметим, что в этом примере ссылка на теорему 2.2.6, из которой мы выводили саму возможность определений по индукции не вполне корректна, потому что в качестве начальных данных в определении (3.2.38) используются два числа, x_1 и x_2 (а не одно, x_1). Для обоснования такого индуктивного приема нужно заменить теорему 2.2.6 на формально другое утверждение, в котором отображение G будет действовать на последовательности элементов $a_1, ..., a_n \in A$ *длиной не меньше* 2. Поскольку пример Фибоначчи используется в нашем учебнике исключительно как иллюстрация, мы предоставляем читателю самостоятельно продумать эти детали.

◇ **3.2.3. Последовательности, заданные с помощью аксиомы выбора.** Последний способ – воспользоваться следующим частным случаем аксиомы выбора, описанной на с.64:

- **Аксиома счетного выбора:** для всякой последовательности непустых множеств $\{X_n;\ n \in \mathbb{N}\}$ можно подобрать последовательность $\{x_n;\ n \in \mathbb{N}\} \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n$ такую, что для всякого $n \in \mathbb{N}$ объект x_n является элементом множества X_n:

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad x_n \in X_n.$$

Этот способ может показаться слишком абстрактным, но, как правило, именно он (за редкими исключениями) используется при доказательстве общих утверждений там, где бывает нужно построить последовательность с заданными свойствами. Ниже на примере доказательств свойств подпоследовательностей 2^0 и 3^0 на с.228 и при доказательстве теоремы Больцано-Вейерштрасса 3.2.13 мы подробно обсуждаем этот эффект в связи с замечаниями о приеме бесконечнократного выбора, которые мы делаем там же.

Способы изображения числовой последовательности. Множество натуральных чисел $\mathbb{N}$, по которому бегает аргумент n последовательности $\{x_n\}$, обладает довольно редко встречающимся в математике свойством *перечислимости*. Это значит, что можно указать алгоритм, который сначала выдаст первый элемент этого множества, $n = 1$, а затем для каждого $n \in \mathbb{N}$ сгенерирует следующий за ним элемент $n + 1$, и таким образом будут перечислены все элементы $\mathbb{N}$. Из этого следует, что последовательность $\{x_n\}$ можно представлять себе в виде таблицы, в которой первую строчку (множество значений аргумента) занимают натуральные числа, а вторая строчка будет занята соответствующими вещественными числами (значениями последовательности):

1	2	3	4	5	6	7	...
x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	...

Поскольку ячеек у такой таблицы должно быть бесконечно много, всю ее нарисовать, конечно, невозможно, однако в качестве зрительного образа, который можно держать в голове, когда речь заходит о последовательностях, такое представление бывает полезно.

Но оно фокусирует внимание наблюдателя на первых элементах последовательности и бывает удобно только там, где важно ее "начало", а на остающийся "хвост" можно не обращать внимание. Нас же, наоборот, будет главным образом интересовать этот "хвост": первые значения как раз не будут нам особенно нужны (причем, каким бы длинным ни был этот начальный отрезок последовательности), а важной для нас будет лишь закономерность, позволяющая понять, к чему стремится данная последовательность (и стремится ли она к чему-то).

Пытаться уловить эту закономерность (разумеется, не на произвольных примерах, а на специально подобранных, обучающих) гораздо удобнее, пользуясь другим зрительным образом, в котором последовательность изображается системой направленных дуг, символизирующих переходы от x_n к x_{n+1}:

Это можно представлять себе как движение "блохи, прыгающей по прямой": сначала эта "блоха находилась в точке x_1", затем "прыгнула в точку x_2", и так далее. Понятно, что и здесь всю систему дуг нарисовать никогда не бывает возможно (потому что их тоже бесконечно много), однако как зрительный образ такое представление оказывается удивительно полезным.

◇ **3.2.4.** $x_n = \frac{1}{n}$

◇ **3.2.5.** $x_n = n$

◇ **3.2.6.** $x_n = \frac{(-1)^n}{n}$

◇ **3.2.7.** $x_n = (-1)^n \cdot n$

◇ **3.2.8.** $x_n = (-1)^n$

◇ **3.2.9.** $x_n = 3$ (постоянная последовательность)

(a) Предел числовой последовательности

"Почти все $n \in \mathbb{N}$". Пусть P обозначает какое-нибудь переменное высказывание о натуральных числах (например, "$n > 10$", или "n четное", и т.д.).

- Говорят, что *почти все числа $n \in \mathbb{N}$ обладают свойством P*, если только конечное (возможно, пустое) множество чисел $n \in \mathbb{N}$ не обладает этим свойством:

$$\operatorname{card}\{n \in \mathbb{N} : \quad \neg P\} < \infty \tag{3.2.39}$$

  Это эквивалентно тому, что свойство P выполняется для всех $n \in \mathbb{N}$, начиная с некоторого номера:

$$\exists N \in \mathbb{N} \qquad \forall n \geqslant N \qquad P \tag{3.2.40}$$

Доказательство эквивалентности. Пусть P – какое-то переменное высказывание о натуральных числах. Обозначим буквой A множество тех чисел $n \in \mathbb{N}$, для которых P ложно, а через B множество тех чисел $n \in \mathbb{N}$, для которых P истинно:

$$A = \{n \in \mathbb{N} : \quad \neg P\}, \qquad B = \{n \in \mathbb{N} : \quad P\}$$

Тогда

$$\begin{gathered}
(3.2.39) \\
\Updownarrow \\
\operatorname{card} A < \infty \\
\Updownarrow \ \text{теорема 2.2.12} \\
\exists N \in \mathbb{N} \qquad A \subseteq \{1, ..., N\} \\
\Updownarrow \\
\exists N \in \mathbb{N} \qquad \{n \in \mathbb{N} : \quad n > N\} \subseteq B \\
\Updownarrow \\
(3.2.40)
\end{gathered}$$

$\square$

◇ **3.2.10.** Ясно, что почти все числа $n \in \mathbb{N}$ удовлетворяют неравенству

$$n \geqslant 5$$

потому что чисел $n \in \mathbb{N}$, не удовлетворяющих этому неравенству имеется только конечное множество (а именно $n \in \{1, 2, 3, 4\}$).

◇ **3.2.11.** Наоборот, неверно, что почти все числа $n \in \mathbb{N}$ удовлетворяют неравенству

$$n < 5$$

потому что чисел $n \in \mathbb{N}$, не удовлетворяющих этому неравенству бесконечно много (а именно, $n = 5, 6, 7, 8, ...$).

▷ **3.2.12.** Сообразим, будет ли неравенство

$$(-1)^n > 0$$

выполняется для почти всех $n \in \mathbb{N}$?

Понятно, что это не так, потому что оно выполняется только для четных чисел ($n = 2, 4, 6, 8, ...$), а для нечетных чисел ($n = 1, 3, 5, 7, ...$) – которых бесконечно много – оно неверно.

▷ **3.2.13.** Верно ли, что обратное неравенство

$$(-1)^n \leqslant 0$$

выполняется для почти всех $n \in \mathbb{N}$?

Это, конечно, тоже не так, потому что этому неравенству удовлетворяют только нечетные числа ($n = 1, 3, 5, 7, ...$), а для четных чисел ($n = 2, 4, 6, 8, ...$) – которых бесконечно много – оно неверно.

Теорема 3.2.1 (Архимеда)**.** *Каково бы ни было число $C \in \mathbb{R}$, почти все числа $n \in \mathbb{N}$ удовлетворяют неравенству*

$$n > C \tag{3.2.41}$$

Доказательство. Это следует из принципа Архимеда (теорема 2.2.10). Выберем какое-нибудь $N \in \mathbb{N}$ так, чтобы $N > C$. Тогда все числа n, начиная с числа N, удовлетворяют неравенству (3.2.41), потому что $n \geqslant N > C$. $\square$

$\triangleright$ **3.2.14.** Следующая “абстрактная” задача может считаться тестом на понимание термина “почти все”. Пусть M какое-нибудь множество натуральных чисел ($M \subseteq \mathbb{N}$), рассмотрим пять возможных ситуаций:

(A) все числа $n \in \mathbb{N}$ лежат в множестве M (то есть $M = \mathbb{N}$);

(B) конечный набор чисел $n \in \mathbb{N}$ не лежит в множестве M, а остальные числа $n \in \mathbb{N}$ (которых – бесконечное множество) лежат в M;

(C) бесконечный набор чисел $n \in \mathbb{N}$ не лежит в множестве M, и одновременно бесконечный набор чисел $n \in \mathbb{N}$ лежит в M (такое бывает, например, когда M – множество четных чисел);

(D) конечный набор чисел $n \in \mathbb{N}$ лежит в множестве M, а остальные числа $n \in \mathbb{N}$ (которых – бесконечное множество) не лежат в M;

(E) все числа $n \in \mathbb{N}$ не лежат в множестве M (то есть $M = \varnothing$).

Ответьте на вопросы:

1) в каких из этих случаев почти все числа $n \in \mathbb{N}$ лежат в множестве M?
2) в каких случаях почти все числа $n \in \mathbb{N}$ не лежат в множестве M?
3) в каких случаях не верно ни то, ни другое?

Ответы:

1) (A) и (B) (чисел, лежащих в M больше, чем остальных);
2) (D) и (E) (чисел, не лежащих в M больше, чем остальных);
3) (C).

- Говорят, что *почти все элементы последовательности $\{x_n\}$ принадлежат множеству E*, если для почти всех номеров $n \in \mathbb{N}$ соответствующие числа $\{x_n\}$ принадлежат множеству E.

$\diamond$ **3.2.15.** Проверим, что почти все элементы последовательности $\{x_n = \frac{1}{n}\}$ лежат в интервале $\left(0; \frac{1}{4}\right)$.

Действительно,

$$x_n \in \left(0; \frac{1}{4}\right) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{n} \in \left(0; \frac{1}{4}\right) \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} \frac{1}{n} < \frac{1}{4} \\ \boxed{\frac{1}{n} > 0} \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{n} < \frac{1}{4} \quad \Leftrightarrow \quad n > 4$$

это неравенство выполняется автоматически для любого $n \in \mathbb{N}$, поэтому его можно отбросить

а последнее неравенство в этой цепочке выполняется для почти всех $n \in \mathbb{N}$, по теореме Архимеда 3.2.1.

$\diamond$ **3.2.16.** Верно ли, что почти все элементы последовательности $\{x_n = \frac{1}{n}\}$ лежат в интервале $\left(\frac{1}{4}; \infty\right)$?

Нет, конечно, потому что

$$x_n \in \left(\frac{1}{4}; \infty\right) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{n} > \frac{1}{4} \quad \Leftrightarrow \quad n < 4$$

а последнее неравенство выполняется **не для почти всех** чисел $n \in \mathbb{N}$, а только для $n \in \{1, 2, 3\}$.

$\diamond$ **3.2.17.** Верно ли, что почти все элементы последовательности $\{x_n = (-1)^n\}$ лежат в интервале $(0;2)$?

Чтобы это понять, разберемся сначала для каких номеров $n\in\mathbb{N}$ числа x_n лежат в интервале $(0;2)$:

$$x_n\in(0;2) \quad\Leftrightarrow\quad (-1)^n\in(0;2) \quad\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases}(-1)^n>0\\ \boxed{(-1)^n<2}\end{cases} \quad\Leftrightarrow\quad (-1)^n>0$$

это неравенство выполняется автоматически для любого $n\in\mathbb{N}$, поэтому его можно отбросить

Последнее неравенство в этой цепочке выполняется **не для почти всех** чисел $n\in\mathbb{N}$ а только для четных: $n\in\{2,4,6,...\}$. Значит, соотношение $x_n\in(0;2)$ тоже выполняется **не для почти всех** чисел $n\in\mathbb{N}$.

◇ **3.2.18.** (a) Найдите какие-нибудь два числа α и β такие, чтобы почти все элементы последовательности $x_n=\frac{n-1}{n}$ лежали в интервале $(\alpha;\beta)$.

(b) Найдите все такие числа α и β, чтобы почти все элементы последовательности $x_n=\frac{n-1}{n}$ лежали в интервале $(\alpha;\beta)$.

Нарисуем на прямой первые несколько элементов нашей последовательности

Из рисунка видно, что, например, вне интервала $(\frac{1}{2};2)$ лежит только конечный набор чисел x_n. Отсюда следует

Ответ для пункта (a): можно взять, например, $\alpha=\frac{1}{2}$ и $\beta=2$.

Более того, если взять какие-нибудь другие числа α и β так чтобы $\alpha<1\leqslant\beta$, то начиная с какого-то номера все x_n будут лежать в интервале $(\alpha;\beta)$.

При этом ясно, что если $\alpha\geqslant1$ или $\beta<1$, то утверждение, что почти все числа x_n лежат в интервале $(\alpha;\beta)$ будет неверно. Поэтому ответ для второй половины задачи выглядит так

Ответ для пункта (b): $\alpha<1\leqslant\beta$.

◇ **3.2.19.** (a) Найдите какие-нибудь два числа α и β такие, чтобы почти все элементы последовательности $x_n=(-1)^n$ лежали в интервале $(\alpha;\beta)$.

(b) Найдите все такие числа α и β, чтобы почти все элементы последовательности $x_n=(-1)^n$ лежали в интервале $(\alpha;\beta)$.

Снова нарисуем на прямой первые несколько элементов нашей последовательности

Из рисунка видно, что, например, вне интервала $(-2;2)$ нет вообще никаких чисел x_n. Отсюда следует

Ответ для пункта (a): можно взять, например, $\alpha=-2$ и $\beta=2$.

И вообще, если взять какие-нибудь другие числа α и β так чтобы $\alpha<-1$ и $\beta>1$, то все x_n будут лежать в интервале $(\alpha;\beta)$.

Если же $\alpha\geqslant1$ или $\beta\leqslant1$, то утверждение, что почти все числа x_n лежат в интервале $(\alpha;\beta)$ будет неверно. Поэтому ответ для второй половины задачи выглядит так

Ответ для пункта (b): $\alpha<-1$ и $\beta>1$.

▷▷ **3.2.20.** Ничего не доказывая, но пользуясь интуицией, попробуйте сообразить, какие интервалы $(\alpha;\beta)$ содержат почти все элементы данной последовательности x_n. Опишите все такие интервалы для последовательностей

1) $x_n = (-1)^n + \frac{1}{n}$
(Ответ: $\alpha \leqslant -1$, $\beta > 1$)
2) $x_n = (-1)^n - \frac{1}{n}$
(Ответ: $\alpha < -1$, $\beta \geqslant 1$)
3) $x_n = (-1)^n \cdot n$
(Ответ: $\alpha = -\infty$, $\beta = \infty$)
4) $x_n = \frac{(-1)^n}{n} + \frac{1+(-1)^n}{2}$
(Ответ: $\alpha < 0$, $\beta > 1$)
5) $x_n = 2 + \frac{1+(-1)^n}{n}$
(Ответ: $\alpha < 2$, $\beta > 2$)
6) $x_n = 2 - \frac{1+(-1)^n}{n}$
(Ответ: $\alpha < 2$, $\beta > 2$)
7) $x_n = n^{(-1)^n}$
(Ответ: $\alpha \leqslant 0$, $\beta = \infty$)
8) $x_n = (-1)^n \cdot n^{(-1)^n - 1}$
(Ответ: $\alpha < 0$, $\beta > 1$)
9) $x_n = (-1)^n + n^{(-1)^n - 1}$
(Ответ: $\alpha \leqslant -1$, $\beta > 2$)
10) $x_n = n \cdot (1 + (-1)^n)$
(Ответ: $\alpha < 0$, $\beta = \infty$)
11) $x_n = \frac{2+(-1)^n}{2} - \frac{1}{n}$
(Ответ: $\alpha < \frac{1}{2}$, $\beta \geqslant \frac{3}{2}$)
12) $x_n = (-1)^n \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right)$
(Ответ: $\alpha \leqslant -1$, $\beta \geqslant 1$)
13) $x_n = (-1)^n \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)$
(Ответ: $\alpha < -1$, $\beta > 1$)
14) $x_n = (-1)^{n-1} \cdot \left(2 + \frac{3}{n}\right)$
(Ответ: $\alpha < -2$, $\beta > 2$)

Окрестность точки.

- *Окрестностью* точки $c \in \mathbb{R}$ называется всякий интервал с центром в точке c, то есть всякий интервал вида $(c - \varepsilon; c + \varepsilon)$. Число ε при этом называется *радиусом* окрестности $(c - \varepsilon; c + \varepsilon)$.

Предложение 3.2.2. *Всякая точка x произвольного интервала (a, b) содержится в нем вместе с некоторой своей окрестностью:*

$$x \in (a, b) \quad \Longrightarrow \quad \exists \varepsilon > 0 : \quad (x - \varepsilon; x + \varepsilon) \subseteq (a, b)$$

Доказательство. Положим

$$\varepsilon = \min\{b - x; x - a\}.$$

Тогда

$$\begin{cases} \varepsilon \leqslant b - x \\ \varepsilon \leqslant x - a \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \varepsilon \leqslant b - x \\ -\varepsilon \geqslant a - x \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x + \varepsilon \leqslant b \\ x - \varepsilon \geqslant a \end{cases} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \quad a \leqslant x - \varepsilon < x < x + \varepsilon \leqslant b \quad \Longrightarrow \quad x \in (x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subseteq (a, b)$$

□

Конечный предел последовательности.

- Точка $c \in \mathbb{R}$ называется *пределом последовательности* $\{x_n\}$, если любая ее окрестность $(c - \varepsilon; c + \varepsilon)$ содержит почти все элементы последовательности $\{x_n\}$. В этом случае пишут

$$\lim_{n \to \infty} x_n = c$$

или

$$x_n \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} c$$

и говорят, что *последовательность $\{x_n\}$ стремится к числу c*.
Если последовательность $\{x_n\}$ имеет предел (то есть стремится к какому-то числу c), то говорят, что *последовательность $\{x_n\}$ сходится* . Если же такого числа c не существует, то говорят, что *последовательность $\{x_n\}$ расходится* .

◇ **3.2.21.** Покажем, что

$$\lim_{n \to \infty} \frac{n - 1}{n} = 1$$

то есть что точка $c = 1$ является пределом последовательности $\{x_n = \frac{n-1}{n}\}$.

Действительно, возьмем какую-нибудь

окрестность $(1-\varepsilon;1+\varepsilon)$ точки $c=1$,

и поймем, что означает, что x_n лежит в $(1-\varepsilon;1+\varepsilon)$:

$$x_n \in (1-\varepsilon;1+\varepsilon) \quad\Leftrightarrow\quad 1-\varepsilon < x_n < 1+\varepsilon \quad\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x_n > 1-\varepsilon \\ x_n < 1+\varepsilon \end{cases} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases} \frac{n-1}{n} > 1-\varepsilon \\ \frac{n-1}{n} < 1+\varepsilon \end{cases} \quad\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} \frac{n-1}{n} - 1 > -\varepsilon \\ \frac{n-1}{n} - 1 < \varepsilon \end{cases} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases} -\frac{1}{n} > -\varepsilon \\ -\frac{1}{n} < \varepsilon \end{cases} \quad\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} \frac{1}{n} < \varepsilon \\ \boxed{-\frac{1}{n} < \varepsilon} \end{cases} \quad\Leftrightarrow\quad \frac{1}{n} < \varepsilon \quad\Leftrightarrow\quad n > \frac{1}{\varepsilon}$$

поскольку $\varepsilon > 0$,
это неравенство выполняется автоматически для любого $n \in \mathbb{N}$,
значит его можно отбросить

По теореме Архимеда 3.2.1, последнее неравенство выполняется для почти всех $n \in \mathbb{N}$. Это означает, что почти все числа x_n содержатся в интервале $(1-\varepsilon;1+\varepsilon)$.

Итак, мы получили, что любая окрестность $(1-\varepsilon;1+\varepsilon)$ точки c содержит почти все элементы последовательности $\{x_n = \frac{n-1}{n}\}$. Это как раз означает, что точка $c=1$ является пределом последовательности $\{x_n = \frac{n-1}{n}\}$.

◇ **3.2.22.** Покажем, что

$$1 \ne \lim_{n\to\infty} (-1)^n$$

то есть что число $c=1$ не является пределом последовательности $\{x_n = (-1)^n\}$.

Возьмем $\varepsilon = 1$ и рассмотрим соответствующую окрестность $(0;2)$ точки $c=1$. Тогда

$$x_n \in (0;2) \quad\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} 0 < (-1)^n \\ \boxed{(-1)^n < 2} \end{cases} \quad\Leftrightarrow\quad 0 < (-1)^n$$

это неравенство выполняется автоматически для любого $n \in \mathbb{N}$,
поэтому его можно отбросить

Последнее неравенство выполняется только для четных $n \in \mathbb{N}$.

Мы получили, что бесконечное множество элементов последовательности $\{x_n = (-1)^n\}$ не принадлежит окрестности $(0;2)$ точки $c=1$. Таким образом, будет неверно утверждать, что почти все $\{x_n = (-1)^n\}$ содержатся в окрестности $(0;2)$ точки $c=1$. Это означает, что $c=1$ не может быть пределом последовательности $\{x_n = (-1)^n\}$.

◇ **3.2.23.** Покажем, что

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n+3}{n+2} = 2$$

то есть что точка $c=2$ является пределом последовательности $\{x_n = \frac{2n+3}{n+2}\}$.

Возьмем какую-нибудь окрестность $(2-\varepsilon;2+\varepsilon)$ точки $c=2$

Тогда

$$x_n \in (2-\varepsilon;2+\varepsilon) \quad\Leftrightarrow\quad 2-\varepsilon < x_n < 2+\varepsilon \quad\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x_n > 2-\varepsilon \\ x_n < 2+\varepsilon \end{cases} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases} \frac{2n+3}{n+2} > 2-\varepsilon \\ \frac{2n+3}{n+2} < 2+\varepsilon \end{cases} \quad\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} \frac{2n+3}{n+2} - 2 > -\varepsilon \\ \frac{2n+3}{n+2} - 2 < \varepsilon \end{cases} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases} -\frac{1}{n+2} > -\varepsilon \\ -\frac{1}{n+2} < \varepsilon \end{cases} \quad\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} \frac{1}{n+2} < \varepsilon \\ \boxed{-\frac{1}{n+2} < \varepsilon} \end{cases} \quad\Leftrightarrow\quad \frac{1}{n+2} < \varepsilon \quad\Leftrightarrow$$

поскольку $\varepsilon > 0$,
это неравенство выполняется автоматически для любого $n \in \mathbb{N}$,
значит его можно отбросить

$$\Leftrightarrow \quad n+2 > \frac{1}{\varepsilon} \quad\Leftrightarrow\quad n > \frac{1}{\varepsilon} - 2$$

По теореме Архимеда 3.2.1, последнее неравенство выполняется для почти всех $n \in \mathbb{N}$. Это означает, что почти все числа x_n содержатся в интервале $(2-\varepsilon;2+\varepsilon)$.

Итак, мы получили, что любая окрестность $(2-\varepsilon;2+\varepsilon)$ точки $c=2$ содержит почти все элементы последовательности $\{x_n = \frac{2n+3}{n+2}\}$. Это означает, что точка $c=2$ является пределом последовательности $\{x_n = \frac{2n+3}{n+2}\}$.

◇ **3.2.24.** Покажем, что

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0$$

то есть что точка $c=0$ является пределом последовательности $\{x_n = \frac{(-1)^n}{n}\}$.

Возьмем какую-нибудь окрестность $(-\varepsilon;\varepsilon)$ точки $c = 0$

и покажем, что почти все числа $x_n = \frac{(-1)^n}{n}$ содержатся в интервале $(-\varepsilon;\varepsilon)$. Действительно,

$$x_n \in (-\varepsilon;\varepsilon) \quad \Leftrightarrow \quad (3.1.13) \quad \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \quad |x_n| < \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad \left|\frac{(-1)^n}{n}\right| < \varepsilon \quad \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \quad (3.1.7), (3.1.8), (3.1.5) \quad \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \quad \frac{|-1|^n}{n} < \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{n} < \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad n > \frac{1}{\varepsilon}$$

По теореме Архимеда 3.2.1, последнее неравенство выполняется для почти всех $n \in \mathbb{N}$. Это означает, что почти все числа x_n содержатся в окрестности $(-\varepsilon;\varepsilon)$ точки $c = 0$. Таким образом, точка $c = 0$ действительно является пределом последовательности $\{x_n = \frac{2n+3}{n+2}\}$.

◇ **3.2.25.** Покажем, что

$$0 \ne \lim_{n\to\infty} n^{(-1)^n}$$

то есть что точка $c = 0$ не является пределом последовательности $\{x_n = n^{(-1)^n}\}$.

Возьмем интервал $(-1;1)$, являющийся окрестностью точки $c = 0$ (при $\varepsilon = 1$).

и посмотрим, что будет означать условие $x_n \in (-1;1)$.

Для этого нужно будет рассмотреть отдельно четные и нечетные номера n. Тогда условие $x_n \in (-1;1)$ распадется в совокупность двух систем:

$$x_n \in (-1;1) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} -1 < x_n \\ x_n < 1 \end{cases} \quad \Leftrightarrow$$

поскольку всегда $n^{(-1)^n} > 0$,
это неравенство выполняется автоматически для любого $n \in \mathbb{N}$,
значит его можно отбросить

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} \boxed{-1 < n^{(-1)^n}} \\ n^{(-1)^n} < 1 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad n^{(-1)^n} < 1 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{c} n \text{ – четное: } n = 2k,\ k \in \mathbb{N} \\ \text{тогда } (-1)^n = (-1)^{2k} = 1 \\ \text{и при подстановке получается:} \\ (2k)^1 < 1 \end{array}\right\} \\ \left\{\begin{array}{c} n \text{ – нечетное: } n = 2k-1,\ k \in \mathbb{N} \\ \text{тогда } (-1)^n = (-1)^{2k} = -1 \\ \text{и при подстановке получается:} \\ (2k-1)^{-1} < 1 \end{array}\right\} \end{array}\right] \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{c} n = 2k \\ k \in \mathbb{N} \\ 2k < 1 \end{array}\right\} \\ \left\{\begin{array}{c} n = 2k-1 \\ k \in \mathbb{N} \\ \frac{1}{2k-1} < 1 \end{array}\right\} \end{array}\right] \quad \Leftrightarrow$$

эта система не имеет решений,
поэтому ее можно выбросить из совокупности

$$\Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} \boxed{\left\{\begin{array}{c} n = 2k \\ k \in \mathbb{N} \\ k < \frac{1}{2} \end{array}\right\}} \\ \left\{\begin{array}{c} n = 2k-1 \\ k \in \mathbb{N} \\ 2k-1 > 1 \end{array}\right\} \end{array}\right] \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{c} n = 2k-1 \\ k \in \mathbb{N} \\ k > 1 \end{array}\right\} \quad \Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{c} n = 2k-1 \\ k \in \mathbb{N} \\ k > 1 \end{array}\right\}$$

Мы видим, что условие $x_n \in (-1;1)$ выполняется только для индексов $n = 3, 5, 7....$ Таким образом, бесконечное множество чисел x_n (с четными индексами n) не содержатся в окрестности $(-1;1)$ точки $c = 0$. Значит эта точка не может быть пределом последовательности $\{x_n = n^{(-1)^n}\}$.

Теорема 3.2.3 (о единственности предела)**.** *Если*

$$x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} a$$

и

$$x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} b$$

то

$$a = b$$

Доказательство. Предположим, что $a \neq b$, например $a < b$. Возьмем $\varepsilon = \frac{b-a}{2}$, тогда мы получим, что почти все x_n лежат в двух непересекающихся интервалах – в $(a-\varepsilon; a+\varepsilon)$ и в $(b-\varepsilon; b+\varepsilon)$:

$$\underbrace{a-\varepsilon < \overset{\substack{x_n\\ \downarrow \ \overset{n}{\underset{\infty}{\downarrow}}}}{a} < a+\varepsilon}_{\substack{\Downarrow\\ x_n\in(a-\varepsilon,a+\varepsilon)\\ \text{для почти всех } n\in\mathbb{N}}} = \underbrace{b-\varepsilon < \overset{\substack{x_n\\ \downarrow \ \overset{n}{\underset{\infty}{\downarrow}}}}{b} < b+\varepsilon}_{\substack{\Downarrow\\ x_n\in(b-\varepsilon,b+\varepsilon)\\ \text{для почти всех } n\in\mathbb{N}}}$$

Но это невозможно: если почти все x_n лежат в $(a-\varepsilon; a+\varepsilon)$, то вне $(a-\varepsilon; a+\varepsilon)$ должен лежать лишь конечный набор чисел x_n. В частности, в $(b-\varepsilon; b+\varepsilon)$ тоже должен лежать лишь конечный набор чисел x_n. $\square$

$\triangleright\triangleright$ **3.2.26.** Доказать что

1) $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^3} = 0$,
2) $\lim_{n\to\infty}\frac{n-3}{2n+5} = \frac{1}{2}$,
3) $\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+1}{n^2+2} = 1$,
4) $\lim_{n\to\infty}\frac{1-n}{n+1} = -1$,
5) $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+2^n} = 0$,
6) $1 \neq \lim_{n\to\infty}(-1)^n$,
7) $0 \neq \lim_{n\to\infty}(-1)^n \cdot n$.

Бесконечный предел последовательности.

- Говорят, что числовая последовательность $\{x_n\}$
  - *стремится к* $+\infty$
    $$x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$$
    если любой интервал $(E; +\infty)$ содержит почти все элементы $\{x_n\}$.
  - *стремится к* $-\infty$
    $$x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} -\infty$$
    если любой интервал $(-\infty; E)$ содержит почти все элементы $\{x_n\}$.
  - *стремится к* ∞
    $$x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$$
    если всякое множество $(-\infty; -E)\cup(E; +\infty)$ содержит почти все элементы $\{x_n\}$; нетрудно проверить, что это равносильно тому, что последовательность из модулей $\{|x_n|\}$ стремится к $+\infty$:
    $$|x_n| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$$

$\diamond$ **3.2.27.** Покажем, что

$$\lim_{n\to\infty} n^2 = +\infty$$

Возьмем какой-нибудь интервал $(E; +\infty)$

Тогда

$$x_n \in (E; +\infty) \quad\Leftrightarrow\quad x_n > E \quad\Leftrightarrow\quad n^2 > E$$

Заметим далее такую цепочку:

$$n > E \text{ верно для почти всех } n \in \mathbb{N}$$

по теореме Архимеда 3.2.1

$$\Downarrow$$

$$n^2 \geqslant n > E \text{ верно для почти всех } n \in \mathbb{N}$$

$$\Downarrow$$

$$n^2 > E \text{ верно для почти всех } n \in \mathbb{N}$$

◇ **3.2.28.** Покажем, что последовательность $\{x_n = n^{(-1)^n}\}$ не стремится к бесконечности:

$$n^{(-1)^n} \underset{n\to\infty}{\not\longrightarrow} \infty$$

Возьмем множество $(-\infty;-1)\cup(1;+\infty)$ и рассмотрим нечетные номера n, то есть числа вида $n = 2k-1$, где $k \in \mathbb{N}$. Тогда $(-1)^n = (-1)^{2k-1} = -1$, и

$$x_n \in (-\infty;-1)\cup(1;+\infty) \quad \Leftrightarrow \quad |x_n| > 1 \quad \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \quad n^{(-1)^n} > 1 \quad \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} \text{применяем равенства} \\ n = 2k-1, \\ (-1)^n = (-1)^{2k-1} = -1 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \quad (2k-1)^{-1} > 1 \quad \Leftrightarrow \quad 2k-1 < 1 \quad \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \quad k < 1$$

Последнее неравенство не выполняется ни при каком $k = 1,2,3...$ Это означает, что все числа x_{2k-1} не содержатся в множестве $(-\infty;-1)\cup(1;+\infty)$. Таким образом, бесконечное множество чисел x_n не содержатся в "окрестности бесконечности" $(-\infty;-1)\cup(1;+\infty)$. Значит, бесконечность не может быть пределом последовательности $\{x_n = n^{(-1)^n}\}$.

▷▷ **3.2.29.** Доказать что

1) $\lim_{n\to\infty} \frac{4n+1}{3n-2} \neq +\infty$;
2) $\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{1-2n} = -\infty$;
3) $\lim_{n\to\infty} (-1)^n \cdot n = \infty$.

Бесконечно малые и бесконечно большие последовательности.

- Последовательность $\{x_n\}$ называется *бесконечно малой* , если выполняются следующие равносильные условия:

  (i) $\{x_n\}$ стремится к нулю:
  $$x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

  (ii) $\{x_n\}$ по модулю стремится к нулю:
  $$|x_n| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

Доказательство. Здесь необходимо проверить, что условия (i) и (ii) действительно равносильны. Для этого перепишем свойство модуля 2^0 пункта 0.6, подставив вместо x последовательность $\{x_n\}$:

$$x_n \in (-\varepsilon;+\varepsilon) \quad \Longleftrightarrow \quad |x_n| \in (-\varepsilon;+\varepsilon)$$

После этого получается следующая цепочка равносильностей:

$$x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$
$$\Updownarrow$$
$$\text{для всякого } \varepsilon > 0 \text{ соотношение } x_n \in (-\varepsilon;+\varepsilon) \text{ выполняется для почти всех } n \in \mathbb{N}$$
$$\Updownarrow$$
$$\text{для всякого } \varepsilon > 0 \text{ соотношение } |x_n| \in (-\varepsilon;+\varepsilon) \text{ выполняется для почти всех } n \in \mathbb{N}$$
$$\Updownarrow$$
$$|x_n| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

□

- Последовательность $\{x_n\}$ называется *бесконечно большой* , если выполняются следующие равносильные условия:

  (i) $\{x_n\}$ стремится к бесконечности

$$x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$$

  (ii) $\{x_n\}$ по модулю стремится к бесконечности

$$|x_n| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$$

Доказательство равносильности условий (i) и (ii).

$$x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$$

$$\Updownarrow$$

для всякого $\varepsilon > 0$ соотношение $x_n \in (-\infty; -E) \cup (E : +\infty)$ выполняется для почти всех $n \in \mathbb{N}$

$$\Updownarrow \quad \text{(3.1.14)}$$

для всякого $\varepsilon > 0$ соотношение $|x_n| \in (-\infty; -E) \cup (E : +\infty)$ выполняется для почти всех $n \in \mathbb{N}$

$$\Updownarrow$$

$$|x_n| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$$

$\square$

Теорема 3.2.4 (о связи между бесконечно малыми и бесконечно большими последовательностями)**.** *Пусть $x_n \neq 0$. Тогда последовательность $\{x_n\}$ бесконечно малая тогда и только тогда, когда последовательность $\{\frac{1}{x_n}\}$ бесконечно большая.*

Доказательство.

$$\{x_n\} \text{ – бесконечно малая}$$

$$\Updownarrow$$

$$x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

$$\Updownarrow$$

$$\forall \varepsilon > 0 \qquad |x_n| < \varepsilon \quad \text{– верно для почти всех } n \in \mathbb{N}$$

$$\Updownarrow$$

$$\forall \varepsilon > 0 \qquad \left|\frac{1}{x_n}\right| > \frac{1}{\varepsilon} \quad \text{– верно для почти всех } n \in \mathbb{N}$$

$$\Updownarrow$$

$$\forall E > 0 \qquad \left|\frac{1}{x_n}\right| > E \quad \text{– верно для почти всех } n \in \mathbb{N}$$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{1}{x_n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$$

$$\Updownarrow$$

$$\left\{\frac{1}{x_n}\right\} \text{ – бесконечно большая.}$$

$\square$

Теорема 3.2.5 (о связи между бесконечно малыми последовательностями и конечными пределами). *Последовательность* $\{x_n\}$ *стремится к числу* a

$$x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} a$$

тогда и только тогда, когда она имеет вид

$$x_n = a + \alpha_n$$

где $\{\alpha_n\}$ *– некоторая бесконечно малая последовательность.*

Доказательство. Положим

$$\alpha_n = x_n - a$$

и заметим сразу, что

$$x_n \in (a-\varepsilon; a+\varepsilon) \iff a-\varepsilon < x_n < a+\varepsilon \iff \begin{cases} a-\varepsilon < x_n \\ x_n < a+\varepsilon \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} -\varepsilon < x_n - a \\ x_n - a < \varepsilon \end{cases} \iff -\varepsilon < x_n - a < \varepsilon \iff -\varepsilon < \alpha_n < \varepsilon \iff \alpha_n \in (-\varepsilon;\varepsilon)$$

поэтому окрестность $(a-\varepsilon; a+\varepsilon)$ точки a содержит почти все элементы последовательности x_n в том и только в том случае, если окрестность $(-\varepsilon;\varepsilon)$ точки 0 содержит почти все элементы последовательности α_n.

Отсюда следует, что если $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} a$ (то есть любая окрестность $(a-\varepsilon; a+\varepsilon)$ точки a содержит почти все элементы последовательности x_n), то это равносильно тому, что $\alpha_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ (то есть тому, что любая окрестность $(-\varepsilon;\varepsilon)$ точки 0 содержит почти все элементы последовательности α_n). □

Свойства бесконечно малых последовательностей

1° Если $\{\alpha_n\}$ – бесконечно малая последовательность, то для любого числа $C \in \mathbb{R}$ последовательность $\{C\cdot\alpha_n\}$ – тоже бесконечно малая.

2° Если $\{\alpha_n\}$ и $\{\beta_n\}$ – бесконечно малые последовательности, то $\{\alpha_n+\beta_n\}$ и $\{\alpha_n-\beta_n\}$ – тоже бесконечно малые последовательности.

3° Если $\{\alpha_n\}$ и $\{\beta_n\}$ – бесконечно малые последовательности, то $\{\alpha_n\cdot\beta_n\}$ – тоже бесконечно малая последовательность.

Доказательство. 1. Пусть $\{\alpha_n\}$ – бесконечно малая последовательность. Тогда если $C=0$, то

$$C\cdot\alpha_n = 0 \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

и поэтому $\{C\cdot\alpha_n\}$ – тоже бесконечно малая. Рассмотрим случай, когда $C\neq 0$. Тогда:

$$\{\alpha_n\} \text{ – бесконечно малая}$$

$$\Updownarrow$$

$$\alpha_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

$$\Updownarrow$$

$$\forall\varepsilon > o \qquad |\alpha_n| < \varepsilon \quad \text{– верно для почти всех } n\in\mathbb{N}$$

$$\Updownarrow$$

$$\forall\varepsilon > o \qquad |\alpha_n| < \frac{\varepsilon}{|C|} \quad \text{– верно для почти всех } n\in\mathbb{N}$$

$$\Updownarrow$$

$$\forall\varepsilon > o \qquad |C\cdot\alpha_n| < \varepsilon \quad \text{– верно для почти всех } n\in\mathbb{N}$$

$$\Updownarrow$$

$$\{C \cdot \alpha_n\} \text{ – бесконечно малая}$$

2. Пусть $\{\alpha_n\}$ и $\{\beta_n\}$ – бесконечно малые последовательности, покажем что тогда $\{\alpha_n + \beta_n\}$ – тоже бесконечно малая последовательность:

$$\{\alpha_n\} \text{ и } \{\beta_n\} \text{ – бесконечно малые}$$

$$\Downarrow$$

$$\alpha_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0, \qquad \beta_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

$$\Downarrow$$

$$\forall \varepsilon > o \qquad |\alpha_n| < \varepsilon \quad \& \quad |\beta_n| < \varepsilon \quad \text{– верно для почти всех } n \in \mathbb{N}$$

$$\Downarrow$$

$$\forall \varepsilon > o \qquad |\alpha_n| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \& \quad |\beta_n| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{– верно для почти всех } n \in \mathbb{N}$$

$$\Downarrow$$

$$\forall \varepsilon > o \qquad |\alpha_n + \beta_n| \leqslant |\alpha_n| + |\beta_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{– верно для почти всех } n \in \mathbb{N}$$

$$\Downarrow$$

$$\{\alpha_n + \beta_n\} \text{ – бесконечно малая}$$

Точно так же рассматривается случай $\{\alpha_n - \beta_n\}$.

3. Пусть снова $\{\alpha_n\}$ и $\{\beta_n\}$ – бесконечно малые последовательности, покажем что $\{\alpha_n \cdot \beta_n\}$ – тоже бесконечно малая последовательность:

$$\{\alpha_n\} \text{ и } \{\beta_n\} \text{ – бесконечно малые}$$

$$\Downarrow$$

$$\alpha_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0, \qquad \beta_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

$$\Downarrow$$

$$\forall \varepsilon > 0 \qquad |\alpha_n| < \varepsilon \quad \& \quad |\beta_n| < \varepsilon \quad \text{– верно для почти всех } n \in \mathbb{N}$$

$$\Downarrow$$

$$\forall \varepsilon \in (0;1) \qquad |\alpha_n| < \varepsilon \quad \& \quad |\beta_n| < \varepsilon \quad \text{– верно для почти всех } n \in \mathbb{N}$$

$$\Downarrow$$

$$\forall \varepsilon \in (0;1) \qquad |\alpha_n \cdot \beta_n| = |\alpha_n| \cdot |\beta_n| < \varepsilon^2 < \varepsilon \quad \text{– верно для почти всех } n \in \mathbb{N}$$

$$\Downarrow$$

$$\forall \varepsilon > o \qquad |\alpha_n \cdot \beta_n| < \varepsilon \quad \text{– верно для почти всех } n \in \mathbb{N}$$

$$\Downarrow$$

$$\{\alpha_n \cdot \beta_n\} \text{ – бесконечно малая.}$$

□

Свойства бесконечно больших последовательностей

1° Если $C \neq 0$ и $y_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$, то $C \cdot y_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$.

2° Если $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} C \neq \infty$, а $y_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$, то $x_n + y_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$.

3° Если $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} C \neq 0$, а $y_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$, то $x_n \cdot y_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$.

4° Если $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} C \neq \infty$, а $y_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$, то $\frac{y_n}{x_n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$.

5° Если $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$ и $|x_n| \leqslant y_n$, то $y_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$.

Доказательство. Мы докажем только второе из этих свойств (остальные доказываются аналогично):

$$\underbrace{\begin{matrix} x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} C \ne \infty \\ \Downarrow \\ |x_n| - |C| \leqslant (3.1.11) \leqslant \underbrace{|x_n - C| < 1}_{\substack{\uparrow \\ \text{верно для почти всех } n\in\mathbb{N}}} \\ \Downarrow \\ \underbrace{|x_n| < |C| + 1}_{\substack{\uparrow \\ \text{верно для почти всех } n\in\mathbb{N}}} \end{matrix} \qquad \begin{matrix} y_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty \\ \Downarrow \\ \forall D > 0 \quad \underbrace{|y_n| > D + |C| + 1}_{\substack{\uparrow \\ \text{верно для почти всех } n\in\mathbb{N}}} \end{matrix}}$$

$$\Downarrow$$

$$\forall D > 0 \qquad |y_n + x_n| \geqslant (3.1.10) \geqslant \overbrace{|y_n|}^{\substack{D+|C|+1 \\ \wedge}} \underbrace{-|x_n|}_{\substack{\vee \\ -|C|-1}} > (D+|C|+1) - |C| - 1 = D \quad \text{– верно для почти всех } n \in \mathbb{N}$$

$$\Downarrow$$

$$x_n + y_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$$

□

◇ **3.2.30.** Для любого $\alpha \ne 0$ последовательность $\{\alpha \cdot n\}_{n\in\mathbb{N}}$ является бесконечно большой, точнее:

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} n \cdot \alpha = \begin{cases} +\infty, & \text{если } \alpha > 0 \\ -\infty, & \text{если } \alpha < 0 \end{cases}} \qquad (3.2.42)$$

Доказательство. 1. Пусть сначала $\alpha > 0$. Тогда для любого $E > 0$ условие

$$n \cdot \alpha > E$$

эквивалентно условию

$$n > \frac{E}{\alpha}$$

которое по теореме Архимеда 3.2.1 выполняется для почти всех n. Это означает, что

$$n \cdot \alpha \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$$

2. Если же $\alpha < 0$, то для любого $E > 0$ условие

$$n \cdot \alpha < -E$$

эквивалентно условию

$$n > -\frac{E}{\alpha}$$

и опять по теореме Архимеда 3.2.1 это выполняется для почти всех n. Это означает, что

$$n \cdot \alpha \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} -\infty$$

□

◇ **3.2.31.** Последовательность $\{n^k\}_{n\in\mathbb{N}}$ является

– бесконечно малой, если $k < 0$;

– бесконечно большой, если $k > 0$.

Точнее,

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} n^k = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad k < 0 \\ +\infty, & \text{если} \quad k > 0 \end{cases}} \qquad (3.2.43)$$

Доказательство. 1. Пусть $k > 0$. Применяя неравенство Бернулли (2.2.242), мы получим

$$n^k = (1 + (n-1))^k \overset{(2.2.242)}{\geqslant}$$
$$\geqslant 1 + k \cdot (n-1) = 1 - k + k \cdot n \underset{n\to\infty}{\overset{(3.2.42)}{\longrightarrow}} +\infty$$

$$\Downarrow \quad 5^\circ \text{ на с.214}$$

$$n^k \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$$

2. Пусть $k < 0$. Тогда $-k > 0$, и, по уже доказанному,

$$n^{-k} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$$
$$\Downarrow \quad \text{теорема 3.2.4}$$
$$n^k = \frac{1}{n^{-k}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

□

◇ **3.2.32.** Последовательность a^n является

– бесконечно малой, если $|a| < 1$;

– бесконечно большой, если $|a| > 1$.

То есть,

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} a^n = \begin{cases}\infty, & \text{если } |a|>1\\ 0, & \text{если } |a|<1\end{cases}} \qquad (3.2.44)$$

Доказательство. 1. Если $|a|>1$, то это означает либо $a>1$, либо $a<-1$. Рассмотрим каждый из этих случаев отдельно. Если $a>1$, то применяя неравенство Бернулли (2.2.242), мы получим

$$|a|^n = a^n = (1+(a-1))^n \overset{(2.2.242)}{\geqslant} 1+n\cdot(a-1) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$$

$$\Downarrow \quad 5^\circ \text{ на с.214}$$

$$a^n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$$

Если же $a<-1$, то $|a|=-a>1$, и по уже доказанному,

$$|a|^n = (-a)^n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$$

2. Пусть наоборот, $|a|<1$. Тогда $\left|\frac{1}{a}\right| = \frac{1}{|a|} > 1$, и мы получаем

$$\frac{1}{|a|^n} = \left|\frac{1}{a}\right|^n \overset{\text{уже доказано}}{\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}} \infty$$

$$\Downarrow \quad \text{теорема 3.2.4}$$

$$|a|^n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

□

▷ **3.2.33.** Какие из последовательностей являются бесконечно малыми, а какие – бесконечно большими?

1) $x_n = \frac{1}{n}$,
2) $x_n = \frac{1}{n^2}$,
3) $x_n = n$,
4) $x_n = (-1)^n \cdot n$,
5) $x_n = \frac{(-1)^n}{n}$,
7) $x_n = n^2$.

Арифметические операции с пределами. Следующие свойства пределов связаны с арифметическими операциями.

1^0. *Если $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} a$, то для всякого числа $C\in\mathbb{R}$ справедливо $C\cdot x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} C\cdot a$.*

2^0. *Если $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} a$ и $y_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} b$, то $x_n+y_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} a+b$ и $x_n-y_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} a-b$.*

3^0. *Если $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} a$ и $y_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} b$, то $x_n\cdot y_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} a\cdot b$.*

4^0. *Если $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} a$ и $y_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} b$, причем $a\neq 0$ и $x_n\neq 0$ (при любом n), то $\frac{y_n}{x_n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{b}{a}$.*

Доказательство свойств 1^0-3^0. 1. Свойство 1^0 доказывается такой логической цепочкой:

$$x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} a$$

$$\Downarrow \quad \text{теорема 3.2.5}$$

$$x_n = a + \underbrace{\alpha_n}_{\substack{\downarrow\ \overset{n}{\downarrow}\\ 0\quad \infty}}$$

$$\Downarrow$$

$$C\cdot x_n = C\cdot a + \underbrace{C\cdot\alpha_n}_{\substack{\downarrow\ \overset{n}{\downarrow}\\ 0\quad \infty}} \quad (\text{свойство } 1^0 \text{ на с.213})$$

$$\Downarrow \quad \text{теорема 3.2.5}$$

$$C\cdot x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} C\cdot a$$

2. Свойство 2^0:

$$x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} a, \qquad y_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} b$$

$$\Downarrow \quad \text{теорема 3.2.5}$$

$$x_n = a + \underbrace{\alpha_n}_{\substack{\downarrow\ \overset{n}{\underset{\infty}{\downarrow}} \\ 0}}, \qquad y_n = b + \underbrace{\beta_n}_{\substack{\downarrow\ \overset{n}{\underset{\infty}{\downarrow}} \\ 0}}$$

$$\Downarrow$$

$$x_n + y_n = a + b + \underbrace{\alpha_n + \beta_n}_{\substack{\downarrow\ \overset{n}{\underset{\infty}{\downarrow}}\ \text{(свойство } 2^0 \text{ на с.213)} \\ 0}}$$

$$\Downarrow \quad \text{теорема 3.2.5}$$

$$x_n + y_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} a + b$$

И точно так же для $x_n - y_n$.

3. Свойство 3^0:

$$x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} a, \qquad y_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} b$$

$$\Downarrow \quad \text{теорема 3.2.5}$$

$$x_n = a + \underbrace{\alpha_n}_{\substack{\downarrow\ \overset{n}{\underset{\infty}{\downarrow}} \\ 0}}, \qquad y_n = b + \underbrace{\beta_n}_{\substack{\downarrow\ \overset{n}{\underset{\infty}{\downarrow}} \\ 0}}$$

$$\Downarrow$$

$$x_n \cdot y_n = a \cdot b + \underbrace{\underbrace{\alpha_n \cdot b}_{\substack{\downarrow\ \overset{n}{\underset{\infty}{\downarrow}} \\ 0 \\ \left(\substack{\text{свойство } 1^0 \\ \text{на с.213}}\right)}} + \overbrace{a \cdot \beta_n}^{\substack{\left(\substack{\text{свойство } 1^0 \\ \text{на с.213}}\right) \\ 0 \\ \uparrow\ \overset{\infty}{\underset{n}{\uparrow}}}} + \underbrace{\alpha_n \cdot \beta_n}_{\substack{\downarrow\ \overset{n}{\underset{\infty}{\downarrow}} \\ 0 \\ \left(\substack{\text{свойство } 3^0 \\ \text{на с.213}}\right)}}}_{\substack{\downarrow\ \overset{n}{\underset{\infty}{\downarrow}}\ \text{(свойство } 2^0 \text{ на с.213)} \\ 0}}$$

$$\Downarrow \quad \text{теорема 3.2.5}$$

$$x_n \cdot y_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} a \cdot b$$

□

Для доказательства последнего свойства нам понадобится следующая

Лемма 3.2.6. *Если последовательность $\{x_n\}$ стремится к числу a, причем $x_n \ne 0$ и $a \ne 0$, то последовательность $\{\frac{1}{x_n}\}$ стремится к числу $\frac{1}{a}$:*

$$x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} a \quad (x_n \ne 0 \quad \& \quad a \ne 0) \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{x_n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{a}$$

Доказательство. По условию, $a \ne 0$, значит либо $a < 0$, либо $a > 0$.

1. Рассмотрим сначала случай, когда $a > 0$. Тогда в силу (2.1.29), $\frac{1}{a} > 0$. Выберем произвольное ε такое, что

$$0 < \varepsilon < \frac{1}{a}$$

Тогда

$$\varepsilon \cdot a > 0 > -\varepsilon \cdot a$$

$$\Downarrow$$

$$1 + \varepsilon \cdot a > 1 > 1 - \varepsilon \cdot a$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{1}{1+\varepsilon\cdot a} < 1 < \frac{1}{1-\varepsilon\cdot a}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{a}{1+\varepsilon\cdot a} < a < \frac{a}{1-\varepsilon\cdot a}$$

$$\Downarrow \text{ предложение 3.2.2}$$

$$\exists\delta>0: \qquad \frac{a}{1+\varepsilon\cdot a} < a-\delta < a < a+\delta < \frac{a}{1-\varepsilon\cdot a}$$

Запомним это число δ и заметим теперь цепочку:

$$x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} a$$

$$\Downarrow$$

$$x_n\in(a-\delta,a+\delta) \quad \text{– выполняется для почти всех } n\in\mathbb{N}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{a}{1+\varepsilon\cdot a} < a-\delta < x_n < a+\delta < \frac{a}{1-\varepsilon\cdot a} \quad \text{– выполняется для почти всех } n\in\mathbb{N}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{a}{1+\varepsilon\cdot a} < x_n < \frac{a}{1-\varepsilon\cdot a} \quad \text{– выполняется для почти всех } n\in\mathbb{N}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{1+\varepsilon\cdot a}{a} > \frac{1}{x_n} > \frac{1-\varepsilon\cdot a}{a} \quad \text{– выполняется для почти всех } n\in\mathbb{N}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{1}{a}+\varepsilon > \frac{1}{x_n} > \frac{1}{a}-\varepsilon \quad \text{– выполняется для почти всех } n\in\mathbb{N}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{1}{x_n}\in\left(\frac{1}{a}-\varepsilon,\frac{1}{a}+\varepsilon\right) \quad \text{– выполняется для почти всех } n\in\mathbb{N}$$

Мы получили, что любая “маленькая” окрестность $\left(\frac{1}{a}-\varepsilon;\frac{1}{a}+\varepsilon\right)$ точки $\frac{1}{a}$ (радиуса $\varepsilon<\frac{1}{a}$) содержит почти все элементы последовательности $\frac{1}{x_n}$. Отсюда следует, что любая “большая” окрестность $\left(\frac{1}{a}-\varepsilon;\frac{1}{a}+\varepsilon\right)$ точки $\frac{1}{a}$ (радиуса $\varepsilon\geqslant\frac{1}{a}$) тоже содержит почти все элементы последовательности $\frac{1}{x_n}$ (потому что в ней можно выбрать какую-нибудь “маленькую” окрестность, которая будет содержать почти все $\frac{1}{x_n}$). Вместе это означает, что $\frac{1}{x_n}\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}\frac{1}{a}$.

2. Мы доказали нашу лемму для случая, когда $a>0$. Рассмотрим теперь случай $a<0$. Тогда будет по уже доказанному свойству 1^0 с.216 последовательность $y_n=-x_n$ стремиться к числу $-a>0$. Значит, в силу уже доказанного в нашей лемме,

$$\frac{1}{y_n}\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}\frac{1}{-a}$$

откуда опять по свойству 1^0 с.216,

$$\frac{1}{x_n}=-\frac{1}{y_n}\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}-\frac{1}{-a}=\frac{1}{a}$$

$\square$

Доказательство свойства 4^0.

$$\underbrace{\begin{array}{c} \overset{0}{\not\Downarrow} \quad \overset{0}{\not\Downarrow} \\ x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} a, \qquad y_n\underset{n\to\infty}{\longrightarrow} b \\ \text{лемма 3.2.6} \Downarrow \\ \frac{1}{x_n}\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}\frac{1}{a} \end{array}}$$

$$\Downarrow \text{ свойство } 3^0 \text{ на с.216}$$

$$\frac{y_n}{x_n}=\frac{1}{x_n}\cdot y_n\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}\frac{1}{a}\cdot b=\frac{b}{a}$$

$\square$

Ограниченные последовательности. Последовательность $\{x_n\}$ называется *ограниченной*, если множество чисел $X = \{x_n\}$ ограничено (сверху и снизу), то есть существуют такие числа C, D, что для любого $n \in \mathbb{N}$ выполняется

$$C \leqslant x_n \leqslant D$$

◇ **3.2.34.** Проверьте, будут ли следующие последовательности ограничены?

$$x_n = (-1)^n,\ x_n = \frac{n+1}{n},$$

$$x_n = \frac{n^2+1}{n},\ x_n = \left\{\frac{n^2+1}{n}\right\},$$

Какие из них сходятся (то есть имеют конечный предел)?

Теорема 3.2.7 (об ограниченности сходящейся последовательности)**.** *Всякая сходящаяся последовательность ограничена.*

Свойства ограниченных последовательностей

$1^{\circ\circ}$ Если $\{x_n\}$ – ограниченная последовательность, а $\{y_n\}$ – бесконечно малая последовательность, то $\{x_n \cdot y_n\}$ – бесконечно малая последовательность.

$2^{\circ\circ}$ Если $\{x_n\}$ – ограниченная последовательность, а $\{y_n\}$ – бесконечно большая последовательность, то $\{\frac{x_n}{y_n}\}$ – бесконечно малая последовательность.

$3^{\circ\circ}$ Если $\{x_n\}$ – ограниченная последовательность, а $\{y_n\}$ – бесконечно большая последовательность, то $\{x_n + y_n\}$ – бесконечно большая последовательность.

◇ **3.2.35.** Найти предел

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{n}$$

Поскольку последовательность в числителе ($x_n = (-1)^n$) ограничена, а последовательность в знаменателе ($y_n = n$) бесконечно большая, по свойству 2^{00} дробь $\frac{x_n}{y_n} = \frac{(-1)^n}{n}$ должна быть бесконечно малой, то есть

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0$$

▷▷ **3.2.36.** Найдите пределы

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left\{\frac{n^3}{n+1}\right\}}{n},$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n+5}{n+\left\{n+\frac{1}{2}\right\}},$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n+\left\{\frac{n^2+n+1}{n+2}\right\}}{n-\left\{\frac{n^3+5}{n+5}\right\}}$$

Вычисление пределов простейших последовательностей. Теперь, когда доказаны главные свойства сходящихся последовательностей, мы, наконец, можем научиться вычислять простейшие пределы. Для этого полезно переформулировать сказанное выше в виде следующей серии формул.

Это, во-первых, “арифметические формулы”:

$$\lim_{n\to\infty}(x_n + y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n + \lim_{n\to\infty} y_n \tag{3.2.45}$$

$$\lim_{n\to\infty}(x_n - y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n - \lim_{n\to\infty} y_n \tag{3.2.46}$$

$$\lim_{n\to\infty}(C \cdot x_n) = C \cdot \lim_{n\to\infty} x_n \tag{3.2.47}$$

$$\lim_{n\to\infty}(x_n\cdot y_n)=\lim_{n\to\infty}x_n\cdot\lim_{n\to\infty}y_n \tag{3.2.48}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{y_n}{x_n}=\frac{\lim_{n\to\infty}y_n}{\lim_{n\to\infty}x_n} \tag{3.2.49}$$

И, во-вторых – “эвристические” (здесь C обозначает ненулевое число: $0\ne C\ne\infty$):

$$\frac{C}{\infty}=0 \qquad \frac{C}{0}=\infty, \tag{3.2.50}$$

$$\frac{\infty}{C}=\infty \qquad \frac{0}{C}=0 \tag{3.2.51}$$

$$C+\infty=\infty \qquad C\cdot\infty=\infty \tag{3.2.52}$$

$$\infty+\infty=\infty \qquad \infty\cdot\infty=\infty \tag{3.2.53}$$

$$\frac{\infty}{\infty}=? \qquad \frac{0}{0}=? \tag{3.2.54}$$

$$\infty-\infty=? \qquad 0\cdot\infty=? \tag{3.2.55}$$

Здесь вопросительные знаки в последних четырех формулах означают, что в рассматриваемых случаях сказать определенно, чему равен предел, невозможно, и требуется дополнительное исследование. Эти ситуации объединяются общим термином *неопределенность*, и что он означает легче всего понять из следующих примеров.

◇ **3.2.37.** Вычислим предел

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n-1}{2n+3}$$

Если попробовать применить формулы (3.2.45)–(3.2.49) сразу, то мы увидим, что ответа не получается:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n-1}{2n+3}\overset{\substack{(3.2.48)\\ \downarrow}}{=}\frac{\lim_{n\to\infty}(n-1)}{\lim_{n\to\infty}(2n+3)}\overset{\substack{(3.2.47)\\ \downarrow}}{=}$$

$$=\frac{\lim_{n\to\infty}n-1}{2\cdot\lim_{n\to\infty}n+3}=\frac{\infty-1}{2\cdot\infty+3}\overset{\substack{(3.2.52)\\ \downarrow}}{=}\frac{\infty}{\infty}\overset{\substack{(3.2.54)\\ \downarrow}}{=}?$$

Появившийся вопросительный знак означает, что таким способом найти предел невозможно, и это тот случай, когда принято говорить, что возникает неопределенность. Это в свою очередь означает, что нужно искать какой-то другой способ (при котором этой неопределенности не возникнет).

Для этого обычно бывает достаточно преобразовать подходящим образом выражение под пределом. В нашем случае можно поделить числитель и знаменатель на n:

$$\lim_{n\to\infty}\underbrace{\frac{n-1}{2n+3}}_{\substack{\text{делим числитель}\\ \text{и знаменатель на } n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1-\frac{1}{n}}{2+\frac{3}{n}}=\frac{\lim_{n\to\infty}(1-\frac{1}{n})}{\lim_{n\to\infty}(2+\frac{3}{n})}=$$

$$=\frac{1-\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}}{2+\lim_{n\to\infty}\frac{3}{n}}=\frac{1-\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}}{2+3\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}}=$$

$$=\frac{1-0}{2+3\cdot 0}=\frac{1}{2}$$

Итак, со второй попытки мы получили ответ: $\frac{1}{2}$.

На этом обсуждение этого примера можно закончить, но перед этим мы хотели бы показать, как можно сократить количество писанины в подобных вычислениях, одновременно, сделав их более наглядными. Коротко и просто нашу первую попытку можно записать так:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n-1}{2n+3}=\frac{\infty-1}{2\cdot\infty+3}=\frac{\infty}{\infty}=?$$

А вторую – так:

$$\lim_{n\to\infty}\underbrace{\frac{n-1}{2n+3}}_{\substack{\text{делим числитель}\\ \text{и знаменатель на } n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1-\overset{\nearrow 0}{\boxed{\frac{1}{n}}}}{2+\underset{\searrow 0}{\boxed{\frac{3}{n}}}}=\frac{1-0}{2+0}=\frac{1}{2}$$

Ниже мы постараемся всюду пользоваться такой “наглядной” записью, поэтому будет хорошо, если читатель уже сейчас обратит на нее внимание.

◇ **3.2.38.** Вычислим предел

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2+5n+7}{8n^2-4n+1}$$

Здесь также первая попытка ничего не дает, потому что неопределенность возникает на этот раз в знаменателе:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2+5n+7}{8n^2-4n+1}=\frac{3\cdot\infty^2+5\cdot\infty+7}{8\cdot\infty^2-4\cdot\infty+1}=\frac{\infty}{?}$$

Поэтому мы снова преобразуем дробь, прежде чем пользоваться правилами (3.2.45)–(3.2.49):

$$\lim_{n\to\infty}\underbrace{\frac{3n^2+5n+7}{8n^2-4n+1}}_{\substack{\text{делим числитель}\\ \text{и знаменатель на } n^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{3+\overbrace{\boxed{\frac{5}{n}}}^{0}+\overbrace{\boxed{\frac{7}{n^2}}}^{0}}{8-\underbrace{\boxed{\frac{4}{n}}}_{0}+\underbrace{\boxed{\frac{1}{n^2}}}_{0}}=$$

$$=\frac{3+0+0}{8-0-0}=\frac{3}{8}$$

◇ **3.2.39.** Вычислим предел

$$\lim_{n\to\infty}\frac{5n^2-n+1}{n^3+n^2+2}$$

Здесь у нас уже достаточно опыта, чтобы сообразить сразу, что первая попытка "подставить в лоб" снова приведет к неопределенности, поэтому мы можем сразу перейти к преобразованию дроби:

$$\lim_{n\to\infty}\underbrace{\frac{5n^2-n+1}{n^3+n^2+2}}_{\substack{\text{делим числитель}\\ \text{и знаменатель на}\\ \text{максимальную степень } n,\\ \text{то есть на } n^3}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\overbrace{\boxed{\frac{5}{n}}}^{0}-\overbrace{\boxed{\frac{1}{n^2}}}^{0}+\overbrace{\boxed{\frac{1}{n^3}}}^{0}}{1+\underbrace{\boxed{\frac{1}{n}}}_{0}+\underbrace{\boxed{\frac{2}{n^3}}}_{0}}=$$

$$=\frac{0-0+0}{1+0+0}=0$$

◇ **3.2.40.** В следующем примере читатель уже сразу должен сообразить, что без преобразований ничего не получится, поэтому о "подстановке в лоб" мы уже и не заикаемся:

$$\lim_{n\to\infty}\underbrace{\frac{n^4+n^2+5}{n^3-3n+2}}_{\substack{\text{делим числитель}\\ \text{и знаменатель на}\\ \text{максимальную степень } n,\\ \text{то есть на } n^4}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\overbrace{\boxed{\frac{1}{n^2}}}^{0}+\overbrace{\boxed{\frac{5}{n^4}}}^{0}}{\underbrace{\boxed{\frac{1}{n}}}_{0}-\underbrace{\boxed{\frac{3}{n^3}}}_{0}+\underbrace{\boxed{\frac{2}{n^4}}}_{0}}=$$

$$=\frac{1+0+0}{0-0+0}=\frac{1}{0}\underset{\substack{\uparrow\\ (3.2.50)}}{=}\infty$$

◇ **3.2.41.**

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\overbrace{(n+5)^3-n(n+7)^2}^{\text{раскрываем скобки}}}{n^2}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\Big\{n^3+15n^2+75n+125-$$

$$-n(n^2+14n+49)\Big\}:\Big\{n^2\Big\}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{15n^2+75n+125-14n^2+49n}{n^2}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+26n+125}{n^2}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(1+\underbrace{\boxed{\frac{26}{n}}}_{0}+\underbrace{\boxed{\frac{125}{n^2}}}_{0}\right)=1+0+0=1$$

◇ **3.2.42.** Докажем формулу:

$$\boxed{\frac{C_n^k}{n^l}\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}\begin{cases}0, & k<l\\ \frac{1}{k!}, & k=l\\ \infty, & k>l\end{cases}}\tag{3.2.56}$$

Доказательство. Начнем со случая $k=l$:

$$\frac{C_n^k}{n^k}=\frac{n!}{n^k\cdot k!\cdot(n-k)!}=$$

$$=\frac{\overbrace{n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}^{k\text{ множителей}}}{\underbrace{n\cdot n\cdot\ldots\cdot n}_{k\text{ множителей}}\cdot k!}=$$

$$=\frac{\left(1-\overbrace{\boxed{\frac{1}{n}}}^{0}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\overbrace{\boxed{\frac{k-1}{n}}}^{0}\right)}{k!}\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}\frac{1}{k!}$$

После этого при $k<l$ мы получим:

$$\frac{C_n^k}{n^l}=\underbrace{\boxed{\frac{1}{n^{l-k}}}}_{0}\cdot\underbrace{\boxed{\frac{C_n^k}{n^k}}}_{\frac{1}{k!}}\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}0$$

А при $k>l$ мы получим:

$$\frac{C_n^k}{n^l}=\underbrace{\boxed{n^{k-l}}}_{\infty}\cdot\underbrace{\boxed{\frac{C_n^k}{n^k}}}_{\frac{1}{k!}}\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}\infty$$

□

▷▷ **3.2.43.** Вычислите пределы

1) $\lim_{n\to\infty}\frac{2-n}{3n+4}$

2) $\lim_{n\to\infty}\frac{n^2-3}{3n-4n^2}$

3) $\lim_{n\to\infty}\frac{3+2n+n^2}{4-9n+4n^3}$

4) $\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+1}{2n+1}-\frac{3n^2+1}{6n+1}$

5) $\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+2n+1}{n+5}$

6) $\lim_{n\to\infty}\frac{n^3-n^2+1}{5-n-n^2}$

(b) Теоремы о последовательностях

Предельный переход в неравенствах.

Теорема 3.2.8 (о предельном переходе в неравенстве с конечным пределом)**.** [3] *Если последовательности $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ связаны неравенством*

$$x_n \leqslant y_n \tag{3.2.57}$$

и сходятся

$$x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} a \qquad y_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} b$$

то их пределы связаны тем же неравенством

$$a \leqslant b$$

Доказательство. Предположим, что $b < a$. Тогда можно взять $\varepsilon = \frac{a-b}{2}$. Из $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} a$ будет следовать, что почти все числа x_n лежат в окрестности $(a-\varepsilon; a+\varepsilon)$. То есть, для почти всех номеров $n \in \mathbb{N}$ выполняется неравенство

$$a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$$

С другой стороны, из $y_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} a$ будет следовать, что почти все числа y_n лежат в окрестности $(b-\varepsilon; b+\varepsilon)$. То есть, для почти всех номеров $n \in \mathbb{N}$ выполняется неравенство

$$b - \varepsilon < y_n < b + \varepsilon$$

Таким образом, у нас получается, что для почти всех номеров $n \in \mathbb{N}$ выполняются неравенства

$$y_n < b + \varepsilon = a - \varepsilon < x_n$$

То есть, для почти всех $n \in \mathbb{N}$

$$y_n < x_n$$

Это противоречит условию (3.2.59). □

Аналогично доказывается

Теорема 3.2.9 (о предельном переходе в неравенстве с бесконечным пределом)**.** *Пусть последовательности $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ связаны неравенством*

$$x_n \leqslant y_n$$

тогда

— *если $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$, то $y_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$;*
— *если $y_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} -\infty$, то $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} -\infty$.*

Теорема 3.2.10 (о двух милиционерах)**.** [4]

Пусть последовательности $\{x_n\}$, $\{y_n\}$, $\{z_n\}$ связаны неравенствами

$$x_n \leqslant y_n \leqslant z_n$$

причем две крайние из них сходятся к одному пределу

$$x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} C \qquad z_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} C$$

Тогда средняя последовательность тоже стремится к этому пределу:

$$y_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} C$$

[3] Этот результат используется ниже в разных ситуациях, в частности, при доказательстве теоремы 3.3.4 о сохранении знака непрерывной функцией

[4] Эта теорема также используется довольно часто, например, при доказательстве теоремы Больцано-Вейерштрасса 3.2.13, при доказательстве непрерывности модуля, синуса и косинуса (предложение 4.1.32) и при доказательстве замечательных пределов (теоремы 4.2.4 и 4.2.5).

Доказательство. Возьмем произвольную окрестность $(C-\varepsilon; C+\varepsilon)$ точки C. Тогда

1) поскольку $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} C$, почти все числа x_n содержатся в окрестности $(C-\varepsilon; C+\varepsilon)$; поэтому для почти всех номеров $n \in \mathbb{N}$ выполняется неравенство

$$C-\varepsilon < x_n$$

то есть для почти всех номеров $n \in \mathbb{N}$ выполняется

$$C-\varepsilon < x_n \leqslant y_n$$

2) поскольку $z_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} C$, почти все числа z_n содержатся в окрестности $(C-\varepsilon; C+\varepsilon)$; поэтому для почти всех номеров $n \in \mathbb{N}$ выполняется неравенство

$$z_n < C+\varepsilon$$

то есть для почти всех номеров $n \in \mathbb{N}$ выполняется

$$y_n \leqslant z_n < C+\varepsilon$$

Итак, мы получили, что для почти всех номеров $n \in \mathbb{N}$ выполняются неравенства

$$C-\varepsilon < y_n \qquad y_n < C+\varepsilon$$

Это означает, что почти все числа y_n содержатся в окрестности $(C-\varepsilon; C+\varepsilon)$ точки C. Поскольку это верно для любой окрестности, мы получаем, что $y_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} C$, $\square$

◇ **3.2.44.** Докажем формулу:

$$\frac{n^k}{a^n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \begin{cases} 0, & |a|>1 \\ \infty, & |a|<1 \end{cases} \qquad (k \in \mathbb{Z}) \qquad (3.2.58)$$

Доказательство. Очевидно, здесь достаточно рассмотреть случай, когда $a>0$.

1. Если $k<0$ и $a>1$, то все очевидно:

$$\frac{n^k}{a^n} = \underbrace{\frac{1}{n^{-k}}}_{\substack{\downarrow\\0}} \cdot \underbrace{\frac{1}{a^n}}_{\substack{\downarrow\\0}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

2. Пусть $k \geqslant 0$ и $a>1$. Тогда $a=1+\varepsilon$, $\varepsilon>0$, и при $n \geqslant k+1$ мы получаем цепочку:

$$a^n = (1+\varepsilon)^n = \sum_{i=0}^{n} C_n^i \varepsilon^i \geqslant C_n^{k+1}\varepsilon^{k+1}$$

$$\Downarrow$$

$$0 \leqslant \frac{n^k}{a^n} \leqslant \frac{n^k}{C_n^{k+1}\varepsilon^{k+1}} = \underbrace{\frac{1}{\varepsilon^{k+1}}}_{\text{константа}} \cdot \underbrace{\frac{n^k}{C_n^{k+1}}}_{\substack{\downarrow\ (3.2.56)\\0}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

$$\Downarrow \text{ теорема 3.2.10}$$

$$\frac{n^k}{a^n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

3. Если $k \leqslant 0$ и $0<a<1$, то, по уже доказанному,

$$\frac{n^{-k}}{(a^{-1})^n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{n^k}{a^n} = \left(\frac{n^{-k}}{(a^{-1})^n}\right)^{-1} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$$

4. Наконец, при $k>0$ и $0<a<1$ все опять очевидно:

$$\frac{n^k}{a^n} = \underbrace{n^k}_{\substack{\downarrow\\\infty}} \cdot \underbrace{\left(\frac{1}{a}\right)^n}_{\substack{\downarrow\\\infty}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$$

$\square$

Монотонные последовательности и теорема Вейерштрасса. Последовательность $\{x_n\}$ называется

– *возрастающей*, если

$$x_1 < x_2 < x_3 < \dots < x_n < x_{n+1} < \dots$$

– *убывающей*, если
$$x_1 > x_2 > x_3 > ... > x_n > x_{n+1} > ...$$

– *неубывающей*, если
$$x_1 \leqslant x_2 \leqslant x_3 \leqslant ... \leqslant x_n \leqslant x_{n+1} \leqslant ...$$

– *невозрастающей*, если
$$x_1 \geqslant x_2 \geqslant x_3 \geqslant ... \geqslant x_n \geqslant x_{n+1} \geqslant ...$$

– *монотонной*, если она неубывающая или невозрастающая;

Понятно, что если последовательность x_n возрастает, то она неубывает. И наоборот, если x_n убывает, то она невозрастает.

◇ **3.2.45.** Последовательность $x_n = \frac{1}{n}$ монотонна (точнее, возрастает) и неограничена;
(точнее, убывает) и ограничена;

◇ **3.2.46.** Последовательность $x_n = n$ монотонна ◇ **3.2.47.** Последовательность $x_n = \frac{(-1)^n}{n}$ немонотонна, но ограничена;

Теорема 3.2.11 (Вейерштрасса о монотоных ограниченных последовательностях)**.** [5]

Всякая монотонная ограниченная последовательность $\{x_n\}$ сходится (то есть имеет конечный предел), причем

— *если $\{x_n\}$ неубывающая последовательность, то*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \sup_{n\in\mathbb{N}} x_n$$

— *если $\{x_n\}$ невозрастающая последовательность, то*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \inf_{n\in\mathbb{N}} x_n$$

Доказательство. Если последовательность $\{x_n\}$ монотонна, то это значит, что она или неубывающая, или невозрастающая. Докажем теорему для случая, когда $\{x_n\}$ – неубывающая (случай, когда она невозрастающая рассматривается аналогично):

$$C \leqslant x_1 \leqslant x_2 \leqslant x_3 \leqslant ... \leqslant x_n \leqslant x_{n+1} \leqslant ... \leqslant D \tag{3.2.59}$$

Рассмотрим множество X, состоящее из элементов $\{x_n\}$. Из цепочки неравенств (3.2.59) следует, что оно будет ограничено сверху и непусто. Значит, по теореме 2.1.23 (о точной границе), оно имеет точную верхнюю грань B:

$$B = \sup\{x_n; n \in \mathbb{N}\}$$

Покажем, что $\{x_n\}$ стремится к B. Возьмем окрестность $(B-\varepsilon, B+\varepsilon)$ точки B. Поскольку B – точная верхняя грань для $\{x_n\}$, число $B-\varepsilon < B$ не может быть верхней гранью для $\{x_n\}$. Это значит, что существует такое k, что

$$B-\varepsilon < x_k$$

При этом для любого $n \geqslant k$ мы получим

$$B-\varepsilon < x_k \leqslant x_n$$

то есть все числа $\{x_n\}$, начиная с номера k, лежат в интервале $(B-\varepsilon, B+\varepsilon)$.

Итак, получается, что любая окрестность $(B-\varepsilon, B+\varepsilon)$ точки B содержит почти все точки последовательности $\{x_n\}$. Значит

$$\lim_{n\to\infty} x_n = B$$

□

◇ **3.2.48.** Покажем, что последовательность, заданная рекуррентно

$$x_1 = 2, \quad x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{1}{x_n}\right)$$

сходится, и найдем ее предел.

1. Вычислим сначала несколько первых элементов последовательности $\{x_n\}$, и нарисуем

[5] Этот результат используется далее при доказательстве теоремы о вложенных отрезках 3.2.12 и при доказательстве второго замечательного предела (лемма (c)).

картинку:

2. Заметим, что все числа $\{x_n\}$ положительны:

$$x_n > 0$$

(это можно отдельно доказать индукцией).

3. Из картинки видно, что на первых нескольких элементах $\{x_n\}$ наша последовательность невозрастает. Попробуем доказать, что она невозрастает всегда:

$$x_{n+1} \leqslant x_n \qquad (3.2.60)$$

Поймем сначала, что означает это неравенство:

$$x_{n+1} \leqslant x_n \quad \Leftrightarrow \quad \overbrace{\frac{1}{2}\left(x_n + \frac{1}{x_n}\right) \leqslant x_n}^{\substack{\text{умножаем на } 2x_n; \\ \text{поскольку } x_n > 0, \\ \text{знак неравенства не меняется} \\ \downarrow}} \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad x_n^2 + 1 \leqslant 2x_n^2 \quad \Leftrightarrow \quad x_n^2 \geqslant 1 \quad \Leftrightarrow \quad x_n \geqslant 1$$

Теперь докажем, последнее неравенство:

$$x_n \geqslant 1 \qquad (3.2.61)$$

Это делается математической индукцией.

a) Сначала проверяем наше неравенство при $n = 1$:

$$x_1 = 2 \geqslant 1$$

b) Предполагаем, что оно верно при $n = k$:

$$x_k \geqslant 1 \qquad (3.2.62)$$

c) Доказываем, что тогда оно будет верно при $n = k + 1$.

$$x_{k+1} \geqslant 1 \qquad (3.2.63)$$

Действительно,

$$x_{k+1} \geqslant 1 \quad \Leftrightarrow \quad \overbrace{\frac{1}{2}\left(x_k + \frac{1}{x_k}\right) \geqslant 1}^{\substack{\text{умножаем на } 2x_k, \\ \text{и, поскольку } x_n > 0, \\ \text{знак неравенства не меняется} \\ \downarrow}} \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad x_k^2 + 1 \geqslant 2x_k \quad \Leftrightarrow \quad x_k^2 - 2x_k + 1 \geqslant 0 \quad \Leftrightarrow \quad \Leftrightarrow \quad (x_k - 1)^2 \geqslant 0$$

а последнее неравенство выполняется всегда (потому что квадрат любого числа неотрицателен).

Итак, мы доказали (3.2.60), а значит и равносильное ему условие (3.2.61). Эти неравенства означают, что $\{x_n\}$ невозрастает и ограничена сверху. Значит, по теореме Вейерштрасса 3.2.11 она имеет предел. Обозначим его буквой c:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = c$$

и заметим, что $c \geqslant 0$, поскольку $x_n \geqslant 0$. Тогда из формулы

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{1}{x_n}\right)$$

получаем

$$c = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{1}{x_n}\right) = \frac{1}{2}\left(c + \frac{1}{c}\right)$$

То есть c удовлетворяет уравнению

$$c = \frac{1}{2}\left(c + \frac{1}{c}\right)$$

решая которое мы получаем

$$2c^2 = c^2 + 1 \quad \Leftrightarrow \quad c^2 = 1$$

откуда (с учетом $c \geqslant 0$) имеем $c = 1$.

Ответ: $\lim_{n\to\infty} x_n = 1$

⊳⊳ **3.2.49.** Докажите, что последовательность, заданная рекуррентно сходится, и найдите ее предел:

1) $x_1 = 3$, $x_{n+1} = \frac{5x_n}{3x_n+1}$;
2) $x_1 = 1$, $x_{n+1} = \frac{4x_n}{2+x_n^2}$;
3) $x_1 = -1$, $x_{n+1} = \frac{x_n(x_n+4)}{2}$;
4) $x_1 = 2$, $x_{n+1} = \frac{x_n(6-x_n)}{3}$.

Теорема о вложенных отрезках. Пусть дана последовательность отрезков $[a_n; b_n]$ такая, что каждый последующий содержится в предыдущем:

$$[a_1; b_1] \supseteq [a_2; b_2] \supseteq [a_3; b_3] \supseteq ... \supseteq [a_n; b_n] \supseteq ...$$

Понятно, что в этом случае концы отрезков связаны неравенствами

$$a_1 \leqslant a_2 \leqslant a_3 \leqslant ... \leqslant a_n \leqslant ... \leqslant b_n \leqslant ... \leqslant b_3 \leqslant b_2 \leqslant b_1 \qquad (3.2.64)$$

Пусть, кроме того, длины этих отрезков стремятся к нулю:

$$b_n - a_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \tag{3.2.65}$$

Такая последовательность отрезков называется *последовательностью вложенных отрезков.*

Теорема 3.2.12 (о вложенных отрезках). [6] *Для любой последовательности вложенных отрезков $[a_n; b_n]$ существует единственная точка C, принадлежащая всем отрезкам этой последовательности,*

$$C \in [a_n; b_n] \tag{3.2.66}$$

При этом

$$\lim_{n\to\infty} a_n = C = \lim_{n\to\infty} b_n \tag{3.2.67}$$

Доказательство. Неравенства (3.2.64) означают, что последовательности $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ монотоны и ограничены. Значит, они сходятся (то есть имеют пределы). Обозначим буквами A и B эти пределы:

$$A = \lim_{n\to\infty} a_n \qquad B = \lim_{n\to\infty} b_n$$

Покажем, что эти числа совпадают. Действительно,

$$B - A = \lim_{n\to\infty} b_n - \lim_{n\to\infty} a_n = \begin{pmatrix}\text{используем свойство}\\ 2^0 \text{ на с.213}\end{pmatrix} = \lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = (\text{используем (3.2.65)}) = 0$$

то есть

$$A = B$$

Итак, мы получили, что можно взять $C = A = B$, и тогда будет выполняться (3.2.67). По теореме Вейерштрасса 3.2.11, получаем

$$a_1 \leqslant a_2 \leqslant a_3 \leqslant ... \leqslant a_n \leqslant ... \leqslant \sup_{n\in\mathbb{N}} a_n = A = C = B = \inf_{n\in\mathbb{N}} b_n \leqslant ... \leqslant b_n \leqslant ... \leqslant b_3 \leqslant b_2 \leqslant b_1$$

и это означает, что C принадлежит всем интервалам $[a_n; b_n]$. Наконец, такая точка C (обладающая свойством (3.2.66)), единственна, потому что если бы существовала какая-то другая точка C' с тем же самым свойством (3.2.66), отличающаяся от C, например, большая, чем C, то мы получили бы, цепочку неравенств

$$a_1 \leqslant a_2 \leqslant a_3 \leqslant ... \leqslant a_n \leqslant ... \leqslant C < C' \leqslant ... \leqslant b_n \leqslant ... \leqslant b_3 \leqslant b_2 \leqslant b_1$$

из которых следовало бы, что расстояние между концами любого отрезка $[a_n; b_n]$ не меньше чем фиксированное число $\Delta = C' - C$

$$b_n - a_n \geqslant C' - C = \Delta > 0$$

и поэтому $b_n - a_n$ не может стремиться к нулю. □

Подпоследовательности и теорема Больцано-Вейерштрасса. Пусть нам дана какая-то последовательность вещественных чисел

$$x_n$$

и пусть кроме того дана бесконечно большая последовательность натуральных чисел:

$$n_k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$$

Тогда можно рассмотреть последовательность $y_k = x_{n_k}$ (зависящую от индекса k). Она называется *подпоследовательностью* числовой последовательности x_n.

---

[6] Этот результат используется ниже при доказательстве теоремы Больцано-Вейерштрасса 3.2.13 и при доказательстве теоремы Коши о промежуточном значении 3.3.6.

◇ **3.2.50.** Пусть, скажем, нам дана последовательность

$$x_n = \frac{1}{n}$$

Если взять

$$n_k = k^2$$

то мы получим подпоследовательность

$$y_k = x_{n_k} = \frac{1}{n_k} = \frac{1}{k^2}$$

◇ **3.2.51.** Пусть

$$x_n = (-1)^n$$

Если взять

$$n_k = 2k$$

то мы получим подпоследовательность

$$y_k = x_{n_k} = (-1)^{n_k} = (-1)^{2k} = 1$$

▷▷ **3.2.52.** Какую нужно взять последовательность индексов $\{n_k\}$, чтобы последовательность $\{y_k\}$ была подпоследовательностью последовательности $\{x_n\}$?

1) $x_n = \frac{1}{n}$, $y_k = \frac{1}{k^3}$
2) $x_n = (-1)^n$, $y_k = -1$

▷▷ **3.2.53.** Является ли данная последовательность $\{y_k\}$ подпоследовательностью последовательности $\{x_n\}$? (Если да, то указать соответствующую последовательность индексов $\{n_k\}$.)

1) $x_n = n$, $y_k = k^2$,
2) $x_n = n^2$, $y_k = k$,
3) $x_n = n$, $y_k = 2$.

Свойства подпоследовательностей

1°. *Если последовательность $\{x_n\}$ стремится к числу a, то любая ее подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$ тоже стремится к числу a:*

$$x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} a \quad \Longrightarrow \quad x_{n_k} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} a$$

2°. *Если последовательность $\{x_n\}$ не стремится к числу a, то найдется такая подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$ и такое число $\varepsilon > 0$, что $\{x_{n_k}\}$ отстоит от a больше чем на ε:*

$$x_n \underset{n\to\infty}{\not\longrightarrow} a \quad \Longrightarrow \quad \exists \varepsilon > 0 \quad \exists x_{n_k} \quad \forall k \quad |x_{n_k} - a| > \varepsilon$$

3°. *Если последовательность $\{x_n\}$ неограничена, то она содержит некоторую бесконечно большую подпоследовательность:*

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n| = +\infty \quad \Longrightarrow \quad \exists x_{n_k} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \infty$$

4°. *Если бесконечный набор элементов последовательности $\{x_n\}$ содержится в множестве M, то $\{x_n\}$ содержит некоторую подпоследовательность, полностью содержащуюся в M:*

$$\exists x_{n_k} \subseteq M$$

Доказательство. 1. Докажем сначала 1°. Возьмем произвольную окрестность $(a-\varepsilon; a+\varepsilon)$ точки a. Поскольку $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} a$, почти все точки $\{x_n\}$ должны лежать в $(a-\varepsilon; a+\varepsilon)$. Значит, точки с индексами n_k тоже почти все лежат в $(a-\varepsilon; a+\varepsilon)$. Поскольку это верно для любой окрестности $(a-\varepsilon; a+\varepsilon)$ мы получаем $x_{n_k} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} a$.

2. Свойство 2^0, как многие другие утверждения в анализе, традиционно доказывается приемом *бесконечнократного выбора*, о котором нужно сказать несколько слов. Он представляет из себя неявное использование аксиомы (счетного) выбора (сформулированной выше на с.202). Другой, "честный" способ доказать это утверждение – явно сослаться на аксиому выбора, однако у этого пути есть важный недостаток: тогда рассуждения становятся интуитивно менее очевидными. Эти два способа можно считать эквивалентными, и чтобы показать читателю разницу, мы приведем здесь оба. Далее мы еще несколько раз поступим так же[7], то есть приведем два доказательства, приемом бесконечнократного выбора и с явной ссылкой на аксиому выбора, но после этого будем в подобных ситуациях использовать только бесконечнократный выбор без напоминаний, что за ним стоит аксиома выбора.

[7]Точнее, дважды: при доказательстве свойства 3^0 в этом списке и теоремы Больцано-Вейерштрасса 3.2.13 ниже.

a) *Доказательство приемом бесконечнократного выбора.* Если $x_n \underset{n\to\infty}{\not\to} a$, то это означает, что найдется такая окрестность $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ точки a, вне которой лежит бесконечное число элементов x_n. То есть множество
$$N = \{n \in \mathbb{N}: \quad x_n \notin (a-\varepsilon, a+\varepsilon)\}$$
бесконечно.
1) Выберем произвольное $n_1 \in N$.
2) Поскольку N бесконечно, найдется $n_2 \in N$ такое что $n_2 \geqslant 2$. Зафиксируем это n_2.
3) Поскольку N бесконечно, найдется $n_3 \in N$ такое что $n_3 \geqslant 3$. Зафиксируем это n_3.
И так далее. Поступая подобным образом, мы получим последовательность индексов $\{n_k\}$ такую, что
$$n_k \geqslant k, \qquad k \in \mathbb{N}$$
поэтому по теореме 3.2.9 о предельном переходе в неравенстве, $n_k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$, то есть $\{x_{n_k}\}$ – подпоследовательность в $\{x_n\}$.

б) *Доказательство с явной ссылкой на аксиому выбора.* Еще раз, если $x_n \underset{n\to\infty}{\not\to} a$, то найдется такая окрестность $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ точки a, вне которой лежит бесконечное число элементов x_n. То есть множество
$$N = \{n \in \mathbb{N}: \quad x_n \notin (a-\varepsilon, a+\varepsilon)\}$$
бесконечно. По теореме 2.2.12, оно не ограничено, то есть для всякого $k \in \mathbb{N}$
$$N_k = \{n \in \mathbb{N}: \quad n \leqslant k\} \neq \varnothing$$
По аксиоме счетного выбора (с.202), найдется последовательность
$$n_k \in N_k$$
Для нее мы получаем во-первых:
$$x_{n_k} \notin (a-\varepsilon, a+\varepsilon), \qquad k \in \mathbb{N}$$
то есть
$$|x_{n_k} - a| > \varepsilon, \qquad k \in \mathbb{N}$$
И, во-вторых,
$$n_k \geqslant k, \qquad k \in \mathbb{N},$$
откуда по теореме 3.2.9 о предельном переходе в неравенстве, $n_k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$, то есть $\{x_{n_k}\}$ – подпоследовательность в $\{x_n\}$.

3. Как и в предыдущем случае, мы даем два доказательства свойства 3^0: традиционное и с явной ссылкой на аксиому (счетного) выбора.

a) *Доказательство приемом бесконечнократного выбора.* Пусть $\sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n| = +\infty$, построим подпоследовательность $x_{n_k} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \infty$.
1) Сначала выбирается индекс n_1. Это делается так: поскольку $\{x_n\}$ неограничена, найдется такой номер n_1, что
$$|x_{n_1}| \geqslant 1$$
Этот номер n_1 фиксируется.
2) Затем выбирается индекс n_2: поскольку $\{x_n\}$ неограничена, найдется такой номер n_2, что
$$|x_{n_2}| \geqslant 2$$
Этот номер n_2 фиксируется.
k). Когда индексы $n_1, n_2, ..., n_{k-1}$ уже выбраны, выбирается индекс n_k: поскольку $\{x_n\}$ неограничена, найдется такой номер n_k, что
$$|x_{n_k}| \geqslant k$$
Этот номер n_k фиксируется.
И так далее. В результате получается последовательность $\{x_{n_k}\}$ со свойством
$$\forall k \in \mathbb{N} \qquad |x_{n_k}| \geqslant k$$
из которого и следует $x_{n_k} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \infty$.

б) *Доказательство с явной ссылкой на аксиому выбора.* Пусть $\sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n| = +\infty$. Это значит, что

$$\forall k \in \mathbb{N} \qquad \{n \in \mathbb{N} : \quad |x_n| \geqslant k\} \neq \varnothing$$

По аксиоме счетного выбора (с.202), найдется последовательность $\{n_k\}$ такая, что

$$n_k \in \{n \in \mathbb{N} : \quad |x_n| \geqslant k\}, \qquad k \in \mathbb{N}$$

то есть

$$|x_{n_k}| \geqslant k, \qquad k \in \mathbb{N}.$$

Отсюда следует $x_{n_k} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \infty$.

4. Свойство 4° доказывается тем же приемом, только номера n_k здесь нужно выбирать так, чтобы выполнялись не одно, а два условия:

$$n_{k+1} > n_k \qquad \& \qquad x_{n_{k+1}} \in M.$$

□

Можно заметить, что иногда получается, что, хотя данная последовательность $\{x_n\}$ расходится (то есть не имеет предела), тем не менее, выбранная подпоследовательность $\{y_k\}$ сходится.

⊳⊳ **3.2.54.** Для данной последовательности $\{x_n\}$ укажите какую-нибудь сходящуюся подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$, если она существует.

1) $x_n = (-1)^n \cdot n$,
2) $x_n = \frac{(-1)^n}{n} + \frac{1+(-1)^n}{2}$,
3) $x_n = n^{(-1)^n}$,
4) $x_n = (-1)^n \cdot n^{(-1)^n - 1}$,
5) $x_n = n \cdot (1 + (-1)^n)$,
6) $x_n = \frac{2+(-1)^n}{2} - \frac{1}{n}$,
7) $x_n = (-1)^{n-1} \cdot \left(2 + \frac{3}{n}\right)$.

Теорема 3.2.13 (Больцано-Вейерштрасса). [8] *Всякая ограниченная последовательность $\{x_n\}$ имеет сходящуюся подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$.*

Для доказательства условимся *длиной отрезка* $I = [a, b]$ называть число

$$\operatorname{diam} I = b - a$$

Нам удобно начать со следующей леммы:

Лемма 3.2.14. *Если отрезок I содержит бесконечно много элементов последовательности $\{x_n\}$,*

$$\operatorname{card}\{n \in \mathbb{N} : \ x_n \in I\} = \infty$$

то в I содержится отрезок J в два раза меньшей длины,

$$\operatorname{diam} J = \frac{\operatorname{diam} I}{2},$$

также содержащий бесконечно много элементов $\{x_n\}$:

$$\operatorname{card}\{n \in \mathbb{N} : \ x_n \in J\} = \infty$$

Доказательство. Это очевидно: разделим отрезок I на два равных (по длине) отрезка J и K. По крайней мере в одном из них должно содержаться бесконечное число элементов $\{x_n\}$ (потому что иначе получилось бы, что J и K содержат конечный набор элементов $\{x_n\}$, и значит их объединение $I = J \cup K$ тоже содержит конечный набор элементов. □

Доказательство теоремы 3.2.13. В соответствии с обещанием на с.228, мы даем здесь два доказательства: приемом бесконечнократного выбора и с явной ссылкой на аксиому (счетного) выбора.

[8] Этот результат используется ниже при доказательстве критерия Коши сходимости числовой последовательности (теорема 3.2.15), а также при доказательстве теорем Вейерштрасса об ограниченности и об экстремумах (теоремы 3.3.7 и 3.3.8) и теоремы Кантора о равномерной ограниченности (теорема 3.3.10)

а) *Доказательство приемом бесконечнократного выбора.*
1) Последовательность $\{x_n\}$ ограничена, значит она лежит в некотором отрезке $I_1 = [a_1; b_1]$. Положим $n_1 = 1$, и заметим на будущее, что $x_{n_1} \in I_1 = [a_1; b_1]$.
2) По лемме 3.2.14, в I_1 содержится некий отрезок $I_2 = [a_2; b_2]$ вдвое меньшей длины,

$$\operatorname{diam} I_2 = \frac{\operatorname{diam} I_1}{2},$$

также содержащий бесконечно много чисел $\{x_n\}$. Выбираем какой-нибудь номер $n_2 \geqslant 2$, такой что $x_{n_2} \in I_2 = [a_2; b_2]$ (такой номер n_2 найдется, потому что $x_n \in [a_2; b_2]$ для бесконечного количества номеров n).
3) Опять по лемме 3.2.14, в I_2 содержится некий отрезок $I_3 = [a_3; b_3]$ вдвое меньшей длины,

$$\operatorname{diam} I_3 = \frac{\operatorname{diam} I_2}{2},$$

также содержащий бесконечно много чисел $\{x_n\}$. Выбираем какой-нибудь номер $n_3 \geqslant 3$, такой что $x_{n_3} \in I_3 = [a_3; b_3]$ (такой номер n_3 найдется, потому что $x_n \in [a_3; b_3]$ для бесконечного количества номеров n).
Продолжая эту процедуру, мы получим последовательность отрезков $I_k = [a_k; b_k]$ и чисел x_{n_k} со следующими свойствами:

$$[a_1; b_1] \supseteq [a_2; b_2] \supseteq [a_3; b_3] \supseteq ... \supseteq [a_k; b_k] \supseteq ... \qquad b_k - a_k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0 \qquad x_{n_k} \in [a_k; b_k] \tag{3.2.68}$$

Первые два свойства означают, что $[a_k; b_k]$ – последовательность вложенных отрезков, значит, по теореме 3.2.12 о вложенных отрезках, существует число C такое что

$$\lim_{k\to\infty} a_k = C = \lim_{k\to\infty} b_k$$

Последнее же свойство в цепочке (3.2.68) означает, что

$$a_k \leqslant x_{n_k} \leqslant b_k$$

и поэтому мы можем применить теорему о двух милиционерах 3.2.10, из которой следует, что

$$\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = C$$

То есть последовательность x_{n_k} имеет предел.

б) *Доказательство с явной ссылкой на аксиому выбора.* Опять заметим сначала, что поскольку последовательность $\{x_n\}$ ограничена, она лежит в некотором отрезке $I = [a; b]$. Пусть $\mathcal{I}$ обозначает множество отрезков J, содержащихся в I, и содержащих бесконечный набор элементов последовательности $\{x_n\}$

$$J \in \mathcal{I} \qquad \Longleftrightarrow \qquad J \subseteq I \quad \& \quad \operatorname{card}\{n \in \mathbb{N} : \ x_n \in J\} = \infty$$

(множество $\mathcal{I}$ непусто, потому что, например, $I \in \mathcal{I}$). Пусть теперь $I_1, I_2, ..., I_k$ – конечная последовательность отрезков, удовлетворяющая таким условиям:

$$\{I_1, ...I_k\} \subseteq \mathcal{I}, \qquad I_1 \supset I_2 \supset ... \supset I_k, \qquad \forall i < k \quad \operatorname{diam} I_{i+1} = \frac{\operatorname{diam} I_i}{2}, \tag{3.2.69}$$

Тогда по лемме 3.2.14, найдется отрезок J со свойствами:

$$J \in \mathcal{I}, \qquad J \subset I_k, \qquad \operatorname{diam} J = \frac{\operatorname{diam} I_k}{2}. \tag{3.2.70}$$

Это наблюдение можно переформулировать таким хитрым образом: для любой последовательности $I_1, I_2, ..., I_k$, удовлетворяющей условиям (3.2.69), множество $\mathcal{J}(I_1, I_2, ..., I_k)$ всех отрезков J, удовлетворяющих условиям (3.2.70), непусто:

$$\mathcal{J}(I_1, I_2, ..., I_k) = \left\{ J \in \mathcal{I} : \quad J \subset I_k, \quad \operatorname{diam} J = \frac{\operatorname{diam} I_k}{2} \right\} \neq \varnothing$$

Теперь мы применяем аксиому выбора: должно существовать отображение $(I_1, I_2, ..., I_k) \mapsto G(I_1, I_2, ..., I_k)$, которое каждой последовательности $(I_1, I_2, ..., I_k)$ отрезков, удовлетворяющих условиям (3.2.69), ставит в соответствие отрезок $G(I_1, I_2, ..., I_k)$, принадлежащий $\mathcal{J}(I_1, I_2, ..., I_k)$, то есть удовлетворяющий условиям

$$G(I_1, I_2, ..., I_k) \in \mathcal{I}, \qquad G(I_1, I_2, ..., I_k) \subset I_k, \qquad \mathsf{diam}\, G(I_1, I_2, ..., I_k) = \frac{\mathsf{diam}\, I_k}{2}. \tag{3.2.71}$$

После этого мы применяем теорему 2.2.7 об определениях частной индукцией: если положить $I_1 = I$, то это определит последовательность $\{I_k\} \in \mathcal{I}$, содержащую I_1 в качестве первого элемента и удовлетворяющую условию

$$G(I_1, ..., I_k) = I_{k+1}, \qquad k < N$$

где величина N определяется условием:

$$N = \sup\Big\{k \in \mathbb{N}: \quad \exists \{I_2, ..., I_k\} \subseteq \mathcal{I} \quad \forall i \in \{2, ..., k\} \qquad G(I_1, ..., I_{i-1}) = I_i\Big\}$$

Но здесь верхняя грань равна бесконечности, потому что наше отображение G было определено на всех конечных последовательностях со свойствами (3.2.69). Поэтому последовательность $\{I_k\}$, определяемая теоремой 2.2.7 должна быть бесконечной.
Теперь каждый отрезок $\{I_k\}$ содержит бесконечный набор элементов $\{x_n\}$, поэтому

$$\{n \geqslant k: \ x_n \in I_k\} \neq \varnothing$$

Отсюда по аксиоме счетного выбора (с.202) следует, что существует последовательность номеров

$$n_k \in \{n \geqslant k: \ x_n \in I_k\}$$

то есть такая, что

$$n_k \geqslant k \quad \& \quad x_{n_k} \in I_k$$

Обозначив теперь через a_k и b_k концы отрезков $I_k]$, мы получим в точности условия (3.2.68), и дальше рассуждения повторяют пункт а).

$\square$

Критерий Коши сходимости последовательности.

Теорема 3.2.15 (критерий Коши сходимости числовой последовательности). [9]
Числовая последовательность $\{x_n\}$ тогда и только тогда сходится, когда она удовлетворяет следующим двум эквивалентным условиям:

(i) для любых двух бесконечно больших последовательностей индексов $\{p_i\}$, $\{q_i\} \subseteq \mathbb{N}$

$$p_i \underset{i\to\infty}{\longrightarrow} \infty, \quad q_i \underset{i\to\infty}{\longrightarrow} \infty \tag{3.2.72}$$

соответствующие подпоследовательности $\{x_{p_i}\}$ и $\{x_{q_i}\}$ стремятся друг к другу:

$$x_{p_i} - x_{q_i} \underset{i\to\infty}{\longrightarrow} 0 \tag{3.2.73}$$

(ii) для любой последовательности $\{l_i\} \subseteq \mathbb{N}$ и любой бесконечно большой последовательности $\{k_i\} \subseteq \mathbb{N}$

$$k_i \underset{i\to\infty}{\longrightarrow} \infty \tag{3.2.74}$$

выполняется соотношение

$$x_{k_i+l_i} - x_{k_i} \underset{i\to\infty}{\longrightarrow} 0 \tag{3.2.75}$$

Для доказательства нам понадобится две леммы.

Лемма 3.2.16. *Если последовательность $\{x_n\}$ бесконечно большая*

$$x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$$

то она содержит некоторую подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$ со свойством

$$x_{n_k} - x_{n_{k-1}} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \infty \tag{3.2.76}$$

[9]Этот результат понадобится нам только в главе 18 при доказательстве критерия Коши сходимости числового ряда (теорема 4.1)

Доказательство. Подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$ строится бесконечнократным выбором (традиционно этот прием называется “построением по индукции”).

1. Индекс n_1 выбирается произвольным, например, $n_1 = 1$.

2. Затем выбирается индекс n_2. Для этого произносится фраза: поскольку $\{x_n\}$ неограничена, найдется такой номер n_2, что

$$|x_{n_2} - x_{n_1}| \geqslant 2$$

Этот номер n_2 фиксируется.

k. Когда индексы $n_1, n_2, ..., n_{k-1}$ уже выбраны, выбирается индекс n_k. Опять говорится так: поскольку $\{x_n\}$ неограничена, найдется такой номер n_k, что

$$\left|x_{n_k} - x_{n_{k-1}}\right| \geqslant k$$

Этот номер n_k фиксируется.

И так далее. В результате получается последовательность $\{x_{n_k}\}$ со свойством

$$\forall k \in \mathbb{N} \qquad \left|x_{n_k} - x_{n_{k-1}}\right| \geqslant k$$

из которого и следует (3.2.76). □

Лемма 3.2.17. *Если последовательность $\{x_n\}$ обладает свойством (i) теоремы 3.2.15, то она ограничена.*

Доказательство. Предположим, что это не так, то есть что $\{x_n\}$ – неограниченная последовательность, обладающая свойством (i). Тогда по свойству 3^0 предыдущего параграфа, нашлась бы подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$ такая что

$$x_{n_k} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \infty$$

а по лемме 3.2.16 это означало бы, что можно выбрать подпоследовательность $\{x_{n_{k_i}}\}$ последовательности $\{x_{n_k}\}$ такую что

$$x_{n_{k_i}} - x_{n_{k_{i-1}}} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \infty$$

После этого мы бы могли взять две последовательности

$$p_i = n_{k_i}, \quad q_i = n_{k_{i-1}}$$

и у нас бы получилось, что

$$x_{p_i} - x_{q_i} = x_{n_{k_i}} - x_{n_{k_{i-1}}} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \infty$$

Но это невозможно, потому что $\{x_n\}$ обладает свойством (i). Значит, наше исходное предположение (о том, что $\{x_n\}$ – неограниченная последовательность) неверно. То есть $\{x_n\}$ обязательно ограничена. □

Доказательство теоремы 3.2.15. Убедимся сначала что условия (i) и (ii) действительно эквивалентны.

1. Импликация $(i) \Rightarrow (ii)$ очевидна: если выполняется (i) то есть любые две подпоследовательности $\{x_{p_i}\}$ и $\{x_{q_i}\}$ последовательности $\{x_n\}$ стремятся друг к другу

$$x_{p_i} - x_{q_i} \underset{i\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

то автоматически выполняется и (ii), потому что для любой последовательности $\{l_i\} \subseteq \mathbb{N}$ и любой бесконечно большой последовательности $\{k_i\} \subseteq \mathbb{N}$ мы можем положить $p_i = k_i + l_i$ и $q_i = k_i$, и тогда будет выполняться соотношение

$$x_{k_i+l_i} - x_{k_i} = x_{p_i} - x_{q_i} \underset{i\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

2. Докажем импликацию $(ii) \Rightarrow (i)$. Пусть выполняется (ii), то есть для любой последовательности $\{l_i\} \subseteq \mathbb{N}$ и любой бесконечно большой последовательности $\{k_i\} \subseteq \mathbb{N}$ выполняется соотношение (3.2.75). Возьмем какие-нибудь две бесконечно большие последовательности индексов

$$p_i \underset{i\to\infty}{\longrightarrow} \infty, \quad q_i \underset{i\to\infty}{\longrightarrow} \infty$$

Положим

$$k_i = \min\{p_i; q_i\}, \quad l_i = \max\{p_i; q_i\} - k_i$$

Тогда

$$k_i + l_i = \max\{p_i; q_i\}$$

и поэтому

$$x_{p_i} - x_{q_i} = \left\{ \begin{matrix} x_{\max\{p_i;q_i\}} - x_{\min\{p_i;q_i\}}, & \text{если } p_i > q_i \\ x_{\min\{p_i;q_i\}} - x_{\max\{p_i;q_i\}}, & \text{если } p_i < q_i \\ 0, \quad \text{если } p_i = q_i \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} x_{k_i+l_i} - x_{k_i}, & \text{если } p_i > q_i \\ x_{k_i} - x_{k_i+l_i}, & \text{если } p_i < q_i \\ 0, \quad \text{если } p_i = q_i \end{matrix} \right\}$$

В любом случае получается

$$|x_{p_i} - x_{q_i}| = |x_{k_i+l_i} - x_{k_i}|$$

поэтому

$$|x_{p_i} - x_{q_i}| = |x_{k_i+l_i} - x_{k_i}| \underset{i\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

и значит,

$$x_{p_i} - x_{q_i} \underset{i\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

Последовательности $\{p_i\}$ и $\{q_i\}$ здесь выбирались с самого начала произвольными. Это значит, что выполняется (i). Таким образом, мы доказали, что из (ii) следует (i).

3. Докажем теперь, что если последовательность $\{x_n\}$ сходится, то есть существует конечный предел

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a$$

то $\{x_n\}$ обязательно должна обладать свойством (i). Возьмем любые две бесконечно большие последовательности индексов $\{p_i\}$, $\{q_i\} \subseteq \mathbb{N}$

$$p_i \underset{i\to\infty}{\longrightarrow} \infty, \quad q_i \underset{i\to\infty}{\longrightarrow} \infty$$

Соответствующие подпоследовательности $\{x_{p_i}\}$ и $\{x_{q_i}\}$ тоже стремятся к числу a по свойству 1^0 предыдущего параграфа:

$$x_{p_i} \underset{i\to\infty}{\longrightarrow} a, \quad x_{q_i} \underset{i\to\infty}{\longrightarrow} a$$

поэтому их разность должна стремиться к нулю:

$$x_{p_i} - x_{q_i} \underset{i\to\infty}{\longrightarrow} a - a = 0$$

Это значит, что $\{x_n\}$ действительно должна обладать свойством (i).

4. Теперь докажем, что наоборот, если $\{x_n\}$ обладает свойством (i), то она обязательно сходится. Действительно, по лемме 3.2.17, $\{x_n\}$ ограничена. Значит, по теореме Больцано-Вейерштрасса 3.2.13, $\{x_n\}$ содержит некоторую сходящуюся подпоследовательность $\{x_{n_i}\}$:

$$x_{n_i} \underset{i\to\infty}{\longrightarrow} a \tag{3.2.77}$$

Теперь возьмем следующие две последовательности индексов

$$p_i = i, \quad q_i = n_i$$

Поскольку $\{x_n\}$ обладает свойством (i), должно выполняться соотношение

$$x_i - x_{n_i} = x_{p_i} - x_{q_i} \underset{i\to\infty}{\longrightarrow} 0 \tag{3.2.78}$$

Из (3.2.77) и (3.2.78) получаем

$$x_i = (x_i - x_{n_i}) + x_{n_i} \underset{i\to\infty}{\longrightarrow} 0 + a = a$$

То есть последовательность $\{x_n\}$ стремится к некоторому конечному пределу a. □

▷▷ **3.2.55.** Проверьте с помощью критерия Коши сходимость последовательностей:

1) $x_n = 3^{(-1)^n}$;
2) $x_n = \{\frac{n^2+1}{n}\}$.

Теорема Штольца-Чезаро.

Теорема 3.2.18 (О.Штольц, Э.Чезаро). [10] *Пусть $\{y_n\}$ и $\{z_n\}$ – две последовательности, причем*

(i) $\{y_n\}$ *строго монотонна:*

$$y_1 < y_2 < ... < y_n < ... \qquad \text{или} \qquad y_1 > y_2 > ... > y_n > ... \tag{3.2.79}$$

(ii) $\{y_n\}$ *бесконечно большая:*

$$y_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty \tag{3.2.80}$$

(iii) последовательность $\frac{z_n - z_{n-1}}{y_n - y_{n-1}}$ *имеет конечный предел:*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{z_n - z_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = A \tag{3.2.81}$$

Тогда последовательность $\{\frac{z_n}{y_n}\}$ *тоже имеет конечный предел, и он совпадает с* A*:*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{z_n}{y_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{z_n - z_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = A \tag{3.2.82}$$

Доказательство. Заметим сразу, что достаточно рассмотреть случай, когда y_n возрастает:

$$y_1 < y_2 < ... < y_n < ...,$$

поскольку случай убывающей последовательности

$$y_1 > y_2 > ... > y_n > ...$$

сводится к случаю возрастающей заменой $\tilde{y}_n = -y_n$, $(\tilde{y}_1 < \tilde{y}_2 < ... < \tilde{y}_n < ...)$. Заодно можно считать, что все y_n положительны:

$$0 < y_1 < y_2 < ... < y_n < ... \tag{3.2.83}$$

Из условия (iii) следует, что $\frac{z_n - z_{n-1}}{y_n - y_{n-1}}$ представимо в виде

$$\frac{z_n - z_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = A + \alpha_n, \tag{3.2.84}$$

где

$$\alpha_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \tag{3.2.85}$$

Зафиксируем $\varepsilon > 0$, и подберем N так чтобы

$$\forall n > N \quad |\alpha_n| < \frac{\varepsilon}{2} \tag{3.2.86}$$

(это можно сделать, потому что $|\alpha_n| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$).

Из (3.2.80) следует, что существует $M > N$ такое, что

$$\forall n > M \quad y_n > \frac{2}{\varepsilon} \cdot \Big| z_N - A \cdot y_N \Big|$$

то есть

$$\forall n > M \quad \Big| z_N - A \cdot y_N \Big| < \frac{\varepsilon}{2} \cdot y_n \tag{3.2.87}$$

Зафиксируем эти N и M. Из (3.2.84) получаем: для всякого $n > M > N$

$$z_n - z_{n-1} = (\alpha_n + A) \cdot (y_n - y_{n-1}) = \alpha_n \cdot (y_n - y_{n-1}) + A \cdot (y_n - y_{n-1})$$

---

[10] Otto Stolz (1842–1905), Ernesto Cesàro (1859 – 1906). Эта теорема используется при доказательстве правила Лопиталя 5.2.3 для раскрытия неопределенностей типа $\frac{\infty}{\infty}$.

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} z_n - z_{n-1} = \alpha_n \cdot (y_n - y_{n-1}) + A \cdot (y_n - y_{n-1}) \\ z_{n-1} - z_{n-2} = \alpha_{n-1} \cdot (y_{n-1} - y_{n-2}) + A \cdot (y_{n-1} - y_{n-2}) \\ \dots \\ z_{N+1} - z_N = \alpha_{N+1} \cdot (y_{N+1} - y_N) + A \cdot (y_{N+1} - y_N) \end{cases}$$

$$\Downarrow \quad \text{(складываем уравнения)}$$

$$\overbrace{z_n - z_{n-1} + \dots + z_{N+1} - z_N}^{\substack{\text{после сокращений остаются} \\ \text{только первое и последнее слагаемое}}} = \alpha_n \cdot (y_n - y_{n-1}) + \dots + \alpha_{N+1} \cdot (y_{N+1} - y_N) + \\ + A \cdot (\underbrace{y_n - y_{n-1} + \dots + y_{N+1} - y_N}_{\substack{\text{после сокращений остаются} \\ \text{только первое и последнее слагаемое}}})$$

$$\Downarrow$$

$$z_n - z_N = \alpha_n \cdot (y_n - y_{n-1}) + \dots + \alpha_{N+1} \cdot (y_{N+1} - y_N) + A \cdot (y_n - y_N)$$

$$\Downarrow$$

$$z_n - A \cdot y_n = \alpha_n \cdot (y_n - y_{n-1}) + \dots + \alpha_{N+1} \cdot (y_{N+1} - y_N) + z_N - A \cdot y_N$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{aligned} \Big|z_n - A \cdot y_n\Big| &= \Big|\alpha_n(y_n - y_{n-1}) + \dots + \alpha_{N+1}(y_{N+1} - y_N) + z_N - A \cdot y_N\Big| \leqslant \\ &\leqslant \underbrace{|\alpha_n|}_{\substack{\wedge\ (3.2.86) \\ \frac{\varepsilon}{2}}} \cdot \Big|y_n - y_{n-1}\Big| + \dots + \underbrace{|\alpha_{N+1}|}_{\substack{\wedge\ (3.2.86) \\ \frac{\varepsilon}{2}}} \cdot \Big|y_{N+1} - y_N\Big| + \Big|z_N - A \cdot y_N\Big| < \\ &< \frac{\varepsilon}{2} \cdot \Big|\underbrace{y_n - y_{n-1}}_{\substack{\vee\ (3.2.79) \\ 0}}\Big| + \dots + \frac{\varepsilon}{2} \cdot \Big|\underbrace{y_{N+1} - y_N}_{\substack{\vee\ (3.2.79) \\ 0}}\Big| + \Big|z_N - A \cdot y_N\Big| = \\ &= \frac{\varepsilon}{2} \cdot \Big(y_n - y_{n-1}\Big) + \dots + \frac{\varepsilon}{2} \cdot \Big(y_{N+1} - y_N\Big) + \Big|z_N - A \cdot y_N\Big| = \\ &= \frac{\varepsilon}{2} \cdot \Big(\underbrace{y_n - y_{n-1} + \dots + y_{N+1} - y_N}_{\substack{\text{после сокращений остаются} \\ \text{только первое и последнее слагаемое}}} \Big) + \Big|z_N - A \cdot y_N\Big| = \\ &= \frac{\varepsilon}{2} \cdot \Big(\underbrace{y_n - \overbrace{y_N}^{\substack{0 \\ \wedge\ (3.2.83)}}}_{\substack{\wedge \\ y_n}}\Big) + \underbrace{\Big|z_N - A \cdot y_N\Big|}_{\substack{\wedge\ (3.2.87) \\ \frac{\varepsilon}{2} \cdot y_n}} < \frac{\varepsilon}{2} \cdot y_n + \frac{\varepsilon}{2} \cdot y_n = \varepsilon \cdot y_n \end{aligned}$$

$$\Downarrow$$

$$\Big|z_n - A \cdot y_n\Big| < \varepsilon \cdot y_n$$

$$\Downarrow$$

$$\Big|\frac{z_n}{y_n} - A\Big| < \varepsilon$$

У нас получилось, что для всякого $\varepsilon > 0$ найдется M такое, что

$$\forall n > M \quad \Big|\frac{z_n}{y_n} - A\Big| < \varepsilon$$

То есть

$$\forall n > M \quad -\varepsilon < \frac{z_n}{y_n} - A < \varepsilon$$

Иными словами, для любого $\varepsilon > 0$ почти все числа $\frac{z_n}{y_n} - A$ лежат в интервале $(-\varepsilon, \varepsilon)$. Значит,

$$\frac{z_n}{y_n} - A \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

то есть,

$$\frac{z_n}{y_n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} A$$

□

(c) Приложения предела последовательности

Десятичная запись вещественных чисел.

Лемма 3.2.19. *Для всякого вещественного числа $x \in (0,1)$ последовательность*

$$x_N = \frac{[x \cdot 10^N]}{10^N} \qquad (3.2.88)$$

обладает следующими свойствами:

(i) для всякого $N \in \mathbb{N}$ выполняется неравенство

$$0 \leqslant x - x_N < \frac{1}{10^N} \qquad (3.2.89)$$

из которого следует, что x_N сходится к x:

$$x_N \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} x \qquad (3.2.90)$$

(ii) последовательность $\{a_{-k};\ k \in \mathbb{N}\}$, определенная правилом

$$a_{-1} = x_1 \cdot 10 = [x \cdot 10], \qquad (3.2.91)$$
$$a_{-k} = (x_k - x_{k-1}) \cdot 10^k \quad (k > 1) \qquad (3.2.92)$$

состоит из целых чисел в интервале $\{0, 1, ..., 9\}$:

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad a_{-k} \in \{0, 1, ..., 9\} \qquad (3.2.93)$$

(iii) справедливо тождество

$$x_N = \sum_{k=1}^{N} a_{-k} \cdot 10^{-k} \qquad (3.2.94)$$

Доказательство. 1. Начнем с (3.2.89):

$$\{x \cdot 10^N\} \in [0,1) \qquad (2.2.294)$$

$$\Downarrow$$

$$x - x_N = x - \frac{[x \cdot 10^N]}{10^N} =$$
$$= \frac{x \cdot 10^N}{10^N} - \frac{[x \cdot 10^N]}{10^N} = \frac{x \cdot 10^N - [x \cdot 10^N]}{10^N} =$$
$$= (2.2.292) = \frac{\{x \cdot 10^N\}}{10^N} \in \left[0, \frac{1}{10^N}\right)$$

2. Докажем (3.2.93). Сначала заметим, что

$$\forall k \in \mathbb{N} \qquad x_k \cdot 10^k = [x \cdot 10^k] \in \mathbb{Z}$$

$$\Downarrow$$

$$a_{-k} = \begin{Bmatrix} x_1, & k = 1 \\ (x_k - x_{k-1}) \cdot 10^k, & k > 1 \end{Bmatrix} \in \mathbb{Z}$$

Теперь для $k = 1$ получаем:

$$0 < x < 1$$
$$\Downarrow$$
$$0 < x \cdot 10 < 10$$
$$\Downarrow \quad (2.2.291)$$
$$0 \leqslant [x \cdot 10] < 10$$
$$\Downarrow$$
$$a_{-1} = [x \cdot 10] \in \{0, 1, ..., 9\}$$

Затем для $k > 1$ получаем:

$$0 \leqslant x - x_{k-1} < \frac{1}{10^{k-1}} \qquad (3.2.89)$$
$$\Downarrow$$
$$0 \leqslant (x - x_{k-1}) \cdot 10^k < 10$$
$$\Downarrow \quad (2.2.291)$$
$$0 \leqslant \underbrace{[(x - x_{k-1}) \cdot 10^k]}_{\substack{\| \\ [x \cdot 10^k - x_{k-1} \cdot 10^k] \\ \| \\ [x \cdot 10^k] - x_{k-1} \cdot 10^k \\ \| \\ \left(\frac{[x \cdot 10^k]}{10^k} - x_{k-1}\right) \cdot 10^k \\ \| \\ (x_k - x_{k-1}) \cdot 10^k \\ \| \\ a_{-k}}} < 10$$
$$\Downarrow$$
$$a_{-k} \in \{0, 1, ..., 9\}$$

3. Формула (3.2.94) доказывается индукцией. При $N = 1$ она принимает вид:

$$x_1 = a_{-1} \cdot 10^{-1},$$

и это эквивалентно (3.2.91). Далее, если (3.2.94) верна для $N = m$,

$$\sum_{k=1}^{m} a_{-k} \cdot 10^{-k} = x_m,$$

то для $N = m + 1$ мы получаем:

$$\sum_{k=1}^{m+1} a_{-k} \cdot 10^{-k} = \\ = \overbrace{\sum_{k=1}^{m} a_{-k} \cdot 10^{-k}}^{x_m} + a_{-m-1} \cdot 10^{-m-1} = \\ = x_m + a_{-m-1} \cdot 10^{-m-1} = (3.2.92) = \\ = x_m + \big((x_{m+1} - x_m) \cdot 10^{m+1}\big) \cdot 10^{-m-1} = \\ = x_m + (x_{m+1} - x_m) = x_{m+1}$$

□

Из леммы 3.2.19 и теоремы 2.2.18 следует

Теорема 3.2.20. *Всякое число $x > 0$ представимо в виде*

$$x = \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot 10^k + \lim_{N\to\infty} \sum_{k=1}^{N} a_{-k} \cdot 10^{-k} \qquad (3.2.95)$$

где $n \in \mathbb{Z}_+$, $a_i \in \{0, 1, ..., 9\}$.

Доказательство. Разложим x в сумму целой и дробной части:

$$x = [x] + \{x\}$$

Если $[x] = 0$, то в (3.2.95) нужно положить $n = 0$, $a_0 = 0$, если же $[x] \neq 0$, то по теореме 2.2.18 $[x]$ можно представить в виде

$$[x] = \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot 10^k \qquad (a_k \in \{0, 1, ..., 9\})$$

То же самое с дробной частью: если $\{x\} = 0$, то в (3.2.95) нужно положить $a_{-k} = 0$ при $k \in \mathbb{N}$, а если $\{x\} \neq 0$, то $\{x\}$ можно по лемме 3.2.19 записать в виде

$$\{x\} = \lim_{N\to\infty} \sum_{k=1}^{N} a_{-k} \cdot 10^{-k} \qquad (a_{-k} \in \{0, 1, ..., 9\}).$$

□

- Формула (3.2.95) называется *десятичным представлением* числа $x > 0$, а последовательность $\{a_n, a_{n-1}, ..., a_1, a_0, a_{-1}, ...\}$ – *последовательностью коэффициентов* этого представления. Если начиная с номера $N + 1$ все числа a_{-k} $(k \geqslant N + 1)$ равны нулю, то справедливо равенство

$$x = \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot 10^k + \sum_{k=1}^{N} a_{-k} \cdot 10^{-k}$$

которое коротко принято записывать так:

$$x = a_n ... a_1 a_0, a_{-1} ... a_{-N}$$

(запятая отделяет цифры с индексами 0 и -1), и это называется *десятичной записью* числа x.

◇ **3.2.56.** Запись

$$x = 45,28$$

расшифровывается как равенство

$$x = 4 \cdot 10^1 + 5 \cdot 10^0 + 2 \cdot 10^{-1} + 8 \cdot 10^{-2}$$

- Помимо этого, запись вида

$$x = a_n ... a_1 a_0, a_{-1} ... a_{-N} ...$$

(в которой перечислены все числа a_k до номера a_{-N} включительно, а после них стоит многоточие), называется *приближенной десятичной записью* числа x и означает, что x отличается от числа $a_n ... a_1 a_0, a_{-1} ... a_{-N}$ не больше чем на 10^{-N}:

$$0 \leqslant x - a_n ... a_1 a_0, a_{-1} ... a_{-N} < 10^{-N}$$

◇ **3.2.57.** Запись

$$x = 102,67...$$

означает, что справедлива оценка

$$0 \leqslant x - 102,67 < 10^{-2}$$

- Если $x < 0$, то по теореме 3.2.20 число $-x > 0$ представимо в виде

$$-x = \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot 10^k + \sum_{k=1}^{N} a_{-k} \cdot 10^{-k}$$

Опять же, если здесь начиная с номера $N + 1$ все числа a_{-k} $(k \geqslant N + 1)$ равны нулю, то справедливо равенство

$$-x = \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot 10^k + \sum_{k=1}^{N} a_{-k} \cdot 10^{-k}$$

и его принято коротко записывать так:

$$x = -a_n ... a_1 a_0, a_{-1} ... a_{-N}$$

(запятая отделяет цифры с индексами 0 и -1). Это называется *десятичной записью* числа $x < 0$.

◇ **3.2.58.** Запись

$$x = -34,72$$

расшифровывается как равенство

$$-x = 3 \cdot 10^1 + 4 \cdot 10^0 + 7 \cdot 10^{-1} + 2 \cdot 10^{-2}$$

- Помимо этого, запись вида
$$x = -a_n...a_1a_0, a_{-1}...a_{-N}...$$
(в которой перечислены все числа a_k до номера a_{-N} включительно, а после них стоит многоточие), называется *приближенной десятичной записью* числа $x < 0$ и означает, что $-x$ отличается от числа $a_n...a_1a_0, a_{-1}...a_{-N}$ не больше чем на 10^{-N}:
$$0 \leqslant -x - a_n...a_1a_0, a_{-1}...a_{-N} < 10^{-N}$$
Понятно, что это равносильно оценке
$$10^{-N} < x + a_n...a_1a_0, a_{-1}...a_{-N} \leqslant 0$$

◇ **3.2.59.** Запись
$$x = -2,31...$$
означает оценку
$$10^{-2} < x + 2,31 \leqslant 0$$

Число Непера e. Из теоремы Вейерштрасса 3.2.11 выводится следующее утверждение, неожиданно оказывающееся важным в анализе:

- Последовательность $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ имеет конечный предел, который называется *числом Непера* и обозначается буквой e:
$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \tag{3.2.96}$$

Доказательство. Рассмотрим сначала вспомогательную последовательность $y_n = (1+\frac{1}{n})^{n+1}$ и докажем что она сходится. Для $n \geqslant 2$ мы получаем:

$$\frac{y_{n-1}}{y_n} = \frac{(1+\frac{1}{n-1})^n}{(1+\frac{1}{n})^{n+1}} = \frac{(\frac{n}{n-1})^n}{(\frac{n+1}{n})^{n+1}} =$$
$$= \frac{n^{2n}}{(n^2-1)^n}\cdot\frac{n}{n+1} = \left(\frac{n^2}{n^2-1}\right)^n\cdot\frac{n}{n+1} =$$
$$= \left(1+\frac{1}{n^2-1}\right)^n\cdot\frac{n}{n+1} \geqslant \left(\begin{array}{c}\text{неравенство}\\ \text{Бернулли}\\ (2.2.242)\end{array}\right) \geqslant$$
$$\geqslant \left(1+\frac{n}{n^2-1}\right)\cdot\frac{n}{n+1} >$$
$$> \left(1+\frac{n}{n^2}\right)\cdot\frac{n}{n+1} = \left(1+\frac{1}{n}\right)\cdot\frac{n}{n+1} = 1$$

То есть последовательность y_n монотонно убывает:
$$y_{n-1} > y_n$$
С другой стороны, все числа y_n положительны, и поэтому она ограничена:
$$0 < ... < y_n < y_{n-1} < ... < y_3 < y_2 < y_1$$
По теореме Вейерштрасса 3.2.11, это означает, что последовательность y_n сходится:
$$\exists \lim_{n\to\infty} y_n \in \mathbb{R}.$$
Теперь сходимость последовательности $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ следует из правила вычисления предела дроби (свойство 4° на с. 214):

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}}{1+\frac{1}{n}} =$$
$$= \lim_{n\to\infty}\frac{y_n}{1+\frac{1}{n}} = \frac{\lim_{n\to\infty} y_n}{\lim_{n\to\infty}\Big(1+\underbrace{\boxed{\frac{1}{n}}}_{\to 0}\Big)} =$$
$$= \lim_{n\to\infty} y_n \in \mathbb{R}.$$
□

Теорема 3.2.21. *Число Непера e удовлетворяет соотношению:*
$$e = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!} \tag{3.2.97}$$
причем для любого $n \in \mathbb{N}$ справедливо двойное неравенство:
$$0 < e - \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!} \leqslant \frac{1}{n!\cdot n} \tag{3.2.98}$$
или, что то же самое двойное неравенство
$$\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!} < e \leqslant \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!} + \frac{1}{n!\cdot n} \tag{3.2.99}$$

Доказательство. Обозначим
$$E_n = \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}$$
и докажем сначала равенство (3.2.97).

1. Поскольку
$$E_n = \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!} < \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!} + \frac{1}{(n+1)!} =$$
$$= \sum_{k=0}^{n+1}\frac{1}{k!} = E_{n+1},$$
эта последовательность возрастает.

С другой стороны, из (2.2.244) получаем:
$$\forall k \in \mathbb{Z}_+ \qquad k! \geqslant 2^{k-1}$$
$$\Downarrow$$
$$\forall k \in \mathbb{Z}_+ \qquad \frac{1}{k!} \leqslant \frac{1}{2^{k-1}}$$
$$\Downarrow$$

$$E_n=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\leqslant\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2^{k-1}}=2\cdot\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^k=$$
$$=(2.2.246)=2\cdot\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{2}}=2\cdot\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{\frac{1}{2}}=$$
$$=4\cdot\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)=4-\frac{1}{2^{n-1}}<4,$$

и значит она ограничена сверху.

По теореме Вейерштрасса 3.2.11 получаем, что она имеет предел. Обозначим его буквой E:

$$E_n\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}E$$

Наша задача – проверить, что $E=e$. С одной стороны,

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=(2.2.251)=\sum_{k=0}^{n}C_n^k\cdot\frac{1}{n^k}=$$
$$=\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}\cdot\frac{1}{n^k}=$$
$$=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\cdot\frac{n!}{(n-k)!}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^k=$$
$$=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\cdot\underbrace{n\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}_{k\text{ множителей}}\cdot\underbrace{\frac{1}{n}\cdot\ldots\cdot\frac{1}{n}}_{k\text{ множителей}}=$$
$$=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\cdot\underbrace{\frac{n}{n}\cdot\frac{n-1}{n}\cdot\ldots\cdot\frac{n-k+1}{n}}_{k\text{ множителей}}=$$
$$=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\cdot\underbrace{1\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{k-1}{n}\right)}_{k\text{ множителей, и все }\leqslant 1}\leqslant$$
$$\leqslant\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}=E_n$$

$$\Downarrow$$

$$e=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\leqslant\lim_{n\to\infty}E_n=E$$

А с другой – при любом $m\leqslant n$

$$\overbrace{\sum_{k=0}^{m}\frac{1}{k!}\cdot1\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{k-1}{n}\right)}^{\substack{E_m=\sum_{k=0}^m\frac{1}{k!}\\ \uparrow\,(n\to\infty)}}\leqslant$$
$$\leqslant\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\cdot1\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{k-1}{n}\right)=$$
$$=\underbrace{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}_{\substack{\downarrow\,(n\to\infty)\\ e}}$$

$$\Downarrow$$
$$E_m\leqslant e\qquad(m\in\mathbb{N})$$
$$\Downarrow$$
$$E=\lim_{m\to\infty}E_m\leqslant e$$

2. Докажем теперь (3.2.98). Первое неравенство здесь следует из возрастания последовательности E_n:

$$e=\lim_{m\to\infty}E_m=\sup_{m\in\mathbb{Z}_+}E_m\geqslant E_{n+1}>E_n$$
$$\Downarrow$$
$$e-E_n>0$$

А второе – из неравенства (2.2.245): для любых $n,p\in\mathbb{N}$ мы получим

$$(n+m)!\geqslant n!\cdot(n+1)^m\qquad(2.2.245)$$
$$\Downarrow$$
$$\frac{1}{(n+m)!}\leqslant\frac{1}{n!\cdot(n+1)^m}$$
$$\Downarrow$$

$$E_{n+p}-E_n=\sum_{k=0}^{n+p}\frac{1}{k!}-\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}=\sum_{k=n+1}^{n+p}\frac{1}{k!}=$$
$$=\left|\begin{matrix}m=k-n\\ k=m+n\\ 1\leqslant m\leqslant p\end{matrix}\right|=\sum_{m=1}^{p}\frac{1}{(n+m)!}\leqslant$$
$$\leqslant\sum_{m=1}^{p}\frac{1}{n!\cdot(n+1)^m}=\frac{1}{n!}\cdot\sum_{m=1}^{p}\left(\frac{1}{n+1}\right)^m=$$
$$=(2.2.247)=\frac{1}{n!}\cdot\frac{\frac{1}{n+1}-\left(\frac{1}{n+1}\right)^{p+1}}{1-\frac{1}{n+1}}=$$
$$=\frac{1}{n!}\cdot\frac{1-\left(\frac{1}{n+1}\right)^p}{n+1-1}=\frac{1}{n!}\cdot\frac{1-\left(\frac{1}{n+1}\right)^p}{n}$$
$$\Downarrow$$
$$\underbrace{E_{n+p}-E_n}_{\substack{(p\to\infty)\downarrow\\ e-E_n}}\leqslant\underbrace{\frac{1}{n!}\cdot\frac{1-\left(\frac{1}{n+1}\right)^p}{n}}_{\substack{\downarrow\,(p\to\infty)\\ \frac{1}{n!\cdot n}}}$$
$$\Downarrow$$
$$e-E_n\leqslant\frac{1}{n!\cdot n}$$

□

! 3.2.60. Двойное неравенство (3.2.99) позволяет оценивать число e. Для нахождения двух первых знаков после запятой можно взять $n=7$:

$$\sum_{k=0}^{7}\frac{1}{k!}<e\leqslant\sum_{k=0}^{7}\frac{1}{k!}+\frac{1}{7!\cdot7}$$

Значения величин справа и слева можно приближенно вычислить (на бумаге, или с помощью калькулятора), получив оценки сверху и снизу, из которых затем выводится оценка для e: с одной стороны,

$$\tfrac{1}{8!\cdot 8} = 0,000198412698...$$
$$\Downarrow$$
$$0,00019 < \tfrac{1}{8!\cdot 8} < 0,0002$$

с другой –

$$\textstyle\sum_{k=0}^{8} \frac{1}{k!} = 2,71827877...$$
$$\Downarrow$$
$$2,718 < \textstyle\sum_{k=0}^{8} \frac{1}{k!} < 2,719$$

И вместе это дает:

$$2,718 < \sum_{k=0}^{8} \frac{1}{k!} < e < \sum_{k=0}^{8} \frac{1}{k!} + \frac{1}{8!\cdot 8} < \\ < 2,719 + 0,0002 = 2,7192$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{2,71 < e < 2,72} \qquad (3.2.100)$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{e = 2,71...} \qquad (3.2.101)$$

Теорема 3.2.22. *Число e иррационально:*

$$e \notin \mathbb{Q}$$

Доказательство. Предположим, что оно рационально, то есть имеет вид

$$e = \frac{m}{n}$$

для некоторых $m, n \in \mathbb{N}$. Из оценки (3.2.100) следует, что $n \geqslant 2$ (потому что при $n = 1$ мы получили бы, что e целое). Запомним это. Из двойного неравенства (3.2.98) мы получаем:

$$0 < \frac{m}{n} - \sum_{k=n}^{n} \frac{1}{k!} \leqslant \frac{1}{n!\cdot n}$$

$$\Downarrow$$

$$0 < \frac{m\cdot n!}{n} - \sum_{k=n}^{n} \frac{n!}{k!} \leqslant \frac{1}{n}$$

$$\Downarrow$$

$$0 < \underbrace{\underbrace{m\cdot(n-1)!}_{\text{целое}} - \sum_{k=n}^{n} \underbrace{n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k)}_{\text{целое}}}_{\text{целое}} \leqslant \\ \leqslant \frac{1}{n} \leqslant \frac{1}{2}$$

Мы получаем, что в полуинтервале $\left(0; \frac{1}{2}\right]$ лежит какое-то целое число. Понятно, что это невозможно, и значит наше предположение (о рациональности e) было неверным. □

§ 3 Непрерывные функции

(a) Что такое непрерывная функция?

Пусть нам дано уравнение, связывающее две физические величины,

$$y = f(x),$$

и мы говорим, что y непрерывно зависит от x. Что это означает? Интуитивный ответ очевиден: непрерывная функция – это такая, у которой график – непрерывная линия.

◇ **3.3.1.** Например, функция

$$f(x) = x^2$$

непрерывна, потому что у нее график – непрерывная линия

◇ **3.3.2.** И наоборот, функция *сигнум*

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & \text{если } x > 0 \\ 0, & \text{если } x = 0 \\ -1, & \text{если } x < 0 \end{cases}$$

разрывна, потому что у нее график имеет разрыв:

Однако, это соображение не может быть точным определением, потому что оно объясняет смысл одного нового понятия (непрерывная функция) с помощью другого нового понятия (непрерывная линия).

Как же быть? Оказывается, имеется очень простой способ объяснить, что такое непрерывная функция, опираясь на известное нам уже (то есть, старое для нас) понятие предела последовательности. Это делается с помощью следующей серии определений.

- Функция f, определенная на множестве $E \subseteq \mathbb{R}$, называется
  - *непрерывной в точке $a \in E$ на множестве E*, если f определена на множестве E, и для всякой последовательности точек $x_n \in E$, сходящейся к точке a,
  $$x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} a \qquad \Big(x_n \in E\Big)$$
  соответствующая последовательность $f(x_n)$ значений функции f стремится к $f(a)$:
  $$f(x_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f(a)$$
  (при этом точка a называется *точкой непрерывности функции f на множестве E*);
  - *разрывной в точке a на множестве E*, если f определена на множестве E, и найдется последовательность
  $$x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} a \qquad \Big(x_n \in E\Big)$$
  такая, что $f(x_n)$ не стремится к $f(a)$
  $$f(x_n) \underset{n\to\infty}{\not\longrightarrow} f(a)$$
  (при этом точка a называется *точкой разрыва функции f на множестве E*)
- Функция f, определенная на множестве E, называется
  - *непрерывной на множестве E*, если она непрерывна в любой точке $a \in E$ на множестве E, то есть для всякой последовательности точек $x_n \in E$, сходящейся к любой точке $a \in E$,
  $$x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} a \qquad \Big(x_n, a \in E\Big)$$
  соответствующая последовательность $f(x_n)$ значений функции f стремится к $f(a)$:
  $$f(x_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f(a)$$
  - *разрывной на множестве E*, если она разрывна в некоторой точке $a \in E$ на множестве E, то есть существует такая точка $a \in E$ и такая последовательности точек $x_n \in E$, сходящаяся к a,
  $$x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} a \qquad \Big(x_n, a \in E\Big)$$

что соответствующая последовательность $f(x_n)$ значений функции f не стремится к $f(a)$:

$$f(x_n) \underset{n\to\infty}{\not\longrightarrow} f(a)$$

- Функция f называется *непрерывной* (соответственно, *разрывной*), если она непрерывна (соответственно, разрывна) на своей области определения $\mathsf{D}(f)$.

◇ **3.3.3.** Функция $f(x) = x^2$ будет непрерывна на множестве $E = \mathbb{R}$, потому что (по свойству 3^0 сходящихся последовательностей на с.216) из условия $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} a$ следует условие $f(x_n) = (x_n)^2 \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} a^2 = f(a)$.

◇ **3.3.4.** Наоборот, функция сигнум $f(x) = \operatorname{sgn} x$, определенная выше формулой (3.1.3), разрывна на множестве $E = \mathbb{R}$, точнее, в точке $x = 0$, потому что если взять последовательность

$$x_n = \frac{1}{n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

то окажется, что

$$f(x_n) = 1 \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1 \neq 0 = f(0)$$

Однако, в любой другой точке она непрерывна. Например, в любой точке $a > 0$: если взять $\varepsilon = a > 0$ и рассмотреть окрестность $(0; 2a) = (a - \varepsilon; a + \varepsilon)$, то для всякой последовательности

$$x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} a$$

мы получим, что почти все числа x_n лежат в интервале $(0; 2a)$, значит, для почти всех $n \in \mathbb{N}$ выполняется неравенство

$$x_n > 0$$

поэтому для почти всех $n \in \mathbb{N}$

$$f(x_n) = \operatorname{sgn} x_n = 1$$

и следовательно,

$$f(x_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1 = f(a)$$

Аналогично доказывается, что $f(x) = \operatorname{sgn} x$ непрерывна в любой точке $a < 0$.

▷ **3.3.5.** Покажите, что функция

$$f(x) = \operatorname{sgn}^2 x = \begin{cases} 1, & \text{если } x \neq 0 \\ 0, & \text{если } x = 0 \end{cases}$$

также разрывна в точке 0, но непрерывна в любой точке $a \neq 0$.

◇ **3.3.6.** Покажем, что функция $f(x) = \{x\}$ (дробная часть числа) разрывна в точке 1. Действительно, для последовательности

$$x_n = 1 - \frac{1}{n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$$

мы получим

$$\{x_n\} = (2.2.293) = x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1,$$

то есть

$$\{x_n\} \underset{n\to\infty}{\not\longrightarrow} 0 = \{1\}.$$

В силу периодичности функции $f(x) = \{x\}$, отсюда следует, что она разрывна в любой точке $a \in \mathbb{Z}$. С другой стороны, нетрудно убедиться, что она непрерывна в любой точке $a \notin \mathbb{Z}$.

▷ **3.3.7.** В каких точках непрерывна функция $f(x) = [x]$ (целая часть числа)?

▷ **3.3.8.** Для следующих функций найдите точки разрыва (если они есть) и докажите, что в этих точках функции действительно разрывны:

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x, & \text{если } x > 0 \\ -1 - x, & \text{если } x < 0 \\ 0, & \text{если } x = 0 \end{cases},$$

$$g(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x < 0 \\ x^2, & \text{если } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 0, & \text{если } x > 1 \end{cases},$$

◇ **3.3.9. Непрерывность модуля** Функция $f(x) = |x|$ непрерывна.

Доказательство. Для любой точки $a \in \mathbb{R}$ и любой последовательности $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} a$ получаем цепочку следствий:

$$x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} a$$

$$\Downarrow \quad \left(\begin{array}{c}\text{применяем}\\ \text{теорему 3.2.5}\end{array}\right)$$

$$x_n - a \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

$$\Downarrow \quad \left(\begin{array}{c}\text{вспоминаем}\\ \text{определение}\\ \text{бесконечно малой}\\ \text{на с.211}\end{array}\right)$$

$$|x_n - a| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

$$\Downarrow \quad (3.1.11)$$

$$\underbrace{-|x_n - a|}_{\substack{\downarrow \\ 0}} \leqslant |x_n| - |a| \leqslant \underbrace{|x_n - a|}_{\substack{\downarrow \\ 0}}$$

$$\Downarrow \quad \left(\begin{array}{c}\text{применяем}\\ \text{теорему о двух}\\ \text{милиционерах 3.2.10}\end{array}\right)$$

$$|x_n| - |a| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

Мы получили, что если $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} a$, то $|x_n| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} |a|$. Это означает, что функция $f(x) = |x|$ непрерывна в любой точке $a \in \mathbb{R}$. Таким образом, $f(x) = |x|$ – непрерывная функция. □

◇ **3.3.10. Непрерывность линейной функции.** Функция вида

$$f(x) = kx + b, \qquad k, b \in \mathbb{R} \tag{3.3.102}$$

называется линейной. Покажем, что она непрерывна.

Доказательство. Пусть

$$x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} a$$

тогда, в силу арифметических свойств пределов последовательностей ($1^0, 3^0$ из (a)), имеем

$$f(x_n) = kx_n + b \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} ka + b = f(a)$$

то есть $f(x)$ непрерывна в точке a □

◇ **3.3.11. Непрерывность степенной функции.** Функция $f(x) = x^k$ непрерывна при любом $k \in \mathbb{Z}$. В частности, функция $x \mapsto \frac{1}{x}$ непрерывна.

Доказательство. Напомним, что при $k \geqslant 0$ степень x^k определялась индуктивным соотношением (2.2.235), а при $k < 0$ – формулой (2.2.270). Рассмотрим три случая.

1. При $k = 0$ эта функция будет по определению константой

$$x^0 = 1,$$

поэтому в этом случае она непрерывна тривиальным образом.

2. Пусть $k \in \mathbb{N}$, тогда функция $f(x) = x^k$ определена на всей числовой прямой $\mathbb{R}$. Зафиксируем точку $a \in \mathbb{R}$ и рассмотрим произвольную последовательность

$$x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} a$$

Тогда, в силу арифметических свойств пределов последовательностей (4^0 на с. 216), имеем

$$f(x_n) = (x_n)^k \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} a^k = f(a)$$

то есть $f(x)$ непрерывна в точке a. Поскольку точка $a \in D(f)$ выбиралась произвольно, мы получаем, что функция $f(x) = x^k$ непрерывна.

2. Пусть $k = -m$, $m \in \mathbb{N}$, тогда функция $f(x) = x^{-m}$ определена на множестве $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$. Зафиксируем точку $a \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$ и рассмотрим произвольную последовательность

$$x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} a$$

тогда, в силу арифметических свойств пределов последовательностей (4^0 на с. 216), имеем

$$(x_n)^m \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} a^m$$

а затем по лемме 3.2.6,

$$f(x_n) = \frac{1}{(x_n)^m} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{a^m} = f(a)$$

то есть $f(x)$ непрерывна в точке a. Поскольку точка $a \in D(f)$ выбиралась произвольно, мы получаем, что функция $f(x) = x^k$ непрерывна. □

Интуитивный смысл непрерывности в том, что график функции f непрерывной на каком-нибудь интервале $(\alpha; \beta)$ является непрерывной кривой.

▷ **3.3.12.** По графику функции

определите, в каких точках она является непрерывной, и будет ли она непрерывной

1) на интервале $(-\infty; 1)$?
2) на интервале $(-\infty; 0)$?
3) на интервале $(1; +\infty)$?
4) на интервале $(0; 1)$?

(b) Непрерывность и монотонные последовательности

Теорема 3.3.1. *Для всякой функции f, определенной на множестве M, следующие условия эквивалентны:*

(i) *f непрерывна в точке a на M;*

(ii) *для любой строго монотонной последовательности $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} a$*

$$f(x_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f(a) \tag{3.3.103}$$

Доказательство. Ясно, что из (i) следует (ii), потому что если f непрерывна в a, то $f(x_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f(a)$ для любой последовательности $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} a$ (необязательно монотонной). Докажем, что наоборот если (i) не выполняется, то не выполняется и (ii). Пусть f – разрывная функция на M, то есть существует последовательность $x_n \in M$ такие что

$$x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} a \qquad \& \qquad f(x_n) \underset{n\to\infty}{\not\longrightarrow} f(a)$$

План наших действий состоит в том, чтобы, последовательно переходя от x_n к ее подпоследовательностям, построить строго монотонную последовательность с теми же свойствами.

1. Прежде всего, по свойству подпоследовательностей 2° на с.228, второе условие означает, что существует $\varepsilon > 0$ и последовательность натуральных чисел $n_k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \infty$, такие что

$$\forall k \in \mathbb{N} \qquad f(x_{n_k}) \notin (f(a) - \varepsilon; f(a) + \varepsilon)$$

Обозначив $y_k = x_{n_k}$, мы получим последовательность с такими свойствами:

$$y_k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} a \qquad \& \qquad \forall k \in \mathbb{N} \qquad f(y_k) \notin (f(a) - \varepsilon; f(a) + \varepsilon)$$

2. Заметим далее, что числа y_k не могут совпадать с a

$$\forall k \in \mathbb{N} \qquad y_k \neq a$$

потому что иначе мы получили бы, что для некоторых k числа $f(y_k) = f(a)$ лежат в интервале $(f(a) - \varepsilon; f(a) + \varepsilon)$. Отсюда следует, что либо бесконечный набор этих чисел лежит левее a, либо бесконечный набор этих чисел лежит правее a. Будем для определенности считать, что выполняется первое (второй случай рассматривается по аналогии):

$$y_k < a.$$

Тогда по свойству 4° на с.228, найдется последовательность $k_i \underset{i\to\infty}{\longrightarrow} \infty$ такая, что

$$\forall i \in \mathbb{N} \qquad y_{k_i} < a$$

Обозначив $z_i = y_{k_i}$, мы получим последовательность с такими свойствами:

$$z_i \underset{i\to\infty}{\longrightarrow} a \qquad \& \qquad \Big(\forall i \in \mathbb{N} \qquad z_i < a\Big) \qquad \& \qquad \Big(\forall i \in \mathbb{N} \qquad f(z_i) \notin (f(a) - \varepsilon; f(a) + \varepsilon)\Big)$$

3. После этого мы индуктивно определим две последовательности i_m и t_m. Сначала полагаем

$$i_1 = 1, \qquad t_1 = z_1$$

Затем, если для $m = 1, ..., l$ числа i_m и t_m определены, мы замечаем вот что. Поскольку $z_i < a$, $z_i \underset{i\to\infty}{\longrightarrow} a$ и $t_l < a$, найдется такое i_{l+1}, что $z_{i_{l+1}}$ лежит в интервале $(t_l; a)$:

$$z_{i_{l+1}} > t_l$$

Выбираем такое i_{l+1} и полагаем

$$t_{l+1} = z_{i_{l+1}}$$

Полученная последовательность $t_m = z_{m+1}$ обладает нужными нам свойствами. Во-первых, как подпоследовательность z_i, она стремится к a:

$$t_m = z_{i_m} \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} a$$

Во-вторых, последовательность значений f на ней не заходит в интервал $(f(a) - \varepsilon; f(a) + \varepsilon)$:

$$\forall m \in \mathbb{N} \qquad f(t_m) = f(z_{i_m}) \notin (f(a) - \varepsilon; f(a) + \varepsilon)$$

И, в-третьих, она строго монотонна:

$$t_m < z_{i_{m+1}} = t_{m+1}$$

□

(c) Операции над непрерывными функциями

Из непрерывных функций можно конструировать новые непрерывные функции с помощью алгебраических операций и операции композиции.

Арифметические операции с непрерывными функциями.

- Если f и g – две функции, определенные на множестве X, то их *суммой, разностью и произведением* называются функции на X, обозначаемые $f+g$, $f-g$ и $f\cdot g$, и определенные формулами

$$(f+g)(x) := f(x)+g(x), \qquad x\in X \tag{3.3.104}$$
$$(f-g)(x) := f(x)-g(x), \qquad x\in X \tag{3.3.105}$$
$$(f\cdot g)(x) := f(x)\cdot g(x), \qquad x\in X \tag{3.3.106}$$

- Если f и g – две функции, определенные на множестве X, причем f нигде не обращается в нуль на X, то *отношением* этих функций $\frac{g}{f}$ называется функция на X, определенная формулой

$$\frac{g}{f}(x) := \frac{g(x)}{f(x)}, \qquad x\in X \tag{3.3.107}$$

- Если f – функция, определенная на множестве X, а λ – число, то их *произведением* называется функция $\lambda\cdot f$ на X, определенная формулой

$$(\lambda\cdot f)(x) := \lambda\cdot f(x), \qquad x\in X \tag{3.3.108}$$

Теорема 3.3.2 (об арифметических операциях с непрерывными функциями)**.** *Если функции f и g непрерывны (на области определения), то непрерывны (на области определения) и функции*

$$f+g, \quad f-g, \quad \lambda\cdot f, \quad f\cdot g, \quad \frac{g}{f}$$

(где $\lambda\in\mathbb{R}$ – произвольное число).

Доказательство. Пусть точка a и последовательность $\{x_n\}$ таковы, что обе функции f и g в них определены, причем

$$x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} a$$

Тогда, поскольку функции f и g непрерывны в точке $x=a$, мы получаем

$$f(x_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f(a) \qquad g(x_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} g(a)$$

Поэтому, в силу свойств $1^0, 2^0, 4^0$ из (a), мы получаем

$$f(x_n)+g(x_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f(a)+g(a) \qquad f(x_n)-g(x_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f(a)-g(a) \qquad f(x_n)\cdot g(x_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f(a)\cdot g(a)$$

Это верно для произвольной точки a и последовательности $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} a$, поэтому функции $f+g$, $f-g$, $f\cdot g$ непрерывны. Аналогично доказывается непрерывность для функции $\lambda\cdot f$.

Если, кроме того, дополнительно потребовать, чтобы $f(a)\neq 0$ и $f(x_n)\neq 0$, то по свойству 5^0 из (a) мы получим

$$\frac{g(x_n)}{f(x_n)} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{g(a)}{f(a)}$$

и поскольку это будет верно для любой точки $a\in D(\frac{g}{f})$ и любой последовательности $x_n\in D(\frac{g}{f})$, $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} a$, мы получим, что функция $\frac{g}{f}$ тоже должна быть непрерывна. □

Непрерывность композиции. Вспомним, что на с.40 мы определили понятие композиции двух отношений. В частном случае, когда отображения являются числовыми функциями, их композиция также становится числовой функцией (в силу формул (0.3.232) и (0.3.233)), и мы можем считать отмеченную выше формулу (0.3.234) просто ее определением:

- Пусть g и f – две функции. Тогда функция $g\circ f$, определенная правилом

$$(g\circ f)(x) = g(f(x)), \tag{3.3.109}$$

называется *композицией* функций g и f. Эту функцию называют также *сложной функцией*, составленной из функций f и g.

◇ **3.3.13.** Пусть $g(y) = \frac{1}{y}$ и $f(x) = x + 1$. Тогда

$$(g \circ f)(x) = g(y)\Big|_{y=f(x)} = \frac{1}{y}\Big|_{y=x+1} = \frac{1}{x+1}$$

Если же взять композицию этих функций в обратном порядке, то мы получим другую функцию:

$$(f \circ g)(y) = f(x)\Big|_{x=g(y)} = x+1\Big|_{x=\frac{1}{y}} = \frac{1}{y} + 1$$

◇ **3.3.14.** Представить функции в виде композиции двух функций из списка на с.189:

$$G(x) = |x+1|, \quad H(x) = \frac{1}{\{x\}}$$

Решение:

$$G(x) = |x+1| = |y|\Big|_{y=x+1},$$

$$H(x) = \frac{1}{\{x\}} = \frac{1}{y}\Big|_{y=\{x\}}$$

▷▷ **3.3.15.** Составьте композиции из следующих функций в разном порядке (то есть найдите $g(y)\Big|_{y=f(x)}$ и $f(x)\Big|_{x=g(y)}$), и проверьте, будут ли эти функции одинаковы:

1) $g(y) = y^2$ и $f(x) = D(x) - \frac{1}{2}$.
2) $g(y) = \operatorname{sgn} y$ и $f(x) = |x|$.

▷▷ **3.3.16.** Представьте функции в виде композиции двух функций из списка на с.189:

1) $[\frac{x}{2}]$,
2) $\frac{[x]}{2}$.

Теорема 3.3.3 (о композиции непрерывных функций). *Если функции f и g непрерывны (на области определения), то их композиция $h(x) = g(f(x))$ тоже непрерывна (на области определения).*

Доказательство. Пусть точка a и последовательность $\{x_n\}$ лежат в области определения функции $h(x) = g(f(x))$, причем

$$x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} a$$

Тогда, поскольку $f(x)$ непрерывна в точке $x = a$,

$$f(x_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f(a)$$

Отсюда, поскольку $g(y)$ непрерывна в точке $y = f(a)$,

$$h(x_n) = g(f(x_n)) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} g(f(a))$$

Мы получили, что если $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} a$, то $h(x_n) = g(f(x_n)) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} g(f(a))$. Это означает, что $h(x) = g(f(x))$ непрерывна в точке $x = a$. Поскольку точка a с самого начала выбиралась произвольной, получаем, что $h(x) = g(f(x))$ непрерывна в произвольной точке, то есть всюду на области определения. □

(d) Теоремы о непрерывных функциях

Непрерывные функции обладают некоторыми важными свойствами, которые понадобятся в дальнейшем, в частности, для доказательства теоремы Ролля 5.1.6 (необходимой для доказательства теорем Лагранжа, Коши и Тейлора из главы 5), а также теоремы об интегрируемости непрерывной функции 7.2.4.

Теорема о сохранении знака

Теорема 3.3.4 (о сохранении знака непрерывной функцией). [11] *Пусть функция f определена в некоторой окрестности точки c и непрерывна в точке c, причем $f(c) \neq 0$. Тогда существует окрестность $(c-\delta; c+\delta)$ точки c такая, что всюду в этой окрестности функция f имеет тот же знак, что и $f(c)$:*

$$\forall x \in (c-\delta; c+\delta) \quad \operatorname{sgn} f(x) = \operatorname{sgn} f(c)$$

Доказательство. Пусть для определенности $f(c) > 0$, покажем что для некоторого $\delta > 0$ выполняется соотношение

$$\forall x \in (c-\delta; c+\delta) \quad f(x) > 0 \tag{3.3.110}$$

[11] Эта теорема используется далее в главе 5 при доказательстве теоремы 5.2.15 о точках перегиба.

Доказательство проводится методом от противного. Предположим, что (3.3.110) не выполняется ни для какого $\delta > 0$, то есть что

$$\forall \delta > 0 \quad \exists x \in (c-\delta; c+\delta) \quad f(x) \leqslant 0$$

Тогда, в частности, оно не выполняется для чисел $\delta_n = \frac{1}{n}$:

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \exists x_n \in \left(c - \frac{1}{n}; c + \frac{1}{n}\right) \quad f(x_n) \leqslant 0$$

Мы получаем, что имеется последовательность

$$x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} c \tag{3.3.111}$$

для которой

$$f(x_n) \leqslant 0 \tag{3.3.112}$$

Поскольку $f(x)$ непрерывна в точке c, из (3.3.111) следует

$$f(x_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f(c)$$

а по теореме 3.2.8 (о предельном переходе в неравенстве), из (3.3.112) следует

$$f(c) \leqslant 0$$

Это противоречит предположению, что $f(c) > 0$. Значит, (3.3.110) все-таки должно выполняться для какого-то $\delta > 0$. □

Теорема Коши о промежуточном значении.

Лемма 3.3.5 (о промежуточном значении)**.** *Пусть функция φ непрерывна на отрезке $[a; b]$, и на концах его принимает значения разных знаков:*

$$\varphi(a) < 0 < \varphi(b) \qquad (\textit{или } \varphi(a) > 0 > \varphi(b))$$

Тогда существует точка $c \in (a; b)$ в которой $\varphi(x)$ равна нулю:

$$\varphi(c) = 0$$

Доказательство. Пусть для определенности

$$\varphi(a) < 0 < \varphi(b)$$

Разделим отрезок $[a; b]$ пополам. Если значение функции в середине отрезка равно нулю, то теорема доказана. Если же нет, то выберем из двух половинок ту, у которой на концах функция φ принимает значения разных знаков, и обозначим ее $[a_1; b_1]$:

$$\varphi(a_1) < 0 < \varphi(b_1), \qquad [a_1; b_1] \subseteq [a; b]$$

Проделаем то же самое с отрезком $[a_1; b_1]$: разделим его пополам, выберем ту половинку, на концах которой $\varphi(x)$ меняет знак, и обозначим ее $[a_2; b_2]$:

$$\varphi(a_2) < 0 < \varphi(b_2), \qquad [a_2; b_2] \subseteq [a_1; b_1]$$

Затем поделим отрезок $[a_2; b_2]$, и так далее. В результате у нас получится цепочка вложенных отрезков, на концах которых функция меняет знак:

$$[a; b] \supset [a_1; b_1] \supset [a_2; b_2] \supset \ldots \qquad b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0, \qquad \varphi(a_n) < 0 < \varphi(b_n)$$

По теореме 3.2.12 о вложенных отрезках, существует единственная точка c, принадлежащая всем отрезкам $[a_n; b_n]$, причем

$$\lim_{n\to\infty} a_n = c = \lim_{n\to\infty} b_n$$

Отсюда следует, что с одной стороны, поскольку $\varphi(a_n) < 0$,

$$\varphi(c) = \lim_{n\to\infty} \varphi(a_n) \leqslant 0$$

а с другой, поскольку $\varphi(b_n) > 0$,

$$\varphi(c) = \lim_{n\to\infty} \varphi(b_n) \geqslant 0$$

И следовательно, $\varphi(c) = 0$. □

Теорема 3.3.6 (Коши о промежуточном значении)**.** [12] *Пусть функция f непрерывна на отрезке $[a; b]$, и пусть C – произвольное число, лежащее между $f(a)$ и $f(b)$:*

$$f(a) < C < f(b) \qquad \Big(\textit{или } f(a) > C > f(b)\Big)$$

Тогда на интервале $(a; b)$ найдется точка c такая, что

$$f(c) = C$$

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$\varphi(x) = f(x) - C$$

Она будет непрерывна на отрезке $[a; b]$ (как разность непрерывных функций) и принимает на концах этого отрезка значения разных знаков

$$\varphi(a) = f(a) - C < 0 < f(b) - C = \varphi(b) \qquad \Big(\text{или } \varphi(a) = f(a) - C > 0 > f(b) - C = \varphi(b)\Big)$$

Поэтому, по лемме 3.3.5, существует точка $c \in [a; b]$ такая, что $\varphi(c) = 0$. Отсюда $f(c) = \varphi(c) + C = C$. □

Теоремы Вейерштрасса

Теорема Вейерштрасса об ограниченности. Напомним, что функция f называется

– *ограниченной сверху* на множестве E, если существует число B такое, что

$$\forall x \in E \quad f(x) \leqslant B$$

– *ограниченной снизу* на множестве E, если существует число A такое, что

$$\forall x \in E \quad A \leqslant f(x)$$

– *ограниченной* на множестве E, если она ограничена на E сверху и снизу, то есть существуют такие числа A и B что:

$$\forall x \in E \quad A \leqslant f(x) \leqslant B$$

[12] Эта теорема используется далее на с.435 при доказательстве теоремы о среднем для определенного интеграла.

Теорема 3.3.7 (Вейерштрасса об ограниченности). [13] *Если функция f определена и непрерывна на отрезке $[a;b]$, то она ограничена на этом отрезке.*

Доказательство. Предположим обратное, то есть что $f(x)$ не ограничена на отрезке $[a;b]$. Значит $f(x)$ не ограничена сверху или снизу. Пусть для определенности $f(x)$ не ограничена сверху:

$$\forall B \in \mathbb{R} \quad \exists x \in [a;b] \quad f(x) > B$$

Тогда для всякого $n \in \mathbb{N}$ можно подобрать точку $x_n \in [a;b]$ такую, что

$$f(x_n) > n \tag{3.3.113}$$

Последовательность точек $\{x_n\}$ принадлежит отрезку $[a;b]$ и значит ограничена. Следовательно, по теореме Больцано-Вейерштрасса 3.2.13, $\{x_n\}$ содержит сходящуюся подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$:

$$x_{n_k} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} c \in [a;b] \tag{3.3.114}$$

Из формулы (3.3.113) получаем

$$f(x_{n_k}) > n_k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$$

поэтому

$$f(x_{n_k}) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} +\infty \tag{3.3.115}$$

Но с другой стороны, функция f непрерывна в любой точке отрезка $[a;b]$, и в частности в точке $c \in [a;b]$, значит из (3.3.114) следует

$$f(x_{n_k}) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} f(c) \neq +\infty \tag{3.3.116}$$

Мы получили противоречие между (3.3.115) и (3.3.116), которое означает, что наше исходное предположение было неверно. Значит, функция f все-таки ограничена. $\square$

Теорема Вейерштрасса об экстремумах. Пусть функция f определена на множестве $E \subseteq \mathbb{R}$. Точка $x_{\max} \in E$ называется *точкой максимума* функции f на множестве E, если

$$\forall x \in E \quad f(x) \leqslant f(x_{\max})$$

Число $f(x_{\max})$ при этом называется *максимумом* функции f на множестве E и обозначается

$$f(x_{\max}) = \max_{x\in E} f(x)$$

Наоборот, точка $x_{\min} \in E$ называется *точкой минимума* функции f на множестве E, если

$$\forall x \in E \quad f(x_{\min}) \leqslant f(x)$$

Число $f(x_{\min})$ при этом называется *минимумом* функции f на множестве E и обозначается

$$f(x_{\min}) = \min_{x\in E} f(x)$$

Экстремумом функции f на множестве E называется минимум или максимум функции f на множестве E.

! **3.3.17.** Максимум и минимум функции – не то же самое, что точная верхняя и точная нижняя грани.

---

[13] Эта теорема используется в следующем параграфе при доказательстве теоремы Вейерштрасса об экстремумах 3.3.8

$\diamond$ **3.3.18.** Пусть $E = [-1; 1]$ и $f(x) = x^2$.

Тогда на множестве E у функции f имеется одна точка минимума и две точки максимума, причем минимум совпадает с точной нижней гранью, а максимум – с точной верхней гранью:

$$\min_{x\in[-1;1]} x^2 = x^2\Big|_{x=0} = 0 = \inf_{x\in[-1;1]} x^2$$

$$\max_{x\in[-1;1]} x^2 = x^2\Big|_{x=-1} = x^2\Big|_{x=1} = 1 = \sup_{x\in[-1;1]} x^2$$

$\diamond$ **3.3.19.** Пусть $E = (-1; 1)$ и $f(x) = x^2$.

Тогда на множестве E у функции f имеется одна точка минимума и *нет точек максимума*, причем точная нижняя грань (существует и) совпадает с минимумом, а точная верхняя грань существует, но не совпадает с максимумом, которого на множестве $E = (-1; 1)$ нет (потому что нет точек максимума):

$$\min_{x\in(-1;1)} x^2 = x^2\Big|_{x=0} = 0 = \inf_{x\in(-1;1)} x^2$$

$$\sup_{x\in(-1;1)} x^2 = 1 \qquad \nexists \max_{x\in(-1;1)} x^2$$

$\diamond$ **3.3.20.** Пусть $E = \mathbb{R}$ и $f(x) = \{x\}$.

Тогда на множестве E у функции f *нет точек минимума*, хотя точная нижняя грань существует:

$$\inf_{x\in\mathbb{R}}\{x\} = 0 \qquad \nexists \min_{x\in\mathbb{R}}\{x\}$$

При этом максимум на этом множестве есть:

$$\sup_{x\in\mathbb{R}}\{x\} = \max_{x\in\mathbb{R}}\{x\} = 1$$

Итак, экстремумы могут существовать, а могут и не существовать.

Теорема 3.3.8 (Вейерштрасса об экстремумах). [14] *Если функция f определена и непрерывна на отрезке $[a; b]$, то она имеет минимум и максимум на этом отрезке.*

Доказательство. Докажем существование максимума. По теореме 3.3.7, функция f ограничена сверху на $[a; b]$:

$$\exists C \quad \forall x \in [a; b] \quad f(x) \leqslant C$$

поэтому по теореме 2.1.23 о точной границе, у функции f существует точная верхняя грань на этом множестве:

$$\exists \sup_{x\in[a;b]} f(x) = M$$

Это значит, что во-первых, все значения функции f на отрезке $[a; b]$ не превосходят M

$$\forall x \in [a; b] \quad f(x) \leqslant M \tag{3.3.117}$$

и во-вторых если взять любое число $\alpha < M$, то обязательно оно окажется меньше, чем какое-то значение $f(x)$ на отрезке $[a; b]$

$$\forall \alpha < M \quad \exists x \in [a; b] \quad \alpha < f(x)$$

Возьмем в качестве α числа вида $M - \frac{1}{n}$. Тогда у нас получится целая последовательность $\{x_n\}$:

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \exists x_n \in [a; b] \quad M - \frac{1}{n} < f(x_n) \tag{3.3.118}$$

[14] Эта теорема используется ниже на с.327 при доказательстве теоремы Ролля 5.1.6, на с.433 при доказательстве теоремы об интегрируемости непрерывной функции 7.2.4, и на с.438 при доказательстве интегральной теоремы о среднем (свойство 7° на с.435).

Поскольку последовательность $\{x_n\}$ лежит в отрезке $[a;b]$, она ограничена. Значит по теореме Больцано-Вейерштрасса 3.2.13, из нее можно выбрать сходящуюся подпоследовательность:

$$x_{n_k} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} c \qquad (c \in [a;b])$$

Поскольку $f(x)$ непрерывна в любой точке отрезка $[a;b]$ и, в частности, в точке $c \in [a;b]$, мы получаем

$$f(x_{n_k}) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} f(c)$$

С другой стороны, из (3.3.117) и (3.3.118) следует

$$M - \frac{1}{n_k} < f(x_{n_k}) \leqslant M$$

откуда

$$M = \lim_{k\to\infty}\left(M - \frac{1}{n_k}\right) \leqslant \lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = f(c) \leqslant M$$

то есть

$$f(c) = M$$

Еще раз вспомнив (3.3.117), получим

$$\forall x \in [a;b] \quad f(x) \leqslant M = f(c)$$

Это означает, что $c \in [a;b]$ является точкой максимума функции f на множестве $[a;b]$. □

Следствие 3.3.9. *Множество значений всякой (определенной на отрезке) непрерывной функции $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ является отрезком.*

Доказательство. По теореме 3.3.8 функция f имеет минимум в некоторой точке $\alpha \in [a,b]$ и максимум в некоторой точке $\beta \in [a,b]$:

$$f(\alpha) = \min_{x\in[a,b]} f(x), \quad f(\beta) = \max_{x\in[a,b]} f(x).$$

Покажем, что

$$\mathsf{R}(f) = [f(\alpha), f(\beta)].$$

1. Будем считать для начала, что $\alpha < \beta$. Тогда по теореме Коши 3.3.6, любая точка $C \in (f(\alpha), f(\beta))$ является образом некоторой точки $c \in (\alpha, \beta)$. Значит, весь отрезок $[f(\alpha), f(\beta)]$ лежит в $\mathsf{R}(f) = f([a,b])$:

$$[f(\alpha), f(\beta)] \subseteq \mathsf{R}(f).$$

Но с другой стороны, никакая точка y, лежащая выше $[f(\alpha), f(\beta)]$, не может принадлежать $f([a,b])$, потому что тогда мы получили бы, что $f(\beta)$ — не максимум множества $f([a,b])$. И таким же образом, никакая точка y, лежащая ниже $[f(\alpha), f(\beta)]$, не может принадлежать $f([a,b])$, потому что тогда мы получили бы, что $f(\alpha)$ — не минимум множества $f([a,b])$. Значит,

$$[f(\alpha), f(\beta)] = \mathsf{R}(f).$$

2. В случае если $\alpha > \beta$ можно рассмотреть функцию

$$g(x) = f(-x)$$

и для нее мы получим, что

$$g(-\alpha) = \min_{x\in[-a,-b]} g(x), \quad g(-\beta) = \max_{x\in[-a,-b]} g(x)$$

и

$$-\alpha < -\beta.$$

Тогда, по уже доказанному,

$$\mathsf{R}(g) = [g(-\alpha), g(-\beta)],$$

и это можно дополнить до цепочки

$$\mathsf{R}(f) = \mathsf{R}(g) = [g(-\alpha), g(-\beta)] = [f(\alpha), f(\beta)].$$

□

Теорема Кантора о равномерной непрерывности

Говорят, что функция f *равномерно непрерывна на множестве* E если для любых двух последовательностей аргументов $\alpha_n \in E$ и $\beta_n \in E$ стремящихся друг к другу, соответствующие последовательности значений $\{f(\alpha_n)\}$ и $\{f(\beta_n)\}$ тоже стремятся друг к другу:

$$\forall \alpha_n, \beta_n \in E \quad \alpha_n - \beta_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \quad \Longrightarrow \quad f(\alpha_n) - f(\beta_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \tag{3.3.119}$$

◇ **3.3.21.** Линейная функция $f(x) = kx+b$ равномерно непрерывна на множестве $E = \mathbb{R}$, потому что если

$$\alpha_n - \beta_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

то

$$f(\alpha_n) - f(\beta_n) = (k\alpha_n + b) - (k\beta_n + b) = \\ = k\alpha_n - k\beta_n = k(\alpha_n - \beta_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

◇ **3.3.22.** Квадратичная функция $f(x) = x^2$ не является равномерно непрерывной на множестве $E = \mathbb{R}$, потому что если взять, например,

$$\alpha_n = n + \frac{1}{n}, \quad \beta_n = n$$

то мы получим, что

$$\alpha_n - \beta_n = \frac{1}{n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

но при этом

$$f(\alpha_n) - f(\beta_n) = (\alpha_n)^2 - (\beta_n)^2 = \left(n + \frac{1}{n}\right)^2 - n^2 = \\ = 2n \cdot \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} = 2 + \frac{1}{n^2} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 2 \neq 0$$

Теорема 3.3.10 (Кантора о равномерной непрерывности). [15] *Если функция f определена и непрерывна на отрезке $[a;b]$, то она равномерно непрерывна на этом отрезке.*

Доказательство. Доказательство проводится от противного. Предположим, что $f(x)$ не является равномерно непрерывной на $[a;b]$. Тогда существуют последовательности аргументов $\alpha_n \in [a;b]$ и $\beta_n \in [a;b]$ которые стремятся друг к другу

$$\alpha_n - \beta_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

но при этом последовательности значений не стремятся друг к другу:

$$f(\alpha_n) - f(\beta_n) \underset{n\to\infty}{\not\longrightarrow} 0$$

Рассмотрим последовательность

$$\gamma_n = f(\alpha_n) - f(\beta_n)$$

То, что она не стремится к нулю

$$\gamma_n \underset{n\to\infty}{\not\longrightarrow} 0$$

означает, что найдется некоторая окрестность нуля $(-\varepsilon;\varepsilon)$ которая не содержит бесконечное количество чисел $\{\gamma_n\}$. Значит можно выбрать подпоследовательность $\{\gamma_{n_k}\}$, которая вообще не будет заходить в окрестность $(-\varepsilon;\varepsilon)$:

$$\forall k \quad |\gamma_{n_k}| = |f(\alpha_n) - f(\beta_n)| \geqslant \varepsilon \tag{3.3.120}$$

Рассмотрим теперь индексы $\{n_k\}$. Им соответствует некоторая подпоследовательность $\{\alpha_{n_k}\}$ последовательности $\{\alpha_n\}$. Поскольку она ограничена (из-за того, что $\alpha_{n_k} \in [a;b]$), по теореме Больцано-Вейерштрасса 3.2.13 мы можем выбрать у нее некоторую сходящуюся подпоследовательность $\{\alpha_{n_{k_j}}\}$:

$$\alpha_{n_{k_j}} \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} c \qquad (c \in [a;b])$$

Тогда мы получим, что соответствующая последовательность $\{\beta_{n_{k_j}}\}$ стремится к тому же пределу c, потому что

$$\beta_{n_{k_j}} = \underbrace{(\beta_{n_{k_j}} - \alpha_{n_{k_j}})}_{\substack{\downarrow \\ 0}} + \underbrace{\alpha_{n_{k_j}}}_{\substack{\downarrow \\ c}} \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} 0 + c = c$$

---

[15]Эта теорема используется на с.433 при доказательстве теоремы об интегрируемости непрерывной функции.

Отсюда следует, что

$$f\Big(\underbrace{\alpha_{n_{k_j}}}_{\substack{\downarrow\\ c}}\Big)-f\Big(\underbrace{\beta_{n_{k_j}}}_{\substack{\downarrow\\ c}}\Big)\underset{j\to\infty}{\longrightarrow} f(c)-f(c)=0$$

а это противоречит условию (3.3.120), из которого видно, что расстояние между $f(\alpha_{n_{k_j}})$ и $f(\beta_{n_{k_j}})$ не может быть меньше ε.

Итак, мы предположили, что $f(x)$ не является равномерно непрерывной на $[a;b]$ и получили противоречие. Это означает, что предположение неверно, и функция f все-таки равномерно непрерывна на $[a;b]$. □

Теоремы о монотонных функциях.

Монотонные функции на отрезке.

Теорема 3.3.11 (о монотонной функции на отрезке)**.** *Пусть функция f определена и строго монотонна на отрезке $I=[a,b]$, и пусть J – отрезок с концами $f(a)$ и $f(b)$:*

$$J=\begin{cases}[f(a);f(b)], & \text{если } f \text{ возрастает}\\ [f(b);f(a)], & \text{если } f \text{ убывает.}\end{cases}$$

Тогда:

(i) если f биективно отображает отрезок I на отрезок J, то

(a) она непрерывна на I, и

(b) ее обратная функция $f^{-1}:J\to I$ также непрерывна и строго монотонна.

(ii) если f непрерывна на I, то

(a) она биективно отображает отрезок I на отрезок J, и

(b) ее обратная функция $f^{-1}:J\to I$ также непрерывна и строго монотонна.

При этом характер монотонности наследуется обратной функцией:

— *если $f:I\to J$ возрастает, то и $f^{-1}:J\to I$ возрастает,*

— *если $f:I\to J$ убывает, то и $f^{-1}:J\to I$ убывает.*

Доказательство. Будем считать для определенности, что функция f строго возрастает:

$$s<t \quad\Longrightarrow\quad f(s)<f(t) \tag{3.3.121}$$

(случай убывания рассматривается аналогично).

Докажем (i). Пусть f биективно отображает отрезок I на отрезок J. Тогда у нее имеется обратная функция $f^{-1}:J\to I$.

1. Прежде всего заметим, что $f^{-1}:J\to I$ также будет возрастать. Действительно, если бы это было не так, то для некоторых $y_1,y_2\in J$ мы получили бы

$$y_1<y_2 \qquad \& \qquad f^{-1}(y_1)\geqslant f^{-1}(y_2)$$

Тогда можно было бы обозначить $x_1=f^{-1}(y_1)$ и $x_2=f^{-1}(y_2)$, и получилось бы:

$$\underbrace{f(x_1)}_{y_1}<\underbrace{f(x_2)}_{y_2} \qquad \& \qquad \underbrace{x_1}_{f^{-1}(y_1)}\geqslant\underbrace{x_2}_{f^{-1}(y_2)}$$

Это противоречит утверждению 1° на с.199: поскольку f возрастает, она должна неубывать, значит условие $x_1\geqslant x_2$ должно влечь за собой условие $f(x_1)\geqslant f(x_2)$, а у нас получается наоборот, $f(x_1)<f(x_2)$.

2. Покажем, что функция $f:I\to J$ непрерывна. Пусть $x_n\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}x$, покажем что $f(x_n)\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}f(x)$. По теореме 3.3.1, последовательность x_n можно считать строго монотонной. Нам придется рассмотреть два случая.

A. Пусть сначала x_n возрастает:

$$x_1 < x_2 < ... < x_n < ... < x$$

Тогда предел x этой последовательности равен ее точной верхней грани

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \sup_{n\in\mathbb{N}} x_n = x \tag{3.3.122}$$

и то же для предела последовательности $f(x_n)$ поскольку, в силу (3.3.121), она тоже возрастает:

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \sup_{n\in\mathbb{N}} f(x_n) \tag{3.3.123}$$

Обозначив $y_n = f(x_n)$, мы получим

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} y_n = \sup_{n\in\mathbb{N}} f(x_n) \leqslant (3.1.30) \leqslant f\Big(\sup_{n\in\mathbb{N}} x_n\Big) = (3.3.122) = f(x)$$

$$\Downarrow$$

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} y_n \leqslant f(x)$$

$$\Downarrow \quad (f^{-1} \text{ возрастает, как уже доказано})$$

$$f^{-1}\Big(\sup_{n\in\mathbb{N}} y_n\Big) \leqslant f^{-1}\big(f(x)\big) = x \tag{3.3.124}$$

А с другой стороны, опять, поскольку f^{-1} возрастает,

$$x = \sup_{n\in\mathbb{N}} x_n = \sup_{n\in\mathbb{N}} f^{-1}\big(f(x_n)\big) = \sup_{n\in\mathbb{N}} f^{-1}(y_n) \leqslant (3.1.30) \leqslant f^{-1}\Big(\sup_{n\in\mathbb{N}} y_n\Big)$$

$$\Downarrow$$

$$x \leqslant f^{-1}\Big(\sup_{n\in\mathbb{N}} y_n\Big) \tag{3.3.125}$$

Неравенства (3.3.124) и (3.3.125) вместе дают

$$x = f^{-1}\Big(\sup_{n\in\mathbb{N}} y_n\Big)$$

То есть

$$f(x) = \sup_{n\in\mathbb{N}} y_n = \sup_{n\in\mathbb{N}} f(x_n) = (3.3.123) = \lim_{n\to\infty} f(x_n)$$

B. Пусть теперь наоборот, x_n убывает:

$$x < ... < x_n < ... < x_2 < x_1$$

Тогда предел x этой последовательности равен ее точной нижней грани

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \inf_{n\in\mathbb{N}} x_n = x \tag{3.3.126}$$

и то же для предела последовательности $f(x_n)$ поскольку, в силу (3.3.121), она тоже возрастает:

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \inf_{n\in\mathbb{N}} f(x_n) \tag{3.3.127}$$

Обозначив $y_n = f(x_n)$, мы получим

$$\inf_{n\in\mathbb{N}} y_n = \inf_{n\in\mathbb{N}} f(x_n) \geqslant (3.1.30) \geqslant f\Big(\inf_{n\in\mathbb{N}} x_n\Big) = (3.3.126) = f(x)$$

$$\Downarrow$$

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} y_n \geqslant f(x)$$

$$\Downarrow \quad (f^{-1} \text{ возрастает, как уже доказано})$$

$$f^{-1}\Big(\inf_{n\in\mathbb{N}} y_n\Big) \geqslant f^{-1}\big(f(x)\big) = x \tag{3.3.128}$$

А с другой стороны, опять, поскольку f^{-1} возрастает,

$$x = \inf_{n\in\mathbb{N}} x_n = \inf_{n\in\mathbb{N}} f^{-1}\big(f(x_n)\big) = \inf_{n\in\mathbb{N}} f^{-1}(y_n) \geqslant (3.1.30) \geqslant f^{-1}\Big(\inf_{n\in\mathbb{N}} y_n\Big)$$

$$\Downarrow$$

$$x \geqslant f^{-1}\Big(\inf_{n\in\mathbb{N}} y_n\Big) \tag{3.3.129}$$

Неравенства (3.3.128) и (3.3.129) вместе дают

$$x = f^{-1}\Big(\inf_{n\in\mathbb{N}} y_n\Big)$$

То есть

$$f(x) = \inf_{n\in\mathbb{N}} y_n = \inf_{n\in\mathbb{N}} f(x_n) = (3.3.127) = \lim_{n\to\infty} f(x_n)$$

3. Мы показали, что если функция $f : I \to J$ возрастает и биективна, то она автоматически непрерывна. Поскольку обратная функция $f^{-1} : J \to I$ тоже биективна и, как мы уже убедились, тоже возрастает, мы получаем, что она тоже должна быть непрерывной.

Докажем (ii). Пусть f непрерывна на I.

1. Заметим, что f отображает I в J. Это следует из того, что функция f неубывает (1° на с.199): если $x \in I = [a, b]$, то

$$a \leqslant x \leqslant b \quad\Longrightarrow\quad f(a) \leqslant f(x) \leqslant f(b) \quad\Longrightarrow\quad f(x) \in J = [f(a), f(b)]$$

2. Проверим, что f инъективно отображает I в J. Для любых $x, y \in I$ получаем:

$$x \ne y \quad\Longrightarrow\quad \begin{bmatrix} x < y & \Longrightarrow & f(x) < f(y) \\ y < x & \Longrightarrow & f(y) < f(x) \end{bmatrix} \quad\Longrightarrow\quad \begin{bmatrix} f(x) < f(y) \\ f(y) < f(x) \end{bmatrix} \quad\Longrightarrow\quad f(x) \ne f(y) \tag{3.3.130}$$

3. Покажем далее, что f сюръективно отображает I в J, то есть что $f(I) = J$. Для любого $C \in J = [f(a), f(b)]$ получаем:

— либо C лежит на левом конце отрезка $J = [f(a), f(b)]$, то есть $C = f(a)$, и тогда точка $x = a \in I = [a, b]$ будет прообразом для C: $C = f(x)$;

— либо C лежит на правом конце отрезка $J = [f(a), f(b)]$, то есть $C = f(b)$, и тогда точка $x = b \in I = [a, b]$ будет прообразом для C: $C = f(x)$;

— либо C лежит внутри отрезка $J = [f(a), f(b)]$, то есть $f(a) < C < f(b)$, и тогда по теореме Коши о промежуточном значении 3.3.6 найдется точка $x \in (a, b)$ такая, что $C = f(x)$.

4. Инъективность и сюръективность отображения $f : I \to J$ означают, что оно является биекцией, и поэтому правило

$$f(x) = y \qquad\Longleftrightarrow\qquad x = f^{-1}(y)$$

определяет обратное к нему отображение $f^{-1} : J \to I$.

5. Проверим, что функция $f^{-1} : J \to I$ строго монотонна. Пусть $y_1 < y_2$ – две точки из J. Обозначим $x_1 = f^{-1}(y_1)$ и $x_2 = f^{-1}(y_2)$. Поскольку отображение f^{-1} биективно, x_1 не может быть равно x_2. Значит, либо $x_1 < x_2$, либо $x_1 > x_2$. Но второе, в силу строгого возрастания f, влечет за собой неравенство $y_1 > y_2$:

$$x_1 > x_2 \qquad\Longrightarrow\qquad y_1 = f(x_1) > f(x_2) = y_2,$$

что противоречит исходному выбору $y_1 < y_2$. Значит, $x_1 > x_2$ тоже невозможно. Мы получаем, что возможно только неравенство $x_1 < x_2$, и это означает, что функция f^{-1} строго возрастает:

$$y_1 > y_2 \qquad\Longrightarrow\qquad x_1 = f^{-1}(y_1) > f^{-1}(y_2) = x_2.$$

6. Осталось убедиться, что функция $f^{-1} : J \to I$ непрерывна. Предположим, что это не так, то есть что существует последовательность $y_n \in J = [f(a), f(b)]$ такая что

$$y_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} y \qquad \& \qquad f^{-1}(y_n) \underset{n\to\infty}{\not\longrightarrow} f^{-1}(y) \tag{3.3.131}$$

Обозначим $x_n = f^{-1}(y_n)$ и $x = f^{-1}(y)$, тогда

$$x_n = f^{-1}(y_n) \underset{n\to\infty}{\not\longrightarrow} f^{-1}(y) = x$$

и по свойству 2° на с.228, это означает, что существует подпоследовательность x_{n_k}, лежащая вне некоторой окрестности $(x-\varepsilon; x+\varepsilon)$ точки x:

$$x_{n_k} \notin (x-\varepsilon; x+\varepsilon), \qquad \varepsilon > 0 \tag{3.3.132}$$

С другой стороны, последовательность x_{n_k} лежит в отрезке $[a,b]$, поэтому по теореме Больцано-Вейерштрасса 3.2.13, у нее должна быть сходящаяся подпоследовательность:

$$x_{n_{k_i}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} t \qquad (t \in I = [a,b])$$

Из (3.3.132) следует, что $t \notin (x-\varepsilon; x+\varepsilon)$, поэтому $t \neq x$. Но, с другой стороны,

$$x_{n_{k_i}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} t$$

$$\Downarrow$$

$$y_{n_{k_i}} = f(x_{n_{k_i}}) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f(t)$$

$$\Downarrow$$

$$f(t) = \lim_{i\to\infty} y_{n_{k_i}} = (\text{свойство } 1^\circ \text{ на с. } 228) = \lim_{n\to\infty} y_n = y$$

$$\Downarrow$$

$$t = f^{-1}(f(t)) = f^{-1}(y) = x$$

То есть $t \neq x$ и одновременно $t = x$. Это противоречие означает, что наше предположение (3.3.131) о разрывности функции f^{-1} было неверно. □

Монотонные функции на интервале.

Теорема 3.3.12 (о монотонной функции на интервале)**.** *Пусть функция f определена и строго монотонна на интервале $I = (a,b)$, и пусть J – интервал с концами $\inf_{x\in I} f(x)$ и $\sup_{x\in I} f(x)$:*

$$J = \Big(\inf_{x\in I} f(x); \sup_{x\in I} f(x)\Big)$$

Тогда:

(i) если f биективно отображает интервал I на интервал J, то

  (a) она непрерывна на I, и

  (b) ее обратная функция $f^{-1}: J \to I$ также непрерывна и строго монотонна.

(ii) если f непрерывна на I, то

  (a) она биективно отображает интервал I на интервал J, и

  (b) ее обратная функция $f^{-1}: J \to I$ также непрерывна и строго монотонна.

При этом характер монотонности наследуется обратной функцией:

— *если $f: I \to J$ возрастает, то и $f^{-1}: J \to I$ возрастает,*

— *если $f: I \to J$ убывает, то и $f^{-1}: J \to I$ убывает.*

! **3.3.23.** В условиях теоремы из равенства $f^{-1}(J) = I$ следуют две формулы, которые, несмотря на свою очевидность, оказываются полезными:[16]

$$\inf_{y\in J} f^{-1}(y) = \inf I \qquad \sup_{y\in J} f^{-1}(y) = \sup I \tag{3.3.133}$$

[16] Мы используем формулы (3.3.133) ниже в предложении 4.1.2.

Доказательство. Как и в доказательстве предыдущей теоремы будем считать, что f строго возрастает.

Докажем (i). Пусть f биективно отображает интервал I на интервал J. Тогда у нее имеется обратная функция $f^{-1}: J \to I$.

1. Прежде всего, как и в теореме 3.3.11, без труда доказывается, что обратная функция $f^{-1}: J \to I$ также возрастает.

2. Выберем отрезок $[\alpha, \beta] \subseteq I$, и покажем, что f биективно отображает его на отрезок $[f(\alpha), f(\beta)] \subseteq J$. Во-первых, из-за монотонности, f действительно отображает $[\alpha, \beta]$ в $[f(\alpha), f(\beta)]$:

$$x \in [\alpha, \beta] \quad \Longrightarrow \quad \alpha \leqslant x \leqslant \beta \quad \Longrightarrow \quad f(\alpha) \leqslant f(x) \leqslant f(\beta)$$

Во-вторых, если $C \in [f(\alpha), f(\beta)]$, то, поскольку $f: I \to J$ биективно, должно существовать $c \in I$ такое, что

$$f(c) = C$$

Нам нужно показать, что это c лежит в отрезке $[\alpha, \beta]$. Если бы это было не так, то мы получили бы:

— либо $c < \alpha$, и тогда $C = f(c) < f(\alpha)$, а это невозможно, потому что $C \in [f(\alpha), f(\beta)]$,

— либо $\beta < c$, и тогда $f(\beta) < f(c) = C$, и это тоже невозможно, потому что $C \in [f(\alpha), f(\beta)]$.

Таким образом, что $c \in [\alpha, \beta]$, и это доказывает сюръективность отображения $f: [\alpha, \beta] \to [f(\alpha), f(\beta)]$. С другой стороны, будучи строго монотонным, оно инъективно, поэтому является биекцией.

3. По теореме 3.3.11, функция $f: [\alpha, \beta] \to [f(\alpha), f(\beta)]$ должна быть непрерывной. Это верно для любого отрезка $[\alpha, \beta] \subseteq I$, поэтому наша исходная функция $f: I \to J$ непрерывна на интервале I.

4. Для доказательства (i) остается только убедиться, что обратная функция $f^{-1}: J \to I$ тоже непрерывна на J. Для этого возьмем произвольный отрезок $[A, B] \in J$ $(A < B)$ и положим

$$\alpha = f^{-1}(A), \qquad \beta = f^{-1}(B)$$

Поскольку, как мы уже заметили, f^{-1} возрастает, получаем

$$\alpha < \beta$$

и, опять мы это уже показали, функция f будет биективно (и строго монотонно) отображать отрезок $[\alpha, \beta]$ на отрезок $[A, B] = [f(\alpha), f(\beta)]$. Значит, по теореме 3.3.11, обратная функция $f^{-1}: [A, B] \to [\alpha, \beta]$ тоже должна быть непрерывной. Это верно для любого отрезка $[A, B] \in J$, поэтому функция $f^{-1}: J \to I$ должна быть непрерывна.

Докажем (ii). Пусть f непрерывна на I.

1. Если $x \in I = (a, b)$, то выбрав α и β так, чтобы $x \in [\alpha, \beta] \subseteq (a, b) = I$. Тогда:

$$a < \alpha < x < \beta < b$$

$$\Downarrow$$

$$\inf_{x \in I} f(t) \leqslant f(\alpha) < f(x) < f(\beta) \leqslant \sup_{x \in I} f(t)$$

$$\Downarrow$$

$$f(x) \in \Big(\inf_{x \in I} f(t), \sup_{x \in I} f(t) \Big) = J$$

То есть $f(I) \subseteq J$.

2. Инъективность отображения $f: I \to J$ доказывается той же цепочкой (3.3.130), что и для случая, когда I – отрезок.

3. Сюръективность отображения $f: I \to J$. Пусть $y \in J = (\inf_{t \in I} f(t), \sup_{t \in I} f(t))$. Тогда:

$$\inf_{t \in I} f(t) < y < \sup_{t \in I} f(t) \quad \Longrightarrow \quad \exists t_1, t_2 \in I: \quad f(t_1) < y < f(t_2) \quad \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow \quad y \in [f(t_1); f(t_2)] \quad \underset{\text{теорема 3.3.11}}{\Longrightarrow} \quad \exists x \in [t_1; t_2] \quad y = f(x)$$

4. Снова инъективность и сюръективность отображения $f: I \to J$ означают, что оно является биекцией, и поэтому правило

$$f(x) = y \qquad \Longleftrightarrow \qquad x = f^{-1}(y)$$

определяет обратное к нему отображение $f^{-1} : J \to I$.

5. Строгая монотонность функции $f^{-1} : J \to I$ доказывается так же, как и в случае, когда I – отрезок.

6. Остается проверить непрерывность функции $f^{-1} : J \to I$. Пусть $y_1 < y_2$ – произвольные точки из J. Рассмотрим точки $x_1 = f^{-1}(y_1)$ и $x_2 = f^{-1}(y_2)$ из I. Поскольку функция $f^{-1} : J \to I$ строго возрастает, должно выполняться неравенство $x_1 < x_2$. Рассмотрим отрезок $[x_1, x_2]$. На нем функция f непрерывна и строго возрастает, поэтому, как мы уже доказали, f должна непрерывно и биективно отображать $[x_1, x_2]$ на $[f(x_1), f(x_2)] = [y_1, y_2]$, а обратное отображение f^{-1} будет непрерывно отображать $[y_1, y_2]$ в $[x_1, x_2]$.

Из этого можно сделать вывод, что функция $f^{-1} : J \to I$ непрерывна на каждом отрезке $[y_1, y_2]$ из интервала J. Это автоматически означает, что f^{-1} непрерывна на J. □

! **3.3.24.** Утверждения, аналогичные теоремам 3.3.11 и 3.3.12 справедливы и для полуинтервалов. Мы предлагаем читателю самостоятельно их сформулировать и доказать.

§ 4 Предел функции

В примере 3.3.6 выше мы заметили, что функция $f(x) = \{x\}$ (дробная часть числа) разрывна в точке $x = 1$ (да и вообще во всех целых точках $a \in \mathbb{Z}$), то есть для некоторых последовательностей аргументов x_n выполняются соотношения

$$x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1, \qquad f(x_n) \underset{n\to\infty}{\not\longrightarrow} f(1)$$

Если приглядеться к этой функции, то можно заметить, что в поведении последовательности $f(x_n)$ имеется следующая простая закономерность: если x_n стремится к 1 слева, то $f(x_n)$ стремится к 1,

$$x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1, \qquad x_n < 1 \qquad \Longrightarrow \qquad f(x_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1, \tag{3.4.134}$$

а если x_n стремится к 1 справа, то $f(x_n)$ стремится к 0:

$$x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1, \qquad 1 < x_n \qquad \Longrightarrow \qquad f(x_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0. \tag{3.4.135}$$

Это наблюдение оказывается очень полезным, потому что позволяет просто и наглядно объяснить, как ведет себя наша функция вблизи своих точек разрыва: если сказать, что при приближении аргумента к точке разрыва слева функция стремится к единице, а при приближении аргумента справа – к нулю, то изобразив это графически картинкой

мы даем человеческому сознанию наглядный образ, с помощью которого все вопросы о пределах последовательностей вида $f(x_n)$ решаются без труда.

Условие (3.4.134) коротко записывается формулой

$$\lim_{x\to 1-0} f(x) = 1,$$

и в таких случаях говорят, что функция f имеет предел слева в точке 1. А условие (3.4.135) записывается формулой

$$\lim_{x\to 1+0} f(x) = 0,$$

и в таких случаях говорят, что функция f имеет предел справа в точке 1, равный 0.

В этом параграфе мы подробно обсудим понятие предела функции. Ниже в главе 5 будет дано его важное применение: с его помощью определяется понятие *производной*, играющие центральную роль во всем математическом анализе.

(a) Определение и свойства предела функции

Когда в § 2 этой главы мы определяли предел последовательности, мы приводили два определения: отдельно для конечного и бесконечного предела. В случае с пределом функции ситуация многократно усложняется из-за того, что аргумент функции x и ее значение $f(x)$ могут стремиться в различных ситуациях к конечным величинам или бесконечности. В соответствии с этим различаются четыре основных вида пределов функции, причем каждый из них имеет два дополнительных "подвида", потому что аргумент x предполагается иногда стремящимся к a с одной стороны.

Представление об этой картине дает следующая таблица:

ТИПЫ ПРЕДЕЛОВ ФУНКЦИИ	Функция стремится к конечной величине: $f(x) \to A$	Функция стремится к бесконечности: $f(x) \to \infty$
Аргумент стремится к конечной величине: $x \to a$	Конечный предел в точке: $\lim_{x\to a} f(x) = A$	Бесконечный предел в точке: $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$
возможно, с одной стороны: слева $x \to a-0$ или справа $x \to a+0$	Конечный предел в точке a слева: $\lim_{x\to a-0} f(x) = A$ Конечный предел в точке a справа: $\lim_{x\to a+0} f(x) = A$	Бесконечный предел в точке a слева: $\lim_{x\to a+0} f(x) = \infty$ Бесконечный предел в точке a справа: $\lim_{x\to a+0} f(x) = \infty$
Аргумент стремится к бесконечности: $x \to \infty$	Конечный предел в бесконечности: $\lim_{x\to \infty} f(x) = A$	Бесконечный предел в бесконечности: $\lim_{x\to \infty} f(x) = \infty$
возможно, в одну сторону: влево $x \to -\infty$ или вправо $x \to +\infty$	Конечный предел в минус бесконечности: $\lim_{x\to -\infty} f(x) = A$ Конечный предел в плюс бесконечности: $\lim_{x\to +\infty} f(x) = A$	Бесконечный предел в минус бесконечности: $\lim_{x\to -\infty} f(x) = \infty$ Бесконечный предел в плюс бесконечности: $\lim_{x\to +\infty} f(x) = \infty$

К этим 12 типам пределов следует добавть еще 12, соответствующих случаям, когда функция f стремится к бесконечности с определенным знаком:

ТИПЫ ПРЕДЕЛОВ ФУНКЦИИ	Функция стремится к минус бесконечности: $f(x) \to -\infty$	Функция стремится к плюс бесконечности: $f(x) \to +\infty$
Аргумент стремится к конечной величине: $x \to a$	Бесконечный предел в точке: $\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$	Бесконечный предел в точке: $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$
возможно, с одной стороны: слева $x \to a-0$ или справа $x \to a+0$	Бесконечный предел в точке a слева: $\lim_{x\to a-0} f(x) = -\infty$ Бесконечный предел в точке a справа: $\lim_{x\to a+0} f(x) = -\infty$	Бесконечный предел в точке a слева: $\lim_{x\to a+0} f(x) = +\infty$ Бесконечный предел в точке a справа: $\lim_{x\to a+0} f(x) = +\infty$
Аргумент стремится к бесконечности: $x \to \infty$	Бесконечный предел в бесконечности: $\lim_{x\to \infty} f(x) = -\infty$	Бесконечный предел в бесконечности: $\lim_{x\to \infty} f(x) = +\infty$
возможно, в одну сторону: влево $x \to -\infty$ или вправо $x \to +\infty$	Бесконечный предел в минус бесконечности: $\lim_{x\to -\infty} f(x) = -\infty$ Бесконечный предел в плюс бесконечности: $\lim_{x\to +\infty} f(x) = -\infty$	Бесконечный предел в минус бесконечности: $\lim_{x\to -\infty} f(x) = +\infty$ Бесконечный предел в плюс бесконечности: $\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$

Таким образом, чтобы определить предел функции, нужно формально сформулировать 24 разных определения. Чтобы не утомлять читателя такими вразумлениями, обычно поступают иначе. Говорят так: пусть a и A обозначают числа, или символы бесконечности, возможно с определенным знаком

$$a, A \in \mathbb{R} \quad \text{или} \quad a, A = \infty,\ -\infty,\ +\infty$$

и пусть для всякого такого a

— *проколотой окрестностью* величины a называется всякое множество вида

$$U = \left\{ \begin{matrix} (a-\delta, a) \cup (a, a+\delta), & \text{где}\,\delta > 0 & \Big(\text{если } a \text{ – число}\Big) \\ (-\infty, -E) \cup (E, +\infty), & \text{где}\,E > 0 & \Big(\text{если}\,a = \infty\Big); \\ (-\infty, -E), & \text{где}\,E > 0 & \Big(\text{если}\,a = -\infty\Big); \\ (E, +\infty), & \text{где}\,E > 0 & \Big(\text{если}\,a = +\infty\Big); \end{matrix} \right\}$$

— *левой полуокрестностью* a называется всякий интервал вида

$$U = (a-\delta, a), \quad \text{где}\,\delta > 0 \quad \Big(\text{если } a \text{ – число}\Big)$$

— *правой полуокрестностью* a называется всякий интервал вида

$$U = (a, a+\delta), \quad \text{где}\,\delta > 0 \quad \Big(\text{если } a \text{ – число}\Big)$$

Далее следует определение, впервые сформулированное немецким математиком Генрихом Гейне:[17]

- Величина A называется *пределом функции* $f(x)$ при x стремящимся к a

$$A = \lim_{x\to a} f(x) \qquad \Big(f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} A\Big)$$

  если

  1) $f(x)$ определена в некоторой выколотой окрестности U величины a и

[17]Генрих Гейне (1821-1881) – известный немецкий математик, поэт и публицист (1797-1856).

2) для любой последовательности $x_n \in U$, стремящейся к a

$$x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} a \quad \Big(x_n \neq a\Big)$$

соответствующая последовательность значений $f(x_n)$ стремится к A:

$$f(x_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} A$$

Отдельно определяются односторонние пределы:

- Величина A называется *пределом слева (справа) функции* $f(x)$ в точке a

$$A = \lim_{x\to a-0} f(x) \quad \left(A = \lim_{x\to a+0} f(x)\right)$$

если

1) $f(x)$ определена в некоторой левой (правой) полуокрестности U точки a и
2) для любой последовательности $x_n \in U$, стремящейся к a

$$x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} a \quad \Big(x_n \neq a\Big)$$

соответствующая последовательность значений $f(x_n)$ стремится к A:

$$f(x_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} A$$

Перепишем эти общие определения для некоторых конкретных ситуаций.

◇ **3.4.1** (конечный предел функции в точке по Гейне)**.** Применительно к случаю конечного предела функции в точке наше определение можно сформулировать следующим образом.

Число A называется *пределом* функции f в точке $a \in \mathbb{R}$, если

1) функция f определена на некотором множестве вида $(a-\delta; a) \cup (a; a+\delta)$, и
2) для всякой последовательности аргументов $\{x_n\}$, стремящейся к точке a, но не попадающей в a

$$x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} a \qquad x_n \in (a-\delta; a) \cup (a; a+\delta)$$

соответствующая последовательность значений функции $\{f(x_n)\}$ стремится к числу A:

$$f(x_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} A$$

В этом случае пишут

$$f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} A$$

или

$$\lim_{x\to a} f(x) = A$$

◇ **3.4.2** (конечный предел функции в точке слева по Гейне)**.** Число A называется *пределом слева* функции f в точке a, если

1) функция f определена на некотором интервале вида $(a-\delta; a)$, и
2) для всякой последовательности аргументов $\{x_n\}$, стремящейся слева к точке a

$$x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} a \qquad x_n \in (a-\delta; a)$$

соответствующая последовательность значений функции $\{f(x_n)\}$ стремится к числу A:

$$f(x_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} A$$

В этом случае пишут

$$f(x) \underset{x\to a-0}{\longrightarrow} A$$

или

$$\lim_{x\to a-0} f(x) = A$$

$\diamond$ **3.4.3** (бесконечный предел функции в точке по Гейне)**.** Говорят, что функция f *стремится к* ∞) в точке a, если

1) функция f определена на некотором множестве вида $(a-\delta; a)\cup(a; a+\delta)$, и
2) для всякой последовательности аргументов $\{x_n\}$, стремящейся к точке a, но не попадающей в a

$$x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} a \qquad x_n \in (a-\delta; a)\cup(a; a+\delta)$$

соответствующая последовательность значений функции $\{f(x_n)\}$ стремится к ∞:

$$f(x_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$$

В этом случае пишут

$$f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} +\infty \qquad (\text{или } -\infty, \text{ или } \infty)$$

или

$$\lim_{x\to a} f(x) = +\infty \qquad (\text{или } -\infty, \text{ или } \infty)$$

$\diamond$ **3.4.4** (конечный предел функции в бесконечности по Гейне)**.** Число A называется *пределом функции f при $x\to+\infty$*, если

1) функция f определена на некотором интервале вида $(E; +\infty)$, и
2) для всякой последовательности аргументов $\{x_n\}\subset(\beta; +\infty)$, стремящейся к $+\infty$

$$x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$$

соответствующая последовательность значений функции $\{f(x_n)\}$ стремится к числу A:

$$f(x_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} A$$

В этом случае пишут

$$f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} A$$

или

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = A$$

$\triangleright$ **3.4.5.** Сформулируйте определения предела функции для остальных ситуаций, описанных в двух таблицах этого параграфа, и приведите графические иллюстрации.

$\triangleright$ **3.4.6.** Нарисуйте график какой-нибудь функции $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, удовлетворяющей следующим условиям (всем сразу):

1) $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -2$;
2) $\lim_{x\to-1} f(x) = 0$;
3) $\lim_{x\to1-0} f(x) = -\infty$;
4) $\lim_{x\to1+0} f(x) = 2$;
5) $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$;

Нахождение предела функции по определению.

$\diamond$ **3.4.7.** Покажем что

$$\lim_{x\to0}\frac{1}{x} = \infty$$

Действительно, если взять последовательность аргументов $\{x_n\}$, стремящуюся к нулю, но не попадающую в ноль

$$x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \qquad x_n \neq 0$$

то мы получим

$$f(x_n) = \frac{1}{x_n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$$

Это верно для всякой последовательности $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \quad x_n\neq0$, поэтому $\lim_{x\to0}\frac{1}{x}=\infty$.

◇ **3.4.8.** Покажем что

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x+2}{2x-1} = \frac{1}{2}$$

Действительно, если взять последовательность аргументов $\{x_n\}$, стремящуюся к бесконечности

$$x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$$

то мы получим

$$f(x_n) = \frac{x_n+2}{2x_n-1} = \frac{1+\frac{2}{x_n}}{2-\frac{1}{x_n}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2}$$

Это верно для всякой последовательности $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$, поэтому $\lim_{x\to 0} \frac{x+2}{2x-1} = \frac{1}{2}$.

◇ **3.4.9.** Покажем что

$$\lim_{x\to 0-0} \frac{1}{x} = -\infty \qquad \lim_{x\to 0+0} \frac{1}{x} = +\infty$$

Действительно, если взять последовательность аргументов $\{x_n\}$, стремящуюся к 0 слева,

$$x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \qquad x_n < 0$$

то мы получим

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{x_n} = \big(\text{применяем теорему 3.2.4}\big) = -\infty$$

Это верно для всякой последовательности $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \quad x_n < 0$, поэтому $\lim_{x\to 0-0} \frac{1}{x} = -\infty$.

Аналогично, если

$$x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \qquad x_n > 0$$

то мы получим

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{x_n} = \big(\text{применяем теорему 3.2.4}\big) = +\infty$$

Это верно для всякой последовательности $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \quad x_n > 0$, поэтому $\lim_{x\to 0+0} \frac{1}{x} = +\infty$.

◇ **3.4.10.** Покажем что

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+1}{|x|(x+1)} = 1 \qquad \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2+1}{|x|(x+1)} = -1$$

Действительно, если взять последовательность аргументов $\{x_n\}$, стремящуюся к $+\infty$,

$$x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$$

то мы получим

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{x_n^2+1}{|x_n|(x_n+1)} =$$

$$= \begin{pmatrix} |x_n| = x_n, \\ \text{потому что} \\ \text{почти все } x_n > 0 \end{pmatrix} = \underbrace{\lim_{n\to\infty} \frac{x_n^2+1}{x_n(x_n+1)}}_{\substack{\uparrow \\ \text{делим числитель} \\ \text{и знаменатель на } x_n^2}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{1}{x_n^2}}{1+\frac{1}{x_n}} = \begin{pmatrix} \text{применяем} \\ \text{теорему 3.2.4} \end{pmatrix} = \frac{1+0}{1+0} = 1$$

Это верно для всякой последовательности $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$, поэтому $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+1}{|x|(x+1)} = 1$.

Аналогично, если

$$x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} -\infty$$

то мы получим

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{x_n^2+1}{|x_n|(x_n+1)} =$$

$$= \begin{pmatrix} |x_n| = -x_n, \\ \text{потому что} \\ \text{почти все } x_n < 0 \end{pmatrix} = \underbrace{\lim_{n\to\infty} \frac{x_n^2+1}{-x_n(x_n+1)}}_{\substack{\uparrow \\ \text{делим числитель} \\ \text{и знаменатель на } x_n^2}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{1}{x_n^2}}{-1-\frac{1}{x_n}} = \begin{pmatrix} \text{применяем} \\ \text{теорему 3.2.4} \end{pmatrix} = \frac{1+0}{-1-0} = -1$$

Это верно для всякой последовательности $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} -\infty$, поэтому $\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2+1}{|x|(x+1)} = 1$.

◇ **3.4.11.** Покажем что

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^3} = 0$$

Действительно, если взять последовательность аргументов $\{x_n\}$, стремящуюся к ∞,

$$x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$$

то мы получим

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{x_n}\right)^3 = \begin{pmatrix} \text{применяем} \\ \text{теорему 3.2.4} \end{pmatrix} = 0$$

Это верно для всякой последовательности $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$, поэтому $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^3} = 0$.

◇ **3.4.12.** Покажем что

$$\lim_{x\to+\infty} |x|x = +\infty \qquad \lim_{x\to-\infty} |x|x = -\infty$$

Действительно, если взять последовательность аргументов $\{x_n\}$, стремящуюся к $+\infty$,

$$x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$$

то мы получим

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} |x_n|x_n =$$

$$= \begin{pmatrix} |x_n| = x_n, \\ \text{потому что} \\ \text{почти все } x_n > 0 \end{pmatrix} = \lim_{n\to\infty} x_n^2 = +\infty$$

Это верно для всякой последовательности $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$, поэтому $\lim_{x\to+\infty} |x|x = +\infty$.

Возьмем теперь последовательность аргументов $\{x_n\}$, стремящуюся к $-\infty$,

$$x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} -\infty$$

Тогда

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} |x_n|x_n =$$

$$= \begin{pmatrix} |x_n| = -x_n, \text{потому что} \\ \text{почти все } x_n < 0 \end{pmatrix} = -\lim_{n\to\infty} x_n^2 = -\infty$$

Это верно для всякой последовательности $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} -\infty$, поэтому $\lim_{x\to-\infty} |x|x = -\infty$.

Связь между нулевым и бесконечным пределом.

Теорема 3.4.1 (о связи между нулевым и бесконечным пределами). *Предел функции f при $x \to a$ равен нулю в том и только в том случае, если предел обратной функции $\frac{1}{f}$ при $x \to a$ равен бесконечности:*

$$\lim_{x\to a} f(x) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_{x\to a} \frac{1}{f(x)} = \infty. \tag{3.4.136}$$

Доказательство. Это следует из теоремы 3.2.4 о связи между бесконечно большими и бесконечно малыми последовательностями: если $x_n \to a$, то соотношение $y_n = f(x_n) \to 0$ эквивалентно соотношению $\frac{1}{y_n} = \frac{1}{f(x_n)} \to \infty$. □

◇ **3.4.13.**

$$\boxed{\lim_{x\to 0} x^k = \begin{cases} 0, & \text{если } k > 0 \\ \infty, & \text{если } k < 0 \end{cases}} \tag{3.4.137}$$

Доказательство. 1. Пусть $k > 0$. Тогда

$$x_n \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$$

$$\Downarrow \quad \text{(свойство } 3^0 \text{ на с.216)}$$

$$(x_n)^k \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$$

Поскольку это верно для любой последовательности $x_n \to 0$, мы получаем, что

$$x^k \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0 \qquad (k > 0)$$

2. Пусть $k < 0$. Тогда $m = -k > 0$, поэтому:

$$x^m \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0 \quad \text{(уже доказано)}$$

$$\Downarrow \quad (3.4.136)$$

$$x^k = \frac{1}{x^m} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} \infty$$

□

◇ **3.4.14.**

$$\boxed{\lim_{x\to \infty} x^k = \begin{cases} \infty, & \text{если } k > 0 \\ 0, & \text{если } k < 0 \end{cases}} \tag{3.4.138}$$

Доказательство. 1. Пусть $k > 0$ и

$$x_n \underset{x\to 0}{\longrightarrow} \infty$$

Обозначим $y_n = \frac{1}{x_n}$. Тогда

$$y_n \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0 \quad \text{(теорема 3.2.4)}$$

$$\Downarrow \quad \text{(свойство } 3^0 \text{ на с.216)}$$

$$(y_n)^k \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$$

$$\Downarrow \quad \text{(теорема 3.2.4)}$$

$$(x_n)^k = \frac{1}{(y_n)^k} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} \infty$$

Поскольку это верно для любой последовательности $x_n \to \infty$, мы получаем, что

$$x^k \underset{x\to \infty}{\longrightarrow} \infty \qquad (k > 0)$$

2. Пусть $k < 0$. Тогда $m = -k > 0$, поэтому:

$$x^m \underset{x\to \infty}{\longrightarrow} \infty \quad \text{(уже доказано)}$$

$$\Downarrow \quad (3.4.136)$$

$$x^k = \frac{1}{x^m} \underset{x\to \infty}{\longrightarrow} 0$$

□

◇ **3.4.15.** Для любого $n \in \mathbb{N}$

$$\lim_{x\to -\infty} x^{2n} = +\infty \tag{3.4.139}$$

$$\lim_{x\to +\infty} x^{2n} = +\infty \tag{3.4.140}$$

◇ **3.4.16.** Для любого $n \in \mathbb{N}$

$$\lim_{x\to 0} x^{-2n} = +\infty \tag{3.4.141}$$

$$\lim_{x\to \infty} x^{-2n} = 0 \tag{3.4.142}$$

◇ **3.4.17.** Для любого $n \in \mathbb{N}$

$$\lim_{x\to -\infty} x^{2n-1} = -\infty \tag{3.4.143}$$

$$\lim_{x\to +\infty} x^{2n-1} = +\infty \tag{3.4.144}$$

◇ **3.4.18.** Для любого $n \in \mathbb{N}$

$$\lim_{x\to -0} x^{-(2n-1)} = -\infty \tag{3.4.145}$$

$$\lim_{x\to +0} x^{-(2n-1)} = +\infty \tag{3.4.146}$$

$$\lim_{x\to \infty} x^{-(2n-1)} = 0 \tag{3.4.147}$$

▷▷ **3.4.19.** Покажите что

1) $\lim_{x\to +\infty} \frac{|x|}{x} = 1$

2) $\lim_{x\to -\infty} \frac{|x|}{x} = -1$

Связь между односторонними и двусторонними пределами.

Теорема 3.4.2. *Величина A будет пределом функции f в точке a*

$$A = \lim_{x \to a} f(x)$$

тогда и только тогда, когда A является пределом слева и пределом справа функции f в точке a:

$$\lim_{x \to a-0} f(x) = A = \lim_{x \to a+0} f(x)$$

Доказательство. 1. Если $A = \lim_{x \to a} f(x)$, то для любой последовательности $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} a$, $x_n \ne a$ должно выполняться $f(x_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} A$. В частности, если $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} a$, $x_n < a$ то $f(x_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} A$, и поэтому $A = \lim_{x \to a-0} f(x)$. Аналогично получается $A = \lim_{x \to a+0} f(x)$.

2. Наоборот, если $\lim_{x \to a-0} f(x) = A = \lim_{x \to a+0} f(x)$, то это означает, что

$$\forall x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} a,\ x_n < a \quad \Rightarrow f(x_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} A$$

и

$$\forall x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} a,\ x_n > a \quad \Rightarrow f(x_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} A$$

Поэтому если взять последовательность $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} a$, $x_n \ne a$ то, разложив ее на две подпоследовательности

$$\Big(x_{n_k} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} a,\ x_{n_k} < a\Big), \quad \Big(x_{m_k} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} a,\ x_{m_k} > a\Big)$$

мы получим

$$f(x_{n_k}) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} A, \quad f(x_{m_k}) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} A$$

Это означает, что

$$f(x_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} A,$$

Поскольку это верно для любой последовательности $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} a$, $x_n \ne a$, мы получаем $A = \lim_{x \to a} f(x)$.

□

Теорема 3.4.3. *Величина A будет пределом функции f на бесконечности*

$$A = \lim_{x \to \infty} f(x)$$

тогда и только тогда, когда A является пределом функции f при x стремящимся к $-\infty$ и к $+\infty$:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = A = \lim_{x \to +\infty} f(x)$$

Доказательство. 1. Если $A = \lim_{x \to \infty} f(x)$, то для любой последовательности $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$ должно выполняться $f(x_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} A$. В частности, если $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} -\infty$ то $f(x_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} A$, и поэтому $A = \lim_{x \to -\infty} f(x)$. Аналогично получается $A = \lim_{x \to +\infty} f(x)$.

2. Наоборот, если $\lim_{x \to -\infty} f(x) = A = \lim_{x \to +\infty} f(x)$, то это означает, что

$$\forall x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} -\infty \quad \Rightarrow f(x_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} A$$

и

$$\forall x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty \quad \Rightarrow f(x_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} A$$

Поэтому если взять последовательность $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$ то, разложив ее на две подпоследовательности

$$x_{n_k} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} -\infty, \quad x_{m_k} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} +\infty,$$

мы получим

$$f(x_{n_k}) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} A, \quad f(x_{m_k}) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} A$$

Это означает, что

$$f(x_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} A,$$

Поскольку это верно для любой последовательности $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$, мы получаем $A = \lim_{x \to \infty} f(x)$. □

◇ **3.4.20.** Покажем что

$$\lim_{x\to 0-0}\frac{|x|}{x}=-1 \qquad \lim_{x\to 0+0}\frac{|x|}{x}=1$$

Действительно, если взять последовательность аргументов $\{x_n\}$, стремящуюся к 0 слева,

$$x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \qquad x_n<0$$

то мы получим

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|x_n|}{x_n}=\left(\begin{smallmatrix}|x_n|=-x_n,\\ \text{поскольку}\\ x_n<0\end{smallmatrix}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{-x_n}{x_n}=$$
$$=\lim_{n\to\infty}(-1)=-1$$

Это верно для всякой последовательности $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \quad x_n<0$, поэтому $\lim_{x\to 0-0}\frac{|x|}{x}=-1$.

Аналогично, если

$$x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \qquad x_n>0$$

то мы получим

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|x_n|}{x_n}=\left(\begin{smallmatrix}|x_n|=x_n,\\ \text{поскольку}\\ x_n>0\end{smallmatrix}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{x_n}=\lim_{n\to\infty}1=1$$

Это верно для всякой последовательности $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \quad x_n>0$, поэтому $\lim_{x\to 0-0}\frac{|x|}{x}=1$.

◇ **3.4.21.** Покажем что

$$\lim_{x\to 1-0}\frac{x^2-1}{|x-1|}=-2 \qquad \lim_{x\to 1+0}\frac{x^2-1}{|x-1|}=2$$

Действительно, если взять последовательность аргументов $\{x_n\}$, стремящуюся к 1 слева,

$$x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1 \qquad x_n<1$$

то мы получим

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n^2-1}{|x_n-1|}=\lim_{n\to\infty}\frac{(x_n+1)(x_n-1)}{|x_n-1|}=$$
$$=\left(\begin{smallmatrix}|x_n-1|=-(x_n-1),\\ \text{поскольку } x_n-1<0\end{smallmatrix}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{(x_n+1)(x_n-1)}{-(x_n-1)}=$$
$$=-\lim_{n\to\infty}(\underset{\searrow 1}{\boxed{x_n}}+1)=-2$$

Это верно для всякой последовательности $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1 \quad x_n<1$, поэтому $\lim_{x\to 1-0}\frac{x^2-1}{|x-1|}=-2$.

Аналогично, если

$$x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1 \qquad x_n>1$$

то мы получим

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n^2-1}{|x_n-1|}=\lim_{n\to\infty}\frac{(x_n+1)(x_n-1)}{|x_n-1|}=$$
$$=\left(\begin{smallmatrix}|x_n-1|=x_n-1,\\ \text{поскольку } x_n-1>0\end{smallmatrix}\right)=$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(x_n+1)(x_n-1)}{x_n-1}=\lim_{n\to\infty}(\underset{\searrow 1}{\boxed{x_n}}+1)=2$$

Это верно для всякой последовательности $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$, $x_n>1$, поэтому $\lim_{x\to 1-0}\frac{x^2-1}{|x-1|}=2$.

◇ **3.4.22.** Покажем что

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2+x^3}{|x|}=0$$

Возьмем сначала последовательность аргументов $\{x_n\}$, стремящуюся к 0 слева,

$$x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \qquad x_n<0$$

тогда

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n^2+x_n^3}{|x_n|}=\left(\begin{smallmatrix}|x_n|=-x_n,\\ \text{поскольку } x_n<0\end{smallmatrix}\right)=$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{x_n^2+x_n^3}{-x_n}=\lim_{n\to\infty}(-x_n-x_n^2)=0$$

Это верно для всякой последовательности $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \quad x_n<0$, поэтому $\lim_{x\to 0-0}\frac{x^2+x^3}{|x|}=0$.

Аналогично, если

$$x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \qquad x_n>0$$

то мы получим

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n^2+x_n^3}{|x_n|}=\left(\begin{smallmatrix}|x_n|=x_n,\\ \text{поскольку } x_n>0\end{smallmatrix}\right)=$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{x_n^2+x_n^3}{x_n}=\lim_{n\to\infty}(x_n+x_n^2)=0$$

Это верно для всякой последовательности $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \quad x_n>0$, поэтому $\lim_{x\to 0+0}\frac{x^2+x^3}{|x|}=1$.

Мы получаем, что для функции $f(x)=\frac{x^2+x^3}{|x|}$ левый и правый предел в точке 0 совпадают, поэтому

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2+x^3}{|x|}=\lim_{x\to 0-0}\frac{x^2+x^3}{|x|}=\lim_{x\to 0+0}\frac{x^2+x^3}{|x|}=0$$

◇ **3.4.23.** Покажем что

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{|x|}=+\infty$$

Действительно, если взять последовательность аргументов $\{x_n\}$, стремящуюся к 0 слева,

$$x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \qquad x_n<0$$

то мы получим

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{|x_n|}=\left(\begin{smallmatrix}|x_n|=-x_n,\\ \text{потому что } x_n<0\end{smallmatrix}\right)=-\lim_{n\to\infty}\frac{1}{x_n}=$$
$$=\left(\begin{smallmatrix}\text{применяем}\\ \text{теорему 3.2.4}\end{smallmatrix}\right)=+\infty$$

Это верно для всякой последовательности $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \quad x_n<0$, поэтому $\lim_{x\to 0-0}\frac{1}{x}=+\infty$.

Аналогично, если

$$x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \qquad x_n > 0$$

то мы получим

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{|x_n|} = \left(\begin{smallmatrix} |x_n| = x_n, \\ \text{потому что } x_n > 0 \end{smallmatrix}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{x_n} = \\ = \left(\begin{smallmatrix} \text{применяем} \\ \text{теорему 3.2.4} \end{smallmatrix}\right) = +\infty$$

Это верно для всякой последовательности $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ $x_n > 0$, поэтому $\lim_{x\to 0+0} \frac{1}{x} = +\infty$.

Мы получили

$$\lim_{x\to 0-0} \frac{1}{|x|} = +\infty = \lim_{x\to 0+0} \frac{1}{|x|}$$

и это означает что

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{|x|} = +\infty$$

Связь предела функции с монотонными последовательностыми.

Теорема 3.4.4. [18] *Пусть функция f определена на некотором интервале (a, b) и C – произвольное число. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(i) $\lim_{x\to b-0} f(x) = C$;

(ii) *для любой монотонной последовательности x_n*

$$x_1 < x_2 < ... < x_n < ... < b, \quad x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} b \tag{3.4.148}$$

выполняется

$$f(x_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} C \tag{3.4.149}$$

Доказательство. Ясно, что из (i) следует (ii), потому что если $\lim_{x\to b-0} f(x) = C$, то $f(x_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} C$ для любой последовательности $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} b$, $x_n < b$ (необязательно монотонной). Докажем, что наоборот если (i) не выполняется, то не выполняется и (ii). Пусть $\lim_{x\to b-0} f(x) \ne C$, то есть существует точка последовательность $x_n \in M$ такая что

$$x_n \in (a, b) \qquad \& \qquad x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} a \qquad \& \qquad f(x_n) \underset{n\to\infty}{\not\longrightarrow} C$$

План наших действий состоит в том, чтобы, переходя от x_n к ее подпоследовательностям, построить строго монотонную последовательность с теми же свойствами.

1. Прежде всего, по свойству подпоследовательностей 2° на с.228, второе условие означает, что существует $\varepsilon > 0$ и последовательность натуральных чисел $n_k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \infty$, такие что

$$\forall k \in \mathbb{N} \qquad f(x_{n_k}) \notin (C - \varepsilon; C + \varepsilon)$$

Обозначив $y_k = x_{n_k}$, мы получим последовательность с такими свойствами:

$$y_k \in (a, b) \qquad \& \qquad y_k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} a \qquad \& \qquad \forall k \in \mathbb{N} \qquad f(y_k) \notin (C - \varepsilon; C + \varepsilon)$$

2. После этого мы индуктивно определим две последовательности k_m и t_m. Сначала полагаем

$$k_1 = 1, \qquad t_1 = y_1$$

Затем, если для $m = 1, ..., l$ числа k_m и t_m определены, мы замечаем вот что. Поскольку $a < y_k$, $y_k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} a$ и $a < t_l$, найдется такое k_{l+1}, что $y_{k_{l+1}}$ лежит в интервале $(a; t_l)$:

$$y_{k_{l+1}} < t_l$$

Выбираем такое k_{l+1} и полагаем

$$t_{l+1} = y_{k_{l+1}}$$

Полученная последовательность $t_m = z_{m+1}$ обладает нужными нам свойствами. Во-первых, (как и для x_n и y_k) все числа t_m лежат в интервале (a, b):

$$t_m \in (a, b)$$

---

[18] Эта теорема используется ниже при доказательстве правила Лопиталя для раскрытия неопределенностей типа $\frac{\infty}{\infty}$.

Во-вторых, последовательность t_m, как подпоследовательность в y_k, должна стремиться к a:

$$t_m = y_{k_m} \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} a.$$

В-третьих, последовательность значений f на ней не заходит в интервал $(C-\varepsilon; C+\varepsilon)$:

$$\forall m \in \mathbb{N} \qquad f(t_m) = f(z_{k_m}) \notin (C-\varepsilon; C+\varepsilon)$$

И, в-четвертых, она строго монотонна:

$$t_m < y_{k_{m+1}} = t_{m+1}$$

$\square$

Заменой переменной доказывается симметричное утверждение:

Теорема 3.4.5. *Пусть функция f определена на некотором интервале (a, b) и C – произвольное число. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(i) $\lim_{x\to a+0} f(x) = C$*;*

(ii) для любой монотонной последовательности x_n

$$a < ... < x_n < ... < x_2 < x_1 < b, \quad x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} a$$

выполняется

$$f(x_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} C$$

Предел монотонной функции.

Теорема 3.4.6. *Пусть функция f определена на некотором интервале (a, b) и монотонна на нем. Тогда*

— *если f неубывает, то*

$$\lim_{x\to a+0} f(x) = \inf_{x\in(a;b)} f(x) \qquad \lim_{x\to b-0} f(x) = \sup_{x\in(a;b)} f(x) \tag{3.4.150}$$

— *если f невозрастает, то*

$$\lim_{x\to a+0} f(x) = \sup_{x\in(a;b)} f(x) \qquad \lim_{x\to b-0} f(x) = \inf_{x\in(a;b)} f(x) \tag{3.4.151}$$

(b) Теоремы о пределах

Связь между понятием предела и непрерывностью.

Теорема 3.4.7 (критерий непрерывности)**.** *Пусть функция f определена на некотором интервале $(\alpha; \beta)$, содержащем точку $x = a$. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(i) функция f непрерывна в точке a;

(ii) функция f имеет конечный предел в точке a, равный $f(a)$:

$$\exists \lim_{x\to a} f(x) = f(a)$$

Доказательство. 1. $(i) \Longrightarrow (ii)$. Пусть функция f непрерывна в точке a, то есть для всякой последовательности аргументов $\{x_n\}$, стремящейся к точке a соответствующая последовательность значений $\{f(x_n)\}$ стремится к значению $f(a)$. Тогда, в частности, для всякой последовательности

$$x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} a, \qquad x_n \neq a$$

выполняется

$$f(x_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f(a)$$

По определению предела это означает, что предел функции f в точке $x = a$ равен $f(a)$:

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$$

2. $(ii) \Longrightarrow (i)$. Пусть наоборот

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$$

Это означает, что для любой последовательности

$$x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} a, \qquad x_n \ne a$$

выполняется

$$f(x_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f(a)$$

Нам нужно проверить то же самое для последовательностей $\{x_n\}$, у которых некоторые элементы x_n совпадают с a. Пусть $\{x_n\}$ – как раз такая последовательность, то есть $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} a$, причем $x_n = a$ для некоторых n. Тогда $\{x_n\}$ можно разложить на две подпоследовательности $\{x_{n_k}\}$ и $\{x_{m_k}\}$ такие что

$$x_{n_k} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} a \quad x_{n_k} \ne a, \qquad x_{m_k} = a$$

Для них мы получаем

$$f(x_{n_k}) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} f(a), \qquad f(x_{m_k}) = f(a)$$

откуда

$$f(x_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f(a),$$

Мы показали, что для всякой последовательности аргументов $\{x_n\}$, стремящейся к точке a соответствующая последовательность значений $\{f(x_n)\}$ стремится к значению $f(a)$. Это означает, что функция f непрерывна в точке a. □

Теорема 3.4.8 (о перестановочности предела с непрерывной функцией)**.** *Если существует конечный предел*

$$\lim_{x\to a} f(x) = A$$

и функция $g(y)$ определена в некоторой окрестности точки A и непрерывна в A, то

$$\exists \quad \lim_{x\to a} g\Big(f(x)\Big) = g\Big(\lim_{x\to a} f(x)\Big) \tag{3.4.152}$$

Доказательство. Если $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} a, \quad x_n \ne a$, то, поскольку $\lim_{x\to a} f(x) = A$, получаем $f(x_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} A$, и поскольку $g(y)$ непрерывна в точке A, $g\Big(f(x_n)\Big) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} g(A)$. Поскольку это верно для произвольной последовательности $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} a, \quad x_n \ne a$, мы получаем $\lim_{x\to a} g\Big(f(x)\Big) = g(A) = g\Big(\lim_{x\to a} f(x)\Big)$ □

Теорема о замене переменной под знаком предела.

Теорема 3.4.9 (о замене переменной под знаком предела)**.** *Пусть*

$$\lim_{x\to a} f(x) = b \qquad \& \qquad \lim_{y\to b} g(y) = c$$

причем

$$\forall x \ne a \quad f(x) \ne b$$

Тогда

$$\lim_{x\to a} g(f(x)) = c$$

Доказательство. Возьмем какую-нибудь последовательность

$$x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} a, \qquad x_n \ne a$$

Тогда мы получим

$$f(x_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} b, \qquad f(x_n) \ne b$$

Поэтому

$$g(f(x_n)) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} c$$

Поскольку это верно для всякой последовательности $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} a \quad (x_n \ne a)$, мы получаем, что $\lim_{x\to a} g(f(x)) = c$. □

Эта теорема бывает полезна при вычислении предела от сложной функции. Если нам нужно найти предел

$$\lim_{x\to a} g(f(x))$$

и известно, что $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} b$ причем $f(x)\ne b$ при $x\ne a$, то можно сделать замену переменных:

$$\lim_{x\to a} g(f(x)) = \left| \begin{matrix} f(x)=y \\ y \underset{x\to a}{\longrightarrow} b \\ y\ne b \,\text{при}\, x\ne a \end{matrix} \right| = \lim_{y\to b} g(y)$$

◇ **3.4.24.** Найти предел

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x^2-x}{x^2+10}$$

Решение:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x^2-x}{x^2+10} = \left| \begin{matrix} x=\frac{1}{y},\ y=\frac{1}{x} \\ y \underset{x\to\infty}{\longrightarrow} 0 \end{matrix} \right| =$$

$$= \lim_{y\to 0} \frac{\frac{2}{y^2}-\frac{1}{y}}{\frac{1}{y^2}+10} = \lim_{y\to 0} \frac{2-y}{1+10y^2} =$$

$$= (\text{подстановка}) = \frac{2-0}{1+10\cdot 0} = 2$$

▷▷ **3.4.25.** Найти пределы

1) $\lim_{x\to\infty} \frac{2x^2-x}{x^2+10}$,
2) $\lim_{x\to\infty} \frac{1-3x}{2x+3}$,
3) $\lim_{x\to\infty} \frac{(x-1)^3}{2x^3+3x+1}$,
4) $\lim_{x\to\infty} \frac{10x+5}{0.01x^2-6x}$,
5) $\lim_{x\to\infty} \frac{x^2-5x+1}{3x+7}$,
6) $\lim_{x\to\infty} \frac{x^3-5x}{x+10^{10}}$

Арифметические операции над пределами.

Теорема 3.4.10. *Если существуют конечные пределы* $\lim_{x\to a} f(x)$ *и* $\lim_{x\to a} g(x)$, *то справедливы формулы:*

$$\lim_{x\to a}(f(x)+g(x)) = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x) \tag{3.4.153}$$

$$\lim_{x\to a}(f(x)-g(x)) = \lim_{x\to a} f(x) - \lim_{x\to a} g(x) \tag{3.4.154}$$

$$\lim_{x\to a}(C\cdot f(x)) = C\cdot \lim_{x\to a} f(x) \qquad (\textit{если}\ 0\ne C\ne\infty) \tag{3.4.155}$$

$$\lim_{x\to a} f(x)\cdot g(x) = \lim_{x\to a} f(x)\cdot \lim_{x\to a} g(x) \tag{3.4.156}$$

$$\lim_{x\to a} \frac{g(x)}{f(x)} = \frac{\lim_{x\to a} g(x)}{\lim_{x\to a} f(x)} \qquad (\textit{если}\ \lim_{x\to a} f(x)\ne 0) \tag{3.4.157}$$

Доказательство. Эти формулы следуют из арифметических свойств последовательностей 1°-4°, перечисленных на с.216. Докажем например (3.4.156). Если $\lim_{x\to a} f(x)=A$ и $\lim_{x\to a} g(x)=B$, то для всякой последовательности $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} a,\quad x_n\ne a$ возникает логическая цепочка:

$$x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} a, \quad x_n\ne a$$

$$\Downarrow$$

$$f(x_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} A, \qquad g(x_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} B$$

$$\Downarrow \qquad \begin{pmatrix}\text{используем свойство} \\ 3^0 \text{ на с.216}\end{pmatrix}$$

$$f(x_n)\cdot g(x_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} A\cdot B$$

Поскольку это верно для любой последовательности $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} a,\quad x_n\ne a$, мы получаем $\lim_{x\to a} f(x)\cdot g(x) = \lim_{x\to a} f(x)\cdot \lim_{x\to a} g(x)$. □

Критерий Коши существования предела функции. В следующих двух теоремах, называемых критериями Коши, объясняется, что конечный предел функции f при $x \to a$ существует тогда и только тогда, когда разность значений этой функции в соседних точках $f(s) - f(t)$ стремится к нулю при $s, t \to a$.

Теорема 3.4.11 (критерий Коши существования двустороннего предела функции)**.** *Пусть функция f определена в некоторой проколотой окрестности U величины a (где a – произвольное число или символ бесконечности ∞). Тогда следующие условия эквивалентны:*

(i) существует конечный предел

$$\lim_{x \to a} f(x)$$

(ii) для любых двух последовательностей $s_n, t_n \in U$ стремящихся к a

$$s_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} a, \quad t_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} a,$$

разность между соответствующими значениями функции f стремится к нулю:

$$f(t_n) - f(s_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

Теорема 3.4.12 (критерий Коши существования одностороннего предела функции)**.** [19] *Пусть функция f определена на интервале $(\alpha; a)$, где a – произвольное число или символ бесконечности ∞. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(i) существует конечный предел

$$\lim_{x \to a-0} f(x)$$

(ii) для любых двух последовательностей $s_n, t_n \in (\alpha; a)$ стремящихся к a

$$s_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} a, \quad t_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} a,$$

разность между соответствующими значениями функции f стремится к нулю:

$$f(t_n) - f(s_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

Доказательство. Эти две теоремы доказываются одинаково, поэтому мы докажем лишь вторую.

1. Легко проверяется, что из условия (i) следует условие (ii). Действительно, если существует конечный предел $\lim_{x\to a-0} f(x) = C$, то есть для всякой последовательности $x_n \in (\alpha; a)$, $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} a$ выполняется соотношение

$$f(x_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} C$$

то взяв произвольные последовательности $s_n, t_n \in (\alpha; a)$, $s_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} a$, $\quad t_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} a$, мы получим

$$f(t_n) - f(s_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} C - C = 0$$

2. Теперь докажем, что из условия (ii) следует условие (i). Пусть выполняется (ii).

a) Покажем сначала, что тогда для любой последовательности $x_n \in (\alpha; a)$, $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} a$ существует конечный предел

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n)$$

Действительно, обозначим $y_n = f(x_n)$. Тогда если взять любые две последовательности индексов

$$p_i \underset{i\to\infty}{\longrightarrow} \infty, \quad q_i \underset{i\to\infty}{\longrightarrow} \infty$$

то положив $t_i = x_{p_i}$, $s_i = x_{q_i}$, мы получим, что, в силу условия (ii)

$$y_{p_i} - y_{q_i} = f(x_{p_i}) - f(x_{q_i}) = f(t_i) - f(s_i) \underset{i\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

Это означает, что последовательность $y_n = f(x_n)$ удовлетворяет критерию Коши (то есть обладает свойством (i) теоремы 3.2.15). Значит, $y_n = f(x_n)$ имеет конечный предел.

[19] Этот результат понадобится при доказательстве критерия Коши сходимости несобственного интеграла (теорема 8.1.7).

b) Мы показали, что для любой последовательности $x_n \in (\alpha; a)$, $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} a$ существует конечный предел $\lim_{n\to\infty} f(x_n)$. Теперь из условия (ii) следует, что все такие пределы совпадают, потому что для любых двух последовательностей $s_n, t_n \in (\alpha; a)$ стремящихся к a

$$s_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} a, \quad t_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} a$$

выполняется равенство

$$\lim_{n\to\infty} \left(f(t_n) - f(s_n)\right) = 0$$

и следовательно,

$$\lim_{n\to\infty} f(t_n) = \lim_{n\to\infty} f(s_n)$$

Это в свою очередь означает, что существует число C такое, что

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = C$$

для любой последовательности $x_n \in (\alpha; a)$, $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} a$, то есть

$$\lim_{x\to a-0} f(x) = C$$

Мы убедились, что из условия (ii) следует условие (i). Теорема 1.1 доказана. □

(c) Язык ε-δ Коши

Определение предела функции по Коши. Данное нами на с.261 определение предела функции по Гейне – не единственно возможное. В некоторых случаях бывает полезно знать еще одно, эквивалентное определение, предложенное известным французским математиком Огюстеном Коши (1789-1857). Чтобы его сформулировать, нам, как и в случае с определением Гейне, понадобится вспомнить несколько терминов.

Пусть, как и в § 4(a), a и A обозначают числа, или символы бесконечности, возможно с определенным знаком

$$a, A \in \mathbb{R} \quad \text{или} \quad a, A = \infty, -\infty, +\infty$$

и пусть для всякого такого a

— *проколотой окрестностью* величины a называется всякое множество вида

$$U = \left\{ \begin{matrix} (a-\delta, a) \cup (a, a+\delta), \quad \text{где}\, \delta > 0 \quad \Big(\text{если } a - \text{число}\Big) \\ (-\infty, -E) \cup (E, +\infty), \quad \text{где}\, E > 0 \quad \Big(\text{если}\, a = \infty\Big); \\ (-\infty, -E), \quad \text{где}\, E > 0 \quad \Big(\text{если}\, a = -\infty\Big); \\ (E, +\infty), \quad \text{где}\, E > 0 \quad \Big(\text{если}\, a = +\infty\Big); \end{matrix} \right\}$$

— *левой полуокрестностью* a называется всякий интервал вида

$$U = (a-\delta, a), \quad \text{где}\, \delta > 0 \quad \Big(\text{если } a - \text{число}\Big)$$

— *правой полуокрестностью* a называется всякий интервал вида

$$U = (a, a+\delta), \quad \text{где}\, \delta > 0 \quad \Big(\text{если } a - \text{число}\Big)$$

— *окрестностью* величины a называется

  — всякий интервал вида $U = (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ (где $\varepsilon > 0$), если a – точка;

  — всякая проколотая окрестность величины a, если a – символ бесконечности.

Теперь даем само определение по Коши:

- Величина A называется *пределом функции* $f(x)$ при x стремящимся к a

$$A = \lim_{x\to a} f(x) \qquad \Big(f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} A\Big)$$

если

1) $f(x)$ определена в некоторой выколотой окрестности U величины a и
2) для любой окрестности V величины A найдется выколотая окрестность W величины a такая, что
$$\forall x \in W \quad f(x) \in V$$

Отдельно определяются односторонние пределы:

- Величина A называется *пределом слева (справа) функции* $f(x)$ в точке a
$$A = \lim_{x \to a-0} f(x) \qquad \left(A = \lim_{x \to a+0} f(x)\right)$$
если
  1) $f(x)$ определена в некоторой левой (правой) полуокрестности U точки a и
  2) для любой окрестности V величины A найдется левая (правая) полуокрестность W точки a такая, что
$$\forall x \in W \quad f(x) \in V$$

Покажем, как эта общая схема работает в конкретных ситуациях.

- **Конечный предел функции в точке по Коши.** Число A называется *пределом функции f в точке a*
$$\lim_{x \to a} f(x) = A$$
если
  1) функция f определена на некотором множестве вида $(a-\eta, a) \cup (a, a+\eta)$ (где $\eta > 0$), и
  2) для всякого числа $\varepsilon > 0$ существует число $\delta > 0$ такое что для любого $x \in (a-\delta; a) \cup (a, a+\delta)$ выполняется включение $f(x) \in (A-\varepsilon; A+\varepsilon)$.
- **Бесконечный предел функции в точке по Коши.** Говорят, что функция f *имеет бесконечный предел в точке a*
$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty$$
если
  1) функция f определена на некотором множестве вида $(a-\eta, a) \cup (a, a+\eta)$ (где $\eta > 0$), и
  2) для всякого числа $E > 0$ существует число $\delta > 0$ такое что для любого $x \in (a-\delta; a) \cup (a, a+\delta)$ выполняется включение $f(x) \in (-\infty, -E) \cup (E, +\infty)$.
- **Конечный предел функции слева в точке по Коши.** Число A называется *пределом слева функции f в точке a*
$$\lim_{x \to a-0} f(x) = A$$
если
  1) функция f определена на некотором интервале вида $(a-\eta; a)$ (где $\eta > 0$, и
  2) для всякого числа $\varepsilon > 0$ существует число $\delta > 0$ такое что для любого $x \in (a-\delta; a)$ выполняется включение $f(x) \in (A-\varepsilon; A+\varepsilon)$.
- **Конечный предел функции при $x \to +\infty$ по Коши.** Число A называется *пределом функции f при $x \to +\infty$*
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = A$$
если
  1) функция f определена на некотором интервале вида $(\alpha; +\infty)$, и
  2) для всякого числа $\varepsilon > 0$ существует число $\beta > \alpha$ такое что для любого $x \in (\beta; +\infty)$ выполняется включение $f(x) \in (A-\varepsilon; A+\varepsilon)$.

Теорема 3.4.13 (об эквивалентности определений предела по Коши и по Гейне). [20] *Для произвольной функции f и любых величин A и a следующие условия эквивалентны:*

(i) *A является пределом функции f при $x \to a$ по Коши;*

(ii) *A является пределом функции f при $x \to a$ по Гейне.*

(Аналогичное утверждение справедливо для односторонних пределов.)

[20] Эквивалентность определений предела по Коши и по Гейне используется ниже в главе 17 при доказательстве признаков сравнения несобственных интегралов (теоремы 5.7 и 7.5).

Доказательство. Мы докажем эту теорему для конечных пределов слева, поскольку в каждом случае доказательство отличается лишь несущественными деталями.

1. $(i) \Rightarrow (ii)$. Пусть A является пределом по Коши функции f при $x \to a-0$, то есть для всякого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое что для любого $x \in [a-\delta; a)$ выполняется включение $f(x) \in (A-\varepsilon; A+\varepsilon)$. Покажем, что тогда A является пределом по Гейне $f(x)$ при $x \to a-0$, то есть что для любой последовательности аргументов $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} a-0$ выполняется $f(x_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} A$.

Возьмем произвольную такую последовательноть $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} a-0$. и зафиксируем какое-нибудь $\varepsilon > 0$. По предположению, для него можно выбрать $\delta > 0$ так чтобы

$$\forall x \in [a-\delta; a) \quad f(x) \in (A-\varepsilon; A+\varepsilon) \tag{3.4.158}$$

Зафиксируем это число δ. Получаем следующую логическую цепочку:

$$x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} a-0$$

$$\Downarrow$$

$$x_n \in [a-\delta; a) \quad \text{для почти всех } n \in \mathbb{N}$$

$$\Downarrow$$

$$\text{(применяем (3.4.158))}$$

$$\Downarrow$$

$$f(x_n) \in (A-\varepsilon; A+\varepsilon) \quad \text{для почти всех } n \in \mathbb{N}$$

Это верно для произвольного $\varepsilon > 0$. Значит, $f(x_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} A$, а именно это нам и нужно было доказать.

2. $\not{(i)} \Rightarrow \not{(ii)}$. Пусть наоборот, A не является пределом по Коши функции f при $x \to a-0$, то есть существует такое $\varepsilon > 0$, что для любого $\delta > 0$ найдется такой $x \in [a-\delta; a)$, для которого выполняется $f(x) \notin (A-\varepsilon; A+\varepsilon)$. Тогда, в частности, для любого числа вида $\delta = \frac{1}{n}$ мы получим, что

$$\exists x_n \in [a-\delta; a) = [a-\frac{1}{n}; a) \quad \text{такие что} \quad f(x_n) \notin (A-\varepsilon; A+\varepsilon) \tag{3.4.159}$$

Зафиксируем такие числа x_n. Получается:

$$a - \frac{1}{n} < x_n < a$$

$$\Downarrow$$

$$x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} a-0$$

Но, с другой стороны, в силу (3.4.159),

$$f(x_n) \underset{n\to\infty}{\not\longrightarrow} A$$

Значит, A не является пределом по Гейне функции f при $x \to a-0$.

Мы получили, что если не выполняется (i) то автоматически не выполняется (ii). $\square$

Равномерная непрерывность функции по Коши. На с.253 мы дали определение равномерно непрерывной функции на множестве. Это определение легко переводится на язык $\varepsilon-\delta$ Коши. В дальнейшем при доказательстве результатов такая переформулировка нам не понадобится, но мы полагаем, что она сама по себе будет интересна читателю.

- Функция $f(x)$ называется *равномерно непрерывной* на множестве E, если $f(x)$ определена на E, и для всякого числа $\varepsilon > 0$ найдется такое число $\delta > 0$, что для любых x и y из E, расстояние между которыми меньше δ, соответствующее расстояние между значениями функции f и $f(y)$ будет меньше ε:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x, y \in E \qquad |x-y| < \delta \quad \Longrightarrow \quad |f(x) - f(y)| < \varepsilon \tag{3.4.160}$$

Докажем равносильность этих определений. 1. Пусть выполняется (3.4.160). Возьмем произвольные последовательности $x_n, y_n \in E$ такие, что

$$x_n - y_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

Покажем, что тогда

$$f(x_n) - f(y_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

Для этого возьмем $\varepsilon > 0$. В силу (3.4.160), должен существовать такой $\delta > 0$, что

$$\forall x, y \in E \qquad |x - y| < \delta \quad\Longrightarrow\quad |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

В частности,

$$\underbrace{|x_n - y_n| < \delta}_{\text{выполняется для почти всех } n} \qquad \Longrightarrow \qquad \underbrace{|f(x_n) - f(y_n)| < \varepsilon}_{\text{значит, и это выполняется для почти всех } n}$$

Последнее верно при любом $\varepsilon > 0$, поэтому $f(x_n) - f(y_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

2. Наоборот, предположим, что (3.4.160) не выполняется, то есть существует некоторое $\varepsilon > 0$ такое что

$$\forall \delta > 0 \quad \exists x, y \in E \qquad |x - y| < \delta \quad \& \quad |f(x) - f(y)| \geqslant \varepsilon$$

В частности, это должно выполняться для чисел $\delta = \frac{1}{n}$:

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \exists x_n, y_n \in E \qquad |x_n - y_n| < \frac{1}{n} \quad \& \quad |f(x_n) - f(y_n)| \geqslant \varepsilon$$

Мы получили последовательности x_n и y_n такие, что $0 \leqslant |x_n - y_n| < \frac{1}{n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, и поэтому

$$x_n - y_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

но при этом $|f(x_n) - f(y_n)| \geqslant \varepsilon$, и поэтому

$$f(x_n) - f(y_n) \underset{n\to\infty}{\not\longrightarrow} 0$$

Значит, (3.3.119) не может выполняться. $\square$

Теорема 3.4.14 (критерий равномерной непрерывности)**.** *Функция $f : E \to \mathbb{R}$ тогда и только тогда равномерно непрерывная на E, когда выполняется соотношение*

$$\sup_{x,y\in E:\ |x-y|\leqslant\delta} |f(x) - f(y)| \underset{\delta\to 0}{\longrightarrow} 0 \tag{3.4.161}$$

Глава 4

СТАНДАРТНЫЕ ФУНКЦИИ

§ 1 Элементарные функции

Среди функций, используемых в точных науках, имеется несколько таких, которые служат главными моделями изучаемых явлений. Эти функции называются *элементарными*, и их свойства, а также свойства функций, получаемых из них с помощью алгебраических операций и композиции (такие функции мы будем называть *стандартными*) служат предметом изучения в разделе анализа, называемом *Исчислением* (что это мы объясним ниже в § 2). Список элементарных функций выглядит так:[1]

название	обозначение: $x \downarrow$	область определения
степенная функция	x^b	$\begin{cases} x \in \mathbb{R}, & b \in \frac{\mathbb{Z}_+}{2\mathbb{N}-1} \\ x \neq 0, & b \in -\frac{\mathbb{N}}{2\mathbb{N}-1} \\ x \geqslant 0, & b \in (0,+\infty) \setminus \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{N}-1} \\ x > 0, & b \in (-\infty,0) \setminus \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{N}-1} \end{cases}$
показательная функция	a^x	$\begin{cases} x \in \mathbb{R}, & a > 0 \\ x \geqslant 0, & a = 0 \\ x \in \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{N}-1}, & a < 0 \end{cases}$
логарифм	$\log_a x$	$x > 0, \ \ a \in (0;1) \cup (1;+\infty)$
синус	$\sin x$	$x \in \mathbb{R}$
косинус	$\cos x$	$x \in \mathbb{R}$
тангенс	$\operatorname{tg} x$	$x \notin \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}$
котангенс	$\operatorname{ctg} x$	$x \notin \pi\mathbb{Z}$
арксинус	$\arcsin x$	$x \in [-1;1]$
арккосинус	$\arccos x$	$x \in [-1;1]$
арктангенс	$\operatorname{arctg} x$	$x \in \mathbb{R}$
арккотангенс	$\operatorname{arcctg} x$	$x \in \mathbb{R}$

Как может заметить читатель, только одна из этих функций – x^b – была определена нами к настоящему моменту, и то только для целых значений параметра b (см. определения на с.159 и 167).

[1]Смысл встречающихся в этой таблице обозначений типа $\frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{N}-1}$, $\frac{\mathbb{N}}{2\mathbb{N}-1}$ объяснялся выше на с.185.

Остальные функции в этом списке мы определим необычным приемом – с помощью двух так называемых зависимых аксиом.

Это вот что такое. *Зависимой* или *избыточной аксиомой* называется такая аксиома теории, про которую впоследствии становится известно, что ее можно вывести из остальных аксиом этой теории. Как следствие, зависимые аксиомы можно (и с точки зрения логической стройности правильнее) оформлять не как аксиомы, а как теоремы этой теории. Однако в математике встречаются время от времени ситуации, когда знакомство с теоремой бывает желательно задолго до того, как появляется возможность эту теорему строго доказать. В таких случаях полезно объявить эту теорему аксиомой, сообщив слушателям, что в действительности эта аксиома зависима.

Элементарные функции – как раз такой пример. Чисто логически ничто не мешает молчать о них в курсе анализа до тех пор, пока не появится возможность аккуратно их определить и доказать их характеристические свойства. Однако тогда возможность решать задачи с элементарными функциями, отличными от рациональных, появится у преподавателя и у студентов только в конце второго семестра. Поскольку выбрасывание из упражнений всех иррациональных элементарных функций эквивалентно просто отказу от Исчисления в классическом его понимании, разумно поступить по-другому. В этой главе мы сформулируем две избыточные аксиомы – Аксиому степеней (аксиома B1 на с.278) и Аксиому тригонометрии (аксиома B2 на с.291). Доказательство их зависимости (избыточности) мы сможем привести очень нескоро – лишь в § 3 главы 10. Отчасти поэтому, но, в первую очередь в соответствии с общим принципом, согласно которому все, что связано с Исчислением считается иллюстративным материалом, мы переносим эти утверждения вместе с их следствиями, в двухколоночный текст.

(a) Степени с нецелым показателем и логарифмы

Аксиома степеней. На страницах 159 и 167 мы уже определили степень числа с целым показателем:

$$a^n \qquad (n \in \mathbb{Z})$$

Для нецелых показателей это понятие вводится с помощью следующей избыточной аксиомы:

B1. **Аксиома степеней.**[2] *Существует единственное отображение*

$$(a, b) \mapsto a^b,$$

со следующими свойствами:

P_0: *оно определено в следующих трех ситуациях:*

— *при* $a > 0$ *и произвольном* $b \in \mathbb{R}$,

— *при* $a = 0$ *и* $b \geqslant 0$,

— *при* $a < 0$ *и* $b \in \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{N}-1}$,

или, что то же самое, в следующих четырех:

— *при* $b \in \frac{\mathbb{Z}_+}{2\mathbb{N}-1}$ *и тогда* $a \in \mathbb{R}$ *может быть произвольным,*

— *при* $b \in -\frac{\mathbb{N}}{2\mathbb{N}-1}$ *и тогда* $a \neq 0$,

— *при* $b \in (0, +\infty) \setminus \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{N}-1}$, *и тогда* $a \geqslant 0$,

— *при* $b \in (-\infty, 0) \setminus \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{N}-1}$, *и тогда* $a > 0$,

P_1: *следующие две группы тождеств выполняются всякий раз, когда обе части тождества определены:*

— **показательные законы**:

$$a^0 = 1, \tag{4.1.1}$$

$$a^{-x} = \frac{1}{a^x}, \tag{4.1.2}$$

$$a^{x+y} = a^x \cdot a^y; \tag{4.1.3}$$

— **степенные законы**:

$$1^b = 1, \tag{4.1.4}$$

$$\left(\frac{1}{x}\right)^b = \frac{1}{x^b}, \tag{4.1.5}$$

$$(x \cdot y)^b = x^b \cdot y^b \tag{4.1.6}$$

P_2: *тождество, называемое* **накопительным законом**,

$$(a^x)^y = a^{x \cdot y} \tag{4.1.7}$$

выполняется для следующих значений переменных:

— *при* $a > 0$ *и* $x, y \in \mathbb{R}$,

— *при* $a = 0$ *и* $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$,

— *при* $a < 0$ *и* $x, y \in \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{N}-1}$,

P_3: *для нулевого основания степень, в случаях, когда она определена, описывается формулой*

$$0^b = \begin{cases} 1, & b = 0 \\ 0, & b > 0 \end{cases} \tag{4.1.8}$$

а для положительных выполняется следующее **условие сохранения знака**:

$$a > 0 \quad \Rightarrow \quad a^b > 0 \quad (b \in \mathbb{R}) \tag{4.1.9}$$

[2] Избыточность Аксиомы степеней доказывается в § 3(a) главы 10.

P_4: *для положительных оснований выполняются следующие* **условия монотонности***:*

— *если $b > 0$, то возведение в степень b не меняет знак неравенства:*

$$0 < x < y \quad\Longrightarrow\quad x^b < y^b \qquad (4.1.10)$$

— *если $b < 0$, то возведение в степень b меняет знак неравенства:*

$$0 < x < y \quad\Longrightarrow\quad x^b > y^b \qquad (4.1.11)$$

— *если $a > 1$, то потенцирование с основанием a не меняет знак неравенства:*

$$x < y \quad\Longrightarrow\quad a^x < a^y \qquad (4.1.12)$$

— *если $0 < a < 1$, то потенцирование с основанием a меняет знак неравенства:*

$$x < y \quad\Longrightarrow\quad a^x > a^y \qquad (4.1.13)$$

! **4.1.1.** Эта аксиома, между прочим, предполагает справедливым равенство, которое трудно считать интуитивно очевидным:

$$0^0 = 1 \qquad (4.1.14)$$

(оно следует из (4.1.4), а также из (4.1.8)).

! **4.1.2.** Для натуральных значений b тождество (4.1.3) влечет за собой индуктивное тождество (2.2.235):

$$a^0 = 1, \quad a^{n+1} = a^n \cdot a,$$

поэтому a^n в этом случае совпадает со степенью числа a, определенной на странице 159. Как следствие, выполняется тождество

$$a^1 = a. \qquad (4.1.15)$$

Из него, а также напрямую из (4.1.8) следует, в частности, равенство

$$0^1 = 0 \qquad (4.1.16)$$

! **4.1.3.** Накопительный закон (4.1.7) не обязан выполняться в случаях, не предусмотренных условиями Аксиомы степеней B1. Например, равенство

$$\underbrace{\left((-1)^2\right)^{\frac{1}{2}}}_{\substack{\| \\ 1^{\frac{1}{2}} \\ \| \\ 1}} = \underbrace{(-1)^{2\cdot\frac{1}{2}}}_{\substack{\| \\ (-1)^1 \\ \| \\ -1}}$$

конечно, не будет верным.

! **4.1.4.** Формула (4.1.8) вытекает из остальных утверждений аксиомы: если $b > 0$, то

$$0 \cdot 0 = 0$$

$$\Downarrow$$

$$0^b \cdot 0^b = (4.1.6) = (0 \cdot 0)^b = 0^b$$

$$\Downarrow$$

$$0^b \cdot 0^b - 0^b = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\left[\begin{matrix} 0^b = 0 \\ 0^b = 1 \end{matrix}\right.$$

Здесь второе равенство – $0^b = 1$ – невозможно, потому, что, если бы оно было верно, мы получили бы противоречие:

$$0 = 0^1 = 0^{b\cdot\frac{1}{b}} = (4.1.7) = \\ = (\underbrace{0^b}_{\substack{\| \\ 1, \\ \text{по предположению}}})^{\frac{1}{b}} = 1^{\frac{1}{b}} = (4.1.4) = 1$$

Значит, должно быть верно первое равенство: $0^b = 0$.

$\triangleright$ **4.1.5.** Можно заметить, что условие сохранения знака (4.1.9) также следует из остальных утверждений Аксиомы степеней B1. Нам этот факт в дальнейшем не понадобится, однако читатель в качестве упражнения может доказать его самостоятельно. В качестве подсказки мы сообщим только, что здесь удобно использовать теорему о степенном отображении 2.2.17 и предложение 4.1.2 на с.280.

Следствие 4.1.1. *Справедлива импликация:*

$$\Big(a \geqslant 0 \quad \& \quad b > 0\Big) \quad\Longrightarrow\quad a^b \geqslant 0 \qquad (4.1.17)$$

Доказательство. Если $a = 0$, то

$$a^b = 0^b \overset{(4.1.8)}{=} 0$$

Если же $a > 0$, то

$$a^b \overset{(4.1.9)}{>} 0$$

В обоих случаях получается $a^b \geqslant 0$. □

Корни.

- *Корнем степени* $n \in \mathbb{N}$ называется функция

$$\sqrt[n]{x} := x^{\frac{1}{n}} \qquad (4.1.18)$$

Из аксиомы степеней B1 следует, что эта функция определена

– на всей прямой $\mathbb{R}$ для $n \in 2\mathbb{N} - 1$ (то есть когда n нечетно),

– на полуинтервале $[0; +\infty)$ для $n \in 2\mathbb{N}$ (то есть когда n четно).

- Корень степени 2 называется *квадратным корнем*, и его обозначение упрощается до $\sqrt{\ }$:

$$\sqrt{x} := \sqrt[2]{x} = x^{\frac{1}{2}} \tag{4.1.19}$$

- Корень степени 3 называется *кубическим корнем*:

$$\sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$$

Предложение 4.1.2. *Корень нечетной степени* $x \mapsto \sqrt[2n-1]{x}$

— *определен всюду на* $\mathbb{R}$,

— *возрастает на* $\mathbb{R}$,

— *непрерывен на* $\mathbb{R}$,

— *равен нулю в нуле:*

$$\sqrt[2n-1]{0} = 0 \tag{4.1.20}$$

— *имеет бесконечные пределы на бесконечностях:*

$$\lim_{x\to-\infty} \sqrt[2n-1]{x} = -\infty \tag{4.1.21}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt[2n-1]{x} = +\infty \tag{4.1.22}$$

— *удовлетворяет следующему правилу, которое может считаться его определением:*

$$y = \sqrt[2n-1]{x} \quad \Longleftrightarrow \quad y^{2n-1} = x \tag{4.1.23}$$

Доказательство. 1. Как мы уже отмечали, тот факт, что функция $x \mapsto \sqrt[2n-1]{x} = x^{\frac{1}{2n-1}}$ определена на $\mathbb{R}$ постулируется в Аксиоме степеней B1 на с.278, поэтому его доказывать не нужно.

2. Докажем правило (4.1.23). Оно означает, что функции

$$f(x) = x^{\frac{1}{2n-1}}, \quad g(y) = y^{2n-1}$$

(определенные на всей прямой $\mathbb{R}$, по условиям Аксиомы степеней B1 на с. 278) должны быть обратны друг другу. Это доказывается с помощью накопительного закона (4.1.7): заметим, что цепочка равенств

$$(a^{\frac{1}{2n-1}})^{2n-1} = a^{\frac{1}{2n-1}\cdot(2n-1)} = a^1 \overset{(4.1.15)}{=} a \tag{4.1.24}$$

выполняется при любых значениях $a \in \mathbb{R}$:

— для $a > 0$ первое равенство в (4.1.24) выполняется, независимо от свойств степеней $\frac{1}{2n-1}$ и $2n-1$,

— для $a = 0$ оно выполняется, потому что $\frac{1}{2n-1} \geqslant 0$ и $2n-1 \geqslant 0$,

— для $a < 0$ оно выполняется, потому что $\frac{1}{2n-1} \in \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{N}-1}$ и $2n-1 \in \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{N}-1}$.

Из (4.1.24) следует тождество:

$$g(f(x)) = (x^{\frac{1}{2n-1}})^{2n-1} = x, \qquad x \in \mathbb{R}$$

По тем же причинам цепочка равенств

$$(a^{2n-1})^{\frac{1}{2n-1}} = a^{(2n-1)\cdot\frac{1}{2n-1}} = a^1 = a$$

выполняется при любых значениях $a \in \mathbb{R}$, и из нее следует тождество:

$$f(g(y)) = (y^{2n-1})^{\frac{1}{2n-1}} = y, \qquad y \in \mathbb{R}$$

Вместе это и означает, что функции f и g обратны друг другу.

3. В примере 3.1.19 мы показали, что степенная функция

$$g(y) = y^{2n-1}$$

возрастает на всей прямой $\mathbb{R}$ (а для интервала $(0; +\infty)$ это утверждается в первом условии монотонности (4.1.10)). По теореме о монотонной функции 3.3.12 отсюда следует, что ее обратная функция

$$f(x) = x^{\frac{1}{2n-1}}$$

должна возрастать и быть непрерывной на своей области определения, то есть на множестве

$$\Big(\inf_{y\in\mathbb{R}} g(y); \sup_{y\in\mathbb{R}} g(y)\Big) =$$

$$= \Big(\lim_{y\to-\infty} g(y); \lim_{y\to+\infty} g(y)\Big) =$$

$$= (3.4.147), (3.4.146) = (-\infty; +\infty) = \mathbb{R}$$

4. Равенство (4.1.20) следует из тождества (4.1.8).

5. Формулы (4.1.21)-(4.1.22) следуют из формул (3.3.133):

$$\lim_{x\to-\infty} x^{\frac{1}{2n-1}} = (3.4.150) = \inf_{x\in\mathbb{R}} x^{\frac{1}{2n-1}} =$$

$$= (3.3.133) = \inf \mathsf{D}(x \mapsto x^{2n-1}) = \inf \mathbb{R} = -\infty$$

и

$$\lim_{x\to+\infty} x^{\frac{1}{2n-1}} = (3.4.150) = \sup_{x\in\mathbb{R}} x^{\frac{1}{2n-1}} =$$

$$= (3.3.133) = \sup \mathsf{D}(x \mapsto x^{2n-1}) = \sup \mathbb{R} = +\infty$$

□

◇ **4.1.6.** Предложение 4.1.2 дает достаточно информации для построения графика корня нечетной степени, за исключением одной детали, а именно свойства графика иметь выпуклость вверх или вниз на разных участках. Смысл этих слов интуитивно очевиден, однако аккуратное объяснение им удобно давать после того, как будет определена производная, поэтому мы отложим разговор о выпуклости до с.345. Если же не требовать здесь объяснений относительно выпуклости, то в остальном из предложения 4.1.2 следует, что по виду графика (то есть по тому, где у графика имеются интервалы возрастания и убывания, интервалы, где сохраняется выпуклость, и какие функция имеет пределы на концах этих интервалов) все корни нечетной степени ведут себя одинаково:

— график функции $x \mapsto \sqrt[2n-1]{x}$ выглядит как график любого представителя из этого семейства функций, например, как график *кубического корня*

$$\sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}} \qquad (x \in \mathbb{R})$$

Предложение 4.1.3. *Корень четной степени* $x \mapsto \sqrt[2n]{x}$

— *определен всюду на полуинтервале* $[0; +\infty)$,

— *возрастает на* $[0; +\infty)$,

— *непрерывен на* $[0; +\infty)$,

— *равен нулю в нуле:*

$$\sqrt[2n]{0} = 0 \tag{4.1.25}$$

— *имеет бесконечный предел на бесконечности:*

$$\lim_{x \to +\infty} \sqrt[2n]{x} = +\infty \tag{4.1.26}$$

— *удовлетворяет следующему правилу, которое может считаться его определением:*

$$y = \sqrt[2n]{x} \quad \Longleftrightarrow \quad y^{2n} = x \quad \& \quad y \geqslant 0 \tag{4.1.27}$$

Доказательство. 1. Тот факт, что функция $x \mapsto \sqrt[2n]{x} = x^{\frac{1}{2n}}$ определена на $[0; +\infty)$ постулируется в Аксиоме степеней B1 на с.278, поэтому его доказывать не нужно.

2. Докажем соотношение (4.1.26). При $x > 1$ мы получим:

$$\frac{1}{2n} > \frac{1}{2n+1}$$

$$\Downarrow$$

$$x^{\frac{1}{2n}} > (4.1.13) > x^{\frac{1}{2n+1}} \underset{x \to +\infty}{\overset{(4.1.22)}{\longrightarrow}} +\infty$$

$$\Downarrow$$

$$x^{\frac{1}{2n}} \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$$

3. Равенство (4.1.25) следует из тождества (4.1.8).

4. Проверим, что функция $x \mapsto \sqrt[2n]{x} = x^{\frac{1}{2n}}$ возрастает на $[0; +\infty)$. Для подмножества $(0; +\infty)$ этот факт постулируется в условии монотонности (4.1.10). Поэтому нам нужно лишь проверить, что он будет верен для случая пары $x, y \in [0; +\infty)$, $x < y$, в которой $x = 0$. Здесь применяется (4.1.9):

$$0 < y \quad \Longrightarrow \quad 0 < (4.1.9) < y^{\frac{1}{2n}}.$$

5. Докажем правило (4.1.27). В прямую сторону мы получаем: если

$$y = \sqrt[2n]{x} = x^{\frac{1}{2n}}$$

то, во-первых,

$$y^{2n} = \left(x^{\frac{1}{2n}}\right)^{2n} = (4.1.7) = x^{\frac{1}{2n} \cdot 2n} = x^1 = x$$

и, во-вторых, по Аксиоме степеней B1 на с.278, из того, что $x^{\frac{1}{2n}}$ существует, следует, что $x \geqslant 0$. Поэтому

$$y = x^{\frac{1}{2n}} \overset{(4.1.17)}{\geqslant} 0$$

Мы доказали импликацию

$$y = \sqrt[2n]{x} \quad \Longrightarrow \quad y^{2n} = x \quad \& \quad y \geqslant 0$$

Теперь докажем обратную импликацию:

$$y = \sqrt[2n]{x} \quad \Longleftarrow \quad y^{2n} = x \quad \& \quad y \geqslant 0$$

Пусть

$$y^{2n} = x \quad \& \quad y \geqslant 0$$

Тогда

$$x = y^{2n} \overset{(4.1.17)}{\geqslant} 0$$

и поэтому, по Аксиоме степеней B1 нас.278,

$$\exists\ x^{\frac{1}{2n}} = (y^{2n})^{\frac{1}{2n}} = (4.1.7) = y^{2n \cdot \frac{1}{2n}} = y^1 = y$$

То есть

$$y = \sqrt[2n]{x}$$

6. Остается доказать непрерывность функции $x \mapsto \sqrt[2n]{x}$. Заметим, что правило (4.1.27) можно интерпретировать так: функции

$$f(x) = \sqrt[2n]{x} = x^{\frac{1}{2n}}, \qquad g(y) = y^{2n},$$

если их считать определенными на полуинтервале $[0; +\infty)$ (эта оговорка нужна, потому что функция $g(y) = y^{2n}$ формально определена на всей прямой $\mathbb{R}$, что больше, чем $[0; +\infty)$) обратны друг другу. Поэтому можно воспользоваться замечанием 3.3.24: функции f и g определены на полуинтервале $[0; +\infty)$, взаимно обратны, причем функция f возрастает на нем (мы это уже доказали на первом шаге), поэтому они должны быть непрерывны.

Однако утверждение, упомянутое нами в замечании 3.3.24 мы не доказали (и даже аккуратно не сформулировали). Поэтому для строгости можно поступить иначе. Сначала заметим, что функции f и g, если их считать определенными на интервале $(0; +\infty)$, взаимно обратны, и строго монотонны (в силу условия монотонности (4.1.10)). Значит, по теореме 3.3.12 они должны быть непрерывны на $(0; +\infty)$. Поэтому для непрерывности на $[0; +\infty)$ нам остается доказать, что f непрерывна в нуле. При $0 < x < 1$ мы получим:

$$\frac{1}{2n} > \frac{1}{2n+1}$$

$$\Downarrow \quad (4.1.13)$$

$$0 \overset{(4.1.9)}{<} x^{\frac{1}{2n}} < \underbrace{x^{\frac{1}{2n+1}} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0^{\frac{1}{2n+1}}}_{\substack{\text{функция } x\mapsto x^{\frac{1}{2n+1}}\\ \text{непрерывна}\\ \text{по предложению 4.1.2}}} \overset{(4.1.25)}{=} 0$$

$$\Downarrow$$

$$x^{\frac{1}{2n}} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$$

□

◇ **4.1.7.** Предложение 4.1.3 позволяет строить графики корней четной степени. Опять если не интересоваться участками выпуклости (о которых мы упоминали в примере 4.1.6), мы получаем, что по виду графика все корни четной степени ведут себя одинаково:

— график функции $x \mapsto \sqrt[2n]{x}$ выглядит как график любого представителя из этого семейства функций, например, как график *квадратного корня*

$$\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}} \qquad (x \in \mathbb{R})$$

Предложение 4.1.4. *Справедливо тождество:*

$$|x| = \sqrt{x^2} \tag{4.1.28}$$

Доказательство. Здесь нужно рассмотреть три случая: во-первых, если $x = 0$, то $\sqrt{x^2} = 0 = |x|$ – очевидно. Во-вторых, если $x > 0$, то получаем

$$y = \sqrt{x^2}$$

$$\Updownarrow$$

$$y^2 = x^2 \quad \& \quad y \geqslant 0$$

$$\Updownarrow$$

$$y^2 - x^2 = 0 \quad \& \quad y \geqslant 0$$

$$\Updownarrow$$

$$(y-x)(y+x) = 0 \quad \& \quad y \geqslant 0$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{bmatrix} y - x = 0 \\ y + x = 0 \end{bmatrix} \quad \& \quad y \geqslant 0$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{bmatrix} y = x \\ \boxed{y = -x} \end{bmatrix} \quad \& \quad y \geqslant 0$$

невозможно, потому что $x > 0$

$$\Updownarrow$$

$$y = x = |x|$$

В-третьих, если $x < 0$, то

$$y = \sqrt{x^2}$$

$$\Updownarrow$$

$$y^2 = x \quad \& \quad y \geqslant 0$$

$$\Updownarrow$$

$$y^2 - x^2 = 0 \quad \& \quad y \geqslant 0$$

$$\Updownarrow$$

$$(y-x)(y+x) = 0 \quad \& \quad y \geqslant 0$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{bmatrix} y + x = 0 \\ y - x = 0 \end{bmatrix} \quad \& \quad y \geqslant 0$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{bmatrix} y = -x \\ \boxed{y = x} \end{bmatrix} \quad \& \quad y \geqslant 0$$

невозможно, потому что $x < 0$

$$\Updownarrow$$

$$y = -x = |x|$$

□

Степенная функция. Корни, о которых мы говорили в предыдущем разделе, являются частными случаями функций, называемых степенными.

- При каждом фиксированном значении b функция

$$x \mapsto x^b$$

называется *степенной* (с показателем b). По Аксиоме степеней B1 на с. 278, эту функцию можно считать определенной

— на множестве $\mathbb{R}$, если $b \in \frac{\mathbb{Z}_+}{2\mathbb{N}-1}$;

— на множестве $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, если $b \in -\frac{\mathbb{N}}{2\mathbb{N}-1}$;

— на множестве $[0, +\infty)$, если $b \in (0, +\infty) \setminus \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{N}-1}$.

— на множестве $(0, +\infty)$, если и $b \in (-\infty, 0) \setminus \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{N}-1}$.

Предложение 4.1.5. *При $b \in \frac{2\mathbb{N}-1}{2\mathbb{N}-1}$ степенная функция $x \mapsto x^b$*

– *определена всюду на $\mathbb{R}$,*

– *непрерывна на $\mathbb{R}$,*

– *возрастает на $\mathbb{R}$,*

– *равна нулю в нуле,*

$$0^b = 0,$$

– *имеет бесконечные пределы на бесконечностях:*

$$\lim_{x\to -\infty} x^b = -\infty \tag{4.1.29}$$

$$\lim_{x\to +\infty} x^b = +\infty \tag{4.1.30}$$

Доказательство. 1. Поскольку $b > 0$, по Аксиоме степеней B1 на с.278, функция $x \mapsto x^b$ действительно определена на $\mathbb{R}$.

2. Если $b = \frac{2m-1}{2n-1}$, $m, n \in \mathbb{N}$, то степенная функция $h(x) = x^b$ является композицией степенных функций $g(y) = y^{2m-1}$ и $f(x) = x^{\frac{1}{2n-1}}$:

$$h(x) = g(f(x)) = y^{2m-1}\Big|_{y=x^{\frac{1}{2n-1}}} = \\ = (x^{\frac{1}{2n-1}})^{2m-1} = (4.1.7) = x^{\frac{2m-1}{2n-1}}$$

3. Поскольку функция $f(x) = x^{\frac{1}{2n-1}}$ непрерывна на $\mathbb{R}$ по предложению 4.1.2, а функция $g(y) = y^{2m-1}$ непрерывна на $\mathbb{R}$ в силу примера 3.3.11, их композиция $h = g \circ f$ должна быть непрерывна по теореме 3.3.3.

4. Функция $f(x) = x^{\frac{1}{2n-1}}$ возрастает всюду на $\mathbb{R}$ в силу предложения 4.1.2, а функция $g(y) = y^{2m-1}$ возрастает всюду на $\mathbb{R}$ в силу примера 3.1.19. Значит, по свойству 5° на с.199, композиция $h = g \circ f$ также возрастает.

5. Равенство нулю в нуле опять следует из тождества (4.1.8).

6. А пределы (4.1.29)-(4.1.30) следуют из (4.1.21)-(4.1.22) и (3.4.147)-(3.4.146). □

◇ **4.1.8.** Как и в случае с предложением 4.1.6, предложение 4.1.5 позволяет строить график степенной функции, теперь уже с показателем $b \in \frac{2\mathbb{N}-1}{2\mathbb{N}-1}$. Опять вид графика зависит от того, больше или меньше единицы степень b (здесь она может быть равной 1, поскольку $1 \in \frac{2\mathbb{N}-1}{2\mathbb{N}-1}$), и, забегая вперед, мы употребляем термин выпуклость, рассчитывая на интуицию (или эрудицию) читателя:

— в случае $b > 1$, $b \in \frac{2\mathbb{N}-1}{2\mathbb{N}-1}$, график функции $x \mapsto x^b$ является выпуклым вверх на полуинтервале $(-\infty; 0]$ и выпуклым вниз на полуинтервале $[0; +\infty)$, и выглядит как график любого представителя из этого семейства функций, например, как *кубическая парабола*, то есть как график функции:

$$f(x) = x^3 \qquad (x \in \mathbb{R})$$

— в случае $b = 1$ график функции $x \mapsto x^b = x^1 = x$, понятное дело, представляет собой *прямую*:

$$f(x) = x \qquad (x \in \mathbb{R})$$

— если же $b < 1$, $b \in \frac{2\mathbb{N}-1}{2\mathbb{N}-1}$, то график функции $x \mapsto x^b$ является выпуклым вниз на полуинтервале $(-\infty; 0]$ и выпуклым вверх на полуинтервале $[0; +\infty)$, и выглядит как график любого представителя из этого семейства, например, как график *кубического корня*:

$$f(x) = x^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{x} \qquad (x \in \mathbb{R})$$

Предложение 4.1.6. *При $b \in \frac{2\mathbb{N}}{2\mathbb{N}-1}$ степенная функция $x \mapsto x^b$*

– *определена всюду на $\mathbb{R}$,*

– *непрерывна на $\mathbb{R}$,*

– *убывает на полуинтервале $(-\infty; 0]$,*

– *возрастает на полуинтервале $[0; +\infty)$,*

– *равна нулю в нуле,*

$$0^b = 0,$$

– *имеет бесконечные пределы на бесконечностях:*

$$\lim_{x\to-\infty} x^b = +\infty \qquad (4.1.31)$$

$$\lim_{x\to+\infty} x^b = +\infty \qquad (4.1.32)$$

Доказательство. Здесь с очевидными изменениями мы применяем те же рассуждения, что и при доказательстве предложения 4.1.5.

1. Поскольку $b > 0$, по Аксиоме степеней B1 на с.278, функция $x \mapsto x^b$ действительно определена на $\mathbb{R}$.

2. Заметим, что для $b = \frac{2m}{2n-1}$, $m, n \in \mathbb{N}$, степенная функция $h(x) = x^b$ является композицией степенных функций $g(y) = y^{2m}$ и $f(x) = x^{\frac{1}{2n-1}}$:

$$h(x) = g(f(x)) = y^{2m}\Big|_{y=x^{\frac{1}{2n-1}}} = \\ = (x^{\frac{1}{2n-1}})^{2m} = (4.1.7) = x^{\frac{2m}{2n-1}}$$

3. Теперь проверим непрерывность. Поскольку функция $g(y) = y^{2m}$ непрерывна на $\mathbb{R}$ в силу примера 3.3.11, а функция $f(x) = x^{\frac{1}{2n-1}}$ непрерывна на $\mathbb{R}$ по предложению 4.1.2, их композиция $h = g \circ f$ должна быть непрерывна по теореме 3.3.3.

4. Далее разберемся с монотонностью. Функция $f(x) = x^{\frac{1}{2n-1}}$ возрастает на полуинтервале $(-\infty; 0]$ в силу предложения 4.1.2, а функция $g(y) = y^{2m}$ убывает на полуинтервале $(-\infty; 0] \supseteq f((-\infty; 0])$ в силу примера 3.1.18. Значит, по свойству 5° на с.199, композиция $h = g \circ f$ убывает на полуинтервале $(-\infty; 0]$.

Наоборот, функция $f(x) = x^{\frac{1}{2n-1}}$ возрастает на $[0; +\infty)$ в силу предложения 4.1.2, а функция $g(y) = y^{2m}$ возрастает на $[0; +\infty) \supseteq f([0; +\infty))$ в силу примера 3.1.18. Значит, по свойству 5° на с.199, композиция $h = g \circ f$ также возрастает на $[0; +\infty)$.

5. Равенство нулю в нуле следует из тождества (4.1.8).

6. Пределы (4.1.31)-(4.1.32) следуют из (4.1.21)-(4.1.22) и (3.4.139)-(3.4.140). Например, первый из них:

$$x \to -\infty$$
$$\Downarrow \quad \text{(4.1.31)}$$
$$f(x) = x^{\frac{1}{2n-1}} \to -\infty$$
$$\Downarrow \quad \text{(3.4.139), теорема 3.4.9}$$
$$g(f(x)) = x^{\frac{2n}{2n-1}} \to +\infty$$

□

◇ **4.1.9.** Предложение 4.1.6 позволяет строить графики степенных функций с показателями $b \in \frac{2\mathbb{N}}{2\mathbb{N}-1}$. Эти графики имеют уловимое взглядом различие, в зависимости от того, больше или меньше единицы степень b (равной 1 она быть не может, из-за того, что $1 \notin \frac{2\mathbb{N}}{2\mathbb{N}-1}$). Различие же состоит в том, как устроены участки выпуклости, которые мы еще не успели определить, и о которых речь пойдет на с.345. Поскольку интуитивный смысл выпуклости очевиден, мы думаем, что читателю будет понятно, если, забегая вперед, сообщить ему, что при $b > 1$ график степенной функции является выпуклым вниз на прямой $\mathbb{R}$, а при $0 < b < 1$ прямая разбивается на два полуинтервала $(-\infty, 0]$ и $[0; +\infty)$, на которых график является выпуклым вверх:

— в случае $b > 1$, $b \in \frac{2\mathbb{N}}{2\mathbb{N}-1}$, график функции $x \mapsto x^b$, выглядит как график любого представителя из этого семейства функций, например, как *квадратичная парабола*, то есть как график функции
$$f(x) = x^2 \qquad (x \in \mathbb{R})$$

— точно так же, если $b < 1$, $b \in \frac{2\mathbb{N}}{2\mathbb{N}-1}$, график функции $x \mapsto x^b$, выглядит как график любого представителя из этого семейства, например, как *парабола со степенью* $\frac{2}{3}$, то есть как график функции
$$f(x) = x^{\frac{2}{3}} \qquad (x \in \mathbb{R})$$

Предложение 4.1.7. *При $b \in -\frac{2\mathbb{N}}{2\mathbb{N}-1}$ степенная функция $x \mapsto x^b$*

– *определена на множестве* $\mathbb{R} \setminus \{0\}$,
– *непрерывна на* $\mathbb{R} \setminus \{0\}$,
– *возрастает на интервале* $(-\infty; 0)$,
– *убывает на интервале* $(0; +\infty)$,
– *имеет следующие пределы в граничных точках области определения и на бесконечности:*

$$\lim_{x\to -0} x^b = +\infty \tag{4.1.33}$$
$$\lim_{x\to +0} x^b = +\infty \tag{4.1.34}$$
$$\lim_{x\to \infty} x^b = 0 \tag{4.1.35}$$

Доказательство. Если обозначить $c = -b$, то мы получим $c \in \frac{2\mathbb{N}}{2\mathbb{N}-1}$, и наша функция будет композицией функции $f(x) = x^c$, рассмотренной в предложении 4.1.6 и функции $g(y) = y^{-1}$, рассмотренной в примерах 3.1.21 и 3.3.11. Все нужные нам свойства функции $x \mapsto x^b$ следуют из этих утверждений. □

◇ **4.1.10.** Предложение 4.1.7 позволяет строить график степенной функции с показателем $b \in -\frac{2\mathbb{N}}{2\mathbb{N}-1}$. В отличие от предыдущих случаев, здесь вид графика (в тех деталях, которые нас интересуют, а именно, монотонность, выпуклость и пределы в крайних токах интервалов монотонности и выпуклости) не зависит от значения b:

— если $b \in -\frac{2\mathbb{N}}{2\mathbb{N}-1}$, то график функции $x \mapsto x^b$, выглядит как график любого представителя из этого семейства функций, например, как *квадратичная гипербола*, то есть как график функции
$$f(x) = x^{-2} \qquad (x \in \mathbb{R})$$

Предложение 4.1.8. *При $b \in -\frac{2\mathbb{N}-1}{2\mathbb{N}-1}$ степенная функция $x \mapsto x^b$*

– *определена на множестве* $\mathbb{R} \setminus \{0\}$,
– *непрерывна на* $\mathbb{R} \setminus \{0\}$,
– *убывает на интервале* $(-\infty; 0)$,
– *убывает на интервале* $(0; +\infty)$,
– *имеет следующие пределы в граничных точках области определения и на бесконечности:*

$$\lim_{x\to -0} x^b = -\infty \tag{4.1.36}$$
$$\lim_{x\to +0} x^b = +\infty \tag{4.1.37}$$
$$\lim_{x\to \infty} x^b = 0 \tag{4.1.38}$$

Доказательство. Если обозначить $c = -b$, то мы получим $c \in \frac{2\mathbb{N}}{2\mathbb{N}-1}$, и наша функция будет композицией функции $f(x) = x^c$, рассмотренной в предложении 4.1.5 и функции $g(y) = y^{-1}$, рассмотренной в примерах 3.1.21 и 3.3.11. Все нужные нам свойства функции $x \mapsto x^b$ следуют из этих утверждений. □

◇ **4.1.11.** Предложение 4.1.8 позволяет строить график степенной функции с показателем $b \in -\frac{2\mathbb{N}-1}{2\mathbb{N}-1}$. Как и в предыдущем случае, здесь вид графика не зависит от значения b:

— если $b \in -\frac{2\mathbb{N}-1}{2\mathbb{N}-1}$, то график функции $x \mapsto x^b$, выглядит как график любого представителя из этого семейства функций, например, как *кубическая гипербола*, то есть как график функции

$$f(x) = x^{-3} \qquad (x \in \mathbb{R})$$

Предложение 4.1.9. *При* $b \in (0; +\infty) \setminus \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{N}-1}$ *степенная функция* $x \mapsto x^b$

– *определена на полуинтервале* $[0; +\infty)$,
– *непрерывна на* $[0; +\infty)$,
– *возрастает на* $[0; +\infty)$,
– *равна нулю в нуле,*

$$0^b = 0, \qquad (4.1.39)$$

– *имеет бесконечный предел в бесконечности:*

$$\lim_{x\to+\infty} x^b = +\infty \qquad (4.1.40)$$

Доказательство. Здесь мы с небольшими изменениями повторяем рассуждения, применявшиеся при доказательстве предложения 4.1.3.

1. Поскольку $b > 0$, по Аксиоме степеней B1 на с.278 функция $x \mapsto x^b$ действительно определена на $[0; +\infty)$.

2. Докажем соотношение (4.1.40). Для этого подберем $n \in \mathbb{N}$ так, чтобы $b > \frac{1}{2n-1}$. Тогда при $x > 1$ мы получим:

$$x^b > (4.1.13) > x^{\frac{1}{2n-1}} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$$

$$\Downarrow$$

$$x^b \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$$

3. Равенство (4.1.39) следует из тождества (4.1.8).

4. Проверим, что наша функция возрастает на $[0; +\infty)$. Для подмножества $(0; +\infty)$ этот факт постулируется в условии монотонности (4.1.10). Поэтому нам нужно лишь проверить, что он будет верен для случая пары $x, y \in [0; +\infty)$, $x < y$, в которой $x = 0$. Здесь применяется (4.1.9):

$$0 < y \quad \Longrightarrow \quad 0 < (4.1.9) < y^b.$$

5. Заметим далее, что функции

$$f(x) = x^b, \qquad g(y) = y^{\frac{1}{b}}$$

если их считать определенными на полуинтервале $[0; +\infty)$ (эта оговорка нужна, потому что может случиться, что вторую из них можно определить на множестве, большем, чем $[0; +\infty)$; например, при $b = \frac{1}{2} \in (0; +\infty) \setminus \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{N}-1}$ мы получаем $\frac{1}{b} = 2 \in \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{N}-1}$, и функция $y \mapsto y^{\frac{1}{b}} = y^2$ оказывается определенной на всей прямой $\mathbb{R}$) обратны друг другу. Действительно, с одной стороны, для любого $x \in [0; +\infty)$ мы получаем

$$g(f(x)) = (x^b)^{\frac{1}{b}} = (4.1.7) = \\ = x^{b\cdot\frac{1}{b}} = x^1 = (4.1.15) = x$$

А с другой – для любого $y \in [0; +\infty)$

$$f(g(y)) = (y^{\frac{1}{b}})^b = (4.1.7) = \\ = y^{\frac{1}{b}\cdot b} = y^1 = (4.1.15) = y$$

6. После этого можно воспользоваться замечанием 3.3.24: функции f и g определены на полуинтервале $[0; +\infty)$, взаимно обратны, причем функция f возрастает на нем (мы это уже доказали на первом шаге), поэтому они должны быть непрерывны.

Однако поскольку утверждение, упомянутое нами в замечании 3.3.24 мы не доказали, мы для строгости поступим иначе. Сначала заметим, что функции f и g, если их считать определенными на интервале $(0; +\infty)$, взаимно обратны, и строго монотонны (в силу условия монотонности (4.1.10)). Значит, по теореме 3.3.12 они должны быть непрерывны на $(0; +\infty)$. Поэтому для непрерывности на $[0; +\infty)$ нам остается доказать, что f непрерывна в нуле. Для этого снова возьмем $n \in \mathbb{N}$ так, чтобы $\frac{1}{2n-1} < b$. Тогда при $0 < x < 1$ мы получим:

$$0 < (4.1.9) < x^b < (4.1.13) < x^{\frac{1}{2n-1}} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$$

$$\Downarrow$$

$$x^b \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$$

□

◇ **4.1.12.** Предложение 4.1.9 позволяет строить график степенной функций с показателем $b \in (0; +\infty) \setminus \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{N}-1}$. Здесь как и в примере 4.1.9, вид графика зависит от того, больше или меньше единицы степень b (равной 1 она опять быть не может, из-за того, что $1 \in \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{N}-1}$):

— в случае $b > 1$, $b \in (0; +\infty) \setminus \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{N}-1}$, график функции $x \mapsto x^b$, выглядит как график любого представителя из этого семейства функций, например, как график функции

$$f(x) = x^{\frac{3}{2}} \qquad (x \geqslant 0)$$

— точно так же, если $b < 1$, $b \in (0;+\infty) \setminus \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{N}-1}$, график функции $x \mapsto x^b$, выглядит как график любого представителя из этого семейства, например, как график квадратного корня
$$f(x) = x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x} \qquad (x \geqslant 0)$$

Предложение 4.1.10. *При* $b \in (-\infty;0) \setminus \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{N}-1}$ *степенная функция* $x \mapsto x^b$

- *определена на интервале* $(0;+\infty)$.
- *непрерывна на* $(0;+\infty)$.
- *убывает на* $(0;+\infty)$
- *имеет следующие пределы на концах этого интервала:*

$$\lim_{x\to+0} x^b = +\infty \tag{4.1.41}$$
$$\lim_{x\to+\infty} x^b = 0 \tag{4.1.42}$$

Доказательство. Если обозначить $c = -b$, то мы получим $c \in \frac{2\mathbb{N}}{2\mathbb{N}-1}$, и наша функция будет композицией функции $f(x) = x^c$, рассмотренной в предложении 4.1.9 и функции $g(y) = y^{-1}$, рассмотренной в примерах 3.1.21 и 3.3.11. Все нужные нам свойства функции $x \mapsto x^b$ следуют из этих утверждений. □

◇ **4.1.13.** Предложение 4.1.10 позволяет строить график степенной функций с показателем $b \in (-\infty;0) \setminus \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{N}-1}$. Здесь вид графика (в тех деталях, которые мы здесь уже перечисляли) не зависит от значения b:

— при $b \in (-\infty;0) \setminus \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{N}-1}$, график функции $x \mapsto x^b$, выглядит как график любого представителя из этого семейства функций, например, как график функции
$$f(x) = x^{-\frac{1}{2}} \qquad (x \in \mathbb{R})$$

Показательная функция. При каждом фиксированном значении a отображение
$$x \mapsto a^x$$
называется *показательной функцией* (с основанием a). По Аксиоме степеней B1 на с.278, эту функцию можно считать определенной

— на множестве $\mathbb{R}$, если $a > 0$;

— на множестве $[0;+\infty)$, если $a = 0$;

— на множестве $\frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{N}-1}$, если $a < 0$.

Лемма 4.1.11. *При любом* $a > 0$ *последовательности* $a^{\frac{1}{n}}$ *и* $a^{-\frac{1}{n}}$ *стремятся к единице:*
$$a^{\frac{1}{n}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1, \qquad a^{-\frac{1}{n}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1 \tag{4.1.43}$$

Доказательство. 1. Пусть сначала $a > 1$. Обозначим
$$x_n = a^{\frac{1}{n}} - 1$$
и заметим, что, во-первых,
$$\begin{gathered} a > 1 \\ \Downarrow \ {\scriptstyle (4.1.10)} \\ a^{\frac{1}{n}} > 1^{\frac{1}{n}} = (4.1.4) = 1 \\ \Downarrow \\ x_n = a^{\frac{1}{n}} - 1 > 0 \end{gathered}$$
И, во-вторых, в силу неравенства Бернулли (2.2.242),
$$\begin{gathered} a = (1 + x_n)^n \geqslant (2.2.242) \geqslant 1 + n \cdot x_n \\ \Downarrow \\ \frac{a-1}{n} \geqslant x_n \end{gathered}$$
Записав эти два неравенства вместе, мы получим оценку для x_n, из которой получается первый из двух пределов (4.1.43):
$$\begin{gathered} 0 < x_n \leqslant \frac{a-1}{n} \\ \Downarrow \\ a^{\frac{1}{n}} - 1 = x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \\ \Downarrow \\ a^{\frac{1}{n}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1 \end{gathered}$$
После этого второй предел получается применением тождества (4.1.2) и свойства пределов сохранять дробь:
$$a^{-\frac{1}{n}} = (4.1.2) = \frac{1}{a^{\frac{1}{n}}} \overset{4^0,\ \text{с.216}}{\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}} \frac{1}{1} = 1$$

2. Если $a = 1$, то пределы (4.1.43) становятся тривиальными следствиями тождества (4.1.4):
$$a^{\frac{1}{n}} = 1^{\frac{1}{n}} = (4.1.4) = 1 \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$$
$$a^{-\frac{1}{n}} = 1^{-\frac{1}{n}} = (4.1.4) = 1 \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$$

3. Если $0 < a < 1$, то положив $A = \frac{1}{a}$, мы получим $A > 1$, и поэтому, как мы уже доказали,
$$A^{\frac{1}{n}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$$
Как следствие,
$$a^{\frac{1}{n}} = \left(\frac{1}{A}\right)^{\frac{1}{n}} = (4.1.5) = \frac{1}{A^{\frac{1}{n}}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{1} = 1$$
а отсюда уже
$$a^{-\frac{1}{n}} = (4.1.2) = \frac{1}{a^{\frac{1}{n}}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{1} = 1$$
□

Лемма 4.1.12. *При любом $a > 0$ справедливо соотношение:*

$$a^x \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 1 \qquad (4.1.44)$$

Доказательство. Нам нужно показать, что для произвольной бесконечно малой последовательности

$$x_k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0 \qquad (4.1.45)$$

выполняется

$$a^{x_k} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 1 \qquad (4.1.46)$$

Рассмотрим несколько случаев.

1. Если $a = 1$, то (4.1.46) выполняется тривиально, потому что в этом случае $a^{x_k} = 1$.

2. Пусть $a > 1$. Из соотношений (4.1.43) следует, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется номер N такой, что

$$1-\varepsilon < a^{-\frac{1}{N}} < a^{\frac{1}{N}} < 1+\varepsilon$$

Из (4.1.45) следует, что для данного N можно подобрать номер K такой, что

$$\forall k > K \qquad |x_k| < \frac{1}{N}$$

Поэтому:

$$\begin{gathered}\forall k > K \qquad -\frac{1}{N} < x_k < \frac{1}{N}\\ \Downarrow \quad {\scriptstyle (4.1.12)}\\ \forall k > K \qquad 1-\varepsilon < a^{-\frac{1}{N}} < a^{x_k} < a^{\frac{1}{N}} < 1+\varepsilon\\ \Downarrow\\ \forall k > K \qquad a^{x_k} \in (1-\varepsilon, 1+\varepsilon)\end{gathered}$$

Мы получили, что какой ни возьми $\varepsilon > 0$ почти все элементы последовательности a^{x_k} лежат в ε-окрестности точки 1. Это и означает, что справедливо (4.1.46).

3. Пусть $0 < a < 1$. Тогда из (4.1.43) следует, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется номер N такой, что

$$1-\varepsilon < a^{\frac{1}{N}} < a^{-\frac{1}{N}} < 1+\varepsilon$$

Опять из (4.1.45) получаем, что для данного N можно подобрать номер K такой, что

$$\forall k > K \qquad |x_k| < \frac{1}{N}$$

и поэтому

$$\begin{gathered}\forall k > K \qquad -\frac{1}{N} < x_k < \frac{1}{N}\\ \Downarrow \quad {\scriptstyle (4.1.13)}\\ \forall k > K \qquad 1-\varepsilon < a^{\frac{1}{N}} < a^{x_k} < a^{-\frac{1}{N}} < 1+\varepsilon\\ \Downarrow\\ \forall k > K \qquad a^{x_k} \in (1-\varepsilon, 1+\varepsilon)\end{gathered}$$

То есть какой ни возьми $\varepsilon > 0$, почти все элементы последовательности a^{x_k} лежат в ε-окрестности точки 1. Опять это означает, что справедливо (4.1.46). □

Предложение 4.1.13. *При любом $a > 0$ функция $x \mapsto a^x$ непрерывна.*

Доказательство. Если $x_k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} x$, то $x_k - x \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$ и поэтому

$$a^{x_k} - a^x = a^{x_k - x}\cdot a^x - a^x = (\underbrace{a^{x_k-x}}_{\substack{\downarrow\\ 1,\\ \text{в силу (4.1.44)}}} - 1)\cdot a^x \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

□

Предложение 4.1.14. *Справедливы следующие соотношения:*

— *если $a > 1$, то*

$$\lim_{x\to-\infty} a^x = 0, \qquad \lim_{x\to+\infty} a^x = +\infty \qquad (4.1.47)$$

— *если $0 < a < 1$, то*

$$\lim_{x\to-\infty} a^x = +\infty, \qquad \lim_{x\to+\infty} a^x = 0 \qquad (4.1.48)$$

Доказательство. 1. Пусть $a > 1$. Тогда в силу (3.2.44),

$$a^n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty,$$

поэтому для любого $E > 0$ найдется $N \in \mathbb{N}$ такое, что

$$a^N > E$$

Для любого $x > N$ мы теперь получаем:

$$a^x > (4.1.12) > a^N > E$$

Мы получили, что для любого $E > 0$ найдется N такое, что при $x > N$ выполняется неравенство $a^x > E$. Это означает, что справедливо второе соотношение в (4.1.47):

$$\lim_{x\to+\infty} a^x = +\infty$$

После того, как оно доказано, первое выводится как его следствие:

$$\lim_{x\to-\infty} a^x = \begin{pmatrix} y=-x\\ y\to+\infty\end{pmatrix} = \lim_{y\to+\infty} a^{-y} = \\ = \lim_{y\to+\infty} \frac{1}{\underset{\searrow\, +\infty}{\boxed{a^y}}} = (3.4.136) = 0$$

2. Пусть $0 < a < 1$. Тогда, положив $A = \frac{1}{a}$, мы получим $A > 1$, поэтому

$$\lim_{x\to-\infty} a^x = \begin{pmatrix} y=-x\\ y\to+\infty\\ a^x = A^{-x} = A^y\end{pmatrix} = \\ = \lim_{y\to+\infty} A^y = (4.1.47) = +\infty$$

и

$$\lim_{x\to+\infty} a^x = \begin{pmatrix} y=-x\\ y\to-\infty\\ a^x = A^{-x} = A^y\end{pmatrix} = \\ = \lim_{y\to-\infty} A^y = (4.1.47) = 0$$

□

Предложение 4.1.15. *При любых $a > 0$ и $x \in \mathbb{R}$ справедливо неравенство*

$$a^x > 0 \tag{4.1.49}$$

Доказательство. Если $a = 1$, то это неравенство будет очевидно, в силу первого степенного закона (4.1.4): $1^x = 1$. Поэтому важно рассмотреть случаи $a > 1$ и $0 < a < 1$.

1. Пусть $a > 1$. Тогда рассмотрев целую часть $[x]$ числа x (мы ее определили выше формулой (2.2.286)), мы получим:

$$\begin{array}{cl} [x] \leqslant x & (2.2.288) \\ \Downarrow & (4.1.12) \\ 0 \underset{(2.2.279)}{<} a^{[x]} \leqslant a^x & \\ \Downarrow & \\ 0 < a^x & \end{array}$$

2. Наоборот, если $0 < a < 1$, то

$$\begin{array}{ll} x < [x] + 1 & (2.2.288) \\ \Downarrow & (4.1.13) \\ a^x > a^{[x]+1} \underset{(2.2.279)}{>} 0 & \\ \Downarrow & \\ a^x > 0 & \end{array}$$

$\square$

◇ **4.1.14.** Предложений 4.1.13, 4.1.14 и 4.1.15 достаточно, чтобы построить график функции $x \mapsto a^x$ в тех случаях, когда это возможно, то есть когда $a \geqslant 0$:

– если $a > 1$, график выглядит так:

– если $a = 1$, график становится прямой:

– если $0 < a < 1$, график выглядит так:

– если $a = 0$, график выглядит так:

◇ **4.1.15.** Отдельно нужно сказать, что при $a < 0$, график изобразить невозможно, оттого, что он становится разрывным в каждой точке. Можно пытаться рисовать отдельные точки на нем, например

Увеличивая число точек, мы будем добиваться усложнения картинки

но, в отличие от предыдущих случаев, здесь не получится, чтобы все точки принадлежали какой-то одной непрерывной линии.

Частным случаем будет график функции

$$f(x) = (-1)^x$$

В зависимости от степени подробности он может изображаться так

или так

или так

Логарифм.

- Для всякого числа a, удовлетворяющего двойному неравенству
$$0 < a \neq 1,$$
правило
$$y = \log_a x \quad \Longleftrightarrow \quad a^y = x \tag{4.1.50}$$
определяет функцию
$$x \mapsto \log_a x \qquad (x > 0)$$
называемую *логарифмом* по основанию a. Понятно, что функции $x \mapsto a^x$ и $\log_a$ связаны тождествами
$$a^{\log_a x} = x \qquad (x > 0) \tag{4.1.51}$$
$$\log_a(a^x) = x \qquad (x \in \mathbb{R}) \tag{4.1.52}$$
Второе из них влечет за собой тождество
$$\log_a a = 1 \qquad (0 < a \neq 1) \tag{4.1.53}$$

Доказательство. Мы докажем это утверждение для случая $a > 1$ (случай $0 < a < 1$ рассматривается аналогично).

1. Неравенство (4.1.49) означает, что отображение $x \mapsto a^x$ действительно переводит $\mathbb{R}$ в $(0; +\infty)$.

2. Далее из условия возрастания (4.1.12) следует, что отображение $x \mapsto a^x$ инъективно.

3. Покажем, что $x \mapsto a^x$ сюръективно отображает $\mathbb{R}$ на $(0;+\infty)$. Пусть $C \in (0;+\infty)$. Поскольку $\lim_{x\to-\infty} a^x = 0$ (первое равенство в (4.1.47)), найдется $x \in \mathbb{R}$ такое, что $a^x < C$. С другой стороны, $\lim_{x\to+\infty} a^x = +\infty$ (второе равенство в (4.1.47)), поэтому найдется $y \in \mathbb{R}$ такое, что $a^y > C$. Мы получаем, что

$$a^x < C < a^y$$

причем $x \mapsto a^x$ – непрерывная функция в силу предложения 4.1.13. Значит, по теореме Коши о среднем значении 3.3.6, найдется точка $c \in \mathbb{R}$ такая, что

$$a^c = C$$

Мы получили, что какое ни возьми $C \in (0;+\infty)$, для него найдется точка $c \in \mathbb{R}$, в которой функция $x \mapsto a^x$ принимает значение C. Это и означает сюръективность $x \mapsto a^x$ как отображения из $\mathbb{R}$ в $(0;+\infty)$.

4. Инъективность и сюръективность вместе означают биективность $x \mapsto a^x : \mathbb{R} \to (0;+\infty)$. □

Предложение 4.1.16. *Функция* $\log_a$, *определенная правилом* (4.1.50), *непрерывна.*

Доказательство. Это следует из теоремы 3.3.12: функция $x \mapsto a^x$ непрерывна и строго монотонна на интервале $\mathbb{R} = (-\infty,+\infty)$, значит обратная ей функция $y \mapsto \log_a y$ тоже непарерывна. □

Предложение 4.1.17. *Функция* $\log_a$, *определенная правилом* (4.1.50),

— *возрастает при* $a > 1$:

$$0 < x < y \quad\Longrightarrow\quad \log_a x < \log_a y \qquad (4.1.54)$$

— *убывает при* $0 < a < 1$:

$$0 < x < y \quad\Longrightarrow\quad \log_a x > \log_a y \qquad (4.1.55)$$

Доказательство. Пусть $a > 1$ и $x < y$. Если бы оказалось, что $\log_a x \geqslant \log_a y$, то, в силу возрастания $x \mapsto a^x$, мы получили бы

$$\ln x \geqslant \ln y$$

$$\Downarrow$$

$$\underbrace{a^{\log_a x}}_{x} \geqslant \underbrace{a^{\log_a y}}_{y}$$

$$\Downarrow$$

$$x \geqslant y$$

Случай $0 < a < 1$ рассматривается аналогично. □

Предложение 4.1.18. *Функция* $\log_a$, *определенная правилом* (4.1.50), *удовлетворяет тождествам*

$$\log_a 1 = 0, \qquad (4.1.56)$$

$$\log_a \frac{1}{x} = -\log_a x \qquad (4.1.57)$$

$$\log_a (x \cdot y) = \log_a x + \log_a y, \qquad (4.1.58)$$

Доказательство. Первое равенство следует непосредственно из определения (4.1.50):

$$a^0 = (4.1.1) = 1 \qquad\Longleftrightarrow\qquad 0 = \log_a 1$$

Чтобы доказать второе, достаточно вычислить значения функции $x \mapsto a^x$ в обеих его частях:

$$a^{\log_a \frac{1}{x}} = \frac{1}{x} = \frac{1}{a^{\log_a x}} = (4.1.2) = a^{-\log_a x}$$

Поскольку $x \mapsto a^x$ – инъективное отображение, равенство $a^{\log_a \frac{1}{x}} = a^{-\log_a x}$ означает, что аргументы должны быть равны: $\log_a \frac{1}{x} = -\log_a x$.

Точно так же доказывается последнее равенство:

$$a^{\log_a (x\cdot y)} = x \cdot y = a^{\log_a x} \cdot a^{\log_a y} = \\ = (4.1.3) = a^{\log_a x + \log_a y}$$

Опять, поскольку $x \mapsto a^x$ – инъективное отображение, равенство $a^{\log_a (x\cdot y)} = a^{\log_a x + \log_a y}$ возможно только если аргументы равны: $\log_a (x\cdot y) = \log_a x + \log_a y$. □

Предложение 4.1.19. *Справедливы следующие соотношения:*

— *если* $a > 1$, *то*

$$\lim_{x\to+0} \log_a x = -\infty, \qquad \lim_{x\to+\infty} \log_a x = +\infty \qquad (4.1.59)$$

— *если* $0 < a < 1$, *то*

$$\lim_{x\to+0} \log_a x = +\infty, \qquad \lim_{x\to+\infty} \log_a x = -\infty \qquad (4.1.60)$$

Доказательство. Пусть $a > 0$. Если $E > 0$, то для любого $x \in (0; a^{-E})$ получаем в силу (4.1.54):

$$\log_a x < \log_a a^{-E} = -E$$

Это означает, что справедливо первое соотношение в (4.1.59):

$$\lim_{x\to+0} \log_a x = -\infty$$

Наоборот, для любого $x > a^E$ получаем в силу (4.1.54):

$$\log_a x > \log_a a^E = E$$

Это означает, что справедливо второе соотношение в (4.1.59):

$$\lim_{x\to+\infty} \log_a x = +\infty$$

□

◇ **4.1.16.** Предложений 4.1.17, 4.1.18 и 4.1.19 достаточно, чтобы построить график функции $\log_a$:

— если $a > 1$, то картинка получается такой:

— если $0 < a < 1$, то такой:

Формулы, связывающие показательные функции и логарифмы с разными основаниями.

Предложение 4.1.20. *Справедливы тождества:*

$$a^x = b^{x\cdot\log_b a} \tag{4.1.61}$$

$$\log_b(a^x) = x\cdot\log_b a \tag{4.1.62}$$

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a} \tag{4.1.63}$$

(в первых двух тождествах $0 < x$, $0 < a$, $0 < b \neq 1$, а в третьем $0 < x$, $0 < a \neq 1$, $0 < b \neq 1$)

Доказательство. Первое тождество доказывается цепочкой:

$$b^{x\cdot\log_b a} = (4.1.7) = (\underbrace{b^{\log_b a}}_{\substack{\parallel\\(4.1.51)\\\parallel\\a}})^x = a^x$$

Из него следует второе:

$$\log_b(a^x) \overset{(4.1.61)}{=} \log_b(b^{x\cdot\log_b a}) \overset{(4.1.52)}{=} x\cdot\log_b a$$

А из второго следует третье:

$$\log_b a\cdot\log_a x \overset{(4.1.62)}{=} \log_b(a^{\log_a x}) = \log_b x$$

$$\Downarrow$$

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$$

□

Экспонента e^x и натуральный логарифм $\ln x$. Напомним, что число Непера e мы определили на с.239, а в теореме 3.2.22 мы показали, что оно иррационально и лежит в интервале

$$2,708 < e \leqslant 2,720$$

Среди всех показательных функций $x \mapsto a^x$ и всех логарифмов $x \mapsto \log_a x$ функции с основанием e занимают особое место, потому что, с одной стороны, формулы для вычисления их значений, их производных и интегралов, оказываются особенно простыми, а с другой – все остальные показательные функции и логарифмы выражаются через них с помощью формул (4.1.61)-(4.1.63).

- Показательная функция $x \mapsto e^x$ с основанием e имеет специальное название – *экспонента*. А логарифм $x \mapsto \log_e x$ с основанием e называется *натуральным логарифмом* и у него есть специальное обозначение – ln:

$$\ln x = \log_e x$$

Из (4.1.61)-(4.1.63) следует, что любую показательную функцию и любой логарифм можно выразить через экспоненту и натуральный логарифм так:

$$a^x = e^{x\cdot\ln a} \qquad (0 < a) \tag{4.1.64}$$

$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a} \qquad (0 < a \neq 1) \tag{4.1.65}$$

Графики эти функций выглядят как обычная показательная функция и обычный логарифм:

Перестановочность предела с возведением в степень. У формулам арифметический действий с пределами (3.4.153)-(3.4.157) полезно добавить еще одну:

Теорема 4.1.21. *Если существуют конечные пределы $\lim_{x\to a} f(x)$ и $\lim_{x\to a} g(x)$, причем $\lim_{x\to a} f(x) > 0$, то*

$$\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)} = \lim_{x\to a} f(x)^{\lim_{x\to a} g(x)} \tag{4.1.66}$$

Доказательство.

$$\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)} = \lim_{x\to a} 2^{\log_2 f(x)^{g(x)}} =$$
$$= \lim_{x\to a} 2^{g(x)\cdot\log_2 f(x)} = (\text{Предложение 4.1.13}) =$$
$$= 2^{\lim_{x\to a}\left(g(x)\cdot\log_2 f(x)\right)} = (3.4.152) =$$
$$= 2^{\lim_{x\to a} g(x)\cdot\lim_{x\to a}\log_2 f(x)} = (\text{Предложение 4.1.16}) =$$
$$= 2^{\lim_{x\to a} g(x)\cdot\log_2(\lim_{x\to a} f(x))} = (4.1.62) =$$
$$= 2^{\log_2\left\{(\lim_{x\to a} f(x))^{\lim_{x\to a} g(x)}\right\}} = \lim_{x\to a} f(x)^{\lim_{x\to a} g(x)}$$

□

(b) Тригонометрические функции

Аксиома тригонометрии. Напомним, что синус $\sin t$ и косинус $\cos t$ определяются в школе как ордината и абсцисса точки на единичной окружности, получаемой поворотом крайней правой точки $(1;0)$ на угол t против часовой стрелки (при этом угол обычно измеряется в радианах, то есть в качестве угла берется длина дуги единичной окружности):

Поскольку здесь не объясняется, что такое длина дуги, такое «определение» синуса и косинуса, конечно, нельзя считать строгим. Однозначно эти функции описываются следующей зависимой аксиомой:

B2. **Аксиома тригонометрии.** [3] *Существуют и единственны числовые функции синус* $\sin$ *и косинус* $\cos$*, удовлетворяющие следующим условиям:*

T_0: *функции* $\sin$ *и* $\cos$ *определены всюду на* $\mathbb{R}$ *и являются периодическими,*

T_1: *справедливы следующие три тождества* $(x, y \in \mathbb{R})$*:*

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \qquad (4.1.67)$$

$$\sin(x+y) = \sin x \cdot \cos y + \cos x \cdot \sin y \qquad (4.1.68)$$

$$\cos(x+y) = \cos x \cdot \cos y - \sin x \cdot \sin y \qquad (4.1.69)$$

T_2: *при* $x \in (0;1)$ *выполняется следующее тройное неравенство:*

$$0 < x\cos x < \sin x < x. \qquad (4.1.70)$$

Синус и косинус. Это может быть неожиданным, но все остальные свойства синуса и косинуса выводятся из этого списка. Мы покажем здесь, как это делается.

Предложение 4.1.22. *Справедливы тождества:*

$$\sin 2x = 2\sin x \cdot \cos x \qquad (4.1.71)$$

$$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x \qquad (4.1.72)$$

Доказательство. Во-первых,

$$\sin 2x = \sin(x+x) = (10.3.134) = \\ = \sin x \cdot \cos x + \sin x \cdot \cos x = 2 \cdot \sin x \cdot \cos x$$

Во-вторых,

$$\cos 2x = \cos(x+x) = (10.3.135) = \\ = \cos x \cdot \cos x - \sin x \cdot \sin x = \\ = \cos^2 x - \underbrace{\sin^2 x}_{\substack{\| \\ (4.1.67) \\ \| \\ 1-\cos^2 x}} = 2\cos^2 x - 1$$

И отсюда уже следует:

$$\cos 2x = 2\underbrace{\cos^2 x}_{\substack{\| \\ (4.1.67) \\ \| \\ 1-\sin^2 x}} - 1 = 1 - 2\sin^2 x$$

□

Предложение 4.1.23. *Функция* $\sin$ *обладает наименьшим периодом (а значит и наименьшим полупериодом).*

- Наименьший полупериод функции $\sin$ обозначается буквой π:

$$\pi = \min\Big\{h > 0 : \ \forall x \in \mathbb{R} \\ \sin(x+2h) = \sin x\Big\} \qquad (4.1.73)$$

Как следствие,

$$\sin(x + 2\pi) = \sin x. \qquad (4.1.74)$$

! **4.1.17.** Формула для вычисления π будет выведена нами только на с.621. Сейчас мы лишь отметим, что число π иррационально и удовлетворяет оценке

$$3{,}14 < \pi < 3{,}15$$

Доказательство. Рассмотрим число

$$C = \sin\frac{1}{2}$$

Из (4.1.70) следует, что оно лежит в интервале $(0; \frac{1}{2})$:

$$0 < \sin\frac{1}{2} = C < \frac{1}{2}$$

Положим $\varepsilon = \frac{C}{2}$ и рассмотрим интервал $(0;\varepsilon)$. Если предположить, что у функции $\sin$ нет наименьшего периода, то по теореме (3.1.6), найдется точка $t \in (0, \varepsilon)$ такая, что

$$\sin t = C$$

[3]Избыточность Аксиомы тригонометрии доказывается в § 3(b) главы 10.

Но в то же время из $t \in (0, \varepsilon) \subseteq (0; 1)$ в силу (4.1.70) следует:

$$\sin t < t < \varepsilon = \frac{C}{2} < C$$

Полученное противоречие означает, что наше предположение (что у sin нет наименьшего периода) неверно. □

Предложение 4.1.24. *В точках* 0, π, 2π *синус и косинус принимают следующие значения:*

x	0	π	2π
$\sin x$	0	0	0
$\cos x$	1	-1	1

Доказательство. 1. Сначала рассмотрим случай $x = 0$. Во-первых,

$$\sin 0 = \sin(2 \cdot 0) = (4.1.71) = 2 \cdot \sin 0 \cdot \cos 0$$

$$\Downarrow$$

$$\sin 0 - 2 \cdot \sin 0 \cdot \cos 0 = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\sin 0 \cdot (1 - 2 \cdot \cos 0) = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\left[\begin{aligned} \sin 0 &= 0 \\ \cos 0 &= \tfrac{1}{2} \end{aligned}\right. \tag{4.1.75}$$

Но с другой стороны,

$$\cos 0 = \cos(2 \cdot 0) = (4.1.72) = 2\cos^2 0 - 1 \tag{4.1.76}$$

и отсюда следует, что $\cos 0$ не может быть равен $\frac{1}{2}$, потому что при подстановке в (4.1.76) мы получаем неверное равенство:

$$\frac{1}{2} = 2\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 1$$

Таким образом, в совокупности (4.1.75) второе равенство невозможно, и остается первое:

$$\sin 0 = 0.$$

Отсюда уже получаем значение для $\cos 0$:

$$\overbrace{\sin^2 0}^{0} + \cos^2 0 = (4.1.67) = 1$$

$$\Downarrow$$

$$\cos^2 0 = 1$$

$$\Downarrow$$

$$\left[\begin{aligned} \cos 0 &= 1 \\ \cos 0 &= -1 \end{aligned}\right. \tag{4.1.77}$$

Здесь снова если попробовать подставить в (4.1.76) вместо $\cos 0$ значение -1, получится неверное равенство:

$$-1 = 2 \cdot (-1)^2 - 1,$$

поэтому второе равенство в совокупности (4.1.77) неверно, и остается первое:

$$\cos 0 = 1$$

2. После того, как значения в $x = 0$ вычислены, из тождества периодичности для синуса (4.1.74) сразу получается значение sin в точке $x = 2\pi$:

$$\sin 2\pi = \sin(0 + 2\pi) = \sin 0 = 0$$

Отсюда следует тождество

$$\sin x = \sin(x + 2\pi) = \sin x \cdot \cos 2\pi + \\ + \cos x \cdot \underbrace{\sin 2\pi}_{0} = \sin x \cdot \cos 2\pi$$

В частности, при $x = \frac{1}{2}$ получаем:

$$\sin\frac{1}{2} = \sin\frac{1}{2} \cdot \cos 2\pi$$

Из (4.1.70) следует, что $\sin\frac{1}{2} > 0$, потому на него можно сократить:

$$1 = \cos 2\pi$$

Таким образом, мы заполнили третий столбец в таблице.

3. Только после этого можно получить значения в точке $x = \pi$. Во-первых,

$$0 \overset{\substack{\text{(уже вычислено)} \\ \downarrow}}{=} \sin 2\pi = (4.1.71) = 2\sin\pi \cdot \cos\pi$$

$$\Downarrow$$

$$\left[\begin{aligned} \sin\pi &= 0 \\ \cos\pi &= 0 \end{aligned}\right.$$

Вторые из этих равенств – $\cos\pi = 0$ – неверно, потому что если это значение подставить в формулу (4.1.72) при $x = \pi$,

$$\underbrace{\cos 2\pi}_{\substack{\| \\ 1 \\ \text{(уже вычислено)}}} = 2\cos^2\pi - 1$$

получается неверное равенство:

$$1 = 2 \cdot 0^2 - 1$$

Значит остается первое:

$$\sin\pi = 0$$

Из этого равенства теперь получаем:

$$\underbrace{\sin^2\pi}_{0} + \cos^2\pi = 1$$

$$\Downarrow$$

$$\cos^2\pi = 1$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{bmatrix} \cos\pi = 1 \\ \cos\pi = -1 \end{bmatrix} \tag{4.1.78}$$

Предположим, что верно первое: $\cos\pi = 1$. Тогда в качестве следствия мы получим, во-первых,

$$\sin(x+\pi) = (10.3.134) = \\ = \sin x \cdot \underbrace{\cos\pi}_{\substack{\| \\ 1 \\ \text{(предположение)}}} + \cos x \cdot \underbrace{\sin\pi}_{\substack{\| \\ 0 \\ \text{(уже доказано)}}} = \sin x$$

То есть число $\pi > 0$ должно быть периодом функции $\sin$. Но это невозможно, потому что наименьшим периодом для $\sin$ является число 2π. Полученное противоречие означает, что наше предположение о равенстве $\cos\pi = 1$ было неверным.

Значит, в совокупности (4.1.78) должно быть верно второе равенство:

$$\cos\pi = -1$$

□

Предложение 4.1.25. *Число π является полупериодом и для функции* $\cos$*:*

$$\cos(x + 2\pi) = \cos x. \tag{4.1.79}$$

Доказательство. Здесь используются уже найденные значения $\sin$ и $\cos$ в точке 2π:

$$\cos(x+2\pi) = (10.3.135) = \\ = \cos x \cdot \underbrace{\cos 2\pi}_{1} - \sin x \cdot \underbrace{\sin 2\pi}_{0} = \cos x$$

□

Предложение 4.1.26. *Справедливы тождества:*

$$\sin(-x) = -\sin x, \qquad \cos(-x) = \cos x \tag{4.1.80}$$

Доказательство. Зафиксируем точку $x \in \mathbb{R}$ и обозначим

$$A = \sin(-x), \qquad B = \cos(-x)$$

Тогда

$$0 = \big(\text{таблица на с.292}\big) = \sin 0 = \\ = \sin(x-x) = \sin x \cdot \underbrace{\cos(-x)}_{B} + \cos x \cdot \underbrace{\sin(-x)}_{A} = \\ = B\cdot\sin x + A\cdot\cos x$$

И, аналогично,

$$1 = \big(\text{таблица на с.292}\big) = \cos 0 = \\ = \cos(x-x) = \cos x \cdot \underbrace{\cos(-x)}_{B} - \sin x \cdot \underbrace{\sin(-x)}_{A} = \\ = B\cdot\cos x - A\cdot\sin x$$

Вместе эти равенства дают систему линейных уравнений для A и B:

$$\begin{cases} B\cdot\sin x + A\cdot\cos x = 0 \\ B\cdot\cos x - A\cdot\sin x = 1 \end{cases}$$

Ее можно по-разному решать, например, так:

$$\begin{cases} B\cdot\sin x + A\cdot\cos x = 0 & \leftarrow \text{умножаем на } \sin x \\ B\cdot\cos x - A\cdot\sin x = 1 & \leftarrow \text{умножаем на } \cos x \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} B\cdot\sin^2 x + A\cdot\cos x\cdot\sin x = 0 \\ B\cdot\cos^2 x - A\cdot\sin x\cdot\cos x = \cos x \end{cases}$$

$$\Downarrow \quad \text{(складываем равенства)}$$

$$\underbrace{B\cdot\sin^2 x + B\cdot\cos^2 x}_{\substack{\| \\ B\cdot(\sin^2 x + \cos^2 x) \\ \| \\ B}} = \cos x$$

$$\Downarrow$$

$$B = \cos x$$

Это нам и нужно было узнать про B. Точно так же и с A:

$$\begin{cases} B\cdot\sin x + A\cdot\cos x = 0 & \leftarrow \text{умножаем на } \cos x \\ B\cdot\cos x - A\cdot\sin x = 1 & \leftarrow \text{умножаем на } \sin x \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} B\cdot\sin x\cdot\cos x + A\cdot\cos^2 x = 0 \\ B\cdot\cos x\cdot\sin x - A\cdot\sin^2 x = \sin x \end{cases}$$

$$\Downarrow \quad \text{(вычитаем второе из первого)}$$

$$\underbrace{A\cdot\cos^2 x + A\cdot\sin^2 x}_{\substack{\| \\ A\cdot(\cos^2 x + \sin^2 x) \\ \| \\ A}} = -\sin x$$

$$\Downarrow$$

$$A = -\sin x$$

□

Очевидным следствием (4.1.80) будет

Предложение 4.1.27. *Справедливы тождества:*

$$\sin(x-y) = \sin x\cdot\cos y - \cos x\cdot\sin y \tag{4.1.81}$$

$$\cos(x-y) = \cos x\cdot\cos y + \sin x\cdot\sin y \tag{4.1.82}$$

Из этого в свою очередь следует еще несколько тождеств. Во-первых, тождества для произведений:

Предложение 4.1.28. *Справедливы тождества:*

$$\sin x \cdot \sin y = \frac{1}{2}\Big(\cos(x-y) - \cos(x+y)\Big) \tag{4.1.83}$$

$$\cos x \cdot \cos y = \frac{1}{2}\Big(\cos(x-y) + \cos(x+y)\Big) \tag{4.1.84}$$

$$\sin x \cdot \cos y = \frac{1}{2}\Big(\sin(x-y) + \sin(x+y)\Big) \tag{4.1.85}$$

Доказательство. Мы докажем первое из этих тождеств, потому что остальные два доказываются по аналогии. Здесь нужно просто вычислить выражение в скобках в правой части:

$$\cos(x-y) - \cos(x+y) = (4.1.82), (10.3.135) = \\ = \underbrace{\cos x \cdot \cos y} + \sin x \cdot \sin y \underbrace{- \cos x \cdot \cos y} + \\ + \sin x \cdot \sin y = 2 \sin x \cdot \sin y$$

Поделив на 2, мы получим (4.1.83). □

И, во-вторых, тождества для сумм:

Предложение 4.1.29. *Справедливы тождества:*

$$\sin x + \sin y = 2 \cdot \sin \frac{x+y}{2} \cdot \cos \frac{x-y}{2} \tag{4.1.86}$$

$$\cos x + \cos y = 2 \cdot \cos \frac{x+y}{2} \cdot \cos \frac{x-y}{2} \tag{4.1.87}$$

$$\sin x - \sin y = 2 \cdot \cos \frac{x+y}{2} \cdot \sin \frac{x-y}{2} \tag{4.1.88}$$

$$\cos x - \cos y = -2 \cdot \sin \frac{x+y}{2} \cdot \sin \frac{x-y}{2} \tag{4.1.89}$$

Доказательство. Ниже нам понадобятся только два последних тождества, поэтому мы докажем их. Два первых доказываются по аналогии. Обозначим

$$\alpha = \frac{x+y}{2}, \qquad \beta = \frac{x-y}{2}$$

Тогда

$$\alpha + \beta = x, \qquad \alpha - \beta = y$$

Поэтому

$$\sin x - \sin y = \sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta) = \\ = (10.3.134), (4.1.81) = \sin\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot \sin\beta - \\ - \sin\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot \sin\beta = 2\cos\alpha \cdot \sin\beta = \\ = 2\cos\frac{x+y}{2} \cdot \sin\frac{x-y}{2}$$

И точно так же,

$$\cos x - \cos y = \cos(\alpha+\beta) - \cos(\alpha-\beta) = \\ = (10.3.135), (4.1.82) = \cos\alpha \cdot \cos\beta - \sin\alpha \cdot \sin\beta - \\ - \cos\alpha \cdot \cos\beta - \sin\alpha \cdot \sin\beta = -2\sin\alpha \cdot \sin\beta = \\ = -2\sin\frac{x+y}{2} \cdot \sin\frac{x-y}{2}$$

□

Предложение 4.1.30. *Справедливы следующие неравенства* ($x \in \mathbb{R}$)*:*

$$|\sin x| \leqslant 1, \tag{4.1.90}$$

$$|\cos x| \leqslant 1, \tag{4.1.91}$$

$$|\sin x| \leqslant |x|. \tag{4.1.92}$$

Доказательство. Из (4.1.67) получаем

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$\Downarrow$$

$$\sin^2 x \leqslant 1$$

$$\Downarrow$$

$$|\sin x| = \sqrt{\sin^2 x} \leqslant 1$$

и точно так же доказывается (4.1.91).

Последнее неравенство доказывается отдельно для случаев $x = 0$, $x \in (0;1)$, $x \in (-1,0)$ и $x \notin (-1,1)$:

– при $x = 0$ получаем

$$|\sin 0| = 0 \leqslant |0|$$

– при $0 < x < 1$:

$$0 \leqslant \sin x < x = |x|$$

$$\Downarrow \ {\scriptstyle (4.1.70)}$$

$$|\sin x| \leqslant |x|$$

– при $-1 < x < 0$ получаем:

$$x \in (-1,0)$$

$$\Downarrow$$

$$-x \in (0,1)$$

$$\Downarrow \ {\scriptstyle (4.1.70)}$$

$$0 < \underbrace{\sin(-x)}_{\substack{\| \\ -\sin x \\ \| \\ |\sin x|}} < \underbrace{-x}_{\substack{\| \\ |x|}}$$

$$\Downarrow$$

$$|\sin x| \leqslant |x|$$

– и, наконец, если $x \notin (-1,+1)$, то $1 \leqslant |x|$ и поэтому

$$|\sin x| \leqslant 1 \leqslant |x|.$$

□

Предложение 4.1.31. *Справедливы неравенства*

$$|\sin x - \sin a| \leqslant |x-a| \tag{4.1.93}$$
$$|\cos x - \cos a| \leqslant |x-a| \tag{4.1.94}$$

Доказательство.

$$\begin{aligned} |\sin x - \sin a| &= (4.1.81) = \\ &= \left| 2\cdot\cos\frac{x+a}{2}\cdot\sin\frac{x-a}{2}\right| = \\ &= 2\cdot\left|\cos\frac{x+a}{2}\right|\cdot\left|\sin\frac{x-a}{2}\right| \leqslant \\ &\leqslant (4.1.91),(4.1.92) \leqslant 2\cdot 1\cdot\left|\frac{x-a}{2}\right| = |x-a| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |\cos x - \cos a| &= (4.1.82) = \\ &= \left| -2\cdot\sin\frac{x+a}{2}\cdot\sin\frac{x-a}{2}\right| = \\ &= 2\cdot\left|\sin\frac{x+a}{2}\right|\cdot\left|\sin\frac{x-a}{2}\right| \leqslant \\ &\leqslant (4.1.90),(4.1.92) \leqslant 2\cdot 1\cdot\left|\frac{x-a}{2}\right| = |x-a| \end{aligned}$$

□

Предложение 4.1.32. *Функции* sin *и* cos *непрерывны на* $\mathbb{R}$.

Доказательство. Для любого числа $a\in\mathbb{R}$ и любой последовательности $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} a$ получаем:

$$\begin{gathered} x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} a \\ \Downarrow \quad \text{(теорема 3.2.5)} \\ x_n - a \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \\ \Downarrow \quad \begin{pmatrix}\text{вспоминаем}\\ \text{определение}\\ \text{бесконечно малой}\\ \text{пос-ти на с.211}\end{pmatrix} \\ |x_n - a| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \\ \Downarrow \quad \begin{pmatrix}\text{применяем}\\ \text{неравенство (4.1.93)}\end{pmatrix} \\ 0 \leqslant |\sin x_n - \sin a| \leqslant |x_n - a| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \\ \Downarrow \quad \begin{pmatrix}\text{теорема о двух}\\ \text{милиционерах 3.2.10}\end{pmatrix} \\ |\sin x_n - \sin a| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \\ \Downarrow \quad \begin{pmatrix}\text{определение}\\ \text{бесконечно малой}\\ \text{пос-ти на с. 211}\end{pmatrix} \\ \sin x_n - \sin a \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \\ \Downarrow \quad \text{(теорема 3.2.5)} \\ \sin x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \sin a \end{gathered}$$

Мы получили, что если $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} a$, то $\sin x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \sin a$. Это означает, что функция $f(x) = \sin x$ непрерывна в точке $a\in\mathbb{R}$. Поскольку a – произвольная точка на $\mathbb{R}$, функция sin непрерывна всюду на $\mathbb{R}$.

Для функции cos этот факт доказывается аналогично, только нужно вместо неравенства (4.1.93) применять (4.1.94). □

Лемма 4.1.33. *Если в некоторой точке $h>0$ синус равен нулю,*

$$\sin h = 0,$$

то h – полупериод для функций sin *и* cos.

Доказательство.

$$\begin{Bmatrix} \sin 2h = 2\cdot\overbrace{\sin h}^{0}\cdot\cos h = 0 \\ \cos 2h = 1 - 2\cdot\underbrace{\sin^2 h}_{0} = 1 \end{Bmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{Bmatrix} \sin(x+2h) = \sin x\cdot\overbrace{\cos 2h}^{1} + \cos x\cdot\overbrace{\sin 2h}^{0} = \sin x \\ \cos(x+2h) = \cos x\cdot\underbrace{\cos 2h}_{1} - \sin x\cdot\underbrace{\sin 2h}_{0} = \cos x \end{Bmatrix}$$

□

Предложение 4.1.34. *На интервале $(0,\pi)$ синус положителен, а на интервале $(-\pi,0)$ – отрицателен:*

$$x\in(0,\pi) \quad\Longrightarrow\quad \sin x > 0 \tag{4.1.95}$$
$$x\in(-\pi,0) \quad\Longrightarrow\quad \sin x < 0 \tag{4.1.96}$$

Доказательство. Из-за тождества нечетности (4.1.80) здесь достаточно доказать первое утверждение. Предположим, что оно неверно, то есть что для некоторого $x\in(0,\pi)$ выполняется $\sin x \leqslant 0$. Рассмотрим отдельно два случая: когда $\sin x = 0$, и когда $\sin x < 0$.

1) Если $\sin x = 0$, то по лемме 4.1.33 число x должно быть полупериодом для функций sin и cos. Это невозможно, потому что $x<\pi$, то есть x меньше наименьшего полупериода π.

2) Если же $\sin x < 0$, то выберем какое-нибудь число $\varepsilon > 0$ так, чтобы выполнялись два условия:

$$\varepsilon < 1, \qquad \varepsilon < x$$

Из первого неравенства, в силу (4.1.70), мы получим:

$$\sin\varepsilon > 0$$

То есть на отрезке $[\varepsilon, x]$ функция sin меняет знак:

$$\sin\varepsilon > 0 > \sin x$$

Значит, по теореме Коши о промежуточном значении 3.3.6, в некоторой точке $h\in(\varepsilon,x)$ она обращается в нуль:

$$\sin h = 0$$

Но тогда снова по лемме 4.1.33 получается, что число h должно быть полупериодом для функции sin, что невозможно, потому что $h < x < \pi$, то есть h меньше наименьшего полупериода π. $\square$

Предложение 4.1.35. *На отрезке $[0,\pi]$ косинус строго убывает, а на отрезке $[-\pi,0]$ монотонно возрастает:*

$$x,y \in [0,\pi], \qquad x<y \quad \Longrightarrow \quad \cos x > \cos y \tag{4.1.97}$$

$$x,y \in [-\pi,0], \qquad x<y \quad \Longrightarrow \quad \cos x < \cos y \tag{4.1.98}$$

Доказательство. Заметим сначала, что из-за тождества четности (4.1.80) здесь достаточно доказать только утверждение для отрезка $[0,\pi]$. Для него мы получаем такую цепочку:

$$x,y \in [0,\pi], \qquad x<y$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{x+y}{2} \in (0,\pi), \qquad \frac{x-y}{2} \in (-\pi,0)$$

(отрезок $[0,\pi]$ превратился в интервалы $(0,\pi)$ и $(-\pi,0)$!)

$$\Downarrow$$

$$\cos x - \cos y = (4.1.89) = \\ = -2\cdot\underbrace{\sin\frac{x+y}{2}}_{\substack{\vee\\0}}\cdot\underbrace{\sin\frac{x-y}{2}}_{\substack{\wedge\\0}} > 0$$

$$\Downarrow$$

$$\cos x > \cos y$$

$\square$

Предложение 4.1.36. *Справедлива следующая таблица значений синуса и косинуса в некоторых характерных точках на отрезке $[0,\frac{\pi}{2}]$:*

t	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos t$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin t$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

Доказательство. Мы покажем, как выводятся значения этих функций в двух точках, оставив вывод для остальных точек читателю.

1. Вычислим значения в точке $\frac{\pi}{2}$: во-первых,

$$0 = \sin\pi = 2\cdot\sin\frac{\pi}{2}\cdot\cos\frac{\pi}{2}$$

$$\Downarrow$$

$$\left[\begin{matrix}\sin\frac{\pi}{2}=0 & \leftarrow \text{невозможно, в силу (4.1.95)}\\ \cos\frac{\pi}{2}=0 & \end{matrix}\right]$$

$$\Downarrow$$

$$\cos\frac{\pi}{2}=0$$

И, во-вторых,

$$\sin^2\frac{\pi}{2} + \underbrace{\cos^2\frac{\pi}{2}}_{0} = 1$$

$$\Downarrow$$

$$\sin^2\frac{\pi}{2}=1$$

$$\Downarrow$$

$$\left[\begin{matrix}\sin\frac{\pi}{2}=1 & \\ \sin\frac{\pi}{2}=-1 & \leftarrow \text{невозможно, в силу (4.1.95)}\end{matrix}\right]$$

$$\Downarrow$$

$$\sin\frac{\pi}{2}=1$$

2. Заметим, что $\sin\frac{\pi}{4}=\cos\frac{\pi}{4}$:

$$\sin\frac{\pi}{4} = \sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right) = \underbrace{\sin\frac{\pi}{2}}_{1}\cdot\cos\frac{\pi}{4} - \\ - \underbrace{\cos\frac{\pi}{2}}_{0}\cdot\sin\frac{\pi}{4} = \cos\frac{\pi}{4}$$

Отсюда получаем:

$$1 = \sin\frac{\pi}{2} = \sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}\right) = 2\cdot\sin\frac{\pi}{4}\cdot\cos\frac{\pi}{4} = 2\cdot\sin^2\frac{\pi}{4}$$

$$\Downarrow$$

$$\sin^2\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}$$

$$\Downarrow$$

$$\left|\sin\frac{\pi}{4}\right| = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Downarrow$$

$$\left[\begin{matrix}\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2} & \\ \sin\frac{\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2} & \leftarrow \text{невозможно, в силу (4.1.95)}\end{matrix}\right]$$

$$\Downarrow$$

$$\sin\frac{\pi}{4} = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$\square$

Предложение 4.1.37. *Справедливы тождества:*

$$\sin(x+\pi) = -\sin x \tag{4.1.99}$$

$$\cos(x+\pi) = -\cos x \tag{4.1.100}$$

$$\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = \cos x \tag{4.1.101}$$

$$\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = -\sin x \tag{4.1.102}$$

$$\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right) = -\cos x \tag{4.1.103}$$

$$\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right) = \sin x \tag{4.1.104}$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = \cos x \tag{4.1.105}$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = \sin x \tag{4.1.106}$$

Доказательство. Мы докажем только первое тождество, остальные доказываются по аналогии:

$$\sin(x+\pi) = \sin x \cdot \underbrace{\cos \pi}_{-1} + \cos x \cdot \underbrace{\sin \pi}_{0} = \sin x$$

$\square$

Индукцией из формул (4.1.99) и (4.1.100) выводится

Следствие 4.1.38. *Справедливы тождества:*

$$\cos(\pi n) = \cos(-\pi n) = (-1)^n, \qquad (4.1.107)$$

$$\sin(\pi n) = \sin(-\pi n) = 0. \qquad (4.1.108)$$

Предложение 4.1.39. *На интервале $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ косинус положителен, а на интервале $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$ – отрицателен:*

$$x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \quad \Longrightarrow \quad \cos x > 0 \qquad (4.1.109)$$

$$x \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right) \quad \Longrightarrow \quad \cos x < 0 \qquad (4.1.110)$$

Доказательство. Здесь все следует из предложения 4.1.34:

$$x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\Downarrow$$

$$x + \frac{\pi}{2} \in (0, \pi)$$

$$\Downarrow$$

$$\cos x = (4.1.101) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) > 0$$

И точно так же

$$x \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$$

$$\Downarrow$$

$$x + \frac{\pi}{2} \in (\pi, 2\pi)$$

$$\Downarrow$$

$$\cos x = (4.1.101) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) < 0$$

$\square$

Предложение 4.1.40. *На отрезке $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ синус монотонно возрастает, а на отрезке $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ монотонно убывает:*

$$x, y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \quad x < y \quad \Longrightarrow \quad \sin x > \sin y \qquad (4.1.111)$$

$$x, y \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right], \quad x < y \quad \Longrightarrow \quad \sin x < \sin y \qquad (4.1.112)$$

Доказательство. Для отрезка $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ получаем:

$$x, y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \qquad x < y$$

$$\Downarrow$$

$$x + \frac{\pi}{2}, y + \frac{\pi}{2} \in [0, \pi], \qquad x + \frac{\pi}{2} < y + \frac{\pi}{2}$$

$$\Downarrow$$

$$\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) > \cos\left(y + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\Downarrow$$

$$\sin x = (4.1.102) = -\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) < \\ < -\cos\left(y + \frac{\pi}{2}\right) = (4.1.102) = \sin y$$

А для $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$:

$$x, y \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right], \qquad x < y$$

$$\Downarrow$$

$$x + \frac{\pi}{2}, y + \frac{\pi}{2} \in (\pi, 2\pi), \qquad x + \frac{\pi}{2} < y + \frac{\pi}{2}$$

$$\Downarrow$$

$$\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) < \cos\left(y + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\Downarrow$$

$$\sin x = (4.1.102) = -\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) > \\ > -\cos\left(y + \frac{\pi}{2}\right) = (4.1.102) = \sin y$$

$\square$

◇ **4.1.18.** Полученной теперь информации достаточно для построения графиков синуса и косинуса. Эти картинки общеизвестны, однако мы предлагаем читателю проверить самостоятельно, что, если ставить себе целью указать на графике интервалы монотонности и знакоопределенности, то из того, что мы уже успели доказать про синус и косинус никаких других картинок получиться не может. Для синуса график должен выглядеть так:

А для косинуса так:

Тангенс и котангенс.

- Тангенс tg и котангенс ctg определяются формулами

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x} \qquad \left(x \notin \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\right) \qquad (4.1.113)$$

$$\operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x} \qquad (x \notin \pi\mathbb{Z}) \qquad (4.1.114)$$

Предложение 4.1.41. *Справедливы следующие тождества:*

$$\operatorname{tg}(x+\pi) = \operatorname{tg} x, \qquad \operatorname{ctg}(x+\pi) = \operatorname{ctg} x \qquad (4.1.115)$$

$$\operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = -\operatorname{ctg} x, \quad \operatorname{ctg}\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = -\operatorname{tg} x \qquad (4.1.116)$$

$$\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x, \qquad \operatorname{ctg}(-x) = -\operatorname{ctg} x \qquad (4.1.117)$$

Доказательство. Это сразу вытекает из свойств синуса и косинуса, например, первая формула доказывается так:

$$\operatorname{tg}(x+\pi) = \frac{\sin(x+\pi)}{\cos(x+\pi)} = (4.1.99), (4.1.100) = \\ = \frac{-\sin x}{-\cos x} = \frac{\sin x}{\cos x} = \operatorname{tg} x$$

□

Предложение 4.1.42. *На интервале* $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ *функция* tg *возрастает:*

$$x, y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), \quad x < y \quad \Longrightarrow \quad \operatorname{tg} x < \operatorname{tg} y \qquad (4.1.118)$$

Доказательство. В силу нечетности тангенса (4.1.117), достаточно рассмотреть интервал $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Тогда все следует из монотонности синуса и косинуса:

$$x, y \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right), \qquad x < y$$

$$\Downarrow$$

$$0 < \sin x < \sin y, \qquad \cos x > \cos y > 0$$

$$\Downarrow$$

$$0 < \sin x < \sin y, \qquad 0 < \frac{1}{\cos x} < \frac{1}{\cos y}$$

$$\Downarrow$$

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x} < \frac{\sin y}{\cos y} = \operatorname{tg} y$$

□

Предложение 4.1.43. *На интервале* $(0, \pi)$ *функция* ctg *убывает:*

$$x, y \in (0, \pi), \quad x < y \quad \Longrightarrow \quad \operatorname{ctg} x > \operatorname{ctg} y \qquad (4.1.119)$$

Доказательство.

$$x, y \in (0, \pi), \qquad x < y$$

$$\Downarrow$$

$$x - \frac{\pi}{2}, y - \frac{\pi}{2} \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), \qquad x - \frac{\pi}{2} < y - \frac{\pi}{2}$$

$$\Downarrow$$

$$\operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{2}\right) < \operatorname{tg}\left(y - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\Downarrow$$

$$-\operatorname{ctg} x = \operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{2}\right) < \operatorname{tg}\left(y - \frac{\pi}{2}\right) = -\operatorname{ctg} y$$

$$\Downarrow$$

$$\operatorname{ctg} x > \operatorname{ctg} y$$

□

Предложение 4.1.44. *На границах интервалов, где* tg *и* ctg *определены, эти функции имеют бесконечные пределы:*

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2} + \pi n} \operatorname{tg} x = \infty, \qquad (n \in \mathbb{Z}) \qquad (4.1.120)$$

$$\lim_{x \to \pi n} \operatorname{ctg} x = \infty, \qquad (n \in \mathbb{Z}) \qquad (4.1.121)$$

Доказательство. Из-за π-периодичности и формул (4.1.116), связывающих tg и ctg, здесь достаточно рассмотреть только одну точку. Например, при $x \to \frac{\pi}{2}$ мы, в силу непрерывности sin и cos, получаем:

$$\sin x \underset{x \to \frac{\pi}{2}}{\longrightarrow} \sin \frac{\pi}{2} = 1, \qquad \cos x \underset{x \to \frac{\pi}{2}}{\longrightarrow} \cos \frac{\pi}{2} = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x} \underset{x \to \frac{\pi}{2}}{\longrightarrow} \infty$$

□

◇ **4.1.19.** Для построения графиков нам теперь не хватает нескольких значений в характерных точках. Из таблицы для синуса и косинуса на с.296 мы прямым вычислением получаем таблицу для тангенса и котангенса:

Предложение 4.1.45. *Справедлива следующая таблица значений тангенса и котангенса:*

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\operatorname{tg} x$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	$\nexists$
$\operatorname{ctg} x$	$\nexists$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0

Теперь можно строить графики. Для тангенса график выглядит так:

А для котангенса так:

Обратные тригонометрические функции.

- Следующие правила определяют функции, называемые соответственно арксинусом, арккосинусом, арктангенсом и арккотангенсом:

$$t = \arcsin x \iff x = \sin t \ \&\ t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \tag{4.1.122}$$

$$t = \arccos x \iff x = \cos t \ \&\ t \in [0; \pi] \tag{4.1.123}$$

$$t = \operatorname{arctg} x \iff x = \operatorname{tg} t \ \&\ t \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right) \tag{4.1.124}$$

$$t = \operatorname{arcctg} x \iff x = \operatorname{ctg} t \ \&\ t \in (0; \pi) \tag{4.1.125}$$

Доказательство. Здесь используется теоремы о монотонной функции на отрезке 3.3.11 и на интервале 3.3.12. Например, в случае с синусом мы получаем вот что: по предложению 4.1.40, синус строго возрастает на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$. Вдобавок

$$\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1, \qquad \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$$

поэтому по теореме 3.3.11 правило (4.1.122) определяет некую функцию на отрезке $[-1; 1] = \sin\left(\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]\right)$ □

Из теорем 3.3.11 и 3.3.12 мы автоматически получаем

Предложение 4.1.46. *Функции* arcsin, arccos, arctg *и* arcctg *непрерывны и монотонны на своей области определения.*

А из предложений 4.1.34 и 4.1.39 получаем

Предложение 4.1.47. *Функции* arcsin, arccos, arctg *и* arcctg *имеют следующие знаки на характерных интервалах:*

$$\arcsin x > 0, \quad x \in (0, 1] \tag{4.1.126}$$

$$\arcsin x < 0, \quad x \in [-1, 0) \tag{4.1.127}$$

$$\arccos x > 0, \quad x \in [-1, 1) \tag{4.1.128}$$

$$\operatorname{arctg} x > 0, \quad x > 0 \tag{4.1.129}$$

$$\operatorname{arctg} x < 0, \quad x < 0 \tag{4.1.130}$$

$$\operatorname{arcctg} x > 0, \quad x \in \mathbb{R} \tag{4.1.131}$$

Остается привести графики этих функций.

◇ **4.1.20.** Арксинус:

◇ **4.1.21.** Арккосинус:

◇ **4.1.22.** Арктангенс:

◇ **4.1.23.** Арккотангенс:

(c) Непрерывные элементарные функции

Можно заметить, что в списке элементарных функций, который мы приводили на с. 277, не все функции будут непрерывны (мы это уже отмечали в примере 4.1.15, но без доказательства). Объясним теперь, почему это так.

◇ **4.1.24.** Функция

$$f(x) = 0^x$$

разрывна в точке $x = 0$. Действительно, для последовательности

$$x_n = \frac{1}{n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

мы получим

$$f(x_n) = 0^{\frac{1}{n}} = 0 \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \neq 1 = 0^0 = f(0)$$

◇ **4.1.25.** Функция

$$f(x) = (-1)^x$$

разрывна в любой точке своей области определения. Например, для точки $a = 0$ можно взять последовательность

$$x_n = \frac{1}{3n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

для которой мы получим

$$f(x_n) = (-1)^{\frac{1}{3n}} = -1 \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} -1 \neq 1 = (-1)^0 = f(0)$$

С другой стороны, очевидно, что некоторые другие элементарные функции непрерывны. Полный их список дает следующая теорема (ее доказательство мы оставляем читателю в качестве упражнения):

Теорема 4.1.48. *Следующие элементарные функции (и только они) непрерывны в своей области определения:*

название	x ↧	область определения
степенная функция	x^b	$\begin{cases} x \in \mathbb{R}, & b \in \frac{\mathbb{N}}{2\mathbb{N}-1} \\ x \neq 0, & b \in -\frac{\mathbb{N}}{2\mathbb{N}-1} \\ x \geqslant 0, & b \in (0,+\infty) \setminus \frac{\mathbb{N}}{2\mathbb{N}-1} \\ x > 0, & b \in (-\infty,0) \setminus \frac{-\mathbb{N}}{2\mathbb{N}-1} \end{cases}$
показательная функция	a^x	$x \in \mathbb{R},\ a > 0$
логарифм	$\log_a x$	$x > 0,\ \ a \in (0;1) \cup (1;+\infty)$
синус	$\sin x$	$x \in \mathbb{R}$
косинус	$\cos x$	$x \in \mathbb{R}$
тангенс	$\operatorname{tg} x$	$x \notin \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}$
котангенс	$\operatorname{ctg} x$	$x \notin \pi\mathbb{Z}$
арксинус	$\arcsin x$	$x \in [-1;1]$
арккосинус	$\arccos x$	$x \in [-1;1]$
арктангенс	$\operatorname{arctg} x$	$x \in \mathbb{R}$
арккотангенс	$\operatorname{arcctg} x$	$x \in \mathbb{R}$

- Функции из этого списка называются *непрерывными элементарными функциями.*

§ 2 Стандартные функции

В инженерном деле, и вообще в приложениях очень редко используются какие-то сложные функции, представляемые суммами рядов или решениями уравнений (например, дифференциальных). Почти всегда это функции, получающиеся из элементарных с помощью алгебраических операций (сумма, разность, произведение, частное) и операции композиции. Мы будем называть такие функции *стандартными* (см. определение на с.306), чтобы отличать их от списка функций, перечисленных в § 1 этой главы и названных там *элементарными.*

(a) Числовые выражения

Стандартные функции определяются с помощью числовых выражений, которые используются затем при описании формальных операций взятия

[4]Напомним, что формальные теории были определены на с.79.

[5]Эта тема, по-видимому, остается совершенно неразработанной, в частности, непонятно, можно ли заменить равенство какими-то другими предикатами. Как следствие, в понимаемом таким образом Исчислении получается, что есть функциональные символы, и вместе с ними и термы, но нет предикатных, и поэтому нет формул в том смысле, как они определяются в формальных теориях (определение формулы в формальной теории было дано на с.80).

производной и интеграла, и поэтому раздел математики, изучающий числовые выражения, операции над ними и их связь со стандартными функциями, логично считать частью *Исчисления* (Calculus) — дисциплины о символьных вычислениях в Анализе. В русском языке это слово обычно используется в связке с одним из двух прилагательных, *дифференциальное* или *интегральное*, в зависимости от типа решаемых задач. О дифференциальном исчислении мы поговорим на с.330, а об интегральном – на с.392.

С точки зрения логики на Исчисление естественно глядеть, как на недостроенную формальную теорию[4]. Качественное ее отличие от теорий, рассматривавшихся нами в главе 1, состоит в том, что предикат равенства в ней определить (внутри самого Исчисления, без необходимости строить модель в теории вещественных чисел) не получается[5].

Вопрос о том, как определить равенство числовых выражений, чтобы превратить Исчисление в полноценную формальную теорию, на сегодняшний день, насколько известно автору, открыт.[6] Хотя он не выглядит трансцендентным, ясно, что ответ на него должен быть чрезвычайно громоздким (если не появится какой-то идеи, позволяющей все упростить, например, сменой сигнатуры). По уровню трудоемкости эта задача, наверное, сравнима с созданием операционной системы в программировании (с той разницей, что несколько операционных систем нынче существует и поддерживается, а Исчисление, как формальная теория, пока не разработано).

Это сравнение с программированием кажется автору ключевым в выработке отношения к этой дисциплине. Ясно, что проблему равенств в Исчислении нужно как-то решать, но нужно ли заставлять школьников и студентов изучать детали полученного решения, когда оно будет найдено, и нужно ли продолжать заставлять их зубрить "суррогатные" алгоритмы решения задач в обход этой проблемы, как это делается сейчас, — зависит от развития событий не только в математике.

Если удастся превратить Исчисление в (более или менее простую) формальную теорию, то понятно, что такую науку нужно будет преподавать везде, где можно, просто как доступный пример приложений математических знаний. Поскольку это пока не получается, и в школах и университетах, по-прежнему, приходится учить людей дремучим методам решения уравнений и вычисления производных и интегралов, большие надежды внушает наметившаяся последнее время возможность создать инфраструктуру, которая позволила бы избавить общество от этой нагрузки.

Очевидно, что с развитием программирования отношение к вычислениям в математике будет меняться. Арифметические вычисления, которым до последней трети 20 века уделялось главное внимание в преподавании математики, с их сосредоточенностью на вопросе "как выразить в десятичных дробях результат данной последовательности операций с десятичными дробями?" — ушли далеко на периферию общественного сознания с распространением калькуляторов. Точно так же Исчисление, концентрирующееся на задачах "как выразить в стандартных функциях результат данной последовательности операций со стандартными функциями?", должно отойти на второй план с распространением программ, позволяющих решать эти задачи автоматически. Это не будет означать, конечно, смерть школьной и университетской математики, просто надо понимать, что круг задач, которыми она занимается, неизбежно будет меняться. Вычисление производных и интегралов, вместе с решением уравнений, утратят актуальность, как утратили ее относительно недавно методы умножения и деления многозначных чисел.

Эта неразработанность в настоящем и неопределенность для будущего делает Исчисление неблагодарной темой для учебников. Мы постараемся в своих объяснениях минимизировать собственно рассуждения внутри Исчисления, как "недостроенной формальной теории", перенеся, насколько это возможно, формальности в Анализ. В частности, проблему равенства числовых выражений мы, по установившейся традиции, решаем декларацией: *"выражения равны, если определяемые ими стандартные функции равны"*[7].

Числовые выражения. Числовые выражения служат главным предметом изучения в школе, поэтому читателю они должны быть хорошо знакомы. Грубо говоря, это конечные последовательности символов (букв, цифр, или символов операций), которые можно записывать как левые или правые части уравнений, или которые определяют функции (возможно, от нескольких переменных) с помощью элементарных функций и алгебраических операций. Например, выраже-

[6] Автору трудно судить о современных исследованиях в этой области, но во второй половине 20 века этой проблемой интересовались. В частности, известный польский математик Альфред Тарский поставил так называемую *Проблему школьных тождеств* ("High school identities"), которую можно считать упрощенным вариантом проблемы равенств в Исчислении, для частного случая, когда в сигнатуру теории включены только операции сложения, умножения и возведения в степень (а в качестве модели рассматривается множество натуральных чисел $\mathbb{N}$). Она оказалась на удивление сложной и была решена в 1980 году Алексом Уилки, построившим знаменитый контрпример.

[7] Связь между числовыми выражениями и стандартными функциями описывается ниже теоремой 4.2.2.

ниями будут

$$25, \quad t+2, \quad \sin x, \quad \frac{a+b}{a-b}, \quad \sqrt{x^2+y^2}.$$

Строгое определение этому понятию выглядит так:

- *Числовыми выражениями* называются конечные последовательности символов, определенные следующими индуктивными правилами:

  1) десятичная запись целого неотрицательного числа считается числовым выражением (обозначающим обычное число из $\mathbb{Z}_+$),
  2) буквы π и e считаются числовыми выражениями (обозначающими числа π и e, определенные выше на страницах 291 и 239),
  3) всякая буква латинского или греческого алфавита, строчная или прописная, отличная от π и e, также считается числовым выражением (обозначающим переменную или параметр, о чем будет сказано позже):
  $$a, b, c, ..., x, y, z, \qquad A, B, C, ..., X, Y, Z$$
  $$\alpha, \beta, \gamma, ..., \chi, \psi, \omega, \qquad A, B, \varGamma, ..., X, \varPsi, \varOmega;$$
  4) если мы выбрали какую-то букву латинского или греческого алфавита, отличную от π и e, например, a, то приписывая ей в качестве индекса десятичную запись целого неотрицательного числа, мы получим новое числовое выражение:
  $$a_0, \ a_1, \ a_2, ..., a_{10}, ...$$
  5) если $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$ — числовые выражения, то числовыми выражениями будут также
  $$(\mathcal{F})+(\mathcal{G}), \quad (\mathcal{F})-(\mathcal{G}), \quad (\mathcal{F})\cdot(\mathcal{G}), \quad (\mathcal{F})/(\mathcal{G}), \quad (\mathcal{F})^{(\mathcal{G})}, \quad \log_{(\mathcal{F})}(\mathcal{G})$$
  (скобки могут не писаться, если это не приводит к недоразумению);
  6) если $\mathcal{F}$ — числовое выражение, то числовыми выражениями будут также выражения, получаемые подстановкой $\mathcal{F}$ как аргумента под знак элементарных функций, в частности,
  $$\sin(\mathcal{F}), \quad \cos(\mathcal{F}), \quad \operatorname{tg}(\mathcal{F}), \quad \operatorname{ctg}(\mathcal{F}), \quad \arcsin(\mathcal{F}), \quad \arccos(\mathcal{F}), \quad \operatorname{arctg}(\mathcal{F}), \quad \operatorname{arcctg}(\mathcal{F})$$
  (как и в предыдущем правиле, скобки могут не писаться, если это не приводит к недоразумению).

Задание числового выражения дополняется следующим правилом:

- Буквы и индексированные буквы, входящие в данное числовое выражение $\mathcal{H}$ должны быть поделены на *переменные* и *параметры*. Это нужно понимать так, что всякое записанное числовое выражение $\mathcal{H}$ должно сопровождаться указанием, какие из входящих в него букв и индексированных букв рассматриваются как переменные, а какие как параметры.

Смысл этого деления станет понятен чуть позже, при определении дифференциала числового выражения (мы увидим, что на переменных и параметрах действие этой операции задается по-разному).

- *Сложность* $\mathsf{comp}\,\mathcal{H}$ *выражения* $\mathcal{H}$ — это сколько раз в нем встречаются алгебраические операции (сложение, вычитание, умножение, деление, возведение в степень) и символы элементарных функций.
- *Число мест в выражении* $\mathcal{H}$ — это количество переменных в нем. Числовое выражение $\mathcal{H}$ называется *n-местным*, если в нем n переменных (и неважно, сколько параметров).

◇ **4.2.1.** Следующие числовые выражения (с точностью до замены букв) называются *элементарными*:

$$x^\alpha, \quad \sin x, \quad \cos x, \quad \operatorname{tg} x, \quad \operatorname{ctg} x, \quad \arcsin x, \quad \arccos x, \quad \operatorname{arctg} x, \quad \operatorname{arcctg} x \tag{4.2.132}$$

Подстановка.

Теорема 4.2.1. *Если $\mathcal{G}$ — числовое выражение, y — входящая в него буква (разумеется, вместо y можно выбирать любую другую букву), и $\mathcal{F}$ — какое-то другое числовое выражение, то, подставив всюду в $\mathcal{G}$ вместо буквы y выражение $(\mathcal{F})$, мы получим новое числовое выражение, обозначаемое*

$$\mathcal{G}\Big|_{y=\mathcal{F}}, \tag{4.2.133}$$

и называемое результатом подстановки в $\mathcal{G}$ вместо буквы y выражения $\mathcal{F}$.

- Если выражение $\mathcal{H}$ получено из какого-то выражения $\mathcal{G}$ подстановкой выражения $\mathcal{F}$,
$$\mathcal{G}\Big|_{y=\mathcal{F}} = \mathcal{H}$$
то говорят, что выражение $\mathcal{F}$ *подчинено* выражению $\mathcal{H}$ (или *является частью* $\mathcal{H}$).

(b) Стандартные функции

Упорядочение переменных. Ниже мы увидим, что всякое числовое выражение $\mathcal{H}$ определяет некое семейство функций (от одного или многих переменных, в зависимости от числа переменных, входящих в $\mathcal{H}$), однако для формулировки этого факта нужно сначала научиться упорядочивать переменные и параметры.

Мы будем говорить, что в числовом выражении $\mathcal{H}$ (или на множестве числовых выражений) задан *порядок переменных*, если специально оговорено, какая из переменных, входящих в $\mathcal{H}$ считается первой, какая второй, и так далее до последней. Порядок переменных удобно записывать просто строчкой, в которой через запятую по порядку перечисляются все переменные, входящие в данное выражение.

◇ **4.2.2.** Например, если в выражении x^a считается, что обе буквы, x и a, являются переменными, то можно условиться, что переменная x будет первой, а переменная a – второй. Это будет фиксированный порядок переменных, который записывается строчкой

$$(x, a),$$

и он будет отличаться от другого возможного порядка,

$$(a, x),$$

где наоборот a считается первой переменной, а x – второй.

Точно так же определяется *порядок параметров* в числовом выражении.

- Пусть P – упорядоченный набор параметров (например, $P = (a_1, ..., a_m)$), а V – упорядоченный набор переменных (например, можно считать, что $V = (x_1, ..., x_n)$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$). Условимся говорить, что $\mathcal{H}$ есть *числовое выражение над упорядоченными наборами P и V параметров и переменных*, если в $\mathcal{H}$ нет никаких других параметров и переменных, кроме тех, что перечислены в P и V.

! **4.2.3.** При этом необязательно, чтобы все параметры из P и переменные из V действительно содержались в выражении $\mathcal{H}$, нужно только, чтобы в $\mathcal{H}$ не было "лишних" параметров и переменных, то есть таких, которые не содержатся в P и V. Например, выражение $\sqrt{2}$ вообще не содержит переменных и параметров, но можно говорить, что это выражение над набором переменных $V = (x, y, z)$ и параметров (a, b).

- Множество всех числовых выражений над упорядоченными наборами параметров $(a_1, ..., a_m)$ и переменных $(x_1, ..., x_n)$ мы будем обозначать символом $\mathtt{EX}(a_1, ..., a_m; x_1, ..., x_n)$.

◇ **4.2.4.** Запись

$$x^n \in \mathtt{EX}(n; x).$$

означает, что в выражении x^n буква n считается параметром, а буква x – переменной. Наоборот, запись

$$x^n \in \mathtt{EX}(x; n).$$

означает, что здесь x считается параметром, а n – переменной.

◇ **4.2.5.** Точно так же запись

$$a \cdot x^n \in \mathtt{EX}(a, n; x)$$

следует понимать, как соглашение, что в выражении $a \cdot x^n$ буква a считается первым параметром, буква n – вторым, а буква x – переменной. Наоборот,

$$a \cdot x^n \in \mathtt{EX}(n, a; x),$$

значит, что здесь n – первый параметр, a – второй, а x – переменная.

◇ **4.2.6.** Запись

$$a \cdot x^n + y \in \mathtt{EX}(a, n; x, y)$$

предполагает, что здесь a считается первым параметром, n – вторым, x – первой переменной, а y – второй. Если бы мы записали

$$a \cdot x^n + y \in \mathtt{EX}(a, n; y, x),$$

то это означало бы, что для нас, по-прежнему, a – первый параметр, n – второй, но первой переменной считается y, а второй x.

◇ **4.2.7.** В качестве упражнения полезно заметить, что ни при каком соглашении о параметрах и переменных (и ни при каком их упорядочении) не могут получиться включения

$$a \cdot x^n \in \mathtt{EX}(n; x),$$

$$a \cdot x^n + y \in \mathtt{EX}(n, a; x).$$

Семейство стандартных функций, определяемое числовым выражением. Если A – некое множество, и каждому его элементу $a \in A$ поставлена в соответствие некая функция $f_a : \mathbb{R}^n \hookrightarrow \mathbb{R}$, то такое отображение

$$a \mapsto f_a$$

называется *семейством функций*, и для такого объекта используется запись

$$\{f_a;\ a \in A\}.$$

В частном случае, когда A представляет собой некое подмножество в $\mathbb{R}^m$, каждый элемент $a \in A$ будет числовой строчкой $(a_1, ..., a_m)$, и семейство функций f_a тогда записывается так:

$$\{f_{a_1,...,a_m}; (a_1, ..., a_m) \in A\}.$$

Теорема 4.2.2. *Всякое числовое выражение $\mathcal{H}$ над упорядоченными наборами параметров $(a_1, ..., a_m)$ и переменных $(x_1, ..., x_n)$*

$$\mathcal{H} \in \mathtt{EX}(a_1, ..., a_m; x_1, ..., x_n)$$

определяет некое семейство функций $h_{a_1,...,a_m}$ по формуле

$$h_{a_1,...,a_m}(x_1, ..., x_n) = \mathcal{H}. \tag{4.2.134}$$

Доказательство. Смысл формулы (4.2.134) нуждается в прояснении, и мы проведем его индукцией по сложности выражения $\mathcal{H}$.

0) Пусть сначала $\mathcal{H}$ — выражение сложности 0, то есть не содержащее ни алгебраических операций, ни символов элементарных функций. Тогда

— либо $\mathcal{H}$ вообще не содержит переменных, и является просто собственным обозначением какого-то неотрицательного целого числа; тогда формула (4.2.134) задает функцию $h_{a_1,...,a_m} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, которая во всех точках равна (одному и тому же) числу, описываемому выражением $\mathcal{H}$;

— либо $\mathcal{H}$ представляет собой какую-то переменную из набора $(x_1, ..., x_n)$

$$\mathcal{H} = x_i, \qquad i = 1, ..., n;$$

в этом случае формула (4.2.134) интерпретируется как тождество

$$h_{a_1,...,a_m}(x_1, ..., x_n) = x_i, \qquad x \in \mathbb{R},$$

определяющее функцию $h_{a_1,...,a_m} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, которая в каждой точке $(x_1, ..., x_n)$ равна значению переменной x_i.

— либо $\mathcal{H}$ представляет собой какой-то параметр из набора $(a_1, ..., a_m)$

$$\mathcal{H} = a_j, \qquad i = 1, ..., n;$$

в этом случае формула (4.2.134) интерпретируется как тождество

$$h_{a_1,...,a_m}(x_1, ..., x_n) = a_j, \qquad x \in \mathbb{R},$$

определяющее функцию $h_{a_1,...,a_m}\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, которая в каждой точке $(x_1, ..., x_n)$ равна значению параметра a_i.

Понятно, что во всех трех случаях областью определения функции $h_{a_1,...,a_m}$ является пространство $\mathbb{R}^n$:

$$\mathsf{D}(h_{a_1,...,a_m}) = \mathbb{R}^n.$$

k) Предположим далее, что смысл формулы (4.2.134) объяснен для всех выражений над набором переменных $(x_1, ..., x_n)$ и параметров $(a_1, ..., a_m)$, имеющих сложность, меньшую некоторого числа $k \in \mathbb{N}$. Пусть $\mathcal{H}$ – выражение сложности k. По определению, среди операций, из которых составлено выражение $\mathcal{H}$ должна быть какая-то внешняя операция (то есть последняя по времени действия). Рассмотрим по очереди возможные варианты:

— если внешней операцией является сложение, то есть $\mathcal{H}$ имеет вид

$$\mathcal{H} = (\mathcal{F}) + (\mathcal{G}),$$

где $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$ – выражения сложности $< k$, то по предположению индукции $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$ определяют при заданном наборе параметров $(a_1, ..., a_m)$ некоторые функции

$$f_{a_1,...,a_m}(x_1, ..., x_n) = \mathcal{F}, \qquad g_{a_1,...,a_m}(x_1, ..., x_n) = \mathcal{G}, \tag{4.2.135}$$

и поэтому формула

$$h_{a_1,...,a_m}(x_1, ..., x_n) := = f_{a_1,...,a_m}(x_1, ..., x_n) + g_{a_1,...,a_m}(x_1, ..., x_n)$$

определяет функцию на общей области определения функций $f_{a_1,...,a_m}$ и $g_{a_1,...,a_m}$:

$$\mathsf{D}(h_{a_1,...,a_m}) := \mathsf{D}(f_{a_1,...,a_m}) \cap \mathsf{D}(g_{a_1,...,a_m});$$

— точно так же мы поступаем, если внешней операцией является вычитание или умножение:

$$\mathcal{H} = (\mathcal{F}) - (\mathcal{G}),$$
$$\mathcal{H} = (\mathcal{F}) \cdot (\mathcal{G}),$$

– тогда опять формулы (5.1.88) определяют некие функции, и после этого на их общей области определения $\mathsf{D}(h_{a_1,...,a_m}) := \mathsf{D}(f_{a_1,...,a_m}) \cap \mathsf{D}(g_{a_1,...,a_m})$ становится возможным определить функцию

$$h_{a_1,...,a_m}(x_1, ..., x_n) := = f_{a_1,...,a_m}(x_1, ..., x_n) - g_{a_1,...,a_m}(x_1, ..., x_n),$$

и функцию

$$h_{a_1,...,a_m}(x_1, ..., x_n) := = f_{a_1,...,a_m}(x_1, ..., x_n) \cdot g_{a_1,...,a_m}(x_1, ..., x_n);$$

— если внешней операцией является деление, то есть $\mathcal{H}$ имеет вид

$$\mathcal{H} = \frac{\mathcal{F}}{\mathcal{G}},$$

то формулы (5.1.88) определяют некие функции, и поэтому формула

$$h_{a_1,...,a_m}(x_1, ..., x_n) := \frac{f_{a_1,...,a_m}(x_1, ..., x_n)}{g_{a_1,...,a_m}(x_1, ..., x_n)}$$

определяет функцию на той части пересечении областей определения $f_{a_1,...,a_m}$ и $g_{a_1,...,a_m}$, где $g_{a_1,...,a_m}$ отлична от нуля

$$\mathsf{D}(h_{a_1,...,a_m}) := \\ = \{(x_1, ..., x_n) \in \mathsf{D}(f_{a_1,...,a_m}) \cap \mathsf{D}(g_{a_1,...,a_m}) : \\ g_{a_1,...,a_m}(x_1, ..., x_n) \ne 0\}, \quad (4.2.136)$$

— если внешней операцией является возведение в степень,

$$\mathcal{H} = (\mathcal{F})^{(\mathcal{G})},$$

то по предположению индукции формулы (5.1.88) определяют некие функции, и как следствие, формула

$$h_{a_1,...,a_m}(x_1, ..., x_n) := \\ = f_{a_1,...,a_m}(x_1, ..., x_n)^{g_{a_1,...,a_m}(x_1,...,x_n)}$$

определяет функцию на множестве[8]

$$\mathsf{D}(u) := \Big\{(x_1, ..., x_n) \in \mathsf{D}(f_{a_1,...,a_m}) \cap \mathsf{D}(g_{a_1,...,a_m}) : \\ f_{a_1,...,a_m}(x_1, ..., x_n) > 0 \vee \\ \vee \Big(f_{a_1,...,a_m}(x_1, ..., x_n) = 0 \ \& \\ \& \ g_{a_1,...,a_m}(x_1, ..., x_n) > 0\Big) \vee \\ \vee \Big(f_{a_1,...,a_m}(x_1, ..., x_n) < 0 \ \& \\ \& \ g_{a_1,...,a_m}(x_1, ..., x_n) \in \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{N}-1}\Big)\Big\},$$

— если внешней операцией является взятия логарифма,

$$\mathcal{H} = \log_{(\mathcal{F})}(\mathcal{G}),$$

то по предположению индукции формулы (5.1.88) определяют некие функции, и как следствие, формула

$$h_{a_1,...,a_m}(x_1, ..., x_n) := \\ = \log_{f_{a_1,...,a_m}(x_1,...,x_n)} g_{a_1,...,a_m}(x_1, ..., x_n)$$

определяет функцию на множестве[9]

$$\mathsf{D}(u) := \\ = \{(x_1, ..., x_n) \in \mathsf{D}(f_{a_1,...,a_m}) \cap \mathsf{D}(g_{a_1,...,a_m}) : \\ f_{a_1,...,a_m}(x_1, ..., x_n) > 0 \ \& \\ \& \ f_{a_1,...,a_m}(x_1, ..., x_n) \ne 1 \ \& \\ \& \ g_{a_1,...,a_m}(x_1, ..., x_n) > 0\},$$

— если внешней операцией является вычисление тангенса,

$$\mathcal{H} = \mathrm{tg}(\mathcal{F}),$$

то сложность $\mathcal{F}$ меньше k, и по предположению индукции формула

$$f_{a_1,...,a_m}(x_1, ..., x_n) = \mathcal{F} \qquad (4.2.137)$$

определяет некую функцию на подмножестве $\mathsf{D}(f_{a_1,...,a_m})$ в $\mathbb{R}^n$, и, как следствие, формула

$$h_{a_1,...,a_m}(x_1, ..., x_n) := \\ = \mathrm{tg}\, f_{a_1,...,a_m}(x_1, ..., x_n),$$

определяет функцию на множестве

$$\mathsf{D}(h_{a_1,...,a_m}) := \\ = \Big\{(x_1, ..., x_n) \in \mathsf{D}(f_{a_1,...,a_m}) : \\ f_{a_1,...,a_m}(x_1, ..., x_n) \notin \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\Big\};$$

— если внешней операцией является вычисление котангенса,

$$\mathcal{H} = \mathrm{ctg}(\mathcal{F}),$$

то сложность $\mathcal{F}$ меньше k, и по предположению индукции формула (4.2.137) определяет некую функцию на подмножестве $\mathsf{D}(f_{a_1,...,a_m})$ в $\mathbb{R}^n$, и, как следствие, формула

$$h_{a_1,...,a_m}(x_1, ..., x_n) := \\ = \mathrm{ctg}\, f_{a_1,...,a_m}(x_1, ..., x_n),$$

определяет функцию на множестве

$$\mathsf{D}(h_{a_1,...,a_m}) := \\ = \Big\{(x_1, ..., x_n) \in \mathsf{D}(f_{a_1,...,a_m}) : \\ f_{a_1,...,a_m}(x_1, ..., x_n) \notin \pi\mathbb{Z}\Big\};$$

— если внешней операцией является вычисление арксинуса,

$$\mathcal{H} = \arcsin(\mathcal{F}),$$

то сложность $\mathcal{F}$ меньше k, и по предположению индукции формула (4.2.137) определяет некую функцию на подмножестве $\mathsf{D}(f_{a_1,...,a_m})$ в $\mathbb{R}^n$, и, как следствие, формула

$$h_{a_1,...,a_m}(x_1, ..., x_n) := \\ = \arcsin f_{a_1,...,a_m}(x_1, ..., x_n),$$

определяет функцию на множестве

$$\mathsf{D}(h_{a_1,...,a_m}) := \\ = \Big\{(x_1, ..., x_n) \in \mathsf{D}(f_{a_1,...,a_m}) : \\ f_{a_1,...,a_m}(x_1, ..., x_n) \in [-1, 1]\Big\};$$

[8] См. объяснение на с. 278 по поводу условий существования выражения a^b.

[9] См. аналогичное объяснение на с. 288 по поводу $\log_a x$.

— если внешней операцией является вычисление арккосинуса,

$$\mathcal{H} = \arccos(\mathcal{F}),$$

то сложность $\mathcal{F}$ меньше k, и по предположению индукции формула (4.2.137) определяет некую функцию на подмножестве $\mathsf{D}(f_{a_1,...,a_m})$ в $\mathbb{R}^n$, и, как следствие, формула

$$h_{a_1,...,a_m}(x_1,...,x_n) := \\ = \arccos f_{a_1,...,a_m}(x_1,...,x_n),$$

определяет функцию на множестве

$$\mathsf{D}(h_{a_1,...,a_m}) := \\ = \Big\{(x_1,...,x_n) \in \mathsf{D}(f_{a_1,...,a_m}) : \\ f_{a_1,...,a_m}(x_1,...,x_n) \in [-1,1]\Big\};$$

— наконец, если внешней операцией является какая-нибудь из оставшихся тригонометрических функций, то есть $\mathcal{H}$ имеет вид

$$\sin(\mathcal{F}),\ \cos(\mathcal{F}),\ \operatorname{arctg}(\mathcal{F}),\ \operatorname{arcctg}(\mathcal{F})$$

то, как и в предыдущих случаях, формула (4.2.137) определяет некую функцию на подмножестве $\mathsf{D}(f_{a_1,...,a_m})$ в $\mathbb{R}^n$, и стандартные функции, порожденные этими выражениями, определяются формулами

$$h_{a_1,...,a_m}(x_1,...,x_n) := \\ = \sin f_{a_1,...,a_m}(x_1,...,x_n),$$
$$h_{a_1,...,a_m}(x_1,...,x_n) := \\ = \cos f_{a_1,...,a_m}(x_1,...,x_n),$$
$$h_{a_1,...,a_m}(x_1,...,x_n) := \\ = \operatorname{arctg} f_{a_1,...,a_m}(x_1,...,x_n),$$
$$h_{a_1,...,a_m}(x_1,...,x_n) := \\ = \operatorname{arcctg} f_{a_1,...,a_m}(x_1,...,x_n),$$

причем считается, что они определены в точности там же, где определена функция $f_{a_1,...,a_m}$:

$$\mathsf{D}(h_{a_1,...,a_m}) := \mathsf{D}(f_{a_1,...,a_m}).$$

□

- Семейство функций $f_{a_1,...,a_m} : \mathbb{R}^n \hookrightarrow \mathbb{R}$, $(a_1,...,a_m) \in \mathbb{R}^m$, называется *стандартным*, если оно определяется некоторым числовым выражением $\mathcal{F}$:

$$f_{a_1,...,a_m}(x_1,...,x_n) = \mathcal{F}.$$

Для всякого набора параметров $(a_1,...,a_m) \in \mathbb{R}^m$ область определения $\mathsf{D}(f_{a_1,...,a_m})$ функции $f_{a_1,...,a_m}$ называется *областью допустимых значений переменных выражения* $\mathcal{F}$ (при заданных значениях параметров $(a_1,...,a_m)$) и обозначается $\mathsf{D}_{a_1,...,a_m}(\mathcal{F})$:

$$\mathsf{D}_{a_1,...,a_m}(\mathcal{F}) := \mathsf{D}(f_{a_1,...,a_m}). \qquad (4.2.138)$$

В частном случае, когда параметры отсутствуют, используется обозначение

$$\mathsf{D}(\mathcal{F}) := \mathsf{D}(f),$$

и это множество называется *областью допустимых значений переменных* выражения $\mathcal{F}$ (без параметров).

- Числовое выражение $\mathcal{F}$ называется *непрерывным*, если оно составлено из выражений, определяющих непрерывные элементарные функции (см. определение на с.300).

Рассмотрим примеры.

◇ **4.2.8.** Выражение

$$\frac{1}{x}$$

определяет стандартную функцию одного переменного

$$u(x) = \frac{1}{x}.$$

В соответствии с правилом (4.2.136), ее областью определения является множество

$$\mathsf{D}\left(\frac{1}{x}\right) = \{x \in \mathbb{R} : \ x \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

◇ **4.2.9.** Выражение

$$\frac{1}{x+y},$$

при упорядочении переменных (x, y), определяет стандартную функцию двух переменных

$$f(x,y) = \frac{1}{x+y}$$

В соответствии с тем же правилом (4.2.136), ее областью определения является множество

$$\mathsf{D}\left(\frac{1}{x+y}\right) = \{(x,y) : \ x+y \neq 0\}.$$

◇ **4.2.10.** Выражения

$$\frac{1}{0}, \qquad \sqrt{x-1} + \sqrt{-1-x}$$

определяют пустую функцию, потому что область допустимых значений переменных у них пуста.

◇ **4.2.11.** Стандартная функция

$$u(\alpha, x) = x^\alpha.$$

(здесь выбрано упорядочение переменных α, x) описывается в аксиоме степеней на с.278. Ее область определения, или, что то же самое, область допустимых значений переменных в выражении x^α, описана на с.278:

$$\mathsf{D}(x^\alpha) = \Big\{(\alpha; x) \in \mathbb{R}^2 : \ x > 0 \ \vee \\ \vee \ (x = 0 \ \& \ \alpha \geqslant 0) \ \vee \\ \vee \ \Big(x < 0 \ \& \ \alpha \in \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{N}-1}\Big)\Big\}.$$

Эквивалентно ее можно описать формулой

$$\mathsf{D}(x^\alpha) = \Big\{(\alpha; x) \in \mathbb{R}^2 : \ \alpha \in \frac{\mathbb{Z}_+}{2\mathbb{N}-1} \ \vee \\ \vee \ \Big(\alpha \in -\frac{\mathbb{N}}{2\mathbb{N}-1} \ \& \ x \neq 0\Big) \ \vee \\ \vee \ \Big(\alpha \in (0, +\infty) \setminus \frac{\mathbb{N}}{2\mathbb{N}-1} \ \& \ x \geqslant 0\Big) \ \vee \\ \vee \ \alpha \in (-\infty, 0) \setminus \frac{-\mathbb{N}}{2\mathbb{N}-1} \ \& \ x > 0\Big\}.$$

◇ **4.2.12.** Стандартная функция

$$u(a, x) = \log_a x$$

(здесь выбрано упорядочение переменных a, x) описана на с.288. Ее область определения, или, что то же самое, область допустимых значений переменных в выражении $\log_a x$, описывается формулой

$$\mathsf{D}(\log_a x) = \{(a; x) \in \mathbb{R}^2 : \\ a \in (0; 1) \cup (1; +\infty) \ \& \ x > 0\}$$

◇ **4.2.13.** Для выражения

$$\frac{1}{\log_2 x}$$

область допустимых значений переменной определяется условиями

$$x > 0$$

(для того, чтобы существовал $\log_2 x$) и

$$\log_2 x \neq 0$$

(для того, чтобы можно было делить на $\log_2 x$). Поскольку эти условия должны быть выполнены оба сразу, их нужно объединить в систему, решая которую получим ответ:

$$\begin{Bmatrix} x > 0 \\ \log_2 x \neq 0 \end{Bmatrix} \iff \begin{Bmatrix} x > 0 \\ 0 < x \neq 1 \end{Bmatrix} \iff \\ \iff \quad x \in (0, 1) \cup (1, +\infty)$$

Множество $(0, 1) \cup (1, +\infty)$ будет областью допустимых значений переменной в этом выражении.

◇ **4.2.14.** Доказанное нами выше тождество (4.1.28),

$$|x| = \sqrt{x^2},$$

означает, между прочим, что функция *модуль*, определенная формулой (3.1.5), является стандартной.

◇ **4.2.15.** Функция *сигнум*, определяемая правилом

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

является стандартной, потому что совпадает со стандартной функцией

$$\operatorname{sgn} x = \frac{x}{|x|}$$

◇ **4.2.16.** Функции из семейства

$$f_\alpha(x) = \begin{cases} 1, & x > \alpha \\ 0, & x < \alpha \end{cases}$$

являются стандартными, в силу формулы

$$\begin{Bmatrix} 0, & x < \alpha \\ 1, & x > \alpha \end{Bmatrix} = \frac{1 + \operatorname{sgn}(x - \alpha)}{2} \tag{4.2.139}$$

◇ **4.2.17.** Функции из семейства

$$f_\alpha(x) = \begin{cases} 0, & x < \alpha \\ 1, & x > \alpha \end{cases}$$

являются стандартными, в силу формулы

$$\begin{Bmatrix} 1, & x < \alpha \\ 0, & x > \alpha \end{Bmatrix} = \frac{1 - \operatorname{sgn}(x - \alpha)}{2} \tag{4.2.140}$$

! **4.2.18.** В частности, для случая положительной и отрицательной полупрямой формулы выглядят так:

$$\begin{Bmatrix} 0, & x < 0 \\ 1, & x > 0 \end{Bmatrix} = \frac{1 + \operatorname{sgn} x}{2} \tag{4.2.141}$$

$$\begin{Bmatrix} 1, & x < 0 \\ 0, & x > 0 \end{Bmatrix} = \frac{1 - \operatorname{sgn} x}{2} \tag{4.2.142}$$

◇ **4.2.19.** Функции из семейства

$$f_{\alpha,\beta}(x) = \begin{cases} 1, & x \in (\alpha, \beta) \\ 0, & x \notin [\alpha, \beta] \end{cases}$$

являются стандартными, в силу формулы

$$\begin{Bmatrix} 1, & x \in (\alpha, \beta) \\ 0, & x \notin [\alpha, \beta] \end{Bmatrix} = \\ = \frac{1 + \operatorname{sgn}(x - \alpha)}{2} - \frac{1 + \operatorname{sgn}(x - \beta)}{2} \tag{4.2.143}$$

.

$\diamond$ **4.2.20.** Всякая функция вида

$$f_{\alpha,\beta}(x) = 1, \qquad x \in (\alpha, \beta),$$

(то есть определенная на заданном интервале (α, β) и равная на нем единице) является стандартной, потому что получается из какой-то функции предыдущего примера возведением в степень -1. Для бесконечных интервалов формулы выглядят так:

$$\{1, \quad x > \alpha\} = \frac{2}{1 + \operatorname{sgn}(x - \alpha)}, \qquad (4.2.144)$$

$$\{1, \quad x < \alpha\} = \frac{2}{1 - \operatorname{sgn}(x - \alpha)} \qquad (4.2.145)$$

в частности, для случая положительной и отрицательной полупрямой,

$$\{1, \quad x > 0\} = \frac{2}{1 + \operatorname{sgn} x} \qquad (4.2.146)$$

$$\{1, \quad x < 0\} = \frac{2}{1 - \operatorname{sgn} x} \qquad (4.2.147)$$

А, для конечных интервалов — так:

$$\{1, \quad x \in (\alpha, \beta)\} = \\ = \left(\frac{1 + \operatorname{sgn}(x - \alpha)}{2} - \frac{1 + \operatorname{sgn}(x - \beta)}{2} \right)^{-1} \qquad (4.2.148)$$

$\diamond$ **4.2.21.** Из предыдущего примера следует, что если нам дана некая стандартная функция f, то умножая ее на стандартную функцию вида (4.2.148), где интервал (α, β) лежит в области определения f, мы получаем стандартную функцию, определенную строго на (α, β), и совпадающую с f на этом интервале:

$$\{f(x), \quad x \in (\alpha, \beta)\} = f(x) \cdot \{1, \quad x \in (\alpha, \beta)\}$$

Таким образом, *ограничение стандартной функции на любой интервал (возможно, бесконечный) также будет стандартной функцией.*

В частности, функция

$$\{\tfrac{1}{x}, \quad x > 0\} = \frac{1}{x} \cdot \{1, \quad x > 0\}$$

тоже является стандартной.

$\triangleright$ **4.2.22.** Проверьте, что для любых стандартных функций f_1,...,f_k и любого набора непересекающихся интервалов (α_1, β_1),...,(α_k, β_k), функция, определенная правилом

$$f(x) = \begin{Bmatrix} f_1(x), & x \in (\alpha_1, \beta_1) \\ ... & \\ f_k(x), & x \in (\alpha_k, \beta_k) \end{Bmatrix}$$

также будет стандартной.

Приведенные числовые выражения и приведенные стандартные функции.

- Условимся называть числовое выражение $\mathcal{H}$ *приведенным*, если в его построении не участвовали операции перехода от $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$ к $(\mathcal{F})^{(\mathcal{G})}$ или $\log_{\mathcal{F}} \mathcal{G}$. Соответствующее семейство стандартных функций

$$h_{a_1,...,a_m}(x_1, ..., x_n) = \mathcal{H}$$

мы также будем называть *приведенным.*

$\diamond$ **4.2.23.** Выражение x^x не является приведенным, как и функция

$$h(x) = x^x.$$

Для положительных значений переменной x эту функцию можно представить как приведенную, потому что функция

$$w(x) = e^{x \cdot \ln x}$$

(определенная приведенным выражением $e^{x \cdot \ln x}$) будет совпадать с h при $x > 0$:

$$h(x) = x^x = e^{\ln x^x} = e^{x \cdot \ln x} = w(x).$$

Но функции h и w формально различны, потому что у них области определения разные: функция h, например, определена в точке -1, в отличие от функции w:

$$h(-1) = (-1)^{-1} = \frac{1}{-1} = -1.$$

- Каждому числовому выражению $\mathcal{H}$ можно поставить в соответствие некое новое числовое выражение $\hat{\mathcal{H}}$, называемое *приведением числового выражения* $\mathcal{H}$, которое получается заменой в $\mathcal{H}$ всех фрагментов вида $(\mathcal{F})^{(\mathcal{G})}$ на фрагменты вида $e^{(\mathcal{G}) \cdot (\mathcal{F})}$, а фрагментов вида $\log_{\mathcal{F}} \mathcal{G}$ на фрагменты $\frac{\ln \mathcal{F}}{\ln \mathcal{G}}$. Получающееся при этом семейство стандартных функций $\hat{h}$, порожденное выражением $\hat{\mathcal{H}}$,

$$\hat{h}_{a_1,...,a_m}(x_1, ..., x_n) = \hat{\mathcal{H}}$$

называется *приведением семейства* h, порожденного выражением $\mathcal{H}$.

$\diamond$ **4.2.24.** В примере 4.2.23 приведением выражения x^x является выражение $e^{x \cdot \ln x}$,

$$\widehat{x^x} = e^{x \cdot \ln x}.$$

Соответственно, приведением функции h является функция w:

$$\hat{h} = w.$$

Понятно, что здесь h не совпадает со своим приведением.

◇ **4.2.25.** Бывает все же так, что при приведении стандартная функция не меняется. Например, функция

$$h(x) = \log_x \sin x$$

при приведении превращается в функцию

$$\hat{h}(x) = \frac{\ln \sin x}{\ln x},$$

которая имеет ту же область опреджеления, что и h, и совпадает с h во всех точках этого множества.

(c) Стандартные функции в пройденных темах

Добавление стандартных функций к общему списку объектов, рассматриваемых в математическом анализе, резко расширяет возможности иллюстрировать идеи этой дисциплины. В этом параграфе мы приведем серию таких иллюстраций к двум основным пройденным на этот момент темам: последовательности и пределы. Одновременно здесь будут доказаны некоторые утверждения, которые понадобятся затем в иллюстративном материале последующих глав, в частности формулы первого и второго замечательных пределов.

Числовые последовательности, определяемые стандартными функциями

Примеры последовательностей, рассматривавшиеся в главе 3, полезно дополнить следующими, определяемыми с помощью стандартных функций.

Предел последовательности.

⊳⊳ **4.2.26.** Какими должны быть величины α, β, чтобы почти все элементы последовательности x_n лежали в интервале $(\alpha; \beta)$?

1) $x_n = \cos \frac{2\pi n}{3}$
(Ответ: $\alpha < -\frac{1}{2}$, $\beta > 1$)
2) $x_n = \sin \frac{2\pi n}{3}$
(Ответ: $\alpha < -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\beta > \frac{\sqrt{3}}{2}$)
3) $x_n = \cos \frac{\pi n}{3}$
(Ответ: $\alpha < -1$, $\beta > 1$)
4) $x_n = \sin \frac{\pi n}{3}$
(Ответ: $\alpha < -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\beta > \frac{\sqrt{3}}{2}$)

⊳⊳ **4.2.27.** Доказать что

1) $0 \ne \lim_{n\to\infty} \sin \frac{\pi n}{3}$

⊳⊳ **4.2.28.** Доказать что

1) $\lim_{n\to\infty} \sqrt{n} = +\infty$ (здесь расстояние между соседними точками последовательности убывает);
2) $\lim_{n\to\infty} \log_2 n = +\infty$ (здесь тоже расстояние между соседними точками последовательности убывает);
3) $\lim_{n\to\infty} \log_3 \frac{1}{n} = -\infty$;
4) $\lim_{n\to\infty} (-n^{\frac{2}{3}}) = -\infty$;
5) $\lim_{n\to\infty} (-1)^n \cdot n = \infty$.

⊳ **4.2.29.** Какие из последовательностей являются бесконечно малыми, а какие – бесконечно большими?

1) $x_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$
2) $x_n = \sqrt{n}$

◇ **4.2.30.** Проверьте, что следующие последовательности ограничены:

$$x_n = \sin n,\ x_n = \cos n,\ x_n = \operatorname{arctg} n.$$

Какие из них сходятся (то есть имеют конечный предел)?

⊳⊳ **4.2.31.** Найти пределы

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin n}{n}, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{n+5}{n+\sin n}, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{n + \operatorname{arctg} n}{n - \cos n},$$

Последовательности, заданные рекуррентно.

◇ **4.2.32.** Покажем, что последовательность, заданная рекуррентно

$$x_1 = 0, \quad x_{n+1} = \sqrt{6 + x_n}$$

сходится, и найдем ее предел.

1. Вычислим сначала несколько первых элементов последовательности $\{x_n\}$, и нарисуем картинку:

2. Заметим, что все числа $\{x_n\}$ неотрицательны (это можно доказать отдельно по индукции):

$$x_n \geqslant 0$$

3. Из картинки видно, что на первых нескольких элементах $\{x_n\}$ наша последовательность неубывает. Попробуем доказать, что она неубывает всегда:

$$x_n \leqslant x_{n+1} \tag{4.2.149}$$

Поймем сначала, что означает это неравенство:

$$x_n \leqslant x_{n+1} \quad \Leftrightarrow \quad x_n \leqslant \sqrt{6+x_n} \quad \overset{\text{используем, что } x_n \geqslant 0}{\Leftrightarrow}$$
$$\Leftrightarrow \quad x_n^2 \leqslant 6 + x_n \quad \Leftrightarrow \quad x_n^2 - x_n - 6 \leqslant 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \underbrace{(x_n+2)(x_n-3)\leqslant 0}_{\substack{\uparrow\\ \text{делим на } x_n+2;\\ \text{и, поскольку } x_n+2>0\\ \text{знак неравенства не меняется}}} \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad x_n-3\leqslant 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_n\leqslant 3$$

Теперь докажем, последнее неравенство:

$$x_n\leqslant 3 \qquad (4.2.150)$$

Это делается математической индукцией.

a) Сначала проверяем наше неравенство при $n=1$:

$$x_1=0\leqslant 3$$

b) Предполагаем, что оно верно при $n=k$:

$$x_k\leqslant 3 \qquad (4.2.151)$$

c) Доказываем, что тогда оно будет верно при $n=k+1$.

$$x_{k+1}\leqslant 3 \qquad (4.2.152)$$

Действительно,

$$x_{k+1}\leqslant 3 \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{6+x_k}\leqslant 3 \quad \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \quad 6+x_k\leqslant 9 \quad \Leftrightarrow \quad x_k\leqslant 3$$

а последнее неравенство выполняется в силу (4.2.151). Таким образом, получилось что из (4.2.151) следует (4.2.152), а это нам и нужно было.

Итак, мы доказали (4.2.150), а значит и равносильное ему условие (4.2.149). Эти неравенства означают, что $\{x_n\}$ неубывает и ограничена сверху. Значит, по теореме Вейерштрасса 3.2.11 она имеет предел. Обозначим его буквой c:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = c$$

и заметим, что $c\geqslant 0$, поскольку $x_n\geqslant 0$ (по теореме 3.2.8 о переходе к пределу в неравенстве). Тогда из формулы $x_{n+1}=\sqrt{6+x_n}$ мы получаем

$$(x_{n+1})^2=6+x_n$$

откуда

$$c^2=\lim_{n\to\infty}(x_{n+1})^2=\lim_{n\to\infty}(6+x_n)=6+c$$

То есть c удовлетворяет квадратному уравнению

$$c^2=6+c$$

решая которое (с учетом, что $c\geqslant 0$), мы получаем $c=3$.

Ответ: $\lim_{n\to\infty} x_n=3$

⊳⊳ **4.2.33.** Докажите, что последовательность, заданная рекуррентно сходится, и найдите ее предел:

1) $x_1=1$, $x_{n+1}=\sqrt{x_n(6-x_n)}$;
2) $x_1=3$, $x_{n+1}=\frac{4x_n}{2+\sqrt{2x_n^2-4}}$;
3) $x_1=9$, $x_{n+1}=2\sqrt{x_n}$;
4) $x_1=1$, $x_{n+1}=3\sqrt{x_n}$;
5) $x_{n+1}=\frac{10x_n}{5+\sqrt{2x_n^2-25}}$, $x_1=6$
6) $x_{n+1}=\frac{x_n 3\sqrt{2}}{\sqrt{9+x_n^4}}$, $x_1=1$.

Подпоследовательности.

⊳⊳ **4.2.34.** Является ли данная последовательность $\{y_k\}$ подпоследовательностью последовательности $\{x_n\}$? (Если да, то указать соответствующую последовательность индексов $\{n_k\}$.)

1) $x_n=\sqrt{n}$, $y_k=k$

⊳⊳ **4.2.35.** Для данной последовательности $\{x_n\}$ укажите какую-нибудь сходящуюся подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$, если она существует.

1) $x_n=\cos\frac{2\pi n}{3}$

⊳⊳ **4.2.36.** Проверьте с помощью критерия Коши сходимость последовательностей:

1) $x_n=\sin\frac{\pi n}{4}$;
2) $x_n=\cos\frac{\pi n}{7}$;
3) $x_n=\operatorname{arctg}(-1)^n$.

Функции, заданные как пределы последовательностей. Следующая серия упражнений может быть полезна в теме “предел последовательности”, хотя подробно эти примеры мы разбираем ниже в теме “поточечная сходимость” (начиная со страницы 533).

⊳⊳ **4.2.37.** Постройте графики следующих функций:

1) $f(x)=\lim_{n\to\infty} x^n$
2) $f(x)=\lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+x^n}$
3) $f(x)=\lim_{n\to\infty} x^n-x^{n+1}$;
4) $f(x)=\lim_{n\to\infty} \frac{x^{-n}-1}{x^{-n}+1}$;
5) $f(x)=\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{1+x^{2n}}$
6) $f(x)=\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x^2+\frac{1}{n^2}}$.
7) $f(x)=\lim_{n\to\infty} n^x$
8) $f(x)=\lim_{n\to\infty} \frac{n^x-n^{-x}}{n^x+n^{-x}}$
9) $f(x)=\lim_{n\to\infty} \frac{x^3n^x-n^{-x}}{n^x+n^{-x}}$
10) $f(x)=\lim_{n\to\infty} \arcsin\frac{n^x-1}{n^x+1}$.
11) $f(x)=\lim_{n\to\infty} \cos^{2n} x$;
12) $f(x)=\lim_{n\to\infty}(\sin^{2n} x-\cos^{2n} x)$;
13) $f(x)=\lim_{n\to\infty} \frac{x}{1+(2\sin x)^{2n}}$;
14) $f(x)=\lim_{n\to\infty} \operatorname{arctg}(nx)$;
15) $f(x)=\lim_{n\to\infty} x\cdot\operatorname{arctg}(n\cdot\operatorname{ctg} x)$;
16) $f(x)=\lim_{n\to\infty} x^2\cdot\operatorname{arctg}(x^{2n})$;

17) $f(x) = \lim_{n\to\infty} \operatorname{arctg} \frac{x}{n}$;
18) $f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{-nx}-2^{nx}}{2^{-nx}+2^{nx}}$;
19) $f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{x+x^2 2^{nx}}{1+2^{nx}}$;
20) $f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{x2^{nx}-3^{nx}}{2^{nx}+3^{nx}}$;
21) $f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{n\sin x}-2^{-n\sin x}\cos x}{2^{n\sin x}+2^{-n\sin x}}$;
22) $f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{n\cos x}-2^{-n\cos x}\sin x}{2^{n\cos x}+2^{-n\cos x}}$;
23) $f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{\log_2(1+2^{nx})}{\log_2(1+2^{n})}$.

Вычисление пределов со стандартными функциями

Рассмотрим теперь вопрос, как вычисляются пределы стандартных функций:

$$\lim_{x\to a} G(x) = ?$$

Существование предела. Прежде всего, конечно, нужно понимать, что предел существует не всегда.

◇ **4.2.38.** Покажем что функция $f(x) = \sin\frac{1}{x}$ не имеет предела в точке $x = 0$:

$$\nexists \lim_{x\to 0} \sin\frac{1}{x}$$

Возьмем сначала последовательность аргументов

$$x_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2\pi n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

тогда мы получим

$$f(x_n) = \sin\frac{1}{x_n} = \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right) = 1 \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$$

С другой стороны, если взять

$$x_n = \frac{1}{-\frac{\pi}{2} + 2\pi n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

то мы получим

$$f(x_n) = \sin\frac{1}{x_n} = \sin\left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right) = -1 \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} -1$$

Таким образом, мы получаем, что если взять одну последовательность аргументов $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, то соотвествующая последовательность $f(x_n)$ будет стремиться к одному числу ($A = 1$), а если взять другую последовательность $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, то $f(x_n)$ будет стремиться к другому числу ($A = -1$).

Это означает, что функция $f(x) = \sin\frac{1}{x}$ не имеет предела в точке $x = 0$, потому что иначе $f(x_n)$ должно было бы стремиться к этому конкретному пределу A, независимо от того, какую берешь последовательность $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

Принцип подстановки. Во-вторых, нужно помнить, что если функция непрерывна, то по критерию непрерывности 3.4.7 ее предел равен ее значению в точке:

Теорема 4.2.3 (принцип подстановки). *Пусть G – непрерывная стандартная функция, определенная в некоторой окрестности точки a. Тогда предел функции G в точке $x = a$ существует и равен ее значению в этой точке:*

$$\exists \lim_{x\to a} G(x) = G(a).$$

Рассмотрим примеры.

◇ **4.2.39.** Вычислить предел

$$\lim_{x\to 4} \frac{\sqrt{x}+x^2}{1+x}$$

Решение:

$$\lim_{x\to 4} \frac{\sqrt{x}+x^2}{1+x} = (\text{подстановка}) = \\ = \frac{\sqrt{4}+4^2}{1+4} = \frac{2+16}{5} = \frac{18}{5}$$

Число $\frac{18}{5}$ и будет ответом.

◇ **4.2.40.** Найти предел

$$\lim_{x\to 1}(x^2 - 2x + 3)$$

Решение:

$$\lim_{x\to 1}(x^2 - 2x + 3) = (\text{подстановка}) = \\ = 1^2 - 2\cdot 1 + 3 = 1 - 2 + 3 = 2$$

▷▷ **4.2.41.** Вычислите пределы:

1) $\lim_{x\to\pi/2} \sin x$
2) $\lim_{x\to 0} \operatorname{arctg} x - 1 + x^3$
3) $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x}+1}{\arcsin x - 4}$
4) $\lim_{x\to\sqrt{3}} \frac{x^2-3}{x^4+x^2+1}$,

Вычисление упрощением. Обсудим теперь ситуацию, когда, по-прежнему, требуется найти предел

$$\lim_{x\to a} G(x) = ?$$

но функция $G(x)$ не определена в точке $x = a$ (хотя, например, определена слева и справа от a). Тогда говорят, что имеется так называемая *неопределенность*, и алгоритм действий в таких случаях состоит в том, чтобы подобрать новую функцию $F(x)$, которая совпадала бы с $G(x)$ вблизи точки a, и при этом была бы непрерывной в точке a.

Зрительно изобразить это руководство можно так:

$$\lim_{x\to a} G(x) = \dots$$

$$\dots = \begin{pmatrix} \text{подбираем функцию } F(x) \\ \text{совпадающую с } G(x) \\ \text{вблизи точки } a \\ \text{и непрерывную в точке } a \end{pmatrix} = \dots$$

$$\dots = \lim_{x\to a} F(x) = F(a)$$

Проиллюстрируем это на примерах.

◇ **4.2.42 (упрощение + сокращение).** Найти предел

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{1-x} - \frac{2}{1-x^2}\right)$$

При подстановке возникает неопределенность:

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{1-x} - \frac{2}{1-x^2}\right) = \frac{1}{0} - \frac{2}{0} = ?$$

Значит, нужны преобразования. Попробуем упростить наше выражение:

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{1-x} - \frac{2}{1-x^2}\right) =$$

$$= \lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{1-x} - \frac{2}{(1-x)(1+x)}\right) =$$

$$= \lim_{x\to 1}\frac{1+x-2}{(1-x)(1+x)} = \lim_{x\to 1}\frac{x-1}{(1-x)(1+x)} =$$

$$= \lim_{x\to 1}\frac{-1}{1+x} = \lim_{x\to 1}\frac{-1}{1+x} =$$

$$= (\text{подстановка}) = \frac{-1}{1+1} = -\frac{1}{2}$$

◇ **4.2.43 (разложение на множители).** Найти предел

$$\lim_{x\to -1}\frac{x^2-1}{x^2-x-2}$$

Здесь возникает неопределенность:

$$\lim_{x\to -1}\frac{x^2-1}{x^2-x-2} = \frac{1-1}{1+1-2} = \frac{0}{0} = ?$$

Это означает, что необходимы преобразования. В данном случае они состоят в том, что числитель и знаменатель нужно разложить на множители, после чего сократить дробь:

$$\lim_{x\to -1}\frac{x^2-1}{x^2-x-2} = \lim_{x\to -1}\frac{(x-1)(x+1)}{(x-2)(x+1)} =$$

$$= \lim_{x\to -1}\frac{x-1}{x-2} = (\text{снова подстановка}) = \frac{-1-1}{-1-2} = \frac{2}{3}$$

◇ **4.2.44 (использование сопряженного радикала).** Вычислить предел

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$$

При подстановке получается неопределенность:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x} = \frac{0}{0}$$

Поэтому нужны какие-то преобразования. В примерах с корнями, как этот, в качестве такого преобразования можно использовать *домножение на сопряженный радикал.*

Под этим понимается вот что. В числителе имеется иррациональное выражение $\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}$, называемое *радикалом.* Подберем такое выражение, которое при умножении на него "уничтожает корни". Оно называется *сопряженным радикалом*, и в нашем случае имеет вид $\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}$. Помножим числитель и знаменатель дроби на сопряженный радикал:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x})\cdot(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}{x\cdot(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{1+x}\right)^2-\left(\sqrt{1-x}\right)^2}{x\cdot(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{(1+x)-(1-x)}{x\cdot(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{2x}{x\cdot(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{2}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}} = (\text{подстановка}) =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{1+0}+\sqrt{1-0}} = \frac{2}{1+1} = 1$$

В следующем примере снова используется сопряженный радикал.

◇ **4.2.45.** Вычислить предел

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+x^2}-1}{x^2}$$

При подстановке имеем неопределенность:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+x^2}-1}{x^2} = \frac{\sqrt[3]{1+0}-1}{0} = \frac{0}{0}$$

Значит нужны преобразования, которые здесь опять состоят в умножении на сопряженный радикал. В нашем примере радикалом является выражение $\sqrt[3]{1+x^2}-1$. Сопряженный же радикал – то есть выражение, которое при умножении на наш радикал "сокращает корни" – имеет вид $\left(\sqrt[3]{1+x^2}\right)^2 + \sqrt[3]{1+x^2} + 1$. Умножим на него числитель и знаменатель.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+x^2}-1}{x^2} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt[3]{1+x^2}-1\right)\left(\left(\sqrt[3]{1+x^2}\right)^2+\sqrt[3]{1+x^2}+1\right)}{x^2\left(\left(\sqrt[3]{1+x^2}\right)^2+\sqrt[3]{1+x^2}+1\right)} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{1+x^2-1}{x^2\left(\left(\sqrt[3]{1+x^2}\right)^2+\sqrt[3]{1+x^2}+1\right)} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x^2\left(\left(\sqrt[3]{1+x^2}\right)^2+\sqrt[3]{1+x^2}+1\right)} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1}{\left(\sqrt[3]{1+x^2}\right)^2 + \sqrt[3]{1+x^2}+1} =$$

$$= (\text{подстановка}) = \frac{1}{\left(\sqrt[3]{1+0}\right)^2 + \sqrt[3]{1+0}+1} =$$

$$= \frac{1}{1+1+1} = \frac{1}{3}$$

▷▷ **4.2.46.** Найти пределы

1) $\lim_{x\to 2} \frac{x^2-5x+6}{x^2-2x}$,

2) $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x^2}$

3) $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x^2}-1}{\sqrt{16+x^2}-4}$

4) $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}{x}$

5) $\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x}-1}$

6) $\lim_{x\to -8} \frac{\sqrt{1-x}-3}{2+\sqrt[3]{x}}$

Замена переменной под знаком предела. В следующих примерах используется теорема 3.4.9 о замене переменной под знаком предела.

◇ **4.2.47.** Найти предел

$$\lim_{x\to 16} \frac{\sqrt{x}-4}{\sqrt{x}-\sqrt[4]{x}-2}$$

Решение:

$$\lim_{x\to 16} \frac{\sqrt{x}-4}{\sqrt{x}-\sqrt[4]{x}-2} = \left| \begin{array}{c} \sqrt[4]{x}=y,\ x=y^4 \\ y \underset{x\to 16}{\longrightarrow} 4 \\ y\ne 4 \text{ при } x\ne 16 \end{array} \right| =$$

$$= \lim_{y\to 4} \frac{y^2-4}{y^2-y-2} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{y\to 4} \frac{(y-2)(y+2)}{(y-2)(y+1)} =$$

$$= \lim_{y\to 4} \frac{y+2}{y+1} = \frac{4+2}{4+1} = \frac{6}{5}$$

◇ **4.2.48.** Найти предел

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x}-1}$$

Решение:

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x}-1} = \left| \begin{array}{c} \sqrt[6]{x}=y,\ x=y^6 \\ y \underset{x\to 1}{\longrightarrow} 1 \\ y\ne 1 \text{ при } x\ne 1 \end{array} \right| =$$

$$= \lim_{y\to 1} \frac{y^3-1}{y^2-1} = \left(\frac{0}{0}\right) =$$

$$= \lim_{y\to 1} \frac{(y-1)(y^2+y+1)}{(y-1)(y+1)} = \lim_{y\to 1} \frac{y^2+y+1}{y+1} =$$

$$= \frac{1+1+1}{1+1} = \frac{3}{2}$$

◇ **4.2.49.** Найти предел

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos^2 x-1}{\cos^2 x+2\cos x-3}$$

Решение:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos^2 x-1}{\cos^2 x+2\cos x-3} = \left| \begin{array}{c} \cos x = y, \\ y \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 1 \end{array} \right| =$$

$$= \lim_{y\to 1} \frac{y^2-1}{y^2+2y-3} = \lim_{y\to 1} \frac{(y-1)(y+1)}{(y-1)(y+3)} =$$

$$= \lim_{y\to 1} \frac{y+1}{y+3} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

◇ **4.2.50.** Вычислить предел

$$\lim_{x\to +\infty} \left(\sqrt{1+x^2}-x\right)$$

Решение:

$$\lim_{x\to +\infty} \left(\sqrt{1+x^2}-x\right) = \left| \begin{array}{c} x=\frac{1}{y},\ y=\frac{1}{x} \\ y \underset{x\to +\infty}{\longrightarrow} 0+0 \end{array} \right| =$$

$$= \lim_{y\to 0+0} \left(\sqrt{1+\frac{1}{y^2}}-\frac{1}{y}\right) =$$

$$= \lim_{y\to 0+0} \left(\frac{1}{\sqrt{y^2}}\sqrt{y^2+1}-\frac{1}{y}\right) =$$

$$= \left(\begin{array}{c} \text{используем тождество} \\ \sqrt{y^2}=|y| \end{array}\right) =$$

$$= \lim_{y\to 0+0} \left(\frac{1}{|y|}\sqrt{y^2+1}-\frac{1}{y}\right) =$$

$$= \left(\begin{array}{c} y\to 0+0, \\ \text{значит } y>0, \\ \text{поэтому } |y|=y \end{array}\right) =$$

$$= \lim_{y\to 0+0} \left(\frac{1}{y}\sqrt{y^2+1}-\frac{1}{y}\right) = \lim_{y\to 0+0} \frac{\sqrt{y^2+1}-1}{y} =$$

$$= \lim_{y\to 0+0} \frac{(\sqrt{y^2+1}-1)(\sqrt{y^2+1}+1)}{y(\sqrt{y^2+1}+1)} =$$

$$= \lim_{y\to 0+0} \frac{y^2+1-1}{y(\sqrt{y^2+1}+1)} = \lim_{y\to 0+0} \frac{y^2}{y(\sqrt{y^2+1}+1)} =$$

$$= \lim_{y\to 0+0} \frac{y}{\sqrt{y^2+1}+1} =$$

$$= \lim_{y\to 0+0} \frac{y}{\sqrt{y^2+1}+1} = (\text{подстановка}) =$$

$$= \frac{0}{\sqrt{0+1}+1} = 0$$

◇ **4.2.51.** Вычислить предел

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+5}}$$

Решение:

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+5}} = \left| \begin{array}{c} x=\frac{1}{y},\ y=\frac{1}{x} \\ y \underset{x\to -\infty}{\longrightarrow} 0-0 \end{array} \right| =$$

$$= \lim_{y\to 0-0} \frac{\frac{1}{y}}{\sqrt{\frac{1}{y^2}+5}} = \lim_{y\to 0-0} \frac{\frac{1}{y}}{\sqrt{\frac{1}{y^2}+5}} =$$

$$= \lim_{y\to 0-0} \frac{\frac{1}{y}}{\frac{1}{\sqrt{y^2}}\sqrt{1+5y^2}} = \left(\begin{array}{c} \text{используем} \\ \text{тождество} \\ \sqrt{y^2}=|y| \end{array}\right) =$$

$$= \lim_{y\to 0-0} \frac{\frac{1}{y}}{\frac{1}{|y|}\sqrt{1+5y^2}} = \left(\begin{array}{c} y\to 0-0, \\ \text{значит } y<0, \\ \text{поэтому } |y| = -y \end{array} \right) =$$

$$= \lim_{y\to 0-0} \frac{\frac{1}{y}}{\frac{1}{-y}\sqrt{1+5y^2}} = \lim_{y\to 0-0} \frac{1}{-\sqrt{1+5y^2}} =$$

$$= \frac{1}{-\sqrt{1+5\cdot 0}} = -1$$

▷▷ **4.2.52.** Найти пределы

1) $\lim_{x\to -\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 x - \sin x - 2}{\sin^3 x + 1}$
2) $\lim_{x\to +\infty} \frac{2^{3x+2} - 3\cdot 2^x}{1-2^{3x+1}}$
3) $\lim_{x\to -\infty} \frac{2^{3x+2} - 3\cdot 2^x}{1-2^{3x+1}}$
4) $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+\sin x}-1}{\sin x}$
5) $\lim_{x\to +\infty} \frac{\sqrt{1+9^x}}{1+3^x}$
6) $\lim_{x\to -\infty} \frac{\sqrt{1+9^x}}{1+3^x}$
7) $\lim_{x\to 0} \frac{16^x-1}{8^x-1}$
8) $\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1}\right)$
9) $\lim_{x\to\infty} x(\sqrt{x^2+1} - x)$
10) $\lim_{x\to\infty} \frac{2x^2-3x-4}{\sqrt{x^4+1}}$
11) $\lim_{x\to +\infty} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}$

Первый замечательный предел. При вычислении пределов с тригонометрическими функциями оказывается полезным следующий факт.

Теорема 4.2.4.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \qquad (4.2.153)$$

- Это равенство называется *первым замечательным пределом.*

Доказательство. Пусть сначала

$$x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0, \qquad x_n > 0$$

Почти все x_n лежат в интервале $(0; \frac{\pi}{2})$, поэтому для них из тройного неравенства (4.1.70) мы получаем цепочку:

$$0 < \sin x_n < x_n < \operatorname{tg} x_n$$

$$\Downarrow \left(\text{делим на } \sin x_n\right)$$

$$1 < \frac{x_n}{\sin x_n} < \frac{1}{\cos x_n}$$

$$\Downarrow \left(\text{возводим в степень } -1\right)$$

$$1 > \frac{\sin x_n}{x_n} > \underbrace{\cos x_n}_{\substack{\downarrow \\ \cos 0 \\ \| \\ 1}} \quad (\cos - \text{непрерывная функция})$$

$$\Downarrow \left(\text{теорема 3.2.10}\right)$$

$$\frac{\sin x_n}{x_n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1.$$

Это верно для всякой последовательности $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, $x_n > 0$, значит

$$\lim_{x\to +0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Отсюда уже следует, что

$$\lim_{x\to -0} \frac{\sin x}{x} = \left| \begin{array}{l} t = -x \\ t\to +0 \end{array} \right| = \lim_{t\to +0} \frac{\sin(-t)}{-t} =$$

$$= \lim_{t\to +0} \frac{-\sin t}{-t} = \lim_{t\to +0} \frac{\sin t}{t} = 1$$

Вместе эти равенства дают (4.2.153). □

Обсудим теперь применения первого замечательного предела.

◇ **4.2.53.** Найти предел

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 2x}{x}$$

Здесь можно сделать замену переменных, после чего наш предел сведется к первому замечательному:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 2x}{x} = \left| \begin{array}{c} 2x = y,\ x = \frac{y}{2} \\ y \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0 \\ y \ne 0 \text{ при } x\ne 0 \end{array} \right| =$$

$$= \lim_{y\to 0} \frac{2\sin y}{y} = 2\lim_{y\to 0} \frac{\sin y}{y} = 2\cdot 1 = 2$$

◇ **4.2.54.**

$$\lim_{x\to\infty} x\cdot \sin\frac{1}{x} = \left| \begin{array}{c} \frac{1}{x} = y,\ x = \frac{1}{y} \\ y \underset{x\to\infty}{\longrightarrow} 0 \\ y\ne 0 \text{ при любом } x \end{array} \right| =$$

$$= \lim_{y\to 0} \frac{\sin y}{y} = 1$$

◇ **4.2.55.**

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x\cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{1}{\cos x} =$$

$$= 1\cdot 1 = 1$$

◇ **4.2.56.**

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2} = 2\lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{x}\right)^2 =$$

$$= 2\left(\lim_{x\to 0} \frac{\sin\frac{x}{2}}{x}\right)^2 = \left| \begin{array}{c} \frac{x}{2} = y,\ x = 2y \\ y \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0 \\ y\ne 0 \text{ при } x\ne 0 \end{array} \right| =$$

$$= 2\left(\lim_{y\to 0} \frac{\sin y}{2y}\right)^2 = \frac{1}{2}\left(\lim_{y\to 0} \frac{\sin y}{y}\right)^2 = \frac{1}{2}\cdot 1 = \frac{1}{2}$$

▷▷ **4.2.57.** Найти пределы

1) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin 5x}{3x}$

2) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin\alpha x}{\sin\beta x}$
3) $\lim_{x\to\infty}(x-3)\sin\frac{2}{3x}$
4) $\lim_{x\to 0} x\operatorname{ctg} x$
5) $\lim_{x\to\infty} x^2\sin\frac{1}{x}$
6) $\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x-\sin x}{\sin^3 x}$

Второй замечательный предел. Следующее утверждение оказывается также весьма полезным при вычислении пределов:

Теорема 4.2.5.

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x \tag{4.2.154}$$

- Эти (эквивалентные) равенства называются *вторым замечательным пределом.*

Доказательство. Равенство между этими двумя пределами получается заменой переменной, поэтому нам достаточно доказать только второе равенство в этой цепочке. Для начала будем считать, что x положительно, то есть докажем равенство

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e \tag{4.2.155}$$

Зафиксируем последовательность $\{x_k\}$, стремящуюся к $+\infty$,

$$x_k\underset{k\to\infty}{\longrightarrow}+\infty$$

и покажем, что

$$\lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{x_k}\right)^{x_k}=e$$

Действительно, всякое число x_k лежит между какими-нибудь двумя соседними натуральными числами, поэтому можно найти число $n_k\in\mathbb{N}$ такое, что

$$n_k\leqslant x_k<n_k+1 \tag{4.2.156}$$

Возникающая таким образом последовательность натуральных чисел $\{n_k\}$ будет бесконечно большой

$$n_k\underset{k\to\infty}{\longrightarrow}+\infty$$

потому что $n_k>x_k-1\underset{k\to\infty}{\longrightarrow}+\infty$. Значит, можно рассмотреть подпоследовательность $\{r_{n_k}\}$, последовательности $\{r_n\}$, рассматривавшейся в лемме (c), и поскольку $\{r_n\}$ стремится к e, по свойству 1^0 пункта (b) мы получим, что $\{r_{n_k}\}$ тоже должна стремится к e:

$$\left(1+\frac{1}{n_k}\right)^{n_k}\underset{k\to\infty}{\longrightarrow}e \tag{4.2.157}$$

Аналогично доказывается что

$$\left(1+\frac{1}{n_k+1}\right)^{n_k+1}\underset{k\to\infty}{\longrightarrow}e \tag{4.2.158}$$

Теперь рассмотрим двойное неравенство (4.2.156). Из него следует

$$\frac{1}{n_k}\geqslant\frac{1}{x_k}>\frac{1}{n_k+1}$$

а отсюда, в свою очередь, получается

$$1+\frac{1}{n_k}\geqslant 1+\frac{1}{x_k}>1+\frac{1}{n_k+1}$$

и

$$\left(1+\frac{1}{n_k}\right)^{x_k}\geqslant\left(1+\frac{1}{x_k}\right)^{x_k}>\left(1+\frac{1}{n_k+1}\right)^{x_k}$$

Расширим это двойное неравенство влево и вправо:

$$\left(1+\frac{1}{n_k}\right)^{n_k+1}>\left(\begin{smallmatrix}\text{используем неравенство}\\ n_k+1>x_k\end{smallmatrix}\right)>$$
$$>\left(1+\frac{1}{n_k}\right)^{x_k}\geqslant\left(1+\frac{1}{x_k}\right)^{x_k}>$$
$$>\left(1+\frac{1}{n_k+1}\right)^{x_k}\geqslant\left(\begin{smallmatrix}\text{используем неравенство}\\ x_k\geqslant n_k\end{smallmatrix}\right)\geqslant$$
$$\geqslant\left(1+\frac{1}{n_k+1}\right)^{n_k}$$

Теперь выбросим ненужные звенья в этой цепочке:

$$\underbrace{\left(1+\frac{1}{n_k}\right)^{n_k+1}}_{\substack{\downarrow\ (4.2.157)\\ e}}>\left(1+\frac{1}{x_k}\right)^{x_k}>\underbrace{\left(1+\frac{1}{n_k+1}\right)^{n_k}}_{\substack{\downarrow\ (4.2.158)\\ e}}$$

$$\Downarrow\ (\text{теорема 3.2.10})$$

$$\left(1+\frac{1}{x_k}\right)^{x_k}\underset{k\to\infty}{\longrightarrow}e$$

Мы доказали равенство (4.2.155). Из него теперь получаем

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\left|\begin{matrix}y=-x\\ y\to+\infty\end{matrix}\right|=$$
$$=\lim_{y\to+\infty}\left(1-\frac{1}{y}\right)^{-y}=\lim_{y\to+\infty}\left(\frac{y-1}{y}\right)^{-y}=$$
$$=\lim_{y\to+\infty}\left(\frac{y}{y-1}\right)^{y}=\lim_{y\to+\infty}\left(1+\frac{1}{y-1}\right)^{y}=$$
$$=\left|\begin{matrix}z=y-1\\ z\to+\infty\end{matrix}\right|=\lim_{z\to+\infty}\left(1+\frac{1}{z}\right)^{z+1}=$$
$$=\underbrace{\lim_{z\to+\infty}\left(1+\frac{1}{z}\right)^{z}}_{\substack{\parallel\\ e,\\ \text{в силу (4.2.155)}}}\cdot\underbrace{\lim_{z\to+\infty}\left(1+\frac{1}{z}\right)}_{\substack{\parallel\\ 1}}=e$$

В результате мы доказали

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e \qquad (4.2.159)$$

и вместе с (4.2.155) это дает второе равенство в (4.2.154). □

Теорема 4.2.5 позволяет вычислять сложные пределы, в которых возникает неопределенность типа 1^∞.

◇ **4.2.58.** Найти предел

$$\lim_{x\to 0}(1+\operatorname{tg} x)^{\operatorname{ctg} x}$$

Решение:

$$\lim_{x\to 0}(1+\operatorname{tg} x)^{\operatorname{ctg} x} = \left| \begin{matrix} \operatorname{tg} x = y,\ \operatorname{ctg} x = \frac{1}{y} \\ y \underset{x\to 0}{\longrightarrow} \infty \end{matrix} \right| = \\ = \lim_{y\to 0}(1+y)^{\frac{1}{y}} = e$$

◇ **4.2.59.** Найти предел

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^x$$

Решение:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^x = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{x+1}{x-1}-1\right)^x = \\ = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x-1}\right)^x = \left| \begin{matrix} \frac{2}{x-1} = y,\ x = 1+\frac{2}{y} \\ y \underset{x\to\infty}{\longrightarrow} 0 \end{matrix} \right| = \\ = \lim_{y\to 0}(1+y)^{1+\frac{2}{y}} = \lim_{y\to 0}(1+y)\left[(1+y)^{\frac{1}{y}}\right]^2 = \\ = \lim_{y\to 0}(1+y)\left[\lim_{y\to 0}(1+y)^{\frac{1}{y}}\right]^2 = e^2$$

◇ **4.2.60.** Найти предел

$$\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$$

Решение:

$$\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0}\left(1-2\sin^2\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}} = \\ = \lim_{x\to 0}\left[\left(1-2\sin^2 x\right)^{\frac{1}{-2\sin^2 x}}\right]^{\frac{-2\sin^2 x}{x^2}} = \\ = \left[\lim_{x\to 0}\left(1-2\sin^2 x\right)^{\frac{1}{-2\sin^2 x}}\right]^{\lim_{x\to 0}\frac{-2\sin^2 x}{x^2}} = \\ = \left| \begin{matrix} -2\sin^2 x = y, \\ y \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0 \end{matrix} \right| = \\ = \left[\lim_{y\to 0}(1+y)^{\frac{1}{y}}\right]^{-2\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2} = e^{-2}$$

▷▷ **4.2.61.** Найти пределы
1) $\lim_{x\to 0}(1+3\operatorname{tg}^2 x)^{\operatorname{ctg}^2 x}$
2) $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x}{2x-3}\right)^{3x}$
3) $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{5x^3+2}{5x^3}\right)^{\sqrt{x}}$
4) $\lim_{x\to 0}\left(1+2x^2\right)^{\frac{1}{x^2}}$
5) $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x+3}{2x+1}\right)^{x+1}$
6) $\lim_{x\to 0}\left(1+\operatorname{tg} x\right)^{\operatorname{ctg} x}$
7) $\lim_{x\to 0}\left(1+3\operatorname{tg}^2 x\right)^{\operatorname{ctg}^2 x}$
8) $\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{\sin^2 x}}$
9) $\lim_{x\to 0}\left(\cos^2 x\right)^{\frac{1}{\sin^2 x}}$
10) $\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\operatorname{ctg} x}$
11) $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x+3}{2x-1}\right)^{x+1}$
12) $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+3x+1}{x^2-x+2}\right)^{x^2}$
13) $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{5x^2+1}{5x^2+x+1}\right)^{x}$
14) $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x+3}\right)^{x^2}$

Следствие 4.2.6. *Справедливы соотношения:*

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = 1 \qquad (4.2.160)$$

и

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = 1 \qquad (4.2.161)$$

Доказательство. Сразу получается (4.2.160):

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0}\ln(1+x)^{\frac{1}{x}} = \\ = \ln\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = \ln e = 1$$

А отсюда уже следует (4.2.161):

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = \left| \begin{matrix} e^x-1=t \\ x=\ln(1+t) \end{matrix} \right| = \lim_{t\to 0}\frac{t}{\ln(1+t)} = \\ = \left(\lim_{t\to 0}\frac{\ln(1+t)}{t}\right)^{-1} = (4.2.160) = 1^{-1} = 1$$

□

▷▷ **4.2.62.** Найдите пределы
1. $\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{x}$;
2. $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1-3x)}{x}$;
3. $\lim_{x\to\infty} x\left(e^{\frac{5}{x}}-1\right)$;
4. $\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\ln\frac{x-1}{x+1}$;
5. $\lim_{x\to-\infty}\frac{\ln(1-7e^x)}{e^x}$;
6. $\lim_{x\to-\infty}\frac{1-e^{\sin x}}{1-\cos^2 x}$.

Глава 5

ПРОИЗВОДНАЯ

§ 1 Производная

Понятие производной появилось в анализе как инструмент для решения задач на экстремум (то есть на максимум и минимум), поэтому обсуждение этой темы полезно начать с какого-нибудь простого примера, иллюстрирующего эту связь.

◇ **5.1.1.** Пусть нам дана функция

$$f(x) = x^2 - x^4 \tag{5.1.1}$$

и требуется найти ее наибольшее значение на прямой $\mathbb{R}$.

Нулями этой функции (то есть решениями уравнения $f(x) = 0$) являются числа $\{-1, 0, 1\}$, поэтому легко сообразить, что график f будет выглядеть примерно так:

Отсюда можно заключить, что f действительно будет иметь максимум в каких-то точках, лежащих на интервалах $(-1, 0)$ и $(0, 1)$, и нам нужно придумать, как найти эти точки.

Чтобы это понять, нарисуем касательную к графику функции f в какой-нибудь точке $a \in \mathbb{R}$ (что такое касательная, мы надеемся, что читатель знает по школе):

Как любая линейная функция (мы определили линейные функции формулой (3.3.102)), касательная описывается уравнением вида

$$y = k \cdot x + b$$

в котором k – угловой коэффициент, связанный с углом наклона φ касательной формулой

$$k = \operatorname{tg} \varphi$$

Если точку a сдвинуть в какое-нибудь другое место, то угловой коэффициент k, вообще говоря, изменится (как и вся касательная). Таким образом, мы получаем некую зависимость, или, точнее сказать, функцию

$$a \mapsto k(a)$$

которая каждой точке $a \in \mathbb{R}$ ставит в соответствие угловой коэффициент $k = k(a)$ касательной к графику функции f в точке a.

Заметим далее, что в точках максимума (а также, минимума) касательная к графику функции f горизонтальна, то есть угловой коэффициент касательной равен нулю

$$k(a) = 0. \tag{5.1.2}$$

Поэтому если б мы знали функцию $a \mapsto k(a)$, то решив уравнение (5.1.2), мы как раз смогли бы получить точки максимума.

Раздел анализа, называемый Дифференциальным исчислением (мы поговорим о нем на с.330), как раз предоставляет алгоритм, позволяющий найти функцию $a \mapsto k(a)$ по функции $x \mapsto f(x)$. Для нашей функции $f(x) = x^2 - x^4$ соответствующая функция k имеет вид

$$k(a) = 2a - 4a^3 \tag{5.1.3}$$

(почему это так станет понятно после § 1 настоящей главы, а конкретно для функции (5.1.1) эта задача будет решена в примере 5.1.3), и уравнение (5.1.2) решается так:

$$k(a) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2a - 4a^3 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \Leftrightarrow \quad a \in \left\{ -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}} \right\},$$

После этого становится понятно, что максимум нашей функции достигается в точках $\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$, и равен

$$f\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

Функция $a \mapsto k(a)$, о которой мы говорили в этом примере, на математическом языке называется производной функции f и обозначается

$$k(a) = f'(a)$$

Это одно из главных понятий в математическом анализе, и, помимо нахождения экстремумов (максимумов и минимумов), оно используется в разных других задачах, например,

– при построении графика функции (это описывается в (b) этой главы),
– при вычислении сложных пределов с помощью правила Лопиталя (см. (a) этой главы),
– при определении еще одного важного объекта в математическом анализе – *неопределенного интеграла* (об этом речь пойдет в главе 8).

В этой главе мы дадим аккуратное определение этому понятию, научимся вычислять производные стандартных функций и обсудим приложения производной.

(a) Производная и дифференцируемость

- Пусть функция f определена в некоторой окрестности точки a. Если существует конечный предел
$$f'(a) = \lim_{t\to 0} \frac{f(a+t) - f(a)}{t} = \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \in \mathbb{R}, \tag{5.1.4}$$
то он называется *производной* функции f в точке a, а про функцию f говорят, что она *дифференцируема в точке* a.
- Функция f называется *дифференцируемой на множестве* E, если она (определена в окрестности каждой точки этого множества и) дифференцируема в каждой точке этого множества:
$$\forall a \in E \qquad \exists f'(a) = \lim_{t\to 0} \frac{f(a+t) - f(a)}{t} \in \mathbb{R}$$

◇ **5.1.2.** Для функции

$$f(x) = x^2$$

по определению, получаем:

$$f'(a) = \lim_{t\to 0} \frac{(a+t)^2 - a^2}{t} = \\ = \lim_{t\to 0} \frac{a^2 + 2at + t^2 - a^2}{t} = \lim_{t\to 0}(2a + t) = 2a$$

То есть, в любой точке a производная функции $f(x) = x^2$ равна $2a$:

$$f'(a) = 2a, \qquad a \in \mathbb{R}$$

Ясно, что смысл нашего утверждения не изменится, если заменить a на любую другую переменную, например, на x:

$$f'(x) = 2x, \qquad x \in \mathbb{R}$$

– эта формула будет означать, что производная функции f в любой точке x равна $2x$.

◇ **5.1.3.** Рассмотрим функцию из примера 5.1.1:

$$f(x) = x^2 - x^4$$

опять по определению, получаем:

$$f'(a) = \lim_{t\to 0} \frac{\left\{(a+t)^2 - (a+t)^4\right\} - \left\{a^2 - a^4\right\}}{t} =$$

$$= (2.2.251) =$$
$$= \lim_{t\to 0} \frac{1}{t} \cdot \Big\{ \big(a^2 + 2at + t^2\big) -$$
$$- \big(a^4 + 4a^3 t + 6a^2 t^2 + 4at^3 + t^4\big) - a^2 + a^4 \Big\} =$$
$$= \lim_{t\to 0} \frac{1}{t} \cdot \Big\{ \big(2at + t^2\big) - \big(4a^3 t + 6a^2 t^2 + 4at^3 + t^4\big) \Big\} =$$
$$= \lim_{t\to 0} \Big\{ \big(2a + t\big) - \big(4a^3 + 6a^2 t + 4at^2 + t^3\big) \Big\} =$$
$$= 2a - 4a^3$$

Это совпадает с тем, что мы заявляли в примере 5.1.1:

$$f'(a) = k(a) = 2a - 4a^3, \qquad a \in \mathbb{R}$$

Если поменять переменную на x, то

$$f'(x) = 2x - 4x^3, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

◇ **5.1.4.** Наоборот, функция

$$f(x) = |x|$$

не дифференцирема в точке $a = 0$, потому что предел

$$f'(0) = \lim_{t\to 0} \frac{|t|}{t}$$

не существует.

Теорема 5.1.1 (о связи между непрерывностью и дифференцируемостью)**.** *Если функция f дифференцируема в точке a, то она непрерывна в этой точке.*

Доказательство. Если функция f определена в некоторой окрестности точки a и дифференцируема в a, то это значит, что существует конечный предел

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(a+t) - f(a)}{t} = f'(a)$$

Отсюда следует, что существует предел

$$\lim_{t\to 0} \big(f(a+t) - f(t)\big) = \lim_{t\to 0} \left(\frac{f(a+t) - f(a)}{t} \cdot t \right) = \lim_{t\to 0} \frac{f(a+t) - f(a)}{t} \cdot \lim_{t\to 0} t = f'(a) \cdot 0 = 0$$

То есть,

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{t\to 0} f(a+t) = f(a)$$

а это как раз означает, что функция f непрерывна в точке a. □

Геометрический смысл производной. У производной имеется естественная геометрическая интерпретация: число $f'(a)$, определенное формулой (5.1.4) как раз и есть *угловой коэффициент касательной* к графику функции f в точке a, о котором мы говорили в примере 5.1.1. Чтобы понять, почему это так, зафиксируем сначала число t и проведем секущую к графику функции f через точки $(a; f(a))$ и $(a+t; f(a+t))$:

Из треугольника ABC видно, что угловой коэффициент (то есть тангенс угла наклона) секущей будет равен

$$k_t = \frac{f(a+t) - f(a)}{t}$$

Теперь "расфиксируем" число t и устремим его к нулю. Тогда наша секущая тоже станет двигаться, "приближаясь к касательной", а "в пределе" – просто превратится в касательную.

Угловой коэффициент (тангенс угла наклона) этой касательной будет как раз равен производной:

$$k = \lim_{t\to 0} \frac{f(a+t) - f(a)}{t} = f'(a)$$

Наглядный смысл дифферецируемости. На интуитивном уровне дифференцируемость функции f в точке a означает, что в точке a к графику функции f можно провести (однозначно определенную) касательную (и это не будет вертикальная прямая).

Для понимания этих терминов следует уяснить два важных момента:

– во-первых, производная существует не всегда, и глядя на график обычно бывает нетрудно сообразить, имеет ли функция f в данной точке производную (то есть, дифференцируема ли она в этой точке), или нет; например, функция $f(x) = |\operatorname{arctg} x|$

  дифференцируема в любой точке $x_0 \neq 0$ (потому что в любой точке $x_0 \neq 0$ к графику можно провести касательную)

  но в точке $x_0 = 0$ она не дифференцируема (потому что в $x_0 = 0$ однозначно определенную касательную провести невозможно)

– во-вторых, по графику функции можно сообразить, в каких точках производная больше, а в каких – меньше; например, у той же самой функции $f(x) = |\operatorname{arctg} x|$ производная в точке $x_0 = 1$ больше, чем в точке $x_1 = 2$ (потому что угол наклона касательной в точке $x_0 = 1$ больше, чем в точке $x_1 = 2$):

в частности, если производная в какой-то точке x_0 равна нулю

$$f'(x_0) = 0$$

то это означает, что касательная в этой точке x_0 горизонтальна

если же производная в x_0 положительна

$$f'(x_0) > 0$$

то это означает, что касательная в этой точке x_0 возрастает

а если производная в x_0 отрицательна

$$f'(x_0) < 0$$

то касательная в x_0 убывает

В качестве упражнения полезно порешать задачи следующего типа.

▷ **5.1.5.** Нарисуйте график какой-нибудь функции f со следующими свойствами:

1) f дифференцируема в любой точке, кроме $x = -2$ и $x = 1$;
2) $f'(0) = 0$, $f'(2) = -1$, $f'(-1) = 1$;
3) f убывает на множестве $(0; +\infty)$;

4) f возрастает на множестве $(-\infty; -3)$.

▷ **5.1.6.** Нарисуйте график какой-нибудь функции f со следующими свойствами:

1) f дифференцируема в любой точке, кроме $x = 0$;
2) $f'(2) = 0$, $f'(3) = 1$, $f'(1) = -1$;
3) f ограничена на множестве $(0; +\infty)$;
4) f не ограничена на множестве $(-\infty; 0)$.

▷ **5.1.7.** По графику функции

определите, в каких точках она дифференцируема, и будет ли она дифференцируемой
1) на интервале $(-\infty; 1)$?
2) на интервале $(-\infty; 0)$?
3) на интервале $(1; +\infty)$?
4) на интервале $(0; 1)$?

Производные элементарных функций. Вычислим теперь производные элементарных функций (в тех случаях, когда это возможно).

◇ **5.1.8. Производная линейной функции:**

$$f(x) = kx + b \quad \Longrightarrow \quad f'(x) = k \tag{5.1.5}$$

В частности, производная от константы:

$$f(x) = C \quad \Longrightarrow \quad f'(x) = 0 \tag{5.1.6}$$

Действительно,

$$f'(x) = \lim_{t\to 0} \frac{f(x+t) - f(x)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{(k\cdot(x+t)+b) - (k\cdot x + b)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{k\cdot t}{t} = \lim_{t\to 0} k = k$$

◇ **5.1.9. Производная степенной функции:**

$$f(x) = x^\alpha \quad \Longrightarrow \quad f'(x) = \alpha\cdot x^{\alpha-1}, \tag{5.1.7}$$

при $x \ne 0$, либо при $x = 0$ и $\alpha > 1$.

В частности,

$$f(x) = \frac{1}{x} \quad \Longrightarrow \quad f'(x) = -\frac{1}{x^2} \tag{5.1.8}$$

Действительно, при $x \ne 0$ мы получим

$$f'(x) = \lim_{t\to 0} \frac{(x+t)^\alpha - x^\alpha}{t} = \left| \begin{array}{c} x + t = xe^s \\ t = x(e^s - 1) \\ s = \ln(1 + \frac{t}{x}) \end{array} \right| = \lim_{s\to 0} \frac{x^\alpha \cdot e^{\alpha s} - x^\alpha}{x(e^s-1)} = \frac{x^\alpha}{x}\cdot \lim_{s\to 0}\frac{e^{\alpha s}-1}{e^s-1} =$$
$$= x^{\alpha-1}\cdot \lim_{s\to 0} \frac{e^{\alpha s}-1}{\alpha s}\cdot\frac{\alpha s}{e^s-1} = x^{\alpha-1}\cdot \lim_{s\to 0} \frac{e^{\alpha s}-1}{\alpha s}\cdot \lim_{s\to 0}\frac{\alpha s}{e^s-1} = \left(\begin{array}{c}\text{в первом пределе}\\ \text{делаем замену } y = \alpha s\end{array}\right) =$$
$$= x^{\alpha-1}\cdot \lim_{y\to 0}\frac{e^y-1}{y}\cdot \lim_{s\to 0}\frac{\alpha s}{e^s-1} = \left(\begin{array}{c}\text{выносим } \alpha \text{ из второго предела}\\ \text{и преобразуем этот предел}\end{array}\right) =$$
$$= \alpha x^{\alpha-1}\cdot \lim_{y\to 0}\frac{e^y-1}{y}\cdot\left(\lim_{s\to 0}\frac{e^s-1}{s}\right)^{-1} = \left(\begin{array}{c}\text{дважды применяем}\\ \text{формулу (4.2.161)}\end{array}\right) = \alpha x^{\alpha-1}\cdot 1\cdot 1^{-1} = \alpha x^{\alpha-1}.$$

А при $x = 0$ и $\alpha > 1$ вычисления упростятся:

$$f'(0) = \lim_{t\to 0}\frac{t^\alpha - 0^\alpha}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{t^\alpha}{t} = \lim_{t\to 0} t^{\alpha-1} = 0 = \alpha\cdot x^{\alpha-1}\Big|_{x=0}.$$

◇ **5.1.10. Производная показательной функции:**

$$f(x) = a^x \quad \Longrightarrow \quad f'(x) = a^x\cdot \ln a \tag{5.1.9}$$

В частности,

$$f(x) = e^x \quad \Longrightarrow \quad f'(x) = e^x \tag{5.1.10}$$

Действительно,

$$f'(x) = \lim_{t\to 0}\frac{a^{x+t}-a^x}{t} = a^x\cdot \lim_{t\to 0}\frac{a^t-1}{t} = \left(\begin{array}{c}\text{применяем}\\ \text{формулу (4.1.64)}\end{array}\right) = a^x\cdot \lim_{t\to 0}\frac{e^{t\ln a}-1}{t} =$$
$$= \left| \begin{array}{c} s = t\ln a \\ t = \frac{s}{\ln a}\end{array}\right| = a^x \ln a\cdot \lim_{s\to 0}\frac{e^s-1}{s} = \left(\begin{array}{c}\text{применяем}\\ \text{формулу (4.2.161)}\end{array}\right) = a^x\ln a\cdot 1 = a^x \ln a$$

◇ **5.1.11. Производная логарифма:**

$$f(x) = \log_a x \quad \Longrightarrow \quad f'(x) = \frac{1}{x\cdot \ln a} \tag{5.1.11}$$

В частности,

$$f(x) = \ln x \quad \Longrightarrow \quad f'(x) = \frac{1}{x} \tag{5.1.12}$$

Действительно,

$$f'(x) = \lim_{t\to 0} \frac{\log_a(x+t) - \log_a x}{t} =$$
$$= \left(\begin{smallmatrix}\text{применяем}\\ \text{формулу (4.1.64)}\end{smallmatrix}\right) = \lim_{t\to 0} \frac{\ln(x+t) - \ln x}{t\ln a} =$$
$$= \lim_{t\to 0} \frac{\ln\frac{x+t}{x}}{t\ln a} = \lim_{t\to 0} \frac{\ln(1+\frac{t}{x})}{t\ln a} = \left|\begin{smallmatrix} s = \frac{t}{x} \\ t = s\cdot x\end{smallmatrix}\right| =$$
$$= \lim_{s\to 0} \frac{\ln(1+s)}{s\cdot x\cdot \ln a} = \frac{1}{x\cdot\ln a}\cdot \lim_{s\to 0}\frac{\ln(1+s)}{s} =$$
$$= \left(\begin{smallmatrix}\text{применяем}\\ \text{формулу (4.2.160)}\end{smallmatrix}\right) = \frac{1}{x\cdot\ln a}\cdot 1 = \frac{1}{x\cdot \ln a}$$

◇ **5.1.12. Производная синуса:**

$$f(x) = \sin x \quad \Longrightarrow \quad f'(x) = \cos x \qquad (5.1.13)$$

Для доказательства нам понадобится следующая вспомогательная формула:

$$\lim_{t\to 0}\frac{\cos t - 1}{t} = 0, \qquad (5.1.14)$$

которую можно вывести из первого замечательного предела:

$$\lim_{t\to 0}\frac{\cos t - 1}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{-2\sin^2\frac{t}{2}}{t} = \left|\begin{matrix} s = \frac{t}{2} \\ t = 2s\end{matrix}\right| =$$
$$= \lim_{s\to 0}\frac{-2\sin^2 s}{2s} = -\lim_{s\to 0}\frac{\sin s}{s}\cdot\lim_{s\to 0}\sin s = -1\cdot 0 = 0$$

Мы можем теперь доказать (5.1.13):

$$f'(x) = \lim_{t\to 0}\frac{\sin(x+t) - \sin x}{t} =$$
$$= \lim_{t\to 0}\frac{\sin x\cdot\cos t + \cos x\cdot \sin t - \sin x}{t} =$$
$$= \lim_{t\to 0}\frac{\sin x\cdot(\cos t - 1) + \cos x\cdot\sin t}{t} =$$
$$= \lim_{t\to 0}\frac{\sin x\cdot(\cos t - 1)}{t} + \lim_{t\to 0}\frac{\cos x\cdot \sin t}{t} =$$
$$= \sin x\cdot\lim_{t\to 0}\frac{\cos t - 1}{t} + \cos x\cdot\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t} =$$
$$= \left(\begin{smallmatrix}\text{применяем формулу (5.1.14)}\\ \text{и первый замечательный предел}\end{smallmatrix}\right) =$$
$$= \sin x\cdot 0 + \cos x \cdot 1 = \cos x$$

◇ **5.1.13. Производная косинуса:**

$$f(x) = \cos x \quad \Longrightarrow \quad f'(x) = -\sin x \qquad (5.1.15)$$

Действительно,

$$f'(x) = \lim_{t\to 0}\frac{\cos(x+t) - \cos x}{t} =$$
$$= \lim_{t\to 0}\frac{\cos x\cdot\cos t - \sin x\cdot\sin t - \cos x}{t} =$$
$$= \lim_{t\to 0}\frac{\cos x\cdot(\cos t - 1) - \sin x\cdot \sin t}{t} =$$
$$= \cos x\cdot\lim_{t\to 0}\frac{\cos t - 1}{t} - \sin x\cdot\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t} =$$
$$= \left(\begin{smallmatrix}\text{применяем формулу (5.1.14)}\\ \text{и первый замечательный предел}\end{smallmatrix}\right) =$$
$$= \cos x\cdot 0 - \sin x\cdot 1 = -\sin x$$

◇ **5.1.14. Производная тангенса:**

$$f(x) = \operatorname{tg} x \quad \Longrightarrow \quad f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} \qquad (5.1.16)$$

Действительно,

$$(\operatorname{tg} \boldsymbol{x})'(x) = \lim_{t\to 0}\frac{\operatorname{tg}(x+t) - \operatorname{tg} x}{t} =$$
$$= \lim_{t\to 0}\frac{\frac{\sin(x+t)}{\cos(x+t)} - \frac{\sin x}{\cos x}}{t} =$$
$$= \lim_{t\to 0}\frac{\sin(x+t)\cdot\cos x - \sin x\cdot\cos(x+t)}{t\cdot\cos(x+t)\cos x} =$$
$$= \lim_{t\to 0}\frac{\sin\left((x+t) - x\right)}{t\cdot\cos(x+t)\cos x} = \lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t\cdot\cos(x+t)\cos x} =$$
$$= \lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}\cdot\lim_{t\to 0}\frac{1}{\cos(x+t)\cos x} = 1\cdot\frac{1}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

◇ **5.1.15.** Производная котангенса:

$$f(x) = \operatorname{ctg} x \quad \Longrightarrow \quad f'(x) = -\frac{1}{\sin^2 x} \qquad (5.1.17)$$

Действительно,

$$f'(x) = \lim_{t\to 0}\frac{\operatorname{ctg}(x+t) - \operatorname{ctg} x}{t} =$$
$$= \lim_{t\to 0}\frac{\frac{\cos(x+t)}{\sin(x+t)} - \frac{\cos x}{\sin x}}{t} =$$
$$= \lim_{t\to 0}\frac{\cos(x+t)\cdot\sin x - \cos x\cdot\sin(x+t)}{t\cdot\sin(x+t)\sin x} =$$
$$= \lim_{t\to 0}\frac{\sin\left(x - (x+t)\right)}{t\cdot\sin(x+t)\sin x} = \lim_{t\to 0}\frac{-\sin t}{t\cdot\sin(x+t)\sin x} =$$
$$= -\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}\cdot\lim_{t\to 0}\frac{1}{\sin(x+t)\sin x} =$$
$$= -1\cdot\frac{1}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

◇ **5.1.16. Производная арксинуса:**

$$f(x) = \arcsin x \quad \Longrightarrow \quad f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad (5.1.18)$$

Действительно,

$$(\arcsin \boldsymbol{x})'(x) = \lim_{t\to 0}\frac{\arcsin(x+t) - \arcsin x}{t} =$$
$$= \left|\begin{smallmatrix} s = \arcsin(x+t) - \arcsin x \\ t = \sin s\cdot\cos(\arcsin x) + x\cdot(\cos s - 1)\end{smallmatrix}\right| =$$
$$= \lim_{s\to 0}\frac{s}{\sin s\cdot\cos(\arcsin x) + x\cdot(\cos s - 1)} =$$
$$= \left(\begin{smallmatrix}\text{используем формулу}\\ \cos(\arcsin x) = \sqrt{1-x^2}\end{smallmatrix}\right) =$$
$$= \lim_{s\to 0}\frac{s}{\sin s\cdot\sqrt{1-x^2} + x\cdot(\cos s - 1)} =$$
$$= \lim_{s\to 0}\frac{1}{\frac{\sin s}{s}\cdot\sqrt{1-x^2} + x\cdot\frac{\cos s - 1}{s}} =$$
$$= \frac{1}{\lim_{s\to 0}\frac{\sin s}{s}\cdot\sqrt{1-x^2} + x\cdot\lim_{s\to 0}\frac{\cos s - 1}{s}} =$$

$$= \begin{pmatrix}\text{используем первый}\\ \text{замечательный предел}\\ \text{и формулу (5.1.14)}\end{pmatrix} = \frac{1}{1\cdot\sqrt{1-x^2}+x\cdot 0} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

◇ **5.1.17. Производная арккосинуса:**

$$f(x)=\arccos x \quad\Longrightarrow\quad f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \tag{5.1.19}$$

Действительно,

$$f'(x) = \lim_{t\to 0}\frac{\arccos(x+t)-\arccos x}{t} = \left|\begin{matrix} s=\arccos(x+t)-\arccos x\\ t=(\cos s-1)\cdot x-\sin s\cdot\sin(\arccos x)\end{matrix}\right| =$$
$$= \lim_{s\to 0}\frac{s}{(\cos s-1)\cdot x-\sin s\cdot\sin(\arccos x)} = \begin{pmatrix}\text{используем формулу}\\ \sin(\arccos x)=\sqrt{1-x^2}\end{pmatrix} =$$
$$= \lim_{s\to 0}\frac{s}{(\cos s-1)\cdot x-\sin s\cdot\sqrt{1-x^2}} = \lim_{s\to 0}\frac{1}{\frac{\cos s-1}{s}\cdot x-\frac{\sin s}{s}\cdot\sqrt{1-x^2}} =$$
$$= \frac{1}{\lim_{s\to 0}\frac{\cos s-1}{s}\cdot x-\lim_{s\to 0}\frac{\sin s}{s}\cdot\sqrt{1-x^2}} = \begin{pmatrix}\text{используем первый}\\ \text{замечательный предел}\\ \text{и формулу (5.1.14)}\end{pmatrix} =$$
$$= \frac{1}{0\cdot x-1\cdot\sqrt{1-x^2}} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

◇ **5.1.18. Производная арктангенса:**

$$f(x)=\operatorname{arctg} x \quad\Longrightarrow\quad f'(x)=\frac{1}{1+x^2} \tag{5.1.20}$$

Действительно,

$$f'(x)=\lim_{t\to 0}\frac{\operatorname{arctg}(x+t)-\operatorname{arctg} x}{t} =$$
$$= \left|\begin{matrix} s=\operatorname{arctg}(x+t)-\operatorname{arctg} x\\ t=\frac{(1+x^2)\cdot\operatorname{tg} s}{1-x\operatorname{tg} s}\end{matrix}\right| = \lim_{s\to 0}\frac{s(1-x\operatorname{tg} s)}{\operatorname{tg} s(1+x^2)} =$$
$$= \lim_{s\to 0}\frac{s\cos s(1-x\operatorname{tg} s)}{\sin s(1+x^2)} = \lim_{s\to 0}\frac{\cos s(1-x\operatorname{tg} s)}{\frac{\sin s}{s}\cdot(1+x^2)} =$$
$$= \frac{\lim_{s\to 0}\cos s\cdot(1-x\cdot\lim_{s\to 0}\operatorname{tg} s)}{\lim_{s\to 0}\frac{\sin s}{s}\cdot(1+x^2)} = \frac{1\cdot(1-x\cdot 0)}{1\cdot(1+x^2)} = \frac{1}{1+x^2}$$

◇ **5.1.19. Производная арккотангенса:**

$$f(x)=\operatorname{arcctg} x \quad\Longrightarrow\quad f'(x)=-\frac{1}{1+x^2} \tag{5.1.21}$$

Действительно,

$$f'(x)=\lim_{t\to 0}\frac{\operatorname{arcctg}(x+t)-\operatorname{arcctg} x}{t} = \left|\begin{matrix} s=\operatorname{arcctg}(x+t)-\operatorname{arcctg} x\\ t=-\frac{1+x^2}{x+\operatorname{ctg} s}\end{matrix}\right| =$$
$$= \lim_{s\to 0}\frac{-s\cdot(x+\operatorname{ctg} s)}{1+x^2} = -\lim_{s\to 0}\frac{s\cdot(x\cdot\sin s+\cos s)}{(1+x^2)\cdot\sin s} =$$
$$= -\lim_{s\to 0}\frac{x\cdot\sin s+\cos s}{(1+x^2)\cdot\frac{\sin s}{s}} = -\frac{x\cdot\lim_{s\to 0}\sin s+\lim_{s\to 0}\cos s}{(1+x^2)\cdot\lim_{s\to 0}\frac{\sin s}{s}} =$$
$$= -\frac{x\cdot 0+1}{(1+x^2)\cdot 1} = -\frac{1}{1+x^2}$$

Из этих примеров видно, что (как и в случае с непрерывностью, о чем мы говорили в теореме 4.1.48), не все элементарные функции дифференцируемы на своей области определения:

Теорема 5.1.2. *Среди элементарных функций все непрерывные*[1] *(и только они) дифференцируемы на всяком интервале в своей области определения.*

(b) Правила вычисления производных

Арифметические действия с производными.

Теорема 5.1.3. *Если функции f и g дифференцируемы в точке x то их сумма, разность и произведение тоже дифференцируемы в точке x, причем*

$$\Big(C\cdot f\Big)'(x) = C\cdot f'(x),\qquad C\in\mathbb{R} \tag{5.1.22}$$
$$\Big(f+g\Big)'(x) = f'(x)+g'(x) \tag{5.1.23}$$
$$\Big(f-g\Big)'(x) = f'(x)-g'(x) \tag{5.1.24}$$
$$\Big(f\cdot g\Big)'(x) = f'(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g'(x) \tag{5.1.25}$$

[1]Непрерывные элементарные функции были определены нами на с.300.

а если, кроме того $g(x) \neq 0$ то функция $\frac{f}{g}$ тоже дифференцируема в точке x, причем

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)\cdot g(x) - f(x)\cdot g'(x)}{g^2(x)} \tag{5.1.26}$$

Доказательство. Докажем (5.1.23):

$$\Big(f+g\Big)'(x) = \lim_{t\to 0}\frac{\Big(f(x+t)+g(x+t)\Big)-\Big(f(x)+g(x)\Big)}{t} =$$
$$= \lim_{t\to 0}\frac{\Big(f(x+t)-f(x)\Big)+\Big(g(x+t)-g(x)\Big)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{f(x+t)-f(x)}{t} + \lim_{t\to 0}\frac{g(x+t)-g(x)}{t} =$$
$$= f'(x)+g'(x)$$

Аналогично доказывается (5.1.24):

$$\Big(f-g\Big)'(x) = \lim_{t\to 0}\frac{\Big(f(x+t)-g(x+t)\Big)-\Big(f(x)-g(x)\Big)}{t} =$$
$$= \lim_{t\to 0}\frac{\Big(f(x+t)-f(x)\Big)-\Big(g(x+t)-g(x)\Big)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{f(x+t)-f(x)}{t} - \lim_{t\to 0}\frac{g(x+t)-g(x)}{t} =$$
$$= f'(x)-g'(x)$$

Для (5.1.25) получаем:

$$\Big(f\cdot g\Big)'(x) = \lim_{t\to 0}\frac{f(x+t)\cdot g(x+t) - f(x)\cdot g(x)}{t} = \left(\begin{smallmatrix}\text{вычтем и прибавим}\\ \text{слагаемое } f(x)\cdot g(x+t)\end{smallmatrix}\right) =$$
$$= \lim_{t\to 0}\frac{f(x+t)\cdot g(x+t) - f(x)\cdot g(x+t) + f(x)\cdot g(x+t) - f(x)\cdot g(x)}{t} =$$
$$= \lim_{t\to 0}\left(\frac{f(x+t)\cdot g(x+t) - f(x)\cdot g(x+t)}{t} + \frac{f(x)\cdot g(x+t) - f(x)\cdot g(x)}{t}\right) =$$
$$= \lim_{t\to 0}\frac{\Big(f(x+t)-f(x)\Big)\cdot g(x+t)}{t} + \lim_{t\to 0}\frac{f(x)\cdot\Big(g(x+t)-g(x)\Big)}{t} =$$
$$= \lim_{t\to 0}\frac{\Big(f(x+t)-f(x)\Big)}{t}\cdot\lim_{t\to 0} g(x+t) + f(x)\cdot\lim_{t\to 0}\frac{\Big(g(x+t)-g(x)\Big)}{t} =$$
$$= \left(\begin{smallmatrix}\text{по теореме 5.1.1, функция}\\ g \text{ непрерывна, значит}\\ \lim_{t\to 0} g(x+t) = g(x)\end{smallmatrix}\right) = f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x)$$

И, наконец, для (5.1.26):

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \lim_{t\to 0}\frac{\frac{f(x+t)}{g(x+t)} - \frac{f(x)}{g(x)}}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{f(x+t)\cdot g(x) - f(x)\cdot g(x+t)}{t\cdot g(x+t)\cdot g(x)} = \left(\begin{smallmatrix}\text{вычтем и прибавим}\\ \text{слагаемое } f(x)\cdot g(x)\end{smallmatrix}\right) =$$
$$= \lim_{t\to 0}\frac{f(x+t)\cdot g(x) - f(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g(x) - f(x)\cdot g(x+t)}{t\cdot g(x+t)\cdot g(x)} =$$
$$= \lim_{t\to 0}\left(\frac{f(x+t)\cdot g(x) - f(x)\cdot g(x)}{t\cdot g(x+t)\cdot g(x)} + \frac{f(x)\cdot g(x) - f(x)\cdot g(x+t)}{t\cdot g(x+t)\cdot g(x)}\right) =$$
$$= \lim_{t\to 0}\left(\left(\frac{f(x+t)-f(x)}{t}\cdot g(x) - f(x)\cdot\frac{g(x+t)-g(x)}{t}\right)\cdot\frac{1}{g(x+t)\cdot g(x)}\right) =$$
$$= \left(\lim_{t\to 0}\frac{f(x+t)-f(x)}{t}\cdot g(x) - f(x)\cdot\lim_{t\to 0}\frac{g(x+t)-g(x)}{t}\right)\cdot\lim_{t\to 0}\frac{1}{g(x+t)\cdot g(x)} =$$
$$= \left(\begin{smallmatrix}\text{по теореме 5.1.1, функция}\\ g(x) \text{ непрерывна, значит}\\ \lim_{t\to 0} g(x+t) = g(x)\end{smallmatrix}\right) = \Big(f'(x)\cdot g(x) - f(x)\cdot g'(x)\Big)\cdot\frac{1}{g(x)^2} = \frac{f'(x)\cdot g(x) - f(x)\cdot g'(x)}{g(x)^2}$$

□

◇ **5.1.20.** Вычислим производную функции

$$h(x) = \ln x \cdot \sin x$$

Для этого введем обозначения

$$f(x) = \ln x, \qquad g(x) = \sin x$$

Тогда $h = f \cdot g$, и по формуле (5.1.25) получаем:

$$h'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g(x) = \frac{1}{x} \cdot \sin x + \ln x \cdot \cos x$$

◇ **5.1.21.** Чтобы найти производную функции

$$h(x) = \frac{e^x}{\operatorname{arctg} x}$$

введем обозначения

$$f(x) = e^x, \qquad g(x) = \operatorname{arctg} x,$$

Тогда $h = \frac{f}{g}$, и по формуле (5.1.25) получаем:

$$h'(x) = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g(x)}{g(x)^2} = \frac{e^x \cdot \operatorname{arctg} x - e^x \cdot \frac{1}{1+x^2}}{\operatorname{arctg}^2 x}$$

Производная композиции. Напомним, что *композиция* $g \circ f$ *функций* g и f (или, что то же самое, *сложная функция*, составленная из f и g) была определена нами на с.246 формулой

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)).$$

Теорема 5.1.4. *Пусть функция f дифференцирема в точке $x = a$, а функция g дифференцируема в точке $f(a)$. Тогда сложная функция*

$$h(x) = g(f(x))$$

дифференцируема в точке $x = a$, причем

$$h'(a) = g'(f(a)) \cdot f'(a) \tag{5.1.27}$$

! **5.1.22.** Формулу (5.1.27) удобно записывать в виде

$$(g \circ f)' = (g' \circ f) \cdot f' \tag{5.1.28}$$

Доказательство. Перепишем равенство (5.1.27) по-другому:

$$\lim_{x \to a} \frac{g(f(x)) - g(f(a))}{x - a} = g'(f(a)) \cdot f'(a)$$

Чтобы это доказать, нужно взять произвольную последовательность

$$x_n \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} a, \quad x_n \neq a \tag{5.1.29}$$

и убедиться, что

$$\lim_{n \to \infty} \frac{g(f(x_n)) - g(f(a))}{x_n - a} = g'(f(a)) \cdot f'(a) \tag{5.1.30}$$

Для этого нужно рассмотреть два случая:

– возможна ситуация, когда для почти всех $n \in \mathbb{N}$ выполняется $f(x_n) \neq f(a)$;

– если же это не так, то для некоторой подпоследовательности аргументов x_{n_k} соответствующая последовательность значений $f(x_{n_k})$ будет обладать свойством $f(x_{n_k}) = f(a)$.

1. Рассмотрим сначала первый случай, то есть когда для почти всех $n \in \mathbb{N}$ выполняется $f(x_n) \neq f(a)$. Тогда можно делить и умножать на $f(x_n) - f(a) \neq 0$, и мы получим

$$\lim_{n \to \infty} \frac{g(f(x_n)) - g(f(a))}{x_n - a} = \lim_{n \to \infty} \frac{g(f(x_n)) - g(f(a))}{f(x_n) - f(a)} \cdot \frac{f(x_n) - f(a)}{x_n - a} =$$

$$= \lim_{n \to \infty} \frac{g(f(x_n)) - g(f(a))}{f(x_n) - f(a)} \cdot \lim_{n \to \infty} \frac{f(x_n) - f(a)}{x_n - a} = \left(\begin{matrix}\text{в левом пределе делаем} \\ \text{замену } y_n = f(x_n)\end{matrix}\right) =$$

$$= \lim_{n \to \infty} \frac{g(y_n) - g(f(a))}{y_n - f(a)} \cdot \lim_{n \to \infty} \frac{f(x_n) - f(a)}{x_n - a} = g'(f(a)) \cdot f'(a)$$

2. После этого рассмотрим случай, когда для некоторой подпоследовательности аргументов x_{n_k} соответствующая последовательность значений $f(x_{n_k})$ обладает свойством $f(x_{n_k}) = f(a)$. Тогда последовательность x_n можно разбить на две подпоследовательности x_{n_k} и x_{n_i}, такие что

$$f(x_{n_k}) = f(a), \qquad f(x_{n_i}) \neq f(a)$$

Для подпоследовательности x_{n_i} мы получаем то же самое, что и в предыдущем случае:

$$\lim_{i\to\infty} \frac{g(f(x_{n_i})) - g(f(a))}{x_{n_i} - a} = g'(f(a)) \cdot f'(a)$$

А для x_{n_k} получаем:

$$\lim_{k\to\infty} \frac{g(f(x_{n_k})) - g(f(a))}{x_{n_k} - a} = \left(\begin{smallmatrix}\text{вспоминаем, что}\\ f(x_{n_k}) = f(a)\end{smallmatrix}\right) = \lim_{k\to\infty} \frac{g(f(a)) - g(f(a))}{x_{n_k} - a} = \lim_{k\to\infty} \frac{0}{x_{n_k} - a} = 0$$

А с другой стороны,

$$f'(a) = \lim_{k\to\infty} \frac{f(x_{n_k}) - f(a)}{x_{n_k} - a} = \left(\begin{smallmatrix}\text{вспоминаем, что}\\ f(x_{n_k}) = f(a)\end{smallmatrix}\right) = \lim_{k\to\infty} \frac{0}{x_{n_k} - a} = 0$$

И, таким образом,

$$\lim_{k\to\infty} \frac{g(f(x_{n_k})) - g(f(a))}{x_{n_k} - a} = 0 = g'(f(a)) \cdot f'(a)$$

Мы получили, что для любой последовательности (5.1.29) выполняется равенство (5.1.30), а это нам и нужно было доказать. □

◇ **5.1.23.** Вычислим производную функции $h(x) = \sin(x^2)$. Для этого представим ее как композицию двух элементарных функций:

$$h(x) = \sin(x^2) = g(f(x)), \ g(y) = \sin y, \ f(x) = x^2$$

Тогда

$$g'(y) = \cos y, \quad f'(x) = 2x$$

Применяя формулу (5.1.61), получаем:

$$h'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x) = \cos(x^2) \cdot 2x$$

◇ **5.1.24.** Чтобы посчитать производную функции $h(x) = \sin^2 x$, нужно представить ее в виде композиции элементарных функций

$$h(x) = \sin^2 x = g(f(x)), \ g(y) = y^2, \ f(x) = \sin x$$

Тогда

$$g'(y) = 2y, \quad f'(x) = \cos x$$

и, применяя (5.1.61), получаем:

$$h'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x) = 2 \sin x \cdot \cos x$$

◇ **5.1.25.** Вычислим производную функции $h(x) = e^{\operatorname{arctg} x}$. Для этого представим ее как композицию двух элементарных функций:

$$h(x) = e^{\operatorname{arctg} x} = g(f(x)), \ g(y) = e^y, \ f(x) = \operatorname{arctg} x$$

Тогда

$$g'(y) = e^y, \quad f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

Применяя формулу (5.1.61), получаем:

$$h'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x) = e^{\operatorname{arctg} x} \cdot \frac{1}{1+x^2}$$

Одним из следствий теоремы о производной сложной функции является возможность вычислять производные функций вида f^g. Это делается с помощью следующей очевидной формулы:

$$f^g = e^{\ln f^g} = e^{g \cdot \ln f} \qquad (5.1.31)$$

(справедливой, разумеется, только при $f > 0$).

◇ **5.1.26.** Вычислим производную функции

$$h(x) = x^x, \quad x > 0$$

Для этого представим нашу функцию, как композицию двух функций с помощью формулы (5.1.31):

$$h(x) = x^x = e^{\ln x^x} = e^{x \cdot \ln x}$$

Тогда

$$h(x) = g(f(x)), \qquad g(y) = e^y, \quad f(x) = x \cdot \ln x$$

Производная функции f вычисляется по формуле (5.1.28) и равна

$$f'(x) = \ln x + 1$$

а для функции g она посчитана в примере 5.1.10:

$$g'(y) = e^y$$

Поэтому

$$h'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x) = \\ = e^{x \cdot \ln x} \cdot \Big(\ln x + 1\Big) = x^x \cdot \Big(\ln x + 1\Big).$$

(c) Теоремы о дифференцируемых функциях

Теорема Ферма.

Теорема 5.1.5 (Ферма)**.** [2] *Пусть функция f определена на интервале (a,b) и в некоторой точке $\xi \in (a,b)$ достигает экстремума на этом интервале, то есть*

$$f(\xi) = \max_{x\in(a,b)} f(x),$$

или

$$f(\xi) = \min_{x\in(a,b)} f(x).$$

Тогда, если в точке ξ функция f дифференцируема, то

$$f'(\xi) = 0$$

Доказательство. Пусть для определенности

$$f(\xi) = \max_{x\in(a,b)} f(x)$$

то есть

$$\forall x \in (a,b) \quad f(x) \leqslant f(\xi) \tag{5.1.32}$$

Тогда, с одной стороны,

$$f'(\xi) = \lim_{x\to\xi} \frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi} = \left(\begin{smallmatrix}\text{если предел существует,}\\ \text{то он равен пределу слева}\end{smallmatrix}\right) = \lim_{x\to\xi-0} \frac{\overbrace{f(x)-f(\xi)}^{\substack{0\\ \vee\!\!/\ (5.1.32)}}}{\underbrace{x-\xi}_{\substack{\wedge\ \ (x<\xi)\\ 0}}} \geqslant 0$$

А, с другой стороны,

$$f'(\xi) = \lim_{x\to\xi} \frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi} = \left(\begin{smallmatrix}\text{если предел существует,}\\ \text{то он равен пределу справа}\end{smallmatrix}\right) = \lim_{x\to\xi+0} \frac{\overbrace{f(x)-f(\xi)}^{\substack{0\\ \vee\!\!/\ (5.1.32)}}}{\underbrace{x-\xi}_{\substack{\vee\ \ (x>\xi)\\ 0}}} \leqslant 0$$

Итак, мы получили, что $f'(\xi) \geqslant 0$ и, одновременно, $f'(\xi) \leqslant 0$. Значит, $f'(\xi) = 0$. □

Теорема Ролля.

Теорема 5.1.6 (Ролля)**.** [3] *Пусть функция f определена на отрезке $[a,b]$, причем*

(i) *f непрерывна на отрезке $[a,b]$,*

[2]Эта теорема используется в следующем параграфе при доказательстве теоремы Ролля.

[3]Эта теорема используется в следующих трех параграфах при доказательстве теорем Лагранжа, Коши и Тейлора

(ii) f *дифференцируема на интервале* (a, b)*,*

(iii) $f(a) = f(b)$*.*

Тогда существует точка $\xi \in (a, b)$*, такая что*

$$f'(\xi) = 0$$

Доказательство. Поскольку функция f непрерывна на отрезке $[a, b]$, по теореме Вейерштрасса об экстремумах (теорема 3.3.8), f имеет максимум и минимум на $[a, b]$:

$$m = f(x_m) = \min_{x \in [a,b]} f(x) \qquad M = f(x_M) = \max_{x \in [a,b]} f(x)$$

Ясно, что $m \leqslant M$, поэтому возможны два случая:

1) $m = M$, или
2) $m < M$.

В первом случае мы получаем, что функция f должна быть постоянной

$$\forall x \in [a, b] \quad m = f(x) = M,$$

поэтому ее производная $f'(x)$ будет равна нулю в любой точке $x \in [a, b]$.

Во втором же случае мы получаем, что с одной стороны $f(a) = f(b)$, а с другой, $m = f(x_m) < f(x_M) = M$. Это означает, что x_m или x_M не не может быть концом отрезка $[a, b]$:

– либо $a < x_m < b$,
– либо $a < x_M < b$.

Значит, функция f имеет экстремум на интервале (a, b) (если $a < x_m < b$ – то минимум, а если $a < x_M < b$ – то максимум). Следовательно, по теореме Ферма 5.1.5, найдется точка $\xi \in (a, b)$ такая, что $f'(\xi) = 0$. □

Теорема Лагранжа.

Теорема 5.1.7 (Лагранжа)**.** [4] *Пусть функция* f *определена на отрезке* $[a, b]$*, причем*

(i) f *непрерывна на отрезке* $[a, b]$*,*

(ii) f *дифференцируема на интервале* (a, b)*.*

Тогда существует точка $\xi \in (a, b)$*, такая что*

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \tag{5.1.33}$$

[4] Эта теорема используется ниже при доказательстве теоремы 5.2.14 (достаточное условие строгой выпуклости).

Доказательство. Рассмотрим вспомогательную функцию

$$F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

Эта функция удовлетворяет всем трем условиям теоремы Ролля 5.1.6:

(1) F непрерывна на отрезке $[a, b]$ (по теореме 3.3.2, потому что $F(x)$ составлена из непрерывных функций с помощью операции вычитания);

(2) F дифференцируема на интервале (a, b) (по теореме 5.1.3, потому что F составлена из дифференцируемых функций с помощью операции вычитания);

(3) $F(a) = F(b)$ (потому что $F(a) = f(a) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(a - a) = 0 - 0 = 0$ и $F(b) = f(b) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(b - a) = f(b) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{1} = 0$).

Значит, по теореме Ролля 5.1.6, найдется такая точка $\xi \in (a, b)$, что $F'(\xi) = 0$. Иными словами,

$$f'(\xi) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0$$

или

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

□

Теорема Коши об отношении приращений.

Теорема 5.1.8 (Коши). [5] *Пусть функции f и g определены на отрезке $[a, b]$, причем*

(i) f *и* g *непрерывны на отрезке* $[a, b]$,

(ii) f *и* g *дифференцируемы на интервале* (a, b),

(iii) $g'(x) \neq 0$ *при* $x \in (a, b)$.

Тогда существует точка $\xi \in (a, b)$, такая что

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \tag{5.1.34}$$

Доказательство. Сначала нужно убедиться, что $g(a) \neq g(b)$, то есть что формула (5.1.34) имеет смысл. Действительно, если бы оказалось, что $g(a) = g(b)$, то это означало бы, что $g(x)$ удовлетворяет всем трем условиям теоремы Ролля 5.1.6, поэтому нашлась бы точка $\xi \in (a, b)$ такая, что $g'(\xi) = 0$. Это невозможно по условию *(iii)* нашей теоремы.

Теперь перейдем к доказательству формулы (5.1.34). Рассмотрим вспомогательную функцию

$$F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \cdot (g(x) - g(a))$$

Эта функция удовлетворяет всем трем условиям теоремы Ролля 5.1.6:

(1) F непрерывна на отрезке $[a, b]$ (по теореме 3.3.2, потому что F составлена из непрерывных функций с помощью операции вычитания);

(2) F дифференцируема на интервале (a, b) (по теореме 5.1.3, потому что F составлена из дифференцируемых функций с помощью операции вычитания);

(3) $F(a) = F(b)$ (потому что $F(a) = f(a) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} \cdot (g(a) - g(a)) = 0 - 0 = 0$ и $F(b) = f(b) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}(g(b) - g(a)) = f(b) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{1} = 0$).

Значит, по теореме Ролля 5.1.6, найдется такая точка $\xi \in (a, b)$, что

$$F'(\xi) = 0$$

Иными словами,

$$f'(\xi) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \cdot g'(\xi) = 0$$

---

[5] Эта теорема используется ниже при доказательстве теоремы 5.2.1 (правило Лопиталя для предела в точке с неопределенностью $\frac{0}{0}$)

или, учитывая что $g'(\xi) \neq 0$,

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

$\square$

(d) Дифференциальное исчисление: производная, как формальная операция

В примерах на с.325 и с.326, как наверняка заметил читатель, для вычисления производной стандартной функции h нам приходилось вводить новые обозначения для «более простых» функций, через которые h выражается алгебраически или в виде композиции. Например, чтобы вычислить производную функции $h(x) = \sin(x^2)$ в примере 5.1.23 нам пришлось рассмотреть функции $g(y) = \sin y$ и $f(x) = x^2$, выписать их производные и подставить их в формулу (5.1.27).

Этот способ вычислений выглядит довольно громоздким в сравнении с приемами, употреблявшимися для таких задач в школе, где, как, наверное, помнит читатель, вычисление производной оформляется в виде цепочки равенств (иногда длинной цепочки, но все же гораздо короче, чем запись, которую приходится употреблять, следуя алгоритму действий, описанному на страницах 325 и 326). Например, для функции $h(x) = \sin(x^2)$ можно (используя обозначение (4.2.133)) записать эту цепочку так:

$$\Big(\sin(x^2)\Big)' = \Big(\sin y\Big|_{y=x^2}\Big)' = \\ = (\sin y)'\Big|_{y=x^2} \cdot (x^2)' = \cos x^2 \cdot 2x. \quad (5.1.35)$$

Естественно поэтому задуматься, отчего школьные приемы приводят к правильным результатам, и как их следует аккуратно сформулировать, чтобы грамотно использовать для вычислений.

Раздел математического анализа, занимающийся этими вопросами, называется *Исчисление*, и мы упоминали уже о нем в начале главы 4. Его идея состоит в том, чтобы поглядеть на производную (и на интеграл, о котором мы поговорим в следующей главе), как на формальную операцию над числовыми выражениями[6]. Такой отстраненный взгляд позволяет формализовать приемы вычисления производной таким образом, что цепочки вида (5.1.35) становятся результатом применения одного общего алгоритма, обоснованность которого отдельно доказывается, и поэтому не вызывает сомнений.

В этом параграфе мы опишем этот алгоритм (и докажем правомерность его применения), чтобы иметь формальные основания пользоваться им в примерах.

[6] Числовые выражения были определены выше на с.302.

Частная производная числового выражения. Напомним, что приведенные числовые выражения были определены нами на с.308. Всякому приведенному числовому выражению $\mathcal{F}$ и любой переменной x можно естественным образом поставить в соответствие некое новое числовое выражение, обозначаемое $\frac{\partial}{\partial x}(\mathcal{F})$ или $\frac{\partial(\mathcal{F})}{\partial x}$ (если это не приводит к недоразумениям, скобки вокруг $\mathcal{F}$ могут не писаться) и называемое *производным выражением* таким образом, чтобы выполнялись следующие условия:

0) если выражение $\mathcal{F}$ не содержит переменной x, то его частная производная по x считается нулевой:
$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x} = 0, \quad (5.1.36)$$

1) частная производная от переменной x по самой этой переменной x считается равной единице:
$$\frac{\partial x}{\partial x} = 1, \quad (5.1.37)$$

2) для произвольных числовых выражений $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$
$$\frac{\partial}{\partial x}\Big(\mathcal{F} + \mathcal{G}\Big) = \frac{\partial}{\partial x}\mathcal{F} + \frac{\partial}{\partial x}\mathcal{G} \quad (5.1.38)$$
$$\frac{\partial}{\partial x}\Big(\mathcal{F} - \mathcal{G}\Big) = \frac{\partial}{\partial x}\mathcal{F} - \frac{\partial}{\partial x}\mathcal{G} \quad (5.1.39)$$
$$\frac{\partial}{\partial x}\Big(\mathcal{F} \cdot \mathcal{G}\Big) = \Big(\frac{\partial}{\partial x}\mathcal{F}\Big) \cdot \mathcal{G} + \mathcal{F} \cdot \Big(\frac{\partial}{\partial x}\mathcal{G}\Big) \quad (5.1.40)$$
$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\mathcal{F}}{\mathcal{G}}\right) = \frac{\Big(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x}\Big) \cdot \mathcal{G} - \mathcal{F} \cdot \Big(\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial x}\Big)}{\mathcal{G}^2} \quad (5.1.41)$$

3) для произвольного числового выражения $\mathcal{F}$

$$\frac{\partial}{\partial x}\Big(\mathcal{F}^\alpha\Big) = \alpha \cdot \mathcal{F}^{\alpha-1} \cdot \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x} \quad (5.1.42)$$
$$\frac{\partial}{\partial x}\Big(a^{\mathcal{F}}\Big) = \ln a \cdot a^{\mathcal{F}} \cdot \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x} \quad (a > 0) \quad (5.1.43)$$
$$\frac{\partial}{\partial x}\Big(e^{\mathcal{F}}\Big) = e^{\mathcal{F}} \cdot \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x} \quad (5.1.44)$$
$$\frac{\partial}{\partial x}\Big(\log_a \mathcal{F}\Big) = \frac{1}{\mathcal{F} \cdot \ln a} \cdot \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x} \quad (\mathcal{F} > 0) \quad (5.1.45)$$
$$\frac{\partial}{\partial x}\Big(\ln \mathcal{F}\Big) = \frac{1}{\mathcal{F}} \cdot \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x} \quad (\mathcal{F} > 0) \quad (5.1.46)$$
$$\frac{\partial}{\partial x}\Big(\sin \mathcal{F}\Big) = \cos \mathcal{F} \cdot \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x} \quad (5.1.47)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\Big(\cos\mathcal{F}\Big) = -\sin\mathcal{F}\cdot\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial x} \tag{5.1.48}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\Big(\operatorname{tg}\mathcal{F}\Big) = \frac{1}{\cos^2\mathcal{F}}\cdot\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial x} \tag{5.1.49}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\Big(\operatorname{ctg}\mathcal{F}\Big) = -\frac{1}{\sin^2\mathcal{F}}\cdot\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial x} \tag{5.1.50}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\Big(\arcsin\mathcal{F}\Big) = \frac{1}{\sqrt{1-\mathcal{F}^2}}\cdot\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial x} \tag{5.1.51}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\Big(\arccos\mathcal{F}\Big) = -\frac{1}{\sqrt{1-\mathcal{F}^2}}\cdot\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial x} \tag{5.1.52}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\Big(\operatorname{arctg}\mathcal{F}\Big) = \frac{1}{1+\mathcal{F}^2}\cdot\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial x} \tag{5.1.53}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\Big(\operatorname{arcctg}\mathcal{F}\Big) = -\frac{1}{1+\mathcal{F}^2}\cdot\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial x} \tag{5.1.54}$$

! **5.1.27.** К этим правилам следует добавить, что операции дифференцирования выражений по другим переменным определяются по аналогии.

! **5.1.28.** Из формул (5.1.38)-(5.1.61) следует, что область допустимых значений переменной для производного выражения подчиняется равенствам:

$$\mathsf{D}\left(\frac{\partial(\mathcal{F}+\mathcal{G})}{\partial x}\right) = \mathsf{D}\left(\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial x}\right)\cap\mathsf{D}\left(\frac{\partial\mathcal{G}}{\partial x}\right) \tag{5.1.55}$$

$$\mathsf{D}\left(\frac{\partial(\mathcal{F}-\mathcal{G})}{\partial x}\right) = \mathsf{D}\left(\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial x}\right)\cap\mathsf{D}\left(\frac{\partial\mathcal{G}}{\partial x}\right) \tag{5.1.56}$$

$$\mathsf{D}\left(\frac{\partial(\mathcal{F}\cdot\mathcal{G})}{\partial x}\right) = \mathsf{D}\left(\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial x}\right)\cap\mathsf{D}\left(\frac{\partial\mathcal{G}}{\partial x}\right) \tag{5.1.57}$$

$$\begin{aligned}\mathsf{D}\left(\tfrac{\partial(\frac{\mathcal{F}}{\mathcal{G}})}{\partial x}\right) &= \\ &= \mathsf{D}\left(\tfrac{\partial\mathcal{F}}{\partial x}\right)\cap\mathsf{D}\left(\tfrac{\partial\mathcal{G}}{\partial x}\right)\setminus\{x:\mathcal{G}=0\}\end{aligned} \tag{5.1.58}$$

$$\begin{aligned}\mathsf{D}\left(\frac{\partial\Big(\mathcal{G}\big|_{y=\mathcal{F}}\Big)}{\partial x}\right) &= \\ &= \left\{x:\ \mathcal{F}\in\mathsf{D}\left(\tfrac{\partial\mathcal{G}}{\partial y}\right)\right\}\cap\mathsf{D}\left(\tfrac{\partial\mathcal{F}}{\partial x}\right)\end{aligned} \tag{5.1.59}$$

Из (5.1.40) и (5.1.36) следует

Теорема 5.1.9. *Если выражение $\mathcal{F}$ не содержит переменной x, то*

$$\frac{\partial}{\partial x}\Big(\mathcal{F}\cdot\mathcal{G}\Big) = \mathcal{F}\cdot\left(\frac{\partial}{\partial x}\mathcal{G}\right) \tag{5.1.60}$$

Теорема 5.1.10. *Если $\mathcal{F}$ — одноместное выражение от переменной x, а $\mathcal{G}$ — одноместное выражение от переменной y, то для выражения, полученного подстановкой, выполняется равенство*

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\mathcal{G}\Big|_{y=\mathcal{F}}\right) = \left(\frac{\partial}{\partial y}\mathcal{G}\right)\Big|_{y=\mathcal{F}}\cdot\frac{\partial}{\partial x}\mathcal{F} \tag{5.1.61}$$

Производная одноместного числового выражения. Если $\mathcal{F}$ – одноместное числовое выражение, например, от переменной x, то частную производную по этой переменной удобно обозначать штрихом:

$$\mathcal{F}' = \frac{\partial}{\partial x}\mathcal{F} \tag{5.1.62}$$

Для этого случая правила вычисления полезно переписать отдельно:

0) если $\mathcal{F}$ – нульместное числовое выражение, то его производная считается нулевой:
$$\mathcal{F}' = 0, \tag{5.1.63}$$

1) производная от переменной x считается равной единице:
$$x' = 1, \tag{5.1.64}$$

2) для произвольных выражений $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$ от переменной x,
$$\Big(\mathcal{F}+\mathcal{G}\Big)' = \mathcal{F}'+\mathcal{G}' \tag{5.1.65}$$
$$\Big(\mathcal{F}-\mathcal{G}\Big)' = \mathcal{F}'-\mathcal{G}' \tag{5.1.66}$$
$$\Big(\mathcal{F}\cdot\mathcal{G}\Big)' = \mathcal{F}'\cdot\mathcal{G}+\mathcal{F}\cdot\mathcal{G}' \tag{5.1.67}$$
$$\left(\frac{\mathcal{F}}{\mathcal{G}}\right)' = \frac{\mathcal{F}'\cdot\mathcal{G}-\mathcal{F}\cdot\mathcal{G}'}{\mathcal{G}^2} \tag{5.1.68}$$

3) для произвольного выражения $\mathcal{F}$ от переменной x,
$$\Big(\mathcal{F}^\alpha\Big)' = \alpha\cdot\mathcal{F}^{\alpha-1}\cdot\mathcal{F}' \tag{5.1.69}$$
$$\Big(a^{\mathcal{F}}\Big)' = \ln a\cdot a^{\mathcal{F}}\cdot\mathcal{F}'\quad(a>0) \tag{5.1.70}$$
$$\Big(e^{\mathcal{F}}\Big)' = e^{\mathcal{F}}\cdot\mathcal{F}' \tag{5.1.71}$$
$$\Big(\log_a\mathcal{F}\Big)' = \frac{1}{\mathcal{F}\cdot\ln a}\cdot\mathcal{F}'\quad(\mathcal{F}>0) \tag{5.1.72}$$
$$\Big(\ln\mathcal{F}\Big)' = \frac{1}{\mathcal{F}}\cdot\mathcal{F}'\quad(\mathcal{F}>0) \tag{5.1.73}$$
$$\Big(\sin\mathcal{F}\Big)' = \cos\mathcal{F}\cdot\mathcal{F}' \tag{5.1.74}$$
$$\Big(\cos\mathcal{F}\Big)' = -\sin\mathcal{F}\cdot\mathcal{F}' \tag{5.1.75}$$
$$\Big(\operatorname{tg}\mathcal{F}\Big)' = \frac{1}{\cos^2\mathcal{F}}\cdot\mathcal{F}' \tag{5.1.76}$$
$$\Big(\operatorname{ctg}\mathcal{F}\Big)' = -\frac{1}{\sin^2\mathcal{F}}\cdot\mathcal{F}' \tag{5.1.77}$$
$$\Big(\arcsin\mathcal{F}\Big)' = \frac{1}{\sqrt{1-\mathcal{F}^2}}\cdot\mathcal{F}' \tag{5.1.78}$$
$$\Big(\arccos\mathcal{F}\Big)' = -\frac{1}{\sqrt{1-\mathcal{F}^2}}\cdot\mathcal{F}' \tag{5.1.79}$$
$$\Big(\operatorname{arctg}\mathcal{F}\Big)' = \frac{1}{1+\mathcal{F}^2}\cdot\mathcal{F}' \tag{5.1.80}$$
$$\Big(\operatorname{arcctg}\mathcal{F}\Big)' = -\frac{1}{1+\mathcal{F}^2}\cdot\mathcal{F}' \tag{5.1.81}$$

Теорема 5.1.11. *Если выражение $\mathcal{F}$ не содержит переменной x, то*

$$\Big(\mathcal{F}\cdot\mathcal{G}\Big)' = \mathcal{F}\cdot\mathcal{G}'.$$

Покажем на примерах, как вычисляется производная выражения.

◇ **5.1.29.**

$$\Big(3x^2 - x + 5\Big)' = 3\Big(x^2\Big)' - \Big(x\Big)' + \Big(5\Big)' = \\ = 3\cdot 2x - 1 + 0 = 6x - 1$$

◇ **5.1.30.**

$$\Big(x\ln x\Big)' = \Big(x\Big)'\cdot\ln x + x\cdot\Big(\ln x\Big)' = \\ = 1\cdot\ln x + x\cdot\frac{1}{x} = \ln x + 1$$

◇ **5.1.31.**

$$\Big(\sqrt{x}\cdot\sin x\Big)' = \\ = \Big(\sqrt{x}\Big)'\cdot\sin x + \sqrt{x}\cdot\Big(\sin x\Big)' = \\ = \frac{1}{2\sqrt{x}}\cdot\sin x + \sqrt{x}\cdot\cos x$$

◇ **5.1.32.**

$$\left(\frac{\operatorname{arctg} x}{x^2+1}\right)' = \\ = \frac{(\operatorname{arctg} x)'\cdot(x^2+1) - (x^2+1)'\cdot\operatorname{arctg} x}{(x^2+1)^2} = \\ = \frac{\frac{1}{x^2+1}\cdot(x^2+1) - 2x\cdot\operatorname{arctg} x}{(x^2+1)^2} = \\ = \frac{1 - 2x\cdot\operatorname{arctg} x}{(x^2+1)^2}$$

⊳⊳ **5.1.33.** Продифференцируйте выражения по переменной x:

1) $\operatorname{arctg} x + x + \operatorname{arcctg} x$;
2) $x\arcsin x$;
3) $\frac{\arccos x}{\arcsin x}$;
4) $\Big(x^2 - 7x + 8\Big)\cdot e^x$;
5) $\ln x^3 - \frac{9}{x} - \frac{27}{2x^2}$;
6) $\frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}$;
7) $(\sqrt{2})^x + (\sqrt{5})^{-x}$;
8) $2^x\cdot\ln|x|$;
9) $e^x\cdot\log_2 x$;
10) $\log_2 x\cdot\ln x\cdot\log_3 x$;

Теорема 5.1.12. *Если $\mathcal{F}$ — одноместное выражение от переменной x, а $\mathcal{G}$ — одноместное выражение от переменной y, то для выражения, полученного подстановкой, выполняется равенство*

$$\Big(\mathcal{G}\Big|_{y=\mathcal{F}}\Big)' = \mathcal{G}'\Big|_{y=\mathcal{F}}\cdot\mathcal{F}'. \qquad (5.1.82)$$

◇ **5.1.34.**

$$\Big(e^{\operatorname{arctg} x}\Big)' = \Big(e^y\Big|_{y=\operatorname{arctg} x}\Big)' = (5.1.82) = \\ = (e^y)'\Big|_{y=\operatorname{arctg} x}\cdot(\operatorname{arctg} x)' = \\ = e^y\Big|_{y=\operatorname{arctg} x}\cdot\frac{1}{1+x^2} = e^{\operatorname{arctg} x}\cdot\frac{1}{1+x^2}$$

◇ **5.1.35.**

$$\Big(\sin^2 x\Big)' = \Big(y^2\Big|_{y=\sin x}\Big)' = (5.1.82) = \\ = (y^2)'\Big|_{y=\sin x}\cdot(\sin x)' = \\ = 2y\Big|_{y=\sin x}\cdot\cos x = 2\sin x\cdot\cos x$$

◇ **5.1.36.**

$$\Big((x^2+x+1)^5\Big)' = \Big(y^5\Big|_{y=x^2+x+1}\Big)' = \\ = (5.1.82) = (y^5)'\Big|_{y=x^2+x+1}\cdot(x^2+x+1)' = \\ = 5\cdot y^4\Big|_{y=x^2+x+1}\cdot(2x+1) = \\ = 5\cdot(x^2+x+1)^4\cdot(2x+1)$$

◇ **5.1.37.** Следующая формула доказывается с помощью теоремы о сложной функции:

$$(\ln|x|)' = \frac{1}{x}, \qquad (5.1.83)$$

Для доказательства нужно рассмотреть два случая: при $x > 0$ получаем:

$$(\ln|x|)' = (\ln x)' = \frac{1}{x},$$

а при $x < 0$ получается то же самое:

$$(\ln|x|)' = \Big(\ln(-x)\Big)' = \Big(\ln y\Big|_{y=-x}\Big)' = \\ = \Big(\ln y\Big)'\cdot(-x)' = \frac{1}{-x}\cdot(-1) = \frac{1}{x}.$$

⊳⊳ **5.1.38.** Найдите производную выражений:

1) $\operatorname{arctg} e^x$;
2) $\sin x^2$;
3) $\operatorname{tg}\ln x$;
4) $\ln\operatorname{tg} x$.
5) $\ln\sin e^x$;
6) $\sin e^{\arcsin x}$;
7) $e^{\arcsin\ln x}$;
8) $\arcsin\ln\sin x$;
9) $\ln^2(1+x^3)$;
10) $\cos\sqrt{x+x^3}$;
11) $\sqrt[3]{1+\cos x}$.

Для вычисления производных выражений вида $\mathcal{F}^{\mathcal{G}}$ полезно заметить формулу:

$$\mathcal{F}^{\mathcal{G}} = e^{\ln\mathcal{F}^{\mathcal{G}}} = e^{\mathcal{G}\cdot\ln\mathcal{F}} \qquad (5.1.84)$$

(справедливую при $\mathcal{F} > 0$).

◇ **5.1.39.**

$$(x^x)' = (5.1.84) = \left(e^{x\cdot\ln x}\right)' = \\ = \left(e^y\Big|_{y=x\cdot\ln x}\right)' = (e^y)'\Big|_{y=x\cdot\ln x}\cdot(x\cdot\ln x)' = \\ = e^{x\cdot\ln x}\cdot\left(1\cdot\ln x + x\cdot\frac{1}{x}\right) = x^x\cdot\Big(\ln x+1\Big).$$

◇ **5.1.40.**

$$\left(\Big(\cos x\Big)^{\sin x}\right)' = (5.1.84) = \\ = \left(e^{\sin x\cdot\ln\cos x}\right)' = \left(e^y\Big|_{y=\sin x\cdot\ln\cos x}\right)' = \\ = (e^y)'\Big|_{y=\sin x\cdot\ln\cos x}\cdot(\sin x\cdot\ln\cos x)' = \\ = e^y\Big|_{y=\sin x\cdot\ln\cos x}\cdot\Big((\sin x)'\cdot\ln\cos x + \\ + \sin x\cdot(\ln\cos x)'\Big) = \Big(\cos x\Big)^{\sin x}\cdot \\ \cdot\left(\cos x\cdot\ln\cos x+\sin x\cdot\frac{\big(\cos x\big)'}{\cos x}\right) = \\ = \Big(\cos x\Big)^{\sin x}\cdot\left(\cos x\ln\cos x - \frac{\sin^2 x}{\cos x}\right)$$

▷▷ **5.1.41.** Вычислите производную:

1) $\ln^x x$;

2) $x^{\sqrt{x}}$;

3) $\Big(\sin x\Big)^{\frac{1}{x}}$;

4) x^{e^x}.

Производная стандартной функции. Объясним теперь, как связана производная числового выражения с производной порождаемой им стандартной функции. Эта связь выражается следующей теоремой, оправдывающей определение на с.810.

Теорема 5.1.13. *Пусть стандартная функция f определяется непрерывным числовым выражением*[7] *$\mathcal{F}$ (при заданных значениях параметров),*

$$f(x) = \mathcal{F}. \qquad (5.1.85)$$

Тогда на всяком интервале (a,b) из области определения производной выражения $\mathcal{F}$,

$$(a,b)\subseteq \mathsf{D}(\mathcal{F}'). \qquad (5.1.86)$$

функция f дифференцируема и ее производная определяется на (a,b) производной выражения $\mathcal{F}$:

$$f'(x) = \mathcal{F}',\quad x\in(a,b). \qquad (5.1.87)$$

Доказательство. Проведем индукцию по сложности выражения $\mathcal{F}$. Прежде всего, для элементарных непрерывных выражений это очевидно. Предположим, что это верно для выражений сложности, меньшей некоторого $k\in\mathbb{N}$. Пусть $\mathcal{F}$ – выражение сложности k. Тогда по определению, $\mathcal{F}$ будет либо суммой, либо разностью, либо произведением, либо отношением, либо композицией выражений сложности $< k$. Рассмотрим каждый из этих случаев.

Если $\mathcal{F} = \mathcal{P}+\mathcal{Q}$, где $\mathcal{P}$ и $\mathcal{Q}$ – выражения сложности $< k$, то можно рассмотреть функции

$$p(x) = \mathcal{P},\qquad q(x) = \mathcal{Q} \qquad (5.1.88)$$

и по предположению индукции, они будут дифференцируемы на интервале (a,b), причем

$$\begin{aligned} p'(x) &= \mathcal{P}', & x\in(a,b),\\ q'(x) &= \mathcal{Q}', & x\in(a,b). \end{aligned} \qquad (5.1.89)$$

С другой стороны, функция f будет их суммой на (a,b):

$$f(x) = p(x)+q(x),\qquad x\in(a,b),$$

И значит, по теореме 5.1.3, ее производная на этом интервале будет равна сумме производных p и q:

$$f'(x) = p'(x)+q'(x),\qquad x\in(a,b)$$

Следовательно, функция f' должна задаваться формулой

$$f'(x) = (5.1.23) = p'(x)+q'(x) = \\ = \mathcal{P}'+\mathcal{Q}' = (5.1.65) = \mathcal{F}'.$$

То же самое верно для случая разности и произведения выражений. Для отношения получаем: если $\mathcal{F} = \frac{\mathcal{P}}{\mathcal{Q}}$, где $\mathcal{P}$ и $\mathcal{Q}$ – выражения сложности $< k$, то, во-первых, рассмотрев функции (5.1.88), мы снова по предположению индукции получим, что функции p и q дифференцируемы на интервале (a,b), и их производные определяются тождествами (5.1.89). А, во-вторых, из условия (5.1.86) следует, что функция q вдобавок не равна нулю на интервале (a,b):

$$(a,b)\subseteq\{x:\ q(x)=\mathcal{Q}\neq 0\}.$$

Вместе это означает, что функция

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$$

дифференцируема на интервале (a,b) и ее производная на этом множестве определяется производной выражения $\mathcal{F}$:

$$f'(x) = (5.1.26) = \frac{p'(x)\cdot q(x) - p(x)\cdot q'(x)}{q(x)^2} = \\ = \frac{\mathcal{P}'\cdot\mathcal{Q}-\mathcal{P}\cdot\mathcal{Q}'}{\mathcal{Q}^2} = (5.1.68) = \left(\frac{\mathcal{P}}{\mathcal{Q}}\right)' = \mathcal{F}'.$$

[7] Напомним, что непрерывные числовые выражения были определены на с.306.

Остается рассмотреть (самый сложный) случай композиции. Пусть

$$\mathcal{F} = \mathcal{Q}\Big|_{y=\mathcal{P}},$$

где $\mathcal{Q}$ – непрерывное элементарное выражение от переменной y, а $\mathcal{P}$ – непрерывное выражение от переменной x сложности $< k$. Условие (5.1.86) в этом случае принимает вид

$$(a,b) \subseteq \{x: \ \mathcal{P} \in \mathsf{D}(\mathcal{Q}')\} \cap \mathsf{D}(\mathcal{P}).$$

Рассмотрим функции

$$p(x) = \mathcal{P}, \qquad q(y) = \mathcal{Q}.$$

По предположению индукции функция p будет дифференцируема на интервале (a,b), причем

$$p'(x) = \mathcal{P}', \qquad x \in (a,b),$$

а q должна быть непрерывной элементарной функцией из списка на с.300.

Чтобы доказать (5.1.87), зафиксируем точку $x_0 \in (a,b)$ и рассмотрим два случая.

1. Предположим сначала, что число $p(x_0)$ лежит во внутренности множества $\mathsf{D}(\mathcal{Q}')$, то есть существует интервал (α,β) такой, что

$$p(x_0) \in (\alpha,\beta) \subseteq \mathsf{D}(\mathcal{Q}'). \tag{5.1.90}$$

Тогда, поскольку $\mathcal{Q}$ – выражение сложности $< k$, по предположению индукции определяемая им функция q должна быть дифференцируема на интервале (α,β), и ее производная должна определяться выражением $\mathcal{Q}'$:

$$q'(y) = \mathcal{Q}', \quad y \in (\alpha,\beta).$$

В частности, в точке $p(x_0)$ должно выполняться равенство

$$q'(p(x_0)) = \mathcal{Q}'\Big|_{y=p(x_0)}.$$

Теперь по теореме 5.1.4 мы получаем, что композиция $f(x) = q(p(x))$ должна быть дифференцируема в точке x_0, и

$$f'(x_0) = (5.1.27) = q'(p(x_0)) \cdot p'(x_0) = \\ = \mathcal{Q}'\Big|_{y=p(x_0)} \cdot \mathcal{P}'\Big|_{x=x_0} = (5.1.61) = \mathcal{F}'\Big|_{x=x_0}$$

Это формула (5.1.87) с подстановкой $x = x_0$.

2. Предположим далее, что число $p(x_0) \in \mathsf{D}(\mathcal{Q})$ лежит на границе множества $\mathsf{D}(\mathcal{Q}')$, то есть не существует интервала (α,β) такого, чтобы выполнялось (5.1.90). Поскольку $\mathcal{Q}$ – непрерывное элементарное выражение, одно из перечисленных списке на с.300, такое возможно только в случае, если $\mathcal{Q}$ есть степенное выражение, в котором показатель степени больше единицы и не лежит в $\frac{\mathbb{N}}{2\mathbb{N}-1}$,

$$\mathcal{Q} = y^b, \qquad b \in (1,+\infty) \setminus \frac{\mathbb{N}}{2\mathbb{N}-1},$$

а точка $p(x_0)$ при этом должна быть нулем:

$$p(x_0) = 0.$$

Чтобы доказать (5.1.87) при $x = x_0$, зафиксируем какую-нибудь последовательность $x_n \in (a,b)$, стремящуюся к x_0, но не попадающую в x_0:

$$x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x_0, \quad x_n \ne x_0.$$

Рассмотрим соответствующую последовательность $p(x_n)$. Поскольку функция p дифференцируема в точке x_0, она непрерывна в ней, и поэтому

$$p(x_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} p(x_0) = 0.$$

Далее нам нужно рассмотреть два случая:

– возможна ситуация, когда для почти всех $n \in \mathbb{N}$ выполняется $p(x_n) \ne p(x_0) = 0$;
– если же это не так, то для некоторой подпоследовательности аргументов x_{n_k} соответствующая последовательность значений $p(x_{n_k})$ будет обладать свойством $p(x_{n_k}) = p(x_0) = 0$.

a. Рассмотрим сначала первый случай, то есть когда для почти всех $n \in \mathbb{N}$ выполняется $p(x_n) \ne 0$. Тогда можно делить и умножать на $p(x_n) - p(x_0) \ne 0$, и мы получим

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(x_n)-f(x_0)}{x_n - x_0} = \lim_{n\to\infty} \frac{p(x_n)^b - p(x_0)^b}{x_n - x_0} = \\ = \lim_{n\to\infty} \frac{p(x_n)^b - p(x_0)^b}{p(x_n)-p(x_0)} \cdot \frac{p(x_n)-p(x_0)}{x_n - x_0} = \\ = \lim_{n\to\infty} \frac{p(x_n)^b - p(x_0)^b}{p(x_n)-p(x_0)} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{p(x_n)-p(x_0)}{x_n - x_0} = \\ = \begin{pmatrix} p(x_0) = 0 \\ p(x_0)^b = 0 \end{pmatrix} = \\ = \lim_{n\to\infty} \frac{p(x_n)^b}{p(x_n)} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{p(x_n)-p(x_0)}{x_n - x_0} = \\ = \lim_{n\to\infty} \underbrace{p(x_n)^{b-1}}_{b>1} \cdot p'(x_0) = 0 \cdot p'(x_0) = 0$$

b. После этого рассмотрим случай, когда для некоторой подпоследовательности аргументов x_{n_k} соответствующая последовательность значений $p(x_{n_k})$ обладает свойством $p(x_{n_k}) = p(x_0)$. Тогда последовательность x_n можно разбить на две подпоследовательности x_{n_k} и x_{n_i}, такие что

$$p(x_{n_k}) = p(x_0), \qquad p(x_{n_i}) \ne p(x_0)$$

Для подпоследовательности x_{n_i} мы получаем то же самое, что и в предыдущем случае:

$$\lim_{i\to\infty} \frac{f(x_{n_i})-f(x_0)}{x_{n_i} - x_0} = \lim_{i\to\infty} \frac{p(x_{n_i})^b - p(x_0)^b}{x_{n_i} - x_0} = 0.$$

А для x_{n_k} получаем:

$$\lim_{k\to\infty}\frac{f(x_{n_k})-f(x_0)}{x_{n_k}-x_0}=\lim_{k\to\infty}\frac{p(x_{n_k})^b-p(x_0)^b}{x_{n_k}-x_0}= \\ =\begin{pmatrix}\text{вспоминаем, что}\\ p(x_{n_k})=p(x_0)\end{pmatrix}= \\ =\lim_{k\to\infty}\frac{p(x_0)^b-p(x_0)^b}{x_{n_k}-x_0}=\lim_{k\to\infty}\frac{0}{x_{n_k}-x_0}=0$$

Вместе все это означает, что функция f должна иметь нулевую производную в точке x_0:

$$f'(x_0)=0,$$

и это то же самое, что дает формула (5.1.87) при $x=x_0$:

$$\mathcal{F}\Big|_{x=x_0}=\mathcal{Q}'\Big|_{y=p(x_0)}\cdot\mathcal{P}'\Big|_{x=x_0}= \\ =b\cdot y^{b-1}\Big|_{y=p(x_0)}\cdot\mathcal{P}'\Big|_{x=x_0}=0.$$

$\square$

◇ **5.1.42.** Покажем, что *при выборе выражения, представляющего функцию, область допустимых значений переменной в его производном выражении может меняться.* Рассмотрим функцию

$$f(x)=x.$$

Выражение в правой части этой формулы представляет собой переменную, поэтому его производная будет единицей, и значит, производная функции f также равна единице:

$$f'(x)=\frac{\partial x}{\partial x}=1,\quad x\in\mathbb{R}$$

Но функцию f можно представить другим выражением:

$$f(x)=\sqrt[3]{x^3}$$

Производная этого нового выражения будет определена только на множестве $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$, поэтому производная функции f, если ее вычислять таким образом, также должна быть определена только на этом множестве:

$$f'(x)=\frac{\partial\sqrt[3]{x^3}}{\partial x}=\frac{1}{3(\sqrt[3]{x^3})^2}\cdot 3\cdot x^2=1,\quad x\neq 0$$

Таким образом, при изменении выражения, которым представляется данная функция f, множество точек, в которых действует формула, выражающая производную функции f, может меняться. Замена данного представления другим может добавлять или выбрасывать какие-то точки, в которых формула для производной f будет верна.

◇ **5.1.43.** *Композиция выражений, дифференцируемых на любом интервале своей области допустимых значений переменной, может быть недифференцируема на каких-то интервалах своей области допустимых значений переменной.* Таким свойством обладает выражение

$$\arcsin\sin x$$

График определяемой им функции

$$h(x)=\arcsin\sin x$$

представляет собой "пилу":

– и видно, что в точках $x=\frac{\pi}{2}+\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$, эта функция не дифференцируема. Поэтому ее нельзя назвать дифференцируемой на прямой $\mathbb{R}$. Но при этом составляющие ее функции

$$f(x)=\sin x,\qquad g(y)=\arcsin y$$

дифференцируемы на каждом (открытом) интервале своей области определения.

§ 2 Приложения производной

(a) Правило Лопиталя

Теоремы о дифференцируемых функциях позволяют доказать важное *правило Лопиталя*, с помощью которого удается вычислять "сложные" пределы (которые иначе сосчитать бывает невозможно).

Раскрытие неопределенностей типа $\frac{0}{0}$.

Теорема 5.2.1 (правило Лопиталя для предела в точке с неопределенностью $\frac{0}{0}$). [8]

Пусть функции f и g обладают следующими свойствами:

[8] Эта теорема используется в главе 6 при доказательстве асимптотической формулы Тейлора-Пеано 6.2.35

(i) *f и g определены и дифференцируемы в некоторой выколотой окрестности $(a-\varepsilon, a) \cup (a, a+\varepsilon)$ точки a,*

(ii) $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ *и* $\lim_{x\to a} g(x) = 0$,

(iii) $g'(x) \neq 0$ *при* $x \neq a$,

(iv) *существует предел* $\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ *(конечный или бесконечный).*

Тогда существует предел $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$, *причем*

$$\boxed{\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}} \tag{5.2.91}$$

Доказательство. Чтобы доказать (5.2.91), нужно взять произвольную последовательность $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} a, \quad x_n \neq a$, и убедиться, что

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(x_n)}{g(x_n)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Доопределим функции f и g в точке a формулами

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & \text{если } x \in (a,b) \\ 0, & \text{если } x = a \end{cases} \qquad \tilde{g}(x) = \begin{cases} g(x), & \text{если } x \in (a,b) \\ 0, & \text{если } x = a \end{cases} \tag{5.2.92}$$

Тогда на каждом отрезке $[a, x_n]$ функции $\tilde{f}(x)$ и $\tilde{g}(x)$ удовлетворяют условиям теоремы Коши 5.1.8:

1) $\tilde{f}$ и $\tilde{g}$ непрерывны на отрезке $[a, x_n]$,
2) $\tilde{f}$ и $\tilde{g}$ дифференцируемы на интервале (a, x_n),
3) $g'(x) \neq 0$ при $x \in (a, x_n)$.

Значит, по теореме Коши 5.1.8, существует точка $\xi_n \in (a, x_n)$, такая что

$$\frac{\tilde{f}(x_n) - \tilde{f}(a)}{\tilde{g}(x_n) - \tilde{g}(a)} = \frac{f'(\xi_n)}{g'(\xi_n)} \qquad \xi_n \in (a, x_n)$$

Но, по формуле (5.2.92), $\tilde{f}(a) = \tilde{g}(a) = 0$, поэтому

$$\frac{\tilde{f}(x_n)}{\tilde{g}(x_n)} = \frac{f'(\xi_n)}{g'(\xi_n)}, \qquad \xi_n \in (a, x_n)$$

Теперь устремим n к бесконечности:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(x_n)}{g(x_n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{\tilde{f}(x_n)}{\tilde{g}(x_n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{f'(\xi_n)}{g'(\xi_n)} = \begin{pmatrix} \xi_n \in (a, x_n), \\ \text{поэтому} \\ \xi_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} a \end{pmatrix} = \lim_{\xi\to a} \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} =$$
$$= \begin{pmatrix} \text{неважно, какая} \\ \text{буква стоит под} \\ \text{знаком предела} \end{pmatrix} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Как раз это нам и нужно было проверить. □

Теорема 5.2.2 (правило Лопиталя для предела в бесконечности с неопределенностью $\frac{0}{0}$)**.** *Пусть функции f и g обладают следующими свойствами:*

(i) *f и g определены и дифференцируемы на некотором множестве $(-\infty, -E) \cup (E; +\infty)$,*

(ii) $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$ *и* $\lim_{x\to\infty} g(x) = 0$,

(iii) $g'(x) \neq 0$ *при* $x \in (-\infty, -E) \cup (E; +\infty)$,

(ii) *существует предел* $\lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ *(конечный или бесконечный).*

Тогда существует предел $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$, *причем*

$$\boxed{\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}} \tag{5.2.93}$$

Доказательство. Вычислим этот предел с помощью теоремы 5.2.1:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\left|\begin{array}{c} x=\frac{1}{t},\ t=\frac{1}{x}\\ t\underset{x\to\infty}{\longrightarrow}0\end{array}\right|=\lim_{t\to0}\frac{f(\frac{1}{t})}{g(\frac{1}{t})}=(\text{применяем теорему 5.2.1})=\lim_{t\to0}\frac{\big(f(\frac{1}{t})\big)'}{\big(g(\frac{1}{t})\big)'}=$$

$$=\lim_{t\to0}\frac{f'(\frac{1}{t})\cdot\big(-\frac{1}{t^2}\big)}{g'(\frac{1}{t})\cdot\big(-\frac{1}{t^2}\big)}=\lim_{t\to0}\frac{f'(\frac{1}{t})}{g'(\frac{1}{t})}=\left|\begin{array}{c} t=\frac{1}{x},\ x=\frac{1}{t},\\ x\underset{t\to0}{\longrightarrow}\infty\end{array}\right|=\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

□

◇ **5.2.1.** Вычислим предел

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin 2x}{\operatorname{arctg}3x}$$

Для этого можно воспользоваться теоремой 5.2.1:

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin 2x}{\operatorname{arctg}3x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\left(\begin{smallmatrix}\text{применяем}\\ \text{теорему 5.2.1}\end{smallmatrix}\right)=$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{(\sin 2x)'}{(\operatorname{arctg}3x)'}=\lim_{x\to0}\frac{\cos 2x\cdot2}{\frac{3}{1+9x^2}}=\frac{\cos0\cdot2}{\frac{3}{1+0}}=$$

$$=\frac{1\cdot2}{3}=\frac{2}{3}$$

◇ **5.2.2.** Правило Лопиталя можно применять несколько раз подряд. Покажем это на следующем примере:

$$\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\left(\frac{0}{0}\right)=\left(\begin{smallmatrix}\text{применяем}\\ \text{теорему 5.2.1}\end{smallmatrix}\right)=$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{(1-\cos x)'}{(x^2)'}=\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{2x}=\left(\frac{0}{0}\right)=$$

$$=\left(\begin{smallmatrix}\text{снова}\\ \text{применяем}\\ \text{теорему 5.2.1}\end{smallmatrix}\right)=\lim_{x\to0}\frac{(\sin x)'}{(2x)'}=\lim_{x\to0}\frac{\cos x}{2}=\frac{1}{2}$$

◇ **5.2.3.** Еще один пример, где правило Лопиталя применяется несколько раз:

$$\lim_{x\to0}\frac{\ln\cos x}{x^2}=\left(\frac{0}{0}\right)=\left(\begin{smallmatrix}\text{применяем}\\ \text{теорему 5.2.1}\end{smallmatrix}\right)=$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{(\ln\cos x)'}{(x^2)'}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{\cos x}\cdot(-\sin x)}{2x}=$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{-\sin x}{2x\cos x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\left(\begin{smallmatrix}\text{снова}\\ \text{применяем}\\ \text{теорему 5.2.1}\end{smallmatrix}\right)=$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{(-\sin x)'}{(2x\cos x)'}=\lim_{x\to0}\frac{-\cos x}{2\cos x-2x\sin x}=$$

$$=\frac{-1}{2-0}=-\frac{1}{2}$$

◇ **5.2.4.** Теперь пример, где применяется теорема 5.2.2:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}x}{\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}=\left(\frac{0}{0}\right)=\left(\begin{smallmatrix}\text{применяем}\\ \text{теорему 5.2.2}\end{smallmatrix}\right)=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{(\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}x)'}{\big(\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\big)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-\frac{1}{1+x^2}}{\frac{1}{1+\frac{1}{x^2}}\cdot\left(-\frac{2}{x^3}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{1+x^2}\cdot\frac{x^2+1}{x^2}\cdot\frac{x^3}{2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{2}=+\infty$$

▷▷ **5.2.5.** Вычислите пределы:

1. $\lim_{x\to1}\frac{\sin3\pi x}{\sin2\pi x}$.
2. $\lim_{x\to0}\frac{\operatorname{tg}x-x}{\sin x-x^2}$.
3. $\lim_{x\to0}\frac{\operatorname{tg}x-x}{\sin x-x}$.

Раскрытие неопределенностей типа $\frac{\infty}{\infty}$.

Теорема 5.2.3 (правило Лопиталя для предела в точке с неопределенностью $\frac{\infty}{\infty}$). *Пусть функции f и g обладают следующими свойствами:*

(i) *f и g определены и дифференцируемы в некоторой окрестности точки a,*

(ii) $\lim_{x\to a}f(x)=\infty$ *и* $\lim_{x\to a}g(x)=\infty$,

(iii) $g'(x)\neq0$ *в некоторой выколотой окрестности точки a,*

(iv) *существует предел* $\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ *(конечный или бесконечный).*

Тогда существует предел $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$, *причем*

$$\boxed{\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}}\tag{5.2.94}$$

Доказательство. 1. Рассмотрим сначала случай, когда предел $\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ конечен:

$$\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=A\in\mathbb{R} \tag{5.2.95}$$

Зафиксируем интервал $(a-\delta,a)$, на котором $g'(x)\neq 0$. В силу теоремы 5.2.7, функция $g(x)$ должна быть строго монотонна на $(a-\delta,a)$. Поэтому, если взять возрастающую последовательность

$$x_1<x_2<...<x_n<...<a,\quad x_n\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}a$$

то мы получим, что $g(x_n)$ – строго монотонная бесконечно большая последовательность:

$$g(x_n)\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}+\infty,\qquad g(x_1)<g(x_2)<...<g(x_n)<...\quad\Big(\text{или}\quad g(x_1)>g(x_2)>...>g(x_n)>...\Big)$$

Положив

$$y_n=g(x_n),\quad z_n=f(x_n)$$

мы теперь получим, что последовательности y_n и z_n удовлетворяют всем условиям теоремы Штольца 3.2.18: во первых,

$$y_n\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}\infty,\qquad y_1<y_2<...<y_n<...\quad\Big(\text{или}\quad y_1>y_2>...>y_n>...\Big)$$

и во вторых,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{z_n-z_{n-1}}{y_n-y_{n-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{f(x_n)-f(x_{n-1})}{g(x_n)-g(x_{n-1})}=$$
$$=\left(\begin{matrix}\text{по теореме Коши 5.1.8,}\\ \exists\xi_n\in(x_{n-1},x_n)\quad\frac{f(x_n)-f(x_{n-1})}{g(x_n)-g(x_{n-1})}=\frac{f'(\xi_n)}{g'(\xi_n)}\end{matrix}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{f'(\xi_n)}{g'(\xi_n)}=(2.2)=A$$

Значит, по теореме Штольца 3.2.18,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(x_n)}{g(x_n)}=\lim_{n\to\infty}\frac{z_n}{y_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{z_n-z_{n-1}}{y_n-y_{n-1}}=A$$

Это верно для всякой возрастающей последовательности $x_n\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}a$, значит, по теореме 3.4.4,

$$\lim_{x\to a-0}\frac{f(x)}{g(x)}=A$$

Аналогично получаем

$$\lim_{x\to a+0}\frac{f(x)}{g(x)}=A$$

2. Рассмотрим теперь случай, когда

$$\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\infty$$

Тогда $\frac{f'(x)}{g'(x)}\neq 0$ в некоторой выколотой окрестности точки a. (Это следует, например, из определения предела по Коши.) Значит, $f'(x)\neq 0$ в некоторой выколотой окрестности точки a. Таким образом, получается:

1) $f'(x)\neq 0$ в некоторой выколотой окрестности точки a, и

2) $\lim_{x\to a}\frac{g'(x)}{f'(x)}=0$

То есть выполняется посылка теоремы, но только с переставленными символами f и g, и с условием, что предел отношения производных конечен. Поскольку для случая конечного предела теорема уже доказана, имеем

$$\lim_{x\to a}\frac{g(x)}{f(x)}=0=\lim_{x\to a}\frac{g'(x)}{f'(x)}$$

откуда

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\infty=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

□

Теорема 5.2.4 (правило Лопиталя для предела в бесконечности с неопределенностью $\frac{\infty}{\infty}$)**.** *Пусть функции f и g обладают следующими свойствами:*

(i) *f и g определены и дифференцируемы на некотором множестве* $(-\infty, -E) \cup (E, +\infty)$,

(ii) $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ *и* $\lim_{x\to\infty} g(x) = \infty$,

(iii) $g'(x) \neq 0$ *при* $x \in (-\infty, -E) \cup (E, +\infty)$,

(ii) *существует предел* $\lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ *(конечный или бесконечный).*

Тогда существует предел $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$*, причем*

$$\boxed{\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}} \tag{5.2.96}$$

Доказательство. Здесь используется тот же прием, что и в доказательстве теоремы 5.2.2:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \left| \begin{matrix} x = \frac{1}{t},\ t = \frac{1}{x} \\ t \underset{x\to\infty}{\longrightarrow} 0 \end{matrix} \right| = \lim_{t\to 0} \frac{f(\frac{1}{t})}{g(\frac{1}{t})} = (\text{применяем теорему 5.2.3}) = \lim_{t\to 0} \frac{\left(f(\frac{1}{t})\right)'}{\left(g(\frac{1}{t})\right)'} =$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{f'(\frac{1}{t}) \cdot \left(-\frac{1}{t^2}\right)}{g'(\frac{1}{t}) \cdot \left(-\frac{1}{t^2}\right)} = \lim_{t\to 0} \frac{f'(\frac{1}{t})}{g'(\frac{1}{t})} = \left| \begin{matrix} t = \frac{1}{x},\ x = \frac{1}{t}, \\ x \underset{t\to 0}{\longrightarrow} \infty \end{matrix} \right| = \lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

□

◇ **5.2.6.** Вычислим предел

$$\lim_{x\to+0} \frac{\operatorname{ctg} x}{\ln x}$$

Для этого воспользуемся теоремами 5.2.3 и 5.2.1:

$$\lim_{x\to+0} \frac{\operatorname{ctg} x}{\ln x} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \left(\begin{matrix}\text{применяем}\\ \text{теорему 5.2.3}\end{matrix}\right) =$$

$$= \lim_{x\to+0} \frac{(\operatorname{ctg} x)'}{(\ln x)'} = \lim_{x\to+0} \frac{-\frac{1}{\sin^2 x}}{\frac{1}{x}} =$$

$$= -\lim_{x\to+0} \frac{x}{\sin^2 x} = \left(\frac{0}{0}\right) = \left(\begin{matrix}\text{применяем}\\ \text{теорему 5.2.1}\end{matrix}\right) =$$

$$= -\lim_{x\to+0} \frac{(x)'}{(\sin^2 x)'} = -\lim_{x\to+0} \frac{1}{2\sin x \cos x} =$$

$$= \left(-\frac{1}{+0}\right) = -\infty$$

◇ **5.2.7.** Вычислим предел

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x}$$

Для этого воспользуемся теоремой 5.2.4:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \left(\begin{matrix}\text{применяем}\\ \text{теорему 5.2.4}\end{matrix}\right) =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{(\ln x)'}{(x)'} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = +\infty$$

◇ **5.2.8.** Вычислим предел

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^3}{e^x} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \left(\begin{matrix}\text{применяем}\\ \text{теорему 5.2.4}\end{matrix}\right) =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{(x^3)'}{(e^x)'} = \lim_{x\to+\infty} \frac{3x^2}{e^x} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) =$$

$$= \left(\begin{matrix}\text{снова}\\ \text{применяем}\\ \text{теорему 5.2.4}\end{matrix}\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{(3x^2)'}{(e^x)'} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{6x}{e^x} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \left(\begin{matrix}\text{еще раз}\\ \text{применяем}\\ \text{теорему 5.2.4}\end{matrix}\right) =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{(6x)'}{(e^x)'} = \lim_{x\to+\infty} \frac{6}{e^x} = \left(\frac{6}{\infty}\right) = 0$$

▷▷ **5.2.9.** Вычислите пределы:

1. $\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(1+x^2)}{\ln\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x\right)}$.
2. $\lim_{x\to a} \frac{\ln(x-a)}{\ln(e^x - e^a)}$.
3. $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x + x^2 + x}{x^3 - e^x}$.

Раскрытие неопределенностей $0\cdot\infty$, $\infty-\infty$, 0^0, 1^∞, ∞^0. Покажем на примерах, как с помощью правил Лопиталя можно вычислять пределы с такими неопределенностями.

◇ **5.2.10** (неопределенность вида $0\cdot\infty$).

$$\lim_{x\to+0} x\cdot\ln x = (0\cdot\infty) = \lim_{x\to+0}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \left(\begin{smallmatrix}\text{применяем}\\ \text{теорему 5.2.3}\end{smallmatrix}\right) = \lim_{x\to+0}\frac{(\ln x)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'} = \lim_{x\to+0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = -\lim_{x\to+0} x = 0$$

◇ **5.2.11** (неопределенность вида $\infty-\infty$).

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{\cos x}-\operatorname{tg} x\right) = (\infty-\infty) = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin x}{\cos x} = \left(\frac{0}{0}\right) = \left(\begin{smallmatrix}\text{применяем}\\ \text{теорему 5.2.1}\end{smallmatrix}\right) = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{(1-\sin x)'}{(\cos x)'} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{-\cos x}{-\sin x} = 0$$

◇ **5.2.12** (неопределенность вида 0^0).

$$\lim_{x\to+0} x^x = \left(0^0\right) = \lim_{x\to+0} e^{\ln(x^x)} = \lim_{x\to+0} e^{x\ln x} = e^{\lim_{x\to+0} x\ln x} = \left(\begin{smallmatrix}\text{применяем}\\ \text{пример 3.1}\end{smallmatrix}\right) = e^0 = 1$$

◇ **5.2.13** (неопределенность вида 1^∞).

$$\lim_{x\to0}\cos x^{\operatorname{ctg}^2 x} = (1^\infty) = \lim_{x\to0} e^{\ln\left(\cos x^{\operatorname{ctg}^2 x}\right)} = \lim_{x\to0} e^{\operatorname{ctg}^2 x\ln\cos x} = e^{\lim_{x\to0}\operatorname{ctg}^2 x\ln\cos x} = e^{\lim_{x\to0}\cos^2 x\cdot\frac{\ln\cos x}{\sin^2 x}} = e^{\lim_{x\to0}\cos^2 x\cdot\lim_{x\to0}\frac{\ln\cos x}{\sin^2 x}} =$$
$$= e^{1\cdot\lim_{x\to0}\frac{\ln\cos x}{\sin^2 x}} = \left(e^{\frac{0}{0}}\right) = \left(\begin{smallmatrix}\text{применяем}\\ \text{теорему 5.2.1}\end{smallmatrix}\right) = e^{\lim_{x\to0}\frac{(\ln\cos x)'}{(\sin^2 x)'}} = e^{\lim_{x\to0}\frac{\frac{-\sin x}{\cos x}}{2\sin x\cos x}} = e^{\lim_{x\to0}\frac{-1}{2\cos^2 x}} = e^{\frac{-1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}}$$

◇ **5.2.14** (неопределенность вида ∞^0).

$$\lim_{x\to+\infty}(\ln x)^{\frac{1}{x}} = \left(\infty^0\right) = \lim_{x\to+\infty} e^{\ln(\ln x)^{\frac{1}{x}}} = \lim_{x\to+\infty} e^{\frac{\ln(\ln x)}{x}} = e^{\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(\ln x)}{x}} = \left(e^{\frac{\infty}{\infty}}\right) = \left(\begin{smallmatrix}\text{применяем}\\ \text{теорему 5.2.4}\end{smallmatrix}\right) = e^{\lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln(\ln x))'}{(x)'}} = e^{\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x\ln x}}{1}} = e^{\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x\ln x}} = e^0 = 1$$

▷▷ **5.2.15.** Вычислите пределы:

1. $\lim_{x\to+\infty} x^2\cdot e^{-2x}$.
2. $\lim_{x\to1+0}\ln x\cdot\ln(x-1)$.
3. $\lim_{x\to0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}\right)$.
4. $\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x}-\ln x)$.
5. $\lim_{x\to+0}\left(\ln\frac{1}{x}\right)^x$.
6. $\lim_{x\to+\infty}(\ln 2x)^{\frac{1}{\ln x}}$.
7. $\lim_{x\to0}\left(1+\sin^2 x\right)^{\frac{1}{\operatorname{tg}^2 x}}$.
8. $\lim_{x\to1-0}(1-x)^{\ln x}$.
9. $\lim_{x\to+0}(\ln(x+e))^{\frac{1}{x}}$.

(b) Построение графика

Монотонность и экстремум.

Теорема 5.2.5 (достаточное условие монотонности). *Пусть f – дифференцируемая функция на интервале $(a;b)$. Тогда*

(a) если ее производная положительна всюду на $(a;b)$,

$$f'(x)>0,\qquad x\in(a;b),\tag{5.2.97}$$

f (строго) возрастает на $(a;b)$,

(b) если ее производная отрицательна всюду на $(a;b)$,

$$f'(x)<0,\qquad x\in(a;b),\tag{5.2.98}$$

f (строго) убывает на $(a;b)$.

Доказательство. 1. Пусть выполняется (5.2.97). Тогда для любых $x,y\in(a;b)$ таких что $x<y$ можно по теореме Лагранжа 5.1.7 подобрать точку $\xi\in(x;y)$ такую, что

$$0<f'(\xi)=\frac{f(y)-f(x)}{\underbrace{y-x}_{\substack{\vee\\0}}}\quad\Rightarrow\quad 0<f(y)-f(x)\quad\Rightarrow\quad f(x)<f(y).$$

2. Наоборот, если выполняется (5.2.98), то для любых $x,y\in(a;b)$ таких что $x<y$ можно по

теореме Лагранжа 5.1.7 подобрать точку $\xi \in (x; y)$ такую, что

$$0 > f'(\xi) = \frac{f(y) - f(x)}{\underbrace{y - x}_{\substack{\vee \\ 0}}} \quad \Rightarrow \quad 0 > f(y) - f(x) \quad \Rightarrow \quad f(x) > f(y).$$

□

Теорема 5.2.6 (о нестрогой монотонности)**.** *Пусть f – дифференцируемая функция на интервале $(a; b)$. Тогда*

(a) *f неубывает на $(a; b)$ в том и только в том случае, если ее производная неотрицательна всюду на $(a; b)$:*
$$f'(x) \geqslant 0, \qquad x \in (a; b)$$

(b) *f невозрастает на $(a; b)$ в том и только в том случае, если ее производная неположительна всюду на $(a; b)$:*
$$f'(x) \leqslant 0, \qquad x \in (a; b)$$

Доказательство. Мы докажем утверждение (a), оставив читателю выполнить то же самое для (b) по аналогии. Если f неубывает,

$$\forall x, y \in (a; b) \qquad \Big(x < y \qquad \Longrightarrow \qquad f(x) \leqslant f(y)\Big)$$

то, переходя при вычислении производной в точке $x \in (a; b)$ к одностороннему пределу, мы получим:

$$f'(x) = \lim_{y \to x} \frac{f(y) - f(x)}{y - x} = \lim_{y \to x+0} \frac{\overbrace{f(y) - f(x)}^{\substack{0 \\ \wedge\!\!\backslash}}}{\underbrace{y - x}_{\substack{\vee \\ 0}}} \geqslant 0$$

Наоборот, если в любой точке $x \in (a; b)$ производная неотрицательна, то для любых $x, y \in (a; b)$ таких, что $x < y$, подобрав по теореме Лагранжа 5.1.7 точку $\xi \in (a; b)$ со свойством (5.1.33), мы получим:

$$\frac{f(y) - f(x)}{\underbrace{y - x}_{\substack{\vee \\ 0}}} = f'(\xi) \geqslant 0 \qquad \Longrightarrow \qquad f(y) - f(x) \geqslant 0 \qquad \Longrightarrow \qquad f(x) \leqslant f(y)$$

□

Теорема 5.2.7 (о строгой монотонности)**.** [9] *Пусть f – дифференцируемая функция на интервале (a, b), причем ее производная нигде не обращается в нуль:*

$$\forall x \in (a, b) \quad f'(x) \neq 0 \tag{5.2.99}$$

Тогда f строго монотонна на (a, b), а именно:

— *либо, $f'(x) > 0$ всюду на (a, b), и в этом случае f возрастает на (a, b):*

$$\forall x, y \in (a; b) \qquad \Big(x < y \quad \Longrightarrow \quad f(x) < f(y)\Big)$$

— *либо, $f'(x) < 0$ всюду на (a, b), и в этом случае f убывает на (a, b):*

$$\forall x, y \in (a; b) \qquad \Big(x < y \quad \Longrightarrow \quad f(x) > f(y)\Big).$$

Доказательству этой теоремы мы предпошлем две леммы.

[9] Теорема 5.2.7 используется ниже при доказательстве правила Лопиталя для раскрытия неопределенностей типа $\frac{\infty}{\infty}$

Лемма 5.2.8. *В условиях теоремы 5.2.7 для любых трех точек $x, y, z \in (a; b)$, связанных неравенством*

$$x < y < z,$$

выполняется следующее:

(a) *условие $f(x) < f(z)$ влечет за собой условие $f(x) < f(y) < f(z)$:*

$$f(x) < f(z) \qquad \Longrightarrow \qquad f(x) < f(y) < f(z)$$

(b) *условие $f(x) > f(z)$ влечет за собой условие $f(x) > f(y) > f(z)$:*

$$f(x) > f(z) \qquad \Longrightarrow \qquad f(x) > f(y) > f(z).$$

Доказательство. Мы докажем утверждение (a) (a (b) читатель сможет доказать по аналогии). Пусть $f(x) < f(z)$. Нам нужно показать, что число $f(y)$ лежит в интервале $(f(x); f(z))$:

$$f(y) \in \big(f(x); f(z)\big)$$

Если это не так, то либо $f(y)$ лежит ниже этого интервала, то есть $f(y) \leqslant f(x)$, либо, наоборот, выше, то есть $f(y) \geqslant f(z)$. Убедимся, что ни то, ни другое невозможно.

1. Предположим, что $f(y) \leqslant f(x)$. Если $f(y) = f(x)$, то по теореме Ролля 5.1.6 найдется точка $\xi \in (x; y)$ такая, что

$$f'(\xi) = 0,$$

что невозможно. Значит, должно быть $f(y) < f(x)$. Тогда, если обозначить $C = f(x)$, то мы получим

$$f(y) < \underbrace{f(x)}_{\substack{\| \\ C}} < f(z),$$

и, по теореме Коши о промежуточном значении 3.3.6, на интервале $(y; z)$ должна найтись такая точка $c \in (y; z)$, что

$$f(c) = C = f(x)$$

Теперь опять по теореме Ролля 5.1.6 должна существовать точка $\xi \in (x; c)$ такая, что

$$f'(\xi) = 0,$$

и это снова противоречит условию (5.2.99). Мы получаем, что неравенство $f(y) \leqslant f(x)$ невозможно.

2. Проверим, что будет, если $f(y) \geqslant f(z)$. Если $f(y) = f(z)$, то по теореме Ролля 5.1.6 найдется точка $\xi \in (y; z)$ такая, что

$$f'(\xi) = 0,$$

что невозможно. Значит, должно быть $f(y) > f(z)$. Тогда, если обозначить $C = f(z)$, то мы получим

$$f(x) < \underbrace{f(z)}_{\substack{\| \\ C}} < f(y),$$

и, по теореме Коши о промежуточном значении 3.3.6, на интервале $(x; y)$ должна найтись такая точка $c \in (x; y)$, что

$$f(c) = C = f(z)$$

Теперь опять по теореме Ролля 5.1.6 должна существовать точка $\xi \in (c; z)$ такая, что

$$f'(\xi) = 0,$$

и это снова противоречит условию (5.2.99). Мы получаем, что неравенство $f(y) \geqslant f(x)$ тоже невозможно. $\square$

Лемма 5.2.9. *В условиях теоремы 5.2.7 пусть $\alpha, \beta \in (a, b)$ – произвольные точки, связанные неравенством*

$$\alpha < \beta,$$

Тогда:

(a) *если $f(\alpha) < f(\beta)$, то функция f возрастает на интервале $(\alpha;\beta)$:*

$$f(\alpha) < f(\beta) \quad \Longrightarrow \quad \left\{ \forall x, y \in (\alpha;\beta) \qquad \Big(x < y \quad \Longrightarrow \quad f(x) < f(y) \Big) \right\}$$

(b) *если $f(\alpha) > f(\beta)$, то функция f убывает на интервале $(\alpha;\beta)$:*

$$f(\alpha) > f(\beta) \quad \Longrightarrow \quad \left\{ \forall x, y \in (\alpha;\beta) \qquad \Big(x < y \quad \Longrightarrow \quad f(x) > f(y) \Big) \right\}$$

(c) *равенство $f(\alpha) = f(\beta)$ невозможно.*

Доказательство. 1. Если $f(\alpha) < f(\beta)$, то мы получаем логическую цепочку:

$$\underbrace{f(\alpha) < f(\beta), \qquad \alpha < x < \beta}$$
$$\text{лемма 5.2.8(a)} \ \Downarrow$$
$$f(\alpha) < \underbrace{f(x) < f(\beta), \qquad x < y < \beta}$$
$$\text{лемма 5.2.8(a)} \ \Downarrow$$
$$\underbrace{f(x) < f(y) < f(\beta)}$$
$$\Downarrow$$
$$f(x) < f(y)$$

2. Наоборот, если $f(\alpha) > f(\beta)$, то мы получаем цепочку:

$$\underbrace{f(\alpha) > f(\beta), \qquad \alpha < x < \beta}$$
$$\text{лемма 5.2.8(b)} \ \Downarrow$$
$$f(\alpha) > \underbrace{f(x) > f(\beta), \qquad x < y < \beta}$$
$$\text{лемма 5.2.8(b)} \ \Downarrow$$
$$\underbrace{f(x) > f(y) > f(\beta)}$$
$$\Downarrow$$
$$f(x) > f(y)$$

3. Остается убедиться, что равенство $f(\alpha) = f(\beta)$ невозможно. Действительно, если бы оно выполнялось, то мы получили бы по теореме Ролля 5.1.6, что $f'(\xi) = 0$ для некоторого $\xi \in (\alpha, \beta)$, а это противоречит условию (5.2.99). □

Доказательство теоремы 5.2.7. Зафиксируем произвольные точки $\alpha, \beta \in (a, b)$, связанные неравенством

$$\alpha < \beta$$

По лемме 5.2.9(c), $f(\alpha) \neq f(\beta)$, значит должно быть либо $f(\alpha) < f(\beta)$, либо $f(\alpha) > f(\beta)$. Рассмотрим каждый случай отдельно.

1. Пусть $f(\alpha) < f(\beta)$. Тогда по лемме 5.2.9(a), функция f возрастает на интервале $(\alpha;\beta)$. Если теперь выбрать какие-нибудь точки x, y так, чтобы

$$a < x < \alpha < \beta < y < b \tag{5.2.100}$$

то снова по лемме 5.2.9 функция f должна быть строго монотонной на интервале $(x;y)$. При этом, как мы уже поняли, f возрастает на меньшем интервале $(\alpha;\beta)$, значит, она возрастает и на большем интервале $(x;y)$. Поскольку это верно для любых x, y, удовлетворяющих условию (5.2.100), мы получаем, что f возрастает на всем интервале $(a;b)$.

Далее получается цепочка:

$$f \text{ возрастает на интервале } (a;b)$$
$$\Downarrow \ \text{теорема 5.2.6(a)}$$
$$f'(x) \geqslant 0, \qquad x \in (a;b)$$

$$\Downarrow \quad \text{(5.2.99)}$$

$$f'(x) > 0, \qquad x \in (a; b)$$

2. Пусть наоборот, $f(\alpha) > f(\beta)$. Тогда по лемме 5.2.9(b), функция f убывает на интервале $(\alpha; \beta)$. Если теперь выбрать какие-нибудь точки x, y так, чтобы выполнялось (5.2.100), то снова по лемме 5.2.9 функция f должна быть строго монотонной на интервале $(x; y)$. При этом, как мы уже поняли, f убывает на меньшем интервале $(\alpha; \beta)$, значит, она убывает и на большем интервале $(x; y)$. Поскольку это верно для любых x, y, удовлетворяющих условию (5.2.100), мы получаем, что f убывает на всем интервале $(a; b)$.

Далее получается цепочка:

$$f \text{ убывает на интервале } (a; b)$$

$$\Downarrow \quad \text{теорема 5.2.6(b)}$$

$$f'(x) \leqslant 0, \qquad x \in (a; b)$$

$$\Downarrow \quad \text{(5.2.99)}$$

$$f'(x) < 0, \qquad x \in (a; b)$$

□

- Точка x_0 называется
  - точкой *строгого локального максимума* функции f, если в некоторой окрестности $(x_0 - \delta; x_0 + \delta)$ точки x_0 выполняется неравенство

    $$f(x) < f(x_0)$$

  - точкой *строгого локального минимума* функции f, если в некоторой окрестности $(x_0 - \delta; x_0 + \delta)$ точки x_0 выполняется неравенство

    $$f(x) > f(x_0)$$

  - точкой *локального экстремума* функции f, если она является точкой строгого локального минимума, или строгого локального максимума.

Теорема 5.2.10 (необходимое условие локального экстремума). *Если функция f имеет в точке x_0 локальный экстремум и дифференцируема в этой точке, то*

$$f'(x_0) = 0$$

Доказательство. В точке x_0 функция f достигает максимума или минимума на некотором интервале $(x_0 - \delta; x_0 + \delta)$, значит, по теореме Ферма 5.1.5, $f'(x_0) = 0$. □

Теорема 5.2.11 (достаточное условие локального экстремума). *Пусть функция f дифференцируема в некоторой окрестности $(x_0 - \delta; x_0 + \delta)$ точки x_0. Тогда*

- *если $f'(x) > 0$ при $x \in (x_0 - \delta; x_0)$, и $f'(x) < 0$ при $x \in (x_0; x_0 + \delta)$ (то есть при переходе через точку x_0 производная меняет знак с $+$ на $-$), то x_0 – точка строгого локального максимума;*
- *если $f'(x) < 0$ при $x \in (x_0 - \delta; x_0)$, и $f'(x) > 0$ при $x \in (x_0; x_0 + \delta)$ (то есть при переходе через точку x_0 производная меняет знак с $-$ на $+$), то x_0 – точка строгого локального минимума.*

Доказательство. Пусть при переходе через точку x_0 производная меняет знак с $-$ на $+$. Тогда по теореме 5.2.7, на интервале $(x_0 - \delta; x_0)$ функция f строго убывает, а на интервале $(x_0; x_0 + \delta)$ функция f строго возрастает, значит x_0 – точка локального минимума.

Аналогично рассматривается случай, когда при переходе через точку x_0 производная меняет знак с $-$ на $+$. □

Выпуклость и перегиб. Пусть функция f определена на интервале $(a; b)$ и пусть $a < \alpha < \beta < b$. Проведем хорду через точки $(\alpha; f(\alpha))$ и $(\beta; f(\beta))$ на графике функции f:

Уравнение этой хорды имеет вид

$$y = \frac{f(\beta) \cdot (x - \alpha) + f(\alpha) \cdot (\beta - x)}{\beta - \alpha}$$

Теорема 5.2.12. *Для функции $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ следующие условия эквивалентны:*

(i) *для любых двух точек $\alpha, \beta :\ a < \alpha < \beta < b$ график функции f на интервале (α, β) лежит ниже хорды:*

$$f(x) < \frac{f(\beta) \cdot (x - \alpha) + f(\alpha) \cdot (\beta - x)}{\beta - \alpha}, \quad a < \alpha < x < \beta < b \tag{5.2.101}$$

(ii) *для любых двух точек $\alpha \neq \beta \in (a, b)$ и любого числа $\lambda \in (0, 1)$ выполняется неравенство*

$$f(\lambda \cdot \alpha + (1 - \lambda) \cdot \beta) < \lambda \cdot f(\alpha) + (1 - \lambda) \cdot f(\beta) \tag{5.2.102}$$

- Если выполняются условия (i) и (ii) этой теоремы, то говорят, что функция f *выпукла вниз* на интервале (a, b).

Доказательство. 1. (i)$\Rightarrow$(ii). Пусть выполнено (i) и пусть $a < \alpha < \beta < b$. Зафиксируем $\lambda \in (0, 1)$. Тогда, положив

$$x = \lambda \cdot \alpha + (1 - \lambda) \cdot \beta$$

мы получим:

$$\frac{\beta - x}{\beta - \alpha} = \frac{\beta - \lambda \cdot \alpha - (1 - \lambda) \cdot \beta}{\beta - \alpha} = \frac{-\lambda \cdot \alpha + \lambda \cdot \beta}{\beta - \alpha} = \frac{\lambda \cdot (\beta - \alpha)}{\beta - \alpha} = \lambda,$$

$$\frac{x - \alpha}{\beta - \alpha} = \frac{\lambda \cdot \alpha + (1 - \lambda) \cdot \beta - \alpha}{\beta - \alpha} = \frac{(1 - \lambda) \cdot \beta - (1 - \lambda) \cdot \alpha}{\beta - \alpha} = \frac{(1 - \lambda) \cdot (\beta - \alpha)}{\beta - \alpha} = 1 - \lambda,$$

поэтому

$$f(\lambda \cdot \alpha + (1 - \lambda) \cdot \beta) = f(x) < (5.2.101) < \frac{f(\beta) \cdot (x - \alpha) + f(\alpha) \cdot (\beta - x)}{\beta - \alpha} =$$

$$= \underbrace{\frac{x - \alpha}{\beta - \alpha}}_{1-\lambda} \cdot f(\beta) + \underbrace{\frac{\beta - x}{\beta - \alpha}}_{\lambda} \cdot f(\alpha) = \lambda \cdot f(\alpha) + (1 - \lambda) \cdot f(\beta).$$

Это доказывает неравенство (5.2.102) для случая $\alpha < \beta$. Если $\beta < \alpha$, то по уже доказанному мы получим

$$f(\lambda \cdot \beta + (1 - \lambda) \cdot \alpha) < \lambda \cdot f(\beta) + (1 - \lambda) \cdot f(\alpha), \quad \lambda \in (0, 1).$$

Обозначив $t = 1 - \lambda$, мы превратим это неравенство в такое:

$$f((1-t)\cdot\beta + t\cdot\alpha) < (1-t)\cdot f(\beta) + t\cdot f(\alpha), \quad t \in (0,1).$$

И теперь если сделать новую замену $\lambda = t$, мы получим

$$f((1-\lambda)\cdot\beta + \lambda\cdot\alpha) < (1-\lambda)\cdot f(\beta) + \lambda\cdot f(\alpha), \quad \lambda \in (0,1).$$

и это будет то же неравенство (5.2.102), но уже с $\beta < \alpha$.

2. (ii)⇒(i). Пусть выполнено (ii) и пусть $a < \alpha < \beta < b$. Зафиксируем $x \in (\alpha, \beta)$. Тогда, положив

$$\lambda = \frac{\beta - x}{\beta - \alpha}$$

мы получим:

$$1 - \lambda = 1 - \frac{\beta - x}{\beta - \alpha} = \frac{x - \alpha}{\beta - \alpha},$$

$$\lambda\cdot\alpha + (1-\lambda)\cdot\beta = \frac{\beta - x}{\beta - \alpha}\cdot\alpha + \frac{x-\alpha}{\beta-\alpha}\cdot\beta = \frac{\beta\cdot\alpha - x\cdot\alpha + x\cdot\beta - \alpha\cdot\beta}{\beta - \alpha} = x,$$

поэтому

$$f(x) = f(\lambda\cdot\alpha + (1-\lambda)\cdot\beta) < (5.2.102) < \lambda\cdot f(\alpha) + (1-\lambda)\cdot f(\beta) =$$
$$= \underbrace{\frac{x-\alpha}{\beta-\alpha}}_{1-\lambda}\cdot f(\beta) + \underbrace{\frac{\beta - x}{\beta-\alpha}}_{\lambda}\cdot f(\alpha) = \frac{f(\beta)\cdot(x-\alpha) + f(\alpha)\cdot(\beta - x)}{\beta - \alpha}$$

□

Точно так же доказывается

Теорема 5.2.13. *Для функции $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ следующие условия эквивалентны:*

(i) f для любых двух точек α, β : $a < \alpha < \beta < b$ график функции f на интервале (α, β) лежит выше хорды:

$$\frac{f(\beta)\cdot(x-\alpha) + f(\alpha)\cdot(\beta - x)}{\beta - \alpha} < f(x), \quad a < \alpha < x < \beta < b \qquad (5.2.103)$$

(ii) для любых двух точек $\alpha, \beta \in (a,b)$ и любого числа $\lambda \in (0,1)$ выполняется неравенство

$$f(\lambda\cdot\alpha + (1-\lambda)\cdot\beta) > \lambda\cdot f(\alpha) + (1-\lambda)\cdot f(\beta) \qquad (5.2.104)$$

- Если выполняются условия (i) и (ii) этой теоремы, то говорят, что функция f *выпукла вверх* на интервале (a,b).

Теорема 5.2.14 (достаточное условие выпуклости)**.** *Пусть функция f дважды дифференцируема на интервале $(a;b)$. Тогда*

– *если $f''(x) < 0$ при $x \in (a;b)$, то функция f выпукла вверх на интервале $(a;b)$;*

– *если $f''(x) > 0$ при $x \in (a;b)$, то функция f выпукла вниз на интервале $(a;b)$.*

Доказательство. Рассмотрим разность между хордой и функцией:

$$\frac{f(\beta)\cdot(x-\alpha)+f(\alpha)\cdot(\beta-x)}{\beta-\alpha}-f(x)=\frac{f(\beta)\cdot(x-\alpha)+f(\alpha)\cdot(\beta-x)-f(x)\cdot(\beta-\alpha)}{\beta-\alpha}=$$

$$=\frac{f(\beta)\cdot(x-\alpha)+f(\alpha)\cdot(\beta-x)-f(x)\cdot(\beta-\alpha)+f(x)\cdot(x-x)}{\beta-\alpha}=$$

$$=\frac{[f(\beta)-f(x)]\cdot(x-\alpha)-[f(x)-f(\alpha)]\cdot(\beta-x)}{\beta-\alpha}=$$

$$=\begin{pmatrix}\text{применяем теорему Лагранжа 5.1.7}\\ \text{для } f \text{ на отрезках } [x;\beta] \text{ и } [\alpha;x]:\\ \text{найдутся } \theta\in[x;\beta] \text{ и } \eta\in[\alpha;x]\\ \text{такие что } f(\beta)-f(x)=f'(\theta)\cdot(\beta-x)\\ \text{и } f(x)-f(\alpha)=f'(\eta)\cdot(x-\alpha)\end{pmatrix}=$$

$$=\frac{f'(\theta)\cdot(\beta-x)\cdot(x-\alpha)-f'(\eta)\cdot(x-\alpha)\cdot(\beta-x)}{\beta-\alpha}=\frac{[f'(\theta)-f'(\eta)]\cdot(\beta-x)\cdot(x-\alpha)}{\beta-\alpha}=$$

$$=\begin{pmatrix}\text{снова применяем теорему Лагранжа 5.1.7}\\ \text{но уже для } f'(x) \text{ на отрезке } [\eta;\theta]:\\ \text{найдется } \xi\in[\eta;\theta]\\ \text{такое что } f'(\theta)-f'(\eta)=f''(\xi)\cdot(\theta-\eta)\end{pmatrix}=f''(\xi)\cdot\frac{(\theta-\eta)\cdot(\beta-x)\cdot(x-\alpha)}{\beta-\alpha}$$

Заметим теперь, что $(\theta-\eta)>0$, $\quad(\beta-x)>0$, $\quad(x-\alpha)>0$, $\quad(\beta-\alpha)>0$. Значит, если $f''(x)<0$ при $x\in(a;b)$, то, в частности, $f''(\xi)<0$, и поэтому

$$\frac{f(\beta)\cdot(x-\alpha)+f(\alpha)\cdot(\beta-x)}{\beta-\alpha}-f(x)<0$$

(то есть функция f выпукла вверх на интервале $(a;b)$). Если же $f''(x)>0$ при $x\in(a;b)$, то, в частности, $f''(\xi)>0$, и поэтому

$$\frac{f(\beta)\cdot(x-\alpha)+f(\alpha)\cdot(\beta-x)}{\beta-\alpha}-f(x)<0$$

(то есть функция f выпукла вниз на интервале $(a;b)$). □

- Точка x_0 называется *точкой перегиба* функции f, если при переходе через x_0 выпуклость вверх меняется на выпуклость вниз (или наоборот). Иными словами, имеется некоторая окрестность $(x_0-\delta;x_0+\delta)$ такая, что на интервале $(x_0-\delta;x_0)$ функция f выпукла вверх, а на интервале $(x_0;x_0+\delta)$ она выпукла вниз (или наоборот, на $(x_0-\delta;x_0)$ функция f выпукла вниз, а на интервале $(x_0;x_0+\delta)$ она выпукла вверх).

Теорема 5.2.15 (о точках перегиба)**.** *Пусть функция f дважды дифференцируема на интервале $(a;b)$, причем ее вторая производная f'' непрерывна на $(a;b)$. Тогда если точка $x_0\in(a;b)$ – точка перегиба функции f, то $f''(x_0)=0$.*

Доказательство. Предположим, что $f''(x_0)\neq0$, тогда либо $f''(x_0)<0$, либо $f''(x_0)>0$. Если $f''(x_0)<0$, то, по теореме о сохранении знака 3.3.4, $f''(x)<0$ для всех x из некоторой окрестности $(x_0-\delta;x_0+\delta)$ точки x_0. Поэтому по теореме 5.2.14 этой главы, f будет выпукла вверх всюду в окрестности $(x_0-\delta;x_0+\delta)$, и значит x_0 не может быть точкой перегиба. Аналогично, если $f''(x_0)>0$, то по теореме о сохранении знака 3.3.4, $f''(x)>0$ для всех x из некоторой окрестности $(x_0-\delta;x_0+\delta)$ точки x_0. Поэтому по теореме 5.2.14 этой главы, f будет выпукла вверх всюду в окрестности $(x_0-\delta;x_0+\delta)$, и опять x_0 не может быть точкой перегиба. □

Следующее наблюдение довольно неожиданно.

Теорема 5.2.16. *Если функция f выпукла (вниз или вверх) на интервале (a,b), то она непрерывна на (a,b).*

Доказательство. Будем считать, что f выпукла вниз. Зафиксируем точку $x\in(a,b)$ и число $h>0$ так, чтобы

$$a<x-h<x<x+h<b.$$

Покажем, что если

$$\lambda_n\in(0,1)\quad\&\quad\lambda_n\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}0 \tag{5.2.105}$$

то
$$f(x-\lambda_n\cdot h)\underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f(x)\quad \&\quad f(x+\lambda_n\cdot h)\underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f(x). \tag{5.2.106}$$
Этого достаточно, чтобы сделать вывод, что из
$$x_n\underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x$$
следует
$$f(x_n)\underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f(x).$$

1. Зафиксируем $\varepsilon>0$ и покажем, что из условий (5.2.105) следует, что неравенство
$$f(x-\lambda_n\cdot h)<f(x)+\varepsilon \tag{5.2.107}$$
верно для почти всех $n\in\mathbb{N}$. Это следует из того, что в цепочке
$$f(x-\lambda_n\cdot h)=f\Big((1-\lambda_n)\cdot x+\lambda_n\cdot(x-h)\Big)<(5.2.102)<(1-\underset{\substack{\downarrow\\ 0}}{\lambda_n})\cdot f(x)+\underset{\substack{\downarrow\\ 0}}{\lambda_n}\cdot f(x-h)<f(x)+\varepsilon$$
последнее неравенство верно для почти всех $n\in\mathbb{N}$.

2. Покажем, что при $\varepsilon>0$ из условий (5.2.105) следует, что неравенство
$$f(x+\lambda_n\cdot h)<f(x)+\varepsilon \tag{5.2.108}$$
тоже верно для почти всех $n\in\mathbb{N}$. Это следует из того, что в цепочке
$$f(x+\lambda_n\cdot h)=f\Big((1-\lambda_n)\cdot x+\lambda_n\cdot(x+h)\Big)<(5.2.102)<(1-\underset{\substack{\downarrow\\ 0}}{\lambda_n})\cdot f(x)+\underset{\substack{\downarrow\\ 0}}{\lambda_n}\cdot f(x+h)<f(x)+\varepsilon$$
последнее неравенство верно для почти всех $n\in\mathbb{N}$.

3. Теперь заметим, что
$$f(x)=f\Big(\frac{x-\lambda_n\cdot h}{2}+\frac{x+\lambda_n\cdot h}{2}\Big)<(5.2.102)<\frac{1}{2}\cdot f(x-\lambda_n\cdot h)+\frac{1}{2}\cdot f(x+\lambda_n\cdot h)$$
и поэтому
$$2f(x)<f(x-\lambda_n\cdot h)+f(x+\lambda_n\cdot h).$$
Отсюда следует, во-первых, что для почти всех $n\in\mathbb{N}$ выполняются неравенства
$$2f(x)<f(x-\lambda_n\cdot h)+\underbrace{f(x+\lambda_n\cdot h)}_{\substack{\wedge\ (5.2.108)\\ f(x)+\varepsilon}}<f(x-\lambda_n\cdot h)+f(x)+\varepsilon$$
$$\Downarrow$$
$$2f(x)<f(x-\lambda_n\cdot h)+f(x)+\varepsilon$$
$$\Downarrow$$
$$f(x)<f(x-\lambda_n\cdot h)+\varepsilon$$
$$\Downarrow$$
$$f(x)-\varepsilon<f(x-\lambda_n\cdot h)$$
$$\Downarrow\ (5.2.107)$$
$$f(x)-\varepsilon<f(x-\lambda_n\cdot h)<f(x)+\varepsilon.$$
Это верно для любого $\varepsilon>0$, и поэтому
$$f(x-\lambda_n\cdot h)\underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f(x).$$
И, во-вторых, для почти всех $n\in\mathbb{N}$ выполняются неравенства
$$2f(x)<\underbrace{f(x-\lambda_n\cdot h)}_{\substack{\wedge\ (5.2.107)\\ f(x)+\varepsilon}}+f(x+\lambda_n\cdot h)<f(x)+\varepsilon+f(x+\lambda_n\cdot h)$$

$$\Downarrow$$
$$2f(x) < f(x) + \varepsilon + f(x + \lambda_n \cdot h)$$
$$\Downarrow$$
$$f(x) < \varepsilon + f(x + \lambda_n \cdot h)$$
$$\Downarrow$$
$$f(x) - \varepsilon < f(x + \lambda_n \cdot h)$$
$$\Downarrow \ (5.2.108)$$
$$f(x) - \varepsilon < f(x + \lambda_n \cdot h) < f(x) + \varepsilon.$$

Это верно для любого $\varepsilon > 0$, и поэтому

$$f(x + \lambda_n \cdot h) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f(x).$$

Мы доказали (5.2.106). □

◇ **5.2.16.** Выпуклая функция не обязана быть дифференцируемой. Например, функция

$$f(x) = e^{|x|}$$

не дифференцируема в точке 0, но выпукла вниз. Это доказывается сначала для участков $(-\infty, 0]$ и $[0, +\infty)$, а потом нужно заметить, что хорда, соединяющая точки с аргументами, лежащими справа и слева от нуля, $\alpha < 0 < \beta$, будет лежать выше двух хорд, соединяющих аргумент α с аргументом 0, и 0 с β. И поэтому эта хорда будет выше графика f на участке (α, β).

Асимптоты. Асимптотой называется прямая, к которой график функции "бесконечно приближается". Более точное определение этому понятию выглядит так:

- Пусть функция f обладает следующим свойством:

$$\lim_{x\to x_0-0} f(x) = \infty \quad \text{или} \quad \lim_{x\to x_0+0} f(x) = \infty$$

  Тогда прямая

$$x = x_0$$

  называется *вертикальной асимптотой* функции f.

- Пусть функция f обладает следующим свойством:

$$\lim_{x\to+\infty} (f(x) - (k\cdot x + b)) = 0 \quad \text{или} \quad \lim_{x\to-\infty} (f(x) - (k\cdot x + b)) = 0$$

  Тогда прямая

$$y = k \cdot x + b$$

  называется *наклонной асимптотой* функции f (при $x \to +\infty$ или $x \to -\infty$).

◇ **5.2.17.** Функция $f(x) = \frac{1}{x}$ имеет вертикальную асимпоту $x = 0$.

◇ **5.2.18.** Функция $f(x) = \frac{1}{x} + x$ имеет наклонную асимпоту $y = x$.

Теорема 5.2.17 (об асимптотах)**.** *Если прямая $y = k \cdot x + b$ является наклонной асимптотой функции f при $x \to +\infty$ (или $x \to -\infty$), то*

$$\boxed{k = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}} \quad \left(\textit{или} \quad \boxed{k = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x}} \right) \tag{5.2.109}$$

и

$$\boxed{b = \lim_{x\to+\infty} (f(x) - k\cdot x)} \quad \left(\textit{или} \quad \boxed{b = \lim_{x\to-\infty} (f(x) - k\cdot x)} \right) \tag{5.2.110}$$

Доказательство. Если
$$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-(k\cdot x+b))=0$$
то
$$f(x)=(k\cdot x+b)+\alpha(x)\qquad\left(\text{где}\quad \alpha(x)\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow}0\right)$$
поэтому
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left(k+\frac{b}{x}+\frac{\alpha(x)}{x}\right)=k$$
и, кроме того,
$$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-k\cdot x)=\lim_{x\to+\infty}(b+\alpha(x))=b$$
Аналогично рассматривается случай $x\to-\infty$. □

Общая схема построения графика функции.

Построение графика функции удобно проводить по следующей схеме.

1. Находится область определения; обычно она состоит из интервалов (или отрезков), концы которых удобно называть специальным термином, например, *особыми точками*.[10]
2. Находятся пределы функции в особых точках и вертикальные асимптоты.
3. Находятся пределы на бесконечности и наклонные асимптоты.
4. Вычисляется первая производная, с помощью которой затем находятся интервалы монотонности и точки экстремума.
5. Вычисляется вторая производная, с помощью которой затем находятся интервалы выпуклости вверх и вниз и точки перегиба.
6. С учетом полученных данных строится график.

Объясним эту схему на примерах.

График стандартной функции без симметрий.

◇ **5.2.19.** Построим график следующей функции:
$$f(x)=\frac{x^2+1}{x-1}$$

1. Сначала находим область определения. Она определяется неравенством $x-1\neq 0$, и поэтому имеет вид $(-\infty;1)\cup(1;+\infty)$. Точка $x=1$ является особой точкой функции f.

2. Затем находим пределы функции в особых точках:
$$\lim_{x\to1-0}f(x)=\lim_{x\to1-0}\frac{x^2+1}{x-1}=\frac{1^2+1}{1-0-1}=\\=\left(\frac{2}{-0}\right)=-\infty$$
$$\lim_{x\to1+0}f(x)=\lim_{x\to1+0}\frac{x^2+1}{x-1}=\frac{1^2+1}{1+0-1}=\\=\left(\frac{2}{+0}\right)=+\infty$$
Из этих равенств следует, что прямая $x=1$ является вертикальной асимптотой нашей функции.

3. Вычисляем пределы в бесконечности:
$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+1}{x-1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x+\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x}}=\\=\left(\frac{+\infty+\frac{1}{+\infty}}{1-\frac{1}{+\infty}}\right)=+\infty$$
$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+1}{x-1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x+\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x}}=\\=\left(\frac{-\infty+\frac{1}{-\infty}}{1-\frac{1}{-\infty}}\right)=-\infty$$
Ищем наклонные асимптоты по формулам (5.2.109) и (5.2.110):
$$k_+=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+1}{x^2-x}=\\=\lim_{x\to+\infty}\frac{1+\frac{1}{x^2}}{1-\frac{1}{x}}=1$$
$$b_+=\lim_{x\to+\infty}[f(x)-k_+\cdot x]=$$

[10] Более точное определение: *особой точкой* функции f называется любая граничная точка области определения функции f, то есть такая точка a, в любой окрестности которой $(a-\varepsilon,a+\varepsilon)$ содержатся точки, в которых f определена и точки, в которых f не определена.

$$= \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x^2+1}{x-1} - 1\cdot x\right] =$$
$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+1-x(x-1)}{x-1} =$$
$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+1-x^2+x}{x-1} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1+x}{x-1} =$$
$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}+1}{1-\frac{1}{x}} = 1$$

Значит, прямая

$$y = x+1$$

является асимптотой при $x\to+\infty$. Аналогично получаем, что $k_- = 1$ и $b_- = 1$, и поэтому та же прямая $y = x+1$ является асимптотой при $x\to-\infty$.

4. Находим производную:

$$f'(x) = \left(\frac{x^2+1}{x-1}\right)' =$$
$$= \frac{(x^2+1)'\cdot(x-1)-(x-1)'\cdot(x^2+1)}{(x-1)^2} =$$
$$= \frac{2x\cdot(x-1)-1\cdot(x^2+1)}{(x-1)^2} = \frac{x^2-2x-1}{(x-1)^2}$$

Решаем уравнение $f'(x)=0$:

$$f'(x)=0 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{x^2-2x-1}{(x-1)^2}=0 \quad\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\quad \begin{cases} x^2-2x-1=0 \\ (x-1)^2\ne 0\end{cases} \quad\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\quad x = 1-\sqrt{2} \text{ или } x = 1+\sqrt{2}$$

Рисуем картинку, изображающую интервалы знакопостоянства производной, а значит, интервалы монотонности функции f:

5. Находим вторую производную:

$$f''(x) = \left(\frac{x^2-2x-1}{(x-1)^2}\right)' =$$
$$= \frac{(x^2-2x-1)'\cdot(x-1)^2-((x-1)^2)'\cdot(x^2-2x-1)}{(x-1)^4} =$$
$$= \frac{(2x-2)\cdot(x-1)^2-2(x-1)\cdot(x^2-2x-1)}{(x-1)^4} =$$
$$= \frac{4}{(x-1)^3}$$

Решаем уравнение $f''(x)=0$:

$$f''(x)=0 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{4}{(x-1)^3}=0 \quad\Leftrightarrow\quad x\in\varnothing$$

Рисуем картинку, изображающую интервалы знакопостоянства второй производной, а значит, интервалы выпуклости вверх и вниз функции f:

6. Рисуем график:

◇ **5.2.20.** Построим график функции

$$f(x) = \sqrt[3]{x^3-3x}$$

1. Очевидно, функция определена всюду, поэтому область определения есть вся числовая прямая $\mathbb{R} = (-\infty;+\infty)$.

2. Функция непрерывна везде на $\mathbb{R} = (-\infty;+\infty)$, поэтому вертикальных асимптот нет.

3. Вычисляем пределы в бесконечности:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\sqrt[3]{x^3-3x} =$$
$$= \lim_{x\to+\infty} x\cdot\sqrt[3]{1-\frac{3}{x^2}} = (+\infty\cdot 1) = +\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\sqrt[3]{x^3-3x} =$$
$$= \lim_{x\to-\infty} x\cdot\sqrt[3]{1-\frac{3}{x^2}} = (-\infty\cdot 1) = -\infty$$

Ищем наклонные асимптоты по формулам (5.2.109) и (5.2.110):

$$k_+ = \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt[3]{x^3-3x}}{x} =$$
$$= \lim_{x\to+\infty}\sqrt[3]{1-\frac{3}{x^2}} = 1$$

$$b_+ = \lim_{x\to+\infty}[f(x)-k_+\cdot x] =$$
$$= \lim_{x\to+\infty}\left[\sqrt[3]{x^3-3x}-1\cdot x\right] =$$
$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt[3]{x^3-3x}-x\right)\cdot\left(\sqrt[3]{(x^3-3x)^2}+x\cdot\sqrt[3]{x^3-3x}+x^2\right)}{\sqrt[3]{(x^3-3x)^2}+x\cdot\sqrt[3]{x^3-3x}+x^2} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt[3]{(x^3-3x)^3}-x^3}{\sqrt[3]{(x^3-3x)^2}+x\cdot\sqrt[3]{x^3-3x}+x^2} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{-3x}{\sqrt[3]{(x^3-3x)^2}+x\cdot\sqrt[3]{x^3-3x}+x^2} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{-3}{\sqrt[3]{(1-\frac{3}{x^2})\cdot(x^3-3x)}+\sqrt[3]{x^3-3x}+x} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{-3}{x\cdot\left(\sqrt[3]{(1-\frac{3}{x^2})^2}+\sqrt[3]{1-\frac{3}{x^2}}+1\right)} = 0$$

Значит, прямая $y=x$ является асимптотой при $x\to+\infty$. Аналогично получаем, что $k_-=1$ и $b_-=0$, и поэтому та же прямая $y=x$ является асимптотой при $x\to-\infty$.

4. Находим производную:

$$f'(x)=\left(\sqrt[3]{x^3-3x}\right)'=\frac{(x^3-3x)'}{3\left(\sqrt[3]{x^3-3x}\right)^2}=$$

$$=\frac{3x^2-3}{3\left(\sqrt[3]{x^3-3x}\right)^2}=\frac{x^2-1}{(x^3-3x)^{\frac{2}{3}}}$$

Решаем уравнение $f'(x)=0$:

$$f'(x)=0 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{x^2-1}{(x^3-3x)^{\frac{2}{3}}}=0 \quad\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\quad \begin{cases} x^2-1=0 \\ x^3-3x\ne 0 \end{cases} \quad\Leftrightarrow\quad x\in\{-1;1\}$$

Рисуем картинку, изображающую интервалы знакопостоянства производной, а значит, интервалы монотонности функции f:

5. Находим вторую производную:

$$f''(x)=\left(\frac{x^2-1}{(x^3-3x)^{\frac{2}{3}}}\right)'=\ldots=-2\frac{x^2+1}{(x^3-3x)^{\frac{5}{3}}}$$

Решаем уравнение $f''(x)=0$:

$$f''(x)=0 \quad\Leftrightarrow\quad -2\frac{2x^4+x^2+1}{(x^3-3x)^{\frac{5}{3}}}=0 \;\Leftrightarrow\; x\in\varnothing$$

Рисуем картинку, изображающую интервалы знакопостоянства второй производной, а значит, интервалы выпуклости вверх и вниз функции f:

6. Рисуем график:

⊳⊳ **5.2.21.** Постройте графики следующих функций:

1. $y=\sqrt[3]{x^2-x^3}$.
2. $y=\frac{x^2}{x-1}$.
3. $y=\sqrt[5]{\frac{x^6}{x-a}}$.
4. $y=\frac{x^3}{4(x-2)^2}$.
5. $y=x\sqrt[3]{(x+1)^2}$.
6. $y=\sqrt{\frac{x^3-2x^2}{x-3}}$.
7. $y=\frac{x^2-4}{x}\cdot e^{-\frac{5}{3x}}$.
8. $y=x^3+3x^2-9x-3$.
9. $y=x+\sqrt{x^2-1}$.

Четные и нечетные функции. Построение графика упрощается, если функция обладает какими-то симметриями (то есть в каком-нибудь смысле инвариантна относительно некоторых преобразований прямой). Мы расмотрим три из них: четность, нечетность и периодичность.

Напомним, что четные и нечетные функции мы определили на с.192 как удовлетворяющие тождествам

$$f(-x)=f(x) \quad \text{(четность)},$$

$$f(-x)=-f(x) \quad \text{(нечетность)}$$

Там же отмечалось, что график четной функции должен быть симметричен относительно оси ординат, а график нечетной – центрально симметричен относительно начала координат.

Отсюда следует, что если нам нужно построить график четной функции, то его достаточно построить на правой полуплоскости, а затем, чтобы получить окончательный результат, отобразить полученную картинку налево симметрично относительно оси ординат. Точно так же график нечетной функции достаточно строить на правой полуплоскости, а потом отобразить центрально симметрично относительно начала координат. Здесь мы рассмотрим примеры.

◇ **5.2.22.** Постройте график функции:

$$f(x) = x^2 \cdot \ln|x|$$

1. Область определения: $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$. Точка $x = 0$ является особой. Функция является четной, поэтому нам достаточно построить график только на интервале $x \in (0; +\infty)$.

2. Поскольку нас интересует только область $x \in (0; +\infty)$, в особой точке $x = 0$ мы вычисляем односторонний предел:

$$\lim_{x\to+0} x^2 \cdot \ln|x| = \lim_{x\to+0} x^2 \cdot \ln x = (0 \cdot \infty) = \\ = \lim_{x\to+0} \frac{\ln x}{x^{-2}} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \\ = \begin{pmatrix}\text{применяем}\\ \text{правило}\\ \text{Лопиталя}\end{pmatrix} = \lim_{x\to+0} \frac{x^{-1}}{-2x^{-3}} = \lim_{x\to+0} \frac{x^2}{-2} = 0$$

Значит, вертикальных асимптот нет.

3. Наклонная асимптота нас тоже интересует только при $x \to +\infty$:

$$k_+ = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} x \cdot \ln|x| = \\ = \lim_{x\to+\infty} x \cdot \ln x = \infty$$

Это означает, что и наклонных асимптот нет.

4. Производная:

$$f'(x) = (x^2 \cdot \ln|x|)' = 2x \cdot \ln|x| + x^2 \cdot \frac{1}{x} = \\ = x \cdot (2\ln|x| + 1)$$

При $x > 0$ получаем $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2\ln x + 1 = 0 \Leftrightarrow \ln x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x = e^{-\frac{1}{2}}$. Интервалы знакопостоянства производной:

5. Вторая производная:

$$f''(x) = \Big(x\cdot(2\ln|x|+1)\Big)' = (2\ln|x|+1)+x\cdot\frac{2}{x} = \\ = 2\ln|x| + 2 = 2(\ln|x| + 1)$$

При $x > 0$ получаем $f''(x) = 0 \Leftrightarrow \ln x + 1 = 0 \Leftrightarrow \ln x = -1 \Leftrightarrow x = e^{-1}$. Интервалы знакопостоянства второй производной:

6. График функции для $x > 0$:

Отобразив эту картинку симметрично относительно оси ординат, мы получим полный график нашей функции:

◇ **5.2.23.** Постройте график функции:

$$f(x) = 2x - \arcsin x$$

1. Область определения: $[-1; 1]$. Точки $x = -1$ и $x = 1$ являются особыми. Функция является нечетной, поэтому нам достаточно построить график только на отрезке $x \in [0; 1]$.

2. Предел в особой точке конечный

$$\lim_{x\to1-0}(2x - \arcsin x) = 2 - \arcsin 1 = 2 - \frac{\pi}{2},$$

значит вертикальных асимптот нет.

3. Наклонных асимптот тоже нет, поскольку x не может стремиться к бесконечности.

4. Производная:

$$f'(x) = (2x - \arcsin x)' = 2 - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

При $x \geqslant 0$ получаем $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2 - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 0 \Leftrightarrow 2 = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \Leftrightarrow \sqrt{1-x^2} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 1 - x^2 = \frac{1}{4} \Leftrightarrow x^2 = \frac{3}{4} \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Интервалы знакопостоянства производной:

5. Вторая производная:

$$f''(x) = \left(2 - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)' = \left(2 - (1-x^2)^{-\frac{1}{2}}\right)' =$$
$$= \frac{1}{2}(1-x^2)^{-\frac{3}{2}} \cdot (-2x) = -x \cdot (1-x^2)^{-\frac{3}{2}}$$

При $x \geqslant 0$ получаем $f''(x) = 0 \Leftrightarrow -x \cdot (1 - x^2)^{-\frac{3}{2}} = 0 \Leftrightarrow x = 0$. Интервалы знакопостоянства второй производной:

6. График функции для $x \geqslant 0$:

Отобразив эту картинку симметрично относительно начала координат, мы получим полный график нашей функции:

Периодические функции. Напомним, что периодические функции мы определили на с.194 как удовлетворяющие тождеству

$$f(x+T) = f(x)$$

при некотором $T > 0$. Там же отмечалось, что график периодической функции f должен накладываться на себя при сдвиге вправо (и влево) на число T (период).

Отсюда следует, что если нам нужно построить график периодической функции, то его достаточно построить на отрезке вида $[a; a+T]$, а затем, чтобы получить окончательный результат, сдвинуть полученную картинку влево и вправо нужное число раз (чтобы зрителю стало понятно, что сдвигать можно сколько угодно раз с тем же результатом). Здесь мы рассмотрим примеры.

$\diamond$ **5.2.24.** Постройте график функции:

$$f(x) = \sin^3 x + \cos^3 x$$

1. Область определения: $(-\infty; +\infty)$. Функция является периодической с периодом $T = 2\pi$, поэтому нам достаточно построить график только на отрезке $x \in [0; 2\pi]$.

2. Особых точек нет, значит и вертикальных асимптот нет.

3. Наклонные асимптоты мы не ищем, поскольку нас интересует только отрезок $x \in [0; 2\pi]$.

4. Производная:

$$f'(x) = 3\sin^2 x \cos x - 3\cos^2 x \sin x =$$
$$= 3\sin x \cos x(\sin x - \cos x)$$

При $x \in [0; 2\pi]$ получаем

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3\sin x \cos x(\sin x - \cos x) = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = 0 \\ \cos x = 0 \\ \sin x = \cos x \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \in \{0; \pi\} \\ x \in \left\{\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right\} \\ x \in \left\{\frac{\pi}{4}; \frac{5\pi}{4}\right\} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x \in \left\{0; \frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}; \pi; \frac{5\pi}{4}; \frac{3\pi}{2}\right\}$$

Интервалы знакопостоянства производной:

5. Вторая производная:

$$f''(x) = (3\sin x \cos x(\sin x - \cos x))' =$$
$$= 3\cos^2 x(\sin x - \cos x) - 3\sin^2 x(\sin x - \cos x) +$$
$$+ 3\sin x \cos x(\cos x + \sin x) =$$
$$= 3(\cos^2 x - \sin^2 x)(\sin x - \cos x) +$$
$$+ 3\sin x \cos x(\cos x + \sin x) =$$
$$= -3(\cos x + \sin x)(\cos x - \sin x)^2 +$$
$$+ 3\sin x \cos x(\cos x + \sin x) =$$
$$= 3(\cos x + \sin x)[-(\cos x - \sin x)^2 + \sin x \cos x] =$$
$$= 3(\cos x + \sin x)[-\cos^2 x - \sin^2 x + 3\sin x \cos x] =$$
$$= 3(\cos x + \sin x)[3\sin x \cos x - 1]$$

При $x \in [0; 2\pi]$ получаем

$$f''(x)=0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 3(\cos x+\sin x)[3\sin x\cos x-1]=0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x+\sin x=0\\ 3\sin x\cos x-1=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x=-\sin x\\ 3\sin x\cos x=1\end{array}\right. \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x=-\sin x\\ \frac{3}{2}\sin 2x=1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x=-\sin x\\ \sin 2x=\frac{2}{3}\end{array}\right. \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x\in\left\{\frac{3\pi}{4};\frac{7\pi}{4}\right\}\\ 2x=\arcsin\frac{2}{3}+2\pi n\\ 2x=\pi-\arcsin\frac{2}{3}+2\pi n\end{array}\right. \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x\in\left\{\frac{3\pi}{4};\frac{7\pi}{4}\right\}\\ x=\frac{1}{2}\arcsin\frac{2}{3}+\pi n\\ x=\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\arcsin\frac{2}{3}+\pi n\end{array}\right. \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{c}\text{оставляем только}\\ \text{те значения } x\text{, которые}\\ \text{лежат в отрезке } [0;2\pi]\end{array}\right) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x\in\left\{\frac{1}{2}\arcsin\frac{2}{3};\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\arcsin\frac{2}{3};\frac{3\pi}{4};\right.$$
$$\left.\pi+\frac{1}{2}\arcsin\frac{2}{3};\frac{3\pi}{2}-\frac{1}{2}\arcsin\frac{2}{3};\frac{7\pi}{4}\right\}$$

Интервалы знакопостоянства второй производной:

6. График функции на отрезке $x\in[0;2\pi]$:

Сдвинув эту картинку несколько раз влево и вправо на период $T=2\pi$, мы получим полный график нашей функции:

▷▷ **5.2.25.** Постройте графики следующих функций:

1. $y=\frac{x^2+2}{2x^2+1}$.
2. $y=\sqrt[3]{(x+1)^2}-\sqrt[3]{(x-1)^2}$.
3. $y=e^{\sin x+\cos x}$.
4. $y=\sqrt[3]{(x+1)^2}+\sqrt[3]{(x-1)^2}$.
5. $y=\frac{-8x}{x^2+4}$.
6. $y=\operatorname{arctg}(\sin x)$.
7. $y=\frac{x^2}{\sqrt{x^2+2}}$.
8. $y=x\ln|x|$.
9. $y=\ln(\sin x+\cos x)$.
10. $y=\frac{x^2+1}{\sqrt{4x^2-3}}$.
11. $y=2x-\operatorname{arctg}x$.
12. $y=\frac{1}{\sin x-\cos x}$.

Экстремум функции одной переменной.

◇ **5.2.26.** Найти наибольшее и наименьшее значение функции

$$f(x)=x^3-6x^2+9x+1$$

на следующих множествах:

1) на отрезке $[0,2]$,
2) на полуинтервале $[-2,-1)$.

Решение. Найдем производную:

$$f'(x)=3x^2-12x+9=3(x-1)(x-3).$$

Она обращается в нуль в точках $x=1$ и $x=3$, причем

– $f'(x)>0$ при $x\in(-\infty,1)\cup(3,\infty)$, поэтому функция f возрастает на интервалах $(-\infty,1)$ и $(3,\infty)$,
– $f'(x)<0$ при $x\in(1,3)$, поэтому функция f убывает на интервале $(1,3)$.

Теперь рассматриваем два заданных множества.

1. На отрезке $[0,2]$ функция f имеет только одну критическую точку, $x=1$, причем на интервале $(0,1)$ она возрастает, а на интервале $(1,2)$ – убывает. Одновременно

$$f(0)=1,\quad f(1)=5,\quad f(2)=3.$$

Поэтому

$$\max_{x\in[0,2]}f(x)=f(1)=5$$

и

$$\min_{x\in[0,2]}f(x)=f(0)=1.$$

2. На полуинтервале $[-2,-1)$ функция f не имеет критических точек и возрастает. Отсюда следует, что

$$\min_{x\in[-2,-1)}f(x)=f(-2)=-49,$$

а

$$\max_{x\in[-2,-1)}f(x)$$

не существует.

◇ **5.2.27.** Найти максимальный объем цилиндра, вписанного в данный конус.

Решение. Обозначим буквами R и H радиус и высоту конуса, а буквами x и h радиус и высоту вписанного цилиндра. Тогда

$$\frac{H-h}{x}=\frac{H}{R},$$

поэтому

$$H-h=\frac{xH}{R}$$

и

$$h=H-\frac{xH}{R}=\frac{H}{R}(R-x),$$

а объем цилиндра получается

$$V(x)=\frac{\pi H}{R}\cdot(Rx^2-x^3).$$

Дифференцируея по x, мы получаем:

$$V'(x)=\frac{\pi H}{R}\cdot(2Rx-3x^2)=0 \iff \iff x\in\left\{0,\frac{2R}{3}\right\}.$$

Здесь видно, что $x=\frac{2R}{3}$ – точка максимума для V:

$$\max_{x\in[0,R]}V(x)=V\left(\frac{2R}{3}\right)= =\frac{\pi H}{R}\cdot\left(R\left(\frac{2R}{3}\right)^2-\left(\frac{2R}{3}\right)^3\right)= =\frac{\pi H}{R}\cdot\left(\frac{4R^3}{9}-\frac{8R^3}{27}\right)= =\frac{\pi H}{R}\cdot\left(\frac{12R^3}{27}-\frac{8R^3}{27}\right)=\frac{4}{27}\cdot\pi HR^2$$

◇ **5.2.28.** Среди всех прямоугольников с данным периметром P найти прямоугольник с максимальной площадью.

Пусть x – одна из сторон прямоугольника. Тогда другая сторона будет $y=\frac{P}{2}-x$, а площадь

$$S=x\cdot y=\frac{Px}{2}-x^2.$$

Дифференцируя по x мы получим:

$$S'(x)=\frac{P}{2}-2x=0 \iff x=\frac{P}{4}.$$

При этом

- $S'(x)>0$ при $x\in\left(0,\frac{P}{4}\right)$, то есть на интервале $\left(0,\frac{P}{4}\right)$ функция S возрастает,
- $S'(x)<0$ при $x\in\left(\frac{P}{4},\frac{P}{2}\right)$, то есть на интервале $\left(\frac{P}{4},\frac{P}{2}\right)$ функция S убывает.

Поэтому

$$\max_{x\in\left(0,\frac{P}{2}\right)}S(x)=S\left(\frac{P}{4}\right)=\frac{P^2}{16}.$$

▷ **5.2.29.** Найдите отношение катетов прямоугольного треугольника, у которого площадь максимальна среди всех прямоугольных треугольников, у которых сумма длин гипотенузы и одного из катетов равна фиксированной величине c.

▷ **5.2.30.** Сечение тоннеля имеет форму прямоугольника, завершенного полукругом. Определить радиус полукруга, при котором площадь сечения будет наибольшей, если периметр сечения равен p.

▷ **5.2.31.** Лист картона имеет форму прямоугольника со сторонами a и b. Вырезая по углам этого прямоугольника квадраты и сгибая выступающие части крестообразной фигуры, получим открытую сверху коробку, высота которой равная стороне квадрата. Какой должна быть сторона квадрата, чтобы объем коробки был наибольшим?

▷ **5.2.32.** Найти наибольший объем цилиндра, периметр осевого сечения которого равен a.

▷ **5.2.33.** Среди всех равнобедренных треугольников, вписанных в данный круг, найти треугольник с наибольшим периметром.

▷ **5.2.34.** Определить размеры закрытой коробки объема v с квадратным основанием, на изготовление которой расходуется наименьшее количество материала.

▷ **5.2.35.** Среди всех прямоугольников данной площади S найти прямоугольник: 1) с наименьшим периметром, 2) с наименьшей диагональю.

▷ **5.2.36.** Найти наибольшую площадь прямоугольника, вписанного в круг радиуса R.

▷ **5.2.37.** Найти длину боковой стороны трапеции, имеющей наименьший периметр среди всех равнобедренных трапеций с заданной площадью S и углом α между боковой стороной и нижним основанием.

▷ **5.2.38.** Вычислить наибольшую площадь трапеции, вписанной в полукруг радиуса R, у которой нижним основанием служит диаметр полукруга.

▷ **5.2.39.** Из трех досок одинаковой ширины нужно сколотить желоб. При какой угле наклона боковых стенок площадб поперечного сечения желоба будет наибольшей?

▷ **5.2.40.** Консервная банка имеет цилиндрическую форму. Найти наиболее выгодное отношение ее размеров (то есть отношение диаметра к высоте, при котором ее объем station наибольшим при заданной полной площади поверхности).

▷ **5.2.41.** Найти наибольшую полную поверхность цилиндра, вписанного в шар радиуса R.

▷ **5.2.42.** Из кругового листа жести вырезают сектор и свертывают его в коническую воронку. Каким должен быть угол сектора, чтобы воронка имела наибольший объем?

▷ **5.2.43.** Найти наименьшую боковую поверхность конуса, имеющего объем V.

Глава 6

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ

Поведение функции при аргументе, стремящемся к некоторой величине, является предметом изучения специального раздела математического анализа, называемого *асимптотическими методами*. По идеологии этой науки, свойство функции f иметь (или не иметь) предел при $x \to a$ – только самое первое, поверхностное наблюдение, за которым скрывается гораздо более сложная картина, которую если подходящим образом формализовать, то получаешь удивительно мощный инструмент для решения самых разных задач, в том числе для вычисления самих пределов.

Чтобы было понятно, о чем идет речь, вспомним снова, как мы вычисляли пределы. После всех усилий, что мы потратили на изучение этого вопроса в (c)(c) главы 4, а затем в § 2 главы 5, для читателя может быть неожиданностью, что встречаются все же пределы, нахождение которых известными нам сейчас методами оказывается затруднительным или даже невозможным.

◇ **6.0.1.** В качестве упражнения можно попробовать найти следующий, простой на первый взгляд, предел:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+\sin x) - \sin\ln(1+x)}{e^{\operatorname{arctg} x} - 1 - \operatorname{arctg}(e^x - 1)} \tag{6.0.1}$$

Здесь, если пользоваться правилом Лопиталя, то его придется применять 4 раза, причем возникающие при дифференцировании выражения столь громоздки, что у обыкновенного человека терпение истощается уже после первых двух шагов.

Вот как выглядят эти вычисления, если последовательно находить производную от числителя

$$f(x) = \ln(1+\sin x) - \sin\ln(1+x)$$

и знаменателя

$$g(x) = e^{\operatorname{arctg} x} - 1 - \operatorname{arctg}(e^x - 1),$$

не проводя возникающие в числителе дроби к общему знаменателю.

Прежде всего, при подстановке $x = 0$ напрямую в числитель и знаменатель мы получаем нули:

$$f(0) = \ln(1+\sin 0) - \sin\ln(1+0) = 0,$$

$$g(0) = e^{\operatorname{arctg} 0} - 1 - \operatorname{arctg}(e^0 - 1) = 0.$$

Это значит, что можно применить правило Лопиталя. Первые производные будут такие:

$$f'(x) = \frac{\cos x}{1+\sin x} - \frac{\cos\ln(1+x)}{1+x},$$

$$g'(x) = \frac{e^{\operatorname{arctg} x}}{x^2+1} - \frac{e^x}{(1-e^x)^2+1}.$$

При подстановке $x = 0$ мы опять получаем нули:

$$f'(0) = \frac{\cos 0}{1+\sin 0} - \frac{\cos\ln(1+0)}{1+0} = 0,$$

$$g'(0) = \frac{e^{\operatorname{arctg} 0}}{0^2+1} - \frac{e^0}{(1-e^0)^2+1} = 0.$$

И опять нужно дифференцировать. Вторые производные будут выглядеть так:

$$f''(x) = -\frac{\sin x}{1+\sin x} + \frac{\sin\ln(1+x)}{(1+x)^2} - \\ - \frac{\cos^2 x}{(1+\sin x)^2} + \frac{\cos\ln(1+x)}{(1+x)^2},$$

$$g''(x) = \frac{e^{\operatorname{arctg} x}}{(x^2+1)^2} - \frac{2x\cdot e^{\operatorname{arctg} x}}{(x^2+1)^2} - \\ - \frac{2e^{2x}\cdot(1-e^x)}{((1-e^x)^2+1)^2} - \frac{e^x}{(1-e^x)^2+1}$$

Они опять при подстановке $x = 0$ дают нули:

$$f''(0) = -\frac{\sin 0}{1+\sin 0} + \frac{\sin\ln(1+0)}{(1+0)^2} - \\ - \frac{\cos^2 0}{(1+\sin 0)^2} + \frac{\cos\ln(1+0)}{(1+0)^2} = 0,$$

$$g''(0)=\frac{e^{\operatorname{arctg}0}}{(0^2+1)^2}-\frac{0\cdot e^{\operatorname{arctg}0}}{(0^2+1)^2}-\\-\frac{2e^0\cdot(1-e^0)}{((1-e^0)^2+1)^2}-\frac{e^0}{(1-e^0)^2+1}=0$$

Далее мы дифференцируем в третий раз:

$$f'''(x)=-\frac{3\sin\ln(1+x)}{(1+x)^3}+\frac{2\cos^3 x}{(1+\sin x)^3}-\\-\frac{\cos\ln(1+x)}{(1+x)^3}+\frac{3\sin x\cos x}{(1+\sin x)^2}-\frac{\cos x}{1+\sin x},$$

$$g'''(x)=-\frac{2e^{\operatorname{arctg}x}}{(x^2+1)^2}+\frac{e^{\operatorname{arctg}x}}{(x^2+1)^3}+\\+\frac{8x^2\cdot e^{\operatorname{arctg}x}}{(x^2+1)^3}-\frac{6x\cdot e^{\operatorname{arctg}x}}{(x^2+1)^3}-\\-\frac{8e^{3x}\cdot(1-e^x)^2}{((1-e^x)^2+1)^3}-\frac{6e^{2x}\cdot(1-e^x)}{((1-e^x)^2+1)^2}-\\-\frac{e^x}{(1-e^x)^2+1}+\frac{2e^{3x}}{((1-e^x)^2+1)^2}$$

и убеждаемся, что при подстановке снова получаются нули:

$$f'''(0)=-\frac{3\sin\ln(1+0)}{(1+0)^3}+\frac{2\cos^3 0}{(1+\sin 0)^3}-\\-\frac{\cos\ln(1+0)}{(1+0)^3}+\frac{3\sin 0\cos 0}{(1+\sin 0)^2}-\frac{\cos 0}{1+\sin 0}=0,$$

$$g'''(0)=-\frac{2e^{\operatorname{arctg}0}}{(0^2+1)^2}+\frac{e^{\operatorname{arctg}0}}{(0^2+1)^3}+\\+\frac{0\cdot e^{\operatorname{arctg}0}}{(0^2+1)^3}-\frac{0\cdot e^{\operatorname{arctg}0}}{(0^2+1)^3}-\\-\frac{8e^0\cdot(1-e^0)^2}{((1-e^0)^2+1)^3}-\frac{6e^0\cdot(1-e^0)}{((1-e^0)^2+1)^2}-\\-\frac{e^0}{(1-e^0)^2+1}+\frac{2e^0}{((1-e^0)^2+1)^2}=0.$$

Затем в четвертый раз:

$$f''''(x)=-\frac{3\sin^2 x}{(1+\sin x)^2}+\frac{\sin x}{1+\sin x}+\\+\frac{10\sin\ln(1+x)}{(1+x)^4}-\frac{6\cos^4 x}{(1+\sin x)^4}+\\+\frac{4\cos^2 x}{(1+\sin x)^2}-\frac{12\sin x\cos^2 x}{(1+\sin x)^3}.$$

$$g''''(x)=-\frac{8e^{\operatorname{arctg}x}}{(x^2+1)^3}+\frac{24x\cdot e^{\operatorname{arctg}x}}{(x^2+1)^3}+\\+\frac{e^{\operatorname{arctg}x}}{(x^2+1)^4}+\frac{44x^2\cdot e^{\operatorname{arctg}x}}{(x^2+1)^4}-\\-\frac{12x\cdot e^{\operatorname{arctg}x}}{(x^2+1)^4}-\frac{48x^3\cdot e^{\operatorname{arctg}x}}{(x^2+1)^4}-\\-\frac{48e^{4x}\cdot(1-e^x)^3}{((1-e^x)^2+1)^4}-\frac{48e^{3x}\cdot(1-e^x)^2}{((1-e^x)^2+1)^3}-\\-\frac{14e^{2x}\cdot(1-e^x)}{((1-e^x)^2+1)^2}+\frac{24e^{4x}\cdot(1-e^x)}{((1-e^x)^2+1)^3}-\\-\frac{e^x}{(1-e^x)^2+1}+\frac{12e^{3x}}{((1-e^x)^2+1)^2}$$

И только в этот момент обнаруживается, что при подстановке не получается нулей:

$$f''''(0)=-\frac{3\sin^2 0}{(1+\sin 0)^2}+\frac{\sin 0}{1+\sin 0}+\\+\frac{10\sin\ln(1+0)}{(1+0)^4}-\frac{6\cos^4 0}{(1+\sin 0)^4}+\\+\frac{4\cos^2 0}{(1+\sin 0)^2}-\frac{12\sin 0\cos^2 0}{(1+\sin 0)^3}=-2.$$

$$g''''(0)=-\frac{8e^{\operatorname{arctg}0}}{(0^2+1)^3}+\frac{0\cdot e^{\operatorname{arctg}0}}{(0^2+1)^3}+\\+\frac{e^{\operatorname{arctg}0}}{(0^2+1)^4}+\frac{0\cdot e^{\operatorname{arctg}0}}{(0^2+1)^4}-\\-\frac{0\cdot e^{\operatorname{arctg}0}}{(0^2+1)^4}-\frac{0\cdot e^{\operatorname{arctg}0}}{(0^2+1)^4}-\\-\frac{48e^0\cdot(1-e^0)^3}{((1-e^0)^2+1)^4}-\frac{48e^0\cdot(1-e^0)^2}{((1-e^0)^2+1)^3}-\\-\frac{14e^0\cdot(1-e^0)}{((1-e^0)^2+1)^2}+\frac{24e^0\cdot(1-e^0)}{((1-e^0)^2+1)^3}-\\-\frac{e^0}{(1-e^0)^2+1}+\frac{12e^0}{((1-e^0)^2+1)^2}=\\=-8+1-1+12=4.$$

И мы наконец получаем ответ

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+\sin x)-\sin\ln(1+x)}{e^{\operatorname{arctg}x}-1-\operatorname{arctg}(e^x-1)}=\\=\lim_{x\to 0}\frac{f''''(x)}{g''''(x)}=\frac{f''''(0)}{g''''(0)}=\frac{-2}{4}=-\frac{1}{2}.$$

Когда решение известно и выписано на бумаге, трудности блёкнут. Они не кажутся такими серьезными как в момент, когда не знаешь ни ответа, ни способа, которым его можно получить. Поэтому приведенные нами в примере 6.0.1 выкладки могут не впечатлить читателя. Но даже если встать на точку зрения радикального сторонника компьютерных методов и считать, что вычисление производной совсем не составляет труда, проблема остается в том, что *непонятно, сколько раз нужно применять правило Лопиталя.* Дело ведь в том, что *нет гарантии даже, что этот процесс вообще когда-то приведет к удобоваримому результату.*

◇ **6.0.2.** В качестве иллюстрации, можно рассмотреть следующий пример:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(2^{-\frac{1}{x^2}})}{2^{-\frac{1}{\sin^2 x}}}. \qquad (6.0.2)$$

Здесь применение правила Лопиталя превращается в бесконечный процесс (со все более сложными вычислениями на каждом следующем шаге), потому что числитель

$$f(x) = \sin(2^{-\frac{1}{x^2}})$$

и знаменатель

$$g(x) = 2^{-\frac{1}{\sin^2 x}}$$

стремятся к нулю при $x \to 0$ *вместе со всеми своими производными.* Сколько раз ни применяй правило Лопиталя, ты получишь здесь неопределенность:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(2^{-\frac{1}{x^2}})}{2^{-\frac{1}{\sin^2 x}}} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \\ = \left(\frac{0}{0}\right) = ... = \lim_{x\to 0} \frac{f^{(n)}(x)}{g^{(n)}(x)} = \left(\frac{0}{0}\right) =?$$

Эти примеры означают, что *алгоритмы, используемые для вычисления пределов (в частности, в современных компьютерах), не могут сводиться к применению одного только правила Лопиталя* и должны использовать какие-то другие методы. И если ставить целью объяснение интересующимся (в том числе, разработчикам этих алгоритмов) сути этих методов, то ограничиться тем, что уже сказано на эту тему, конечно, нельзя.

Асимптотические методы предлагают остроумный способ упростить подобные задачи, абстрагировавшись от несущественных свойств функций, и оставив только то, что важно для целей. При этом оказывается, что используемый прием формализуется в виде единого алгоритма — нахождения *асимптотики функции* — и применим в разных других ситуациях, например, при исследовании на сходимость несобственных интегралов и рядов. В этой главе мы познакомим читателя с основными понятиями этой науки и с простейшими ее приложениями (а конкретные пределы (6.0.1) и (6.0.2) мы вычислим методами этой науки на страницах 386 и 388).

§ 1 Асимптотические отношения и формулы

(a) Асимптотические отношения

Асимптотическая эквивалентность функций (символ $\sim$) Пусть a — точка на прямой $\mathbb{R}$ или символ бесконечности, возможно, со знаком.

Пусть f_1 и f_2 – две функции, определенные в выколотой окрестности a[1]. Говорят, что *функция f_1 эквивалентна функции f_2 при $x \to a$* и записывают это так

$$f_1(x) \underset{x\to a}{\sim} f_2(x) \tag{6.1.3}$$

если существует функция θ, определенная в выколотой окрестности a такая, что

$$f_1(x) = \theta(x) \cdot f_2(x)$$

и

$$\theta(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} 1.$$

В частном случае, когда $f_2(x) \neq 0$ при $x \neq a$ это определение можно упростить, выбросив в нем упоминание о θ: тогда запись (6.1.3) просто эквивалентна условию

$$\frac{f_1(x)}{f_2(x)} \underset{x\to a}{\longrightarrow} 1 \tag{6.1.4}$$

В качестве примеров выпишем несколько важных эквивалентностей.

$$\sin x \underset{x\to 0}{\sim} x \tag{6.1.5}$$

$$\operatorname{tg} x \underset{x\to 0}{\sim} x \tag{6.1.6}$$

$$1 - \cos x \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x^2}{2} \tag{6.1.7}$$

$$\ln(1+x) \underset{x\to 0}{\sim} x \tag{6.1.8}$$

$$\log_a(1+x) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x}{\ln a} \tag{6.1.9}$$

[1]Если $a = \infty$, то выколотой окрестностью a считается всякое множество $(-\infty, -E) \cup (E, +\infty)$, где $E > 0$. Если $a = +\infty$, то выколотой окрестностью a считается всякое множество $(E, +\infty)$, где $E > 0$. Если же $a = -\infty$, то выколотой окрестностью a считается всякое множество $(-\infty, -E)$, где $E > 0$.

$$e^x - 1 \underset{x\to 0}{\sim} x \tag{6.1.10}$$

$$a^x - 1 \underset{x\to 0}{\sim} x \cdot \ln a \tag{6.1.11}$$

$$(1+x)^\alpha - 1 \underset{x\to 0}{\sim} \alpha \cdot x \tag{6.1.12}$$

$$\arcsin x \underset{x\to 0}{\sim} x \tag{6.1.13}$$

$$\operatorname{arctg} x \underset{x\to 0}{\sim} x \tag{6.1.14}$$

Доказательство. Все эти соотношения доказываются одним и тем же способом – простым вычислением, например, с помощью правила Лопиталя. В качестве примера мы рассмотрим (6.1.11): по определению символа $\sim$,

$$a^x - 1 \underset{x\to 0}{\sim} x\ln a \quad \Leftrightarrow \quad \frac{a^x-1}{x\ln a} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 1$$

Последнее соотношение доказывается с помощью правила Лопиталя:

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x\ln a} = (\text{Лопиталь}) = \\ = \lim_{x\to 0}\frac{a^x\ln a}{\ln a} = \lim_{x\to 0} a^x = 1$$

$\square$

Свойства асимптотической эквивалентности:

1°. *Если $f_1(x) \underset{x\to a}{\sim} f_2(x)$, то равенство или неравенство нулю в выколотой окрестности a первой функции эквивалентно тому же для второй функции (с возможным изменением окрестности):*

$$f_1(x) = 0, \quad x \in \dot{U}_\varepsilon(a) \quad \Longleftrightarrow \quad f_2(x) = 0, \quad x \in \dot{U}_\delta(a)$$

и

$$f_1(x) \neq 0, \quad x \in \dot{U}_\varepsilon(a) \quad \Longleftrightarrow \quad f_2(x) \neq 0, \quad x \in \dot{U}_\delta(a).$$

2°. *Рефлексивность: всегда*

$$f_1(x) \underset{x\to a}{\sim} f_1(x)$$

3°. *Симметричность:*

$$f_1(x) \underset{x\to a}{\sim} f_2(x) \quad \Longrightarrow \quad f_2(x) \underset{x\to a}{\sim} f_1(x)$$

4°. *Транзитивность:*

$$f_1(x) \underset{x\to a}{\sim} f_2(x) \quad \& \quad f_2(x) \underset{x\to a}{\sim} f_3(x) \quad \Longrightarrow \quad f_1(x) \underset{x\to a}{\sim} f_3(x)$$

5°. *Мультипликативность:*

$$f_1(x) \underset{x\to a}{\sim} f_2(x) \quad \& \quad g_1(x) \underset{x\to a}{\sim} g_2(x) \quad \Longrightarrow \quad f_1(x)\cdot g_1(x) \underset{x\to a}{\sim} f_2(x)\cdot g_2(x) \quad \& \quad \frac{f_1(x)}{g_1(x)} \underset{x\to a}{\sim} \frac{f_2(x)}{g_2(x)}$$

(там, где g_2 присутствует в знаменателе, нужно чтобы $g_2(x) \neq 0$ в некоторой выколотой окрестности a).

6°. *Связь с пределом:*

$$f_1(x) \underset{x\to a}{\sim} f_2(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} A \quad \Longrightarrow \quad f_1(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} A$$

Понятие асимптотической эквивалентности полезно при вычислении сложных пределов, которые слишком утомительно находить с помощью правила Лопиталя. Для этого используется следующая

Теорема 6.1.1 (об эквивалентной замене)**.** *Если $f_1(x) \underset{x\to a}{\sim} f_2(x)$ и $g_1(x) \underset{x\to a}{\sim} g_2(x)$, то*

$$\lim_{x\to a}\frac{f_1(x)}{g_1(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f_2(x)}{g_2(x)} \qquad \lim_{x\to a} f_1(x)\cdot g_1(x) = \lim_{x\to a} f_2(x)\cdot g_2(x)$$

(там, где g_2 присутствует в знаменателе, нужно чтобы $g_2(x) \neq 0$ в некоторой выколотой окрестности a).

Доказательство. Условия $f_1(x) \underset{x\to a}{\sim} f_2(x)$ и $g_1(x) \underset{x\to a}{\sim} g_2(x)$ одначают, что существуют функции θ, τ, такие что

$$f_1(x) = \theta(x)\cdot f_2(x), \quad \theta(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} 1$$

и

$$g_1(x) = \tau(x) \cdot g_2(x), \quad \tau(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} 1$$

Запомним их, и поглядим, что можно сказать о пределах, о которых говорит теорема:

$$\lim_{x\to a} \frac{f_1(x)}{g_1(x)} = \lim_{x\to a} \frac{\theta(x)\cdot f_2(x)}{\tau(x)\cdot g_2(x)} = \lim_{x\to a} \left(\frac{\theta(x)}{\tau(x)} \cdot \frac{f_2(x)}{g_2(x)}\right) = \underbrace{\lim_{x\to a} \frac{\theta(x)}{\tau(x)}}_{\overset{\|}{1}} \cdot \lim_{x\to a} \frac{f_2(x)}{g_2(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f_2(x)}{g_2(x)}$$

И точно так же,

$$\lim_{x\to a} f_1(x)\cdot g_1(x) = \lim_{x\to a} \big(\theta(x)\cdot f_2(x)\big)\cdot\big(\tau(x)\cdot g_2(x)\big) = \lim_{x\to a} \big(\theta(x)\cdot\tau(x)\big)\cdot\big(f_2(x)\cdot g_2(x)\big) =$$
$$= \underbrace{\lim_{x\to a} \big(\theta(x)\cdot\tau(x)\big)}_{\overset{\|}{1}} \cdot \lim_{x\to a} \big(f_2(x)\cdot g_2(x)\big) = \lim_{x\to a} \big(f_2(x)\cdot g_2(x)\big)$$

□

◇ **6.1.1.** Приведем иллюстрацию:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{2^x-1} = \left| \begin{matrix} \sqrt{1+x}-1 \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x}{2} \\ 2^x - 1 \underset{x\to 0}{\sim} x\cdot\ln 2 \end{matrix} \right| =$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x}{2}}{x\cdot\ln 2} = \frac{1}{2\ln 2}$$

◇ **6.1.2.**

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{\ln^2(1+x)} = \left| \begin{matrix} 1-\cos x \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x^2}{2} \\ \ln(1+x) \underset{x\to 0}{\sim} x \end{matrix} \right| =$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^2}{2}}{x^2} = \frac{1}{2}$$

В более сложных примерах следует пользоваться еще одной теоремой:

Теорема 6.1.2 (о замене переменной под знаком эквивалентности). *Если* $f_1(x) \underset{x\to a}{\sim} f_2(x)$ *и* $\xi(t) \underset{t\to c}{\longrightarrow} a$*, причем* $\xi(t) \neq a$ *при* $t \neq c$*, то* $f_1(\xi(t)) \underset{t\to c}{\sim} f_2(\xi(t))$.

Доказательство. Условие $f_1(x) \underset{x\to a}{\sim} f_2(x)$ означает, что существуют функция θ, такая что

$$f_1(x) = \theta(x)\cdot f_2(x), \quad \theta(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} 1$$

Положим

$$\tau(t) = \theta(\xi(t)).$$

Тогда, во-первых,

$$f_1(\xi(t)) = \theta(\xi(t))\cdot f_2(\xi(t)) = \tau(t)\cdot f_2(\xi(t)),$$

И, во-вторых,

$$\lim_{t\to c} \tau(t) = \lim_{t\to c} \theta(\xi(t)) = \left| \begin{matrix} \text{применяем теорему 3.4.9} \\ \text{о замене переменной} \\ \text{под знаком предела:} \\ x = \xi(t) \underset{t\to c}{\longrightarrow} a \\ \xi(t) \neq a \text{ при } t \neq c \end{matrix} \right| = \lim_{x\to a} \theta(x) = 1.$$

То есть $f_1(\xi(t)) \underset{t\to c}{\sim} f_2(\xi(t))$. □

◇ **6.1.3.** Рассмотрим предел посложнее:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{arctg} \frac{7}{4}x}{e^{-2x}-1}$$

Чтобы его вычислить, заметим, что из формулы (6.1.14), $\operatorname{arctg} y \underset{y\to 0}{\sim} y$, можно заменой $y = \frac{7}{4}x$ ($y \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$) получить формулу $\operatorname{arctg} \frac{7}{4}x \underset{x\to 0}{\sim} \frac{7}{4}x$. Точно так же, из формулы (6.1.10), $e^z - 1 \underset{z\to 0}{\sim} z$, заменой $z = -2x$ ($z \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$) получается $e^{-2x} -$

$1 \underset{x\to 0}{\sim} -2x$. Отсюда

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{arctg}\frac{7}{4}x}{e^{-2x}-1} = \left|\begin{matrix}\operatorname{arctg} y \underset{y\to 0}{\sim} y \Longrightarrow \operatorname{arctg}\frac{7}{4}x \underset{x\to 0}{\sim} \frac{7}{4}x\\ e^z-1 \underset{z\to 0}{\sim} z \Longrightarrow e^{-2x}-1 \underset{x\to 0}{\sim} -2x\end{matrix}\right| = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{7}{4}x}{-2x} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{7}{4}}{-2} = -\frac{7}{8}$$

◇ **6.1.4.**

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 5x}{\operatorname{tg} x^2} = \left|\begin{matrix}1-\cos 5x \underset{x\to 0}{\sim} \frac{(5x)^2}{2}\\ \operatorname{tg} x^2 \underset{x\to 0}{\sim} x^2\end{matrix}\right| = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{(5x)^2}{2}}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{25x^2}{2x^2} = \frac{25}{2}$$

◇ **6.1.5.**

$$\lim_{x\to -\infty}\frac{\ln(1+3^x)}{\ln(1+2^x)} = \left|\begin{matrix}\ln(1+3^x) \underset{x\to -\infty}{\sim} 3^x\\ \ln(1+2^x) \underset{x\to -\infty}{\sim} 2^x\end{matrix}\right| = \lim_{x\to -\infty}\frac{3^x}{2^x} = \lim_{x\to -\infty}\left(\frac{3}{2}\right)^x = 0$$

◇ **6.1.6.**

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(\sqrt{1+x}-1)}{10^x-1} = \left|\begin{matrix}\sin(\sqrt{1+x}-1) \underset{x\to 0}{\sim} \sqrt{1+x}-1 \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x}{2}\\ 10^x-1 \underset{x\to 0}{\sim} x\ln 10\end{matrix}\right| = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{x}{2}}{x\ln 10} = \frac{1}{2\ln 10}$$

▷▷ **6.1.7.** Найдите пределы

1. $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x\sin x}-1}{e^{x^2}-1}$
2. $\lim_{x\to 0}\frac{e^{\sin 5x}-1}{\ln(1+2x)}$
3. $\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{arctg}(e^{x^3}-1)}{10^{\arcsin^3 x}-1}$
4. $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\sqrt[3]{1+x^2}-1}$

Асимптотическое сравнение функций (символы $\ll$ и $\mathbf{o}$) и шкала бесконечностей Пусть снова a — точка на прямой $\mathbb{R}$ или символ бесконечности, возможно, со знаком.

И пусть f_1 и f_2 – две функции, определенные в выколотой окрестности a. Говорят, что *функция f бесконечно мала по сравнению с функцией g при $x\to a$* и записывают это так

$$f(x) \underset{x\to a}{\ll} g(x) \tag{6.1.15}$$

или так

$$f(x) = \underset{x\to a}{\mathbf{o}}\Big(g(x)\Big)$$

если существует функция α, определенная в выколотой окрестности a такая, что

$$f(x) = \alpha(x)\cdot g(x)$$

и

$$\alpha(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} 0.$$

В частном случае, когда $g(x)\neq 0$ при $x\neq a$ это определение можно упростить, выбросив в нем упоминание об α: тогда запись (6.1.15) просто эквивалентна условию

$$\frac{f(x)}{g(x)} \underset{x\to a}{\longrightarrow} 0$$

◇ **6.1.8.** Покажем, что

$$x^2 \underset{x\to 0}{\ll} x$$

или, в других обозначениях,

$$x^2 = \underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(x)$$

Действительно, $\frac{x^2}{x} = x \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$.

◇ **6.1.9.** Убедимся, что

$$x \underset{x\to\infty}{\ll} x^2$$

или, в других обозначениях,

$$x = \underset{x\to\infty}{\mathbf{o}}(x^2)$$

Действительно, $\frac{x}{x^2} = \frac{1}{x} \underset{x\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

Свойства асимптотического сравнения

1°. *Если* $f(x) \underset{x\to a}{\ll} g(x)$, *то неравенство нулю в выколотой окрестности a для первой функции влечет за собой то же для второй функции (с той же окрестностью):*

$$f(x) \neq 0, \quad x \in \dot{U}_\varepsilon(a) \quad \Longrightarrow \quad g(x) \neq 0, \quad x \in \dot{U}_\varepsilon(a)$$

а равенство нулю в выколотой окрестности a для второй функции влечет за собой то же для первой функции (с той же окрестностью):

$$f(x) = 0, \quad x \in \dot{U}_\varepsilon(a) \quad \Longleftarrow \quad g(x) = 0, \quad x \in \dot{U}_\varepsilon(a).$$

2° *Транзитивность:*

$$f(x) \underset{x\to a}{\ll} g(x) \quad \& \quad g(x) \underset{x\to a}{\ll} h(x) \quad \Longrightarrow \quad f(x) \underset{x\to a}{\ll} h(x)$$

3° *Связь с эквивалентностью:*

$$f(x) \underset{x\to a}{\ll} g(x) \underset{x\to a}{\sim} h(x) \quad \Longrightarrow \quad f(x) \underset{x\to a}{\ll} h(x),$$

$$f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x) \underset{x\to a}{\ll} h(x) \quad \Longrightarrow \quad f(x) \underset{x\to a}{\ll} h(x).$$

Теорема 6.1.3 (о сравнении степенных функций)**.** *Если* $\lambda < \mu$, *то*

$$\boxed{x^\lambda \underset{x\to\infty}{\ll} x^\mu, \qquad x^\mu \underset{x\to 0}{\ll} x^\lambda}$$

или, в других обозначениях,

$$x^\lambda = \underset{x\to\infty}{\mathbf{o}}\left(x^\mu\right), \quad x^\mu = \underset{x\to 0}{\mathbf{o}}\left(x^\lambda\right).$$

Доказательство.

$$\frac{x^\lambda}{x^\mu} = \frac{1}{x^{\mu-\lambda}} \underset{x\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

и это означает, что $x^\lambda \underset{x\to\infty}{\ll} x^\mu$. Наоборот,

$$\frac{x^\mu}{x^\lambda} = x^{\mu-\lambda} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$$

и это означает, что $x^\mu \underset{x\to 0}{\ll} x^\lambda$. □

Теорема 6.1.4 (о сравнении показательных функций)**.** *Если* $0 < a < b$, *то*

$$\boxed{a^x \underset{x\to+\infty}{\ll} b^x, \qquad b^x \underset{x\to-\infty}{\ll} a^x}$$

или, в других обозначениях,

$$a^x = \underset{x\to+\infty}{\mathbf{o}}\left(b^x\right), \quad b^x = \underset{x\to-\infty}{\mathbf{o}}\left(a^x\right).$$

Доказательство.

$$\frac{a^x}{b^x} = \Big(\underbrace{\frac{a}{b}}_{\overset{\wedge}{1}}\Big)^x \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

То есть, $a^x \underset{x\to+\infty}{\ll} b^x$. Наоборот,

$$\frac{b^x}{a^x} = \Big(\underbrace{\frac{b}{a}}_{\overset{\vee}{1}}\Big)^x \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} \infty,$$

и это означает, что $b^x \underset{x\to-\infty}{\ll} a^x$. □

Теорема 6.1.5 (о шкале бесконечностей)**.** *Справедливы соотношения*

$$\boxed{\underset{(C\in\mathbb{R})}{C} \underset{x\to+\infty}{\ll} \underset{(a>1)}{\log_a x} \underset{x\to+\infty}{\ll} \underset{(\lambda>0)}{x^\lambda} \underset{x\to+\infty}{\ll} \underset{(a>1)}{a^x}} \tag{6.1.16}$$

или, в других обозначениях,

$$\begin{aligned} C &= \underset{x\to+\infty}{\mathbf{o}}\left(\log_a x\right), && \text{если } a > 1, \\ \log_a x &= \underset{x\to+\infty}{\mathbf{o}}\left(x^\lambda\right), && \text{если } a > 1, \lambda > 0 \\ x^\lambda &= \underset{x\to+\infty}{\mathbf{o}}\left(a^x\right), && \text{если } \lambda > 0, a > 1 \end{aligned}$$

Доказательство. Первое соотношение очевидно, потому что

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{C}{\log_a x} = \left(\frac{1}{\infty}\right) = 0$$

Докажем второе:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\log_a x}{x^\lambda} = \begin{pmatrix}\text{правило}\\ \text{Лопиталя}\end{pmatrix} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{(\log_a x)'}{(x^\lambda)'} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x\cdot\ln a}}{\lambda\cdot x^{\lambda-1}} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\lambda \ln a \cdot x \cdot x^{\lambda-1}} = \frac{1}{\lambda \ln a} \cdot \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^\lambda} =$$

$$= \begin{pmatrix}\text{учитываем, что}\\ \lambda > 0\end{pmatrix} = 0$$

А теперь третье:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^\lambda}{a^x} = \begin{pmatrix}\text{правило}\\ \text{Лопиталя}\end{pmatrix} = \lim_{x\to+\infty} \frac{(x^\lambda)'}{(a^x)'} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\lambda x^{\lambda-1}}{a^x \ln a} = \left(\begin{smallmatrix}\text{если } \lambda-1>0, \text{ то еще раз}\\ \text{применяем правило Лопиталя}\end{smallmatrix}\right) =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\lambda\cdot(\lambda-1)\cdot x^{\lambda-2}}{a^x(\ln a)^2} =$$

$$= \left(\begin{smallmatrix}\text{если } \lambda-2>0, \text{ то еще раз}\\ \text{применяем правило Лопиталя}\end{smallmatrix}\right) =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\lambda\cdot(\lambda-1)\cdot(\lambda-2)\cdot x^{\lambda-3}}{a^x(\ln a)^3} = \dots =$$

$$= \left(\begin{smallmatrix}\text{применяем правило Лопиталя}\\ \text{до тех пор, пока в числителе}\\ \text{не получится } x^{\lambda-n}, \text{ где } \lambda-n<0\end{smallmatrix}\right) = \dots =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\lambda\cdot(\lambda-1)\cdot(\lambda-2)\cdot\ldots\cdot(\lambda-n+1)\cdot x^{\lambda-n}}{a^x(\ln a)^n} =$$

$$= \left(\begin{smallmatrix}\text{поскольку } \lambda-n<0,\\ x^{\lambda-n} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0\end{smallmatrix}\right) = \left(\frac{0}{\infty}\right) = 0$$

□

Принцип выделения главного слагаемого. Символы $\ll$ и **o**, описанные в предыдущем параграфе, бывают полезны в различных ситуациях при вычислении пределов. Самое простое их применение описывается в следующей теореме.

Теорема 6.1.6 (о выделении главного слагаемого)**.** *Пусть даны несколько функций*

$$A_0(x), A_1(x), ..., A_n(x),$$

причем при $x \to a$ функция $A_0(x)$ бесконечно велика по сравнению с любой другой функцией из этого списка:

$$A_1(x) \underset{x\to a}{\ll} A_0(x), \quad A_2(x) \underset{x\to a}{\ll} A_0(x), \quad ..., \quad A_n(x) \underset{x\to a}{\ll} A_0(x) \tag{6.1.17}$$

Тогда сумма этих функций эквивалентна $A_0(x)$ при $x \to a$:

$$A_0(x) + A_1(x) + A_2(x) + ... + A_n(x) \underset{x\to a}{\sim} A_0(x) \tag{6.1.18}$$

Доказательство. Из (6.1.17) следует, что

$$A_1(x) = \alpha_1(x)\cdot A_0(x), \quad A_2(x) = \alpha_2(x)\cdot A_0(x), \quad ... \quad A_n(x) = \alpha_n(x)\cdot A_0(x),$$

где

$$\alpha_1(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} 0, \quad \alpha_2(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} 0, \quad ... \quad \alpha_n(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} 0$$

Поэтому

$$A_0(x) + A_1(x) + ... + A_n(x) = A_0(x) + \alpha_1(x)\cdot A_0(x) + ... + \alpha_n(x)\cdot A_0(x) =$$

$$= \underbrace{\Big(1 + \alpha_1(x) + ... + \alpha_n(x)\Big)}_{\text{обозначим это } \theta(x)} \cdot A_0(x) = \beta(x)\cdot A_0(x),$$

где

$$\theta(x) = 1 + \alpha_1(x) + ... + \alpha_n(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} 1 + 0 + ... + 0 = 1.$$

То есть, выполняется (6.1.18). □

- Функция $A_0(x)$, для которой выполняются соотношения (6.1.17), называется *главным слагаемым* в сумме $A_0(x) + A_1(x) + A_2(x) + ... + A_n(x)$.

Теорема 6.1.6 применяется в следующей ситуации. Пусть нам необходимо вычислить предел

$$\lim_{x\to a} \frac{A_0(x) + A_1(x) + A_2(x) + ... + A_n(x)}{B_0(x) + B_1(x) + B_2(x) + ... + B_n(x)}$$

причем известно, что $A_0(x)$ является главным слагаемым в сумме $A_0(x)+A_1(x)+A_2(x)+...+A_n(x)$, а $B_0(x)$ является главным слагаемым в сумме $B_0(x) + B_1(x) + B_2(x) + ... + B_n(x)$:

$$A_1(x) \underset{x\to a}{\ll} A_0(x), \quad A_2(x) \underset{x\to a}{\ll} A_0(x), \quad ... \quad A_n(x) \underset{x\to a}{\ll} A_0(x)$$

$$B_1(x) \underset{x\to a}{\ll} B_0(x), \quad B_2(x) \underset{x\to a}{\ll} B_0(x), \quad ... \quad B_n(x) \underset{x\to a}{\ll} B_0(x)$$

Тогда

$$A_0(x) + A_1(x) + A_2(x) + ... + A_n(x) \underset{x\to a}{\sim} A_0(x)$$

$$B_0(x)+B_1(x)+B_2(x)+...+B_n(x) \underset{x\to a}{\sim} B_0(x)$$

и поэтому

$$\lim_{x\to a}\frac{A_0(x)+A_1(x)+A_2(x)+...+A_n(x)}{B_0(x)+B_1(x)+B_2(x)+...+B_n(x)}=\lim_{x\to a}\frac{A_0(x)}{B_0(x)}$$

Таким образом, справедлив следующий важный принцип.

Теорема 6.1.7 (принцип выделения главного слагаемого). *Вычисляя предел*

$$\lim_{x\to a}\frac{A_0(x)+A_1(x)+A_2(x)+...+A_n(x)}{B_0(x)+B_1(x)+B_2(x)+...+B_n(x)},$$

следует выделить в числителе и знаменателе главные слагаемые, а все остальные – "второстепенные" – просто зачеркнуть:

$$\lim_{x\to a}\frac{A_0(x)+A_1(x)+A_2(x)+...+A_n(x)}{B_0(x)+B_1(x)+B_2(x)+...+B_n(x)}=\lim_{x\to a}\frac{A_0(x)+\cancel{A_1(x)}+\cancel{A_2(x)}+...+\cancel{A_n(x)}}{B_0(x)+\cancel{B_1(x)}+\cancel{B_2(x)}+...+\cancel{B_n(x)}}=\lim_{x\to a}\frac{A_0(x)}{B_0(x)}$$

Рассмотрим примеры.

◇ **6.1.10.**

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x+\ln x}{x^2+\sin x}=\left(\begin{array}{c}\text{по теореме 6.1.5}\\ \text{(о шкале бесконечностей),}\\ \ln x \underset{x\to+\infty}{\ll} x,\\ \text{кроме того,}\\ \text{как легко проверить,}\\ \sin x \underset{x\to+\infty}{\ll} x^2\end{array}\right)=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x+\cancel{\ln x}}{x^2+\cancel{\sin x}}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{x^2}=0$$

◇ **6.1.11.** В следующем примере снова используется шкала бесконечностей (теорема 6.1.5):

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2\sqrt{x}+2\log_5 x+5}{\cos x+\sqrt{x}-1}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{2\sqrt{x}+\cancel{2\log_5 x}+\cancel{5}}{\cancel{\cos x}+\sqrt{x}-\cancel{1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}}=2$$

◇ **6.1.12.** Здесь используется теорема 6.1.3 (о сравнении степенных функций): поскольку $x\to\infty$, главными слагаемыми будут максимальные степени у x:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{5x+3\sqrt{x}-2x^5}{x-3x^4+8\sqrt{x}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\cancel{5x}+\cancel{3\sqrt{x}}-2x^5}{\cancel{x}-3x^4+\cancel{8\sqrt{x}}}=\lim_{x\to\infty}\frac{-2x^5}{-3x^4}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{-2x}{-3}=\infty$$

◇ **6.1.13.** Здесь дробь та же, что и в предыдущем примере, но, поскольку $x\to 0$, главными слагаемыми, по той же теореме 6.1.3, будут наоборот, минимальные степени у x:

$$\lim_{x\to 0}\frac{5x+3\sqrt{x}-2x^5}{x-3x^4+8\sqrt{x}}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\cancel{5x}+3\sqrt{x}-\cancel{2x^5}}{\cancel{x}-\cancel{3x^4}+8\sqrt{x}}=\lim_{x\to 0}\frac{3\sqrt{x}}{8\sqrt{x}}=\frac{3}{8}$$

◇ **6.1.14.** Здесь используется теорема 6.1.4 (о сравнении показательных функций): поскольку $x\to+\infty$, главными слагаемыми будут степени с наибольшим основанием:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2^{x-1}-3^{x+1}}{2^{x+1}+3^{x-1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{2}\cdot 2^x-3\cdot 3^x}{2\cdot 2^x+\frac{1}{3}\cdot 3^x}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{\frac{1}{2}\cdot 2^x}-3\cdot 3^x}{\cancel{2\cdot 2^x}+\frac{1}{3}\cdot 3^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-3\cdot 3^x}{\frac{1}{3}\cdot 3^x}=-9$$

◇ **6.1.15.** Здесь дробь та же, что и в предыдущем примере, но, поскольку $x\to-\infty$, главными слагаемыми, по той же теореме 6.1.4, будут наоборот, степени с наименьшим основанием:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{2^{x-1}-3^{x+1}}{2^{x+1}+3^{x-1}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{1}{2}\cdot 2^x-3\cdot 3^x}{2\cdot 2^x+\frac{1}{3}\cdot 3^x}=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{1}{2}\cdot 2^x-\cancel{3\cdot 3^x}}{2\cdot 2^x+\cancel{\frac{1}{3}\cdot 3^x}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{1}{2}\cdot 2^x}{2\cdot 2^x}=\frac{1}{4}$$

◇ **6.1.16.** В следующем примере мы сначала выделяем главное слагаемое, а затем применяем теорему 6.1.2 об эквивалентной замене:

$$\lim_{x\to 0}\frac{5x^2+3x^{10}}{2x^5+7\sin x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{5x^2+3\cancel{x}^{10}}{\cancel{2}x^5\ +7\sin x^2}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{5x^2}{7\sin x^2}=\left(\sin x^2 \underset{x\to 0}{\sim} x^2\right)=\lim_{x\to 0}\frac{5x^2}{7x^2}=\frac{5}{7}$$

⊳⊳ **6.1.17.**

1. $\lim_{x\to 0}\frac{2^x+x^5}{x^2+5^x}$
2. $\lim_{x\to +\infty}\frac{2^x+x^5}{x^2+5^x}$
3. $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}}{\sin x+\sqrt[5]{x^2}}$
4. $\lim_{x\to +\infty}\frac{\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}}{\sin x+\sqrt[5]{x^2}}$
5. $\lim_{x\to 0}\frac{x+\sqrt{x}}{e^x-1}$
6. $\lim_{x\to +\infty}\frac{x+\sqrt{x}}{e^x-1}$
7. $\lim_{x\to 0}\frac{2^x+3^x}{x^2+x^3}$
8. $\lim_{x\to +\infty}\frac{2^x+3^x}{x^2+x^3}$
9. $\lim_{x\to -\infty}\frac{2^x+3^x}{x^2+x^3}$
10. $\lim_{x\to +\infty}\frac{x+\sin x}{x+\cos x}$

Эквивалентность модулей, степеней и логарифмов

Теорема 6.1.8. *Пусть даны две эквивалентные функции при $x\to a$:*

$$f_1(x)\underset{x\to a}{\sim} f_2(x)$$

Тогда

(i) *модули этих функций тоже эквивалентны:*

$$|f_1(x)|\underset{x\to a}{\sim}|f_2(x)|$$

(ii) *степени этих функций (с произвольным показателем) тоже эквивалентны:*

$$f_1(x)^\alpha\underset{x\to a}{\sim} f_2(x)^\alpha,\quad \alpha\in\mathbb{R}$$

(iii) *если вдобавок $f_2(x)$ стремится к бесконечности или к нулю*

$$f_2(x)\underset{x\to a}{\longrightarrow}+\infty\quad (\textit{или}\quad +0)$$

то логарифмы этих функций (с произвольным основанием) эквивалентны:

$$\log_a f_1(x)\underset{x\to a}{\sim}\log_a f_2(x),\quad 0<a\neq 1$$

Доказательство.

1. $f_1(x)\underset{x\to a}{\sim} f_2(x) \quad\Rightarrow\quad f_1(x)=\theta(x)\cdot f_2(x),\quad \theta(x)\underset{x\to a}{\longrightarrow}1 \quad\Rightarrow$

$$\Rightarrow\quad |f_1(x)|=|\theta(x)|\cdot|f_2(x)|,\quad |\theta(x)|\underset{x\to a}{\longrightarrow}1\quad\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\quad |f_1(x)|\underset{x\to a}{\sim}|f_2(x)|$$

2. $f_1(x)\underset{x\to a}{\sim} f_2(x) \quad\Rightarrow\quad f_1(x)=\theta(x)\cdot f_2(x),\quad \theta(x)\underset{x\to a}{\longrightarrow}1 \quad\Rightarrow$

$$\Rightarrow\quad f_1(x)^\alpha=\theta(x)^\alpha\cdot f_2(x)^\alpha,\quad \theta(x)^\alpha\underset{x\to a}{\longrightarrow}1\quad\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\quad f_1(x)^\alpha\underset{x\to a}{\sim} f_2(x)^\alpha$$

3. $f_1(x)\underset{x\to a}{\sim} f_2(x)\underset{x\to a}{\longrightarrow}\begin{cases}+\infty\\+0\end{cases} \quad\Rightarrow\quad f_1(x)=\theta(x)\cdot f_2(x),\quad \theta(x)\underset{x\to a}{\longrightarrow}1,\quad f_2(x)\underset{x\to a}{\longrightarrow}\begin{cases}+\infty\\+0\end{cases}\quad\Rightarrow$

$$\Rightarrow\quad \log_a f_1(x)=\log_a\theta(x)+\log_a f_2(x)=\underbrace{\Bigg(\frac{\overset{\nearrow 0}{\boxed{\log_a\theta(x)}}}{\underset{\searrow\infty}{\boxed{\log_a f_2(x)}}}+1\Bigg)}_{\downarrow\atop 1}\cdot\log_a f_2(x)\quad\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\quad \log_a f_1(x)\underset{x\to a}{\sim}\log_a f_2(x)$$

□

Из этой теоремы следует, что при вычислении пределов с модулями, степенями или логарифмами также можно выделять главные слагаемые, *но нужно только следить, чтобы аргументы у логарифмов стремились к* $+\infty$ *или к* $+0$. Например,

$$\lim_{x\to a}\frac{|A_0(x)+A_1(x)+A_2(x)+...+A_n(x)|}{(B_0(x)+B_1(x)+B_2(x)+...+B_n(x))^\beta}=$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{\Big|A_0(x)+\cancel{A_1(x)}+\cancel{A_2(x)}+...+\cancel{A_n(x)}\Big|}{\Big(B_0(x)+\cancel{B_1(x)}+\cancel{B_2(x)}+...+\cancel{B_n(x)}\Big)^\beta}=\lim_{x\to a}\frac{|A_0(x)|}{B_0(x)^\beta}$$

Или, если $B_0(x)\underset{x\to a}{\longrightarrow}+\infty\quad$ (или $\quad+0$),

$$\lim_{x\to a}\frac{(A_0(x)+A_1(x)+A_2(x)+...+A_n(x))^\alpha}{\ln(B_0(x)+B_1(x)+B_2(x)+...+B_n(x))}=$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{\Big(A_0(x)+\cancel{A_1(x)}+\cancel{A_2(x)}+...+\cancel{A_n(x)}\Big)^\alpha}{\ln\Big(B_0(x)+\cancel{B_1(x)}+\cancel{B_2(x)}+...+\cancel{B_n(x)}\Big)}=\lim_{x\to a}\frac{A_0(x)^\alpha}{\ln B_0(x)}$$

И в таком духе. Рассмотрим несколько примеров.

◇ **6.1.18.**

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{|\sqrt[3]{x}+3x-2x^2|}{\sqrt{x+x^2+x^4}}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{|\cancel{\sqrt[3]{x}}+\cancel{3x}-2x^2|}{\sqrt{\cancel{x}+\cancel{x^2}+x^4}}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{|-2x^2|}{\sqrt{x^4}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2}{x^2}=2$$

◇ **6.1.19.**

$$\lim_{x\to0}\frac{|\sqrt[3]{x}+3x-2x^2|}{\sqrt{x+x^2+x^4}}=$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{|\sqrt[3]{x}+\cancel{3x}-\cancel{2x^2}|}{\sqrt{x+\cancel{x^2}+\cancel{x^4}}}=$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{|\sqrt[3]{x}|}{\sqrt{x}}=\lim_{x\to0}x^{-\frac16}=\infty$$

◇ **6.1.20.**

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x^2+x)}{\ln(x^5+x^3)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x^2+\cancel{x})}{\ln(x^5+\cancel{x^3})}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x^2}{\ln x^5}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2\ln x}{5\ln x}=\frac25$$

◇ **6.1.21.**

$$\lim_{x\to+0}\frac{\ln(x^2+x)}{\ln(x^5+x^3)}=\lim_{x\to+0}\frac{\ln(\cancel{x^2}+x)}{\ln(\cancel{x^5}+x^3)}=$$

$$=\lim_{x\to+0}\frac{\ln x}{\ln x^3}=\lim_{x\to+0}\frac{\ln x}{3\ln x}=\frac13$$

◇ **6.1.22.**

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{3\ln x+x-2}{\ln|5+x^3-e^{2x}|}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{3\ln x}+x-\cancel{2}}{\ln\Big|\cancel{5}+\cancel{x^3}-e^{2x}\Big|}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\ln|-e^{2x}|}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{2x}=\frac12$$

▷▷ **6.1.23.** Вычислите пределы, обращая внимание на значение, к которому стремится аргумент x:

1. $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left|x-2\ln x-3\sqrt{x}\right|}{\sqrt[3]{\ln x+2x\sqrt{x}-x^2}}$
2. $\lim_{x\to0}\frac{\ln\left|x-2\ln x-3\sqrt{x}\right|}{\sqrt[3]{\ln x+2x\sqrt{x}-x^2}}$
3. $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(1+\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}\right)}{\ln\left(1+\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{x}\right)}$
4. $\lim_{x\to0}\frac{\ln\left(1+\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}\right)}{\ln\left(1+\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{x}\right)}$
5. $\lim_{x\to0}\frac{\ln\left(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}\right)}{\ln\left(\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{x}\right)}$
6. $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(1+3^x)}{\ln(1+2^x)}$
7. $\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+3^x)}{\ln(1+2^x)}$

(b) Асимптотические формулы

В математическом анализе имеется специальный язык *асимптотических формул*, позволяющий описывать различные связи между функциями с помощью символов $\mathbf{o}$. Для его понимания достаточно просто знать, что если в какой-то формуле встречается символ $\underset{x\to a}{\mathbf{o}}\Big(f(x)\Big)$, то это означает, что на этом месте стоит некоторая (неизвестная) функция $\alpha(x)$, для которой справедливо соотношение $\alpha(x) = \underset{x\to a}{\mathbf{o}}\Big(f(x)\Big)$.

◇ **6.1.24.** Скажем, асимптотическая формула

$$\sin x = x + \underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(x)$$

означает, что

$$\sin x = x + \alpha(x), \qquad \text{где} \quad \alpha(x) = \underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(x)$$

Ее нетрудно доказать:

$$\sin x = x + \underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(x) \quad \Leftrightarrow \quad \sin x - x = \underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(x) \quad \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \quad \frac{\sin x - x}{x} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0 \quad \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \quad \frac{\sin x}{x} - 1 \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\sin x}{x} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 1$$

Последнее соотношение верно, поскольку представляет собой первый замечательный предел.

◇ **6.1.25.** Или вот такая асимптотическая формула:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(x^2)$$

Она означает, что

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \alpha(x), \qquad \text{где} \quad \alpha(x) = \underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(x^2)$$

и доказать ее также нетрудно:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(x^2) \quad \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \quad \cos x - 1 + \frac{x^2}{2} = \underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(x^2) \quad \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \quad \frac{\cos x - 1 + \frac{x^2}{2}}{x^2} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0 \quad \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \quad \frac{\cos x - 1}{x^2} + \frac{1}{2} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\cos x - 1}{x^2} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} -\frac{1}{2}$$

Последнее соотношение доказывается напрямую:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{x^2} = \left(\begin{smallmatrix}\text{правило}\\ \text{Лопиталя}\end{smallmatrix}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{-\sin x}{2x} =$$
$$= \left(\begin{smallmatrix}\text{снова правило}\\ \text{Лопиталя}\end{smallmatrix}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{-\cos x}{2} = -\frac{1}{2}$$

Выпишем несколько важных асимптотических формул:

$$\sin x = x + \underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(x) \tag{6.1.19}$$
$$\operatorname{tg} x = x + \underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(x) \tag{6.1.20}$$
$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(x^2) \tag{6.1.21}$$
$$\ln(1+x) = x + \underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(x) \tag{6.1.22}$$
$$\log_a(1+x) = \frac{x}{\ln a} + \underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(x) \tag{6.1.23}$$
$$e^x = 1 + x + \underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(x) \tag{6.1.24}$$
$$a^x = 1 + x\cdot\ln a + \underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(x) \tag{6.1.25}$$
$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(x) \tag{6.1.26}$$
$$\arcsin x = x + \underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(x) \tag{6.1.27}$$
$$\operatorname{arctg} x = x + \underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(x) \tag{6.1.28}$$

Доказательство. Все эти формулы легко выводятся из (6.1.5) – (6.1.14). В качестве примера рассмотрим (6.1.25):

$$\overbrace{a^x = 1 + x\cdot\ln a + \underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(x)}^{\substack{\text{формула (6.1.25)}\\ \downarrow}} \quad \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \quad a^x - 1 - x\cdot\ln a = \underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(x) \quad \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \quad \frac{a^x - 1 - x\cdot\ln a}{x} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0 \quad \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \quad \frac{a^x - 1}{x} - \ln a \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0 \quad \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \quad \frac{a^x - 1}{x} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} \ln a \quad \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \quad \frac{a^x - 1}{x\cdot\ln a} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 1 \quad \Leftrightarrow \quad \underbrace{a^x - 1 \underset{x\to 0}{\sim} x\cdot\ln a}_{\substack{\uparrow\\ \text{формула (6.1.11)}}}$$

□

Связь между асимптотической эквивалентностью и асимптотическим сравнением. Связи между формулами (6.1.19) – (6.1.28) и (6.1.5) – (6.1.14) отражают важную общую зависимость между символами $\sim$ и $\mathbf{o}$:

Теорема 6.1.9 (о связи между символами $\sim$ и $\mathbf{o}$). *Следующие утверждения эквивалентны:*

(i) $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$;

(ii) $f(x) = g(x) + \underset{x\to a}{\mathbf{o}}(g(x))$;

(ii) $g(x) = f(x) + \underset{x\to a}{\mathbf{o}}(f(x))$.

Доказательство. Докажем, что $(ii) \Leftrightarrow (i)$:

$$(ii) \quad\Leftrightarrow\quad f(x) = g(x) + \underset{x\to a}{\mathbf{o}}(g(x)) \quad\Leftrightarrow\quad f(x) - g(x) = \underset{x\to a}{\mathbf{o}}(g(x)) \quad\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\quad f(x) - g(x) = \underbrace{\alpha(x)}_{\substack{\downarrow\\ 0}}\cdot g(x) \quad\Leftrightarrow\quad f(x) = \underbrace{(1+\alpha(x))}_{\substack{\downarrow\\ 1}}\cdot g(x) \quad\Leftrightarrow\quad f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x) \quad\Leftrightarrow\quad (i)$$

А теперь – что $(iii) \Leftrightarrow (i)$:

$$(iii) \quad\Leftrightarrow\quad g(x) = f(x) + \underset{x\to a}{\mathbf{o}}(f(x)) \quad\overset{\text{уже доказано}}{\Leftrightarrow}\quad g(x) \underset{x\to a}{\sim} f(x) \quad\overset{\text{свойство }3^\circ\text{, с.361}}{\Leftrightarrow}$$
$$\Leftrightarrow\quad f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x) \quad\Leftrightarrow\quad (i)$$

□

Равенство асимптотических выражений и свойства символа o. До сих пор мы рассматривали асимптотические формулы, в которых символ $\mathbf{o}$ встречается только один раз, и в тех случаях, когда $\mathbf{o}$ выражался через остальные элементы формулы, смысл этих формул был очевиден. Но в этой науке приходится иметь дело также с формулами, где $\mathbf{o}$ встречается несколько раз, и для придания смысла таким формулам необходима некая предварительная работа.

Сначала нужно определить понятие асимптотического выражения. Это то, что стоит справа в формулах (6.1.19)-(6.1.27). Точное определение выглядит так:

- *Асимптотическим выражением* называется запись, полученная из числовых выражений[2] с помощью следующих операций:
  1) всякое числовое выражение считается асимптотическим выражением,
  2) если $\mathcal{A}$ – асимптотическое выражение, то запись $\underset{x\to a}{\mathbf{o}}(\mathcal{A})$ тоже считается асимптотическим выражением,
  3) если $\mathcal{A}$ – асимптотическое выражение, то подстановкой вместо произвольной переменной, входящей в $\mathcal{A}$, но не в связке вида $x \to a$, любого другого асимптотического выражения $\mathcal{B}$, мы снова получаем асимптотическое выражение.

◇ **6.1.26.** Следующие записи являются асимптотическими выражениями:

$$\sin x, \qquad \underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(\sin x), \qquad \sin\Big(\underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(x)\Big)$$

◇ **6.1.27.** Следующие записи, наоборот, не являются асимптотическими выражениями:

$$\underset{\sin x\to 0}{\mathbf{o}}(x), \qquad \underset{\underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(1)\to 0}{\mathbf{o}}(x)$$

К асимптотическим выражениям нужно относиться как к выражениям (в главе про логику они назывались термами), описывающим семейства функций: когда вместо каждого входящего символа $\underset{x\to a}{\mathbf{o}}$ мы подставляем выражение, описывающее какую-то функцию (со свойством этого символа $\underset{x\to a}{\mathbf{o}}$), мы получаем выражение, описывающее определенную стандартную функцию. Говорят, что два асимптотических выражения *равны*, если они описывают один и тот же класс функций:

$$\mathcal{A} = \mathcal{B} \quad\Longleftrightarrow\quad \Big(f(x) = \mathcal{A} \quad\Longleftrightarrow\quad f(x) = \mathcal{B}\Big)$$

[2] Числовые выражения были определены на с.((a)).

◇ **6.1.28.** Докажем равенство:

$$x + \underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(x) = x + \underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(2x)$$

Действительно,

$$f(x) = x + \underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(x) \quad\Leftrightarrow\quad f(x) - x = \underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(x) \quad\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\quad \frac{f(x)-x}{x} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{f(x)-x}{2x} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0 \quad\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\quad f(x) - x = \underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(2x) \quad\Leftrightarrow\quad f(x) = x + \underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(2x).$$

◇ **6.1.29.** Покажем, что следующее равенство, наоборот, неверно:

$$x + \underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(x) = \underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(1)$$

Для этого достаточно найти какую-нибудь функцию f, которая принадлежала бы второму классу

$$f(x) = \underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(1)$$

но не первому:

$$f(x) \neq x + \underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(x).$$

Такой функцией будет, например,

$$f(x) = \sqrt[3]{x}.$$

Для нее мы получим:

$$\frac{f(x)}{1} = \sqrt[3]{x} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0 \quad\Leftrightarrow\quad f(x) = \underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(1).$$

А с другой стороны,

$$\frac{f(x)-x}{x} = \frac{\sqrt[3]{x}-x}{x} = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} - 1 \underset{x\to 0}{\not\longrightarrow} 0 \quad\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\quad f(x) - x \neq \underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(x) \quad\Rightarrow\quad f(x) \neq x + \underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(x).$$

◇ **6.1.30.** Покажем, что

$$\underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(x) + \underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(x^2) = \underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(x),$$

Действительно,

$$f(x) = \underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(x) + \underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(x^2) \;\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\; \exists \alpha, \beta \quad f(x) = \underbrace{\alpha(x)}_{\substack{\downarrow\\0}} \cdot x + \underbrace{\beta(x)}_{\substack{\downarrow\\0}} \cdot x^2 =$$
$$= \underbrace{\Big(\underbrace{\alpha(x)}_{\substack{\downarrow\\0}} + \underbrace{\beta(x)}_{\substack{\downarrow\\0}} \cdot \underset{\substack{\downarrow\\0}}{x}\Big)}_{\substack{\Downarrow\\ \gamma(x) = \alpha(x) + \beta(x)\cdot x \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0}} \cdot x \;\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\; \exists \gamma \quad f(x) = \underbrace{\underbrace{\gamma(x)}_{\substack{\downarrow\\0}}}_{\substack{\Downarrow\\ \begin{cases}\alpha(x) = \gamma(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0\\ \beta(x) = 0 \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0\end{cases}}} \cdot x \;\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\; f(x) = \underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(x)$$

Предпоследнюю равносильность надо понимать так, что из существования α и β с нужными свойствами следует существование γ, в качестве которой можно взять $\gamma(x) = \alpha(x) + \beta(x)\cdot x$, и наоборот, из существования γ с нужными свойствами следует существование α и β, в качестве которых можно взять $\alpha(x) = \gamma(x)$, $\beta(x) = 0$.

◇ **6.1.31.** Покажем, что

$$\underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(x) + \underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(x^2) \neq \underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(x^2),$$

Здесь достаточно предъявить функцию f со свойствами

$$f(x) = \underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(x) + \underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(x^2) \;\&\; f(x) \neq \underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(x^2),$$

Такой функцией будет, например,

$$f(x) = x^{\frac{4}{3}}.$$

Свойства символа o:

1° $C \cdot \underset{x\to a}{\mathbf{o}}\Big(f(x)\Big) = \underset{x\to a}{\mathbf{o}}\Big(C\cdot f(x)\Big) = \underset{x\to a}{\mathbf{o}}\Big(f(x)\Big), \quad C \neq 0;$

2° $\underset{x\to a}{\mathbf{o}}\Big(f(x)\Big) \pm \underset{x\to a}{\mathbf{o}}\Big(f(x)\Big) = \underset{x\to a}{\mathbf{o}}\Big(f(x)\Big);$

3° $\underset{x\to a}{\mathbf{o}}\Big(f(x)\Big) \cdot \underset{x\to a}{\mathbf{o}}\Big(g(x)\Big) = \underset{x\to a}{\mathbf{o}}\Big(f(x)\cdot g(x)\Big) = f(x) \cdot \underset{x\to a}{\mathbf{o}}\Big(g(x)\Big);$

4° $\underset{x\to a}{\mathbf{o}}\Big(\underset{x\to a}{\mathbf{o}}\Big(f(x)\Big)\Big) = \underset{x\to a}{\mathbf{o}}\Big(f(x)\Big).$

5° $\underset{x\to a}{\mathbf{o}}(f(x)) = f(x) \cdot \underset{x\to a}{\mathbf{o}}(1);$

6° $\underset{x\to a}{\mathbf{o}}(1) \underset{x\to a}{\longrightarrow} 0;$

7° $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x) \quad\Rightarrow\quad \underset{x\to a}{\mathbf{o}}\Big(f(x)\Big) = \underset{x\to a}{\mathbf{o}}\Big(g(x)\Big);$

$8^{\mathbf{o}}$ $$\left(f(x)+\underset{x\to a}{\mathbf{o}}\Big(f(x)\Big)\right)^{\mu}=f(x)^{\mu}+\underset{x\to a}{\mathbf{o}}\Big(f(x)^{\mu}\Big),\quad \mu\neq 0.$$

Доказательство. 1. Докажем $1^{\mathbf{o}}$: во-первых,

$$u(x)=C\cdot\underset{x\to a}{\mathbf{o}}(f(x))\quad\Leftrightarrow\quad u(x)=C\cdot\underbrace{\alpha(x)}_{\substack{\downarrow\\0}}\cdot f(x)\quad\Leftrightarrow\quad u(x)=\underbrace{\alpha(x)}_{\substack{\downarrow\\0}}\cdot C\cdot f(x)\quad\Leftrightarrow\quad u(x)=\underset{x\to a}{\mathbf{o}}(C\cdot f(x)),$$

и, во-вторых,

$$u(x)=\underset{x\to a}{\mathbf{o}}(C\cdot f(x))\quad\Leftrightarrow\quad u(x)=\underbrace{\alpha(x)}_{\substack{\downarrow\\0}}\cdot C\cdot f(x)\quad\overset{C\neq 0}{\Leftrightarrow}\quad u(x)=\underbrace{C\cdot\alpha(x)}_{\substack{\downarrow\\0}}\cdot f(x)\quad\Leftrightarrow\quad u(x)=\underset{x\to a}{\mathbf{o}}(f(x)).$$

2. Докажем $2^{\mathbf{o}}$:

$$u(x)=\underset{x\to a}{\mathbf{o}}\Big(f(x)\Big)\pm\underset{x\to a}{\mathbf{o}}\Big(f(x)\Big)\quad\Leftrightarrow\quad u(x)=\underbrace{\alpha(x)}_{\substack{\downarrow\\0}}\cdot f(x)\pm\underbrace{\beta(x)}_{\substack{\downarrow\\0}}\cdot f(x)=\underbrace{\underbrace{\Big(\alpha(x)\pm\beta(x)\Big)}_{\substack{\downarrow\\0}}}_{\substack{\Downarrow\\ \gamma(x)=\alpha(x)\pm\beta(x)\underset{x\to 0}{\longrightarrow}0}}\cdot f(x)\quad\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\quad u(x)=\underbrace{\underbrace{\gamma(x)}_{\substack{\downarrow\\0}}}_{\substack{\Downarrow\\ \begin{cases}\alpha(x)=\gamma(x)\underset{x\to 0}{\longrightarrow}0\\ \beta(x)=0\underset{x\to 0}{\longrightarrow}0\end{cases}}}\cdot f(x)\quad\Leftrightarrow\quad u(x)=\underset{x\to a}{\mathbf{o}}\Big(f(x)\Big)$$

3. Докажем $3^{\mathbf{o}}$: во-первых,

$$u(x)=\underset{x\to a}{\mathbf{o}}\Big(f(x)\Big)\cdot\underset{x\to a}{\mathbf{o}}\Big(g(x)\Big)\quad\Leftrightarrow\quad u(x)=\underbrace{\alpha(x)}_{\substack{\downarrow\\0}}\cdot f(x)\cdot\underbrace{\beta(x)}_{\substack{\downarrow\\0}}\cdot g(x)=\underbrace{\underbrace{\Big(\alpha(x)\cdot\beta(x)\Big)}_{\substack{\downarrow\\0}}}_{\substack{\Downarrow\\ \gamma(x)=\alpha(x)\cdot\beta(x)\underset{x\to 0}{\longrightarrow}0}}\cdot f(x)\cdot g(x)\quad\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\quad u(x)=\underbrace{\underbrace{\gamma(x)}_{\substack{\downarrow\\0}}}_{\substack{\Downarrow\\ \begin{cases}\alpha(x)=\gamma(x)^{\frac{2}{3}}\underset{x\to 0}{\longrightarrow}0\\ \beta(x)=\gamma(x)^{\frac{1}{3}}\underset{x\to 0}{\longrightarrow}0\end{cases}}}\cdot f(x)\cdot g(x)\quad\Leftrightarrow\quad u(x)=\underset{x\to a}{\mathbf{o}}\Big(f(x)\cdot g(x)\Big),$$

и, во-вторых,

$$u(x)=\underset{x\to a}{\mathbf{o}}\Big(f(x)\cdot g(x)\Big)\quad\Leftrightarrow\quad u(x)=\underbrace{\alpha(x)}_{\substack{\downarrow\\0}}\cdot f(x)\cdot g(x)=f(x)\cdot\underbrace{\alpha(x)}_{\substack{\downarrow\\0}}\cdot g(x)\quad\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\quad u(x)=f(x)\cdot\underset{x\to a}{\mathbf{o}}\Big(g(x)\Big).$$

4. Докажем $4^{\mathbf{o}}$:

$$u(x)=\underset{x\to a}{\mathbf{o}}\Big(\underset{x\to a}{\mathbf{o}}\Big(f(x)\Big)\Big)\quad\Leftrightarrow\quad u(x)=\underbrace{\alpha(x)}_{\substack{\downarrow\\0}}\cdot\underset{x\to a}{\mathbf{o}}\Big(f(x)\Big)\quad\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad u(x) = \underbrace{\alpha(x)}_{\substack{\downarrow\\0}} \cdot \underbrace{\beta(x)}_{\substack{\downarrow\\0}} \cdot f(x) = \underbrace{\underbrace{\Big(\alpha(x)\cdot\beta(x)\Big)}_{\substack{\downarrow\\0}}}_{\substack{\Downarrow\\ \gamma(x)=\alpha(x)\cdot\beta(x)\underset{x\to 0}{\longrightarrow}0}} \cdot f(x) \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad u(x) = \underbrace{\underbrace{\gamma(x)}_{\substack{\downarrow\\0}}}_{\substack{\Downarrow\\ \begin{cases}\alpha(x)=\gamma(x)^{\frac{2}{3}}\underset{x\to0}{\longrightarrow}0\\ \beta(x)=\gamma(x)^{\frac{1}{3}}\underset{x\to0}{\longrightarrow}0\end{cases}}} \cdot f(x) \quad \Rightarrow \quad u(x) = \underset{x\to a}{\mathbf{o}}\Big(f(x)\Big)$$

5. Для доказательства $5^{\mathbf{o}}$ можно воспользоваться вторым равенством в уже доказанном свойстве $3^{\mathbf{o}}$:

$$\underset{x\to a}{\mathbf{o}}(f(x)) = \underset{x\to a}{\mathbf{o}}(f(x)\cdot 1) = f(x)\cdot \underset{x\to a}{\mathbf{o}}(1)$$

6. Докажем $6^{\mathbf{o}}$:

$$u(x) = \underset{x\to a}{\mathbf{o}}(1) \quad \Leftrightarrow \quad u(x) = \underbrace{\alpha(x)}_{\substack{\downarrow\\0}}\cdot 1 \quad \Leftrightarrow \quad u(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} 0.$$

7. Докажем $7^{\mathbf{o}}$: Пусть $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$, то есть

$$f(x) = \underbrace{\theta(x)}_{\substack{\downarrow\\1}}\cdot g(x)$$

Тогда

$$u(x) = \underset{x\to a}{\mathbf{o}}\Big(f(x)\Big) \quad \Leftrightarrow \quad u(x) = \underbrace{\alpha(x)}_{\substack{\downarrow\\0}}\cdot f(x) = \underbrace{\alpha(x)}_{\substack{\downarrow\\0}}\cdot\underbrace{\theta(x)}_{\substack{\downarrow\\1}}\cdot g(x) = \underbrace{\alpha\cdot\theta(x)}_{\substack{\downarrow\\0}}\cdot g(x) \quad \Leftrightarrow \quad u(x) = \underset{x\to a}{\mathbf{o}}\Big(g(x)\Big)$$

8.

$$u(x) = \Big(f(x) + \underset{x\to a}{\mathbf{o}}\Big(f(x)\Big)\Big)^{\mu} \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad u(x) = \Big(f(x) + \underbrace{\alpha(x)}_{\substack{\downarrow\\0}}\cdot f(x)\Big)^{\mu} = \Big(\underbrace{\Big(1+\alpha(x)\Big)}_{\substack{\downarrow\\1}}\cdot f(x)\Big)^{\mu} = \underbrace{\Big(1+\alpha(x)\Big)^{\mu}}_{\substack{\downarrow\\1}}\cdot f(x)^{\mu} \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad u(x) \underset{x\to a}{\sim} f(x)^{\mu} \quad \overset{\text{Теорема 6.1.9}}{\Leftrightarrow} \quad u(x) = f(x)^{\mu} + \underset{x\to a}{\mathbf{o}}\Big(f(x)^{\mu}\Big)$$

$\square$

Упрощение асимптотических многочленов. Асимптотические многочлены, о которых пойдет здесь речь, представляют собой частный случай асимптотических выражений.

- *Простым асимптотическим многочленом* называется запись вида

$$a_1\cdot x^{\lambda_1} + a_2\cdot x^{\lambda_2} + \ldots + a_n\cdot x^{\lambda_n} + \underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(x^{\mu}),$$

где $a_i\in\mathbb{R}$, $\lambda_i,\mu,n\in\mathbb{Z}_+$. При этом,

— каждое выражение $a_i\cdot x^{\lambda_i}$ (вне символа $\underset{x\to 0}{\mathbf{o}}$) называется *неасимптотическим мономом*, а числа a_i и λ_i – его *коэффициентом* и *степенью*,

— выражение x^{μ} (под символом $\underset{x\to 0}{\mathbf{o}}$) называется *асимптотическим мономом*, а число μ называется *асимптотической степенью* этого асимптотического многочлена.

— если в асимптотическом многочлене есть неасимптотический моном $a_k \cdot x^{\lambda_k}$ с ненулевым коэффициентом ($a_k \ne 0$) и со степенью (λ_k), меньшей чем все остальные степени,
$$\lambda_k < \lambda_i, \quad i \ne k,$$
и не превосходящей асимптотической степени,
$$\lambda_k \leqslant \mu,$$
то он называется *главным мономом*, а число λ_k — главной степенью этого асимптотического многочлена.

- *Асимптотическим многочленом* называется запись, составленная из простых асимптотических многочленов, применением конечного числа операций
  — умножение на число (когда из асимптотического многочлена A составляется выражение $\alpha \cdot (A)$), или
  — сложения (когда из двух асимптотических многочленов A и B составляется выражение $(A) + (B)$), или
  — умножения (когда из двух асимптотических многочленов A и B составляется выражение $(A) \cdot (B)$), или
  — композиции (когда в один асимптотический многочлен A вместо переменной x подставляется другой асимптотический многочлен B).

Главный навык, которому учит эта наука, состоит в умении упрощать асимптотические многочлены. Его можно неформально описать правилом

“меньшие степени переменной поглощают большие”

Это надо понимать не буквально, а со следующими уточнениями. Во-первых, напомним, что в теореме 6.1.3 мы доказали формулу
$$x^\mu \underset{x\to 0}{\ll} x^\lambda, \quad \lambda < \mu, \tag{6.1.29}$$
или, что эквивалентно, формулу
$$x^\mu = \underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(x^\lambda), \quad \lambda < \mu.$$
Она позволяет выделять главное слагаемое в линейных комбинациях элементарных функций, в частности, в многочленах. Для асимптотических многочленов это правило нужно дополнить следующей важной теоремой, которая позволяет не только выделять главное слагаемое, но описывает вообще всю процедуру упрощения.

Теорема 6.1.10. *Если $\lambda \leqslant \mu$, то*
$$x^\lambda \underset{x\to 0}{\gg} \underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(x^\mu). \tag{6.1.30}$$
и
$$\underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(x^\lambda) \pm \underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(x^\mu) = \underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(x^\lambda). \tag{6.1.31}$$
Если же $\lambda < \mu$, то
$$\underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(x^\lambda) + C \cdot x^\mu = \underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(x^\lambda). \tag{6.1.32}$$

Доказательство. 1. Условие (6.1.30) эквивалентно условию
$$\frac{\underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(x^\mu)}{x^\lambda} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0,$$
которое при $\lambda \leqslant \mu$ действительно выполняется:
$$\frac{\underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(x^\mu)}{x^\lambda} = \frac{x^\mu \cdot \underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(1)}{x^\lambda} = \underbrace{x^{\mu-\lambda}}_{\substack{\text{ограничено}\\ \text{в окрестности}\\ \text{нуля при}\\ \mu-\lambda\geqslant 0}} \cdot \underbrace{\underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(1) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0}_{\text{свойство } 6^\circ \text{ на с. } 371}.$$

2. Условие (6.1.31) доказывается цепочкой

$$u(x) = \underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(x^\lambda) \pm \underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(x^\mu) \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad u(x) = \underbrace{\alpha(x)}_{\substack{\downarrow\\ 0}} \cdot x^\lambda \pm \underbrace{\beta(x)}_{\substack{\downarrow\\ 0}} \cdot x^\mu = \underbrace{\alpha(x)}_{\substack{\downarrow\\ 0}} \cdot x^\lambda \pm \underbrace{\beta(x)}_{\substack{\downarrow\\ 0}} \cdot \underbrace{x^{\mu-\lambda}}_{\substack{\text{ограничено}\\ \text{в окрестности}\\ \text{нуля при}\\ \mu-\lambda \geqslant 0}} \cdot x^\lambda =$$

$$= \underbrace{\alpha(x)}_{\substack{\downarrow\\ 0}} \cdot x^\lambda \pm \underbrace{\beta(x) \cdot x^{\mu-\lambda}}_{\substack{\downarrow\\ 0}} \cdot x^\lambda = \underbrace{\Big(\alpha(x) \pm \beta(x) \cdot x^{\mu-\lambda}\Big)}_{\substack{\downarrow\\ 0}} \cdot x^\lambda \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad u(x) = \underbrace{\gamma(x)}_{\substack{\downarrow\\ 0}} \cdot x^\lambda \quad \Leftrightarrow \quad u(x) = \underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(x^\lambda).$$

3. Условие (6.1.32) доказывается цепочкой

$$u(x) = \underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(x^\lambda) + C \cdot x^\mu \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad u(x) = \underbrace{\alpha(x)}_{\substack{\downarrow\\ 0}} \cdot x^\lambda + C \cdot x^\mu = \underbrace{\alpha(x)}_{\substack{\downarrow\\ 0}} \cdot x^\lambda + \underbrace{C \cdot x^{\mu-\lambda}}_{\substack{\downarrow\\ 0\\ (\mu-\lambda>0)}} \cdot x^\lambda = \underbrace{\Big(\alpha(x) + C \cdot x^{\mu-\lambda}\Big)}_{\substack{\downarrow\\ 0}} \cdot x^\lambda \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad u(x) = \underbrace{\beta(x)}_{\substack{\downarrow\\ 0}} \cdot x^\lambda \quad \Leftrightarrow \quad u(x) = \underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(x^\lambda).$$

□

Перечислим важные следствия из теорем 6.1.10 и 6.1.3. Во-первых, из (6.1.32) мы получаем

Следствие 6.1.11. *В простом асимптотическом многочлене все неасимптотические мономы со степенями, большими асимптотической степени можно без потери информации обнулять.*

◇ **6.1.32.** Например,

$$2x + 4x^2 - 2x^3 + 5x^4 + \underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(x^2) =$$
$$= 2x + 4x^2 - \cancel{2x^3} + \cancel{5x^4} + \underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(x^2) =$$
$$= 2x + 4x^2 + \underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(x^2)$$

Во-вторых, из (6.1.31) следует

Следствие 6.1.12. *При сложении асимптотических многочленов меньшая асимптотическая степень поглощает большую.*

◇ **6.1.33.** В качестве иллюстрации можно привести такой пример:

$$x + x^2 + \underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(x^2) + 2x + \underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(x) =$$
$$= 3x + x^2 + \underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(\cancel{x^2}) + \underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(x) =$$
$$= 3x + \underbrace{\cancel{x^2}}_{\substack{\uparrow\\ \text{здесь применяется}\\ \text{следствие 6.1.11}}} + \underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(x) = 3x + \underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(x).$$

Во-третьих, из (6.1.29) и (6.1.30) мы получаем

Следствие 6.1.13. *Главный моном простого асимптотического многочлена $a_k \cdot x^{\alpha_k}$ (если он существует) является главным слагаемым этого многочлена:*

$$a_k \cdot x^{\alpha_k} \underset{x\to 0}{\gg} a_i \cdot x^{\alpha_i} \quad (i \ne k), \qquad a_k \cdot x^{\alpha_k} \underset{x\to 0}{\gg} \underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(x^\beta).$$

(и поэтому весь многочлен эквивалентен своему главному моному).

◇ **6.1.34.** Например,

$$\underline{2x} + 4x^2 - 2x^3 + 5x^4 + \underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(x^2) \underset{x\to 0}{\sim} 2x$$

Из следствия 6.1.13 и свойства 7° на с.371 мы получаем

Следствие 6.1.14. *При подстановке простого асимптотического многочлена A в символ $\underset{x\to 0}{\mathbf{o}}$ возникающий асимптотический многочлен равен как асимптотическое выражение бесконечно малому от главного монома: $\underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(x^{\alpha_k})$, где α_k – главная степень многочлена A.*

◇ **6.1.35.**

$$\underset{x\to 0}{\mathbf{o}}\Big(\underline{2x}+4x^2-2x^3+5x^4+\underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(x^2)\Big)=$$
$$=\underset{x\to 0}{\mathbf{o}}\Big(\underline{2x}+4\cancel{x^2}-2\cancel{x^3}+5\cancel{x^4}+\underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(\cancel{x^2})\Big)=$$
$$=\underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(x)$$

Теперь рассмотрим примеры, где применяется много правил.

◇ **6.1.36.**

$$x+x^2+\underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(x^2)+\underset{x\to 0}{\mathbf{o}}\Big(x+x^2+\underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(x^2)\Big)=$$
$$=\big(\text{следствие 6.1.14}\big)=x+x^2+\underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(x^2)+$$
$$+\underset{x\to 0}{\mathbf{o}}\Big(x+\cancel{x^2}+\underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(\cancel{x^2})\Big)=$$
$$=x+x^2+\underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(x^2)+\underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(x)=\big(\text{следствие 6.1.12}\big)=$$
$$=x+x^2+\underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(\cancel{x^2})+\underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(x)=x+x^2+\underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(x)=$$
$$=\big(\text{следствие 6.1.11}\big)=x+\cancel{x^2}+\underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(x)=x+\underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(x)$$

◇ **6.1.37.**

$$\Big(x+x^2+\underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(x^2)\Big)^2=$$
$$=\Big(x+x^2+\underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(x^2)\Big)\cdot\Big(x+x^2+\underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(x^2)\Big)=$$
$$=x^2+x^4+\Big(\underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(x^2)\Big)^2+2x^3+x\underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(x^2)+x^2\underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(x^2)=$$
$$=x^2+x^4+\underset{x\to 0}{\mathbf{o}}\Big(x^4\Big)+2x^3+\underset{x\to 0}{\mathbf{o}}\Big(x^3\Big)+\underset{x\to 0}{\mathbf{o}}\Big(x^4\Big)=$$
$$=\big(\text{следствие 6.1.12}\big)=$$
$$=x^2+x^4+\underset{x\to 0}{\mathbf{o}}\Big(\cancel{x^4}\Big)+2x^3+\underset{x\to 0}{\mathbf{o}}\Big(x^3\Big)+\underset{x\to 0}{\mathbf{o}}\Big(\cancel{x^4}\Big)=$$
$$=x^2+x^4+2x^3+\underset{x\to 0}{\mathbf{o}}\Big(x^3\Big)=\big(\text{следствие 6.1.11}\big)=$$
$$=x^2+\cancel{x^4}+2x^3+\underset{x\to 0}{\mathbf{o}}\Big(x^3\Big)=x^2+2x^3+\underset{x\to 0}{\mathbf{o}}\Big(x^3\Big)$$

Последний пример особенно важен, и поэтому будет полезно найти более экономный способ упрощать подобные выражения. Представим себе, что нам нужно упростить асимптотическое выражение

$$\Big(A_0x^l+A_1x^{l+1}+...+A_kx^{l+k}+\underset{x\to 0}{\mathbf{o}}\Big(x^{l+k}\Big)\Big)\cdot\Big(B_0x^m+A_1x^{m+1}+...+A_nx^{m+n}+\underset{x\to 0}{\mathbf{o}}\Big(x^{m+n}\Big)\Big) \tag{6.1.33}$$

Для этого можно пользоваться следующим алгоритмом.

Алгоритм экономного раскрытия скобок при упрощении асимптотических многочленов:

1. Мысленно раскрываем скобки, и находим сначала *минимальную степень M переменной x, которая может получиться под символом* **o**. В нашем случае, если $A_0\neq 0$, $B_0\neq 0$, получается

$$M=\min\{l+m+n,l+k+m\}.$$

Это будет означать, что после упрощения наше выражение должно оканчиваться символом

$$\underset{x\to 0}{\mathbf{o}}\Big(x^M\Big)$$

2. По следствию 6.1.11 все слагаемые со степенями $\mu>M$ при упрощении "съедаются" слагаемым $\underset{x\to 0}{\mathbf{o}}\Big(x^M\Big)$:

$$\cancel{x^\mu}+\underset{x\to 0}{\mathbf{o}}\Big(x^M\Big)=\underset{x\to 0}{\mathbf{o}}\Big(x^M\Big)$$

Поэтому, раскрывая скобки, мы должны лишь найти коэффициенты перед степенями x^i, $i\leqslant M$. Это делается так же, как при обычном умножении многочленов.

Покажем, как этот алгоритм действует на конкретных примерах.

◇ **6.1.38.** Рассмотрим еще раз выражение из примера 7.2:

$$\Big(x+x^2+\underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(x^2)\Big)^2=$$
$$=\Big(x+x^2+\underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(x^2)\Big)\cdot\Big(x+x^2+\underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(x^2)\Big)$$

1. Сначала замечаем, что минимальная степень переменной x, стоящая под символом **o**, которая может получиться при раскрытии скобок равна 3. Это получается, когда слагаемое x умножается на слагаемое $\underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(x^2)$. Значит, наше упро-

щенное выражение должно оканчиваться на

$$\underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(x^3)$$

2. Выписываем коэффициенты перед степенями x^λ, $\lambda \leqslant 3$, которые получаются при раскрытии скобок:

$$\begin{aligned}
&x^0: 0 && \left(\begin{matrix}\text{при раскрытии скобок;}\\ \text{степень } x^0 \text{ вообще}\\ \text{получиться не может}\end{matrix}\right);\\
&x^1: 0 && \left(\begin{matrix}\text{степень } x^1\\ \text{тоже получиться не может}\end{matrix}\right);\\
&x^2: 1 && \left(\begin{matrix}\text{степень } x^2 \text{ может получиться,}\\ \text{когда } x \text{ умножается на } x\end{matrix}\right);\\
&x^3: 1+1=2 && \left(\begin{matrix}\text{степень } x^3 \text{ может получиться,}\\ \text{когда } x \text{ умножается на } x^2,\\ \text{и когда наоборот}\\ x^2 \text{ умножается на } x\end{matrix}\right).
\end{aligned}$$

3. Выписываем результат:

$$\Big(x + x^2 + \underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(x^2)\Big)^2 = x^2 + 2x^3 + \underset{x\to 0}{\mathbf{o}}\Big(x^3\Big)$$

◇ **6.1.39.** Упростим выражение, отличающееся от 7.2 степенью:

$$\begin{aligned}
&\Big(x + x^2 + \underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(x^2)\Big)^3 =\\
&= \Big(x + x^2 + \underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(x^2)\Big)\cdot\Big(x + x^2 + \underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(x^2)\Big)\cdot\\
&\qquad\cdot\Big(x + x^2 + \underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(x^2)\Big)
\end{aligned}$$

1. Сначала замечаем, что минимальная степень переменной x, стоящая под символом $\mathbf{o}$, которая может получиться при раскрытии скобок равна 4. Это получается, когда два слагаемых x умножаются на слагаемое $\underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(x^2)$. Значит, наше упрощенное выражение должно оканчиваться на

$$\underset{x\to 0}{\mathbf{o}}\Big(x^4\Big)$$

2. Выписываем коэффициенты перед степенями x^i, $i \leqslant 4$, которые получаются при раскрытии скобок:

$$\begin{aligned}
&x^0: 0 && \left(\begin{matrix}\text{при раскрытии скобок}\\ \text{степень } x^0 \text{ вообще}\\ \text{получиться не может}\end{matrix}\right);\\
&x^1: 0 && \left(\begin{matrix}\text{степень } x^1 \text{ тоже}\\ \text{получиться не может}\end{matrix}\right);\\
&x^2: 0 && \left(\begin{matrix}\text{степень } x^2 \text{ тоже}\\ \text{получиться не может}\end{matrix}\right);\\
&x^3: 1 && \left(\begin{matrix}\text{степень } x^3 \text{ может получиться,}\\ \text{когда } x \text{ умножается}\\ \text{на } x \text{ и еще раз на } x\end{matrix}\right);\\
&x^4: 1+1+1=3 && \left(\begin{matrix}\text{степень } x^3 \text{ может}\\ \text{получиться в трех случаях,}\\ \text{когда в разных вариантах } x\\ \text{умножается на } x \text{ и на } x^2\end{matrix}\right).
\end{aligned}$$

3. Выписысаем результат:

$$\Big(x + x^2 + \underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(x^2)\Big)^3 = x^3 + 3x^4 + \underset{x\to 0}{\mathbf{o}}\Big(x^4\Big)$$

◇ **6.1.40.** Упростим выражение

$$\Big(x^2 - \frac{1}{2}x^3 + \underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(x^3)\Big)\cdot\Big(2x^3 + x^5 + \underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(x^6)\Big)$$

1. Замечаем, что минимальная степень переменной x, стоящая под символом $\mathbf{o}$, которая может получиться при раскрытии скобок равна 6. Это получается, когда слагаемое $\underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(x^3)$ умножается на слагаемое $2x^3$. Значит, наше упрощенное выражение должно оканчиваться на

$$\underset{x\to 0}{\mathbf{o}}\Big(x^6\Big)$$

2. Выписываем коэффициенты перед степенями x^i, $i \leqslant 6$, которые получаются при раскрытии скобок:

$$\begin{aligned}
&x^0: 0 && \left(\begin{matrix}\text{при раскрытии скобок степень } x^0\\ \text{вообще получиться не может}\end{matrix}\right);\\
&x^1: 0 && (-''-);\\
&x^2: 0 && (-''-);\\
&x^3: 0 && (-''-);\\
&x^4: 0 && (-''-);\\
&x^5: 2 && \left(\begin{matrix}\text{степень } x^5 \text{ может получиться,}\\ \text{когда } x^2 \text{ умножается на } 2x^3\end{matrix}\right);\\
&x^6: -1 && \left(\begin{matrix}\text{степень } x^6 \text{ может получиться,}\\ \text{когда } -\tfrac{1}{2}x^3 \text{ умножается на } 2x^3\end{matrix}\right).
\end{aligned}$$

3. Выписываем результат:

$$\begin{aligned}
&\Big(x^2 - \frac{1}{2}x^3 + \underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(x^3)\Big)\cdot\Big(2x^3 + x^5 + \underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(x^6)\Big) =\\
&\qquad = 2x^5 - x^6 + \underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(x^6)
\end{aligned}$$

▷▷ **6.1.41.** Упростите выражения:

1. $\Big(-x^2 + \frac{2}{3}x^3 + \underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(x^3)\Big)^2$
2. $\Big(-x^2 + \frac{2}{3}x^3 + \underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(x^3)\Big)^3$
3. $\Big(3x + \frac{1}{5}x^3 + \underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(x^4)\Big)^2$
4. $\Big(3x + \frac{1}{5}x^3 + \underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(x^4)\Big)^3$
5. $\Big(3x^2 + \frac{1}{4}x^3 + \underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(x^3)\Big)\cdot\Big(-2x + x^2 + \underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(x^2)\Big)$
6. $\Big(3x^2 + \frac{1}{4}x^3 + \underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(x^3)\Big)\cdot\Big(-2x + x^2 + \underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(x^3)\Big)$
7. $\Big(3x^2 + \frac{1}{4}x^3 + \underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(x^4)\Big)\cdot\Big(-2x + x^2 + \underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(x^3)\Big)$
8. $\Big(4x + 3x^2 - 2x^3 + x^4 + \underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(x^4)\Big)\cdot\Big(-x + x^2 + x^3 - x^4 + \underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(x^4)\Big)$
9. $\Big(4x + 3x^2 - 2x^3 + x^4 + \underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(x^5)\Big)\cdot\Big(-x + x^2 + x^3 - x^4 + \underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(x^4)\Big)$
10. $\Big(4x + 3x^2 - 2x^3 + x^4 + \underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(x^5)\Big)\cdot\Big(-x + x^2 + x^3 - x^4 + \underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(x^5)\Big)$

Вычисление пределов с помощью асимптотических формул Объясним теперь, зачем нужны асимптотические формулы. Рассмотрим предел

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^6\cdot\operatorname{arctg}^4 x+\sin^5\sin\operatorname{tg}x^2}{x^2\cdot\sin^8 x+\ln\cos 3x^5} \tag{6.1.34}$$

Для его вычисления не подходит теорема об эквивалентной замене 6.1.2, или принцип выделения главного слагаемого 6.1.7 (не говоря уже о правиле Лопиталя 5.2.1, которое пришлось бы здесь применять 10 раз).

Так вот, в этой ситуации как раз бывают полезны асимптотические формулы. Вместе с доказанными в предыдущем параграфе свойствами 1^0-11^0, они позволяют вычислять такие "сложные" пределы. Покажем как это делается, начиная с более простых задач.

◇ **6.1.42.**

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin 2x-\sin x}{x+\ln(1+3x)}=\begin{pmatrix}\text{используем формулы}\\ \text{(6.1.19) и (6.1.27)}\end{pmatrix}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2x+\underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(2x)-\Big(x+\underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(x)\Big)}{x+\Big(3x+\underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(3x)\Big)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x+\underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(x)-\underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(x)}{4x+\underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{x+\underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(x)}{4x+\underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(x)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1+\underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(1)}{4+\underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(1)}=\frac{1+0}{4+0}=\frac{1}{4}$$

◇ **6.1.43.**

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(\cos x)}{2^{x^2}-1}=\begin{pmatrix}\text{используем формулы}\\ \text{(6.1.21) и (6.1.24)}\end{pmatrix}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\ln\Big(1-\frac{x^2}{2}+\underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(x^2)\Big)}{x^2\cdot\ln 2+\underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(x^2)}=$$

$$=\begin{pmatrix}\text{поскольку }-\frac{x^2}{2}+\underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(x^2)\underset{x\to 0}{\longrightarrow}0,\\ \text{можно сделать замену}\\ y=-\frac{x^2}{2}+\underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(x^2),\\ \text{и тогда получится, что } y\underset{x\to 0}{\longrightarrow}0,\\ \text{и по формуле (6.1.22) мы будем иметь}\\ \ln\Big(1-\frac{x^2}{2}+\underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(x^2)\Big)=\\ =\ln(1+y)=y+\underset{y\to 0}{\mathbf{o}}(y)=\\ =-\frac{x^2}{2}+\underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(x^2)+\underset{x\to 0}{\mathbf{o}}\Big(-\frac{x^2}{2}+\underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(x^2)\Big)\end{pmatrix}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{x^2}{2}+\underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(x^2)+\underset{x\to 0}{\mathbf{o}}\Big(-\frac{x^2}{2}+\underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(x^2)\Big)}{x^2\cdot\ln 2+\underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(x^2)}=$$

$$=\begin{pmatrix}\text{используем}\\ \text{свойство } 3^{\mathbf{oo}}\end{pmatrix}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{x^2}{2}+\underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(x^2)+\underset{x\to 0}{\mathbf{o}}\Big(-\frac{x^2}{2}+\underset{x\to 0}{\mathbf{o}}\cancel{(}x^2)\Big)}{x^2\cdot\ln 2+\underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(x^2)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{x^2}{2}+\underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(x^2)+\underset{x\to 0}{\mathbf{o}}\Big(-\frac{x^2}{2}\Big)}{x^2\cdot\ln 2+\underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(x^2)}=$$

$$=\begin{pmatrix}\text{используем}\\ \text{свойство } 1^{\mathbf{o}}\end{pmatrix}=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{x^2}{2}+\underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(x^2)+\underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(x^2)}{x^2\cdot\ln 2+\underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(x^2)}=$$

$$=\begin{pmatrix}\text{снова}\\ \text{используем } 2^0\end{pmatrix}=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{x^2}{2}+\underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(x^2)}{x^2\cdot\ln 2+\underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(x^2)}=$$

$$=\begin{pmatrix}\text{после этого}\\ \text{свойство } 6^{\mathbf{o}}\end{pmatrix}=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{x^2}{2}+x^2\underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(1)}{x^2\cdot\ln 2+x^2\underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(1)}=$$

$$=\begin{pmatrix}\text{делим все}\\ \text{на } x^2\end{pmatrix}=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{2}+\underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(1)}{\ln 2+\underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(1)}=$$

$$=\begin{pmatrix}\text{применяем}\\ \text{свойство } 7^{\mathbf{o}}\end{pmatrix}=\frac{-\frac{1}{2}+0}{\ln 2+0}=-\frac{1}{2\ln 2}$$

◇ **6.1.44.**

$$\lim_{x\to 0}(x+e^x)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0}e^{\ln\left((x+e^x)^{\frac{1}{x}}\right)}=$$

$$=e^{\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\cdot\ln(x+e^x)}=e^{\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\cdot\ln(x+1+x+\underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(x))}=$$

$$=e^{\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\cdot\ln(1+2x+\underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(x))}=$$

$$=e^{\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\cdot\left(2x+\underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(x)+\underset{x\to 0}{\mathbf{o}}\left(2x+\underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(x)\right)\right)}=$$

$$=e^{\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\cdot\left(2x+\underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(x)+\underset{x\to 0}{\mathbf{o}}\left(2x+\underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(2x)\right)\right)}=$$

$$=e^{\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\cdot\left(2x+\underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(x)+\underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(2x)\right)}=$$

$$=e^{\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\cdot\left(2x+\underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(x)+\underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(x)\right)}=$$

$$=e^{\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\cdot x\cdot\left(2+\underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(1)+\underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(1)\right)}=$$

$$=e^{\lim_{x\to 0}\left(2+\underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(1)+\underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(1)\right)}=e^{2+0+0}=e^2$$

◇ **6.1.45.** Вернемся теперь к примеру (6.1.34):

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^6\cdot\operatorname{arctg}^4 x+\sin^5\sin\operatorname{tg}x^2}{x^2\cdot\sin^8 x+\ln\cos 3x^5}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\left\{x^6\cdot\left(x+\underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(x)\right)^4+\left(\sin\operatorname{tg}x^2+\underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(\sin\operatorname{tg}x^2)\right)^5\right\}:$$

$$:\left\{x^2\cdot\left(x+\underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(x)\right)^8+\ln\left(1-\frac{(3x^5)^2}{2}+\underset{x\to 0}{\mathbf{o}}\left((3x^5)^2\right)\right)\right\}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\left\{x^6\cdot\left(x^4+\underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(x^4)\right)+\right.$$

$$+\left(\operatorname{tg}x^2+\underset{x\to0}{o}(\operatorname{tg}x^2)+\underset{x\to0}{o}\left(\operatorname{tg}x^2+\underset{x\to0}{o}(\operatorname{tg}x^2)\right)\right)^5\Bigg\}:$$

$$:\left\{x^2\cdot\left(x^8+\underset{x\to0}{o}(x^8)\right)+\ln\left(1-\frac{9x^{10}}{2}+\underset{x\to0}{o}\left(9x^{10}\right)\right)\right\}=$$

$$=\lim_{x\to0}\left\{x^{10}+\underset{x\to0}{o}(x^{10})+\left(\operatorname{tg}x^2+\underset{x\to0}{o}(\operatorname{tg}x^2)\right)^5\right\}:$$

$$:\Bigg\{x^{10}+\underset{x\to0}{o}(x^{10})-\frac{9x^{10}}{2}+\underset{x\to0}{o}\left(9x^{10}\right)+$$

$$+\underset{x\to0}{o}\left(-\frac{9x^{10}}{2}+\underset{x\to0}{o}\left(9x^{10}\right)\right)\Bigg\}=$$

$$=\lim_{x\to0}\Bigg\{x^{10}+\underset{x\to0}{o}(x^{10})+$$

$$+\left(x^2+\underset{x\to0}{o}(x^2)+\underset{x\to0}{o}\left(x^2+\underset{x\to0}{o}(x^2)\right)\right)^5\Bigg\}:$$

$$:\left\{x^{10}+\underset{x\to0}{o}(x^{10})-\frac{9x^{10}}{2}+\underset{x\to0}{o}\left(x^{10}\right)\right\}=$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{x^{10}+\underset{x\to0}{o}(x^{10})+\left(x^2+\underset{x\to0}{o}(x^2)\right)^5}{-\frac{7x^{10}}{2}+\underset{x\to0}{o}(x^{10})}=$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{x^{10}+\underset{x\to0}{o}(x^{10})+x^{10}+\underset{x\to0}{o}(x^{10})}{-\frac{7x^{10}}{2}+\underset{x\to0}{o}(x^{10})}=$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{2x^{10}+\underset{x\to0}{o}(x^{10})}{-\frac{7x^{10}}{2}+\underset{x\to0}{o}(x^{10})}=\lim_{x\to0}\frac{2+\underset{x\to0}{o}(1)}{-\frac{7}{2}+\underset{x\to0}{o}(1)}=$$

$$=\frac{2+0}{-\frac{7}{2}+0}=-\frac{4}{7}$$

◇ **6.1.46.**

$$\lim_{x\to0}\frac{4\sqrt[3]{x}+3\sqrt[4]{x}-2\sin x}{1-\cos x+\sqrt[7]{x^2}}=$$

$$=\begin{pmatrix}\text{применяем формулы}\\ \text{(6.1.19) и (6.1.21)}\end{pmatrix}=$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{4x^{\frac13}+3x^{\frac14}-2(x+\underset{x\to0}{o}(x))}{\frac12x^2+\underset{x\to0}{o}(x^2)+x^{\frac27}}=$$

$$=\begin{pmatrix}x^{\frac13}=\underset{x\to0}{o}(x^{\frac14})\\ x=\underset{x\to0}{o}(x^{\frac14})\\ x^2=\underset{x\to0}{o}(x^{\frac27})\end{pmatrix}=$$

$$=\lim_{x\to0}\Big\{4\underset{x\to0}{o}(x^{\frac14})+3x^{\frac14}-$$

$$-2\big(\underset{x\to0}{o}(x^{\frac14})+\underset{x\to0}{o}\big(\underset{x\to0}{o}(x^{\frac14})\big)\big)\Big\}:$$

$$:\left\{\frac12\underset{x\to0}{o}(x^{\frac27})+\underset{x\to0}{o}\big(\underset{x\to0}{o}(x^{\frac27})\big)+x^{\frac27}\right\}=$$

$$=\begin{pmatrix}\text{применяем}\\ \text{свойство }6^{\circ}\ \S7\end{pmatrix}=$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{4\underset{x\to0}{o}(x^{\frac14})+3x^{\frac14}-2\big(\underset{x\to0}{o}(x^{\frac14})+\underset{x\to0}{o}(x^{\frac14})\big)}{\frac12\underset{x\to0}{o}(x^{\frac27})+\underset{x\to0}{o}(x^{\frac27})+x^{\frac27}}=$$

$$=\begin{pmatrix}\text{применяем}\\ \text{свойства }1^0\text{ и }2^0\ \S7\end{pmatrix}=$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\underset{x\to0}{o}(x^{\frac14})+3x^{\frac14}-2\big(\underset{x\to0}{o}(x^{\frac14})\big)}{\underset{x\to0}{o}(x^{\frac27})+x^{\frac27}}=$$

$$=\begin{pmatrix}\text{применяем}\\ \text{свойства }1^0\text{ и }3^0\ \S7\end{pmatrix}=$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\underset{x\to0}{o}(x^{\frac14})+3x^{\frac14}-\underset{x\to0}{o}(x^{\frac14})}{\underset{x\to0}{o}(x^{\frac27})+x^{\frac27}}=$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\underset{x\to0}{o}(x^{\frac14})+3x^{\frac14}}{\underset{x\to0}{o}(x^{\frac27})+x^{\frac27}}=$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{x^{\frac14}\cdot\underset{x\to0}{o}(1)+3x^{\frac14}}{x^{\frac27}\cdot\underset{x\to0}{o}(1)+x^{\frac27}}=$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\underset{x\to0}{o}(1)+3}{x^{\frac1{28}}\cdot\underset{x\to0}{o}(1)+x^{\frac1{28}}}=$$

$$=\begin{pmatrix}\text{по свойству }8^0\ \S7\\ \underset{x\to0}{o}(1)\underset{x\to0}{\longrightarrow}0\end{pmatrix}=\left(\frac{0+3}{0\cdot0+0}\right)=\infty$$

◇ **6.1.47.**

$$\lim_{x\to\infty}\frac{4\sqrt[3]{x}+3\sqrt[4]{x}-2\sin x}{1-\cos x+\sqrt[7]{x^2}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{4x^{\frac13}+3x^{\frac14}-2\sin x}{1-\cos x+x^{\frac27}}=$$

$$=\begin{pmatrix}x^{\frac14}=\underset{x\to\infty}{o}(x^{\frac13})\\ \sin x=\underset{x\to\infty}{o}(x^{\frac13})\\ \cos x=\underset{x\to\infty}{o}(x^{\frac27})\\ 1=\underset{x\to\infty}{o}(x^{\frac27})\end{pmatrix}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{4x^{\frac13}+3\underset{x\to\infty}{o}(x^{\frac13})-2\underset{x\to\infty}{o}(x^{\frac13})}{\underset{x\to\infty}{o}(x^{\frac27})-\underset{x\to\infty}{o}(x^{\frac27})+x^{\frac27}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{4x^{\frac13}+\underset{x\to\infty}{o}(x^{\frac13})}{\underset{x\to\infty}{o}(x^{\frac27})+x^{\frac27}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{4x^{\frac13}+x^{\frac13}\cdot\underset{x\to\infty}{o}(1)}{x^{\frac27}\cdot\underset{x\to\infty}{o}(1)+x^{\frac27}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{4x^{\frac1{21}}+x^{\frac1{21}}\cdot\underset{x\to\infty}{o}(1)}{\underset{x\to\infty}{o}(1)+1}=$$

$$=\begin{pmatrix}\text{по свойству }8^0\ \S7\\ \underset{x\to\infty}{o}(1)\underset{x\to\infty}{\longrightarrow}0\end{pmatrix}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}x^{\frac1{21}}\cdot\frac{4+\underset{x\to\infty}{o}(1)}{\underset{x\to\infty}{o}(1)+1}=$$

$$=\left(\infty\cdot\frac{4+0}{0+1}\right)=\infty$$

▷▷ **6.1.48.** Вычислите пределы:

1. $\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{\ln(1+\operatorname{tg}^2x)}$
2. $\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x+x^2)+\arcsin 3x-5x^3}{\sin 2x+\operatorname{tg}^2x+(e^x-1)^5}$
3. $\lim_{x\to0}\left(\cos x+\operatorname{arctg}^2x\right)^{\frac{1}{\arcsin^2x}}$

§ 2 Формулы Пеано и асимптотика

(a) Формулы Пеано

Формула Тейлора-Пеано. Асимптотические формулы (6.1.19) – (6.1.28), оказывается, являются частными случаями одной общей формулы, которая описывается следующей теоремой:

Теорема 6.2.1 (Тейлора-Пеано)**.** *Пусть функция f определена и дифференцируема порядка n на интервале (a,b). Тогда для всякой точки $x_0 \in (a,b)$ справедлива следующая асимптотическая формула:*

$$\boxed{f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \cdot (x-x_0)^k + \underset{x\to x_0}{\mathbf{o}}\Big((x-x_0)^n\Big)} \tag{6.2.35}$$

- Эта формула называется *формулой Тейлора с остаточным членом в форме Пеано порядка* (или *точности*) n для функции f в точке x_0.

Доказательство теоремы 6.2.1. Рассмотрим многочлен Тейлора

$$T_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!} \cdot (x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!} \cdot (x-x_0)^2 + ... + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \cdot (x-x_0)^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \cdot (x-x_0)^k$$

и заметим, что

$$T_n(x_0) = f(x_0), \quad T_n'(x_0) = f'(x_0), \quad T_n''(x_0) = f''(x_0), \quad ... \quad T_n^{(n)}(x_0) = f^{(n)}(x_0) \tag{6.2.36}$$

Действительно,

$$T_n(x_0) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!} \cdot (x_0-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!} \cdot (x_0-x_0)^2 + ... + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \cdot (x_0-x_0)^n = \\ = f(x_0) + 0 + 0 + ... + 0 = f(x_0)$$

Затем,

$$T_n'(x) = 0 + \frac{f'(x_0)}{1!} \cdot 1 + \frac{f''(x_0)}{2!} \cdot 2(x-x_0) + ... + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \cdot n(x-x_0)^{n-1}$$

и поэтому

$$T_n'(x_0) = f'(x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!} \cdot 2(x_0-x_0) + ... + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \cdot n(x_0-x_0)^{n-1} = \frac{f'(x_0)}{1!} + 0 + ... + 0 = f'(x_0)$$

И так далее. Для последней производной мы получим

$$T_n^{(n)}(x) = 0 + 0 + ... + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \cdot n! = f^{(n)}(x_0)$$

и поэтому

$$T_n^{(n)}(x_0) = f^{(n)}(x_0)$$

Формулы (6.2.36) позволяют вычислить следующий предел:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-T_n(x)}{(x-x_0)^n} = \left(\begin{smallmatrix}\text{по первой формуле (6.2.36)}\\ \text{получаем неопределенность } \frac{0}{0},\\ \text{поэтому можно применить}\\ \text{правило Лопиталя}\end{smallmatrix}\right) = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)-T_n'(x)}{n(x-x_0)^{n-1}} =$$

$$= \left(\begin{smallmatrix}\text{по второй формуле (6.2.36)}\\ \text{получаем неопределенность } \frac{0}{0},\\ \text{поэтому опять применяем}\\ \text{правило Лопиталя}\end{smallmatrix}\right) = \lim_{x\to x_0} \frac{f''(x)-T_n''(x)}{n(n-1)(x-x_0)^{n-2}} =$$

$$= ... = \left(\begin{smallmatrix}\text{по формулам (6.2.36)}\\ \text{всегда будет неопределенность } \frac{0}{0},\\ \text{поэтому правило Лопиталя}\\ \text{применяется } n \text{ раз}\end{smallmatrix}\right) = ... = \lim_{x\to x_0} \frac{f^{(n)}(x)-T_n^{(n)}(x)}{n!} =$$

$$= \left(\begin{smallmatrix}\text{применяем последнюю}\\ \text{формулу (6.2.36)}\end{smallmatrix}\right) = \frac{0}{n!} = 0$$

Итак, мы получили

$$\frac{f(x) - T_n(x)}{(x - x_0)^n} \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} 0$$

то есть,

$$f(x) - T_n(x) = \underset{x \to x_0}{\mathbf{o}}((x - x_0)^n)$$

или

$$f(x) = T_n(x) + \underset{x \to x_0}{\mathbf{o}}((x - x_0)^n)$$

а это как раз и есть формула (6.2.35). □

◇ **6.2.1.** Выпишем формулу Тейлора для функции $f(x) = \sin x$ в точке $x_0 = \frac{\pi}{4}$ с точностью $n = 2$:

$$\sin x = f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!} \cdot (x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!} \cdot (x - x_0)^2 + \underset{x \to x_0}{\mathbf{o}}\Big((x - x_0)^2\Big) = \sin\frac{\pi}{4} + \frac{\cos\frac{\pi}{4}}{1!} \cdot \Big(x - \frac{\pi}{4}\Big) + \frac{-\sin(\frac{\pi}{4})}{2!} \cdot \Big(x - \frac{\pi}{4}\Big)^2 + \underset{x \to \frac{\pi}{4}}{\mathbf{o}}\left(\Big(x - \frac{\pi}{4}\Big)^2\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \Big(x - \frac{\pi}{4}\Big) - \frac{\sqrt{2}}{4} \cdot \Big(x - \frac{\pi}{4}\Big)^2 + \underset{x \to \frac{\pi}{4}}{\mathbf{o}}\left(\Big(x - \frac{\pi}{4}\Big)^2\right)$$

Если убрать выкладки, получается следующий результат:

$$\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \Big(x - \frac{\pi}{4}\Big) - \frac{\sqrt{2}}{4} \cdot \Big(x - \frac{\pi}{4}\Big)^2 + \underset{x \to \frac{\pi}{4}}{\mathbf{o}}\left(\Big(x - \frac{\pi}{4}\Big)^2\right)$$

Можно увеличить точность, например, до $n = 3$, и тогда получится

$$\sin x = f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!} \cdot (x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!} \cdot (x - x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!} \cdot (x - x_0)^3 + \underset{x \to x_0}{\mathbf{o}}((x - x_0)^3) = \sin\frac{\pi}{4} + \frac{\cos\frac{\pi}{4}}{1!} \cdot \Big(x - \frac{\pi}{4}\Big) + \frac{-\sin(\frac{\pi}{4})}{2!} \cdot \Big(x - \frac{\pi}{4}\Big)^2 + \frac{-\cos(\frac{\pi}{4})}{3!} \cdot \Big(x - \frac{\pi}{4}\Big)^3 + \underset{x \to \frac{\pi}{4}}{\mathbf{o}}\left(\Big(x - \frac{\pi}{4}\Big)^3\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \Big(x - \frac{\pi}{4}\Big) - \frac{\sqrt{2}}{4} \cdot \Big(x - \frac{\pi}{4}\Big)^2 - \frac{\sqrt{2}}{12} \cdot \Big(x - \frac{\pi}{4}\Big)^3 + \underset{x \to \frac{\pi}{4}}{\mathbf{o}}\left(\Big(x - \frac{\pi}{4}\Big)^3\right)$$

а без выкладок это будет выглядеть так:

$$\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \Big(x - \frac{\pi}{4}\Big) - \frac{\sqrt{2}}{4} \cdot \Big(x - \frac{\pi}{4}\Big)^2 - \frac{\sqrt{2}}{12} \cdot \Big(x - \frac{\pi}{4}\Big)^3 + \underset{x \to \frac{\pi}{4}}{\mathbf{o}}\left(\Big(x - \frac{\pi}{4}\Big)^3\right)$$

◇ **6.2.2.** Выпишем формулу Тейлора для функции $f(x) = \ln x$ в точке $x_0 = 1$ с точностью $n = 3$:

$$\ln x = f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!} \cdot (x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!} \cdot (x - x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!} \cdot (x - x_0)^3 + \underset{x \to x_0}{\mathbf{o}}((x - x_0)^3) = \ln 1 + \frac{\frac{1}{x}\big|_{x=1}}{1!} \cdot (x - 1) + \frac{-\frac{1}{x^2}\big|_{x=1}}{2!} \cdot (x - 1)^2 + \frac{\frac{2}{x^3}\big|_{x=1}}{3!} \cdot (x - 1)^3 + \underset{x \to x_0}{\mathbf{o}}((x - 1)^3) = (x - 1) - \frac{1}{2} \cdot (x - 1)^2 + \frac{1}{3} \cdot (x - 1)^3 + \underset{x \to x_0}{\mathbf{o}}((x - 1)^3)$$

Если убрать выкладки, получается следующий результат:

$$\ln x = (x - 1) - \frac{(x - 1)^2}{2} + \frac{(x - 1)^3}{3} + \underset{x \to x_0}{\mathbf{o}}((x - 1)^3)$$

Формулы Маклорена-Пеано.

- При $x_0 = 0$ формула Тейлора называется *формулой Маклорена*:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} \cdot x + \frac{f''(0)}{2!} \cdot x^2 + + ... + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \cdot x^n + \underset{x \to 0}{\mathbf{o}}(x^n) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \cdot x^k + \underset{x \to 0}{\mathbf{o}}(x^n) \qquad (6.2.37)$$

Некоторые примеры формул Маклорена нам уже знакомы:

Формулы Маклорена с точностью $n = 1$ или $n = 2$.

Нетрудно заметить, что *асимптотические формулы* (6.1.19) – (6.1.28) *являются частными случаями формулы Маклорена.* Например, формула (6.1.19) получается, если подставить $f(x) = \sin x$ и $n = 1$.

$$\sin x = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} \cdot x + \underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(x) = 0 + x + \underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(x)$$

А формула (6.1.20) – если $f(x) = \cos x$ и $n = 2$.

$$\cos x = f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} \cdot x + \frac{f''(0)}{2!} \cdot x^2 + \underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(x^2) = 1 + 0 - \frac{x^2}{2} + \underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(x^2)$$

Формулы Маклорена с точностью $n = 3$

Для тех же функций, что и в (6.1.19) – (6.1.28) нетрудно выписать соответствующие формулы с более высокой точностью, например, $n = 3$ или $n = 4$:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(x^3) \tag{6.2.38}$$

$$\operatorname{tg} x = x + \frac{x^3}{3} + \underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(x^3) \tag{6.2.39}$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(x^3) \tag{6.2.40}$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(x^3) \tag{6.2.41}$$

$$\log_a(1+x) = \frac{x}{\ln a} - \frac{x^2}{2\ln a} + \frac{x^3}{3\ln a} + \underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(x^3) \tag{6.2.42}$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(x^3) \tag{6.2.43}$$

$$a^x = 1 + x \cdot \ln a + \frac{x^2 \cdot \ln^2 a}{2} + \frac{x^3 \cdot \ln^3 a}{6} + \underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(x^3) \tag{6.2.44}$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)x^2}{2} + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)x^3}{6} + \underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(x^3) \tag{6.2.45}$$

$$\arcsin x = x + \frac{x^3}{6} + \underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(x^3) \tag{6.2.46}$$

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(x^3) \tag{6.2.47}$$

Полезно сразу же, для случая $n = 3$ объяснить, зачем эти формулы нужны. Нам сейчас важно, что формулы Маклорена позволяют вычислять пределы, которые невозможно вычислить с помощью асимптотических формул (6.1.19) – (6.1.28). Алгоритм их применения можно выразить следующими эвристическими правилами.

Правила вычисления пределов с помощью формул Маклорена:

(A) *При использовании формул Маклорена может не получиться ответа, если возникнет неопределенность.*

(B) *Если возникает неопределенность, то это означает, что нужно увеличить точность формул Маклорена.*

(C) *Если ответ получен, то дальнейшее увеличение точности формул Маклорена не может привести к изменению ответа.*

◇ **6.2.3.**

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1 + 2\operatorname{tg} x} - e^x + x^2}{\arcsin x - \sin x}$$

Объясним сначала, почему здесь нужны формулы Маклорена. Если этот предел вычислять с помощью правила Лопиталя, то Вы увидите, что дифференцировать придется 3 раза, а поскольку функции в числителе и знаменателе не слишком просты, это будет довольно утомительно. Покажем, с другой стороны, что и асимптотические формулы (6.1.19) – (6.1.28) здесь тоже не помогают:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+2\operatorname{tg}x}-e^x+x^2}{\arcsin x-\sin x}=$$
$$=\begin{pmatrix}\text{применяем формулы}\\ (6.1.26),(6.1.24),(6.1.27),(6.1.19)\end{pmatrix}=$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{1+\frac12 2\operatorname{tg}x+\underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(2\operatorname{tg}x)-(1+x+\underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(x))+x^2}{x+\underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(x)-(x+\underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(x))}=$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}x+\underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(2\operatorname{tg}x)-x-\underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(x)+x^2}{\underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(x)-\underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(x)}=$$
$$=\begin{pmatrix}\text{применяем свойства}\\ 1^0,3^0\end{pmatrix}=$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}x+\underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(\operatorname{tg}x)-x-\underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(x)+x^2}{\underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(x)}=$$
$$=\begin{pmatrix}\text{применяем}\\ (5.2)\end{pmatrix}=$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{x+\underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(x)+\underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(x+\underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(x))-x-\underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(x)+x^2}{\underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(x)}=$$
$$=\begin{pmatrix}\text{теперь}\\ 4^0\end{pmatrix}=$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{x+\underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(x)+\underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(x)-x-\underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(x)+x^2}{\underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(x)}=$$
$$=\begin{pmatrix}\text{теперь}\\ 2^0,3^0\end{pmatrix}=\lim_{x\to 0}\frac{\underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(x)+x^2}{\underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(x)}=\begin{pmatrix}\text{теперь}\\ 1^0\end{pmatrix}=$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot\underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(1)+x^2}{x\cdot\underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(1)}=\lim_{x\to 0}\frac{\underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(1)+x}{\underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(1)}=$$
$$=\begin{pmatrix}\text{теперь}\\ 8^0\end{pmatrix}=\left(\frac{0+0}{0}\right)=?$$

Тем не менее, ситуация не безвыходна. Покажем как этот предел можно вычислить с помощью формул Маклорена. Заметим только сразу, что (6.1.19) – (6.1.28) уже представляют собой формулы Маклорена с точностью $n=1$. Что с их помощью не удалось найти ответ, есть иллюстрирация сформулированного выше правила (A). Но если их заменить на другие формулы с большей точностью, то чудесным образом пример становится решаемым.

Действительно, попробуем применить формулы (6.2.38) – (6.2.47) с точностью $n=3$ (и убедимся, что после этого сработает правило (B)). Для этого сначала выпишем отдельно корень в числителе:

$$\sqrt{1+2\operatorname{tg}x}=\begin{pmatrix}\text{по формуле (6.2.45),}\\ \sqrt{1+y}=\\ =1+\frac12 y-\frac{y^2}{8}+\frac{y^3}{16}+\underset{y\to 0}{\mathbf{o}}(y^3)\end{pmatrix}=$$
$$=1+\operatorname{tg}x-\frac{\operatorname{tg}^2x}{2}+\frac{\operatorname{tg}^3x}{2}+\underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(\operatorname{tg}^3x)=$$
$$=(\text{применяем }(6.2.39))=$$
$$=1+\left(x+\frac{x^3}{3}+\underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(x^3)\right)-$$
$$-\frac{\left(x+\frac{x^3}{3}+\underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(x^3)\right)^2}{2}+\frac{\left(x+\frac{x^3}{3}+\underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(x^3)\right)^3}{2}+$$
$$+\underset{x\to 0}{\mathbf{o}}\left((x+\frac{x^3}{3}+\underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(x^3))^3\right)=$$
$$=\ldots=\begin{pmatrix}\text{упрощаем}\\ \text{с помощью}\\ \text{свойств }1^0-8^0\ \S 7\end{pmatrix}=\ldots=$$
$$=1+x-\frac{x^2}{2}+\frac{5x^3}{6}+\underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(x^3)$$

Теперь можно вычислять предел:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+2\operatorname{tg}x}-e^x+x^2}{\arcsin x-\sin x}=$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{1+x-\frac{x^2}{2}+\frac{5x^3}{6}+\underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(x^3)-e^x+x^2}{\arcsin x-\sin x}=$$
$$=\begin{pmatrix}\text{применяем формулы}\\ (6.2.43),(6.2.46),(6.2.47)\end{pmatrix}=$$
$$=\lim_{x\to 0}\left\{1+x-\frac{x^2}{2}+\frac{5x^3}{6}+\underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(x^3)-\right.$$
$$\left.-\left(1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+\underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(x^3)\right)+x^2\right\}:$$
$$:\left\{x+\frac{x^3}{6}+\underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(x^3)-\left(x-\frac{x^3}{6}+\underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(x^3)\right)\right\}=$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{2x^3}{3}+\underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(x^3)}{\frac{x^3}{3}+\underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(x^3)}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{2x^3}{3}+x^3\cdot\underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(1)}{\frac{x^3}{3}+x^3\cdot\underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(1)}=$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac23+\underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(1)}{\frac13+\underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(1)}=\frac{\frac23+0}{\frac13+0}=2$$

Число 2 будет ответом.

Теперь полезно убедиться в справедливости правила (C). Проверим, что если увеличить точность формул Маклорена, то ответ от этого не изменится. Это можно сделать, например, выписав более подробное разложение экспоненты:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+2\operatorname{tg}x}-e^x+x^2}{\arcsin x-\sin x}=$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{1+x-\frac{x^2}{2}+\frac{5x^3}{6}+\underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(x^3)-e^x+x^2}{\arcsin x-\sin x}=$$
$$=\begin{pmatrix}\text{применяем формулы}\\ (6.2.46),(6.2.47)\\ \text{и }(6.2.51)\text{ с }k=4\end{pmatrix}=$$
$$=\lim_{x\to 0}\left\{1+x-\frac{x^2}{2}+\frac{5x^3}{6}+\underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(x^3)-\right.$$
$$\left.-\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(x^4)\right)+x^2\right\}:$$
$$:\left\{x+\frac{x^3}{6}+\underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(x^3)-\left(x-\frac{x^3}{6}+\underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(x^3)\right)\right\}=$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{2x^3}{3} + \underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(x^3) + \frac{x^4}{24} + \underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(x^4)}{\frac{x^3}{3} + \underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(x^3)} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{2x^3}{3} + x^3 \cdot \underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(1) + \frac{x^4}{24} + x^4 \cdot \underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(1)}{\frac{x^3}{3} + x^3 \cdot \underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(1)} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{2}{3} + \underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(1) + \frac{x}{24} + \underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(1)}{\frac{1}{3} + \underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(1)} =$$

$$= \frac{\frac{2}{3} + 0 + 0 + 0}{\frac{1}{3} + 0} = 2$$

То же самое получится, если поменять формулу Маклорена на более точную в любом другом месте (или в нескольких местах).

◇ **6.2.4.**

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{\operatorname{arctg} x} - \frac{1}{1-x} + \frac{x^2}{2}}{\ln\frac{1+x}{1-x} - 2x}$$

Убедимся, что, как и в предыдущем случае, этот предел не вычисляется с помощью формул (6.1.19) – (6.1.28), то есть с помощью формул Маклорена с точностью $n = 1$:

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{\operatorname{arctg} x} - \frac{1}{1-x} + \frac{x^2}{2}}{\ln\frac{1+x}{1-x} - 2x} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1 + \operatorname{arctg} x + \underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(\operatorname{arctg} x) - (1-x)^{-1} + \frac{x^2}{2}}{\ln(1+x) - \ln(1-x) - 2x} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \left\{ 1 + \left(x + \underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(x)\right) + \underset{x\to 0}{\mathbf{o}}\left(x + \underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(x)\right) - \right.$$

$$\left. - \left(1 - x + \underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(x)\right) + \frac{x^2}{2} \right\} :$$

$$: \left\{ \left(x + \underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(x)\right) - \left(-x + \underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(x)\right) - 2x \right\} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(x) + \frac{x^2}{2}}{\underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{x \cdot \underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(1) + \frac{x^2}{2}}{x \cdot \underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(1)} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(1) + \frac{x}{2}}{\underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(1)} = \left(\frac{0+0}{0}\right) = ?$$

Вы можете проверить самостоятельно, что даже если увеличить точность формул Маклорена до $n = 2$, это все равно не поможет.

Но если воспользоваться формулами Маклорена с точностью $n = 3$ (то есть формулами (6.2.38) – (6.2.47)), то этот предел удается сосчитать. Только, как и в предыдущем примере, перед вычислениями здесь следует выписать отдельно асимптотическое представление некоторых фрагментов:

$$\ln\frac{1+x}{1-x} = \ln(1+x) - \ln(1-x) =$$

$$= (\text{применяем } (6.2.41)) =$$

$$= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(x^3) -$$

$$- \left(-x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + \underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(x^3)\right) =$$

$$= 2x + \frac{2x^3}{3} + \underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(x^3)$$

Далее,

$$e^{\operatorname{arctg} x} = (\text{применяем } (6.2.43)) =$$

$$= 1 + \operatorname{arctg} x + \frac{\operatorname{arctg}^2 x}{2} + \frac{\operatorname{arctg}^3 x}{6} +$$

$$+ \underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(\operatorname{arctg}^3 x) = (\text{применяем } (6.2.47)) =$$

$$= 1 + \left(x - \frac{x^3}{3} + \underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(x^3)\right) +$$

$$+ \frac{\left(x - \frac{x^3}{3} + \underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(x^3)\right)^2}{2} +$$

$$+ \frac{\left(x - \frac{x^3}{3} + \underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(x^3)\right)^3}{6} +$$

$$+ \underset{x\to 0}{\mathbf{o}}\left(\left(x - \frac{x^3}{3} + \underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(x^3)\right)^3\right) =$$

$$= \ldots = \left(\begin{matrix}\text{упрощаем}\\ \text{с помощью}\\ \text{свойств } 1^0 - 8^0\ \S 7\end{matrix}\right) = \ldots =$$

$$= 1 + x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + \underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(x^3)$$

И, наконец,

$$\frac{1}{1-x} = (1-x)^{-1} = (\text{применяем } (6.2.45)) =$$

$$= 1 + (-1)(-x) + \frac{(-1)(-2)(-x)^2}{2} +$$

$$+ \frac{(-1)(-2)(-3)(-x)^3}{6} + \underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(x^3) =$$

$$= 1 + x + x^2 + x^3 + \underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(x^3)$$

Теперь вычисляем предел:

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{\operatorname{arctg} x} - \frac{1}{1-x} + \frac{x^2}{2}}{\ln\frac{1+x}{1-x} - 2x} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \left\{ \left(1 + x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + \underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(x^3)\right) - \right.$$

$$\left. - \left(1 + x + x^2 + x^3 + \underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(x^3)\right) + \frac{x^2}{2} \right\} :$$

$$: \left\{ \left(2x + \frac{2x^3}{3} + \underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(x^3)\right) - 2x \right\} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{7x^3}{6} + \underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(x^3)}{\frac{2x^3}{3} + \underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(x^3)} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{7x^3}{6} + x^3 \cdot \underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(1)}{\frac{2x^3}{3} + x^3 \cdot \underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(1)} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{7}{6} + \underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(1)}{\frac{2}{3} + \underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(1)} = -\frac{7}{4}$$

◇ **6.2.5.**

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right) - x + \frac{x^3}{6}}{x - \arcsin x}$$

Здесь мы сразу применим формулы Маклорена с точностью $n = 3$. Выпишем отдельно асимптотическое представление некоторых фрагментов:

$$\ln\Big(x+\sqrt{1+x^2}\Big) = \ln\Big(x + (1+x^2)^{\frac{1}{2}}\Big) =$$

$$= \begin{pmatrix}\text{применяем}\\ (6.2.45)\end{pmatrix} = \ln\Bigg(x + 1 + \frac{1}{2}x + \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)x^2}{2} +$$

$$+ \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)x^3}{6} + \underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(x^3)\Bigg) =$$

$$= \ln\Bigg(1 + \frac{3}{2}x + \frac{\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)x^2}{2} + \frac{\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)x^3}{6} +$$

$$+ \underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(x^3)\Bigg) =$$

$$= \ln\left(1 + \frac{3}{2}x - \frac{x^2}{8} + \frac{3x^3}{48} + \underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(x^3)\right) =$$

$$= \begin{pmatrix}\text{применяем}\\ (6.2.41)\end{pmatrix} =$$

$$= \left(\frac{3}{2}x - \frac{x^2}{8} + \frac{3x^3}{48} + \underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(x^3)\right) -$$

$$- \frac{\left(\frac{3}{2}x - \frac{x^2}{8} + \frac{3x^3}{48} + \underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(x^3)\right)^2}{2} +$$

$$+ \frac{\left(\frac{3}{2}x - \frac{x^2}{8} + \frac{3x^3}{48} + \underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(x^3)\right)^3}{3} +$$

$$+ \underset{x\to 0}{\mathbf{o}}\left(\left(\frac{3}{2}x - \frac{x^2}{8} + \frac{3x^3}{48} + \underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(x^3)\right)^3\right) =$$

$$= \ldots = \begin{pmatrix}\text{упрощаем}\\ \text{с помощью}\\ 1^0 - 9^0\ \S 7\end{pmatrix} = \ldots = x - \frac{x^3}{6} + \underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(x^3)$$

Теперь вычисляем предел:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right) - x + \frac{x^3}{6}}{x - \arcsin x} =$$

$$= \begin{pmatrix}\text{подставляем только что найденное}\\ \text{разложение} \ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\\ \text{а также формулу (6.2.46)}\end{pmatrix} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\left(x - \frac{x^3}{6} + \underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(x^3)\right) - x + \frac{x^3}{6}}{x - \left(x + \frac{x^3}{6} + \underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(x^3)\right)} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(x^3)}{-\frac{x^3}{6} - \underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(x^3)} = \lim_{x\to 0} \frac{x^3 \cdot \underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(1)}{-\frac{x^3}{6} - x^3 \cdot \underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(1)} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(1)}{-\frac{1}{6} - \underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(1)} = \frac{0}{-\frac{1}{6} - 0} = 0$$

◇ **6.2.6.**

$$\lim_{x\to 0} \left(\cos(xe^x) - \ln(1-x) - x\right)^{\operatorname{ctg} x^3}$$

Здесь мы не будем утомлять читателя предварительными прикидками, а сразу применим формулы Маклорена с "нужной" точностью. При этом, в разных местах точность мы будем брать разной, но важно понимать, согласно нашим правилам, что если ты не знаешь какой должна быть точность, то можно брать наугад любую, а затем уже, если получится неопределенность (а это самое страшное, что может получиться) – повышать порядок точности до тех пор, пока не получится определенность. И, кроме того, следует иметь в виду, что если на каком-то шаге ответ уже получен, а ты все равно продолжаешь вычисления, увеличивая порядок точности, то ты не сможешь получить другой ответ (если, конечно не делаешь арифметических ошибок).

Выпишем получающиеся выражения:

$$\cos(xe^x) = \cos\Big(x \cdot \Big(1 + x + \underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(x)\Big)\Big) =$$

$$= \cos\Big(x + x^2 + \underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(x^2)\Big) =$$

$$= 1 - \frac{1}{2}\Big(x + x^2 + \underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(x^2)\Big)^2 +$$

$$+ \underset{x\to 0}{\mathbf{o}}\left(\Big(x + x^2 + \underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(x^2)\Big)^3\right) =$$

$$= \ldots = 1 - \frac{1}{2}x^2 - x^3 + \underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(x^3)$$

$$\cos(xe^x) - \ln(1-x) - x =$$

$$= \left(1 - \frac{1}{2}x^2 - x^3 + \underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(x^3)\right) -$$

$$- \left(-x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + \underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(x^3)\right) - x =$$

$$= 1 - \frac{2x^3}{3} + \underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(x^3)$$

$$\operatorname{ctg} x^3 = \frac{1}{\operatorname{tg} x^3} = \frac{1}{x^3 + \underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(x^3)}$$

Теперь вычисляем предел:

$$\lim_{x\to 0} \left(\cos(xe^x) - \ln(1-x) - x\right)^{\operatorname{ctg} x^3} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \left(1 - \frac{2x^3}{3} + \underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(x^3)\right)^{\frac{1}{x^3 + \underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(x^3)}} =$$

$$= \lim_{x\to 0} e^{\ln\left(\left(1 - \frac{2x^3}{3} + \underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(x^3)\right)^{\frac{1}{x^3 + \underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(x^3)}}\right)} =$$

$$= \lim_{x\to 0} e^{\frac{\ln\left(1 - \frac{2x^3}{3} + \underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(x^3)\right)}{x^3 + \underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(x^3)}} =$$

$$= \lim_{x\to 0} e^{\frac{\left(-\frac{2x^3}{3} + \underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(x^3)\right) + \underset{x\to 0}{\mathbf{o}}\left(-\frac{2x^3}{3} + \underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(x^3)\right)}{x^3 + \underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(x^3)}} =$$

$$= \lim_{x\to 0} e^{\frac{-\frac{2x^3}{3} + \underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(x^3)}{x^3 + \underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(x^3)}} = \lim_{x\to 0} e^{\frac{-x^3\cdot\frac{2}{3} + x^3\cdot \underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(1)}{x^3 + x^3\cdot \underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(1)}} = \qquad = \lim_{x\to 0} e^{\frac{-\frac{2}{3} + \underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(1)}{1 + \underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(1)}} = e^{\frac{-\frac{2}{3}+0}{1+0}} = e^{-\frac{2}{3}}$$

Формулы Маклорена с произвольной точностью

Некоторые из формул Маклорена (6.2.38) – (6.2.47) можно обобщить на случай произвольной точности:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - ... + (-1)^k \cdot \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + \underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(x^{2k+1}) =$$

$$= \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \cdot \frac{x^{2i+1}}{(2i+1)!} + \underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(x^{2k+1}) \qquad (6.2.48)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - ... + (-1)^k \cdot \frac{x^{2k}}{(2k)!} + \underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(x^{2k}) = \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \cdot \frac{x^{2i}}{(2i)!} + \underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(x^{2k}) \qquad (6.2.49)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + ... + (-1)^{k-1} \cdot \frac{x^k}{k} + \underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(x^k) = \sum_{i=1}^{k} (-1)^{i-1} \cdot \frac{x^i}{i} + \underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(x^k) \qquad (6.2.50)$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + ... + \frac{x^k}{k!} + \underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(x^k) = \sum_{i=0}^{k} \frac{x^i}{i!} + \underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(x^k) \qquad (6.2.51)$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha\cdot x + \alpha(\alpha-1)\cdot\frac{x^2}{2!} + ... + \alpha(\alpha-1)...(\alpha-k+1)\cdot\frac{x^k}{k!} + \underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(x^k) =$$

$$= 1 + \sum_{i=1}^{k} \alpha(\alpha-1)...(\alpha-i+1)\cdot\frac{x^i}{i!} + \underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(x^k) \qquad (6.2.52)$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + ... + (-1)^k \cdot x^k + \underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(x^k) = \sum_{i=0}^{k} (-1)^k \cdot x^i + \underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(x^k) \qquad (6.2.53)$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + ... + x^k + \underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(x^k) = \sum_{i=0}^{k} x^i + \underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(x^k) \qquad (6.2.54)$$

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - ... + (-1)^k \cdot \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + \underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(x^k) = \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \cdot \frac{x^{2i+1}}{2i+1} + \underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(x^k) \qquad (6.2.55)$$

◇ **6.2.7.** Вспомним о пределе (6.0.1), которым мы начинали эту главу:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+\sin x) - \sin\ln(1+x)}{e^{\operatorname{arctg} x} - 1 - \operatorname{arctg}(e^x - 1)}$$

Как уже говорилось, вычислять его с помощью правила Лопиталя слишком тяжело. С другой стороны, применять теорему об эквивалентной замене или выделять главное слагаемое тут тоже бесполезно.

Если применить асимптотические формулы (6.1.19) – (6.1.28) (то есть формулы Маклорена с точностью $n = 1$), то числитель разложится так:

$$\ln(1+\sin x) - \sin\ln(1+x) =$$
$$= \left(\begin{smallmatrix}\text{применяем формулы}\\ (6.1.22),\ (6.1.19)\end{smallmatrix}\right) =$$
$$= \sin x + \underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(\sin x) -$$
$$- \Big(\ln(1+x) + \underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(\ln(1+x))\Big) =$$
$$= \Big(x + \underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(x)\Big) + \underset{x\to 0}{\mathbf{o}}\Big(x + \underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(x)\Big) -$$
$$- \Big(\Big(x + \underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(x)\Big) + \underset{x\to 0}{\mathbf{o}}\Big(x + \underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(x)\Big)\Big) =$$
$$= \underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(x)$$

А знаменатель так:

$$e^{\operatorname{arctg} x} - 1 - \operatorname{arctg}(e^x - 1) =$$
$$= \left(\begin{smallmatrix}\text{применяем формулы}\\ (6.1.24),\ (6.1.28)\end{smallmatrix}\right) =$$
$$= 1 + \operatorname{arctg} x + \underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(\operatorname{arctg} x) - 1$$
$$- \Big(e^x - 1 + \underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(e^x - 1)\Big) =$$
$$= \Big(x + \underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(x)\Big) + \underset{x\to 0}{\mathbf{o}}\Big(x + \underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(x)\Big) -$$
$$- \Big(\Big(x + \underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(x)\Big) + \underset{x\to 0}{\mathbf{o}}\Big(x + \underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(x)\Big)\Big) =$$

$$= \underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(x)$$

И подстановка в предел ничего не дает:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+\sin x)-\sin\ln(1+x)}{e^{\operatorname{arctg} x}-1-\operatorname{arctg}(e^x-1)} = \\ = \lim_{x\to 0}\frac{\underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(x)}{\underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{x\cdot \underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(1)}{x\cdot \underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(1)} = \\ = \lim_{x\to 0}\frac{\underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(1)}{\underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(1)} = \left(\frac{0}{0}\right) =?$$

В соответствии с правилом (B), это означает, что нужно увеличить точность формул Маклорена. Возьмем $n = 3$ (то есть воспользуемся формулами (6.2.38) – (6.2.47)). Тогда мы получим:

$$\ln(1+\sin x) = \sin x - \frac{\sin^2 x}{2} + \frac{\sin^3 x}{3} + \\ + \underset{x\to 0}{\mathbf{o}}\left(\sin^3 x\right) = \left(x - \frac{x^3}{6} + \underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(x^3)\right) - \\ - \frac{1}{2}\left(x - \frac{x^3}{6} + \underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(x^3)\right)^2 + \\ + \frac{1}{3}\left(x - \frac{x^3}{6} + \underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(x^3)\right)^3 + \\ + \underset{x\to 0}{\mathbf{o}}\left(\left(x - \frac{x^3}{6} + \underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(x^3)\right)^3\right) = \\ = \ldots = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(x^3)$$

и

$$\sin\ln(1+x) = \ln(1+x) - \frac{(\ln(1+x))^3}{6} + \\ + \underset{x\to 0}{\mathbf{o}}\left((\ln(1+x))^3\right) = \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \right. \\ \left. + \underset{x\to 0}{\mathbf{o}}\left(x^3\right)\right) - \frac{\left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \underset{x\to 0}{\mathbf{o}}\left(x^3\right)\right)^3}{6} + \\ + \underset{x\to 0}{\mathbf{o}}\left(\left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \underset{x\to 0}{\mathbf{o}}\left(x^3\right)\right)^3\right) = \\ = \ldots = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(x^3)$$

и поэтому

$$\ln(1+\sin x) - \sin\ln(1+x) = \\ = \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(x^3)\right) - \\ - \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(x^3)\right) = \\ = \underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(x^3)$$

Знаменатель тоже удобнее представлять асимптотическими выражениями частями:

$$e^{\operatorname{arctg} x} - 1 = 1 + \operatorname{arctg} x + \frac{(\operatorname{arctg} x)^2}{2} + \\ + \frac{(\operatorname{arctg} x)^3}{6} + \underset{x\to 0}{\mathbf{o}}\left((\operatorname{arctg} x)^3\right) - 1 = \\ = \left(x - \frac{x^3}{3} + \underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(x^3)\right) + \\ + \frac{1}{2}\left(x - \frac{x^3}{3} + \underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(x^3)\right)^2 + \\ + \frac{1}{6}\left(x - \frac{x^3}{3} + \underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(x^3)\right)^3 + \\ + \underset{x\to 0}{\mathbf{o}}\left(\left(x - \frac{x^3}{3} + \underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(x^3)\right)^3\right) = \\ = \ldots = x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + \underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(x^3)$$

и

$$\operatorname{arctg}(e^x - 1) = \\ = \operatorname{arctg}\left(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(x^3)\right) = \\ = \left(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(x^3)\right) - \\ - \frac{1}{3}\cdot\left(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(x^3)\right)^3 + \\ + \underset{x\to 0}{\mathbf{o}}\left(\left(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(x^3)\right)^3\right) = \\ = \ldots = x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + \underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(x^3)$$

и поэтому

$$e^{\operatorname{arctg} x} - 1 - \operatorname{arctg}(e^x - 1) = \\ = \left(x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + \underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(x^3)\right) - \\ - \left(x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + \underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(x^3)\right) = \\ = \underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(x^3)$$

И опять при подстановке в предел получается неопределенность:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+\sin x)-\sin\ln(1+x)}{e^{\operatorname{arctg} x}-1-\operatorname{arctg}(e^x-1)} = \\ = \lim_{x\to 0}\frac{\underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(x^3)}{\underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(x^3)} = \lim_{x\to 0}\frac{x^3\cdot \underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(1)}{x^3\cdot \underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(1)} = \\ = \lim_{x\to 0}\frac{\underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(1)}{\underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(1)} = \left(\frac{0}{0}\right) =?$$

Она снова означает, что нужно увеличить точность формул Маклорена (согласно правилу

(B)). Возьмем $n = 4$ (то есть воспользуемся формулами (6.2.48), (6.2.50), (6.2.51), (6.2.55), выбрав n так, чтобы в конце получилось $\underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(x^4)$):

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(x^4)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(x^4)$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{30} + \underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(x^4)$$

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(x^4)$$

Тогда получим

$$\ln(1+\sin x) = \sin x - \frac{\sin^2 x}{2} + \frac{\sin^3 x}{3} - \frac{\sin^4 x}{4} + \underset{x\to 0}{\mathbf{o}}\left(\sin^4 x\right) = \left(x - \frac{x^3}{3!} + \underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(x^4)\right) - \frac{1}{2}\left(x - \frac{x^3}{3!} + \underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(x^4)\right)^2 + \frac{1}{3}\left(x - \frac{x^3}{3!} + \underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(x^4)\right)^3 - \frac{1}{4}\left(x - \frac{x^3}{3!} + \underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(x^4)\right)^4 + \underset{x\to 0}{\mathbf{o}}\left(\left(x - \frac{x^3}{3!} + \underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(x^4)\right)^4\right) = \dots = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} - \frac{x^4}{12} + \underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(x^4)$$

и

$$\sin\ln(1+x) = \ln(1+x) - \frac{(\ln(1+x))^3}{6} + \underset{x\to 0}{\mathbf{o}}\left((\ln(1+x))^4\right) = \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(x^4)\right) - \frac{1}{6}\left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(x^4)\right)^3 + \underset{x\to 0}{\mathbf{o}}\left(\left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(x^4)\right)^4\right) = \dots = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + 0 + \underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(x^4)$$

Поэтому

$$\ln(1+\sin x) - \sin\ln(1+x) = -\frac{x^4}{12} + \underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(x^4)$$

И для знаменателя

$$e^{\operatorname{arctg} x} - 1 = x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} - \frac{7x^4}{24} + \underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(x^4)$$

и

$$\operatorname{arctg}(e^x - 1) = x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} - \frac{11x^4}{24} + \underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(x^4)$$

Поэтому

$$e^{\operatorname{arctg} x} - 1 - \operatorname{arctg}(e^x - 1) = -\frac{7x^4}{24} + \frac{11x^4}{24} + \underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(x^4) = \frac{x^4}{6} + \underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(x^4)$$

Теперь, подставляя в предел, мы получим:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+\sin x) - \sin\ln(1+x)}{e^{\operatorname{arctg} x} - 1 - \operatorname{arctg}(e^x - 1)} = \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{x^4}{12} + \underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(x^4)}{\frac{x^4}{6} + \underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(x^4)} = \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{x^4}{12} + x^4 \cdot \underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(1)}{\frac{x^4}{6} + x^4 \cdot \underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(1)} = \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{1}{12} + \underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(1)}{\frac{1}{6} + \underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(1)} = -\frac{1}{2}.$$

◇ **6.2.8.** Разберем теперь пример (6.0.2):

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(2^{-\frac{1}{x^2}})}{2^{-\frac{1}{\sin^2 x}}}.$$

Здесь числитель можно записать так:

$$\sin(2^{-\frac{1}{x^2}}) = \sin y\Big|_{y=2^{-\frac{1}{x^2}}} = y + \underset{y\to 0}{\mathbf{o}}(y)\Big|_{y=2^{-\frac{1}{x^2}}} = 2^{-\frac{1}{x^2}} + \underset{x\to 0}{\mathbf{o}}\left(2^{-\frac{1}{x^2}}\right)$$

А для знаменателя нужно провести предварительные вычисления:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(x^3)$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{1}{\sin x} = \frac{1}{x - \frac{x^3}{6} + \underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(x^3)} = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{1 - \frac{x^2}{6} + \underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(x^2)} = \frac{1}{x} \cdot \Big(1 + \underbrace{\big(-\frac{x^2}{6} + \underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(x^2)\big)}_{\downarrow \atop 0}\Big)^{-1} =$$

$$= \frac{1}{x} \cdot \Big(1 - \big(-\frac{x^2}{6} + \underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(x^2)\big) + \underset{x\to 0}{\mathbf{o}}\big(-\frac{x^2}{6} + \underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(x^2)\big)\Big) = \frac{1}{x} \cdot \left(1 + \frac{x^2}{6} + \underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(x^2)\right)$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{1}{\sin^2 x} = \frac{1}{x^2} \cdot \left(1 + \frac{x^2}{6} + \underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(x^2)\right)^2 =$$

$$= \frac{1}{x^2} \cdot \left(1 + \frac{x^2}{3} + \frac{x^4}{36} + \underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(x^4)\right) =$$

$$= \frac{1}{x^2} + \frac{1}{3} + \frac{x^2}{36} + \underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(x^2)$$

$$\Downarrow$$

$$-\frac{1}{\sin^2 x} = -\frac{1}{x^2} - \frac{1}{3} - \frac{x^2}{36} + \underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(x^2)$$

$$\Downarrow$$

$$2^{-\frac{1}{\sin^2 x}} = 2^{-\frac{1}{x^2} - \frac{1}{3} - \frac{x^2}{36} + \underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(x^2)} =$$

$$= 2^{-\frac{1}{x^2}} \cdot 2^{-\frac{1}{3}} \cdot 2^{-\frac{x^2}{36} + \underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(x^2)}$$

Теперь, подставляя числитель и знаменатель в исходный предел, мы получим:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(2^{-\frac{1}{x^2}})}{2^{-\frac{1}{\sin^2 x}}} = \lim_{x\to 0} \frac{2^{-\frac{1}{x^2}} + \underset{x\to 0}{\mathbf{o}}\left(2^{-\frac{1}{x^2}}\right)}{2^{-\frac{1}{x^2}} \cdot 2^{-\frac{1}{3}} \cdot 2^{-\frac{x^2}{36} + \underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(x^2)}} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1 + \underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(1)}{2^{-\frac{1}{3}} \cdot 2^{-\frac{x^2}{36} + \underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(x^2)}} = \frac{1+0}{2^{-\frac{1}{3}} \cdot 2^0} = 2^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{2}.$$

$\triangleright\triangleright$ **6.2.9.** Найдите пределы:

1. $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)-x}{x^2}$
2. $\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1-x}{x^2}$
3. $\lim_{x\to 0} \frac{\cos x-1-\frac{x^2}{2}}{x^4}$
4. $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{arctg} x-\arcsin x}{x^2}$
5. $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x-x}{\sin x-x}$
6. $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{arctg} x-\arcsin x}{\operatorname{tg} x-\sin x}$
7. $\lim_{x\to 0} \frac{2\arcsin x-\arcsin 2x}{x^3}$
8. $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[5]{1+2x}-1}{\sqrt[4]{1+x}-\sqrt{1-x}}$
9. $\lim_{x\to 0} \frac{1+x\cos x-\sqrt{1+2x}}{\ln(1+x)-x}$
10. $\lim_{x\to 0} \frac{e^x-\sqrt{1+2x}}{\ln\cos x}$
11. $\lim_{x\to 0} \frac{3\cos x+\arcsin x-3\sqrt[3]{1+x}}{\ln(1-x^2)}$
12. $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x^3)-2\sin x+2x\cos x^2}{\operatorname{arctg} x^3}$
13. $\lim_{x\to 0} \frac{x\sqrt{1+\sin x}-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)-x}{\operatorname{tg}^3 x}$
14. $\lim_{x\to 0} \frac{e^{\sin x}-\sqrt{1+x^2}-x\cos x}{\ln^3(1-x)}$
15. $\lim_{x\to 0} \frac{e^{\sin x\ln\cos x}-\sqrt[4]{1+4x}+x-\frac{3}{2}x^2}{x\sin x^2}$
16. $\lim_{x\to 0} \left(\frac{2\operatorname{tg} x}{x+\sin x}\right)^{\frac{1}{1-\cos x}}$
17. $\lim_{x\to 0} \left(\frac{xe^x+1}{x\pi^x+1}\right)^{\frac{1}{x^2}}$
18. $\lim_{x\to 0} \left(\cos(\sin x) + \frac{1}{2}\arcsin^2 x\right)^{\frac{1}{x^2(\sqrt{1+2x}-1)}}$
19. $\lim_{x\to 2} \left(\sqrt{3-x} + \ln x2\right)^{\frac{1}{\sin^2(x-2)}}$
20. $\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{\sin x\operatorname{arctg} x} - \frac{1}{\operatorname{tg} x\arcsin x}\right)$
21. $\lim_{x\to 0} \frac{e^{\sin x}-1-\sin(e^x-1)}{\operatorname{arctg}^4 x}$
22. $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x^3}{\ln\cos x-\cos\ln(1+x)+1}$
23. $\lim_{x\to 0} \frac{\sin((1+x)^\alpha-1)-(1+\sin x)^\alpha+1}{\operatorname{tg}^4 x}$

(b) Асимптотика

Формула Тейлора-Пеано (6.2.35), с которой мы начинали этот параграф, является частным случаем следующей общей конструкции.

Пусть a – какое-нибудь число или символ бесконечности.

- Последовательность функций $\{\varphi_n\}$ называется *асимптотической последовательностью* при $x \to a$, если
$$\forall k \in \mathbb{Z}_+ \qquad \varphi_k(x) \underset{x\to a}{\gg} \varphi_{k+1}(x) \tag{6.2.56}$$
или, более наглядно,
$$\varphi_0(x) \underset{x\to a}{\gg} \varphi_1(x) \underset{x\to a}{\gg} \varphi_2(x) \underset{x\to a}{\gg} \dots \underset{x\to a}{\gg} \varphi_k(x) \underset{x\to a}{\gg} \dots$$

- *Асимптотическим разложением* или *асимптотикой* порядка n функции f вдоль асимптотической последовательности $\{\varphi_n\}$ при $x \to a$, называется всякая асимптотическая формула вида
$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k \cdot \varphi_k(x) + \underset{x\to a}{\mathbf{o}}\Big(\varphi_n(x)\Big), \qquad \lambda_k \in \mathbb{R} \tag{6.2.57}$$
(если она верна). Из (6.2.56) следует, что коэффициенты $\lambda_k \in \mathbb{R}$ в формуле (6.2.57) определяются однозначно (поэтому не бывает двух разных асимптотических разложений одного порядка относительно данной асимптотической последовательности).

Степенная последовательность в нуле. Функции

$$\varphi_k(x) = x^k, \qquad k \in \mathbb{Z}_+$$

образуют асимптотическую последовательность при $x \to 0$, потому что

$$1 = x^0 \underset{x\to 0}{\gg} x^1 \underset{x\to 0}{\gg} x^2 \underset{x\to 0}{\gg} ... \underset{x\to 0}{\gg} x^k \underset{x\to 0}{\gg} ...$$

Для функции f, гладкой в окрестности точки 0 разложения вдоль такой последовательности – это просто формулы Маклорена (6.2.37), о которых мы уже говорили выше:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \cdot x^k + \underset{x\to 0}{\mathbf{o}}(x^n)$$

Степенная последовательность на бесконечности. Функции

$$\varphi_k(x) = \frac{1}{x^k}, \qquad k \in \mathbb{Z}_+$$

образуют асимптотическую последовательность при $x \to \infty$, потому что

$$1 = \frac{1}{x^0} \underset{x\to\infty}{\gg} \frac{1}{x^1} \underset{x\to\infty}{\gg} \frac{1}{x^2} \underset{x\to\infty}{\gg} ... \underset{x\to\infty}{\gg} \frac{1}{x^k} \underset{x\to\infty}{\gg} ...$$

Асимптотические разложения вдоль этой последовательности обычно получаются заменой $x = \frac{1}{t}$ с последующим применением формул Маклорена. Объясним это на примерах.

$\diamond$ **6.2.10.** Пусть нам нужно найти асимптотическое разложение порядка 3 при $x \to +\infty$ вдоль степенной последовательности для функции

$$f(x) = \sqrt{x^2+1}$$

Сделаем замену $x = \frac{1}{t}$:

$$\sqrt{x^2+1} = \left| \begin{smallmatrix} x = \frac{1}{t} \\ t \to +0 \end{smallmatrix} \right| = \sqrt{\frac{1}{t^2}+1} = \frac{\sqrt{1+t^2}}{t} = $$
$$= (6.2.52) =$$
$$= \frac{1 + \frac{1}{2}\cdot t^2 + \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}-1\right)\cdot\frac{t^4}{2!} + \underset{t\to+0}{\mathbf{o}}(t^4)}{t} =$$
$$= \frac{1}{t} + \frac{1}{2}\cdot t - \frac{1}{4}\cdot\frac{t^3}{2!} + \underset{t\to+0}{\mathbf{o}}(t^3) = \left| \begin{smallmatrix} t = \frac{1}{x} \\ x \to +\infty \end{smallmatrix} \right| =$$
$$= x + \frac{1}{2x} - \frac{1}{8x^3} + \underset{x\to+\infty}{\mathbf{o}}\left(\frac{1}{x^3}\right)$$

$\diamond$ **6.2.11.** Найдем асимптотическое разложение порядка 1 при $x \to +\infty$ вдоль степенной последовательности для функции

$$f(x) = e^{\sqrt{x^2+x}-x}$$

Опять делаем замену $x = \frac{1}{t}$:

$$e^{\sqrt{x^2+x}-x} = \left| \begin{smallmatrix} x = \frac{1}{t} \\ t \to +0 \end{smallmatrix} \right| = e^{\sqrt{\frac{1}{t^2}+\frac{1}{t}}-\frac{1}{t}} = e^{\frac{\sqrt{1+t}-1}{t}} =$$
$$= (6.2.52) =$$
$$= e^{\frac{1+\frac{1}{2}\cdot t+\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}-1\right)\cdot\frac{t^2}{2!}+\underset{t\to+0}{\mathbf{o}}(t^2)-1}{t}} = e^{\frac{1}{2}-\frac{t}{8}+\underset{t\to+0}{\mathbf{o}}(t)} =$$
$$= e^{\frac{1}{2}} \cdot e^{-\frac{t}{8}+\underset{t\to+0}{\mathbf{o}}(t)} = (6.2.51) =$$
$$= \sqrt{e}\cdot\left(1 - \frac{t}{8} + \underset{t\to+0}{\mathbf{o}}(t) + \underset{t\to+0}{\mathbf{o}}\left(-\frac{t}{8} + \underset{t\to+0}{\mathbf{o}}(t)\right)\right) =$$
$$= \sqrt{e}\cdot\left(1 - \frac{t}{8} + \underset{t\to+0}{\mathbf{o}}(t)\right) = \sqrt{e} - \frac{t\sqrt{e}}{8} + \underset{t\to+0}{\mathbf{o}}(t) =$$
$$= \sqrt{e} - \frac{\sqrt{e}}{8x} + \underset{x\to+\infty}{\mathbf{o}}\left(\frac{1}{x}\right)$$

Другие асимптотические последовательности. Не всегда данная функция f имеет асимптотическое разложение вдоль данной асимптотической последовательности $\{\varphi_n\}$.

$\diamond$ **6.2.12.** Формула

$$\sqrt[3]{x} = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k \cdot x^k + \underset{x\to 0}{\mathbf{o}}\left(x^n\right)$$

не будет верна ни при каких $n > 0$ и $\lambda_0, ..., \lambda_n \in \mathbb{R}$.

Доказательство. Это достаточно доказать для $n = 1$, потому что любую формулу большего порядка можно записать в виде

$$\sqrt[3]{x} = \lambda_0 + \lambda_1 \cdot x + \underbrace{\sum_{k=2}^{n} \lambda_k \cdot x^k + \underset{x\to 0}{\mathbf{o}}\left(x^n\right)}_{\underset{x\to 0}{\mathbf{o}}\left(x\right)}$$

и если эта формула верна, то будет верна и формула первого порядка:

$$\sqrt[3]{x} = \lambda_0 + \lambda_1 \cdot x + \underset{x\to 0}{\mathbf{o}}\left(x\right) \qquad (6.2.58)$$

Чтобы убедиться, что эта формула неверна, нужно с самого начала заметить, что из нее следует, что λ_0 должно быть нулевым, потому что при $x \to 0$ получаем:

$$\underbrace{\sqrt[3]{x}}_{\substack{\downarrow \\ 0}} = \lambda_0 + \underbrace{\lambda_1 \cdot x}_{\substack{\downarrow \\ 0}} + \underbrace{\underset{x\to 0}{\mathbf{o}}\left(x\right)}_{\substack{\downarrow \\ 0}}$$

Подставим $\lambda_0 = 0$ в (6.2.58):

$$\sqrt[3]{x} = \lambda_1 \cdot x + \underset{x\to 0}{\mathbf{o}}\left(x\right)$$

Поделив все на x, при $x \to 0$ мы получим соотношение

$$\underbrace{\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}}_{\substack{\downarrow \\ \infty}} = \lambda_1 + \underbrace{\underset{x\to 0}{\mathbf{o}}\left(1\right)}_{\substack{\downarrow \\ 0}}$$

которое не может быть верно ни при каком λ_1. $\square$

Приведенный пример 6.2.12 имеет целью подготовить читателя к мысли, что *асимптотическую последовательность* $\{\varphi_n\}$*, вдоль которой мы собираемся раскладывать данную функцию* f*, бывает удобно выбирать отдельно, в зависимости от вида функции* f.

◇ **6.2.13.** Асимптотическое разложение функции

$$f(x) = \sqrt[3]{x + x^2}$$

при $x \to 0$ бессмысленно искать вдоль стандартной степенной последовательности

$$\varphi_k(x) = x^k$$

потому что здесь возникает тот же эффект, что в примере 6.2.12: никакая формула вида (6.2.57) не будет верна, если $n > 0$.

Однако если взять последовательность

$$x^{\frac{1}{3}} \underset{x\to 0}{\gg} x^2 \underset{x\to 0}{\gg} x^{\frac{11}{3}} \underset{x\to 0}{\gg} \dots \underset{x\to 0}{\gg} x^{\frac{5k+1}{3}} \underset{x\to 0}{\gg} \dots$$

то этот эффект исчезает, и разложение находится очень просто:

$$\sqrt[3]{x+x^2} = x^{\frac{1}{3}} \cdot (1 + x^{\frac{5}{3}})^{\frac{1}{3}} = (6.2.52) =$$

$$= x^{\frac{1}{3}} \cdot \left(1 + \frac{1}{3} \cdot x^{\frac{5}{3}} + \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{3} - 1 \right) \cdot \frac{\left(x^{\frac{5}{3}}\right)^2}{2!} + \underset{x\to 0}{\mathbf{o}} \left(\left(x^{\frac{5}{3}}\right)^2 \right) \right) =$$

$$= x^{\frac{1}{3}} \cdot \left(1 + \frac{x^{\frac{5}{3}}}{3} - \frac{x^{\frac{10}{3}}}{9} + \underset{x\to 0}{\mathbf{o}} \left(x^{\frac{10}{3}} \right) \right) =$$

$$= x^{\frac{1}{3}} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^{\frac{11}{3}}}{9} + \underset{x\to 0}{\mathbf{o}} \left(x^{\frac{11}{3}} \right)$$

(одновременно из этих вычислений становится понятно, откуда берется последовательность $\varphi_k(x) = x^{\frac{5k+1}{3}}$).

◇ **6.2.14.** Попробуем найти разложение той же функции

$$f(x) = \sqrt[3]{x + x^2}$$

при $x \to \infty$. Как и в предыдущих случаях, когда ищется асимптотика на бесконечности, начнем с замены $x = \frac{1}{t}$:

$$\sqrt[3]{x+x^2} = \left| \begin{smallmatrix} x = \frac{1}{t} \\ t \to 0 \end{smallmatrix} \right| = \sqrt[3]{\frac{1}{t} + \frac{1}{t^2}} = \frac{(1+t)^{\frac{1}{3}}}{t^{\frac{2}{3}}} =$$

$$= (6.2.52) = \frac{1 + \frac{1}{3} \cdot t + \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{3} - 1\right) \cdot \frac{t^2}{2!} + \underset{t\to 0}{\mathbf{o}} \left(t^2\right)}{t^{\frac{2}{3}}} =$$

$$= t^{-\frac{2}{3}} + \frac{t^{\frac{1}{3}}}{3} - \frac{t^{\frac{4}{3}}}{9} + \underset{t\to 0}{\mathbf{o}} \left(t^{\frac{4}{3}} \right) = \left| \begin{smallmatrix} t = \frac{1}{x} \\ x \to \infty \end{smallmatrix} \right| =$$

$$= x^{\frac{2}{3}} + \frac{1}{3 \cdot x^{\frac{1}{3}}} - \frac{1}{9 \cdot x^{\frac{4}{3}}} + \underset{x\to\infty}{\mathbf{o}} \left(\frac{1}{x^{\frac{4}{3}}} \right)$$

Из вычислений видно, что разложение в этом случае удобно искать вдоль асимптотической последовательности

$$x^{\frac{2}{3}} \underset{x\to\infty}{\gg} x^{-\frac{1}{3}} \underset{x\to\infty}{\gg} x^{-\frac{4}{3}} \underset{x\to\infty}{\gg} \dots \underset{x\to\infty}{\gg} x^{\frac{2}{3}-k} \underset{x\to\infty}{\gg} \dots$$

Глава 7

ИНТЕГРАЛ

§ 1 Неопределенный интеграл

В главе 5 мы определили понятие производной F' функции F и изучали его приложения в математике. Неопределенный интеграл представляет собой конструкцию, придуманную для решения обратной задачи: дана функция f, нужно найти такую функцию F, для которой f была бы производной,

$$F' = f.$$

Такая функция F называется *первообразной* для функции f.

Как и в случае с производной, эта конструкция оказывается полезной в самых разных областях естествознания, в частности, в геометрии, при вычислении площадей и объемов. Но, в отличие от производной, задача нахождения первообразной не имеет однозначного решения: здесь решением будет целый класс функций, который и называется *неопределенным интегралом функции* f.

Еще одна неприятная деталь в этой теории, отличающая ее от теории дифференцирования, — что неопределенный интеграл от стандартной функции не всегда является стандартной функцией. Поэтому в некоторых случаях "вычислить" неопределенный интеграл в том смысле, который вкладывался в эту задачу в дифференциальном исчислении, то есть, выразив результат в элементарных функциях, бывает невозможно.

Из-за того, что неопределенный интеграл — не одна функция, а целый их класс, эту тему приходится начинать с изучения классов функций[1].

(a) Классы функций, тождественные на отрезках

Прежде, чем говорить о неопределенном интеграле, желательно обсудить понятие класса функций. По идеологии теории множеств, функции тоже могут образовывать классы. Мы здесь и поговорим о самых простых таких классах. Начнем с нескольких примеров.

◇ **7.1.1.** Рассмотрим класс $\mathcal{F}$, состоящий из функций вида

$$f(x) = \sin x + A, \quad x \in \mathbb{R}, \tag{7.1.1}$$

где $A \in \mathbb{R}$ – произвольный параметр. Этот класс можно описать формулой

$$f \in \mathcal{F} \quad \Leftrightarrow \quad \exists A \in \mathbb{R} \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = \sin x + A.$$

Если условиться, что под x всегда будет пониматься переменная, используемая как аргумент при описании функций из данного класса, а все остальные переменные считаются параметрами, то при таких договоренностях описание класса $\mathcal{F}$ можно сократить до записи

$$\mathcal{F} = \sin x + A. \tag{7.1.2}$$

Эту запись нужно понимать так, что функции, описываемые правой частью формулы (7.1.2) (в которой только x считается свободной переменной, а все остальные переменные считаются параметрами), и только такие функции, считаются элементами класса $\mathcal{F}$.

В соответствии с этой договоренностью, формула

$$\mathcal{G} = \cos x + B. \tag{7.1.3}$$

[1]Классы функций, которые мы будем рассматривать в этом параграфе, будут множествами (а не собственными классами в смысле определения на с.30), но нам будет удобно называть их классами, а не множествами, чтобы не провоцировать путаницы с числовыми множествами.

описывает класс функций вида

$$g(x) = \cos x + A, \quad x \in \mathbb{R}, \qquad (7.1.4)$$

где $B \in \mathbb{R}$ – произвольный параметр.

◇ **7.1.2.** Точно так же формула

$$\mathcal{F} = \sin(x + A). \qquad (7.1.5)$$

описывает класс функций вида

$$f(x) = \sin(x + A), \quad x \in \mathbb{R}, \qquad (7.1.6)$$

где $A \in \mathbb{R}$ – произвольный параметр, а формула

$$\mathcal{G} = \cos(x + B). \qquad (7.1.7)$$

описывает класс функций вида

$$g(x) = \sin(x + B), \quad x \in \mathbb{R}, \qquad (7.1.8)$$

где $B \in \mathbb{R}$ – произвольный параметр.

Равенство классов функций. Говорят, что два класса функций $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$ равны,

$$\mathcal{F} = \mathcal{G},$$

если они равны как классы (или множества), то есть если включение $f \in \mathcal{F}$ эквивалентно включению $f \in \mathcal{G}$:

$$f \in \mathcal{F} \quad \Leftrightarrow \quad f \in \mathcal{G}.$$

Понятно, что это эквивалентно выполнению соотношений

$$\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G} \quad \& \quad \mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}.$$

◇ **7.1.3.** Рассмотрим два класса функций, описанных в примере 7.1.1:

$$\mathcal{F} = \sin x + A, \quad \mathcal{G} = \cos x + B.$$

Будут ли они равны? Чтобы это понять, нужно проверить два включения:

$$\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}$$

и

$$\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}.$$

Уже первое из них неверно:

$$\mathcal{F} \not\subseteq \mathcal{G}.$$

Например, если взять функцию

$$f(x) = \sin x$$

которая принадлежит $\mathcal{F}$, то нетрудно проверить, что она не будет принадлежать $\mathcal{G}$, то есть не будет иметь вид

$$f(x) = \cos x + B$$

ни при каком значении параметра B. Действительно, если предположить, что это не так, то есть существует некое число $B \in \mathbb{R}$ такое, что выполняется тождество

$$\sin x = \cos x + B, \quad x \in \mathbb{R},$$

то, перебросив $\cos x$ в левую часть,

$$\sin x - \cos x = B, \quad x \in \mathbb{R},$$

и, поделив на $\sqrt{2}$, мы получим тождество

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \sin x - \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \cos x = \frac{B}{\sqrt{2}}, \quad x \in \mathbb{R},$$

или, что эквивалентно, тождество

$$\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{B}{\sqrt{2}}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Понятно, что оно не может выполняться, потому что синус — не постоянная функция.

Мы делаем вывод, что

$$\mathcal{F} \neq \mathcal{G}.$$

◇ **7.1.4.** Рассмотрим теперь классы функций из примера 7.1.2:

$$\mathcal{F} = \sin(x + A), \quad \mathcal{G} = \cos(x + B).$$

Будут ли они равны? Опять, чтобы это понять, нужно проверить два включения:

$$\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}$$

и

$$\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}.$$

1. Проверим первое включение. Выберем какую-нибудь функцию из класса $\mathcal{F}$, то есть функцию вида

$$f(x) = \sin(x + A), \quad x \in \mathbb{R},$$

где $A \in \mathbb{R}$ – какое-то фиксированное число. Чтобы проверить, принадлежит ли она классу $\mathcal{G}$, нужно понять, существует ли число $B \in \mathbb{R}$ такое, для которого будет выполняться тождество

$$f(x) = \sin(x + A) = \cos(x + B), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Действительно, если положить

$$B = A - \frac{\pi}{2},$$

то

$$A = B + \frac{\pi}{2},$$

и мы получим

$$f(x) = \sin(x+A) = \sin(x+B+\frac{\pi}{2}) = \cos(x+B), \quad x \in \mathbb{R},$$

— здесь мы использовали доказанное ранее тождество (4.1.101):

$$\sin\left(t + \frac{\pi}{2}\right) = \cos t.$$

2. Теперь проверим второе включение. Выберем какую-нибудь функцию из класса $\mathcal{G}$, то есть функцию вида

$$g(x) = \cos(x + B), \quad x \in \mathbb{R},$$

где $B \in \mathbb{R}$ – какое-то фиксированное число. Чтобы проверить, принадлежит ли она классу $\mathcal{F}$, нужно понять, существует ли число $A \in \mathbb{R}$ такое, для которого будет выполняться тождество

$$g(x) = \cos(x + B) = \sin(x + A), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Действительно, если положить

$$A = B + \frac{\pi}{2},$$

то

$$B = A - \frac{\pi}{2},$$

и мы получим

$$g(x) = \cos(x+B) = \cos(x+A-\frac{\pi}{2}) = \sin(x+A), \quad x \in \mathbb{R},$$

— здесь мы использовали доказанное ранее тождество (4.1.106):

$$\cos\left(t - \frac{\pi}{2}\right) = \sin t.$$

Классы функций с общей областью определения. Будем говорить, что *класс функций $\mathcal{F}$ имеет общую область определения*, если любые две функции из него имеют одинаковую область определения:

$$\forall f, g \in \mathcal{F} \quad \mathsf{D}(f) = \mathsf{D}(g).$$

В этом случае множество $\mathsf{D}(f)$, где $f \in \mathcal{F}$ (не зависящее от выбора $f \in \mathcal{F}$), называется *областью определения функций из* $\mathcal{F}$ и обозначается $\mathsf{D}(\mathcal{F})$:

$$\mathsf{D}(\mathcal{F}) = \mathsf{D}(f) \quad (f \in \mathcal{F}).$$

◇ **7.1.5.** Классы функций, рассматривавшиеся в примерах 7.1.1 и 7.1.2,

$$\sin x + A, \quad \cos x + B, \quad \sin(x + A), \quad \cos(x + B),$$

являются, конечно, классами с общей областью определения, которая у них совпадает со всей прямой $\mathbb{R}$.

◇ **7.1.6.** Класс функций

$$\mathcal{F} = \frac{1}{x} + A$$

тоже имеет общую область определения, которая представляет собой прямую с выкинутой точкой 0:

$$\mathsf{D}(\mathcal{F}) = \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

◇ **7.1.7.** Класс функций

$$\mathcal{F} = \frac{1}{x + A}$$

наоборот не имеет общей области определения.

Ограничение класса функций. Напомним, что понятие *ограничения* отображения было определено выше формулой (0.3.246) (с.44). Применительно к числовым функциям это определение выглядит так: *ограничением функции $f : \mathbb{R} \hookrightarrow \mathbb{R}$ на множество $M \subseteq \mathbb{R}$* называется функция $f\big|_M$, определенная правилами:

1) область определения $f\big|_M$ представляет собой пересечение M с областью определения f:

$$\mathsf{D}(f\big|_M) = M \cap \mathsf{D}(f),$$

2) на множестве $\mathsf{D}(f\big|_M) = M \cap \mathsf{D}(f)$ функции $f\big|_M$ и f совпадают:

$$\forall x \in M \cap \mathsf{D}(f) \quad f\big|_M(x) = f(x).$$

Ограничением класса функций $\mathcal{F}$ на множество M называется класс функций $\mathcal{F}\big|_M$, определенный правилом

$$g \in \mathcal{F}\big|_M \quad \Leftrightarrow \quad \exists f \in \mathcal{F} \quad f\big|_M = g.$$

◇ **7.1.8.** Рассмотрим класс функций

$$\mathcal{F} = \ln|x| + A.$$

Можно заметить, что его ограничением на множество $M = (0, +\infty)$ будет класс функций

$$\mathcal{F}\big|_{(0,+\infty)} = \ln x + A.$$

◇ **7.1.9.** Рассмотрим класс функций

$$\mathcal{F} = A$$

(состоящий из одних констант) и класс функций

$$\mathcal{G} = \operatorname{sgn} x + B.$$

Можно заметить, что при ограничении на множество $M = (0, +\infty)$ получающиеся классы функций совпадают, потому что

$$\mathcal{F}\big|_{(0,+\infty)} = A, \quad x > 0,$$

и

$$\mathcal{G}\big|_{(0,+\infty)} = 1 + B, \quad x > 0.$$

Тождественность на отрезках. Будем говорить, что два класса функций $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$ *тождественны на отрезках*, и изображать это записью

$$\mathcal{F} \equiv \mathcal{G},$$

если

(i) это классы с общей областью определения, причем область определения у них одинакова:

$$\mathsf{D}(\mathcal{F}) = \mathsf{D}(\mathcal{G});$$

(ii) на любом отрезке $[a, b]$ из их области определения $\mathsf{D}(\mathcal{F}) = \mathsf{D}(\mathcal{G})$ ограничения этих классов совпадают:

$$\mathcal{F}\big|_{[a,b]} = \mathcal{G}\big|_{[a,b]} \quad ([a,b] \subseteq \mathsf{D}(\mathcal{F}) = \mathsf{D}(\mathcal{G}), \quad a \neq b).$$

! **7.1.10.** Понятно, что если классы функций $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$ равны, то они тождественны на отрезках:

$$\mathcal{F} = \mathcal{G} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{F} \equiv \mathcal{G}.$$

Но обратное неверно: если $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$ тождественны на отрезках, то это не означает автоматически, что они совпадают:

$$\mathcal{F} \equiv \mathcal{G} \quad \not\Rightarrow \quad \mathcal{F} = \mathcal{G}.$$

В этом нас убеждает следующий пример.

◇ **7.1.11.** Рассмотрим следующие два класса функций:

$$\mathcal{F} = \frac{1}{x} + A,$$

и

$$\mathcal{G} = \frac{1}{x} + \operatorname{sgn} x + B.$$

Сами по себе они не совпадают

$$\mathcal{F} \neq \mathcal{G},$$

потому что функции вида

$$f(x) = \frac{1}{x} + A$$

не представимы в виде

$$g(x) = \frac{1}{x} + \operatorname{sgn} x + B$$

(и наоборот). Однако, эти классы функций тождественны на отрезках,

$$\mathcal{F} \equiv \mathcal{G},$$

потому что, во-первых, области определения у них общие и совпадают

$$\mathsf{D}(\mathcal{F}) = \mathsf{D}(\mathcal{G}) = \mathbb{R} \setminus \{0\},$$

и, во-вторых, если отрезок $[a, b]$ лежит в этой области определения, то он полностью лежит либо на правой полупрямой

$$[a, b] \subseteq (0, +\infty),$$

либо на левой полупрямой

$$[a, b] \subseteq (-\infty, 0),$$

и тогда значение функции $\operatorname{sgn} x$ на нем равно константе, и выражение $\operatorname{sgn} x + B$ в определении $\mathcal{G}$ можно заменить на выражение A.

Алгебраические операции с классами функций. Если $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$ — два класса функций с общими областями определения, то их суммой называется класс функций $\mathcal{F}+\mathcal{G}$, определенный правилом

$$h \in \mathcal{F}+\mathcal{G} \quad \Leftrightarrow \quad \exists f \in \mathcal{F} \quad \exists g \in \mathcal{G} \quad h = f+g.$$

Область определения получаемого класса совпадает с пересечением областей определения $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$:

$$\mathsf{D}(\mathcal{F}+\mathcal{G}) = \mathsf{D}(\mathcal{F}) \cap \mathsf{D}(\mathcal{G}).$$

Точно так же произведением класса функций $\mathcal{F}$ на скаляр α называется класс функций $\alpha \cdot \mathcal{F}$, определяемый правилом

$$h \in \alpha \cdot \mathcal{F} \quad \Leftrightarrow \quad \exists f \in \mathcal{F} \quad h = \alpha \cdot f.$$

Область определения получаемого класса совпадает с областью определения $\mathcal{F}$:

$$\mathsf{D}(\alpha \cdot \mathcal{F}) = \mathsf{D}(\mathcal{F}).$$

Теорема 7.1.1. *Нетривиальная линейная комбинация (то есть такая, чтобы хотя бы один из коэффициентов α или β был ненулевым) классов $f(x)+A$ и $g(x)+B$ описывается формулой*

$$\alpha \cdot (f(x)+A) + \beta \cdot (g(x)+B) = \alpha \cdot f(x) + \beta \cdot g(x) + C \tag{7.1.9}$$

Доказательство. Если функция h лежит в классе $\alpha \cdot (f(x)+A) + \beta \cdot (g(x)+B)$, то

$$h(x) = \alpha \cdot (f(x)+A) + \beta \cdot (g(x)+B)$$

для некоторых $A, B \in \mathbb{R}$. Поэтому

$$h(x) = \alpha \cdot f(x) + \beta \cdot g(x) + C$$

где $C = \alpha \cdot A + \beta \cdot B$. Значит, h лежит в классе $\alpha \cdot f(x) + \beta \cdot g(x) + C$. И наоборот, если h лежит в классе $\alpha \cdot f(x) + \beta \cdot g(x) + C$, то h имеет вид

$$h(x) = \alpha \cdot f(x) + \beta \cdot g(x) + C.$$

для некоторого $C \in \mathbb{R}$. Подберем $A, B \in \mathbb{R}$ так, чтобы $C = \alpha \cdot A + \beta \cdot B$ (это всегда можно сделать, если хотя бы один из коэффициентов α или β был ненулевой). Тогда

$$h(x) = \alpha \cdot f(x) + \beta \cdot g(x) + C = \alpha \cdot f(x) + \beta \cdot g(x) + \alpha \cdot A + \beta \cdot B = \alpha \cdot (f(x)+A) + \beta \cdot (g(x)+B),$$

то есть h лежит в классе $\alpha \cdot (f(x)+A) + \beta \cdot (g(x)+B)$. □

Теорема 7.1.2. *Если*

$$\mathsf{D}(f) \subseteq \mathsf{D}(h) \tag{7.1.10}$$

и

$$(f(x)+A) + (g(x)+B) \equiv h(x) + C$$

то

$$f(x) + A \equiv h(x) - (g(x)+B)$$

Доказательство. Пусть

$$(f(x)+A) + (g(x)+B) \equiv h(x) + C.$$

По уже доказанному свойству 1°,

$$(f(x)+A) + (g(x)+B) = f(x) + g(x) + E,$$

поэтому это равносильно условию

$$f(x) + g(x) + E \equiv h(x) + C.$$

Это значит, что

$$\mathsf{D}(f) \cap \mathsf{D}(g) = \mathsf{D}(h) \tag{7.1.11}$$

и на всяком отрезке $[a,b]\subseteq \mathsf{D}(f)\cap\mathsf{D}(g)=\mathsf{D}(h)$ функция H представима в виде $f(x)+g(x)+E$ тогда и только тогда, когда она представима в виде $h(x)+C$:

$$\forall[a,b]\subseteq \mathsf{D}(f)\cap\mathsf{D}(g)=\mathsf{D}(h)\quad \forall E\in\mathbb{R}\quad \exists C\in\mathbb{R}\quad f(x)+g(x)+E=h(x)+C\quad (x\in[a,b]) \tag{7.1.12}$$

и

$$\forall[a,b]\subseteq \mathsf{D}(f)\cap\mathsf{D}(g)=\mathsf{D}(h)\quad \forall C\in\mathbb{R}\quad \exists E\in\mathbb{R}\quad f(x)+g(x)+E=h(x)+C\quad (x\in[a,b]). \tag{7.1.13}$$

Заметим, что из условия (7.1.11) следует вложение

$$\mathsf{D}(f)\supseteq\mathsf{D}(h)$$

которое вместе с (7.1.10)

$$\mathsf{D}(f)\subseteq\mathsf{D}(h)$$

дает равенство

$$\mathsf{D}(f)=\mathsf{D}(h). \tag{7.1.14}$$

С другой стороны, из условия (7.1.11) следует вложение

$$\mathsf{D}(g)\supseteq\mathsf{D}(h)$$

из которого в свою очередь следует

$$\mathsf{D}(h)=\mathsf{D}(h)\cap\mathsf{D}(g)$$

Вместе с (7.1.14) это дает

$$\mathsf{D}(f)=\mathsf{D}(h)=\mathsf{D}(h)\cap\mathsf{D}(g).$$

Отсюда можно сделать вывод, что в формулах (7.1.12) и (7.1.13) множество $\mathsf{D}(f)\cap\mathsf{D}(g)=\mathsf{D}(h)$ можно заменить на совпадающее с ним множество $\mathsf{D}(f)=\mathsf{D}(h)\cap\mathsf{D}(g)$:

$$\forall[a,b]\subseteq \mathsf{D}(f)=\mathsf{D}(h)\cap\mathsf{D}(g)\quad \forall E\in\mathbb{R}\quad \exists C\in\mathbb{R}\quad f(x)+g(x)+E=h(x)+C\quad (x\in[a,b]) \tag{7.1.15}$$

и

$$\forall[a,b]\subseteq \mathsf{D}(f)=\mathsf{D}(h)\cap\mathsf{D}(g)\quad \forall C\in\mathbb{R}\quad \exists E\in\mathbb{R}\quad f(x)+g(x)+E=h(x)+C\quad (x\in[a,b]). \tag{7.1.16}$$

Эти условия можно переписать, перебросив $g(x)$ в правую часть:

$$\forall[a,b]\subseteq \mathsf{D}(f)=\mathsf{D}(h)\cap\mathsf{D}(g)\quad \forall E\in\mathbb{R}\quad \exists C\in\mathbb{R}\quad f(x)+E=h(x)-g(x)+C\quad (x\in[a,b]) \tag{7.1.17}$$

и

$$\forall[a,b]\subseteq \mathsf{D}(f)=\mathsf{D}(h)\cap\mathsf{D}(g)\quad \forall C\in\mathbb{R}\quad \exists E\in\mathbb{R}\quad f(x)+E=h(x)-g(x)+C\quad (x\in[a,b]). \tag{7.1.18}$$

А затем можно сделать замену $E=A$ и $C=-B$, и мы получим

$$\forall[a,b]\subseteq \mathsf{D}(f)=\mathsf{D}(h)\cap\mathsf{D}(g)\quad \forall A\in\mathbb{R}\quad \exists B\in\mathbb{R}\quad f(x)+A=h(x)-(g(x)+B)\quad (x\in[a,b]) \tag{7.1.19}$$

и

$$\forall[a,b]\subseteq \mathsf{D}(f)=\mathsf{D}(h)\cap\mathsf{D}(g)\quad \forall B\in\mathbb{R}\quad \exists A\in\mathbb{R}\quad f(x)+A=h(x)-(g(x)+B)\quad (x\in[a,b]). \tag{7.1.20}$$

Эти два условия означают, что на всяком отрезке $[a,b]\subseteq\mathsf{D}(f)=\mathsf{D}(h)\cap\mathsf{D}(g)$ функция F представима в виде $f(x)+A$ тогда и только тогда, когда она представима в виде $h(x)-(g(x)+B)$, и это в точности тождество

$$f(x)+A\equiv h(x)-(g(x)+B).$$

$\square$

Если $\mathcal{G}$ — класс функций с общей областью определения, и f — функция, у которой область значений лежит в области определения $\mathcal{G}$,

$$\mathsf{R}(f)\subseteq\mathsf{D}(\mathcal{G})$$

то композицией $\mathcal{G}$ и f называется класс функций $\mathcal{G}\circ f$, определенный правилом

$$h\in\mathcal{G}\circ f\quad\Leftrightarrow\quad \exists g\in\mathcal{G}\quad h=g\circ f.$$

Композиция с функцией, непрерывной на отрезках.

- Условимся говорить, что функция $f:\mathbb{R}\hookrightarrow\mathbb{R}$ *непрерывна на отрезках*, если она непрерывна на всяком отрезке $[a,b]$ из своей области определения.

! **7.1.12.** Непрерывность на отрезках эквивалентна непрерывности на невырожденных отрезках (потому что на каждом вырожденном отрезке, то есть на одноточечном множестве $[a,a] = \{a\}$, любая функция непрерывна).

$\diamond$ **7.1.13.** Из непрерывности на отрезках не следует непрерывность на всей области определения. В качестве примера рассмотрим множество

$$M = [-1,0] \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{2n}, \frac{1}{2n-1}\right],$$

и определим функцию f на нем формулой

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in [-1,0] \\ 1, & x \in \left[\frac{1}{2n}, \frac{1}{2n-1}\right] \end{cases}.$$

На каждом отрезке $[a,b]$ в своей области определения $\mathsf{D}(f) = M$ функция f непрерывна (точнее, равна или 1, если $0 \notin [a,b]$ или 0, если $\{0\} = [a,b]$), но в точке 0 она разрывна, потому что

$$\mathsf{D}(f) \ni \frac{1}{2n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \in \mathsf{D}(f),$$

но при этом

$$f\left(\frac{1}{2n}\right) = 1 \underset{n\to\infty}{\not\longrightarrow} 0 = f(0).$$

В этом примере можно было отрезок $[-1,0]$ заменить вырожденным отрезком $[0;0] = \{0\}$, но мы задали такую область определения, чтобы она была интегральной в смысле определения на с.400, а получившаяся функция f была дифференцируемой в смысле определения на с.401 ниже. Как следствие, этот пример показывает попутно, что *дифференцируемая функция необязательно непрерывна на своей области определения* (хотя обязательно непрерывна на отрезках, в силу формулируемой ниже теоремы 7.1.7).

Теорема 7.1.3. *Если f — функция, непрерывная на отрезках,*

$$\mathsf{R}(f) \subseteq \mathsf{D}(\mathcal{G}) = \mathsf{D}(\mathcal{H}) \tag{7.1.21}$$

и

$$\mathcal{G} \equiv \mathcal{H}, \tag{7.1.22}$$

то

$$\mathcal{G} \circ f \equiv \mathcal{H} \circ f \tag{7.1.23}$$

Доказательство. 1. Пусть $p \in \mathcal{G} \circ f$. Это означает, что существует функция $g \in \mathcal{G}$ такая, что $p = g \circ f$. Если зафиксировать отрезок $[a,b] \subseteq \mathsf{D}(f) = \mathsf{D}(\mathcal{G} \circ f) = \mathsf{D}(\mathcal{H} \circ f)$, то поскольку функция f непрерывна, по следствию 3.3.9, его образ $f([a,b])$ при отображении f тоже будет отрезком (возможно вырожденным) в $\mathbb{R}$. Поэтому из (7.1.22) следует, что на множестве $f([a,b])$ классы функций $\mathcal{G}$ и $\mathcal{H}$ совпадают:

$$\mathcal{G}\big|_{f([a,b])} = \mathcal{H}\big|_{f([a,b])}.$$

Значит, для функции $g \in \mathcal{G}$ можно подобрать функцию $h \in \mathcal{H}$ такую, что

$$g\big|_{f([a,b])} = h\big|_{f([a,b])}.$$

Отсюда следует, что

$$p\big|_{[a,b]} = g \circ f\big|_{[a,b]} = h \circ f\big|_{[a,b]} \in \mathcal{H} \circ f\big|_{[a,b]}.$$

Мы доказали вложение

$$\mathcal{G} \circ f\big|_{[a,b]} \subseteq \mathcal{H} \circ f\big|_{[a,b]}.$$

2. Точно так же доказывается вложение

$$\mathcal{G} \circ f\big|_{[a,b]} \supseteq \mathcal{H} \circ f\big|_{[a,b]}.$$

3. Вместе эти два вложения означают равенство

$$\mathcal{G} \circ f\big|_{[a,b]} = \mathcal{H} \circ f\big|_{[a,b]}.$$

которое справедливо для всякого отрезка $[a,b] \subseteq \mathsf{D}(f) = \mathsf{D}(\mathcal{G} \circ f) = \mathsf{D}(\mathcal{H} \circ f)$. Это доказывает (7.1.23). $\square$

(b) Определение и свойства неопределенного интеграла

Дифференцируемые функции и первообразная на отрезке.

- Пусть функция h определена на отрезке $[a;b]$. Тогда
  — ее *правой производной* в точке a называется предел
$$h'_+(a) := \lim_{x\to a+0} \frac{h(x)-h(a)}{x-a} \qquad (7.1.24)$$
  — ее *левой производной* в точке b называется предел
$$h'_-(b) := \lim_{x\to b-0} \frac{h(x)-h(b)}{x-b} \qquad (7.1.25)$$

- Если эти величины конечны, и кроме того функция h имеет (обычную) конечную производную в любой точке интервала $(a;b)$, то говорят, что h *дифференцируема на отрезке* $[a;b]$, а ее *производной на отрезке* $[a;b]$ называется функция
$$h'(x) = \begin{cases} h'_+(a), & x=a \\ h'(x), & x\in(a;b) \\ h'_-(a), & x=b \end{cases} \qquad (7.1.26)$$

Предложение 7.1.4. *Всякая дифференцируемая функция на отрезке $[a,b]$ непрерывна на нем.*

Доказательство. Если функция h дифференцируема на отрезке $[a;b]$, то по теореме 5.1.1, она будет непрерывна в каждой внутренней точке этого отрезка. Остается убедиться, что на концах она тоже непрерывна. Это делается тем же приемом, что и в теореме 5.1.1: если пределы (7.1.24) и (7.1.25) существуют и конечны, то функция h непрерывна в точках a и b. □

- Функция F называется *первообразной* для функции f *на отрезке* $[a;b]$, если F определена на $[a;b]$, дифференцируема на нем и ее производная на нем равна f:
$$F'(x) = f(x), \qquad x\in[a;b] \qquad (7.1.27)$$
  При этом, в соответствии с определением производной на отрезке формулой (7.1.26), на концах отрезка формула (7.1.27) интерпретируется, как условие на односторонние производные:
$$F'_+(a) = f(a), \qquad F'_-(b) = f(b) \qquad (7.1.28)$$

Лемма 7.1.5. *Пусть функция H определена и дифференцируема на отрезке $[a,b]$, причем ее производная равна нулю на $[a,b]$:*
$$H'(x) = 0, \quad x\in[a,b] \qquad (7.1.29)$$
Тогда функция $H(x)$ постоянна на $[a,b]$:
$$H(x) = C, \quad x\in[a,b]$$
для некоторого $C\in\mathbb{R}$.

Доказательство. Положим $C = H(a)$. Для любого $x\in(a,b]$ мы получим, что функция H

– дифференцируема на интервале $(a;x)$ (потому что она дифференцируема на (a,b)), и
– непрерывна на отрезке $[a;x]$ (по предложению 7.1.4)

поэтому, мы можем применить к функции H на отрезке $[a;x]$ теорему Лагранжа 5.1.7, и тогда получим, что существует такая точка $\xi\in[a;x]$, что
$$\frac{H(x)-H(a)}{x-a} = H'(\xi) = (7.1.29) = 0$$
отсюда
$$H(x)-H(a) = 0 \quad\Longrightarrow\quad H(x) = H(a) = C$$
□

Свойства первообразных на отрезке

1^0. *Если F – первообразная для некоторой функции f на отрезке $[a;b]$, то F является непрерывной функцией на $[a;b]$.*

2^0. *Если F – какая-нибудь первообразная для функции f на отрезке $[a;b]$, то все первообразные для функции f на отрезке $[a;b]$ имеют вид*

$$F(x) + C$$

где C – произвольные константы.

Доказательство. 1. Если F – первообразная для f на $[a;b]$, то F дифференцируема на $[a;b]$ (и ее производной будет f), поэтому в силу предложения 7.1.4, F непрерывна на $[a;b]$.

2. Пусть F и G – две первообразные для f на отрезке $[a;b]$:

$$F'(x) = G'(x) = f(x), \quad x \in [a,b]$$

Тогда их разность $H = G - F$ будет иметь нулевую производную на $[a;b]$

$$H'(x) = G'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0, \quad x \in [a;b]$$

Значит, по лемме 7.1.5, функция H постоянна:

$$H(x) = G(x) - F(x) = C, \quad x \in [a;b]$$

(где C – некоторая константа). Следовательно,

$$G(x) = F(x) + C, \quad x \in [a;b]$$

У нас получилось, что если F – какая-нибудь первообразная, то любая другая первообразная G имеет вид $G(x) = F(x) + C$. □

Интегральные множества и функции, дифференцируемые на области определения.

- Пусть $M \subseteq \mathbb{R}$ — какое-то числовое множество. *Интегральной частью* $M^\int$ множества M называется объединение всех невырожденных отрезков, содержащихся в M:

$$M^\int = \bigcup_{[a,b]\subseteq M,\ a\neq b} [a,b].$$

- Множество M называется *интегральным*, если оно совпадает со своей интегральной частью:

$$M^\int = M$$

◇ **7.1.14.** Интегральная часть открытого интервала (a,b) совпадает с ним самим:

$$(a,b)^\int = (a,b),$$

поэтому *любой интервал является интегральным множеством.*

◇ **7.1.15.** Интегральная часть отрезка $[a,b]$ совпадает с ним самим:

$$[a,b]^\int = [a,b],$$

поэтому *любой отрезок является интегральным множеством*

◇ **7.1.16.** Интегральная часть дискретного[2] множества, например, $\mathbb{N}$, пуста:

$$\mathbb{N}^\int = \varnothing,$$

поэтому *никакое дискретное множество не интегрально*

◇ **7.1.17.** Интегральная часть последовательности тоже всегда пуста, например,

$$\left\{\frac{1}{n};\ n \in \mathbb{N}\right\}^\int = \varnothing.$$

поэтому *никакая последовательность не интегральна*

[2]Множество M называется дискретным, если каждая его точка $x \in M$ обладает окрестностью $U_\varepsilon(x)$, в которой не содержится никаких других точек множества M.

- Будем говорить, что функция $f : \mathbb{R} \hookrightarrow \mathbb{R}$ *дифференцируема* (не на каком-то заданном интервале, а прямо на своей области определения), если
  (i) ее область определения $\mathsf{D}(f)$ является интегральным множеством,
  (ii) на каждом невырожденном отрезке $[a, b] \subseteq \mathsf{D}(f)$ $(a \neq b)$ функция f дифференцируема (в смысле определения на с.399).

Теорема 7.1.6. *Если функция $F : \mathbb{R} \hookrightarrow \mathbb{R}$ дифференцируема, то существует функция $f : \mathbb{R} \hookrightarrow \mathbb{R}$ с той же областью определения,*

$$\mathsf{D}(f) = \mathsf{D}(F)$$

такая, что на любом невырожденном отрезке $[a, b] \subseteq \mathsf{D}(F)$ ограничение $f\big|_{[a,b]}$ является производной ограничения $F\big|_{[a,b]}$ (в смысле определения на с.399):

$$(F\big|_{[a,b]})' = f\big|_{[a,b]} \tag{7.1.30}$$

- Функция $f : \mathbb{R} \hookrightarrow \mathbb{R}$ с перечисленными в теореме 7.1.6 свойствами называется *производной* функции F и обозначается
$$f = F' \tag{7.1.31}$$

Доказательство. Функция F дифференцируема, и это значит, что на каждом невырожденном отрезке $[a, b] \subseteq \mathsf{D}(F)$ она дифференцируема, и поэтому существует некая функция $f_{a,b}$, являющаяся производной F на этом отрезке:

$$(F\big|_{[a,b]})' = f_{a,b}$$

Наша задача — показать, что все функции $f_{a,b}$ являются ограничениями $f_{[a,b]}$ некоторой единой функции $f : \mathsf{D}(F) \to \mathbb{R}$:

$$f\big|_{[a,b]} = f_{a,b}.$$

Для этого нужно просто проверить, что для любых двух отрезков $[a, b], [c, d] \subseteq \mathsf{D}(F)$ соответствующие функции $f_{a,b}$ и $f_{c,d}$ совпадают на пересечении $[a, b] \cap [c, d]$:

$$\forall x \in [a, b] \cap [c, d] \qquad f_{a,b}(x) = f_{c,d}(x).$$

Действительно, если это пересечение $[a, b] \cap [c, d]$ непусто, то объединение отрезков $[a, b]$ и $[c, d]$ представляет собой отрезок, содержащийся в $\mathsf{D}(F)$:

$$[a, b] \cup [c, d] = [A, B] \subseteq \mathsf{D}(F),$$

и для любой точки $x \in [a, b] \cap [c, d]$ мы получим

$$f_{a,b}(x) = (F\big|_{[a,b]})'(x) = \lim_{y\to x,\ y\in[a,b]} \frac{F(y) - F(x)}{y - x} = \lim_{y\to x,\ y\in[A,B]} \frac{F(y) - F(x)}{y - x} = (F\big|_{[A,B]})'(x) =$$
$$= \lim_{y\to x,\ y\in[A,B]} \frac{F(y) - F(x)}{y - x} = \lim_{y\to x,\ y\in[c,d]} \frac{F(y) - F(x)}{y - x} = (F\big|_{[c,d]})'(x) = f_{c,d}(x).$$

□

Из предложения 7.1.4 следует

Теорема 7.1.7. *Всякая дифференцируемая функция непрерывна на отрезках*[3].

! 7.1.18. Однако, из дифференцируемости функции $f : \mathbb{R} \hookrightarrow \mathbb{R}$ не следует ее непрерывность на всей своей области определения $D(f)$, как показывает пример 7.1.13.

---

[3]Понятие функции, непрерывной на отрезках, было определено на с.397.

Неопределенный интеграл.

- Функция $F : \mathbb{R} \hookrightarrow \mathbb{R}$ называется *первообразной* для функции $f : \mathbb{R} \hookrightarrow \mathbb{R}$, если f является производной для F в смысле определения на с.401.
- Класс всех первообразных для функции f называется ее *неопределенным интегралом* и обозначается символом
$$\int f(x)\,\mathsf{d}\,x$$
(символ d здесь называется *дифференциалом* и нужен он для того, чтобы показать, по какой переменной ведется интегрирование).

Теорема 7.1.8. *Если F – какая-нибудь первообразная для функции f, то неопределенный интеграл функции f тождественен на отрезках классу функций $F(x) + C$:*

$$\int f(x)\,\mathsf{d}\,x \equiv F(x) + C. \tag{7.1.32}$$

Доказательство. Тождество на отрезках (7.1.32) означает две вещи:

— что области определения функциональных классов в обеих частях совпадают:
$$\mathsf{D}\left(\int f(x)\,\mathsf{d}\,x\right) = \mathsf{D}(F(x) + C),$$

— и что на каждом отрезке $[a, b] \subseteq \mathsf{D}(\int f(x)\,\mathsf{d}\,x) = \mathsf{D}(F(x) + C)$ ограничения этих классов совпадают:
$$\left(\int f(x)\,\mathsf{d}\,x\right)\Big|_{[a,b]} = \big(F(x) + C\big)\Big|_{[a,b]}.$$

1. Первое утверждение очевидно, потому что по определению всякая первообразная функции f имеет область определения, совпадающую с областью определения f:
$$\mathsf{D}\left(\int f(x)\,\mathsf{d}\,x\right) = \mathsf{D}(f) = \mathsf{D}(F(x) + C),$$

2. Проверим второе. Пусть $[a, b] \subseteq \mathsf{D}(f)$. Тогда

— если G имеет вид $F(x) + C$, то на отрезке $[a, b] \subseteq \mathsf{D}(f)$ производная G будет такая же как у F, и поэтому G будет первообразной для f, то есть G будет принадлежать классу $\int f(x)\,\mathsf{d}\,x$,

— если G принадлежит классу $\int f(x)\,\mathsf{d}\,x$, то G — первообразная для f, то $G' = f$, и по определению производной на с.401, на отрезке $[a, b]$ выполнятеся равенство
$$\big(G\big|_{[a,b]}\big)' = f\big|_{[a,b]},$$
и поэтому по свойству 2^0 первообразных на отрезке (с.400) $G\big|_{[a,b]}$ отличается от $F\big|_{[a,b]}$ на константу, то есть имеет вид $\big(F(x) + C\big)\big|_{[a,b]}$.

□

Таблица интегралов. Неопределенные интегралы элементарных функций подсчитаны, и вот их список.[4]

$$\int A\,\mathsf{d}\,x \equiv A \cdot x + C \tag{7.1.33}$$

$$\int x^\alpha\,\mathsf{d}\,x \equiv \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \qquad (\alpha \neq -1) \tag{7.1.34}$$

$$\int \frac{dx}{x} \equiv \ln|x| + C \tag{7.1.35}$$

$$\int a^x\,\mathsf{d}\,x \equiv \frac{a^x}{\ln a} + C, \qquad (0 < a \neq 1) \tag{7.1.36}$$

$$\int e^x\,\mathsf{d}\,x \equiv e^x + C \tag{7.1.37}$$

$$\int \sin x\,\mathsf{d}\,x \equiv -\cos x + C \tag{7.1.38}$$

[4]В формуле (7.1.34) правая часть считается определенной на области определения подынтегральной функции. В остальных формулах это замечание излишне, потому что области определения первообразной и подынтегральной функции совпадают по определению.

$$\int \cos x \,\mathsf{d}\, x \equiv \sin x + C \qquad (7.1.39)$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} \equiv \operatorname{tg} x + C \qquad (7.1.40)$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} \equiv -\operatorname{ctg} x + C \qquad (7.1.41)$$

$$\int \frac{dx}{a^2+x^2} \equiv \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C \qquad (7.1.42)$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} \equiv \arcsin\frac{x}{a} + C \qquad (7.1.43)$$

$$\int \frac{dx}{a^2-x^2} \equiv \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + C \qquad (7.1.44)$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+A}} \equiv \ln\left|x+\sqrt{x^2+A}\right| + C \qquad (7.1.45)$$

Доказательство. Здесь всюду используется теорема 7.1.8, и доказательство состоит в том, чтобы проверить, что производная от правой части совпадает с подынтегральной функцией. Например, из формулы

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right) = \frac{(\alpha+1)\cdot x^{\alpha}}{\alpha+1} = x^{\alpha}$$

следует, формула (7.1.34):

$$\int x^{\alpha} \,\mathsf{d}\, x \equiv \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$$

В доказательстве формул (7.1.35), (7.1.44) и (7.1.45) используется доказанная выше формула (5.1.83). □

! **7.1.19.** Понятное дело, в качестве параметра можно выбирать любую букву, кроме тех, что входят в интегрируемое выражение, необязательно C. Например, можно писать

$$\int x^{\alpha} \,\mathsf{d}\, x \equiv \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + D.$$

Свойства неопределенных интегралов.

1°. **Линейность:** *если* $\alpha \neq 0$ *или* $\beta \neq 0$, *и функции* f, *и* g *имеют первообразные, причем* $\mathsf{D}(f) \cap \mathsf{D}(g)$ *— интегральное множество, то*

$$\int \big(\alpha\cdot f(x) + \beta\cdot g(x)\big)\,\mathsf{d}\, x \equiv \alpha\cdot\int f(x)\,\mathsf{d}\, x + \beta\cdot\int g(x)\,\mathsf{d}\, x \qquad (7.1.46)$$

2°. **Замена переменной:** *если функция* g *имеет первообразную, а* f *— дифференцируемая функция, у которой область значений содержится в области определения функции* g,

$$\mathsf{R}(f) \subseteq \mathsf{D}(g), \qquad (7.1.47)$$

то

$$\int g(f(x))\cdot f'(x)\,\mathsf{d}\, x \equiv \left(\int g(y)\,\mathsf{d}\, y\right)\Big|_{y=f(x)} \qquad (7.1.48)$$

3°. **Интегрирование по частям:** *если функции* f *и* g *дифференцируемы,* $\mathsf{D}(f) \cap \mathsf{D}(g)$ *— интегральное множество, а функции* $f\cdot g'$ *и* $f'\cdot g$ *имеют первообразные, то*

$$\int f(x)\cdot g'(x)\,\mathsf{d}\, x \equiv f(x)\cdot g(x) - \int g(x)\cdot f'(x)\,\mathsf{d}\, x \qquad (7.1.49)$$

Доказательство. 1. В первом свойстве сначала нужно проверить, что левая и правая части имеют одинаковые области определения. Действительно,

$$\mathsf{D}\left(\int \big(\alpha\cdot f(x)+\beta\cdot g(x)\big)\,\mathsf{d}\, x\right) = \mathsf{D}\left(\alpha\cdot f+\beta\cdot g\right) = \mathsf{D}(f)\cap\mathsf{D}(g) =$$
$$= \mathsf{D}\left(\alpha\cdot\int f(x)\,\mathsf{d}\, x\right)\cap\mathsf{D}\left(\beta\cdot\int g(x)\,\mathsf{d}\, x\right) = \mathsf{D}\left(\alpha\cdot\int f(x)\,\mathsf{d}\, x+\beta\cdot\int g(x)\,\mathsf{d}\, x\right).$$

Далее, пусть F и G — первообразные для f и g соответственно:

$$F'(x) = f(x) \quad (x\in\mathsf{D}(f)), \qquad G'(x) = g(x) \quad (x\in\mathsf{D}(g)).$$

Тогда для любого x из произвольного отрезка $[a,b]\subseteq\mathsf{D}(f)\cap\mathsf{D}(g)$ справедливо равенство

$$(\alpha\cdot F+\beta\cdot G)'(x) = \alpha\cdot F'(x)+\beta\cdot G'(x) = \alpha\cdot f(x)+\beta\cdot g(x)$$

А с другой стороны, множество

$$\mathsf{D}(f)\cap\mathsf{D}(g) = \mathsf{D}(\alpha\cdot f+\beta\cdot g)$$

по условиям утверждения 1° интегрально. Значит, в соответствии с определениями производной и первообразной на с.401, функция $\alpha \cdot F + \beta \cdot G$ – первообразная для функции $\alpha \cdot f + \beta \cdot g$. Поэтому

$$\int \big(\alpha \cdot f(x) + \beta \cdot g(x)\big) \,\mathsf{d}\, x \equiv (7.1.32) \equiv (\alpha \cdot F + \beta \cdot G)(x) + C = \alpha \cdot F(x) + \beta \cdot G(x) + C =$$

$$= (7.1.9) = \alpha \cdot (F(x) + A) + \beta \cdot (G(x) + B) \equiv (7.1.32) \equiv \alpha \cdot \int f(x) \,\mathsf{d}\, x + \beta \cdot \int g(x) \,\mathsf{d}\, x$$

2. В тождестве (7.1.48) нужно сначала проверить, что области определения функциональных классов слева и справа совпадают. Это следует из того, что условие дифференцируемости функции f автоматически предполагает равенство

$$\mathsf{D}(f') = D(f),$$

а условие (7.1.47) дает условие

$$\mathsf{D}(g \circ f) = \mathsf{D}(f).$$

Из них мы получаем цепочку:

$$\mathsf{D}\left(\int g(f(x)) \cdot f'(x) \,\mathsf{d}\, x\right) = \mathsf{D}\left((g \circ f) \cdot f'\right) = \underbrace{\mathsf{D}(g \circ f)}_{\substack{\parallel \\ \mathsf{D}(f)}} \cap \underbrace{\mathsf{D}(f')}_{\substack{\parallel \\ \mathsf{D}(f)}} = D(f) = \mathsf{D}\left(\int g(y) \,\mathsf{d}\, y\Big|_{y=f(x)}\right)$$

Пусть далее G — первообразная для функции g:

$$G'(y) = g(y), \quad y \in \mathsf{D}(g).$$

Тогда, в силу (7.1.32),

$$\int g(y) \,\mathsf{d}\, y \equiv G(y) + C \tag{7.1.50}$$

Поскольку функция f дифференцируема, она непрерывна на отрезках (по теореме 7.1.7). Вдобавок условие (7.1.47) означает, что

$$\mathsf{R}(f) \subseteq \mathsf{D}\left(\int g(y) \,\mathsf{d}\, y\right) = \mathsf{D}(G(y) + C).$$

Отсюда, применяя теорему 7.1.3, мы можем заключить, что тождество (7.1.50) влечет за собой тождество

$$\int g(y) \,\mathsf{d}\, y\Big|_{y=f(x)} \equiv \big(G(y) + C\big)\Big|_{y=f(x)}. \tag{7.1.51}$$

Заметим далее, что функция $G \circ f$ является первообразной для функции $(g \circ f) \cdot f'$:

$$(G \circ f)'(x) = G'(f(x)) \cdot f'(x) = g(f(x)) \cdot f'(x).$$

Отсюда и из (7.1.32) мы получаем первое тождество в цепочке

$$\int g(f(x)) \cdot f'(x) \,\mathsf{d}\, x \equiv (G \circ f)(x) + C = G(f(x)) + C =$$

$$= \big(G(y) + C\big)\Big|_{y=f(x)} \equiv (7.1.51) \equiv \int g(y) \,\mathsf{d}\, y\Big|_{y=f(x)}$$

3. В тождестве (7.1.49) нужно опять сначала проверить, что девая и правая части имеют одну и ту же область определения. Это следует из того, что функции f и g дифференцируемы: по этой причине выполняются равенства

$$\mathsf{D}(f') = \mathsf{D}(f), \quad \mathsf{D}(g') = \mathsf{D}(g),$$

из которых мы получаем систему равенств

$$\underbrace{\mathsf{D}(f \cdot g')}_{\substack{\parallel \\ \mathsf{D}(f) \cap \mathsf{D}(g')}} = \underbrace{\mathsf{D}(f \cdot g)}_{\substack{\parallel \\ \mathsf{D}(f) \cap \mathsf{D}(g)}} = \underbrace{\mathsf{D}(f' \cdot g)}_{\substack{\parallel \\ \mathsf{D}(f') \cap \mathsf{D}(g)}} \tag{7.1.52}$$

а из них — цепочку

$$\mathsf{D}\left(\int f(x)\cdot g'(x)\,\mathsf{d}\,x\right)=\mathsf{D}(f\cdot g')=\mathsf{D}(f)\cap\mathsf{D}(g')=\mathsf{D}(f)\cap\mathsf{D}(g)=$$
$$=\big(\mathsf{D}(f)\cap\mathsf{D}(g)\big)\cap\big(\mathsf{D}(f')\cap\mathsf{D}(g)\big)=\mathsf{D}\left(f(x)\cdot g(x)-\int g(x)\cdot f'(x)\,\mathsf{d}\,x\right)$$

Заметим далее, что для любого x из произвольного отрезка $[a,b]\subseteq\mathsf{D}(f)\cap\mathsf{D}(g)$ справедливо равенство

$$(f\cdot g)'(x)=f'(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g'(x).$$

А с другой стороны, множество

$$\mathsf{D}(f)\cap\mathsf{D}(g)=\mathsf{D}(\alpha\cdot f+\beta\cdot g)$$

по условиям утверждения 3° интегрально. Значит, в соответствии с определениями производной и первообразной на с.401, функция $f\cdot g$ — первообразная для функции $f'\cdot g+f\cdot g'$:

$$(f\cdot g)'=f'\cdot g+f\cdot g'.$$

Поэтому

$$(f\cdot g)(x)+C\equiv(7.1.32)\equiv\int\big(f'(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g'(x)\big)\,\mathsf{d}\,x\equiv(7.1.46)\equiv$$
$$\equiv\int f'(x)\cdot g(x)\,\mathsf{d}\,x+\int f(x)\cdot g'(x)\,\mathsf{d}\,x\qquad(7.1.53)$$

Комбинируя это со вторым равенством в (7.1.52),

$$\mathsf{D}(f\cdot g')=\mathsf{D}(f\cdot g),$$

и применяя теорему 7.1.2, мы получим

$$\int f(x)\cdot g'(x)\,\mathsf{d}\,x\equiv(f\cdot g)(x)+C-\int f'(x)\cdot g(x)\,\mathsf{d}\,x\equiv(f\cdot g)(x)-\int f'(x)\cdot g(x)\,\mathsf{d}\,x.$$

□

(c) Вычисление неопределенных интегралов

Покажем теперь на примерах, как с помощью перечисленных формул вычисляются неопределенные интегралы.

Применение формулы линейности. Покажем, как применяется формула (7.1.46).

◇ **7.1.20.**

$$\int\left(2+x^3-3\sin x-\frac{5}{1+x^2}\right)\mathsf{d}\,x\equiv$$
$$\equiv\int 2\;\mathsf{d}\,x+\int x^3\;\mathsf{d}\,x-3\int\sin x\;\mathsf{d}\,x-$$
$$-5\int\frac{1}{1+x^2}\;\mathsf{d}\,x=2x+\frac{x^4}{4}+3\cos x-5\operatorname{arctg}x+C$$

◇ **7.1.21.**

$$\int\left(\sqrt{x}+\frac{2}{\cos^2 x}\right)\mathsf{d}\,x\equiv\int x^{\frac12}\;\mathsf{d}\,x+$$
$$+2\int\frac{1}{\cos^2 x}\;\mathsf{d}\,x=\frac{2}{3}x^{\frac32}+2\operatorname{tg}x+C$$

Внесение под знак дифференциала и применение формулы замены переменной. Формулу (7.1.48) удобно применять, предварительно договорившись о следующем обозначении: для всякой функции f пусть символ $\mathsf{d}\,f(x)$ обозначает выражение $f'(x)\,\mathsf{d}\,x$:

$$\mathsf{d}\,f(x)=f'(x)\cdot\mathsf{d}\,x\qquad(7.1.54)$$

В частности, интеграл $\int g(f(x))\cdot f'(x)\,\mathsf{d}\,x$ в левой части (7.1.48) можно тогда переписать в таком виде:

$$\int g(f(x))\cdot f'(x)\,\mathsf{d}\,x=\int g(f(x))\,\mathsf{d}\,f(x).$$

Если используя это обозначение переписать формулу (7.1.48)

$$\int g(f(x))\,\mathsf{d}\,f(x)\equiv\left(\int g(y)\,\mathsf{d}\,y\right)\Big|_{y=f(x)},\qquad(7.1.55)$$

то переход в ней от правой части к левой можно будет интерпретировать как замену переменной.

- Переход от левой части к правой в формуле (7.1.54) называется *вынесением из-под знака дифференциала*, а переход от правой части к левой — *внесением под знак дифференциала.*

Покажем, какую пользу может принести внесение под знак дифференциала.

◇ **7.1.22.**

$$\int e^{\sin x}\cdot\cos x\,\mathsf{d}\,x=\int e^{\sin x}\,\mathsf{d}\sin x=$$
$$=\int e^{y}\,\mathsf{d}\,y\Big|_{y=\sin x}=e^{y}+C\Big|_{y=\sin x}=e^{\sin x}+C$$

◇ **7.1.23.**

$$\int\cos 3x\,\mathsf{d}\,x=\frac{1}{3}\int\cos 3x\cdot 3\,\mathsf{d}\,x=$$
$$=\frac{1}{3}\int\cos 3x\,\mathsf{d}\,3x=\frac{1}{3}\int\cos y\,\mathsf{d}\,y\Big|_{y=3x}=$$
$$=\frac{1}{3}\sin y+C\Big|_{y=3x}=\frac{1}{3}\sin 3x+C$$

◇ **7.1.24.**

$$\int\operatorname{tg}x\,\mathsf{d}\,x=\int\frac{\sin x}{\cos x}\,\mathsf{d}\,x=$$
$$=-\int\frac{-\sin x\,\mathsf{d}\,x}{\cos x}\,\mathsf{d}\,x=-\int\frac{\mathsf{d}\cos x}{\cos x}=$$
$$=-\int\frac{\mathsf{d}\,y}{y}\Big|_{y=\cos x}=-\ln|y|+C\Big|_{y=\cos x}=$$
$$=-\ln|\cos x|+C$$

Теперь покажем, чем может быть полезно вынесение из-под знака дифференциала.

◇ **7.1.25.**

$$\int(2x-5)^{10}\,\mathsf{d}\,x=\left|\begin{array}{c}y=2x-5\\ x=\frac{y+5}{2}\end{array}\right|=$$
$$=\int y^{10}\,\mathsf{d}\,\frac{y+5}{2}\Big|_{y=2x-5}=\frac{1}{2}\int y^{10}\,dy\Big|_{y=2x-5}=$$
$$=\frac{1}{2\cdot 11}y^{11}+C\Big|_{y=2x-5}=\frac{1}{2\cdot 11}(2x-5)^{11}+C=$$
$$=\frac{1}{22}(2x-5)^{11}+C$$

◇ **7.1.26.**

$$\int\frac{dx}{1+\sqrt{x}}=\left|\begin{array}{c}y=1+\sqrt{x}\\ x=(y-1)^2\end{array}\right|=$$
$$=\int\frac{\mathsf{d}\,(y-1)^2}{y}\Big|_{y=1+\sqrt{x}}=$$
$$=\int\frac{2(y-1)dy}{y}\Big|_{y=1+\sqrt{x}}=$$
$$=2\int\left(1-\frac{1}{y}\right)\,\mathsf{d}\,y\Big|_{y=1+\sqrt{x}}=$$
$$=2y-2\ln y+C\Big|_{y=1+\sqrt{x}}=$$
$$=2(1+\sqrt{x})-2\ln(1+\sqrt{x})+C$$

⊳⊳ **7.1.27.** Найдите неопределенные интегралы:

1. $\int\frac{\cos\ln x}{x}\,\mathsf{d}\,x$
2. $\int\frac{\cos x}{\sqrt{\sin^2 x+3}}\,\mathsf{d}\,x$
3. $\int\frac{2x}{1+x^4}\,\mathsf{d}\,x$
4. $\int\frac{e^{\operatorname{tg}x}}{\cos^2 x}\,\mathsf{d}\,x$
5. $\int\frac{2x-1}{\sqrt{1-x+x^2}}\,\mathsf{d}\,x$
6. $\int\frac{3x^2}{x^3+1}\ln(x^3+1)\,\mathsf{d}\,x$
7. $\int\frac{e^{\arcsin x}}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathsf{d}\,x$
8. $\int\frac{e^{x}}{\sqrt{4-e^{2x}}}\,\mathsf{d}\,x$
9. $\int\frac{\sin x}{\sqrt{\cos x}}\,\mathsf{d}\,x$
10. $\int x^3\sqrt{2x^4-3}\,\mathsf{d}\,x$
11. $\int\frac{x^5}{\sqrt{7-x^6}}\,\mathsf{d}\,x$
12. $\int\frac{\cos x}{\sqrt{3+\sin x}}\,\mathsf{d}\,x$

Интегрирование по частям. Прежде, чем перейти к обсуждению формулы (7.1.49), перепишем ее в следующем виде, используя формулу внесения под знак дифференциала (7.1.54):

$$\int f(x)\,\mathsf{d}\,g(x)\equiv f(x)\cdot g(x)-\int g(x)\,\mathsf{d}\,f(x)\quad(7.1.56)$$

◇ **7.1.28.**

$$\int\ln x\,\mathsf{d}\,x=\left(\begin{array}{c}\text{интегрирование}\\ \text{по частям}\end{array}\right)=$$
$$=\ln x\cdot x-\int x\,\mathsf{d}\ln x=$$
$$=\ln x\cdot x-\int x\cdot\frac{1}{x}\,\mathsf{d}\,x=\ln x\cdot x-\int 1\,\mathsf{d}\,x=$$
$$=\ln x\cdot x-x+C$$

◇ **7.1.29.**

$$\int xe^x\,\mathsf{d}\,x=\int x\,\mathsf{d}\,e^x=\left(\begin{array}{c}\text{интегрирование}\\ \text{по частям}\end{array}\right)=$$
$$=xe^x-\int e^x\,\mathsf{d}\,x=xe^x-e^x+C$$

◇ **7.1.30.**

$$\int x\sin x\,\mathsf{d}\,x=-\int x\,\mathsf{d}\cos x=\left(\begin{array}{c}\text{интегрирование}\\ \text{по частям}\end{array}\right)=$$
$$=-\left(x\cos x+\int\cos x\,\mathsf{d}\,x\right)=$$
$$=-(x\cos x+\sin x+C_1)=-x\cos x-\sin x+C$$

◇ **7.1.31.**

$$\int x^2\ln x\,\mathsf{d}\,x=\frac{1}{3}\int\ln x\,\mathsf{d}\,x^3=\left(\begin{array}{c}\text{интегрирование}\\ \text{по частям}\end{array}\right)=$$
$$=\frac{1}{3}\left(\ln x\cdot x^3-\int x^3\,\mathsf{d}\ln x\right)=$$

$$==\frac{1}{3}\left(\ln x\cdot x^3-\int x^3\cdot\frac{1}{x}\,\mathsf{d}\,x\right)=$$
$$=\frac{1}{3}\left(\ln x\cdot x^3-\int x^2\,\mathsf{d}\,x\right)=$$
$$=\frac{1}{3}\left(\ln x\cdot x^3-\frac{1}{3}x^3+C\right)=\frac{1}{3}\ln x\cdot x^3-\frac{1}{9}x^3+C$$

⊳⊳ **7.1.32.** Найдите интегралы:

1) $\int \frac{\ln x}{x^2}\,\mathsf{d}\,x$
2) $\int xe^{2x}\,\mathsf{d}\,x$
3) $\int \operatorname{arctg} x\,\mathsf{d}\,x$
4) $\int x\cos x\,\mathsf{d}\,x$
5) $\int x\operatorname{arctg} x\,\mathsf{d}\,x$
6) $\int \frac{x}{\sin^2 x}\,\mathsf{d}\,x$
7) $\int \sqrt{x}\ln x\,\mathsf{d}\,x$
8) $\int x^n\ln x\,\mathsf{d}\,x$
9) $\int \arcsin x\,\mathsf{d}\,x$

Иногда бывает необходимо применять формулу интегрирования по частям несколько раз.

◇ **7.1.33.**

$$\int x^2e^x\,\mathsf{d}\,x=\int x^2\,\mathsf{d}\,e^x=\left(\begin{smallmatrix}\text{интегрирование}\\ \text{по частям}\end{smallmatrix}\right)=$$
$$=x^2e^x-\int e^x\,\mathsf{d}\,x^2=x^2e^x-2\int e^x\,x\,\mathsf{d}\,x=$$
$$=x^2e^x-2\int x\,\mathsf{d}\,e^x=\left(\begin{smallmatrix}\text{интегрирование}\\ \text{по частям}\end{smallmatrix}\right)=$$
$$=x^2e^x-2\left(xe^x-\int e^x\,\mathsf{d}\,x\right)=$$
$$=x^2e^x-2\left(xe^x-e^x-C_1\right)=$$
$$=x^2e^x-2xe^x-2e^x+C$$

◇ **7.1.34.**

$$\int x^2\cos x\,\mathsf{d}\,x=\int x^2\,\mathsf{d}\sin x=$$
$$=\left(\begin{smallmatrix}\text{интегрирование}\\ \text{по частям}\end{smallmatrix}\right)=$$
$$=x^2\sin x-\int \sin x\,\mathsf{d}\,x^2=$$
$$=x^2\sin x-2\int x\,\sin x\,\mathsf{d}\,x=$$
$$=x^2\sin x+2\int x\,\mathsf{d}\cos x=\left(\begin{smallmatrix}\text{интегрирование}\\ \text{по частям}\end{smallmatrix}\right)=$$
$$=x^2\sin x+2\left(x\cos x-\int \cos x\,\mathsf{d}\,x\right)=$$
$$=x^2\sin x+2\left(x\cos x-\sin x-C_1\right)=$$
$$=x^2\sin x-2x\cos x-2\sin x+C$$

⊳⊳ **7.1.35.** Найдите интегралы:
1) $\int x^2\sin x\,\mathsf{d}\,x$
2) $\int x^2e^{-x}\,\mathsf{d}\,x$
3) $\int x\ln^2 x\,\mathsf{d}\,x$
4) $\int x^3\,\mathsf{d}\cos x$,
5) $\int \cos x\,\mathsf{d}\,x^3$,
6) $\int x\,\mathsf{d}\,e^x$.

Случается, что интегрирование по частям приводит к исходным интегралам. В таких случаях нужно поступать следующим образом.

◇ **7.1.36.**

$$\int e^x\sin x\,\mathsf{d}\,x=\int \sin x\,\mathsf{d}\,e^x=\left(\begin{smallmatrix}\text{интегрирование}\\ \text{по частям}\end{smallmatrix}\right)=$$
$$=e^x\sin x-\int e^x\,\mathsf{d}\sin x=$$
$$=e^x\sin x-\int e^x\cos x\,\mathsf{d}\,x=$$
$$=e^x\sin x-\int \cos x\,\mathsf{d}\,e^x=\left(\begin{smallmatrix}\text{интегрирование}\\ \text{по частям}\end{smallmatrix}\right)=$$
$$=e^x\sin x-\left(e^x\cos x-\int e^x\,\mathsf{d}\cos x\right)=$$
$$=e^x\sin x-e^x\cos x+\int e^x\,\mathsf{d}\cos x=$$
$$=e^x\sin x-e^x\cos x-\int e^x\sin x\,\mathsf{d}\,x$$

Мы вернулись к исходному интегралу. Если теперь обозначить

$$I=\int e^x\sin x\,\mathsf{d}\,x,$$

то мы получим уравнение

$$I=e^x\sin x-e^x\cos x-I, \qquad (7.1.57)$$

из которого легко находится I:

$$2I=e^x\sin x-e^x\cos x$$
$$\Downarrow$$
$$I=\frac{1}{2}\left(e^x\sin x-e^x\cos x\right)$$

Теперь нужно вспомнить, что неопределенный интеграл вычисляется с точностью до константы, поэтому окончательный ответ будет таким:[5]

$$\int e^x\sin x\,\mathsf{d}\,x=\frac{1}{2}\left(e^x\sin x-e^x\cos x\right)+C \qquad (7.1.58)$$

[5] В этом месте мы неаккуратно объясняем наши действия, точное объяснение состоит в следующем. Равенство (7.1.57), которое мы получили, является равенством классов функций. Символ I обозначает в нем класс функций, представимых в виде $F(x)+A$, где F — некоторая фиксированная первообразная для подынтегральной функции. Равенство (7.1.57) поэтому формально означает высказывание

$$\forall A\ \exists B\ \forall x\quad F(x)+A=e^x\sin x-e^x\cos x-(F(x)+B),$$

В нем если выразить $F(x)$ через все остальное, то мы получим высказывание

$$\forall A\ \exists B\ \forall x\quad F(x)=\frac{1}{2}\left(e^x\sin x-e^x\cos x\right)-A-B,$$

Из него следует, что любая первообразная F к функции $e^x\sin x$ имеет вид

$$F(x)=\frac{1}{2}\left(e^x\sin x-e^x\cos x\right)-A-B$$

◇ **7.1.37.**

$$\int \sqrt{1-x^2}\,\mathsf{d}\,x = \begin{pmatrix}\text{интегрирование}\\ \text{по частям}\end{pmatrix} =$$
$$= x\sqrt{1-x^2} - \int x\,\mathsf{d}\,\sqrt{1-x^2} =$$
$$= x\sqrt{1-x^2} + \int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathsf{d}\,x =$$
$$= x\sqrt{1-x^2} - \int \frac{1-x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathsf{d}\,x + \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathsf{d}\,x =$$
$$= x\sqrt{1-x^2} - \int \sqrt{1-x^2}\,\mathsf{d}\,x + \arcsin x + C$$

Мы вернулись к исходному интегралу. Если теперь обозначить

$$I = \int \sqrt{1-x^2}\,\mathsf{d}\,x,$$

то получается алгебраическое уравнение, из которого находится I:

$$I = x\sqrt{1-x^2} - I + \arcsin x + C$$
$$\Downarrow$$
$$2I = x\sqrt{1-x^2} + \arcsin x + C$$
$$\Downarrow$$
$$I = \frac{1}{2}\Big(x\sqrt{1-x^2} + \arcsin x + C\Big)$$

Выбрав новую константу[6], получаем окончательный ответ:

$$\int \sqrt{1-x^2}\,\mathsf{d}\,x = \frac{1}{2}\Big(x\sqrt{1-x^2} + \arcsin x\Big) + A \tag{7.1.59}$$

▷▷ **7.1.38.** Найдите интегралы:
1) $\int \sqrt{1+x^2}\,\mathsf{d}\,x$
2) $\int e^x \cos x\,\mathsf{d}\,x$
3) $\int e^{2x}\sin^2 x\,\mathsf{d}\,x$
4) $\int \cos(\ln x)\,\mathsf{d}\,x$
5) $\int e^{\arcsin x}\,\mathsf{d}\,x$

Рекуррентные формулы

Теперь мы перейдем к специальным приемам вычисления неопределенных интегралов.

Некоторые интегралы удается найти только с помощью так называемых рекуррентных интегральных формул. Что это такое станет ясно из следующего примера.

Теорема 7.1.9. *Для интегралов*

$$I_n = \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n} \tag{7.1.60}$$

первый из которых, по формуле (7.1.42), *равен*

$$I_1 = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C \tag{7.1.61}$$

справедлива следующая рекуррентная формула

$$I_{n+1} = \frac{1}{2na^2}\cdot\frac{x}{(x^2+a^2)^n} + \frac{2n-1}{2na^2}\cdot I_n \qquad (n\in\mathbb{N}) \tag{7.1.62}$$

Доказательство.

$$I_{n+1} = \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^{n+1}} =$$
$$= \frac{1}{a^2}\int \frac{a^2}{(x^2+a^2)^{n+1}}\,\mathsf{d}\,x =$$
$$= \frac{1}{a^2}\int \frac{x^2+a^2-x^2}{(x^2+a^2)^{n+1}}\,\mathsf{d}\,x =$$
$$= \frac{1}{a^2}\int \frac{1}{(x^2+a^2)^n}dx - \frac{1}{a^2}\int \frac{x^2}{(x^2+a^2)^{n+1}}\,\mathsf{d}\,x =$$
$$= \frac{1}{a^2}I_n - \frac{1}{a^2}\int (x^2+a^2)^{-(n+1)}\cdot x\cdot x\,\mathsf{d}\,x =$$
$$= \frac{1}{a^2}I_n - \frac{1}{2a^2}\int (x^2+a^2)^{-(n+1)}\cdot x\,\mathsf{d}\,(x^2+a^2) =$$
$$= \frac{1}{a^2}I_n + \frac{1}{2na^2}\int x\,\mathsf{d}(x^2+a^2)^{-n} = \begin{pmatrix}\text{интегрируем}\\ \text{по частям}\end{pmatrix} =$$
$$= \frac{1}{a^2}I_n + \frac{1}{2na^2}x\cdot(x^2+a^2)^{-n} -$$
$$- \frac{1}{2na^2}\int (x^2+a^2)^{-n}\,\mathsf{d}\,x =$$
$$= \frac{1}{a^2}I_n + \frac{1}{2na^2}\frac{x}{(x^2+a^2)^n} - \frac{1}{2na^2}\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n} =$$
$$= \frac{1}{a^2}I_n + \frac{1}{2na^2}\frac{x}{(x^2+a^2)^n} - \frac{1}{2na^2}I_n =$$
$$= \frac{1}{2na^2}\cdot\frac{x}{(x^2+a^2)^n} + \frac{2n-1}{2na^2}\cdot I_n$$

□

Теперь покажем, как применяется рекуррентная формула (7.1.62).

◇ **7.1.39.** Вычислим, например, интеграл I_2. Для этого в формулу (7.1.62) подставим $n=1$:

$$I_2 = \frac{1}{2a^2}\cdot\frac{x}{(x^2+a^2)} + \frac{1}{2a^2}\cdot I_1 \underset{(7.1.61)}{=}$$

где A, B – какие-то константы. В частности, в качестве первообразной можно выбрать функцию

$$F(x) = \frac{1}{2}\left(e^x\sin x - e^x\cos x\right).$$

И это нам дает ответ (7.1.58).

[6]Здесь, как и в примере 7.1.36, в наших рассуждениях имеется небрежность, см. по этому поводу подстрочное примечание 5.

$$= \frac{x}{2a^2(x^2+a^2)} + \frac{1}{2a^3} \cdot \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C$$

То есть,

$$I_2 = \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^2} = \\ = \frac{x}{2a^2(x^2+a^2)} + \frac{1}{2a^3} \cdot \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C \quad (7.1.63)$$

◇ **7.1.40.** Вычислим, интеграл I_3, для чего в формулу (7.1.62) подставим $n = 2$:

$$I_3 = \frac{1}{4a^2} \cdot \frac{x}{(x^2+a^2)^2} + \frac{3}{4a^2} \cdot I_2 = (7.1.63) = \\ = \frac{x}{4a^2(x^2+a^2)^2} + \\ + \frac{3}{4a^2} \cdot \left(\frac{x}{2a^2(x^2+a^2)} + \frac{1}{2a^3} \cdot \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C \right) = \\ = \frac{x}{4a^2(x^2+a^2)^2} + \frac{3x}{8a^4(x^2+a^2)} + \frac{3}{8a^5} \cdot \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C$$

То есть,

$$I_3 = \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^3} = \\ = \frac{x}{4a^2(x^2+a^2)^2} + \frac{3x}{8a^4(x^2+a^2)} + \frac{3}{8a^5} \cdot \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C \quad (7.1.64)$$

⊳⊳ **7.1.41.** Выведите рекуррентные формулы для следующих интегралов, и вычислите их при $n = 2, 3$:

1) $J_n = \int x^k \ln^n x \, \mathsf{d}\, x \quad (n \in \mathbb{N})$
2) $K_n = \int \sin^n x \, \mathsf{d}\, x \quad (n \in \mathbb{N})$

Интегрирование рациональных функций

- *Рациональной функцией* называется всякая функция $R(x)$, которую можно представить в виде отношения двух многочленов:

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

◇ **7.1.42.** Например, функции

$$\frac{x^2+x+1}{x-2}, \quad \frac{2x+1}{x^3-x+5}, \quad x^5 - 2x + 1$$

являются рациональными, а функции

$$\sin x, \quad \frac{x}{\sqrt{x}-3}, \quad 2^x$$

не являются рациональными.

В этом параграфе мы покажем, как вычисляются интегралы от рациональных функций.

Интегрирование простейших дробей Самыми простыми рациональными функциями являются так называемые *простейшие дроби*, то есть дроби следующих четырех типов.

Типы простейших дробей

— простейшие дроби 1 типа:

$$\frac{A}{x-a}$$

— простейшие дроби 2 типа:

$$\frac{A}{(x-a)^n} \quad (n \in \mathbb{N},\, n > 1)$$

— простейшие дроби 3 типа:

$$\frac{Bx+C}{x^2+px+q} \quad (p^2 - 4q < 0)$$

— простейшие дроби 4 типа:

$$\frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^n} \quad (p^2 - 4q < 0,\, n \in \mathbb{N},\, n > 1)$$

Покажем, как они интегрируются.

◇ **7.1.43** (простейшая дробь 1 типа)**.** Для таких дробей можно вывести общую формулу:

$$\int \frac{A}{x-a} \, \mathsf{d}\, x = \left| \begin{array}{c} y = x - a \\ x = y + a \end{array} \right| = \\ = \int \frac{A}{y} \, \mathsf{d}(y+a) \Big|_{y=x-a} = A \int \frac{dy}{y} \Big|_{y=x-a} = \\ = A \ln|y| + C \Big|_{y=x-a} = A \ln|x-a| + C$$

◇ **7.1.44** (простейшая дробь 2 типа)**.** Здесь также можно найти общую формулу

$$\int \frac{A}{(x-a)^n} \, \mathsf{d}\, x = \left| \begin{array}{c} y = x - a \\ x = y + a \end{array} \right| = \\ = \int \frac{A}{y^n} \, \mathsf{d}(y+a) \Big|_{y=x-a} = A \int \frac{dy}{y^n} \Big|_{y=x-a} = \\ = \frac{A}{(n-1)y^{n-1}} + C \Big|_{y=x-a} = \frac{A}{(n-1)(x-a)^{n-1}} + C$$

◇ **7.1.45** (простейшая дробь 3 типа)**.** Здесь, хотя и можно вывести общую формулу, но запомнить ее уже будет вряд ли возможно. Поэтому мы приведем лишь общий план действий. Чтобы вычислить интеграл

$$\int \frac{Bx+C}{x^2+px+q} \, \mathsf{d}\, x \qquad (p^2 - 4q < 0)$$

нужно сначала *выделить полный квадрат* в знаменателе, то есть переписать знаменатель так, чтобы переменная x встречалась только один раз:

$$x^2 + px + q = x^2 + 2 \cdot \frac{p}{2} \cdot x + \left(\frac{p}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{2}\right)^2 + q = \\ = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + \left(q - \frac{p^2}{4}\right)$$

а затем выражение в скобках заменить на новую переменную:

$$x + \frac{p}{2} = y$$

Оказывается, что при этом мы получим табличные интегралы.

Приведем иллюстрацию. Пусть требуется вычислить интеграл

$$\int \frac{3x-1}{x^2-x+1} \, \mathsf{d}\, x$$

Поскольку дискриминант знаменателя отрицателен,

$$p^2 - 4q = 1 - 4 = -3 < 0$$

выражение под интегралом действительно является простейшей дробью третьего типа. Выделим полный квадрат в знаменателе:

$$x^2 - x + 1 = x^2 - 2\cdot\frac{1}{2}\cdot x + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1 =$$
$$= \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(1 - \frac{1}{4}\right) = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$$

Теперь делаем замену переменной в интеграле:

$$\int \frac{3x-1}{x^2-x+1} \, \mathsf{d}\, x = \int \frac{3x-1}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} \, \mathsf{d}\, x =$$
$$= \left| \begin{array}{l} y = x - \frac{1}{2} \\ x = y + \frac{1}{2} \end{array} \right| = \int \frac{3\left(y + \frac{1}{2}\right) - 1}{y^2 + \frac{3}{4}} \, \mathsf{d}\left(y + \frac{1}{2}\right) =$$
$$= \int \frac{3y + \frac{1}{2}}{y^2 + \frac{3}{4}} \, \mathsf{d}\, y =$$
$$= 3\int \frac{y}{y^2+\frac{3}{4}} \, \mathsf{d}\, y + \frac{1}{2}\int \frac{1}{y^2+\frac{3}{4}} \, \mathsf{d}\, y =$$
$$= \begin{pmatrix} \text{в первом интеграле} \\ \text{вносим } y \text{ под знак} \\ \text{дифференциала} \end{pmatrix} =$$
$$= \frac{3}{2}\int \frac{dy^2}{y^2+\frac{3}{4}} + \frac{1}{2}\int \frac{1}{y^2+\frac{3}{4}} \, \mathsf{d}\, y =$$
$$= \begin{pmatrix} \text{в первом интеграле} \\ \text{делаем замену} \\ y^2 = z - \frac{3}{4} \\ z = y^2 + \frac{3}{4} \end{pmatrix} =$$
$$= \frac{3}{2}\int \frac{d\left(z - \frac{3}{4}\right)}{z} \Big|_{y=z-\frac{3}{4} z=y+\frac{3}{4}} + \frac{1}{2}\int \frac{dy}{y^2+\frac{3}{4}} =$$
$$= \frac{3}{2}\int \frac{dz}{z} \Big|_{z=y^2+\frac{3}{4}} + \frac{1}{2}\int \frac{dy}{y^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} =$$
$$= \begin{pmatrix} \text{применяем} \\ \text{формулы} \\ \text{(7.1.35) и (7.1.42)} \end{pmatrix} =$$
$$= \frac{3}{2}\ln|z| \Big|_{z=y^2+\frac{3}{4}} + \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}\cdot \operatorname{arctg}\frac{2y}{\sqrt{3}} + C =$$
$$= \frac{3}{2}\ln\left|y^2 + \frac{3}{4}\right| + \frac{1}{\sqrt{3}}\cdot \operatorname{arctg}\frac{2y}{\sqrt{3}} + C =$$
$$= \begin{pmatrix} \text{возвращаемся} \\ \text{к исходной} \\ \text{переменной } x \end{pmatrix} =$$
$$= \frac{3}{2}\ln\left|\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}\right| + \frac{1}{\sqrt{3}}\cdot \operatorname{arctg}\frac{2\left(x-\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{3}} + C =$$
$$= \frac{3}{2}\ln\left|x^2 - x + 1\right| + \frac{1}{\sqrt{3}}\cdot \operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C =$$
$$= \begin{pmatrix} \text{всегда} \\ x^2 - x + 1 > 0 \end{pmatrix} =$$
$$= \frac{3}{2}\ln\left(x^2 - x + 1\right) + \frac{1}{\sqrt{3}}\cdot \operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C$$

◇ **7.1.46** (простейшая дробь 4 типа). Для таких дробей вывести общую формулу и вовсе невозможно. План действий же состоит в следующем. Чтобы вычислить интеграл

$$\int \frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^n} \, \mathsf{d}\, x \qquad (n \in \mathbb{N},\ n > 1,\ p^2 - 4q < 0)$$

нужно, как и в предыдущем случае, сначала выделить полный квадрат у квадратного трехчлена в знаменателе,

$$x^2 + px + q = x^2 + 2\cdot\frac{p}{2}\cdot x + \left(\frac{p}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{2}\right)^2 + q =$$
$$= \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + \left(q - \frac{p^2}{4}\right)$$

затем выражение в скобках заменить на новую переменную:

$$x + \frac{p}{2} = y$$

При этом получится несколько интегралов, из которых одни окажутся табличными, а другие можно будет вычислить с помощью рекуррентных формул §7.

Приведем иллюстрацию. Пусть требуется вычислить интеграл

$$\int \frac{x-1}{x^2+2x+3} \, \mathsf{d}\, x$$

Поскольку дискриминант знаменателя отрицателен,

$$p^2 - 4q = 4 - 12 = -8 < 0$$

выражение под интегралом действительно является простейшей дробью четвертого типа. Выделим полный квадрат в знаменателе:

$$x^2 + 2x + 3 = x^2 + 2\cdot 1\cdot x + 1^2 - 1^2 + 3 = (x+1)^2 + 2$$

Теперь делаем замену переменной в интеграле:

$$\int \frac{x-1}{(x^2+2x+3)^2} \, \mathsf{d}\, x = \int \frac{x-1}{\left((x+1)^2+2\right)^2} \, \mathsf{d}\, x =$$
$$= \left| \begin{array}{l} y = x + 1 \\ x = y - 1 \end{array} \right| = \int \frac{y-2}{(y^2+2)^2} \, \mathsf{d}(y-2) =$$
$$= \int \frac{y-2}{(y^2+2)^2} \, \mathsf{d}\, y = \int \frac{y\,dy}{(y^2+2)^2} - 2\int \frac{dy}{(y^2+2)^2} =$$
$$= \frac{1}{2}\int \frac{dy^2}{(y^2+2)^2} - 2\int \frac{dy}{(y^2+2)^2} =$$
$$= \frac{1}{2}\int \frac{d(z-2)}{z^2} \Big|_{z=y^2+2} - 2\int \frac{dy}{(y^2+2)^2} =$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{dz}{z^2}\Big|_{z=y^2+2} - 2\int \frac{dy}{\left(y^2+\left(\sqrt{2}\right)^2\right)^2} =$$

$$= \begin{pmatrix}\text{применяем}\\ \text{формулы}\\ \text{(7.1.34) и (7.1.63)}\end{pmatrix} = -\frac{1}{2z}\Big|_{z=y^2+2} -$$

$$-2\left(\frac{y}{4(y^2+2)} + \frac{1}{2(\sqrt{2})^3}\cdot \operatorname{arctg}\frac{y}{\sqrt{2}} + C\right) =$$

$$= -\frac{1}{2(y^2+2)} -$$

$$-2\left(\frac{y}{4(y^2+2)} + \frac{1}{2(\sqrt{2})^3}\cdot \operatorname{arctg}\frac{y}{\sqrt{2}} + C\right) =$$

$$= -\frac{1}{2(y^2+2)} - \frac{y}{2(y^2+2)} - \frac{1}{2\sqrt{2}}\cdot\operatorname{arctg}\frac{y}{\sqrt{2}} + C =$$

$$= -\frac{y+1}{2(y^2+2)} - \frac{\sqrt{2}}{4}\cdot\operatorname{arctg}\frac{y}{\sqrt{2}} + C =$$

$$= \begin{pmatrix}\text{возвращаемся}\\ \text{к исходной}\\ \text{переменной } x\end{pmatrix} =$$

$$= -\frac{x+2}{2(x^2+2x+3)} - \frac{\sqrt{2}}{4}\cdot\operatorname{arctg}\frac{x+1}{\sqrt{2}} + C$$

▷▷ **7.1.47.** Вычислите интегралы:

1) $\int \frac{dx}{x-7}$;
2) $\int \frac{dx}{3-x}$;
3) $\int \frac{dx}{1+5x}$;
4) $\int \frac{dx}{(3x+2)^2}$;
5) $\int \frac{dx}{x^2+2x+1}$;
6) $\int \frac{dx}{4x^2-4x+1}$;
7) $\int \frac{x\,\mathsf{d}\,x}{x^2+7x+13}$;
8) $\int \frac{4x+8}{3x^2+2x+5}\,\mathsf{d}\,x$;
9) $\int \frac{x+5}{2x^2+2x+3}\,\mathsf{d}\,x$;
10) $\int \frac{5x-7}{8x^2+x+1}\,\mathsf{d}\,x$;
11) $\int \frac{3x+5}{(x^2+2x+2)^2}\,\mathsf{d}\,x$;
12) $\int \frac{3x+2}{(x^2-3x+3)^2}\,\mathsf{d}\,x$.

Интегрирование правильных дробей

- Рациональная функция

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

называется *правильной дробью*, если степень многочлена в числителе меньше степени многочлена в знаменателе:

$$\deg P < \deg Q$$

◇ **7.1.48.** Например, дроби

$$\frac{x+1}{x^2+x+1}, \quad \frac{x^3}{(x^2-1)(x^2+4)}, \quad \frac{x^2-2x+1}{x^3},$$

будут правильными, а дроби

$$\frac{x^2+1}{x^2+x+1}, \quad \frac{x^3}{(x-1)(x+4)}, \quad \frac{x^2-2x+1}{x},$$

– неправильными.

Для интегрирования правильных дробей нужно научиться пользоваться следующей классической теоремой.

Теорема 7.1.10. *Всякая правильная дробь однозначным образом раскладывается в сумму простейших дробей.*

Мы не будем доказывать этот результат, а лишь объясним как он работает. Для этого полезно запомнить следующие

Правила разложения на простейшие дроби:

— если в разложении знаменателя $Q(x)$ на множители имеется множитель $(x-a)^n$

$$Q(x) = ...\cdot(x-a)^n\cdot ...$$

то в разложении правильной дроби $\frac{P(x)}{Q(x)}$ в сумму простейших дробей должны присутствовать слагаемые вида $\frac{A_1}{x-a}, \frac{A_2}{(x-a)^2}, ..., \frac{A_n}{(x-a)^n}$:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = ...+\frac{A_1}{x-a}+\frac{A_2}{(x-a)^2}+...+\frac{A_n}{(x-a)^n}+...$$

— если в разложении знаменателя $Q(x)$ на множители имеется множитель $(x^2+px+q)^n$ $(p^2-4q<0)$

$$Q(x) = ...\cdot(x^2+px+q)^n\cdot ...$$

то в разложении правильной дроби $\frac{P(x)}{Q(x)}$ в сумму простейших дробей должны присутствовать слагаемые вида $\frac{B_1x+C_1}{x^2+px+q}, \frac{B_2x+C_2}{(x^2+px+q)^2}, ..., \frac{B_nx+C_n}{(x^2+px+q)^n}$:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = ...+\frac{B_1x+C_1}{x^2+px+q}+\frac{B_2x+C_2}{(x^2+px+q)^2}+...$$
$$...+\frac{B_nx+C_n}{(x^2+px+q)^n}+...$$

Покажем теперь на примерах, что эти правила означают.

◇ **7.1.49** (случай неповторяющихся множителей первой степени). Рассмотрим интеграл

$$\int \frac{9x^2-2x-8}{x^3-4x}\,\mathsf{d}\,x$$

Разложим знаменатель дроби на множители:

$$x^3-4x = x(x^2-4) = x(x-2)(x+2)$$

В соответствии с первым правилом, это означает, что в разложении нашей (правильной) дроби в сумму простейших дробей должны присутствовать следующие слагаемые:

$$\frac{A}{x}, \frac{B}{x-2}, \frac{C}{x+2}$$

То есть,

$$\frac{9x^2-2x-8}{x^3-4x} = \frac{A}{x}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{x+2}$$

Теперь необходимо найти коэффициенты A, B, C. Для этого приведем правую часть к общему знаменателю

$$\frac{9x^2-2x-8}{x^3-4x} = \\ = \frac{A(x-2)(x+2)+Bx(x+2)+Cx(x-2)}{x(x-2)(x+2)}$$

Эти дроби действительно будут совпадать, если у них совпадают числители:

$$9x^2-2x-8 = A(x-2)(x+2)+Bx(x+2)+Cx(x-2)$$

Далее коэффициенты A, B, C можно искать двумя разными методами.

Первый из них называется *методом неопределенных коэффициентов*. Он состоит в следующем. Сначала приведем подобные слагаемые справа:

$$9x^2-2x-8 = (A+B+C)x^2+(2B-2C)x-4A$$

Слева и справа записаны многочлены от переменной x. Они будут совпадать только если у них совпадают коэффициенты:

$$\begin{aligned} x^2: &\quad 9 = A+B+C \\ x^1: &\quad -2 = 2B-2C \\ x^0: &\quad -8 = -4A \end{aligned}$$

Эта запись означает, что число 9 является коэффициентом перед x^2 слева, и оно совпадает с числом $A+B+C$, которое является коэффициентом перед x^2 справа, и т.д. Мы получаем линейную систему, решая которую находим числа A, B, C:

$$\begin{cases} A+B+C=9 \\ 2B-2C=-2 \\ -4A=-8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A+B+C=9 \\ B-C=-1 \\ A=2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2+B+C=9 \\ B-C=-1 \\ A=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B+C=7 \\ B-C=-1 \\ A=2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} B+C=7 \\ 2B=6 \\ A=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B+C=7 \\ B=3 \\ A=2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3+C=7 \\ B=3 \\ A=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C=4 \\ B=3 \\ A=2 \end{cases}$$

Мы нашли коэффициенты A, B, C методом неопределенных коэффициентов. Теперь покажем, как их можно было найти по-другому, а именно *методом частных значений*.

Еще раз рассмотрим равенство (7.1.49):

$$9x^2-2x-8 = A(x-2)(x+2)+Bx(x+2)+Cx(x-2)$$

Оно должно выполняться при любом x. В частности, при $x=0$, $x=2$ и $x=-2$. Посмотрим, во что превращаются левая и правая части при этих значениях переменной:

$$\begin{aligned} x=0: &\quad -8=-4A &\quad \Rightarrow &\quad A=2 \\ x=2: &\quad 24=8B &\quad \Rightarrow &\quad B=3 \\ x=-2: &\quad 32=8C &\quad \Rightarrow &\quad C=4 \end{aligned}$$

Эта запись означает, что при $x=0$ равенство (7.1.49) превращается в равенство $-8=-4A$, откуда следует что $A=2$, и т.д.

В общем, каким способом ни считай, получается

$$\begin{cases} A=2 \\ B=3 \\ C=4 \end{cases}$$

Это означает, что

$$\frac{9x^2-2x-8}{x^3-4x} = \frac{2}{x}+\frac{3}{x-2}+\frac{4}{x+2}$$

и теперь, наконец, можно вычислить наш интеграл:

$$\int \frac{9x^2-2x-8}{x^3-4x}\,\mathsf{d}\,x = \\ = \int \frac{2}{x}\,\mathsf{d}\,x + \int \frac{3}{x-2}\,\mathsf{d}\,x + \int \frac{4}{x+2}\,\mathsf{d}\,x = \\ = 2\ln|x|+3\ln|x-2|+4\ln|x+2|+D$$

(D – постоянная интегрирования).

◇ **7.1.50** (случай повторяющихся множителей первой степени)**.** Рассмотрим интеграл

$$\int \frac{3x+2}{x(x+1)^3}\,\mathsf{d}\,x$$

Знаменатель дроби уже разложен на множители:

$$x(x+1)^3$$

В соответствии с первым правилом, в разложении нашей (правильной) дроби в сумму простейших дробей должны присутствовать следующие слагаемые:

$$\frac{A}{x}, \quad \frac{B}{x+1}, \quad \frac{C}{(x+1)^2}, \quad \frac{D}{(x+1)^3}$$

Значит,

$$\frac{3x+2}{x(x+1)^3} = \frac{A}{x}+\frac{B}{x+1}+\frac{C}{(x+1)^2}+\frac{D}{(x+1)^3}$$

Теперь необходимо найти коэффициенты A, B, C, D. Для этого приведем правую часть к общему знаменателю

$$\frac{3x+2}{x(x+1)^3} =$$

$$= \frac{A(x+1)^3 + Bx(x+1)^2 + Cx(x+1) + Dx}{x(x+1)^3}$$

Эти дроби действительно будут совпадать, если у них совпадают числители:

$$3x + 2 = A(x+1)^3 + Bx(x+1)^2 + Cx(x+1) + Dx$$

Теперь коэффициенты A, B, C, D лучше всего искать, комбинируя метод частных значений с методом неопределенных коэффициентов.

$$\begin{aligned} x = 0: &\quad 2 = A \quad \Rightarrow \quad A = 2 \\ x = -1: &\quad -1 = -D \quad \Rightarrow \quad D = 1 \\ x^3: &\quad 0 = A + B = 2 + B \quad \Rightarrow \quad B = -2 \\ x^2: &\quad 0 = 3A + 2B + C = 2 + C \quad \Rightarrow \\ &\quad \Rightarrow \quad C = -2 \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\begin{cases} A = 2 \\ B = -2 \\ C = -2 \\ D = 1 \end{cases}$$

Значит,

$$\frac{3x+2}{x(x+1)^3} = \frac{2}{x} - \frac{2}{x+1} - \frac{2}{(x+1)^2} + \frac{1}{(x+1)^3}$$

и теперь можно вычислять наш интеграл:

$$\int \frac{3x+2}{x(x+1)^3}\,\mathsf{d}\,x = \int \frac{2}{x}\,\mathsf{d}\,x - \int \frac{2}{x+1}\,\mathsf{d}\,x - \\ - \int \frac{2}{(x+1)^2}\,\mathsf{d}\,x + \int \frac{1}{(x+1)^3}\,\mathsf{d}\,x = \\ = 2\ln|x| - 2\ln|x+1| + \frac{2}{x+1} - \frac{1}{2(x+1)^2} + E$$

(E – постоянная интегрирования).

◇ **7.1.51** (случай неповторяющихся множителей второй степени)**.** Рассмотрим интеграл

$$\int \frac{x^3 - 2x + 2}{(x-1)^2(x^2+1)}\,\mathsf{d}\,x$$

Знаменатель дроби уже разложен на множители:

$$(x-1)^2(x^2+1)$$

В соответствии с первым и вторым правилами, в разложении нашей (правильной) дроби в сумму простейших дробей должны присутствовать следующие слагаемые:

$$\frac{A}{x-1}, \quad \frac{B}{(x-1)^2}, \quad \frac{Cx+D}{x^2+1}$$

Значит,

$$\frac{x^3 - 2x + 2}{(x-1)^2(x^2+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{Cx+D}{x^2+1}$$

Чтобы найти коэффициенты A, B, C, D, приведем правую часть к общему знаменателю

$$\frac{x^3 - 2x + 2}{(x-1)^2(x^2+1)} = \\ = \frac{A(x-1)(x^2+1) + B(x^2+1) + (Cx+D)(x-1)^2}{(x-1)^2(x^2+1)}$$

Эти дроби совпадают, если у них совпадают числители:

$$x^3 - 2x + 2 = \\ = A(x-1)(x^2+1) + B(x^2+1) + (Cx+D)(x-1)^2$$

Теперь коэффициенты A, B, C, D ищем, комбинируя метод частных значений с методом неопределенных коэффициентов.

$$\begin{aligned} x = 1: &\quad 1 = 2B \\ x^3: &\quad 1 = A + C \\ x^2: &\quad 0 = -A + B - 2C + D \\ x^0: &\quad 2 = -A + B + D \end{aligned}$$

Получается система

$$\begin{cases} 2B = 1 \\ A + C = 1 \\ -A + B - 2C + D = 0 \\ -A + B + D = 2 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \ \dots \ \Leftrightarrow \quad \begin{cases} A = 0 \\ B = \frac{1}{2} \\ C = 1 \\ D = \frac{3}{2} \end{cases}$$

Значит,

$$\frac{x^3 - 2x + 2}{(x-1)^2(x^2+1)} = \frac{1}{2(x-1)^2} + \frac{2x+3}{2(x^2+1)}$$

и теперь можно вычислять наш интеграл:

$$\int \frac{x^3 - 2x + 2}{(x-1)^2(x^2+1)}\,\mathsf{d}\,x = \\ = \int \frac{1}{2(x-1)^2}\,\mathsf{d}\,x + \int \frac{2x+3}{2(x^2+1)}\,\mathsf{d}\,x = \\ = -\frac{1}{2(x-1)} + \int \frac{2x}{2(x^2+1)}\,\mathsf{d}\,x + \int \frac{3}{2(x^2+1)}\,\mathsf{d}\,x = \\ = -\frac{1}{2(x-1)} + \int \frac{d(x^2+1)}{2(x^2+1)} + \frac{3}{2}\int \frac{dx}{x^2+1} = \\ = -\frac{1}{2(x-1)} + \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + \frac{3}{2}\operatorname{arctg} x + E$$

(E – постоянная интегрирования).

◇ **7.1.52** (еще один случай неповторяющихся множителей второй степени)**.** Рассмотрим интеграл

$$\int \frac{2x^2 - 3x + 1}{x^3 + 1}\,\mathsf{d}\,x$$

Разложим знаменатель на множители:

$$x^3 + 1 = (x+1)(x^2 - x + 1)$$

В соответствии с первым и вторым правилами, в разложении нашей (правильной) дроби в сумму простейших дробей должны присутствовать следующие слагаемые:

$$\frac{A}{x+1}, \quad \frac{Bx+C}{x^2-x+1}$$

Значит,

$$\frac{2x^2-3x+1}{x^3+1} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2-x+1}$$

Чтобы найти коэффициенты A, B, C, приведем правую часть к общему знаменателю

$$\frac{2x^2-3x+1}{x^3+1} = \frac{A(x^2-x+1)+(Bx+C)(x+1)}{(x+1)(x^2-x+1)}$$

Эти дроби совпадают, если у них совпадают числители:

$$2x^2-3x+1 = A(x^2-x+1)+(Bx+C)(x+1)$$

Теперь коэффициенты A, B, C ищем, комбинируя метод частных значений с методом неопределенных коэффициентов.

$$\begin{aligned} x=-1: &\quad 6=3A \\ x^2: &\quad 2=A+B \\ x^0: &\quad 1=A+C \end{aligned}$$

Получается система

$$\begin{cases} 3A=6 \\ A+B=2 \\ A+C=1 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \dots \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} A=2 \\ B=0 \\ C=-1 \end{cases}$$

Значит,

$$\frac{2x^2-3x+1}{x^3+1} = \frac{2}{x+1} - \frac{1}{x^2-x+1}$$

и теперь можно вычислять наш интеграл:

$$\int \frac{2x^2-3x+1}{x^3+1}\,\mathsf{d}\,x = \int \frac{2}{x+1}\,\mathsf{d}\,x - \int \frac{1}{x^2-x+1}\,\mathsf{d}\,x = 2\ln|x+1| - \int \frac{1}{\left(x+\frac12\right)^2+\left(\frac{\sqrt3}{2}\right)^2}\,\mathsf{d}\,x =$$

$$= \left| \begin{array}{l} y = x+\frac12 \\ x = y-\frac12 \end{array} \right| = 2\ln|x+1| - \int \frac{1}{y^2+\left(\frac{\sqrt3}{2}\right)^2}\,\mathsf{d}\left(y-\frac12\right)\Big|_{y=x+\frac12} =$$

$$= 2\ln|x+1| - \int \frac{1}{y^2+\left(\frac{\sqrt3}{2}\right)^2}\,\mathsf{d}\,y\Big|_{y=x+\frac12} = \left(\begin{array}{c}\text{применяем}\\ \text{формулу (7.1.42)}\end{array}\right) =$$

$$= 2\ln|x+1| - \frac{2}{\sqrt3}\operatorname{arctg}\frac{2y}{\sqrt3}\Big|_{y=x+\frac12} = 2\ln|x+1| - \frac{2}{\sqrt3}\operatorname{arctg}\frac{2\left(x+\frac12\right)}{\sqrt3} + D = 2\ln|x+1| - \frac{2}{\sqrt3}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt3} + D$$

(D – постоянная интегрирования).

◇ **7.1.53** (случай повторяющихся множителей второй степени)**.** Рассмотрим интеграл

$$\int \frac{x^3+3}{(x+1)(x^2+1)^2}\,\mathsf{d}\,x$$

Знаменатель дроби уже разложен на множители:

$$(x+1)(x^2+1)^2$$

В соответствии с первым и вторым правилами, в разложении нашей (правильной) дроби в сумму простейших дробей должны присутствовать следующие слагаемые:

$$\frac{A}{x+1}, \quad \frac{Bx+C}{x^2+1}, \quad \frac{Dx+E}{(x^2+1)^2}$$

Значит,

$$\frac{x^3+3}{(x+1)(x^2+1)^2} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2+1} + \frac{Dx+E}{(x^2+1)^2}$$

Чтобы найти коэффициенты A, B, C, D, E, приведем правую часть к общему знаменателю

$$\frac{x^3+3}{(x+1)(x^2+1)^2} = \frac{A(x^2+1)^2+(Bx+C)(x+1)(x^2+1)+(Cx+D)(x+1)}{(x+1)(x^2+1)^2}$$

Эти дроби совпадают, если у них совпадают числители:

$$x^3+3 = A(x^2+1)^2 + (Bx+C)(x+1)(x^2+1)+(Cx+D)(x+1)$$

Теперь коэффициенты A, B, C, D, E ищем, комбинируя метод частных значений с методом неопределенных коэффициентов.

$$\begin{aligned} x=-1: &\quad 2=4A \\ x^4: &\quad 0=A+B \\ x^3: &\quad 1=B+C \\ x^2: &\quad 0=2A+B+C+D \\ x^0: &\quad 3=A+C+E \end{aligned}$$

Получается система

$$\begin{cases} 4A=2 \\ A+B=0 \\ B+C=1 \\ 2A+B+C+D=0 \\ A+C+E=3 \end{cases} \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow \begin{cases} A=\frac12 \\ B=-\frac12 \\ C=\frac32 \\ D=-2 \\ E=1 \end{cases}$$

Значит,

$$\frac{x^3+3}{(x+1)(x^2+1)^2}=\frac{\frac12}{x+1}+\frac{-\frac12 x+\frac32}{x^2+1}+\frac{-2x+1}{(x^2+1)^2}$$

и теперь можно вычислять наш интеграл:

$$\int\frac{x^3+3}{(x+1)(x^2+1)^2}\,\mathsf{d}\,x=\int\frac{\frac12}{x+1}\,\mathsf{d}\,x+$$
$$+\int\frac{-\frac12 x+\frac32}{x^2+1}\,\mathsf{d}\,x+\int\frac{-2x+1}{(x^2+1)^2}\,\mathsf{d}\,x=$$
$$=\frac12\int\frac{dx}{x+1}-\frac12\int\frac{x\,\mathsf{d}\,x}{x^2+1}+\frac32\int\frac{dx}{x^2+1}-$$
$$-\int\frac{2x\,\mathsf{d}\,x}{(x^2+1)^2}+\int\frac{dx}{(x^2+1)^2}=$$
$$=\frac12\ln|x+1|-\frac14\int\frac{d(x^2+1)}{x^2+1}+\frac32\operatorname{arctg}x-$$
$$-\int\frac{d(x^2+1)}{(x^2+1)^2}+\int\frac{dx}{(x^2+1)^2}=\left(\begin{array}{c}\text{в последнем}\\ \text{интеграле}\\ \text{применяем}\\ \text{формулу (7.1.63)}\end{array}\right)=$$
$$=\frac12\ln|x+1|-\frac14\ln(x^2+1)+\frac32\operatorname{arctg}x+\frac{1}{x^2+1}+$$
$$+\frac{x}{2(x^2+1)}+\frac12\cdot\operatorname{arctg}x+H=$$
$$=\frac12\ln|x+1|-\frac14\ln(x^2+1)+2\operatorname{arctg}x+$$
$$+\frac{1}{x^2+1}+\frac{x}{2(x^2+1)}+H$$

(H – постоянная интегрирования).

▷▷ **7.1.54.** Вычислите интегралы:

1) $\int\frac{x^2+x-1}{x^3+x^2-6x}\,\mathsf{d}\,x$;

2) $\int\frac{dx}{(x+1)(x-2)}$;

3) $\int\frac{xdx}{3x^2-3x-2}$;

4) $\int\frac{2x+11}{(x^2+6x+13)^2}\,\mathsf{d}\,x$;

5) $\int\frac{x^2\,\mathsf{d}\,x}{(x+2)^2(x+4)^2}$;

6) $\int\frac{dx}{x^3(x-1)}$;

7) $\int\frac{dx}{(x^2+2)(x-1)^2}$;

8) $\int\frac{x^3+3x^2-3x+1}{(x+1)^2(x^2+1)}\,\mathsf{d}\,x$;

9) $\int\frac{3x^3-x^2-4x+13}{x^2(x^2-4x+13)}\,\mathsf{d}\,x$;

10) $\int\frac{4x^2-8x}{(x-1)^2(x^2+1)^2}\,\mathsf{d}\,x$;

11) $\int\frac{x^2}{(x^2+2x+2)^2}\,\mathsf{d}\,x$;

12) $\int\frac{x^3+2x^2+3x+4}{x^4+x^3+2x^2}\,\mathsf{d}\,x$.

Интегрирование неправильных дробей. Напомним (см. предыдущий подпункт (b)) , что рациональная функция

$$R(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$$

называется *неправильной дробью*, если степень многочлена в числителе больше или равна степени многочлена в знаменателе:

$$\deg P\geqslant\deg Q$$

Оказывается, что справедлива

Теорема 7.1.11. *Всякая неправильная дробь представима в виде суммы многочлена и правильной дроби.*

Она позволяет вычислять интегралы от любых рациональных функций (потому что любую рациональную функцию можно представить в виде суммы многочлена и правильной дроби, а их мы уже умеем интегрировать).

◇ **7.1.55.** Рассмотрим интеграл

$$\int\frac{5x^3+9x^2-22x-8}{x^3-4x}\,\mathsf{d}\,x$$

Разделив числитель на знаменатель с остатком, получим

$$\frac{5x^3+9x^2-22x-8}{x^3-4x}=5+\frac{9x^2-2x-8}{x^3-4x}$$

Поэтому

$$\int\frac{5x^3+9x^2-22x-8}{x^3-4x}\,\mathsf{d}\,x=$$
$$=\int 5\,\mathsf{d}\,x+\int\frac{9x^2-2x-8}{x^3-4x}\,\mathsf{d}\,x=$$
$$=\left(\begin{array}{c}\text{второй интеграл}\\ \text{мы уже нашли}\\ \text{в примере 7.1.49}\end{array}\right)=$$
$$=5x+(2\ln|x|+3\ln|x-2|+4\ln|x+2|+D)$$

◇ **7.1.56.** Рассмотрим интеграл

$$\int\frac{2x^4+5x^2-2}{2x^3-x-1}\,\mathsf{d}\,x$$

Разделив числитель на знаменатель с остатком, получим

$$\frac{2x^4+5x^2-2}{2x^3-x-1}=x+\frac{6x^2+x-2}{2x^3-x-1}$$

Теперь надо подумать о том, как вычислить интеграл от второго слагаемого (то есть от полученной правильной дроби). Для этого разложим знаменатель на множители:

$$2x^3-x-1=(x-1)(2x^2+2x+1)$$

В соответствии с первым и вторым правилами, в разложении нашей (правильной) дроби в сумму простейших дробей должны присутствовать следующие слагаемые:

$$\frac{A}{x-1},\quad\frac{Bx+C}{2x^2+2x+1}$$

Значит,

$$\frac{6x^2+x-2}{2x^3-x-1}=\frac{A}{x-1}+\frac{Bx+C}{2x^2+2x+1}$$

Чтобы найти коэффициенты A,B,C, приведем правую часть к общему знаменателю

$$\frac{6x^2+x-2}{2x^3-x-1}=\frac{A(2x^2+2x+1)+(Bx+C)(x-1)}{(x-1)(2x^2+2x+1)}$$

Эти дроби совпадают, если у них совпадают числители:

$$6x^2 + x - 2 = A(2x^2 + 2x + 1) + (Bx + C)(x - 1)$$

Теперь коэффициенты A, B, C ищем, комбинируя метод частных значений с методом неопределенных коэффициентов.

$$\begin{aligned} x = 1 : &\quad 5 = 5A \\ x^2 : &\quad 6 = 2A + B \\ x^0 : &\quad -2 = A - C \end{aligned}$$

Получается система

$$\begin{cases} A = 1 \\ 2A + B = 6 \\ A - C = -2 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \dots \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} A = 1 \\ B = 4 \\ C = 3 \end{cases}$$

Значит,

$$\frac{6x^2 + x - 2}{2x^3 - x - 1} = \frac{1}{x - 1} + \frac{4x + 3}{2x^2 + 2x + 1}$$

Отсюда

$$\frac{2x^4 + 5x^2 - 2}{2x^3 - x - 1} = \\ = x + \frac{6x^2 + x - 2}{2x^3 - x - 1} = x + \frac{1}{x - 1} + \frac{4x + 3}{2x^2 + 2x + 1}$$

и теперь можно вычислять исходный интеграл:

$$\int \frac{2x^4 + 5x^2 - 2}{2x^3 - x - 1} \, \mathsf{d}\, x = \int x \, \mathsf{d}\, x + \\ + \int \frac{1}{x - 1} \, \mathsf{d}\, x + \int \frac{4x + 3}{2x^2 + 2x + 1} \, \mathsf{d}\, x = \\ = \frac{x^2}{2} + \ln|x - 1| + \int \frac{2x + \frac{3}{2}}{x^2 + x + \frac{1}{2}} \, \mathsf{d}\, x = \\ = \frac{x^2}{2} + \ln|x - 1| + \\ + \int \frac{2x + \frac{3}{2}}{x^2 + 2 \cdot \frac{1}{2}x + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}} \, \mathsf{d}\, x = \\ = \frac{x^2}{2} + \ln|x - 1| + \int \frac{2x + \frac{3}{2}}{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}} \, \mathsf{d}\, x = \\ = \left| \begin{array}{c} y = x + \frac{1}{2} \\ x = y - \frac{1}{2} \end{array} \right| = \frac{x^2}{2} + \ln|x - 1| + \\ + \int \frac{2\left(y - \frac{1}{2}\right) + \frac{3}{2}}{y^2 + \frac{1}{4}} \, \mathsf{d}\left(y - \frac{1}{2}\right) \Big|_{y = x + \frac{1}{2}} = \frac{x^2}{2} + \\ + \ln|x - 1| + \int \frac{2y + \frac{1}{2}}{y^2 + \frac{1}{4}} \, \mathsf{d}\, y \Big|_{y = x + \frac{1}{2}} = \\ = \frac{x^2}{2} + \ln|x - 1| + \int \frac{2y \, \mathsf{d}\, y}{y^2 + \frac{1}{4}} \Big|_{y = x + \frac{1}{2}} + \\ + \frac{1}{2} \int \frac{dy}{y^2 + \frac{1}{4}} \Big|_{y = x + \frac{1}{2}} = \frac{x^2}{2} + \ln|x - 1| + \\ + \int \frac{d\left(y^2 + \frac{1}{4}\right)}{y^2 + \frac{1}{4}} \Big|_{y = x + \frac{1}{2}} + \frac{1}{2} \int \frac{dy}{y^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} \Big|_{y = x + \frac{1}{2}} = \\ = \left(\begin{array}{c} \text{применяем} \\ \text{формулы} \\ \text{(7.1.35) и (7.1.42)} \end{array} \right) = \frac{x^2}{2} + \ln|x - 1| + \\ + \ln\left(y^2 + \frac{1}{4}\right) \Big|_{y = x + \frac{1}{2}} + \operatorname{arctg}(2y) \Big|_{y = x + \frac{1}{2}} + D = \\ = \frac{x^2}{2} + \ln|x - 1| + \ln\left(\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}\right) + \\ + \operatorname{arctg} 2\left(x + \frac{1}{2}\right) + D = \\ = \frac{x^2}{2} + \ln|x - 1| + \ln\left(x^2 + x + \frac{1}{2}\right) + \operatorname{arctg}(2x + 1) + D$$

(D – постоянная интегрирования).

⊳⊳ **7.1.57.** Вычислите интегралы:

1) $\int \frac{x^5 + x^4 - 8}{x^3 - 4x} \, \mathsf{d}\, x$;
2) $\int \frac{3x^3 + 5x^2 - 25x - 1}{(x+2)(x-1)^2} \, \mathsf{d}\, x$;
3) $\int \frac{x^5 - 2x^2 + 3}{x^2 - 4x + 4} \, \mathsf{d}\, x$;
4) $\int \frac{x^3 + x^2 + x + 3}{(x+3)(x^2 + x + 1)} \, \mathsf{d}\, x$;
5) $\int \frac{x^9}{(x^4 - 1)^2} \, \mathsf{d}\, x$.

Интегрирование рациональных тригонометрических функций

Рациональной функцией от двух переменных u и v называется любая функция $R(u, v)$, составленная из u и v с помощью алгебраических операций $+, -, \cdot, /$. Например, функция

$$R(u, v) = \frac{3u^2 v - 2uv^2 + 7v - 1}{v^2 + \sqrt{5}}$$

является рациональной.

Рациональной тригонометрической функцией называется любая рациональная функция от переменных $\sin x$ и $\cos x$, например,

$$f(x) = R(\sin x, \cos x) = \\ = \frac{3\sin^2 x \cos x - 2\sin x \cos^2 x + 7\cos x - 1}{\cos^2 x + \sqrt{5}}$$

В этом пункте мы рассмотрим способы интегрирования рациональных тригонометрических функций.

Универсальная тригонометрическая подстановка Существует один универсальный способ превратить интеграл от рациональной тригонометрической функции в интеграл от обычной рациональной функции (который мы уже умеем вычислять). Он называется *универсальной тригонометрической подстановкой* и состоит в следующем. Если необходимо вычислить интеграл

$$\int R(\sin x, \cos x) \, \mathsf{d}\, x$$

то сделать это можно заменой

$$x = 2\operatorname{arctg} t \qquad \left(t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)$$

тогда получится

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2}$$

Рассмотрим примеры.

◇ **7.1.58.**

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \left| \begin{matrix} t = \operatorname{tg}\frac{x}{2} \\ \sin x = \frac{2t}{1+t^2} \\ dx = \frac{2dt}{1+t^2} \end{matrix} \right| = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}} =$$

$$= \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \left(\begin{matrix}\text{возвращаемся}\\ \text{к переменной } x\end{matrix}\right) =$$

$$= \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + C$$

◇ **7.1.59.**

$$\int \frac{dx}{\cos x} = \left| \begin{matrix} t = \operatorname{tg}\frac{x}{2} \\ \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \\ dx = \frac{2dt}{1+t^2} \end{matrix} \right| = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{\frac{1-t^2}{1+t^2}} =$$

$$= \int \frac{2dt}{1-t^2} = \ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right| + C$$

◇ **7.1.60.**

$$\int \frac{\mathsf{d}\, x}{8 - 4\sin x + 7\cos x} = \left| \begin{matrix} t = \operatorname{tg}\frac{x}{2} \\ \sin x = \frac{2t}{1+t^2} \\ \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \\ \mathsf{d}\, x = \frac{2\,\mathsf{d}\, t}{1+t^2} \end{matrix} \right| =$$

$$= \int \frac{\frac{2\,\mathsf{d}\, t}{1+t^2}}{8 - 4\frac{2t}{1+t^2} + 7\frac{1-t^2}{1+t^2}} =$$

$$= \int \frac{2\,\mathsf{d}\, t}{8(1+t^2) - 8t + 7(1-t^2)} =$$

$$= \int \frac{2\,\mathsf{d}\, t}{t^2 - 8t + 15} = \int \frac{2}{(t-3)(t-5)}\,\mathsf{d}\, t =$$

$$= \left(\begin{matrix}\text{здесь мы "в уме"}\\ \text{раскладываем дробь}\\ \text{под интегралом}\\ \text{на простейшие}\end{matrix}\right) =$$

$$= \int \left(\frac{1}{t-5} - \frac{1}{t-3}\right)\mathsf{d}\, t =$$

$$= \ln|t-5| - \ln|t-3| + C = \left(\begin{matrix}\text{возвращаемся}\\ \text{к переменной } x\end{matrix}\right) =$$

$$= \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2} - 5\right| - \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2} - 3\right| + C$$

⊳⊳ **7.1.61.** Найдите интегралы

1) $\int \frac{dx}{5+4\sin x}$
2) $\int \frac{dx}{3\sin x - 4\cos x}$
3) $\int \frac{dx}{5+\sin x+3\cos x}$
4) $\int \frac{\sin x\cdot\cos x}{(3+\cos x)^2}\,\mathsf{d}\, x$
5) $\int \frac{\sin x}{1+\operatorname{tg} x}\,\mathsf{d}\, x$

Частные тригонометрические подстановки. Часто бывает, что универсальная тригонометрическая подстановка приводит к сложным выкладкам, которых можно избежать, если пользоваться другими подстановками. Такие подстановки называются *частными*, и их имеется три:

— если функция $R(\sin x, \cos x)$ нечетная относительно синуса, то есть

$$R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$$

то применима подстановка

$$\begin{cases} \cos x = t \\ \sin x = \sqrt{1-t^2}, \\ x = \arccos t, \\ dx = -\frac{\mathsf{d}\, t}{\sqrt{1-t^2}} \end{cases} \qquad (7.1.65)$$

— если функция $R(\sin x, \cos x)$ нечетная относительно косинуса, то есть

$$R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$$

то применима подстановка

$$\begin{cases} \sin x = t \\ \cos x = \sqrt{1-t^2}, \\ x = \arcsin t, \\ dx = \frac{\mathsf{d}\, t}{\sqrt{1-t^2}} \end{cases} \qquad (7.1.66)$$

— если функция $R(\sin x, \cos x)$ четная относительно синуса и косинуса, то есть

$$R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$$

то применима подстановка

$$\begin{cases} \operatorname{tg} x = t, \\ \sin x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}, \\ \cos x = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}, \\ x = \operatorname{arctg} t, \\ dx = \frac{dt}{1+t^2} \end{cases} \qquad (7.1.67)$$

◇ **7.1.62.**

$$\int \frac{\sin^3 x}{\cos x - 3}\,\mathsf{d}\, x = \left(\begin{matrix}\text{подынтегральная}\\ \text{функция нечетна}\\ \text{относительно } \sin x\\ \text{поэтому используем}\\ \text{подстановку } \cos x = t\end{matrix}\right) =$$

$$= -\int \frac{\left(\sqrt{1-t^2}\right)^3}{t-3}\,\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \int \frac{t^2-1}{t-3}\,\mathsf{d}\, t =$$

$$= \left(\begin{matrix}\text{делим многочлены}\\ \text{с остатком}\end{matrix}\right) = \int \left(t + 3 + \frac{8}{t-3}\right)\mathsf{d}\, t =$$

$$= \frac{t^2}{2} + 3t + 8\ln|t-3| + C = \left(\begin{matrix}\text{возвращаемся}\\ \text{к переменной } x\end{matrix}\right) =$$

$$= \frac{\cos^2 x}{2} + 3\cos x + 8\ln|\cos x - 3| + C$$

◇ **7.1.63.**

$$\int \frac{\cos^3 x}{\sin^4 x}\,\mathsf{d}\,x = \begin{pmatrix}\text{подынтегральная}\\ \text{функция нечетна}\\ \text{относительно } \cos x\\ \text{поэтому используем}\\ \text{подстановку } \sin x = t\end{pmatrix} =$$

$$= \int \frac{\left(\sqrt{1-t^2}\right)^3}{t^4}\,\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \int \frac{1-t^2}{t^4}\,\mathsf{d}\,t =$$

$$= \int \left(\frac{1}{t^4} - \frac{1}{t^2}\right)\mathsf{d}\,t = -\frac{1}{3t^3} + \frac{1}{t} + C =$$

$$= \begin{pmatrix}\text{возвращаемся}\\ \text{к переменной } x\end{pmatrix} = -\frac{1}{3\sin^3 x} + \frac{1}{\sin x} + C$$

◇ **7.1.64.**

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x - 4\sin x\cos x + 5\cos^2 x} =$$

$$= \begin{pmatrix}\text{подынтегральная}\\ \text{функция четна}\\ \text{относительно } \sin x \text{ и } \cos x\\ \text{поэтому используем}\\ \text{подстановку } \operatorname{tg} x = t\end{pmatrix} =$$

$$= \int \frac{\frac{dt}{1+t^2}}{\left(\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\right)^2 - 4\cdot\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+t^2}} + 5\left(\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\right)^2} =$$

$$= \int \frac{dt}{t^2 - 4t + 5} = \int \frac{dt}{(t-2)^2 + 1} =$$

$$= \left|\begin{array}{c} t-2 = y\\ t = y+2\end{array}\right| = \int \frac{dy}{y^2+1}\Big|_{y=t-2} =$$

$$= \operatorname{arctg} y + C\,\Big|_{y=t-2} = \operatorname{arctg}(t-2) + C =$$

$$= \begin{pmatrix}\text{возвращаемся}\\ \text{к переменной } x\end{pmatrix} = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x - 2) + C$$

⊳⊳ **7.1.65.** Найдите интегралы

1) $\int \cos^4 x \sin^3 x\ \mathsf{d}\,x$
2) $\int \cos^5 x \sin^2 x\ \mathsf{d}\,x$
3) $\int \frac{\sin^3 x}{1+\cos^2 x}\ \mathsf{d}\,x$
4) $\int \frac{\cos^3 x}{4\sin^2 x - 1}\ \mathsf{d}\,x$
5) $\int \frac{dx}{3\cos^2 x + 4\sin^2 x}$
6) $\int \frac{dx}{19\sin^2 x - 8\sin x\cos x - 3}$

Интегрирование тригонометрических произведений

Для интегрирования некоторых специальных тригонометрических функций полезно знать "дополнительные хитрости", которые мы обсудим в этом параграфе.

Интегрирование функций $\sin ax\cdot\cos bx, \sin ax\cdot \sin bx, \cos ax\cdot\cos bx$ Для интегрирования таких произведений применяются тригонометрические тождества (4.1.83)-(4.1.85). Рассмотрим примеры.

◇ **7.1.66.**

$$\int \sin 4x \sin 6x\ \mathsf{d}\,x = \text{(4.1.83)} =$$

$$= \int \frac{1}{2}\left(\cos(4x-6x) - \cos(4x+6x)\right)\mathsf{d}\,x =$$

$$= \frac{1}{2}\int \cos 2x\ \mathsf{d}\,x - \frac{1}{2}\int \cos 10x\ \mathsf{d}\,x =$$

$$= \frac{1}{4}\int \cos 2x\ \mathsf{d}(2x) - \frac{1}{20}\int \cos 10x\ \mathsf{d}(10x) =$$

$$= \frac{1}{4}\sin 2x - \frac{1}{20}\sin 10x + C$$

⊳⊳ **7.1.67.** Найдите интегралы

1) $\int \cos\frac{x}{3}\sin\frac{x}{4}\ \mathsf{d}\,x$
2) $\int \cos 4x\cos 7x\ \mathsf{d}\,x$
3) $\int \sin\frac{x}{3}\sin\frac{x}{2}\ \mathsf{d}\,x$
4) $\int \sin 3x\cos 10x\ \mathsf{d}\,x$
5) $\int \sin 3x\sin^2 x\ \mathsf{d}\,x$

Интегрирование функций $\sin^\alpha x\cdot\cos^\beta x$ Для интегрирования таких произведений нужно запомнить следующие правила:

— если α – нечетное положительное целое число (то есть $\alpha \in 2\mathbb{N}-1$), то делается подстановка

$$\begin{cases}\cos x = t,\\ \sin x = \sqrt{1-t^2},\\ x = \arccos t,\\ \mathsf{d}\,x = -\frac{\mathsf{d}\,t}{\sqrt{1-t^2}}\end{cases} \tag{7.1.68}$$

— если β – нечетное положительное целое число (то есть $\beta \in 2\mathbb{N}-1$), то делается подстановка

$$\begin{cases}\sin x = t,\\ \cos x = \sqrt{1-t^2},\\ x = \arcsin t,\\ \mathsf{d}\,x = \frac{\mathsf{d}\,t}{\sqrt{1-t^2}}\end{cases} \tag{7.1.69}$$

— если $\alpha+\beta$ – четное отрицательное целое число ($\alpha+\beta \in -2\mathbb{N}$), то делается подстановка

$$\begin{cases}\operatorname{tg} x = t,\\ \sin x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}},\\ \cos x = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}},\\ x = \operatorname{arctg} t,\\ dx = \frac{dt}{1+t^2}\end{cases} \tag{7.1.70}$$

— если α и β – четные неотрицательные целые числа ($\alpha,\beta \in 2(\mathbb{N}-1)$), то применяются формулы понижения степени:

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}, \qquad \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2} \tag{7.1.71}$$

◇ **7.1.68.**

$$\int \sqrt[3]{\sin^2 x}\cos^3 x\ \mathsf{d}\,x = \left|\begin{array}{c}\text{поскольку}\\ \beta = 3 \in 2\mathbb{N}-1,\\ \text{подстановка}\\ \sin x = t\end{array}\right| =$$

$$= \int \sqrt[3]{t^2}\left(\sqrt{1-t^2}\right)^3\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} =$$

$$= \int t^{\frac{2}{3}}(1-t^2)\ \mathsf{d}\,t = \int\left(t^{\frac{2}{3}} - t^{\frac{8}{3}}\right)\mathsf{d}\,t =$$

$$= \frac{3}{5}t^{\frac{5}{3}} - \frac{3}{11}t^{\frac{11}{3}} + C = \left(\begin{array}{c}\text{возвращаемся}\\ \text{к переменной } x\end{array}\right) =$$
$$= \frac{3}{5}(\sin x)^{\frac{5}{3}} - \frac{3}{11}(\sin x)^{\frac{11}{3}} + C =$$
$$= \frac{3}{5}\sqrt[3]{\sin^5 x} - \frac{3}{11}\sqrt[3]{\sin^{11} x} + C$$

◇ **7.1.69.**

$$\int \frac{dx}{\sqrt{\cos^7 x \sin x}} = \left|\begin{array}{c}\text{поскольку}\\ \alpha+\beta = -\frac{7}{2} - \frac{1}{2} =\\ = -4 \in -2\mathbb{N},\\ \text{подстановка}\\ \operatorname{tg} x = t\end{array}\right| =$$
$$= \int \frac{\frac{dt}{1+t^2}}{\sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\right)^7 \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}}} = \int \frac{\frac{dt}{1+t^2}}{\left(\frac{1}{1+t^2}\right)^2 \sqrt{t}} =$$
$$= \int \frac{1+t^2}{\sqrt{t}}\,\mathsf{d}\,t = \int \left(t^{-\frac{1}{2}} + t^{\frac{3}{2}}\right)\mathsf{d}\,t =$$
$$= 2t^{\frac{1}{2}} + \frac{2}{5}t^{\frac{5}{2}} + C = \left(\begin{array}{c}\text{возвращаемся}\\ \text{к переменной } x\end{array}\right) =$$
$$= 2\sqrt{\operatorname{tg} x} + \frac{2}{5}\sqrt{\operatorname{tg}^5 x} + C$$

◇ **7.1.70.**

$$\int \sin^2 x \cos^4 x\,\mathsf{d}\,x = \left|\begin{array}{c}\text{поскольку}\\ \alpha = 2 \in 2(\mathbb{N}-1),\\ \beta = 4 \in 2(\mathbb{N}-1),\\ \text{применяем формулы}\\ (7.1.71)\end{array}\right| =$$
$$= \int \frac{1-\cos 2x}{2} \cdot \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2 \mathsf{d}\,x =$$
$$= \int \frac{1-\cos 2x}{2} \cdot \frac{1+2\cos 2x + \cos^2 2x}{4}\,\mathsf{d}\,x =$$
$$= \frac{1}{8}\int (1 + \cos 2x - \cos^2 2x - \cos^3 2x)\,\mathsf{d}\,x =$$
$$= \frac{1}{8}\int \left(1 + \cos 2x - \frac{1+\cos 4x}{2} - \frac{1+\cos 4x}{2}\cos 2x\right)\mathsf{d}\,x =$$
$$= \frac{1}{16}\int (1 + \cos 2x - \cos 4x - \cos 4x \cos 2x)\,\mathsf{d}\,x =$$
$$= \left(\begin{array}{c}\text{применяем}\\ \text{формулу (4.1.84)}\end{array}\right) =$$
$$= \frac{1}{16}\int \left(1 + \cos 2x - \cos 4x - \frac{1}{2}(\cos 2x + \cos 6x)\right)\mathsf{d}\,x =$$
$$= \frac{1}{32}\int (2 + \cos 2x - 2\cos 4x - \cos 6x)\,\mathsf{d}\,x =$$
$$= \frac{1}{32}\left(2x + \frac{1}{2}\sin 2x - \frac{1}{2}\sin 4x - \frac{1}{6}\sin 6x + C\right) =$$
$$= \frac{x}{16} + \frac{\sin 2x}{64} - \frac{\sin 4x}{64} - \frac{\sin 6x}{192} + C$$

▷▷ **7.1.71.** Найдите интегралы

1) $\int \sin^5 x \cos^4 x\,\mathsf{d}\,x$
2) $\int \sin^{\frac{3}{5}} x \cos^5 x\,\mathsf{d}\,x$
3) $\int \frac{\sin^3 x}{\sqrt[3]{\cos^4 x}}\,\mathsf{d}\,x$
4) $\int \frac{dx}{\sin^3 x \cos x}$
5) $\int \frac{dx}{\sqrt{\sin x \cos^3 x}}$
6) $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{\sin^3 x \cos^5 x}}$
7) $\int \cos^2 x\,\mathsf{d}\,x$
8) $\int \cos^4 x\,\mathsf{d}\,x$
9) $\int \sin^4 x\,\mathsf{d}\,x$
10) $\int \sin^4 x \cos^2 x\,\mathsf{d}\,x$
11) $\int \cos^6 x\,\mathsf{d}\,x$

Интегрирование некоторых алгебраических иррациональностей.

Интегрирование функций $R(x, \sqrt[n]{x})$, $n \in \mathbb{N}$**.** Если $R(x,y)$ – рациональная функция от переменных x и y, то функция $R(x, \sqrt[n]{x})$ интегрируется заменой

$$t = \sqrt[n]{x} \qquad (x = t^n,\ \mathsf{d}\,x = nt^{n-1}dt)$$

◇ **7.1.72.**

$$\int \frac{\sqrt{x}}{x - \sqrt[3]{x^2}}\,\mathsf{d}\,x = \int \frac{\left(\sqrt[6]{x}\right)^3}{x - \left(\sqrt[6]{x}\right)^4}\,\mathsf{d}\,x =$$
$$= \left|\begin{array}{c} t = \sqrt[6]{x}\\ x = t^6\\ dx = 6t^5 dt\end{array}\right| = \int \frac{t^3}{t^6 - t^4}\,6t^5 dt =$$
$$= 6\int \frac{t^4}{t^2-1}\,\mathsf{d}\,t = \left(\begin{array}{c}\text{делим}\\ \text{многочлены}\\ \text{с остатком}\end{array}\right) =$$
$$= 6\int \left(t^2 + 1 + \frac{1}{t^2-1}\right)\mathsf{d}\,t =$$
$$= 6\int \left(t^2 + 1 + \frac{1}{(t-1)(t+1)}\right)\mathsf{d}\,t =$$
$$= \left(\begin{array}{c}\text{раскладываем}\\ \text{на простейшие}\\ \text{дроби}\end{array}\right) =$$
$$= 6\int \left(t^2 + 1 + \frac{1}{2}\frac{1}{t-1} - \frac{1}{2}\frac{1}{t+1}\right)\mathsf{d}\,t =$$
$$= 2t^3 + 6t + 3\ln|t-1| - 3\ln|t+1| + C =$$
$$= \left(\begin{array}{c}\text{возвращаемся}\\ \text{к переменной } x\end{array}\right) = 2\left(\sqrt[6]{x}\right)^3 + 6\sqrt[6]{x} +$$
$$+ 3\ln\left|\sqrt[6]{x} - 1\right| - 3\ln\left|\sqrt[6]{x} + 1\right| + C$$

▷▷ **7.1.73.** Найдите интегралы

1) $\int \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\,\mathsf{d}\,x$
2) $\int \frac{dx}{(1+\sqrt[3]{x})\cdot\sqrt{x}}$
3) $\int \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt[4]{x}}\,\mathsf{d}\,x$

Интегрирование функций $R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)$, $n \in \mathbb{N}$**.** Интегралы такого вида вычисляются заменой

$$t = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$$

◇ **7.1.74.**

$$\int \frac{1}{(1-x)^2} \cdot \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\,\mathsf{d}\,x = \left|\begin{array}{c} t = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\\ x = \frac{1-t^2}{1+t^2}\\ dx = -\frac{4t\,dt}{(1+t^2)^2}\end{array}\right| =$$
$$= -\int \frac{1}{\left(1 - \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)^2} \cdot t\,\frac{4t dt}{(1+t^2)^2} =$$
$$= -\int \frac{(1+t^2)^2}{4t^4}\,\frac{4t^2 dt}{(1+t^2)^2} = -\int \frac{dt}{t^2} = \frac{1}{t} + C =$$
$$= \left(\begin{array}{c}\text{возвращаемся}\\ \text{к переменной } x\end{array}\right) = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} + C$$

▷▷ **7.1.75.** Найдите интегралы

1) $\int \frac{\sqrt{1+x}}{x}\,\mathsf{d}\,x$

2) $\int \frac{\sqrt[3]{3x+4}}{1+\sqrt[3]{3x+4}}\,\mathsf{d}\,x$
3) $\int \frac{1}{(1-x)(1+x)^2}\cdot\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\,\mathsf{d}\,x$
4) $\int \sqrt[3]{\frac{1-x}{1+x}}\cdot\frac{dx}{(1+x)^2}$

Интегрирование функций $\frac{1}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$ После выделения полного квадрата под знаком радикала интегралы этого вида сводятся к следующим:

— если $a>0$, то получаем табличный интеграл
$$\int\frac{1}{\sqrt{x^2+A}}\,\mathsf{d}\,x$$

— если $a<0$, то получаем табличный интеграл
$$\int\frac{1}{\sqrt{B^2-x^2}}\,\mathsf{d}\,x$$

◇ **7.1.76.**

$$\int\frac{dx}{2x^2-x+3}=\frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-\frac12x+\frac32}}=$$
$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{dx}{\sqrt{\left(x-\frac14\right)^2+\frac{23}{16}}}=\begin{vmatrix}t=x-\frac14\\ x=t+\frac14\\ \mathsf{d}\,x=\mathsf{d}\,t\end{vmatrix}=$$
$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{dt}{\sqrt{t^2+\frac{23}{16}}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|t+\sqrt{t^2+\frac{23}{16}}\right|+C=$$
$$=\left(\begin{smallmatrix}\text{возвращаемся}\\ \text{к переменной } x\end{smallmatrix}\right)=$$
$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|x-\frac14+\sqrt{\left(x-\frac14\right)^2+\frac{23}{16}}\right|+C=$$
$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|x-\frac14+\sqrt{x^2-\frac12x+\frac32}\right|+C$$

◇ **7.1.77.**

$$\int\frac{dx}{\sqrt{5-2x-3x^2}}=\frac{1}{\sqrt{3}}\int\frac{dx}{\sqrt{\frac53-\frac23x-x^2}}=$$
$$=\frac{1}{\sqrt{3}}\int\frac{dx}{\sqrt{\frac{16}{9}-\left(\frac13+x\right)^2}}=\left|\begin{matrix}t=\frac13+x\\ x=t-\frac13\\ dx=dt\end{matrix}\right|=$$
$$=\frac{1}{\sqrt{3}}\int\frac{dt}{\sqrt{\left(\frac43\right)^2-t^2}}=\frac{1}{\sqrt{3}}\arcsin\frac{3t}{4}+C=$$
$$=\left(\begin{smallmatrix}\text{возвращаемся}\\ \text{к переменной } x\end{smallmatrix}\right)=\frac{1}{\sqrt{3}}\arcsin\frac{1+3x}{4}+C$$

▷▷ **7.1.78.** Найдите интегралы

1) $\int\frac{dx}{\sqrt{5x^2+3x+2}}$ 2) $\int\frac{dx}{\sqrt{2+3x-2x^2}}$

Интегрирование функций $R\left(x,\sqrt{ax^2+bx+c}\right)$ Выделением полного квадрата и последующей заменой функция $R\left(x,\sqrt{ax^2+bx+c}\right)$ приводится к виду
$$R\left(x,\sqrt{a^2-x^2}\right),$$
$$R\left(x,\sqrt{x^2+a^2}\right),$$
$$R\left(x,\sqrt{x^2-a^2}\right)$$
а затем делается тригонометрическая подстановка:

— для
$$\int R\left(x,\sqrt{a^2-x^2}\right)\mathsf{d}\,x$$
используется подстановка
$$x=a\sin t\qquad(\text{или } x=a\cos t)$$

— для
$$\int R\left(x,\sqrt{x^2+a^2}\right)\mathsf{d}\,x$$
используется подстановка
$$x=a\operatorname{tg}t\qquad(\text{или } x=a\operatorname{ctg}t)$$

— для
$$\int R\left(x,\sqrt{x^2-a^2}\right)\mathsf{d}\,x$$
используется подстановка
$$x=\frac{a}{\cos t}\qquad\left(\text{или } x=\frac{a}{\sin t}\right)$$

◇ **7.1.79.**

$$\int\frac{dx}{(x^2+16)\sqrt{9-x^2}}=\left|\begin{matrix}x=3\sin t\\ t=\arcsin\frac{x}{3}\\ dx=3\cos t\,dt\end{matrix}\right|=$$
$$=\int\frac{3\cos t\,dt}{(9\sin^2t+16)\sqrt{9-9\sin^2t}}=$$
$$=\int\frac{3\cos t\,dt}{(9\sin^2t+16)3\cos t}=$$
$$=\int\frac{dt}{9\sin^2t+16}=\left|\begin{matrix}\text{применяем частную}\\ \text{подстановку (7.1.67)}\\ \operatorname{tg}t=s\\ \sin t=\frac{s}{\sqrt{1+s^2}}\\ \mathsf{d}\,t=\frac{\mathsf{d}\,s}{1+s^2}\end{matrix}\right|=$$
$$=\int\frac{\frac{\mathsf{d}\,s}{1+s^2}}{9\left(\frac{s}{\sqrt{1+s^2}}\right)^2+16}=\int\frac{ds}{9s^2+16(1+s^2)}=$$
$$=\int\frac{ds}{25s^2+16}=$$
$$=\frac{1}{25}\int\frac{ds}{s^2+\left(\frac45\right)^2}=\frac{1}{20}\operatorname{arctg}\frac{5s}{4}+C=$$
$$=\left(\begin{smallmatrix}\text{возвращаемся}\\ \text{к переменной } t\end{smallmatrix}\right)=\frac{1}{20}\operatorname{arctg}\frac{5\operatorname{tg}t}{4}+C=$$
$$=\left(\begin{smallmatrix}\text{возвращаемся}\\ \text{к переменной } x\end{smallmatrix}\right)=\frac{1}{20}\operatorname{arctg}\frac{5\operatorname{tg}\arcsin\frac{x}{3}}{4}+C=$$
$$=\frac{1}{20}\operatorname{arctg}\frac{5\frac{\frac{x}{3}}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{3}\right)^2}}}{4}+C=\frac{1}{20}\operatorname{arctg}\frac{5x}{4\sqrt{9-x^2}}+C$$

◇ **7.1.80.**

$$\int \frac{x^2-x+1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}\,\mathsf{d}\,x = \left| \begin{smallmatrix} x=\operatorname{ctg} t \\ t=\operatorname{arcctg} x \\ dx=-\frac{dt}{\sin^2 t} \end{smallmatrix} \right| =$$

$$= -\int \frac{\operatorname{ctg}^2 t - \operatorname{ctg} t + 1}{(\operatorname{ctg}^2 t+1)\sqrt{\operatorname{ctg}^2 t + 1}} \cdot \frac{dt}{\sin^2 t} =$$

$$= -\int \frac{\operatorname{ctg}^2 t - \operatorname{ctg} t + 1}{\frac{1}{\sin^2 x}\cdot\frac{1}{\sin x}} \cdot \frac{dt}{\sin^2 t} =$$

$$= -\int (\operatorname{ctg}^2 t - \operatorname{ctg} t + 1)\sin x\,\mathsf{d}\,t =$$

$$= \left(\begin{smallmatrix} \text{заметим, что} \\ \operatorname{ctg}^2 t + 1 = \frac{1}{\sin^2 t} \end{smallmatrix} \right) =$$

$$= -\int \left(\frac{1}{\sin^2 t} - \operatorname{ctg} t\right)\sin x\,\mathsf{d}\,t =$$

$$= -\int \left(\frac{1}{\sin t} - \cos t\right)\mathsf{d}\,t =$$

$$= -\int \frac{dt}{\sin t} + \int \cos t\,\mathsf{d}\,t = \left(\begin{smallmatrix} \text{первый интеграл} \\ \text{мы уже вычисляли} \\ \text{в примере 7.1.58} \end{smallmatrix} \right) =$$

$$= -\ln\left|\operatorname{tg}\frac{t}{2}\right| + \sin t + C = \left(\begin{smallmatrix} \text{возвращаемся} \\ \text{к переменной } x \end{smallmatrix} \right) =$$

$$= -\ln\left|\operatorname{tg}\frac{\operatorname{arcctg} x}{2}\right| + \sin\operatorname{arcctg} x + C =$$

$$= \left(\begin{smallmatrix} \text{применяем} \\ \text{тригонометрические} \\ \text{тождества} \end{smallmatrix} \right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} + \ln\left|x+\sqrt{1+x^2}\right| + C$$

◇ **7.1.81.**

$$\int \frac{dx}{(x^2+2)\sqrt{x^2-1}} = \left| \begin{smallmatrix} x=\frac{1}{\cos t} \\ t=\arccos\frac{1}{x} \\ dx=\frac{\sin t}{\cos^2 t}\,\mathsf{d}\,t \end{smallmatrix} \right| =$$

$$= \int \frac{\frac{\sin t}{\cos^2 t}\,\mathsf{d}\,t}{\left(\frac{1}{\cos^2 t}+2\right)\sqrt{\frac{1}{\cos^2 t}-1}} = \int \frac{\cos t\,\mathsf{d}\,t}{1+2\cos^2 t} =$$

$$= \int \frac{\cos t\,\mathsf{d}\,t}{3-2\sin^2 t} = \left| \begin{smallmatrix} \sin t = s \\ ds=\cos t dt \end{smallmatrix} \right| = \int \frac{ds}{3-2s^2} =$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{1}{\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^2 - s^2}\,\mathsf{d}\,s = \left(\begin{smallmatrix} \text{применяем} \\ \text{формулу (7.1.44)} \end{smallmatrix} \right) =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{6}}\ln\left|\frac{\sqrt{\frac{3}{2}}+s}{\sqrt{\frac{3}{2}}-s}\right| + C = \left(\begin{smallmatrix} \text{возвращаемся} \\ \text{к переменной } t \end{smallmatrix} \right) =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{6}}\ln\left|\frac{\sqrt{\frac{3}{2}}+\sin t}{\sqrt{\frac{3}{2}}-\sin t}\right| + C = \left(\begin{smallmatrix} \text{возвращаемся} \\ \text{к переменной } x \end{smallmatrix} \right) =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{6}}\ln\left|\frac{\sqrt{\frac{3}{2}}+\sin\arccos\frac{1}{x}}{\sqrt{\frac{3}{2}}-\sin\arccos\frac{1}{x}}\right| + C =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{6}}\ln\left|\frac{\sqrt{\frac{3}{2}}+\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}{\sqrt{\frac{3}{2}}-\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}\right| + C =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{6}}\ln\left|\frac{x\sqrt{3}+\sqrt{2}\sqrt{x^2-1}}{x\sqrt{3}-\sqrt{2}\sqrt{x^2-1}}\right| + C$$

▷▷ **7.1.82.** Найдите интегралы

1) $\int \frac{dx}{(9+x^2)^{\frac{3}{2}}}$

2) $\int \frac{dx}{\sqrt{(5-x^2)^3}}$

3) $\int \frac{\sqrt{x^2-4}}{x^3}\,\mathsf{d}\,x$

4) $\int \frac{x^2}{(x^2+5)^{\frac{3}{2}}}\,\mathsf{d}\,x$

5) $\int \frac{dx}{\sqrt{(1+x+x^2)^3}}$

6) $\int \frac{\sqrt{1+x^2}}{2+x^2}\,\mathsf{d}\,x$

7) $\int \frac{dx}{(x^2+4)\sqrt{4x^2+1}}\,\mathsf{d}\,x$

Интегрирование функций $x^m\cdot(a+bx^n)^p$, $m,n,p\in\mathbb{Q}$. Интегралы от таких функций выражаются через элементарные функции только если одно из чисел

$$p,\ \frac{m+1}{n},\ \frac{m+1}{n}+p$$

является целым. В соответствии с этим следует употреблять три различных подстановки:

— если p целое отрицательное ($p\in-\mathbb{N}$) и $m=\frac{q}{s}$, $n=\frac{r}{s}$, то используется подстановка

$$x=t^s$$

— если $\frac{m+1}{n}$ целое ($\frac{m+1}{n}\in\mathbb{Z}$), то используется подстановка

$$a+bx^n=t$$

— если $\frac{m+1}{n}+p$ целое ($\frac{m+1}{n}+p\in\mathbb{Z}$), то используется подстановка

$$ax^{-n}+b=t$$

◇ **7.1.83.**

$$\int x^3(1-x^2)^{-\frac{3}{2}}\,\mathsf{d}\,x =$$

$$= \left| \begin{smallmatrix} \text{здесь } m=3, n=2, p=-\frac{3}{2} \\ \text{и } \frac{m+1}{n}=2\in Z \\ \text{поэтому применяем} \\ \text{подстановку} \\ t=1-x^2,\ xdx=-\frac{1}{2}dt \end{smallmatrix} \right| =$$

$$= -\frac{1}{2}\int (1-t)t^{-\frac{3}{2}}\,\mathsf{d}\,t = -\frac{1}{2}\int (t^{-\frac{3}{2}} - t^{-\frac{1}{2}})\,\mathsf{d}\,t =$$

$$= t^{-\frac{1}{2}} + t^{\frac{1}{2}} + C = \left(\begin{smallmatrix} \text{возвращаемся} \\ \text{к переменной } x \end{smallmatrix} \right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \sqrt{1-x^2} + C$$

◇ **7.1.84.**

$$\int x\sqrt{1+x^4}\,\mathsf{d}\,x = \left| \begin{smallmatrix} \text{здесь } m=1, n=4, p=\frac{1}{2} \\ \text{и } \frac{m+1}{n}+p=1\in Z \\ \text{поэтому применяем} \\ \text{подстановку} \\ t=x^{-4}+1,\ x=(t-1)^{-\frac{1}{4}} \\ dx=-\frac{1}{4}(t-1)^{-\frac{5}{4}}dt \end{smallmatrix} \right| =$$

$$= -\frac{1}{4}\int (t-1)^{-\frac{1}{4}}\sqrt{1+(t-1)^{-\frac{1}{4}\cdot 4}}\,(t-1)^{-\frac{5}{4}}dt =$$

$$= -\frac{1}{4}\int (t-1)^{-\frac{3}{2}}\sqrt{1+(t-1)^{-1}}\,\mathsf{d}\,t =$$

$$= -\frac{1}{4}\int (t-1)^{-\frac{3}{2}}\frac{\sqrt{t}}{\sqrt{t-1}}\,\mathsf{d}\,t =$$

$$= -\frac{1}{4}\int (t-1)^{-\frac{3}{2}} \frac{\sqrt{t}}{\sqrt{t-1}}\,\mathsf{d}\,t =$$

$$= -\frac{1}{4}\int \frac{\sqrt{t}}{(t-1)^2}\,\mathsf{d}\,t = \left| \begin{matrix} y=\sqrt{t} \\ t = y^2 \\ dt = 2ydy \end{matrix} \right| =$$

$$= -\frac{1}{4}\int \frac{y}{(y^2-1)^2}\,2ydy = -\frac{1}{2}\int \frac{y^2}{(y^2-1)^2}\,\mathsf{d}\,y =$$

$$= \begin{pmatrix} \text{раскладываем дробь} \\ \text{на простейшие} \end{pmatrix} =$$

$$= -\frac{1}{2}\int \left(\frac{\frac{1}{4}}{y-1} + \frac{\frac{1}{4}}{(y-1)^2} - \frac{\frac{1}{4}}{y+1} + \frac{\frac{1}{4}}{(y+1)^2} \right) \mathsf{d}\,y =$$

$$= \frac{1}{8}\ln|y-1| - \frac{1}{8(y-1)} + \frac{1}{8}\ln|y+1| + \frac{1}{8(y+1)} + C =$$

$$= \frac{1}{8}\ln\left|\frac{y+1}{y-1}\right| + \frac{y}{4(y^2-1)} + C =$$

$$= \begin{pmatrix} \text{возвращаемся} \\ \text{к переменной } t \end{pmatrix} = \frac{1}{8}\ln\left|\frac{\sqrt{t}+1}{\sqrt{t}-1}\right| + \frac{\sqrt{t}}{4(t-1)} + C =$$

$$= \begin{pmatrix} \text{возвращаемся} \\ \text{к переменной } x \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{8}\ln\left|\frac{\sqrt{x^{-4}+1}+1}{\sqrt{x^{-4}+1}-1}\right| + \frac{\sqrt{x^{-4}+1}}{4x^{-4}} + C =$$

$$= \frac{1}{8}\ln\left|\frac{\sqrt{1+x^4}+x^2}{\sqrt{1+x^4}-x^2}\right| + \frac{x^2}{4}\sqrt{1+x^4} + C$$

⊳⊳ **7.1.85.** Найдите интегралы

1) $\int \frac{\sqrt{x}}{\left(1+\sqrt[3]{x}\right)^2}\,\mathsf{d}\,x$

2) $\int x^5(1+x^2)^{\frac{2}{3}}\,\mathsf{d}\,x$

3) $\int \frac{\sqrt{4+\sqrt[3]{x}}}{\sqrt[3]{x^2}}\,\mathsf{d}\,x$

4) $\int \sqrt[3]{x}\cdot\sqrt[3]{1+3\sqrt[3]{x^2}}\,\mathsf{d}\,x$

5) $\int \sqrt[4]{\left(1+x^{\frac{1}{2}}\right)^3}\,\mathsf{d}\,x$

6) $\int \frac{\sqrt{2-\sqrt[3]{x}}}{\sqrt[3]{x}}\,\mathsf{d}\,x$

7) $\int \frac{dx}{x^2\,\sqrt[3]{(1+x^3)^2}}\,\mathsf{d}\,x$

§ 2 Определенный интеграл

Определенный интеграл функции f на отрезке $[a;b]$ есть величина, геометрический смысл которой – площадь криволинейной трапеции, ограничиваемой графиком функции f (при условии, что f неотрицательна на $[a;b]$):

Точный смысл этих слов вряд ли может быть сейчас понятен читателю, поскольку в школьном курсе геометрии не объясняется, что такое площадь фигуры (мы же даем соответствующие строгие определения лишь в главе 15). Но всякий раз, когда вводится новое определение, полезно, чтобы слушатель держал в голове какую-то геометрическую картинку, упрощающую понимание соответствующих формальных определений и математических результатов. В случае с определенным интегралом такой картинкой, несомненно, будет площадь криволинейной трапеции (понимаемая пока на интуитивном уровне).

В этой главе мы даем формальное определение этому новому понятию, приводим способ его вычисления и описываем некоторые приложения.

(a) Определение определенного интеграла

Разбиения отрезка. Перед тем как давать определение определенному интегралу нужно проделать некую предварительную работу – сказать несколько слов про разбиения отрезка.

Разбиением отрезка $[a;b]$ называется произвольная конечная система точек $\{x_0; x_1; ...; x_k\}$ такая что

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_{k-1} < x_k = b$$

Если нам дано какое-то разбиение $\{x_0; x_1; ...; x_k\}$, то его удобно обозначать одной буквой, например, τ:

$$\tau = \{x_0; x_1; ...; x_k\}$$

Наибольшее расстояние между соседними точками разбиения τ обозначается

$$\mathsf{diam}\ \tau = \max_{i=1,...,k}(x_i - x_{i-1})$$

и называется *диаметром разбиения* $\tau = \{x_0; x_1; ...; x_k\}$.

◇ **7.2.1.** Система точек $\tau = \{0; \frac{1}{2}; 1; \sqrt{2}; 2\}$ является разбиением отрезка $[0;2]$, потому что эти числа образуют строго возрастающую конечную последовательность, у которой концы совпадают с концами отрезка $[0;2]$:

$$0 < \frac{1}{2} < 1 < \sqrt{2} < 2$$

Диаметр этого разбиения равен

$$\operatorname{diam}\ \tau = \max\left\{\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \sqrt{2}-1; 2-\sqrt{2}\right\} = 2-\sqrt{2}$$

▷ **7.2.2.** Проверьте, что следующие системы точек являются разбиениями данных отрезков и найдите диаметр этих разбиений:

1) $\tau = \{0; \frac{2}{3}; \frac{5}{4}; \frac{11}{5}; 3\}, \quad [a;b] = [0;3]$
2) $\tau = \{-1; -\frac{1}{2}; -\frac{1}{4}; 0; \frac{1}{4}; \frac{1}{2}; 1\}, \quad [a;b] = [-1;1]$
3) $\tau = \{1; \sqrt{2}; \sqrt{3}; 2\}, \quad [a;b] = [1;2]$

Понятно, что у любого отрезка имеется много всяких разбиений. Поэтому можно рассматривать *последовательности разбиений.*

◇ **7.2.3.** Рассмотрим, например, отрезок $[0;1]$ и его разбиения:

$$\tau^{(1)} = \{0;1\}$$
$$\tau^{(2)} = \left\{0; \frac{1}{2}; 1\right\}$$
$$\tau^{(3)} = \left\{0; \frac{1}{3}; \frac{2}{3}; 1\right\}$$
$$...$$
$$\tau^{(n)} = \left\{0; \frac{1}{n}; \frac{2}{n}; ...; \frac{n-1}{n}; 1\right\}$$
$$...$$

Ясно, что для любого n точки $\tau^{(n)} = \{0; \frac{1}{n}; \frac{2}{n}; ...; \frac{n-1}{n}; 1\}$ действительно являются разбиением отрезка $[0;1]$. Диаметр такого разбиения равен

$$\operatorname{diam}\ \tau^{(n)} = \frac{1}{n}$$

Можно заметить, что при $n \to \infty$ эта величина стремится к нулю:

$$\operatorname{diam}\ \tau^{(n)} = \frac{1}{n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

- Последовательность разбиений $\tau^{(n)}$, у которой диаметр стремится к нулю

$$\operatorname{diam}\ \tau^{(n)} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

называется *измельчающейся.*

▷ **7.2.4.** Проверьте, будут ли следующие последовательности разбиений отрезка $[0;1]$ измельчающимися:

1) $\tau^{(n)} = \left\{0; \frac{1}{n}; \frac{n-1}{n}; 1\right\}, \quad n > 2$ (здесь каждое разбиение состоит из четырех точек);
2) $\tau^{(n)} = \left\{0; \frac{1}{2^n}; \frac{2}{2^n}; ...; \frac{i}{2^n}; ...; \frac{2^n-1}{2^n}; 1\right\}$
3) $\tau^{(n)} = \left\{0; \frac{1}{2n}; \frac{1}{2n-1}; \frac{1}{2n-2}; ...; \frac{1}{n}; 1\right\}$
4) $\tau^{(n)} = \left\{0; \sqrt{\frac{1}{n}}; \sqrt{\frac{2}{n}}; ...; \sqrt{\frac{n-1}{n}}; 1\right\}$
5) $\tau^{(n)} = \left\{0; \sqrt[n]{\frac{1}{n}}; \sqrt[n]{\frac{2}{n}}; ...; \sqrt[n]{\frac{n-1}{n}}; 1\right\}$

Определение определенного интеграла. Пусть функция f определена на отрезке $[a;b]$ и пусть дано разбиение этого отрезка $\tau = \{x_0; x_1; ...; x_k\}$. В каждом маленьком отрезке $[x_{i-1}; x_i]$ зафиксируем произвольную точку $\xi_i \in [x_{i-1}; x_i]$. Такая система точек ξ_i называется *системой выделенных точек* в данном разбиении τ. Рассмотрим сумму

$$\sum_{i=1}^{k} f(\xi_i)\cdot\Delta x_i \qquad (\text{где } \Delta x_i = x_i - x_{i-1})$$

Она называется *интегральной суммой* функции f, соответствующей разбиению $\tau = \{x_0; x_1; ...; x_k\}$ с выделенными точками ξ_i. Легко видеть, что эта величина равна площади ступенчатой фигуры, построенной на точках $\xi_i \in [x_{i-1}; x_i]$:

Представим теперь, что разбиения $\tau = \{x_0; x_1; ...; x_k\}$ отрезка $[a; b]$ меняются, становясь все более мелкими. Тогда площадь ступенчатой фигуры должна приближаться к числу, которое естественно считать "площадью криволинейной трапеции о которой мы говорили в начале этой главы.

Это число называется определенным интегралом функции f на отрезке $[a; b]$. Более точное определение выглядит так:

- Число I называется *определенным интегралом* функции f на отрезке $[a; b]$, и обозначается

  $$I = \int_{[a,b]} f(x) \, \mathsf{d}\, x$$

  если для всякой измельчающейся последовательности разбиений отрезка $[a; b]$

  $$\tau^{(n)}: \quad a = x_0^{(n)} < x_1^{(n)} < ... < x_{k^{(n)}-1}^{(n)} < x_{k^{(n)}}^{(n)} = b, \qquad \mathsf{diam}\ \tau^{(n)} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

  и любой системы выделенных точек

  $$\xi_i^{(n)} \in [x_{i-1}^{(n)}; x_i^{(n)}]$$

  соответствующие интегральные суммы стремятся к числу I:

  $$\sum_{i=1}^{k^{(n)}} f(\xi_i^{(n)}) \cdot \Delta x_i \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} I$$

  Если такое число I существует, то функция f называется *интегрируемой* (по Риману) на отрезке $[a; b]$.

Это определение можно коротко записать в виде формулы:

$$\int_{[a,b]} f(x) \, \mathsf{d}\, x = \lim_{\mathsf{diam}\ \{x_0,...,x_k\}\to 0} \sum_{i=1}^{k} f(\underset{[x_{i-1}; x_i]}{\underset{\Cap}{\xi_i}}) \cdot \Delta x_i \qquad (7.2.72)$$

Ее удобно применять в случаях, когда не нужно следить за строгостью рассуждений.

Проверим, что в простейших случаях наше определение приводит к правильным результатам, то есть что, вычисляя интеграл, мы действительно получаем площадь соответствующей фигуры.

◇ **7.2.5. Интеграл от константы.** Рассмотрим постоянную функцию $f(x) = C$ и вычислим определенный интеграл от нее на произвольном отрезке $[a;b]$. Соответствующая картинка выглядит так:

Поскольку криволинейная трапеция в данном случае представляет собой прямоугольник, ответ нам известен заранее – интеграл должен быть равен $C\cdot(b-a)$. Проверим это:

$$\int_{[a,b]} f(x)\ \mathsf{d}\,x = \lim_{\mathsf{diam}\ \tau\to 0}\sum_{i=1}^k f(\xi_i)\cdot\Delta x_i =$$

$$= \lim_{\mathsf{diam}\ \tau\to 0}\sum_{i=1}^k C\cdot\Delta x_i = \lim_{\mathsf{diam}\ \tau\to 0} C\cdot\underbrace{\sum_{i=1}^k\Delta x_i}_{b-a} =$$

$$= \lim_{\mathsf{diam}\ \tau\to 0} C\cdot(b-a) = C\cdot(b-a)$$

Запишем вывод:

$$\int_{[a,b]} C\ \mathsf{d}\,x = C\cdot(b-a) \qquad (7.2.73)$$

◇ **7.2.6. Интеграл от линейной функции.** Рассмотрим теперь функцию $f(x)=x$ и вычислим определенный интеграл от нее на отрезке $[0;1]$. Соответствующая картинка выглядит так:

Криволинейная трапеция в данном случае представляет собой треугольник, поэтому ответом должна быть площадь треугольника $S=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1=\frac{1}{2}$ (половина произведения основания на высоту).

Чтобы проверить это, возьмем какое-нибудь разбиение $\tau=\{x_0;x_1;...;x_k\}$ отрезка $[0;1]$ и какие-нибудь точки

$$\xi_i\in[x_{i-1};x_i]$$

Заметим, что тогда площадь нашего треугольника $S=\frac{1}{2}$ можно представить, как сумму площадей маленьких трапеций:

$$S=\frac{1}{2}=\sum_{i=1}^k\frac{f(x_{i-1})+f(x_i)}{2}\cdot\Delta x_i =$$

$$=\sum_{i=1}^k\frac{x_{i-1}+x_i}{2}\cdot\Delta x_i \qquad (7.2.74)$$

Теперь мы получим

$$\left|\sum_{i=1}^k\overbrace{f(\xi_i)}^{\substack{\xi_i\\ \|}}\cdot\Delta x_i-\overbrace{\frac{1}{2}}^{\substack{\sum_{i=1}^k\frac{x_{i-1}+x_i}{2}\cdot\Delta x_i\\ \|\ (7.2.74)}}\right| =$$

$$=\left|\sum_{i=1}^k\xi_i\cdot\Delta x_i-\sum_{i=1}^k\frac{x_{i-1}+x_i}{2}\cdot\Delta x_i\right| =$$

$$=\left|\sum_{i=1}^k\left(\xi_i-\frac{x_{i-1}+x_i}{2}\right)\cdot\Delta x_i\right| =$$

$$=\left|\sum_{i=1}^k\frac{2\xi_i-x_{i-1}-x_i}{2}\cdot\Delta x_i\right| =$$

$$=\left|\sum_{i=1}^k\frac{(\xi_i-x_{i-1})+(\xi_i-x_i)}{2}\cdot\Delta x_i\right|\leqslant$$

$$\leqslant (2.2.262)\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{i=1}^k\left|\frac{(\xi_i-x_{i-1})+(\xi_i-x_i)}{2}\cdot\underbrace{\Delta x_i}_{\substack{\vee\!\!/\\ 0}}\right| =$$

$$=\sum_{i=1}^k\frac{1}{2}\cdot\Big|(\xi_i-x_{i-1})+(\xi_i-x_i)\Big|\cdot\Delta x_i\leqslant$$

$$\leqslant (3.1.10)\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{i=1}^k\frac{1}{2}\cdot\Bigg(\underbrace{|\xi_i-x_{i-1}|}_{\substack{\wedge\!\!\backslash\\ \Delta x_i,\\ \text{поскольку}\\ \xi_i\in[x_{i-1};x_i]}}+\underbrace{|\xi_i-x_i|}_{\substack{\wedge\!\!\backslash\\ \Delta x_i,\\ \text{поскольку}\\ \xi_i\in[x_{i-1};x_i]}}\Bigg)\cdot\Delta x_i\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{i=1}^k\frac{\Delta x_i+\Delta x_i}{2}\cdot\Delta x_i=\sum_{i=1}^k\underbrace{\Delta x_i}_{\substack{\wedge\!\!\backslash\\ \mathsf{diam}\ \tau}}\cdot\Delta x_i\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{i=1}^k\mathsf{diam}\ \tau\cdot\Delta x_i =$$

$$= \mathsf{diam}\ \tau \cdot \underbrace{\sum_{i=1}^{k} \Delta x_i}_{\substack{\parallel \\ 1}} = \mathsf{diam}\ \tau$$

Мы получили неравенство, справедливое для любого разбиения $\tau = \{x_0; x_1; ...; x_k\}$ отрезка $[0; 1]$ и любых точек $\xi_i \in [x_{i-1}; x_i]$:

$$\left| \sum_{i=1}^{k} f(\xi_i) \cdot \Delta x_i - \frac{1}{2} \right| \leqslant \mathsf{diam}\ \tau$$

Если теперь $\tau^{(n)} = \{x_0^{(n)}; x_1^{(n)}; ...; x_{k_n}^{(n)}\}$ – какая-нибудь измельчающая последовательность разбиений с выделенными точками $\xi_i^{(n)} \in [x_{i-1}^{(n)}; x_i^{(n)}]$, то мы получаем

$$\left| \sum_{i=1}^{k^{(n)}} f(\xi_i^{(n)}) \cdot \Delta x_i^{(n)} - \frac{1}{2} \right| \leqslant \mathsf{diam}\ \tau^{(n)} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

Отсюда

$$\sum_{i=1}^{k^{(n)}} f(\xi_i^{(n)}) \cdot \Delta x_i^{(n)} - \frac{1}{2} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

то есть

$$\sum_{i=1}^{k^{(n)}} f(\xi_i^{(n)}) \cdot \Delta x_i^{(n)} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2}$$

Это верно для любой измельчающейся последовательности $\tau^{(n)} = \{x_0^{(n)}; x_1^{(n)}; ...; x_k^{(n)}\}$ разбиений отрезка $[0; 1]$ и любой системы выделенных точек $\xi_i^{(n)} \in [x_{i-1}^{(n)}; x_i^{(n)}]$, значит число $\frac{1}{2}$ действительно является определенным интегралом $\int_{[a,b]} x \,\mathsf{d}\, x$.

Запишем вывод:

$$\int_0^1 x \,\mathsf{d}\, x = \frac{1}{2}$$

◇ **7.2.7. Интеграл от функции Дирихле.** Покажем, что определенный интеграл не всегда существует. Классическим примером здесь является функция Дирихле, которую мы определили выше формулой (3.1.4):

$$D(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \text{ – рациональное число} \\ 0, & \text{если } x \text{ – иррациональное число} \end{cases}$$

Попробуем понять, что будет интегралом этой функции на произвольном отрезке $[a; b]$. Выберем какое-нибудь разбиение $\tau = \{x_0; x_1; ...; x_k\}$ отрезка $[a; b]$.

Точки $\xi_i \in [x_{i-1}; x_i]$ можно выбирать по-разному, но нас будут интересовать два способа:

– первый способ заключается в том, чтобы в каждом отрезке $[x_{i-1}; x_i]$ выбрать какую-нибудь *рациональную* точку ξ_i. Тогда получится $D(\xi_i) = 1$, и интегральные суммы окажутся равны $b - a$:

$$\sum_{i=1}^{k} D(\xi_i) \cdot \Delta x_i = \sum_{i=1}^{k} 1 \cdot \Delta x_i = b - a$$

– второй способ заключается в том, чтобы в каждом отрезке $[x_{i-1}; x_i]$ выбрать какую-нибудь *иррациональную* точку ξ_i. Тогда получится $D(\xi_i) = 0$, и интегральные суммы окажутся равны 0:

$$\sum_{i=1}^{k} D(\xi_i) \cdot \Delta x_i = \sum_{i=1}^{k} 0 \cdot \Delta x_i = 0$$

Если теперь взять измельчающуюся последовательность разбиений $\tau^{(n)} = \{x_0^{(n)}; x_1^{(n)}; ...; x_k^{(n)}\}$ отрезка $[a; b]$,

$$\mathsf{diam}\ \tau^{(n)} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

то выбрав точки $\xi_i^{(n)}$ первым способом, мы получим, что интегральные суммы стремятся к числу $b - a$:

$$\sum_{i=1}^{k^{(n)}} D(\xi_i^{(n)}) \cdot \Delta x_i^{(n)} = b - a \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} b - a$$

а для второго способа получим, что они стремятся к нулю:

$$\sum_{i=1}^{k^{(n)}} D(\xi_i^{(n)}) \cdot \Delta x_i^{(n)} = 0 \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

Спросим себя теперь: существует ли единое число I, к которому бы стремились все интегральные суммы, независимо от того, какая выбрана измельчающаяся последовательность разбиений $\tau^{(n)} = \{x_0; x_1; ...; x_k^{(n)}\}$ и какие выбраны точки $\xi_i^{(n)} \in [x_{i-1}^{(n)}; x_i^{(n)}]$? Понятно, что такого числа I (то есть интеграла $\int_{[a,b]} D(x) \,\mathsf{d}\, x$) не существует. Значит, мы можем сделать

Вывод: *функция Дирихле не интегрируема ни на каком отрезке* $[a; b]$.

(b) Когда существует определенный интеграл?

Из примера 7.2.7 видно, что не всякую функцию можно интегрировать. В этом пункте мы обсудим вопрос о том, когда определенный интеграл существует.

Суммы Дарбу. Пусть функция f определена и ограничена на отрезке $[a; b]$ и пусть $\tau = \{x_0; x_1; ...; x_k\}$ – какое-нибудь его разбиение. На каждом отрезке $[x_{i-1}; x_i]$ найдем нижнюю и верхнюю грань функции f

$$m_i = \inf_{\xi \in [x_{i-1}; x_i]} f(\xi), \quad M_i = \sup_{\xi \in [x_{i-1}; x_i]} f(\xi)$$

и обозначим

$$s_\tau = \sum_{i=1}^{k} m_i \cdot \Delta x_i, \quad S_\tau = \sum_{i=1}^{k} M_i \cdot \Delta x_i$$

Поскольку f ограничена на $[a; b]$, m_i и M_i являются обычными числами, и поэтому s_τ и S_τ тоже являются числами, причем

$$s_\tau \leqslant S_\tau \tag{7.2.75}$$

- Величина s_τ называется *нижней*, а величина S_τ – *верхней суммой Дарбу* (функции f на отрезке $[a; b]$ при разбиении τ).

Перечислим главные

Свойства сумм Дарбу

1^0. *Если разбиение σ получено из разбиения τ добавлением новых точек*

$$\tau \subseteq \sigma$$

то

$$s_\tau \leqslant s_\sigma \leqslant S_\sigma \leqslant S_\tau \tag{7.2.76}$$

(то есть, при добавлении к данному разбиению τ новых точек нижняя сумма Дарбу увеличивается, а верхняя уменьшается).

2^0. *Для любых двух разбиений σ и τ данного отрезка выполняется неравенство*

$$s_\sigma \leqslant S_\tau \tag{7.2.77}$$

(то есть, любая нижняя сумма Дарбу меньше любой верхней).

3^0. *Любая интегральная сумма лежит между нижней и верхней суммами Дарбу*

$$s_\tau \leqslant \sum_{i=1}^{k} f(\xi_i) \cdot \Delta x_i \leqslant S_\tau \tag{7.2.78}$$

причем нижняя сумма Дарбу есть нижняя грань всех интегральных сумм при данном разбиении, а верхняя сумма Дарбу – верхняя грань:

$$s_\tau = \inf_{\xi_i \in [x_{i-1}; x_i]} \sum_{i=1}^{k} f(\xi_i) \cdot \Delta x_i, \qquad S_\tau = \sup_{\xi_i \in [x_{i-1}; x_i]} \sum_{i=1}^{k} f(\xi_i) \cdot \Delta x_i \tag{7.2.79}$$

4^0. *Если функция f интегрируема на $[a, b]$, то для произвольного разбиения τ отрезка $[a, b]$ интеграл от f лежит между нижней и верхней суммами Дарбу:*

$$s_\tau \leqslant \int_{[a,b]} f(x) \, \mathsf{d}\, x \leqslant S_\tau \tag{7.2.80}$$

Доказательство. 1. Для доказательства 1^0 достаточно рассмотреть случай, когда к данному разбиению $\tau = \{x_0; x_1; ...; x_k\}$ добавляется всего одна точка x^*:

$$\sigma = \tau \cup \{x^*\} = \{x_0; x_1; ...; x_k\} \cup \{x^*\}$$

Тогда x^* лежит в каком-то отрезке $[x_{j-1}; x_j]$:

$$x^* \in [x_{j-1}; x_j] \tag{7.2.81}$$

и поэтому

$$s_\tau = \sum_{i=1}^{k} m_i\cdot\Delta x_i = m_j\cdot\Delta x_j + \sum_{i\ne j} m_i\cdot\Delta x_i = m_j\cdot(x_j - x_{j-1}) + \sum_{i\ne j} m_i\cdot\Delta x_i = (7.2.81) =$$

$$= \underbrace{\inf_{\xi\in[x_{j-1};x_j]} f(\xi)}_{\substack{\wedge\!\!\backslash\\ \inf_{\xi\in[x^*,x_j]} f(\xi),\\ \text{потому что}\\ [x_{j-1};x_j]\supseteq[x^*,x_j]}} \cdot(x_j - x^*) + \underbrace{\inf_{\xi\in[x_{j-1};x_j]} f(\xi)}_{\substack{\wedge\!\!\backslash\\ \inf_{\xi\in[x_{j-1},x^*]} f(\xi),\\ \text{потому что}\\ [x_{j-1};x_j]\supseteq[x_{j-1},x^*]}} \cdot(x^* - x_{j-1}) + \sum_{i\ne j} m_i\cdot\Delta x_i \leqslant$$

$$\leqslant \inf_{\xi\in[x^*,x_j]} f(\xi)\cdot(x_j - x^*) + \inf_{\xi\in[x_{j-1},x^*]} f(\xi)\cdot(x^* - x_{j-1}) + \sum_{i\ne j} m_i\cdot\Delta x_i = s_\sigma$$

То есть, $s_\tau \leqslant s_\sigma$. Аналогично доказывается. что $S_\tau \geqslant S_\sigma$:

$$S_\tau = \sum_{i=1}^{k} M_i\cdot\Delta x_i = M_j\cdot\Delta x_j + \sum_{i\ne j} M_i\cdot\Delta x_i = M_j\cdot(x_j - x_{j-1}) + \sum_{i\ne j} M_i\cdot\Delta x_i = (7.2.81) =$$

$$= \underbrace{\sup_{\xi\in[x_{j-1};x_j]} f(\xi)}_{\substack{\vee\!\!/\\ \sup_{\xi\in[x^*,x_j]} f(\xi),\\ \text{потому что}\\ [x_{j-1};x_j]\supseteq[x^*,x_j]}} \cdot(x_j - x^*) + \underbrace{\sup_{\xi\in[x_{j-1};x_j]} f(\xi)}_{\substack{\vee\!\!/\\ \sup_{\xi\in[x_{j-1},x^*]} f(\xi),\\ \text{потому что}\\ [x_{j-1};x_j]\supseteq[x_{j-1},x^*]}} \cdot(x^* - x_{j-1}) + \sum_{i\ne j} M_i\cdot\Delta x_i \geqslant$$

$$\geqslant \sup_{\xi\in[x_{j-1};x^*]} f(\xi)\cdot(x_j - x^*) + \sup_{\xi\in[x^*;x_j]} f(\xi)\cdot(x^* - x_{j-1}) + \sum_{i\ne j} M_i\cdot\Delta x_i = S_\sigma$$

Оставшееся неравенство в (7.2.76), $s_\sigma \leqslant S_\sigma$, есть просто неравенство (7.2.75), в котором τ заменено на σ.

2. Если σ и τ – два разбиения отрезка $[a;b]$, то, добавлением новых точек, можно сделать из них третье разбиение ρ, которое бы содержало и σ, и τ:

$$\sigma\subseteq\rho,\qquad \tau\subseteq\rho$$

Для него мы получим:

$$\underbrace{s_\sigma \overset{(7.2.76)}{\leqslant} s_\rho}_{\sigma\subseteq\rho} \overset{(7.2.75)}{\leqslant} \underbrace{S_\rho \overset{(7.2.76)}{\leqslant} S_\tau}_{\rho\supseteq\tau}$$

3. Неравенства (7.2.78) очевидны,

$$s_\tau = \sum_{i=1}^{k} \inf_{\zeta_i\in[x_{i-1};x_i]} f(\zeta_i)\cdot\Delta x_i \leqslant \sum_{i=1}^{k} f(\xi_i)\cdot\Delta x_i \leqslant \sum_{i=1}^{k} \sup_{\zeta_i\in[x_{i-1};x_i]} f(\zeta_i)\cdot\Delta x_i \leqslant S_\tau,$$

и из них сразу следуют неравенства

$$s_\tau \leqslant \inf_{\xi_i\in[x_{i-1};x_i]} \sum_{i=1}^{k} f(\xi_i)\cdot\Delta x_i,\qquad \sup_{\xi_i\in[x_{i-1};x_i]} \sum_{i=1}^{k} f(\xi_i)\cdot\Delta x_i \leqslant S_\tau.$$

Поэтому, чтобы, например, доказать первое равенство в (7.2.79), достаточно доказать обратное неравенство:

$$s_\tau \geqslant \inf_{\xi_i\in[x_{i-1};x_i]} \sum_{i=1}^{k} f(\xi_i)\cdot\Delta x_i \tag{7.2.82}$$

Для этого (зафиксировав разбиение $\tau = \{x_0, ..., x_k\}$) для каждого $i = 1, ..., k$ выберем последовательность точек $\xi_i^{(n)} \in [x_{i-1}; x_i]$ такую, что

$$f(\xi_i^{(n)}) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \inf_{\xi_i\in[x_{i-1};x_i]} f(\xi_i)$$

Тогда (7.2.82) получается так:

$$\inf_{\xi_i\in[x_{i-1};x_i]}\sum_{i=1}^k f(\xi_i)\cdot\Delta x_i \leqslant \inf_{n\to\infty}\sum_{i=1}^k f\left(\xi_i^{(n)}\right)\cdot\Delta x_i = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^k f\left(\xi_i^{(n)}\right)\cdot\Delta x_i =$$
$$= \sum_{i=1}^k \lim_{n\to\infty} f\left(\xi_i^{(n)}\right)\cdot\Delta x_i = \sum_{i=1}^k \inf_{\xi_i\in[x_{i-1};x_i]} f(\xi_i)\cdot\Delta x_i = s_\tau$$

Второе равенство в (7.2.79) доказывается аналогично.

4. Для доказательства 4^0, зафиксируем разбиение τ. Для всякого более мелкого разбиения $\sigma\supseteq\tau$ и любой системы выделенных точек ξ_i разбиения σ мы получим:

$$s_\tau \overset{(7.2.76)}{\leqslant} s_\sigma \overset{(7.2.78)}{\leqslant} \sum_{i=1}^k f(\xi_i)\cdot\Delta x_i \overset{(7.2.78)}{\leqslant} S_\sigma \overset{(7.2.76)}{\leqslant} S_\tau$$

Если теперь заморозить τ, а σ выбирать все более измельчающимся, то мы получим:

$$s_\tau \leqslant \underbrace{\sum_{i=1}^k f(\xi_i)\cdot\Delta x_i}_{\substack{\downarrow\ \overset{\operatorname{diam}\sigma}{\downarrow}\ \\ \quad\ \ 0 \\ \int_{[a,b]} f(x)\ \mathsf{d}\,x}} \leqslant S_\tau$$

Отсюда и следует (7.2.80). □

- Верхняя грань всех нижних сумм Дарбу для функции f на отрезке $[a;b]$

  $$I_* = \sup_\tau s_\tau$$

  называется *нижним интегралом Дарбу*, а нижняя грань всех верхних сумм Дарбу

  $$I^* = \inf_\tau S_\tau$$

  называется *верхним интегралом Дарбу*. Из неравенства (7.2.77) следует, что для любых двух разбиений σ и τ данного отрезка выполняются неравенства

  $$s_\sigma \leqslant I_* \leqslant I^* \leqslant S_\tau \tag{7.2.83}$$

  Если вдобавок функция f интегрируема на $[a,b]$, то эту цепочку можно дополнить так:

  $$s_\sigma \leqslant I_* \leqslant \int_{[a,b]} f(x)\ \mathsf{d}\,x \leqslant I^* \leqslant S_\tau \tag{7.2.84}$$

▷ **7.2.8.** Найдите верхний и нижний интегралы Дарбу на отрезке $[-1;1]$ для функции сигнум $\operatorname{sgn} x$ (определенной выше формулой (3.1.3)) и функции Дирихле (определенной формулой (3.1.4)).

Критерий интегрируемости.

Теорема 7.2.1 (критерий интегрируемости). [7] *Ограниченная на отрезке $[a;b]$ функция f тогда и только тогда интегрируема на $[a;b]$, когда для всякой измельчающейся последовательности $\tau^{(n)}$ разбиений отрезка $[a;b]$*

$$\operatorname{diam}\ \tau^{(n)} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

соответствующие верхняя и нижняя суммы Дарбу стремятся друг к другу:

$$S_{\tau^{(n)}} - s_{\tau^{(n)}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \tag{7.2.85}$$

В этом случае (для всякой измельчающейся последовательности $\tau^{(n)}$ разбиений отрезка $[a;b]$) суммы Дарбу необходимо стремятся к интегралу от f на $[a,b]$:

$$S_{\tau^{(n)}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int_{[a,b]} f(x)\ \mathsf{d}\,x \underset{\infty\leftarrow n}{\longleftarrow} s_{\tau^{(n)}} \tag{7.2.86}$$

[7]Эта теорема используется ниже при доказательстве теорем 7.2.2 и 7.2.3.

Доказательство. 1. Необходимость. Пусть f интегрируема на $[a;b]$, покажем что тогда выполняется (7.2.85). Возьмем какую-нибудь измельчающуюся последовательность разбиений $\tau^{(n)}$ отрезка $[a;b]$. Из левой формулы (7.2.79)

$$s_\tau = \inf_{\xi_i\in[x_{i-1};x_i]} \sum_{i=1}^{k} f(\xi_i)\cdot\Delta x_i,$$

следует, что для всякого n можно выбрать точки $\xi_i^{(n)}\in[x_{i-1};x_i]$ так, чтобы

$$\left| s_\tau - \sum_{i=1}^{k} f\left(\xi_i^{(n)}\right)\cdot\Delta x_i \right| \leqslant \frac{1}{n}$$

Тогда мы получим

$$s_{\tau^{(n)}} - \sum_{i=1}^{k} f\left(\xi_i^{(n)}\right)\cdot\Delta x_i \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

Теперь вспомним, что, по предположению, функция f интегрируема на $[a;b]$, то есть существует такое число I, что

$$\sum_{i=1}^{k} f\left(\xi_i^{(n)}\right)\cdot\Delta x_i \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} I \tag{7.2.87}$$

для всякой измельчающейся последовательности $\tau^{(n)}$ и любой системы точек $\xi_i^{(n)}\in[x_{i-1};x_i]$. В частности, это должно быть верно для нашей последовательности $\tau^{(n)}$ и выбранной нами системы точек $\xi_i^{(n)}\in[x_{i-1};x_i]$. Отсюда

$$s_{\tau^{(n)}} = \left(s_{\tau^{(n)}} - \sum_{i=1}^{k} f\left(\xi_i^{(n)}\right)\cdot\Delta x_i \right) + \sum_{i=1}^{k} f\left(\xi_i^{(n)}\right)\cdot\Delta x_i \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0+I=I$$

Точно также из правой формулы (7.2.79)

$$S_\tau = \sup_{\xi_i\in[x_{i-1};x_i]} \sum_{i=1}^{k} f(\xi_i)\cdot\Delta x_i,$$

следует, что для всякого n можно выбрать (новые) точки $\xi_i^{(n)}\in[x_{i-1};x_i]$ так, чтобы

$$\left| S_\tau - \sum_{i=1}^{k} f\left(\xi_i^{(n)}\right)\cdot\Delta x_i \right| \leqslant \frac{1}{n}$$

Тогда мы получим

$$S_{\tau^{(n)}} - \sum_{i=1}^{k} f\left(\xi_i^{(n)}\right)\cdot\Delta x_i \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

Поскольку функция f интегрируема, выполняется (7.2.87), значит

$$S_{\tau^{(n)}} = \left(S_{\tau^{(n)}} - \sum_{i=1}^{k} f\left(\xi_i^{(n)}\right)\cdot\Delta x_i \right) + \sum_{i=1}^{k} f\left(\xi_i^{(n)}\right)\cdot\Delta x_i \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0+I=I$$

Таким образом, мы получили, что

$$s_{\tau^{(n)}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} I, \qquad S_{\tau^{(n)}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} I$$

откуда и следует (7.2.85):

$$S_{\tau^{(n)}} - s_{\tau^{(n)}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

2. Докажем достаточность. Пусть для всякой измельчающейся последовательности $\tau^{(n)}$ разбиений отрезка $[a;b]$

$$\operatorname{diam}\ \tau^{(n)} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

соответствующие верхняя и нижняя суммы Дарбу стремятся друг к другу:

$$S_{\tau^{(n)}} - s_{\tau^{(n)}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

Заметим, что тогда верхний и нижний интегралы Дарбу должны совпадать

$$I_* = I^*,$$

потому что из неравенств (7.2.83) следует

$$0 \leqslant I^* - I_* \leqslant S_{\tau^{(n)}} - s_{\tau^{(n)}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Теперь положим

$$I = I_* = I^*$$

и покажем, что I является интегралом функции f на отрезке $[a;b]$.

Для этого опять возьмем измельчающуюся последовательность $\tau^{(n)}$ разбиений отрезка $[a;b]$. Из неравенств (7.2.83) получаем две цепочки:

$$\begin{array}{c}
0 \leqslant I - s_{\tau^{(n)}} \leqslant \underbrace{S_{\tau^{(n)}} - s_{\tau^{(n)}}}_{\substack{\downarrow \ \overset{n}{\downarrow} \\ 0 \quad \infty}} \\
\Downarrow \\
I - s_{\tau^{(n)}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \\
\Downarrow \\
s_{\tau^{(n)}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} I
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{c}
0 \leqslant S_{\tau^{(n)}} - I \leqslant \underbrace{S_{\tau^{(n)}} - s_{\tau^{(n)}}}_{\substack{\downarrow \ \overset{n}{\downarrow} \\ 0 \quad \infty}} \\
\Downarrow \\
S_{\tau^{(n)}} - I \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \\
\Downarrow \\
S_{\tau^{(n)}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} I
\end{array}$$

Теперь из формулы (7.2.78) при произвольном выборе точек $\xi_i^{(n)} \in [x_{i-1}; x_i]$ мы получаем

$$\underbrace{s_{\tau^{(n)}}}_{\substack{\overset{n}{\downarrow} \ \downarrow \\ \infty \quad I}} \leqslant \sum_{i=1}^{k} f(\xi_i^{(n)}) \cdot \Delta x_i^{(n)} \leqslant \underbrace{S_{\tau^{(n)}}}_{\substack{\downarrow \ \overset{n}{\downarrow} \\ I \quad \infty}}$$

Последовательности по бокам этого двойного неравенства стремятся к I, значит, интегральная сумма тоже стремится к I:

$$\sum_{i=1}^{k} f(\xi_i^{(n)}) \cdot \Delta x_i^{(n)} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} I$$

Это верно для всякой измельчающейся последовательности $\tau^{(n)}$ разбиений отрезка $[a;b]$ и любой системы выделенных точек $\xi_i^{(n)} \in [x_{i-1}^{(n)}; x_i^{(n)}]$, значит I действительно является интегралом для f на $[a;b]$. Это нам и нужно было доказать. □

Ограниченность интегрируемой функции.

Теорема 7.2.2. *Если функция f интегрируема на отрезке $[a;b]$, то она ограничена на нем.*

Доказательство. Докажем это утверждение в эквивалентной формулировке: *если функция f (определена и) НЕ ограничена на отрезке $[a;b]$, то она НЕ интегрируема на нем.* Пусть функция f не ограничена на отрезке $[a;b]$. Это означает, что она или неограничена сверху, или неограничена снизу:

$$\sup_{x\in[a;b]} f(x) = +\infty \quad \text{или} \quad \inf_{x\in[a;b]} f(x) = -\infty$$

Предположим, для определенности, что она неограничена сверху:

$$\sup_{x\in[a;b]} f(x) = +\infty$$

Зафиксируем какое-нибудь число M и возьмем произвольное разбиение $\tau = \{x_0; x_1; ...; x_k\}$ отрезка $[a;b]$.

Поскольку f неограничена на отрезке $[a;b]$, она должна быть неограничена на каком-нибудь отрезке $[x_{i-1};x_i]$. То есть, существует индекс j такой что

$$\sup_{\xi\in[x_{j-1};x_j]} f(\xi)=+\infty \tag{7.2.88}$$

Зафиксируем этот индекс j и выберем произвольным образом точки $\xi_i\in[x_{i-1};x_i]$, $\quad i\ne j$. Тогда в интегральной сумме

$$\sum_{i=1}^k f(\xi_i)\cdot\Delta x_i=f(\xi_j)\cdot\Delta x_j+\sum_{i\ne j}f(\xi_i)\cdot\Delta x_i$$

величина $\sum_{i\ne j}f(\xi_i)\cdot\Delta x_i$ фиксирована, а слагаемое $f(\xi_j)\cdot\Delta x_j$ – переменная, поскольку точка $\xi_j\in[x_{j-1};x_j]$ еще не выбрана. Из (7.2.88) следует, что недостающую точку $\xi_j\in[x_{j-1};x_j]$ можно выбрать так, чтобы вся сумма была больше числа M:

$$\sum_{i=1}^k f(\xi_i)\cdot\Delta x_i=f(\xi_j)\cdot\Delta x_j+\sum_{i\ne j}f(\xi_i)\cdot\Delta x_i\geqslant M$$

Мы получили, что для всякого разбиения $\tau=\{x_0;x_1;...;x_k\}$ отрезка $[a;b]$ можно выбрать числа $\xi_i\in[x_{i-1};x_i]$ так, чтобы интегральная сумма оказалась больше числа M.

Значит, если взять измельчающуюся последовательность разбиений $\tau^{(n)}$, то для нее тоже можно выбрать числа $\xi_i^{(n)}\in[x_{i-1}^{(n)};x_i^{(n)}]$ так, чтобы интегральная сумма оказалась больше числа M:

$$\sum_{i=1}^{k^{(n)}} f(\xi_i)\cdot\Delta x_i\geqslant M$$

Отсюда следует, что интеграл (то есть предел таких интегральных сумм), если он существует, не может быть меньше M:

$$I=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{k^{(n)}} f(\xi_i)\cdot\Delta x_i\geqslant M$$

Но число M мы выбирали произвольным: получается, что число I должно быть больше какого хочешь другого числа M, а это абсурд. $\square$

Интегрируемость монотонной функции.

Теорема 7.2.3. *Если функция f (определена и) монотонна на отрезке $[a;b]$, то она интегрируема на нем.*

Доказательство. Пусть функция f (определена и) монотонна на отрезке $[a;b]$, например, неубывает на нем:

$$s\leqslant t\quad\Longrightarrow\quad f(s)\leqslant f(t)$$

покажем, что тогда f интегрируема на $[a;b]$. Для этого возьмем какое-нибудь разбиение τ отрезка $[a;b]$ и покажем, что суммы Дарбу удовлетворяют неравенству:

$$S_\tau-s_\tau\leqslant \mathsf{diam}\ \tau\cdot\{f(b)-f(a)\} \tag{7.2.89}$$

Действительно,

$$S_\tau-s_\tau=\sum_{i=1}^k \underbrace{\sup_{\xi\in[x_{i-1};x_i]}f(\xi)}_{\substack{\parallel\\ f(x_i),\\ \text{поскольку } f\\ \text{монотонно неубывает}}}\cdot\Delta x_i-\sum_{i=1}^k \underbrace{\inf_{\xi\in[x_{i-1};x_i]}f(\xi)}_{\substack{\parallel\\ f(x_{i-1}),\\ \text{поскольку } f\\ \text{монотонно неубывает}}}\cdot\Delta x_i=\sum_{i=1}^k f(x_i)\cdot\Delta x_i-\sum_{i=1}^k f(x_{i-1})\cdot\Delta x_i=$$

$$=\sum_{i=1}^k\left(f(x_i)-f(x_{i-1})\right)\cdot\underbrace{\Delta x_i}_{\substack{\wedge\!\!\parallel\\ \mathsf{diam}\ \tau}}\leqslant\sum_{i=1}^k\left(f(x_i)-f(x_{i-1})\right)\cdot\underbrace{\mathsf{diam}\ \tau}_{\substack{\text{не зависит}\\ \text{от индекса } i,\\ \text{поэтому можно}\\ \text{вынести за знак суммы}}}=\mathsf{diam}\ \tau\cdot\sum_{i=1}^k\left(f(x_i)-f(x_{i-1})\right)=$$

$$= \mathsf{diam}\ \tau \cdot \Big\{ \underbrace{\overset{f(b)}{\overset{\parallel}{f(x_k)}} - f(x_{k-1})}_{i=k} + \underbrace{f(x_{k-1}) - f(x_{k-2})}_{i=k-1} + \quad \dots \quad + \underbrace{f(x_2) - f(x_1)}_{i=2} + \underbrace{f(x_1) - \overset{f(a)}{\overset{\parallel}{f(x_0)}}}_{i=1} \Big\} =$$

$$= \mathsf{diam}\ \tau \cdot \{f(b) - f(a)\}$$

Если теперь взять измельчающуюся последовательность разбиений $\tau^{(n)}$ отрезка $[a;b]$, то мы получим

$$0 \leqslant S_{\tau^{(n)}} - s_{\tau^{(n)}} \leqslant (7.2.89) \leqslant \mathsf{diam}\ \tau^{(n)} \cdot \{f(b) - f(a)\} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

значит,

$$S_{\tau^{(n)}} - s_{\tau^{(n)}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

Это верно для любой измельчающейся последовательности разбиений $\tau^{(n)}$, значит, по теореме 7.2.1, f интегрируема на $[a;b]$. □

Интегрируемость непрерывной функции.

Теорема 7.2.4. *Если функция f (определена и) непрерывна на отрезке $[a;b]$, то она интегрируема на нем.*

Для доказательства теоремы 7.2.4 нам понадобится следующая

Лемма 7.2.5. *Если f – непрерывная функция на отрезке $[a;b]$, то для любого разбиения τ отрезка $[a;b]$ существуют числа $\alpha, \beta \in [a;b]$, такие что расстояние между ними не превышает диаметра разбиения τ*

$$|\alpha - \beta| \leqslant \mathsf{diam}\ \tau, \tag{7.2.90}$$

а разность между верхней и нижней интегральными суммами Дарбу этого разбиения оценивается неравенством:

$$S_\tau - s_\tau \leqslant \Big| f(\alpha) - f(\beta) \Big| \cdot (b-a) \tag{7.2.91}$$

Доказательство. По теореме Вейерштрасса об экстремумах 3.3.8, функция f достигает максимума и минимума на каждом отрезке $[x_{i-1}; x_i]$, то есть существуют такие точки $\eta_i, \theta_i \in [x_{i-1}; x_i]$, что

$$f(\eta_i) = \sup_{x\in[x_{i-1};x_i]} f(x) \qquad \& \qquad f(\theta_i) = \inf_{x\in[x_{i-1};x_i]} f(x) \tag{7.2.92}$$

Рассмотрим конечный набор чисел

$$f(\eta_1) - f(\theta_1),\ f(\eta_2) - f(\theta_2),\ \dots,\ f(\eta_i) - f(\theta_i),\ \dots,\ f(\eta_k) - f(\theta_k)$$

и выберем среди них максимальное: пусть соответствующий индекс обозначается j:

$$f(\eta_j) - f(\theta_j) = \max_{i=1,2,\dots,k} \left(f(\eta_i) - f(\theta_i) \right) \tag{7.2.93}$$

Обозначив теперь

$$\alpha = \eta_j, \qquad \beta = \theta_j$$

мы получим нужные числа: с одной стороны, поскольку $\alpha, \beta \in [x_{j-1}; x_j]$, получается

$$|\alpha - \beta| \leqslant \Delta x_j \leqslant \Delta\Big(\tau\Big)$$

А, с другой стороны,

$$f(\alpha) - f(\beta) = \max_{1\leqslant i\leqslant k} \Big(f(\eta_i) - f(\theta_i) \Big) = \max_{1\leqslant i\leqslant k} \left(\sup_{x\in[x_{i-1};x_i]} f(x) - \inf_{x\in[x_{i-1};x_i]} f(x) \right) \tag{7.2.94}$$

Поэтому

$$S_\tau - s_\tau = \sum_{i=1}^{k} \sup_{\xi\in[x_{i-1};x_i]} f(\xi)\cdot\Delta x_i - \sum_{i=1}^{k} \inf_{\xi\in[x_{i-1};x_i]} f(\xi)\cdot\Delta x_i = \sum_{i=1}^{k} \underbrace{\left[\sup_{\xi\in[x_{i-1};x_i]} f(\xi) - \inf_{\xi\in[x_{i-1};x_i]} f(\xi)\right]}_{\substack{\text{⩕ (7.2.94)}\\ f(\alpha)-f(\beta)}} \cdot\Delta x_i \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{k} \underbrace{\Big[f(\alpha)-f(\beta)\Big]}_{\substack{\text{не зависит}\\ \text{от индекса } i}} \cdot\Delta x_i = \Big[f(\alpha)-f(\beta)\Big]\cdot \underbrace{\sum_{i=1}^{k}\Delta x_i}_{\text{длина отрезка [a,b]}} = \Big[f(\alpha)-f(\beta)\Big]\cdot(b-a)$$

$\square$

Доказательство теоремы 7.2.4. Пусть $\tau^{(n)}$ – измельчающаяся последовательность разбиений отрезка $[a;b]$:

$$\mathsf{diam}\ \tau^{(n)} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

По лемме 7.2.5, найдутся числа $\alpha^{(n)}, \beta^{(n)} \in [a,b]$ такие, что

$$|\alpha^{(n)} - \beta^{(n)}| \leqslant \mathsf{diam}\ \tau^{(n)}$$

и

$$S_{\tau^{(n)}} - s_{\tau^{(n)}} \leqslant \Big[f(\alpha^{(n)}) - f(\beta^{(n)})\Big]\cdot(b-a)$$

Из первого условия следует, что последовательности $\alpha^{(n)}$ и $\beta^{(n)}$ стремятся друг к другу:

$$\alpha^{(n)} - \beta^{(n)} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

Поэтому по теореме Кантора 3.3.10 (функция f непрерывна на $[a;b]$, значит она должна быть равномерно непрерывна на нем), получаем:

$$f(\alpha^{(n)}) - f(\beta^{(n)}) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

Отсюда уже следует

$$0 \leqslant S_{\tau^{(n)}} - s_{\tau^{(n)}} \leqslant \Big[f(\alpha^{(n)}) - f(\beta^{(n)})\Big]\cdot(b-a) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \quad\Longrightarrow\quad S_{\tau^{(n)}} - s_{\tau^{(n)}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

Это верно для любой измельчающейся последовательности разбиений $\tau^{(n)}$, значит, по теореме 7.2.1, f интегрируема на $[a;b]$. $\square$

(c) Свойства определенного интеграла

Свойства определенного интеграла

1^0. **Линейность:** *если функции f и g интегрируемы на отрезке $[a;b]$ то для любых чисел $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ функция $\alpha\cdot f+\beta\cdot g$ тоже интегрируема на отрезке $[a;b]$, причем*

$$\int_{[a,b]} \Big(\alpha\cdot f(x) + \beta\cdot g(x)\Big)\ \mathsf{d}\,x = \alpha\cdot\int_{[a,b]} f(x)\ \mathsf{d}\,x + \beta\cdot\int_{[a,b]} g(x)\ \mathsf{d}\,x \qquad (7.2.95)$$

2^0. **Аддитивность:** *пусть $a<b<c$ и функция f интегрируема на отрезках $[a;b]$ и $[b;c]$, тогда она интегрируема на отрезке $[a;c]$, и при этом*

$$\int_{[a,b]} f(x)\ \mathsf{d}\,x + \int_{[b,c]} f(x)\ \mathsf{d}\,x = \int_{[a,c]} f(x)\ \mathsf{d}\,x \qquad (7.2.96)$$

3^0. **Монотонность:** *если функции f и g интегрируемы на отрезке $[a;b]$ и при этом*

$$f(x)\leqslant g(x), \qquad x\in[a;b] \qquad (7.2.97)$$

то

$$\int_{[a,b]} f(x)\ \mathsf{d}\,x \leqslant \int_{[a,b]} g(x)\ \mathsf{d}\,x \qquad (7.2.98)$$

4^0. **Выпуклость:** *если функция f интегрируема на отрезке $[a;b]$, то функция $|f|$ тоже интегрируема на отрезке $[a;b]$, и при этом*

$$\left|\int_{[a,b]} f(x)\ \mathsf{d}\,x\right| \leqslant \int_{[a,b]} |f(x)|\ \mathsf{d}\,x \tag{7.2.99}$$

5^0. **Оценка сверху:** *если функция f интегрируема на отрезке $[a;b]$, то*

$$\left|\int_{[a,b]} f(x)\ \mathsf{d}\,x\right| \leqslant (b-a)\cdot \sup_{x\in[a,b]} |f(x)| \tag{7.2.100}$$

6^0. **Непрерывность:** *если функция f интегрируема на отрезке $[a;b]$, то для всякой точки $c \in [a,b]$*

$$\int_{[a,y]} f(x)\ \mathsf{d}\,x \underset{y\to c}{\longrightarrow} \int_{[a,c]} f(x)\ \mathsf{d}\,x \tag{7.2.101}$$

$$\int_{[y,b]} f(x)\ \mathsf{d}\,x \underset{y\to c}{\longrightarrow} \int_c^b f(x)\ \mathsf{d}\,x \tag{7.2.102}$$

7^0. **Теорема о среднем:** *если функция f непрерывна на отрезке $[a;b]$, то найдется такая точка $\xi \in [a;b]$, что*

$$\int_{[a,b]} f(x)\ \mathsf{d}\,x = f(\xi)\cdot(b-a) \tag{7.2.103}$$

8^0. **Интегрируемость произведения:** *если функции f и g интегрируемы на отрезке $[a;b]$, то их произведение $f\cdot g$ – тоже интегрируемая функция на отрезке $[a;b]$.*

9^0. **Замена переменной:** *пусть*

1) *функция f интегрируема на отрезке $[a;b]$, и*
2) *функция φ определена на отрезке $[\alpha;\beta]$ и обладает свойствами:*
   a) *φ – гладкая на отрезке $[\alpha;\beta]$;*
   b) *φ – строго монотонная на отрезке $[\alpha;\beta]$;*
   c) *φ сюръективно отображает отрезок $[\alpha;\beta]$ на отрезок $[a;b]$:*

$$\varphi\Big([\alpha;\beta]\Big) = [a,b],$$

тогда функция $(f\circ\varphi)\cdot\varphi'$ интегрируема на отрезке $[\alpha,\beta]$, и

$$\int_{[a,b]} f(x)\ \mathsf{d}\,x = \int_{[\alpha,\beta]} f(\varphi(t))\cdot|\varphi'(t)|\ \mathsf{d}\,t \tag{7.2.104}$$

Доказательство. 1. Линейность. Пусть функции f и g интегрируемы на отрезке $[a;b]$, и

$$F = \int_{[a,b]} f(x)\ \mathsf{d}\,x, \qquad G = \int_{[a,b]} g(x)\ \mathsf{d}\,x$$

Для всякого разбиения $\tau = \{x_0, ..., x_k\}$ отрезка $[a;b]$ и любой системы выделенных точек $\xi_i \in [x_{i-1};x_i]$ мы получим:

$$\sum_{i=1}^k \Big(\alpha\cdot f(\xi_i) + \beta\cdot g(\xi_i)\Big)\cdot\Delta x_i = \alpha\cdot \underbrace{\sum_{i=1}^k f(\xi_i)\cdot\Delta x_i}_{\substack{\operatorname{diam}\tau \\ \downarrow\ \ \downarrow \\ F\quad 0}} + \beta\cdot \underbrace{\sum_{i=1}^k g(\xi_i)\cdot\Delta x_i}_{\substack{\operatorname{diam}\tau \\ \downarrow\ \ \downarrow \\ G\quad 0}} \underset{\operatorname{diam}\tau\to 0}{\longrightarrow} \alpha\cdot F + \beta\cdot G$$

Это нужно понимать так: если взять последовательность разбиений $\tau^{(n)}$, диаметры которых стремятся к нулю, то какую ни выбирай систему выделенных точек $\xi_i^{(n)}$, интегральная сумма функции

$\alpha\cdot f+\beta\cdot g$ будет стремится к числу $\alpha\cdot F+\beta\cdot G$. То есть, функция $\alpha\cdot f+\beta\cdot g$ получается интегрируемой, и

$$\int_{[a,b]}\Big(\alpha\cdot f(x)+\beta\cdot g(x)\Big)\ \mathsf{d}\,x=\alpha\cdot F+\beta\cdot G=\alpha\cdot\int_{[a,b]}f(x)\ \mathsf{d}\,x+\beta\cdot\int_{[a,b]}g(x)\ \mathsf{d}\,x$$

2. Аддитивность. Пусть f интегрируема на отрезках $[a;b]$ и $[b;c]$. Тогда по теореме 7.2.2, f ограничена на отрезках $[a;b]$ и $[b;c]$, а значит и на отрезке $[a;c]$:

$$\exists M\in\mathbb{R}\quad\forall x\in[a;c]\quad|f(x)|\leqslant M \tag{7.2.105}$$

Обозначим через A и B интегралы по отрезкам $[a;b]$ и $[b;c]$

$$A=\int_{[a,b]}f(x)\ \mathsf{d}\,x,\quad B=\int_{[b,c]}f(x)\ \mathsf{d}\,x$$

Нам нужно показать, что f интегрируема на $[a;c]$, причем

$$\int_{[a,c]}f(x)\ \mathsf{d}\,x=A+B$$

Возьмем разбиение $\tau=\{x_0,...,x_k\}$ отрезка $[a;c]$. Точка b попадет в какой-то полуинтервал $(x_{j-1},x_j]$:

$$\tau=\{a=x_0<x_1<...<x_{j-1}<b\leqslant x_j<x_{j+1}<...<x_k=c\}$$

Запомним этот индекс j и выберем произвольные точки $\xi_i\in[x_{i-1};x_i]$. Тогда:

$$\begin{aligned}
\overbrace{\sum_{i=1}^{k}f(\xi_i)\cdot\Delta x_i}^{\substack{\text{интегральная сумма}\\ \text{на отрезке }[a;c]}}&=\sum_{i=1}^{j-1}f(\xi_i)\cdot\Delta x_i+f(\xi_j)\cdot\Delta x_j+\sum_{i=j+1}^{k}f(\xi_i)\cdot\Delta x_i=\\
&=\sum_{i=1}^{j-1}f(\xi_i)\cdot\Delta x_i+\Big(f(b)+f(\xi_j)-f(b)\Big)\cdot\Delta x_j+\sum_{i=j+1}^{k}f(\xi_i)\cdot\Delta x_i=\\
&=\sum_{i=1}^{j-1}f(\xi_i)\cdot\Delta x_i+f(b)\cdot\Delta x_j+\sum_{i=j+1}^{k}f(\xi_i)\cdot\Delta x_i+\Big(f(\xi_j)-f(b)\Big)\cdot\Delta x_j=\\
&=\sum_{i=1}^{j-1}f(\xi_i)\cdot\Delta x_i+f(b)\cdot(x_j-x_{j-1})+\sum_{i=j+1}^{k}f(\xi_i)\cdot\Delta x_i+[f(\xi_j)-f(b)]\cdot\Delta x_j=\\
&=\underbrace{\sum_{i=1}^{j-1}f(\xi_i)\cdot\Delta x_i+f(b)\cdot(b-x_{j-1})}_{\text{интегральная сумма на отрезке }[a;b]}+\underbrace{f(b)\cdot(x_j-b)+\sum_{i=j+1}^{k}f(\xi_i)\cdot\Delta x_i}_{\text{интегральная сумма на отрезке }[b;c]}+[f(\xi_j)-f(b)]\cdot\Delta x_j
\end{aligned}$$

$$\Downarrow$$

$$\left|\overbrace{\sum_{i=1}^{k}f(\xi_i)\cdot\Delta x_i}^{\substack{\text{интегральная сумма}\\ \text{на отрезке }[a;c]}}-\underbrace{\overbrace{\left(\sum_{i=1}^{j-1}f(\xi_i)\cdot\Delta x_i+f(b)\cdot(b-x_{j-1})\right)}^{\text{интегральная сумма на отрезке }[a;b]}}_{\substack{\downarrow\ \overset{\operatorname{diam}\tau}{\downarrow 0}\\ A}}-\underbrace{\overbrace{\left(f(b)\cdot(x_j-b)+\sum_{i=j+1}^{k}f(\xi_i)\cdot\Delta x_i\right)}^{\text{интегральная сумма на отрезке }[b;c]}}_{\substack{\downarrow\ \overset{\operatorname{diam}\tau}{\downarrow 0}\\ B}}\right|=$$

$$=\Big|f(\xi_j)-f(b)\Big|\cdot\Delta x_j\leqslant\Big(\underbrace{\big|f(\xi_j)\big|}_{\substack{\wedge\!\!\!\backslash\\ M}}+\underbrace{\big|f(b)\big|}_{\substack{\wedge\!\!\!\backslash\\ M}}\Big)\cdot\underbrace{\Delta x_j}_{\substack{\wedge\!\!\!\backslash\\ \operatorname{diam}\tau}}\leqslant 2M\cdot\operatorname{diam}\ \tau\underset{\operatorname{diam}\tau\to 0}{\longrightarrow}0$$

$$\Downarrow$$

$$\sum_{i=1}^{k} f(\xi_i)\cdot\Delta x_i \underset{\operatorname{diam}\tau\to 0}{\longrightarrow} A+B$$

Опять же, это нужно понимать так, что какую ни возьми последовательность разбиений $\tau^{(n)}$ отрезка $[a,c]$, с диаметрами стремящимися к нулю, то при любом выборе выделенных точек $\xi_i^{(n)}$, интегральные суммы функции f на отрезке $[a,c]$ будут стремиться к числу $A+B$. Это нам и нужно было доказать.

3. Монотонность. Пусть функции f и g интегрируемы на отрезке $[a;b]$, причем

$$f(x)\leqslant g(x),\qquad x\in[a;b]$$

Тогда для любых разбиений $\tau=\{x_0,...,x_k\}$ отрезка $[a;c]$ и любых точек $\xi_i\in[x_{i-1};x_i]$ мы получим

$$\forall i\qquad f(\xi_i)\leqslant g(\xi_i)$$

$$\Downarrow$$

$$\forall i\qquad f(\xi_i)\cdot\Delta x_i\leqslant g(\xi_i)\cdot\Delta x_i$$

$$\Downarrow$$

$$\int_{[a,b]} f(x)\,\mathsf{d}\,x \underset{0\leftarrow\operatorname{diam}\tau}{\longleftarrow} \sum_{i=1}^{k} f(\xi_i)\cdot\Delta x_i\leqslant\sum_{i=1}^{k} g(\xi_i)\cdot\Delta x_i \underset{\operatorname{diam}\tau\to 0}{\longrightarrow}\int_{[a,b]} g(x)\,\mathsf{d}\,x$$

$$\Downarrow$$

$$\int_{[a,b]} f(x)\,\mathsf{d}\,x\leqslant\int_{[a,b]} g(x)\,\mathsf{d}\,x$$

4. Выпуклость. Здесь при доказательстве используются свойства точных граней функции, о которых мы говорили на с.196. Сначала нужно доказать следующее неравенство, связывающее верхние и нижние суммы Дарбу для f и $|f|$:

$$S_\tau(|f|)-s_\tau(|f|)\leqslant S_\tau(f)-s_\tau(f) \tag{7.2.106}$$

Действительно:

$$S_\tau(|f|)-s_\tau(|f|)=\sum_{i=1}^{k}\left(\sup_{\eta\in[x_{i-1};x_i]}|f(\eta)|-\inf_{\theta\in[x_{i-1};x_i]}|f(\theta)|\right)\cdot\Delta x_i=(3.1.26)=$$
$$=\sum_{i=1}^{k}\left(\sup_{\eta\in[x_{i-1};x_i]}|f(\eta)|+\sup_{\theta\in[x_{i-1};x_i]}\Big(-|f(\theta)|\Big)\right)\cdot\Delta x_i=\sum_{i=1}^{k}\sup_{\eta,\theta\in[x_{i-1};x_i]}\Big(|f(\eta)|-|f(\theta)|\Big)\cdot\Delta x_i\leqslant$$
$$\leqslant(3.1.11)\leqslant\sum_{i=1}^{k}\sup_{\eta,\theta\in[x_{i-1};x_i]}|f(\eta)-f(\theta)|\cdot\Delta x_i=(3.1.29)=\sum_{i=1}^{k}\sup_{\eta,\theta\in[x_{i-1};x_i]}(f(\eta)-f(\theta))\cdot\Delta x_i=$$
$$=\sum_{i=1}^{k}\left(\sup_{\eta\in[x_{i-1};x_i]}f(\eta)+\sup_{\theta\in[x_{i-1};x_i]}\Big(-f(\theta)\Big)\right)\cdot\Delta x_i=(3.1.26)=$$
$$=\sum_{i=1}^{k}\left(\sup_{\eta\in[x_{i-1};x_i]}f(\eta)-\inf_{\theta\in[x_{i-1};x_i]}f(\theta)\right)\cdot\Delta x_i=S_\tau(f)-s_\tau(f)$$

Если теперь функция f интегрируема на отрезке $[a;b]$, то по критерию интегрируемости (теорема 7.2.1 этой главы), для любой измельчающейся последовательности $\tau^{(n)}$ разбиений отрезка $[a;b]$ разность между верхними и нижними суммами Дарбу для функции f должна стремиться к нулю, поэтому из (7.2.106) получаем:

$$0\leqslant S_{\tau^{(n)}}(|f|)-s_{\tau^{(n)}}(|f|)\leqslant S_{\tau^{(n)}}(f)-s_{\tau^{(n)}}(f)\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}0$$

откуда

$$S_{\tau^{(n)}}(|f|)-s_{\tau^{(n)}}(|f|)\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}0$$

То есть функция $|f|$ тоже должна быть интегрируема на отрезке $[a;b]$. Нам остается доказать неравенство (7.2.99):

$$\left|\int_{[a,b]} f(x)\ \mathsf{d}\,x\right| \underset{0\leftarrow \operatorname{diam}\tau}{\longleftarrow} \left|\sum_{i=1}^{k} f(\xi_i)\cdot \Delta x_i\right| \leqslant (2.2.262) \leqslant \sum_{i=1}^{k} |f(\xi_i)|\cdot \Delta x_i \underset{\operatorname{diam}\tau\to 0}{\longrightarrow} \int_{[a,b]} |f(x)|\ \mathsf{d}\,x$$

$$\Downarrow$$

$$\left|\int_{[a,b]} f(x)\ \mathsf{d}\,x\right| \leqslant \int_{[a,b]} |f(x)|\ \mathsf{d}\,x$$

5. Оценка сверху. Если функция f интегрируема на отрезке $[a,b]$, то по теореме 7.2.2, она ограничена. Обозначим $C=\sup_{x\in[a,b]}|f(x)|$. Тогда

$$\left|\int_{[a,b]} f(x)\ \mathsf{d}\,x\right| \leqslant (7.2.99) \leqslant \underbrace{\int_{[a,b]} |f(x)|\ \mathsf{d}\,x \leqslant \int_{[a,b]} C\ \mathsf{d}\,x}_{\substack{\Uparrow\ (7.2.98)\\ |f(x)|\leqslant C}} = (7.2.73) = (b-a)\cdot C$$

6. Непрерывность. Из двух формул (7.2.101) и (7.2.102) мы докажем первую, имея в виду, что вторая доказывается по аналогии:

$$\int_{[a,y]} f(x)\ \mathsf{d}\,x \underset{y\to c}{\longrightarrow} \int_{[a,c]} f(x)\ \mathsf{d}\,x$$

Ее, в свою очередь, можно разбить на два односторонних предела,

$$\int_{[a,y]} f(x)\ \mathsf{d}\,x \underset{y\to c-0}{\longrightarrow} \int_{[a,c]} f(x)\ \mathsf{d}\,x, \qquad \int_{[a,y]} f(x)\ \mathsf{d}\,x \underset{y\to c+0}{\longrightarrow} \int_{[a,c]} f(x)\ \mathsf{d}\,x,$$

и доказать, например, второй, заявив, что первый доказывается аналогично:

$$\Bigg|\underbrace{\int_{[a,y]} f(x)\ \mathsf{d}\,x}_{\substack{\parallel\ (7.2.96)\\ \int_{[a,c]} f(x)\ \mathsf{d}\,x+\int_c^y f(x)\ \mathsf{d}\,x}} - \int_{[a,c]} f(x)\ \mathsf{d}\,x\Bigg| = \left|\int_c^y f(x)\ \mathsf{d}\,x\right| \leqslant (7.2.100) \leqslant \underbrace{(y-c)}_{\substack{\downarrow\\ 0}}\cdot \underbrace{\sup_{x\in[c,y]}|f(x)|}_{\substack{\wedge\!\!\!\backslash\\ \sup_{x\in[c,y]}|f(x)|\\ \wedge\ \text{теорема 7.2.2}\\ \infty}} \underset{y\to c+0}{\longrightarrow} 0$$

7. Теорема о среднем. Пусть f непрерывна на отрезке $[a;b]$. Тогда по теореме Вейерштрасса об экстремумах (теорема 3.3.8), найдутся такие точки $\alpha,\beta\in[a;b]$, что

$$\forall x\in[a;b] \qquad f(\alpha)\leqslant f(x)\leqslant f(\beta)$$

Теперь по уже доказанному свойству монотонности 3^0,

$$\int_{[a,b]} f(\alpha)\ \mathsf{d}\,x \leqslant \int_{[a,b]} f(x)\ \mathsf{d}\,x \leqslant \int_{[a,b]} f(\beta)\ \mathsf{d}\,x$$

Вспомнив теперь (7.2.73), получаем

$$f(\alpha)\cdot(b-a) \leqslant \int_{[a,b]} f(x)\ \mathsf{d}\,x \leqslant f(\beta)\cdot(b-a)$$

откуда

$$f(\alpha) \leqslant \frac{1}{b-a}\cdot\int_{[a,b]} f(x)\ \mathsf{d}\,x \leqslant f(\beta)$$

Таким образом, число $M=\frac{1}{b-a}\cdot\int_{[a,b]} f(x)$ лежит между значениями $f(\alpha)$ и $f(\beta)$ непрерывной функции f на отрезке $[\alpha;\beta]$. Значит, по теореме Коши о промежуточном значении (теорема 3.3.6), найдется точка $\xi\in[\alpha;\beta]\subseteq[a;b]$ такая что

$$f(\xi)=\frac{1}{b-a}\cdot\int_{[a,b]} f(x)\ \mathsf{d}\,x$$

Отсюда и получается (7.2.103):

$$\int_{[a,b]} f(x)\ \mathsf{d}\,x = f(\xi)\cdot(b-a)$$

8. Произведение интегрируемых функций. Пусть функции f и g интегрируемы на отрезке $[a;b]$. Тогда по теореме 7.2.2 они должны быть ограничены на $[a;b]$:

$$\exists A,B\in\mathbb{R}\quad \forall x\in[a;b]\quad |f(x)|\leqslant A,\quad |g(x)|\leqslant B$$

Заметим, что для любых $\eta,\theta\in[a,b]$ выполняется неравенство

$$|f(\eta)\cdot g(\eta)-f(\theta)\cdot g(\theta)|\leqslant B\cdot|f(\eta)-f(\theta)|+A\cdot|g(\eta)-g(\theta)| \tag{7.2.107}$$

Действительно,

$$\begin{aligned}&|f(\eta)\cdot g(\eta)-f(\theta)\cdot g(\theta)| = |f(\eta)\cdot g(\eta)-f(\theta)\cdot g(\eta)+f(\theta)\cdot g(\eta)-f(\theta)\cdot g(\theta)|\leqslant\\ &\leqslant |f(\eta)\cdot g(\eta)-f(\theta)\cdot g(\eta)|+|f(\theta)\cdot g(\eta)-f(\theta)\cdot g(\theta)| = |f(\eta)-f(\theta)|\cdot|g(\eta)|+|f(\theta)|\cdot|g(\eta)-g(\theta)|\leqslant\\ &\leqslant |f(\eta)-f(\theta)|\cdot B+A\cdot|g(\eta)-g(\theta)|\end{aligned}$$

Теперь, чтобы доказать, что $f\cdot g$ интегрируема на $[a;b]$, возьмем разбиение τ отрезка $[a;b]$ и оценим разность между верхними и нижними суммами Дарбу для функции $f(x)\cdot g(x)$:

$$\begin{aligned}S_\tau(f\cdot g)-s_\tau(f\cdot g) &= \sum_{i=1}^{k}\left(\sup_{\eta\in[x_{i-1};x_i]} f(\eta)\cdot g(\eta)-\inf_{\theta\in[x_{i-1};x_i]} f(\theta)\cdot g(\theta)\right)\cdot\Delta x_i =\\ &= \sum_{i=1}^{k}\sup_{\eta,\theta\in[x_{i-1};x_i]}\Big|f(\eta)\cdot g(\eta)-f(\theta)\cdot g(\theta)\Big|\cdot\Delta x_i\leqslant(7.2.107)\leqslant\\ &\leqslant \sum_{i=1}^{k}\sup_{\eta,\theta\in[x_{i-1};x_i]}\Big(B\cdot\Big|f(\eta)-f(\theta)\Big|+A\cdot\Big|g(\eta)-g(\theta)\Big|\Big)\cdot\Delta x_i =\\ &= B\cdot\sum_{i=1}^{k}\sup_{\eta,\theta\in[x_{i-1};x_i]}\Big|f(\eta)-f(\theta)\Big|\cdot\Delta x_i+A\cdot\sum_{i=1}^{k}\sup_{\eta,\theta\in[x_{i-1};x_i]}\Big|g(\eta)-g(\theta)\Big|\cdot\Delta x_i =\\ &= B\cdot\underbrace{\Big(S_\tau(f)-s_\tau(f)\Big)}_{\substack{\downarrow\ \mathrm{diam}\,\tau\to 0\\ 0,\\ \text{поскольку } f\\ \text{интегрируема}}}+A\cdot\underbrace{\Big(S_\tau(g)-s_\tau(g)\Big)}_{\substack{\downarrow\ \mathrm{diam}\,\tau\to 0\\ 0,\\ \text{поскольку } g\\ \text{интегрируема}}}\xrightarrow[\mathrm{diam}\,\tau\to 0]{} 0\end{aligned}$$

9. Замена переменной. Пусть функции $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ и $\varphi:[\alpha,\beta]\to[a,b]$ обладают свойствами, описанными на с.435. Поскольку f интегрируема, по теореме 7.2.2 должна быть конечна величина

$$M=\sup_{x\in[a,b]}|f(x)|$$

Далее, функция φ строго монотонна, значит она либо возрастает, либо убывает. Будем считать для начала, что φ возрастает. Тогда

$$\varphi(\alpha)=a,\qquad \varphi(\beta)=b,\qquad \varphi'(x)\geqslant 0,\quad x\in[\alpha,\beta]$$

Рассмотрим произвольное разбиение $\tau=\{t_0,...,t_i,...,t_k\}$ отрезка $[\alpha,\beta]$ с выделенной системой точек $\zeta_i\in[t_{i-1},t_i]$. Положив $x_i=\varphi(t_i)$ и $\xi_i=\varphi(\zeta_i)$, мы получим разбиение отрезка $[a,b]$, причем по теореме Лагранжа 5.1.7, для некоторых точек $\eta_i\in[t_{i-1},t_i]$ будет выполняться равенство

$$\Delta x_i=x_i-x_{i-1}=\varphi(t_i)-\varphi(t_{i-1})=(5.1.33)=\varphi'(\eta_i)\cdot(t_i-t_{i-1})=\varphi'(\eta_i)\cdot\Delta t_i$$

Если теперь взять $\varepsilon>0$, то по теореме Кантора 3.3.10 найдется $\delta>0$ такое, что для любых $s,t\in[\alpha,\beta]$ выполняется импликация:

$$|s-t|<\delta\quad\Longrightarrow\quad|\varphi'(s)-\varphi'(t)|<\frac{\varepsilon}{M\cdot(\beta-\alpha)}$$

Поэтому если диаметр разбиения τ меньше δ, мы получим

$$\Big|\sum_{i=1}^k \underbrace{f\big(\varphi(\zeta_i)\big)}_{\substack{\parallel\\ f(\xi_i)}}\cdot\underbrace{|\varphi'(\zeta_i)|}_{\substack{\parallel\\ \varphi'(\zeta_i)}}\cdot\Delta t_i-\sum_{i=1}^k f(\xi_i)\cdot\underbrace{\Delta x_i}_{\substack{\parallel\\ \varphi'(\eta_i)\cdot\Delta t_i}}\Big|=\Big|\sum_{i=1}^k f(\xi_i)\cdot\big(\varphi'(\zeta_i)-\varphi'(\eta_i)\big)\cdot\Delta t_i\Big|\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{i=1}^k \underbrace{|f(\xi_i)|}_{\substack{\wedge\!\!\backslash\\ \sup_{x\in[a,b]}|f(x)|\\ \parallel\\ M}}\cdot\underbrace{|\varphi'(\zeta_i)-\varphi'(\eta_i)|}_{\substack{\wedge\\ \frac{\varepsilon}{M\cdot(\beta-\alpha)}}}\cdot\Delta t_i<M\cdot\frac{\varepsilon}{M\cdot(\beta-\alpha)}\cdot\underbrace{\sum_{i=1}^k\Delta t_i}_{\substack{\parallel\\ \beta-\alpha}}=\varepsilon$$

Это означает, что при стремлении к нулю диаметра разбиения τ отрезка $[\alpha,\beta]$ интегральные суммы стремятся друг к другу:

$$\sum_{i=1}^k f\big(\varphi(\zeta_i)\big)\cdot\varphi'(\zeta_i)\cdot\Delta t_i-\sum_{i=1}^k f(\xi_i)\cdot\Delta x_i\underset{\mathsf{diam}\,\tau\to 0}{\longrightarrow}0$$

С другой стороны, диаметр соответствующего разбиения $\varphi(\tau)=\{x_0,...,x_k\}$ отрезка $[a,b]$ тоже при этом будет стремиться к нулю, потому что

$$\mathsf{diam}\,\varphi(\tau)=\max_i\Delta x_i=\max_i\varphi'(\eta_i)\cdot\Delta t_i\leqslant\max_{t\in[\alpha,\beta]}\varphi'(t)\cdot\max_i\Delta t_i=\max_{t\in[\alpha,\beta]}\varphi'(t)\cdot\mathsf{diam}\,\tau\underset{\mathsf{diam}\,\tau\to 0}{\longrightarrow}0$$

Значит интегральные суммы $\sum_{i=1}^k f(\xi_i)\cdot\Delta x_i$ должны стремиться к интегралу $\int_{[a,b]}f(x)\ \mathsf{d}\,x$, и мы получаем:

$$\sum_{i=1}^k f\big(\varphi(\zeta_i)\big)\cdot\varphi'(\zeta_i)\cdot\Delta t_i-\underbrace{\sum_{i=1}^k f(\xi_i)\cdot\Delta x_i}_{\substack{\downarrow\quad\ \substack{\mathsf{diam}\,\varphi(\tau)\\ \downarrow\\ 0}\\ \int_{[a,b]}f(x)\ \mathsf{d}\,x}}\underset{\mathsf{diam}\,\tau\to 0}{\longrightarrow}0$$

То есть

$$\sum_{i=1}^k f\big(\varphi(\zeta_i)\big)\cdot\varphi'(\zeta_i)\cdot\Delta t_i\underset{\mathsf{diam}\,\tau\to 0}{\longrightarrow}\int_{[a,b]}f(x)\ \mathsf{d}\,x$$

Остается рассмотреть случай, когда φ убывает. Тогда возрастающая последовательность

$$\alpha=t_0<...<t_i<...<t_k=\beta$$

превращается в убывающую

$$b=x_0>...>x_i>...>x_k=a$$

Поэтому в интегральной сумме величину Δx_i нужно определять как разность $x_{i-1}-x_i$, чтобы она получилась положительной:

$$\Delta x_i=-\Big(x_i-x_{i-1}\Big)=-\Big(\varphi(t_i)-\varphi(t_{i-1})\Big)=(5.1.33)=-\varphi'(\eta_i)\cdot(t_i-t_{i-1})=-\varphi'(\eta_i)\cdot\Delta t_i$$

Вдобавок, поскольку φ убывает, ее производная должна быть отрицательной

$$\varphi'(t)\leqslant 0\qquad\Longrightarrow\qquad|\varphi'(\zeta_i)|=-\varphi'(\zeta_i)$$

и в вычислениях мы получим

$$\Big|\sum_{i=1}^k \underbrace{f\big(\varphi(\zeta_i)\big)}_{\substack{\parallel\\ f(\xi_i)}}\cdot\underbrace{|\varphi'(\zeta_i)|}_{\substack{\parallel\\ -\varphi'(\zeta_i)}}\cdot\Delta t_i-\sum_{i=1}^k f(\xi_i)\cdot\underbrace{\Delta x_i}_{\substack{\parallel\\ -\varphi'(\eta_i)\cdot\Delta t_i}}\Big|=\Big|-\sum_{i=1}^k f(\xi_i)\cdot\big(\varphi'(\zeta_i)-\varphi'(\eta_i)\big)\cdot\Delta t_i\Big|\leqslant...<\varepsilon$$

Таким образом, после взятия модуля ничто не меняется, и все рассуждения можно оставить прежними. □

(d) Формула Бонне

Преобразование Абеля.

Лемма 7.2.6. *Для любых числовых последовательностей* $\{a_n\}$ *и* $\{b_n\}$, $p \leqslant n \leqslant q$, *справедливо равенство*

$$\sum_{n=p}^{q} a_n \cdot b_n = \sum_{n=p}^{q-1} A_n \cdot (b_n - b_{n+1}) + A_q \cdot b_q, \qquad p \leqslant q \tag{7.2.108}$$

где

$$A_N = \sum_{n=p}^{N} a_n$$

- Равенство (7.2.108) называется *преобразованием Абеля*[8], а неравенство (7.2.114) – *неравенством Абеля.*

Доказательство.

$$\sum_{n=p}^{q} a_n \cdot b_n = \overbrace{a_p}^{\substack{A_p \\ \parallel}} \cdot b_p + \overbrace{a_{p+1}}^{\substack{-A_p + A_{p+1} \\ \parallel}} \cdot b_{p+1} + \dots + \overbrace{a_{q-1}}^{\substack{-A_{q-2} + A_{q-1} \\ \parallel}} \cdot b_{q-1} + \overbrace{a_q}^{\substack{-A_{q-1} + A_q \\ \parallel}} \cdot b_q =$$

$$= A_p b_p + (-A_p + A_{p+1}) b_{p+1} + \dots + (-A_{q-2} + A_{q-1}) b_{q-1} + (-A_{q-1} + A_q) b_q =$$

$$= \underbrace{A_p b_p - A_p b_{p+1}}_{\substack{\parallel \\ A_p(b_p - b_{p+1})}} + \underbrace{A_{p+1} b_{p+1} +}\dots \underbrace{- A_{q-2} b_{q-1}} + \underbrace{A_{q-1} b_{q-1} - A_{q-1} b_q}_{\substack{\parallel \\ A_{q-1}(b_{q-1} - b_q)}} + A_q b_q =$$

$$= \sum_{n=p}^{q-1} A_n \cdot (b_n - b_{n+1}) + A_q \cdot b_q$$

□

Лемма 7.2.7. *Если числа*

$$A_n = \sum_{i=p}^{n} a_i$$

удовлетворяют неравенствам

$$m \leqslant A_n \leqslant M, \tag{7.2.109}$$

а числа b_n *неотрицательны и невозрастают*

$$b_p \geqslant b_{p+1} \geqslant \dots \geqslant b_n \geqslant b_{n+1} \geqslant \dots \geqslant b_q \geqslant 0, \tag{7.2.110}$$

то

$$m \cdot b_p \leqslant \sum_{n=p}^{q} a_n \cdot b_n \leqslant M \cdot b_p. \tag{7.2.111}$$

Доказательство. Домножая (7.2.109) на $b_n - b_{n+1} \geqslant 0$, мы получим неравенства

$$m \cdot (b_n - b_{n+1}) \leqslant A_n \cdot (b_n - b_{n+1}) \leqslant M \cdot (b_n - b_{n+1}). \tag{7.2.112}$$

Точно так же, домножая неравенство

$$m \leqslant A_q \leqslant M,$$

на число $b_q \geqslant 0$, мы получим

$$m \cdot b_q \leqslant A_q \cdot b_q \leqslant M \cdot b_q. \tag{7.2.113}$$

---

[8] В (7.2.108) можно ввести третий параметр, число $M < p$, и тогда в обозначении $A_N = \sum_{n=M}^{N} a_n$ формула примет более привычный вид:

$$\sum_{n=p}^{q} a_n \cdot b_n = \sum_{n=p}^{q-1} A_n \cdot (b_n - b_{n+1}) + A_q \cdot b_q - A_{p-1} \cdot b_p,$$

Отсюда, во-первых, получается цепочка

$$\sum_{n=p}^{q} a_n \cdot b_n = (7.2.108) = \sum_{n=p}^{q-1} A_n \cdot (b_n - b_{n+1}) + A_q \cdot b_q \geqslant \sum_{n=p}^{q-1} m \cdot (b_n - b_{n+1}) + m \cdot b_q =$$

$$= m \cdot \left(\sum_{n=p}^{q-1} (b_n - b_{n+1}) + b_q \right) = m \cdot \left(\underbrace{b_p - b_{p+1}}_{n=p} + \underbrace{b_{p+1} - b_{p+2}}_{n=p+1} + \ldots + \underbrace{b_{q-1} - b_q}_{n=q-1} + b_q \right) = m \cdot b_p.$$

И, во-вторых, цепочка

$$\sum_{n=p}^{q} a_n \cdot b_n = (7.2.108) = \sum_{n=p}^{q-1} A_n \cdot (b_n - b_{n+1}) + A_q \cdot b_q \leqslant \sum_{n=p}^{q-1} M \cdot (b_n - b_{n+1}) + M \cdot b_q =$$

$$= M \cdot \left(\sum_{n=p}^{q-1} (b_n - b_{n+1}) + b_q \right) = M \cdot \left(\underbrace{b_p - b_{p+1}}_{n=p} + \underbrace{b_{p+1} - b_{p+2}}_{n=p+1} + \ldots + \underbrace{b_{q-1} - b_q}_{n=q-1} + b_q \right) = M \cdot b_p.$$

□

Лемма 7.2.8. *Если $\{b_n\}$ – монотонная последовательность, то справедливо неравенство*

$$\left| \sum_{n=p}^{q} a_n \cdot b_n \right| \leqslant 3 \cdot \max_{p \leqslant N \leqslant q} \left| \sum_{n=p}^{N} a_n \right| \cdot \max \Big\{ |b_p|, |b_q| \Big\} \tag{7.2.114}$$

- Неравенство (7.2.114) называется *неравенством Абеля.*

Доказательство. Здесь можно считать, что $\{b_n\}$ невозрастает, потому что случай, когда она неубывает, сводится к этому умножением $\{b_n\}$ на -1:

$$b_1 \geqslant b_2 \geqslant b_3 \geqslant \ldots \tag{7.2.115}$$

Обозначим

$$A = \max_{p \leqslant N \leqslant q} |A_N| = \max_{p \leqslant N \leqslant q} \left| \sum_{n=p}^{N} a_n \right| \tag{7.2.116}$$

Тогда:

$$\left| \sum_{n=p}^{q} a_n \cdot b_n \right| = (7.2.108) = \left| \sum_{n=p}^{q-1} A_n \cdot (b_n - b_{n+1}) + A_q \cdot b_q \right| \leqslant \sum_{n=p}^{q-1} \underbrace{|A_n|}_{\substack{\wedge\!\!\backslash\ (7.2.116) \\ A}} \cdot |b_n - b_{n+1}| + \underbrace{|A_q|}_{\substack{\wedge\!\!\backslash \\ A}} \cdot |b_q| \leqslant$$

$$\leqslant A \cdot \left(\sum_{n=p}^{q-1} \underbrace{| \overbrace{b_n - b_{n+1}}^{\substack{0 \\ \wedge\!\!\backslash\ (7.2.115)}} |}_{\substack{\| \\ b_n - b_{n+1}}} + |b_q| \right) = A \cdot \left(\sum_{n=p}^{q-1} (b_n - b_{n+1}) + |b_q| \right) =$$

$$= A \cdot \left(\underbrace{b_p - b_{p+1}}_{n=p} + \underbrace{b_{p+1} - b_{p+2}}_{n=p+1} + \ldots + \underbrace{b_{q-1} - b_q}_{n=q-1} + |b_q| \right) =$$

$$= A \cdot (b_p - b_q + |b_q|) \leqslant A \cdot (|b_p| + |b_q| + |b_q|) \leqslant 3 \cdot A \cdot \max\{|b_p|, |b_q|\}$$

□

Формула Бонне. Ниже при доказательстве теоремы 8.1.9 нам понадобится следующее утверждение:

Теорема 7.2.9. *Если f – интегрируемая, а g – монотонная функции на отрезке $[a,b]$, то найдется точка $\xi \in [a,b]$ такая, что*

$$\int_{[a,b]} f(x)\cdot g(x)\ \mathsf{d}\,x = g(a)\cdot\int_{[a,\xi]} f(x)\ \mathsf{d}\,x + g(b)\cdot\int_{[\xi,b]} f(x)\ \mathsf{d}\,x \tag{7.2.117}$$

- Равенство (7.2.117) называется *формулой Бонне*[9], а теорему 7.2.9 иногда называют *второй теоремой о среднем для интеграла.*

Для его доказательства нам, в свою очередь, понадобятся две леммы.

Лемма 7.2.10. *Если f – интегрируемая, а g – неотрицательная невозрастающая функции на отрезке $[a,b]$, то*

$$g(a)\cdot\min_{\xi\in[a,b]}\int_{[a,\xi]} f(x)\ \mathsf{d}\,x \leqslant \int_{[a,b]} f(x)\cdot g(x)\ \mathsf{d}\,x \leqslant g(a)\cdot\max_{\xi\in[a,b]}\int_{[a,\xi]} f(x)\ \mathsf{d}\,x \tag{7.2.118}$$

Доказательство. 1. Докажем сначала такую формулу:

$$\sum_{i=1}^n g(x_{i-1})\cdot\int_{[x_{i-1},x_i]} f(x)\,\mathsf{d}\,x \underset{\mathsf{diam}\,\tau\to 0}{\longrightarrow} \int_{[a,b]} f(x)\cdot g(x)\ \mathsf{d}\,x \tag{7.2.119}$$

Для этого заметим, что функция f, будучи интегрирроуемой по Риману на $[a,b]$, ограничена на этом отрезке:

$$|f(x)| \leqslant C, \qquad x\in[a,b] \tag{7.2.120}$$

Поэтому

$$\left|\sum_{i=1}^n g(x_{i-1})\cdot\int_{[x_{i-1},x_i]} f(x)\,\mathsf{d}\,x - \int_{[a,b]} f(x)\cdot g(x)\ \mathsf{d}\,x\right| =$$

$$= \left|\sum_{i=1}^n\int_{[x_{i-1},x_i]} g(x_{i-1})\cdot f(x)\,\mathsf{d}\,x - \sum_{i=1}^n\int_{[x_{i-1},x_i]} g(x)\cdot f(x)\ \mathsf{d}\,x\right| = \left|\sum_{i=1}^n\int_{[x_{i-1},x_i]}\Big(g(x_{i-1}-g(x))\Big)\cdot f(x)\,\mathsf{d}\,x\right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^n\int_{[x_{i-1},x_i]}\Big|g(x_{i-1})-g(x)\Big|\cdot|f(x)|\,\mathsf{d}\,x \leqslant C\cdot\sum_{i=1}^n\int_{[x_{i-1},x_i]}\Big|\underbrace{g(x_{i-1})-g(x)}_{\substack{\geqslant \\ 0}\quad x\geqslant x_{i-1}\ \Rightarrow\ g(x_{i-1})\geqslant g(x)}\Big|\,\mathsf{d}\,x =$$

$$= C\cdot\sum_{i=1}^n\int_{[x_{i-1},x_i]}\underbrace{\Big(g(x_{i-1})-g(x)\Big)}_{\substack{\leqslant \quad x\leqslant x_i\ \Rightarrow\ g(x)\geqslant g(x_i) \\ g(x_{i-1})-g(x_i)}}\,\mathsf{d}\,x \leqslant C\cdot\sum_{i=1}^n\int_{[x_{i-1},x_i]}\Big(g(x_{i-1}-g(x_i))\Big)\,\mathsf{d}\,x =$$

$$= C\cdot\sum_{i=1}^n\Big(g(x_{i-1})-g(x_i)\Big)\cdot\Delta x_i = C\cdot\Bigg(\underbrace{\sum_{i=1}^n \underbrace{g(x_{i-1})}_{\substack{\| \\ \sup\limits_{x\in[x_{i-1},x_i]} g(x)}}\cdot\Delta x_i}_{\substack{\| \\ S_\tau \\ \text{(верхняя интегральная} \\ \text{сумма Дарбу)}}} - \underbrace{\sum_{i=1}^n \underbrace{g(x_i)}_{\substack{\| \\ \inf\limits_{x\in[x_{i-1},x_i]} g(x)}}\cdot\Delta x_i}_{\substack{\| \\ s_\tau \\ \text{(нижняя интегральная} \\ \text{сумма Дарбу)}}}\Bigg) =$$

$$= C\cdot\big(S_\tau - s_\tau\big) \underset{\mathsf{diam}\,\tau\to 0}{\longrightarrow} 0$$

2. Обозначим

$$F(t) = \int_a^t f(x)\,\mathsf{d}\,x, \quad m = \min_{\xi\in[a,b]} F(\xi), \quad M = \max_{\xi\in[a,b]} F(\xi).$$

Тогда по формуле (7.2.113),

$$\underbrace{m\cdot g(x_0)}_{\substack{\| \\ m\cdot g(a)}} \leqslant \underbrace{\sum_{i=1}^n g(x_{i-1})\cdot\Big(F(x_i)-F(x_{i-1})\Big)}_{\substack{\| \\ \sum_{i=1}^n g(x_{i-1})\cdot\int_{[x_{i-1},x_i]} f(x)\,\mathsf{d}\,x \\ \downarrow\ (7.2.119) \\ \int_{[a,b]} f(x)\cdot g(x)\ \mathsf{d}\,x}} \leqslant \underbrace{M\cdot g(x_0)}_{\substack{\| \\ M\cdot g(a)}}$$

---

[9]П.О.Бонне (1819-1892) – французский математик

В пределе как раз получается формула (7.2.118):

$$m \cdot g(a) \leqslant \int_{[x_{i-1},x_i]} f(x)\,\mathsf{d}\,x \leqslant M \cdot g(a).$$

$\square$

Лемма 7.2.11. *Если f – интегрируемая, а g – неотрицательная невозрастающая функции на отрезке $[a,b]$, то найдется точка $\xi \in [a,b]$ такая, что*

$$\int_{[a,b]} f(x) \cdot g(x)\ \mathsf{d}\,x = g(a) \cdot \int_{[a,\xi]} f(x)\ \mathsf{d}\,x \tag{7.2.121}$$

Доказательство. Если $g(a) = 0$, то (7.2.118) превращается в двойное неравенство

$$0 \leqslant \int_{[a,b]} f(x) \cdot g(x)\ \mathsf{d}\,x \leqslant 0$$

из которого мы получаем

$$\int_{[a,b]} f(x) \cdot g(x)\ \mathsf{d}\,x = 0 = g(a) \cdot \int_{[a,\xi]} f(x)\ \mathsf{d}\,x.$$

Если же $g(a) \neq 0$, то поскольку g неотрицательна, это означает, что $g(a) > 0$, и поделив (7.2.118) на число $g(a)$, мы получим двойное неравенство

$$\min_{\xi\in[a,b]} \int_{[a,\xi]} f(x)\ \mathsf{d}\,x \leqslant \frac{1}{g(a)} \cdot \int_{[a,b]} f(x) \cdot g(x)\ \mathsf{d}\,x \leqslant \max_{\xi\in[a,b]} \int_{[a,\xi]} f(x)\ \mathsf{d}\,x \tag{7.2.122}$$

Если обозначить

$$F(t) = \int_a^t f(x)\ \mathsf{d}\,x,$$

то (7.2.122) можно будет переписать так:

$$\min_{t\in[a,b]} F(t) \leqslant \frac{1}{g(a)} \cdot \int_{[a,b]} f(x) \cdot g(x)\ \mathsf{d}\,x \leqslant \max_{t\in[a,b]} F(t)$$

При этом по свойству 6° на с.435, F — непрерывная функция. Мы получаем, что число

$$\frac{1}{g(a)} \cdot \int_{[a,b]} f(x) \cdot g(x)\ \mathsf{d}\,x$$

лежит между некоторыми значениями $\min_{t\in[a,b]} F(t)$ и $\min_{t\in[a,b]} F(t)$ непрерывной функции F на отрезке $[a,b]$. По теореме Коши о промежуточном значении 3.3.6, найдется точка $\xi \in [a,b]$ такая, что

$$F(\xi) = \frac{1}{g(a)} \cdot \int_{[a,b]} f(x) \cdot g(x)\ \mathsf{d}\,x.$$

Это и есть формула (7.2.121). $\square$

Доказательство теоремы 7.2.9. 1. Будем считать для начала, что g — неубывающая функция. Рассмотрим функцию

$$G(x) = g(b) - g(x).$$

Она будет невозрастающей и неотрицательной функцией. Поэтому по лемме 7.2.11 найдется точка $\xi \in [a,b]$ такая, что

$$\int_{[a,b]} f(x) \cdot G(x)\ \mathsf{d}\,x = G(a) \cdot \int_{[a,\xi]} f(x)\ \mathsf{d}\,x$$

Отсюда мы получаем цепочку:

$$\int_{[a,b]} f(x) \cdot G(x)\ \mathsf{d}\,x = G(a) \cdot \int_{[a,\xi]} f(x)\ \mathsf{d}\,x$$

$$\Downarrow$$

$$\int_{[a,b]} f(x)\cdot\big(g(b)-g(x)\big)\ \mathsf{d}\,x = \big(g(b)-g(a)\big)\cdot\int_{[a,\xi]} f(x)\ \mathsf{d}\,x$$

$$\Downarrow$$

$$g(b)\cdot\int_{[a,b]} f(x)\ \mathsf{d}\,x - \int_{[a,b]} f(x)\cdot g(x)\ \mathsf{d}\,x = g(b)\cdot\int_{[a,\xi]} f(x)\ \mathsf{d}\,x - g(a)\cdot\int_{[a,\xi]} f(x)\ \mathsf{d}\,x$$

$$\Downarrow$$

$$-g(b)\cdot\int_{[a,b]} f(x)\ \mathsf{d}\,x + \int_{[a,b]} f(x)\cdot g(x)\ \mathsf{d}\,x = -g(b)\cdot\int_{[a,\xi]} f(x)\ \mathsf{d}\,x + g(a)\cdot\int_{[a,\xi]} f(x)\ \mathsf{d}\,x$$

$$\Downarrow$$

$$\int_{[a,b]} f(x)\cdot g(x)\ \mathsf{d}\,x = \underbrace{g(b)\cdot\int_{[a,b]} f(x)\ \mathsf{d}\,x - g(b)\cdot\int_{[a,\xi]} f(x)\ \mathsf{d}\,x}_{\substack{\| \\ g(b)\cdot\left(\int_{[a,b]} f(x)\ \mathsf{d}\,x - \int_{[a,\xi]} f(x)\ \mathsf{d}\,x\right) \\ \| \\ g(b)\cdot\int_{[\xi,b]} f(x)\ \mathsf{d}\,x}} + g(a)\cdot\int_{[a,\xi]} f(x)\ \mathsf{d}\,x$$

$$\Downarrow$$

$$\int_{[a,b]} f(x)\cdot g(x)\ \mathsf{d}\,x = g(a)\cdot\int_{[a,\xi]} f(x)\ \mathsf{d}\,x + g(b)\cdot\int_{[\xi,b]} f(x)\ \mathsf{d}\,x.$$

2. Если g — невозрастающая функция, то мы можем рассмотреть функцию

$$G(x) = g(x) - g(a).$$

Она будет невозрастающей и неотрицательной функцией и те же самые рассуждения приведут нас к тому же результату. $\square$

§ 3 Формула Ньютона-Лейбница

Между двумя независимыми на первый взгляд понятиями – производной и определенным интегралом, – как оказывается, существует глубокая связь. Эта связь устанавливается знаменитой формулой Ньютона-Лейбница, которая считается главной в интегральном исчислении. Здесь мы поговорим об этой формуле.

(a) Основные результаты

Гладкие функции и интеграл с переменным верхним пределом на отрезке.

- Функция h называется *гладкой на отрезке* $[a;b]$, если она дифференцируема на $[a;b]$ (в смысле определения на с.399), и ее производная h' на этом отрезке (определенная формулой (7.1.26)) непрерывна на $[a;b]$. Класс всех гладких функций на $[a;b]$ обозначается символом $\mathcal{C}^1[a,b]$. Из предложения 7.1.4 следует, что любая гладкая функция автоматически непрерывна, то есть выполняется включение:

$$\mathcal{C}^1[a,b] \subset \mathcal{C}[a,b] \qquad (7.3.123)$$

Теорема 7.3.1 (об интеграле с переменным верхним пределом)**.** *Пусть функция f непрерывна на отрезке $[a;b]$, тогда функция*

$$F(x) = \int_{[a,x]} f(t)\ \mathsf{d}\,t \qquad (7.3.124)$$

является гладкой на $[a;b]$ и будет первообразной для f на $[a;b]$:

$$F'(c) = f(c), \qquad c \in [a,b]. \qquad (7.3.125)$$

! **7.3.1.** В соответствии с определением производной на отрезке формулой (7.1.26), соотношение (7.3.125) следует понимать так:

— для точек внутри отрезка $[a;b]$ эта формула расшифровывается как равенство

$$F'(c)=\lim_{x\to c}\frac{1}{x-c}\left(\int_{[a,x]}f(t)\,\mathsf{d}\,t-\int_{[a,c]}f(t)\,\mathsf{d}\,t\right)=f(c),\quad c\in(a;b)\tag{7.3.126}$$

— а на концах отрезка $[a;b]$ имеются в виду односторонние производные:

$$F'_{+}(a)=\lim_{x\to a+0}\frac{1}{x-a}\int_{[a,x]}f(t)\ \mathsf{d}\,t=f(a),\tag{7.3.127}$$

$$F'_{-}(b)=\lim_{x\to b-0}\frac{1}{x-b}\left(\int_{[a,x]}f(t)\ \mathsf{d}\,t-\int_{[a,b]}f(t)\ \mathsf{d}\,t\right)=\lim_{x\to b-0}\frac{1}{b-x}\int_{x}^{b}f(t)\ \mathsf{d}\,t=f(b).\tag{7.3.128}$$

Доказательство. Заметим сразу, что здесь достаточно доказать тождество (7.3.125), потому что остальное – то есть утверждение, что функция F является гладкой – будет следовать из (7.3.125) и того факта, что f непрерывна. В свою очередь (7.3.125) разбивается на условия (7.3.126)-(7.3.128), и каждое нужно проверить. Зафиксируем для этого какую-нибудь точку $c\in[a;b]$ и найдем в ней производную функции F. Нам придется рассмотреть несколько случаев.

1. Пусть для начала точка c лежит внутри отрезка $[a;b]$, то есть $a<c<b$. Чтобы найти производную функции $F(x)$ в точке c,

$$F'(c)=\lim_{x\to c}\frac{F(x)-F(c)}{x-c},$$

вычислим по отдельности правый и левый пределы в этой точке.

a) Пусть $x>c$, то есть $a<c<x<b$. Тогда

$$\begin{aligned}\frac{F(x)-F(c)}{x-c}&=\frac{1}{x-c}\left\{\int_{[a,x]}f(t)\,\mathsf{d}\,t-\int_{[a,c]}f(t)\,\mathsf{d}\,t\right\}=\\&=\frac{1}{x-c}\left\{\int_{[a,c]}f(t)\,\mathsf{d}\,t+\int_{[c,x]}f(t)\,\mathsf{d}\,t-\int_{[a,c]}f(t)\,\mathsf{d}\,t\right\}=\\&=\frac{1}{x-c}\cdot\underbrace{\int_{[c,x]}f(t)\,\mathsf{d}\,t}_{\substack{\overset{(7.2.103)}{\|}\\ f(\xi)\cdot(x-c),\\ \xi\in[c,x]}}=\frac{1}{x-c}\cdot f(\xi)\cdot(x-c)=\underbrace{f(\xi)\underset{x\to c+0}{\longrightarrow}f(c)}_{\substack{\Uparrow\\ \xi\underset{x\to c+0}{\longrightarrow}c\\ \Uparrow\\ \xi\in[c,x]}}\end{aligned}$$

Таким образом,

$$\lim_{x\to c+0}\frac{F(x)-F(c)}{x-c}=f(c)\tag{7.3.129}$$

b) Аналогично, если $x<c$, то есть $a<x<c<b$, то

$$\begin{aligned}\frac{F(x)-F(c)}{x-c}&=\frac{1}{x-c}\left\{\int_{[a,x]}f(t)\,\mathsf{d}\,t-\int_{[a,c]}f(t)\,\mathsf{d}\,t\right\}=\\&=\frac{1}{x-c}\left\{\int_{[a,x]}f(t)\,\mathsf{d}\,t-\left(\int_{[a,x]}f(t)\,\mathsf{d}\,t+\int_{[x,c]}f(t)\,\mathsf{d}\,t\right)\right\}=\\&=-\frac{1}{x-c}\cdot\underbrace{\int_{[x,c]}f(t)\,\mathsf{d}\,t}_{\substack{\overset{(7.2.103)}{\|}\\ f(\xi)\cdot(c-x),\\ \xi\in[x,c]}}=-\frac{1}{x-c}\cdot f(\xi)\cdot(c-x)=f(\xi)\,\underbrace{f(\xi)\underset{x\to c-0}{\longrightarrow}f(c)}_{\substack{\Uparrow\\ \xi\underset{x\to c-0}{\longrightarrow}c\\ \Uparrow\\ \xi\in[x,c]}}\end{aligned}$$

Таким образом,

$$\lim_{x\to c-0}\frac{F(x)-F(c)}{x-c}=f(c)\tag{7.3.130}$$

Формулы (7.3.129) и (7.3.130) вместе дают

$$F'(c) = \lim_{x\to c} \frac{F(x) - F(c)}{x - c} = f(c), \qquad c \in (a; b)$$

2. Теперь рассмотрим случай, когда $c = a$. Тогда аналогично пункту a) получаем равенство

$$\lim_{x\to a+0} \frac{F(x) - F(a)}{x - a} = f(a)$$

3. Остается случай, когда $c = b$, который нужно рассмотреть по аналогии с пунктом b), и тогда получится формула

$$\lim_{x\to b-0} \frac{F(x) - F(b)}{x - b} = f(b)$$

□

Формула Ньютона-Лейбница.

Теорема 7.3.2 (Ньютона-Лейбница)**.** *Пусть функция f непрерывна на отрезке $[a; b]$ тогда для любой ее первообразной Φ на этом отрезке выполняется равенство*

$$\int_{[a,b]} f(x)\,\mathsf{d}\,x = \Phi(b) - \Phi(a) \tag{7.3.131}$$

- Формула (7.3.131) называется *формулой Ньютона-Лейбница.*

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$F(x) = \int_{[a,x]} f(t)\,\mathsf{d}\,t$$

По теореме 7.3.1, она является первообразной для функции f на отрезке $[a; b]$. Значит, F и Φ – две первообразные для одной и той же функции f на отрезке $[a; b]$. Поэтому, по свойству 2^0 на с.400, эти функции отличаются друг от друга на какую-то константу:

$$F(x) = \Phi(x) + C, \qquad x \in [a; b]$$

То есть,

$$\int_{[a,x]} f(t)\,\mathsf{d}\,t = \Phi(x) + C, \qquad x \in [a; b] \tag{7.3.132}$$

Взяв $x = a$, мы получим

$$0 = \int_{[a,a]} f(t)\,\mathsf{d}\,t = \Phi(a) + C,$$

откуда

$$C = -\Phi(a),$$

поэтому, подставив это в (7.3.132), получаем

$$\int_{[a,x]} f(t)\,\mathsf{d}\,t = \Phi(x) - \Phi(a), \qquad x \in [a; b]$$

и, если сюда подставить $x = b$, то получится как раз (7.3.131). □

Если знать первообразную функции f на отрезке $[a, b]$, то формуда Ньютона-Лейбница позволяет сразу же вычислить интеграл $\int_{[a,b]} f(x)\,\mathsf{d}\,x$, который, как мы говорили выше, интерпретируется как площадь фигуры под графиком функции, то есть фигуры, описываемой условиями

$$\begin{cases} a \leqslant x \leqslant b \\ 0 \leqslant y \leqslant f(x). \end{cases}$$

◇ **7.3.2.** Например, площадь фигуры

$$\begin{cases} 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 0 \leqslant y \leqslant x^2. \end{cases}$$

равна

$$S = \int_{[0,1]} x^2 \,\mathsf{d}\, x = (7.1.34) = \frac{x^3}{3} + C \Big|_0^1 = \frac{1}{3}.$$

◇ **7.3.3.** Площадь фигуры, ограниченной аркой синусоиды

$$\begin{cases} 0 \leqslant x \leqslant \pi \\ 0 \leqslant y \leqslant \sin x. \end{cases}$$

равна

$$S = \int_{[0,\pi]} \sin x \,\mathsf{d}\, x = (7.1.38) =$$
$$= -\cos x + C \Big|_0^\pi = -\cos \pi - (-\cos 0) = 2.$$

◇ **7.3.4.** Поучительно было бы найти площадь какой-нибудь известной фигуры, например, круга, с помощью теоремы Ньютона-Лейбница, и убедиться, что при этом получается правильный ответ. В качестве примера найдем интеграл

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2} \,\mathsf{d}\, x$$

(то есть площадь полукруга радиуса 1).

Здесь используется формула (7.1.59), которую мы вывели раньше. Подставляя ее в теорему Ньютона-Лейбница, мы получаем:

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2} \,\mathsf{d}\, x = (7.1.59) =$$
$$= \frac{1}{2}\Big(x\sqrt{1-x^2} + \arcsin x \Big) \Big|_{x=-1}^{x=1} =$$
$$= \frac{1}{2}\left(\arcsin 1 - \arcsin(-1)\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$$

Видно, что ответ правильный: площадь полукруга радиуса 1 равна $\frac{\pi}{2}$.

(b) Интеграл по ориентированному отрезку и вычисления

Ориентированные отрезки в $\mathbb{R}$.

- *Ориентированным отрезком* на прямой $\mathbb{R}$ называется произвольная пара чисел (a,b), $a,b \in \mathbb{R}$ (здесь важно, какое из чисел стоит на первом месте, а какое на втором: пары (a,b) и (b,a) считаются разными). Чтобы не путать такую пару (a,b) и интервалом $(a,b) = \{x \in \mathbb{R} : \ a < x < b\}$, вводится специальное обозначение:

$$\overrightarrow{ab} = (a,b)$$

  Этому объекту приписывается некий геометрический образ: считается, что $\overrightarrow{ab}$ представляет собой обычный отрезок с концами a и b, относительно крайних точек которого a и b имеется соглашение, что a в этой паре служит *началом*, а b *концом* (при этом, необязательно, чтобы $a \leqslant b$, возможно и наоборот, $a \geqslant b$).

- Частный случай, когда $a = b$, также считается ориентированным отрезком, в котором конец и начало совпадают, и такой ориентированный отрезок называется *вырожденным*.

- *Носителем* $[\overrightarrow{ab}]$ ориентированного отрезка $\overrightarrow{ab}$ называется тот же самый отрезок, но уже обычный, неориентированный (то есть такой, у которого мы “забыли”, какая из его крайних точек была началом, а какая концом). Понятно, что

$$[\overrightarrow{ab}] = \begin{cases} [a,b], & a < b \\ \{a\}, & a = b \\ [b,a], & a > b \end{cases}$$

- *Суммой ориентированных отрезков* $\overrightarrow{ab}$ и $\overrightarrow{bc}$ называется ориентированный отрезок $\overrightarrow{ac}$:

$$\overrightarrow{ab} \oplus \overrightarrow{bc} := \overrightarrow{ac} \tag{7.3.133}$$

  (подразумевается, что сумма определена только если конец предыдущего отрезка совпадает с началом следующего).

- *Противоположным отрезком* к отрезку $\overrightarrow{ab}$ называется отрезок $\overrightarrow{ba}$, и обозначается он символом $\ominus\overrightarrow{ab}$:
$$\ominus\overrightarrow{ab} := \overrightarrow{ba} \tag{7.3.134}$$
Сумму вида $\overrightarrow{ac} \oplus (\ominus\overrightarrow{bc}) = \overrightarrow{ac} \oplus \overrightarrow{cb} = \overrightarrow{ab}$ принято записывать как $\overrightarrow{ac} \ominus \overrightarrow{bc}$ и называть *разностью ориентированных отрезков* $\overrightarrow{ac}$ и $\overrightarrow{bc}$:
$$\overrightarrow{ac} \ominus \overrightarrow{bc} := \overrightarrow{ac} \oplus (\ominus\overrightarrow{bc}) = \overrightarrow{ac} \oplus \overrightarrow{cb} = \overrightarrow{ab} \tag{7.3.135}$$

◇ **7.3.5.** Запись $\overrightarrow{0;1}$ означает отрезок $[0;1]$, в котором 0 считается началом, а 1 концом. Наоборот, $\overrightarrow{1;0}$ означает отрезок $[0,1]$, но в котором 0 считается концом, а 1 началом. Носители у этих отрезков одинаковы
$$[\overrightarrow{0;1}] = [0;1] = [\overrightarrow{1;0}]$$
но ориентация у них противоположная, и поэтому
$$\overrightarrow{1;0} = \ominus\overrightarrow{0;1}$$

◇ **7.3.6.** Очевидно, справедливы равенства:
$$\overrightarrow{0;1} \oplus \overrightarrow{1;2} = \overrightarrow{0;2}$$
$$\overrightarrow{0;2} \ominus \overrightarrow{1;2} = \overrightarrow{0;1}$$
$$\overrightarrow{0;1} \ominus \overrightarrow{2;1} = \overrightarrow{0;2}$$

Интеграл по ориентированному отрезку.

- Говорят, что числовая функция f определена (интегрируема, непрерывна, гладка) на ориентированном отрезке $\overrightarrow{ab}$, если она определена (интегрируема, непрерывна, гладка) на его носителе $[\overrightarrow{ab}]$. При этом

  — *скачком функции f на ориентированном отрезке* $\overrightarrow{ab}$ называется число
$$f(x)\Big|_{x=a}^{x=b} := f(b) - f(a) \tag{7.3.136}$$

  — *интегралом функции f по ориентированному отрезку* $\overrightarrow{ab}$, или *анизотропным интегралом* по $\overrightarrow{ab}$, называется число
$$\int_a^b f(x)\ \mathsf{d}\,x := \begin{cases} \int_{[a,b]} f(x)\ \mathsf{d}\,x, & a < b \\ 0, & a = b \\ -\int_{[b,a]} f(x)\ \mathsf{d}\,x, & b < a \end{cases} \tag{7.3.137}$$

Свойства интеграла по ориентированному отрезку:

1^0. **Линейность:** *интеграл от линейной комбинации функций равен линейной комбинации интегралов*
$$\int_a^b \Big(\alpha \cdot f(x) + \beta \cdot g(x)\Big)\ \mathsf{d}\,x = \alpha \cdot \int_a^b f(x)\ \mathsf{d}\,x + \beta \cdot \int_a^b g(x)\ \mathsf{d}\,x \tag{7.3.138}$$

2^0. **Аддитивность:** *интеграл по сумме ориентированных отрезков равен сумме интегралов по этим отрезкам:*
$$\int_a^b f(x)\ \mathsf{d}\,x + \int_b^c f(x)\ \mathsf{d}\,x = \int_a^c f(x)\ \mathsf{d}\,x \tag{7.3.139}$$
а интеграл по разности равен разности интегралов:
$$\int_a^c f(x)\ \mathsf{d}\,x - \int_a^b f(x)\ \mathsf{d}\,x = \int_b^c f(x)\ \mathsf{d}\,x \tag{7.3.140}$$

3^0. **Теорема о среднем:** *если функция f непрерывна на отрезке $\overrightarrow{ab}$, то найдется такая точка $\xi \in \overrightarrow{ab}$, что*

$$\int_a^b f(x)\ \mathsf{d}\,x = f(\xi)\cdot(b-a) \tag{7.3.141}$$

4° **Формула Ньютона-Лейбница:** *интеграл от непрерывной функции по ориентированному отрезку равен скачку ее (произвольной) первообразной на этом отрезке:*

$$\int_a^b f(x)\ \mathsf{d}\,x = \varPhi(x)\Big|_{x=a}^{x=b} \tag{7.3.142}$$

4° **Формула Бонне:** *если f – интегрируемая, а g – монотонная функции на ориентированном отрезке $\overrightarrow{ab}$, то найдется точка $\xi \in \overrightarrow{ab}$ такая, что*

$$\int_a^b f(x)\cdot g(x)\ \ \mathsf{d}\,x = g(a)\cdot\int_a^\xi f(x)\ \ \mathsf{d}\,x + g(b)\cdot\int_\xi^b f(x)\ \ \mathsf{d}\,x \tag{7.3.143}$$

Доказательство. 1. Первое свойство следует из (7.2.95), и для его доказательства нужно просто рассмотреть два случая взаимного расположения точек a и b на прямой. Если $a < b$, то

$$\int_a^b \Big(\alpha\cdot f(x)+\beta\cdot g(x)\Big)\ \mathsf{d}\,x = (7.3.137) = \int_{[a,b]} \Big(\alpha\cdot f(x)+\beta\cdot g(x)\Big)\ \mathsf{d}\,x = (7.2.95) =$$
$$= \alpha\cdot\int_{[a,b]} f(x)\ \mathsf{d}\,x + \beta\cdot\int_{[a,b]} g(x)\ \mathsf{d}\,x = (7.3.137) = \alpha\cdot\int_a^b f(x)\ \mathsf{d}\,x + \beta\cdot\int_a^b g(x)\ \mathsf{d}\,x$$

А если $a > b$, то

$$\int_a^b \Big(\alpha\cdot f(x)+\beta\cdot g(x)\Big)\ \mathsf{d}\,x = (7.3.137) = -\int_{[b,a]} \Big(\alpha\cdot f(x)+\beta\cdot g(x)\Big)\ \mathsf{d}\,x = (7.2.95) =$$
$$= -\alpha\cdot\int_{[b,a]} f(x)\ \mathsf{d}\,x - \beta\cdot\int_{[b,a]} g(x)\ \mathsf{d}\,x = (7.3.137) = \alpha\cdot\int_a^b f(x)\ \mathsf{d}\,x + \beta\cdot\int_a^b g(x)\ \mathsf{d}\,x$$

2. Равенство (7.3.139) эквивалентно (7.3.140) и следует из (7.2.96). Оно доказывается тем же приемом: нужно рассмотреть несколько вариантов расположения точек a, b и c. В простейшем случае, если $a < b < c$, мы получаем:

$$\int_a^b f(x)\ \mathsf{d}\,x + \int_b^c f(x)\ \mathsf{d}\,x = (7.3.137) = \int_{[a,b]} f(x)\ \mathsf{d}\,x + \int_{[b,c]} f(x)\ \mathsf{d}\,x = (7.2.96) =$$
$$= \int_{[a,c]} f(x)\ \mathsf{d}\,x = (7.3.137) = \int_a^c f(x)\ \mathsf{d}\,x$$

В случае, если, например, $a < c < b$, мы получаем:

$$\int_a^b f(x)\ \mathsf{d}\,x + \int_b^c f(x)\ \mathsf{d}\,x = (7.3.137) = \int_{[a,b]} f(x)\ \mathsf{d}\,x - \int_{[c,b]} f(x)\ \mathsf{d}\,x = (7.2.96) =$$
$$= \int_{[a,c]} f(x)\ \mathsf{d}\,x = (7.3.137) = \int_a^c f(x)\ \mathsf{d}\,x$$

И в таком духе. Остальные варианты мы предлагаем читателю проверить самостоятельно.

3. Свойство 3° следует из (7.2.103): если $a < b$, то

$$\int_a^b f(x)\ \mathsf{d}\,x = \int_{[a,b]} f(x)\ \mathsf{d}\,x = (7.2.103) = f(\xi)\cdot(b-a)$$

Если же $a > b$, то

$$\int_a^b f(x)\ \mathsf{d}\,x = -\int_{[b,a]} f(x)\ \mathsf{d}\,x = (7.2.103) = -f(\xi)\cdot(a-b) = f(\xi)\cdot(b-a)$$

4. Свойство 4° следует из (7.3.131): если $a < b$, то

$$\int_a^b f(x)\ \mathsf{d}\,x = (7.3.137) = \int_{[a,b]} f(x)\ \mathsf{d}\,x = (7.3.131) = \varPhi(b) - \varPhi(a) = (7.3.136) = \varPhi(x)\Big|_{x=a}^{x=b}$$

Если же $a > b$, то

$$\int_a^b f(x)\ \mathsf{d}\,x = (7.3.137) = -\int_{[b,a]} f(x)\ \mathsf{d}\,x = (7.3.131) =$$
$$= -\Big(\varPhi(a) - \varPhi(b)\Big) = \varPhi(b) - \varPhi(a) = (7.3.136) = \varPhi(x)\Big|_{x=a}^{x=b}$$

5. Свойство 5° следует из (7.2.117): если $a < b$, то по теореме 7.2.9 для некоторой точки $\xi \in [a,b]$ выпоняется равенство

$$\underbrace{\int_{[a,b]} f(x)\cdot g(x)\ \mathsf{d}\,x}_{\int_a^b f(x)\cdot g(x)\ \mathsf{d}\,x} = \underbrace{g(a)\cdot\int_{[a,\xi]} f(x)\ \mathsf{d}\,x}_{g(a)\cdot\int_a^\xi f(x)\ \mathsf{d}\,x} + \underbrace{g(b)\cdot\int_{[\xi,b]} f(x)\ \mathsf{d}\,x}_{g(b)\cdot\int_\xi^b f(x)\ \mathsf{d}\,x}$$

Если же $a > b$, то по теореме 7.2.9 для некоторой точки $\xi \in [b,a]$ должно выполняться равенство

$$\int_{[b,a]} f(x)\cdot g(x)\ \mathsf{d}\,x = g(b)\cdot\int_{[b,\xi]} f(x)\ \mathsf{d}\,x + g(a)\cdot\int_{[\xi,a]} f(x)\ \mathsf{d}\,x.$$

Умножив это на -1, получим:

$$\underbrace{-\int_{[b,a]} f(x)\cdot g(x)\ \mathsf{d}\,x}_{\int_a^b f(x)\cdot g(x)\ \mathsf{d}\,x} = \underbrace{-g(b)\cdot\int_{[b,\xi]} f(x)\ \mathsf{d}\,x}_{g(b)\cdot\int_\xi^b f(x)\ \mathsf{d}\,x} \underbrace{-g(a)\cdot\int_{[\xi,a]} f(x)\ \mathsf{d}\,x}_{g(a)\cdot\int_a^\xi f(x)\ \mathsf{d}\,x}$$

□

◇ **7.3.7.**

$$\int_1^4 \frac{1+\sqrt{x}}{x^2}\ \mathsf{d}\,x = \int_1^4 \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x\cdot\sqrt{x}}\right)\ \mathsf{d}\,x =$$
$$= (7.3.138) = \int_1^4 x^{-2}\ \mathsf{d}\,x + \int_1^4 x^{-\frac{3}{2}}\ \mathsf{d}\,x =$$
$$= (7.1.34) = -\frac{1}{x}\Big|_{x=1}^{x=4} - \frac{1}{2\sqrt{x}}\Big|_{x=1}^{x=4} =$$
$$= -\frac{1}{4} + 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = 1.$$

◇ **7.3.8.**

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + 2\cos x - \sin x)\ \mathsf{d}\,x = (7.3.138) =$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1\ \mathsf{d}\,x + 2\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\ \mathsf{d}\,x - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\ \mathsf{d}\,x =$$
$$= x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + 2\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} + 2 - 1 =$$
$$= \frac{\pi}{2} + 1.$$

Интегрирование вдоль гладкой функции.

- Если f – интегрируемая функция, а g – гладкая функция на ориентированном отрезке $\overrightarrow{ab}$, то *интегралом от функции f вдоль функции g по ориентированному отрезку $\overrightarrow{ab}$* называется число

$$\int_a^b f(x)\ \mathsf{d}\,g(x) := \int_a^b f(x)\cdot g'(x)\ \mathsf{d}\,x \qquad (7.3.144)$$

В частном случае, когда $f(x) = 1$, это число обозначается также

$$\int_a^b \mathsf{d}\,g(x) := \int_a^b g'(x)\ \mathsf{d}\,x \qquad (7.3.145)$$

Теорема 7.3.3 (о скачке гладкой функции). *Скачок гладкой функции g на ориентированном отрезке $\overrightarrow{ab}$ равен интегралу от единицы вдоль g по этому отрезку:*

$$\int_a^b \mathsf{d}\, g(x) = \int_a^b g'(x)\ \mathsf{d}\, x = g(x)\Big|_{x=a}^{x=b} \tag{7.3.146}$$

Доказательство. Это следует из формулы Ньютона-Лейбница (7.3.142), если положить $f = g'$, $\Phi = g$. □

Следствие 7.3.4. *Функция $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ является гладкой тогда и только тогда, когда она представима в виде интеграла с переменным верхним пределом от некоторой непрерывной функции $f : [a, b] \to \mathbb{R}$:*

$$g(x) = g(a) + \int_a^x f(t)\ \mathsf{d}\, t$$

Доказательство. В качестве f нужно взять производную g' функции g, доопределенную произвольным образом в точках недифференцируемости g. □

В вычислениях удобно переход от левой части к правой и наоборот в формуле (7.3.144) оформлять специальной записью и сопровождать подходящей речевой конструкцией. В качестве записи в таких случаях используется стрелка над формулой, а речевых конструкций придумано две: "вынесение из-под знака дифференциала"и "внесение под знак дифференциала". Именно, если нам нужно в (7.3.144) перейти от левой части к правой, то мы рисуем стрелку от выражения под дифференциалом в пространство перед ним,

$$\int_a^b f(x)\ \mathsf{d}\, g(x) = \int_a^b f(x) \cdot g'(x)\ \mathsf{d}\, x,$$

и говорим при этом, что "выносим $g(x)$ из-под знака дифференциала". А если наоборот, нам нужно в (7.3.144) перейти от правой части к левой (такое тоже часто бывает нужно, см. примеры, начиная с 7.3.13), то мы рисуем стрелку от нужного выражения в пространство после знака дифференциала,

$$\int_a^b f(x) \cdot\ g'(x)\ \mathsf{d}\, x = \int_a^b f(x)\ \mathsf{d}\, g(x),$$

и говорим при этом, что "вносим $g'(x)$ под знак дифференциала".

◇ **7.3.9.** В этом пункте нам нужны примеры, иллюстрирующие формулу (7.3.144) как определение интеграла вдоль гладкой функции, поэтому в вычислениях здесь мы будем выносить выражения из-под знака дифференциала:

$$\int_0^1 x^3\ \mathsf{d}\, x^5 = \int_0^1 x^3 \cdot 5x^4\ \mathsf{d}\, x = \\ = 5\int_0^1 x^7\ \mathsf{d}\, x = \frac{5}{8}x^8\Big|_{x=0}^{x=1} = \frac{5}{8}$$

◇ **7.3.10.** Еще один такой же пример:

$$\int_0^\pi \cos x\ \mathsf{d}\, \sin x = \int_0^\pi \cos^2 x\ \mathsf{d}\, x = \\ = \int_0^\pi \frac{1+\cos 2x}{2}\ \mathsf{d}\, x = \frac{1}{2}\cdot x + \frac{1}{4}\cdot \sin 2x\Big|_0^\pi = \frac{\pi}{2}$$

Теорема о замене переменной в определенном интеграле.

- Говорят, что функция φ *является преобразованием ориентированного отрезка $\overrightarrow{\alpha\beta}$ в ориентированный отрезок $\overrightarrow{ab}$*, и обозначают это записью

$$\varphi : \overrightarrow{\alpha\beta} \to \overrightarrow{ab}, \tag{7.3.147}$$

  если

  (i) φ гладко отображает носитель $\overrightarrow{\alpha\beta}$ в носитель $\overrightarrow{ab}$:

$$\varphi : [\overrightarrow{\alpha\beta}] \to [\overrightarrow{ab}] \tag{7.3.148}$$

  (это, в частности, означает, что для всякого $t \in [\overrightarrow{\alpha\beta}]$ значение $\varphi(t)$ лежит в $[\overrightarrow{ab}]$);

(ii) φ сохраняет ориентацию в следующем смысле:

$$\varphi(\alpha) = a, \qquad \varphi(\beta) = b \tag{7.3.149}$$

◇ **7.3.11.** Функция

$$\varphi(t) = \cos t$$

является преобразованием ориентированного отрезка $\overrightarrow{0;\pi}$ в ориентированный отрезок $\overrightarrow{1;-1}$:

$$\cos : \overrightarrow{0;\pi} \to \overrightarrow{1;-1}$$

потому что она гладко отображает носитель первого отрезка в носитель второго

$$\cos : [\overrightarrow{0;\pi}] = [0,\pi] \to [-1;1] = [\overrightarrow{1;-1}]$$

и сохраняет ориентацию:

$$\cos 0 = 1, \qquad \cos \pi = -1.$$

◇ **7.3.12.** Но та же функция

$$\varphi(t) = \cos t$$

не будет преобразованием отрезка $\overrightarrow{0;\frac{3\pi}{2}}$ в отрезок $\overrightarrow{1;0}$, хотя она по-прежнему гладкая, и сохраняет ориентацию этих отрезков:

$$\cos 0 = 1, \qquad \cos \frac{3\pi}{2} = 0$$

Дело в том, что эта функция не будет отображением носителя первого отрезка в носитель второго:

$$\cos : \left[\overrightarrow{0;\frac{3\pi}{2}}\right] = \left[0,\frac{3\pi}{2}\right] \not\to [0;1] = [\overrightarrow{1;0}]$$

потому что, например, в точке $t = \pi \in \left[0,\frac{3\pi}{2}\right]$ ее значения вылезают из отрезка $[0;1]$:

$$\cos \pi = -1 \notin [0;1].$$

Теорема 7.3.5 (о замене переменной в определенном интеграле)**.** *Пусть даны*

(i) преобразование φ ориентированного отрезка $\overrightarrow{\alpha\beta}$ в ориентированный отрезок $\overrightarrow{ab}$ (удовлетворяющее условиям (7.3.148) *и* (7.3.149)*), и*

(ii) функция f, непрерывная на ориентированном отрезке $\overrightarrow{ab}$;

тогда

$$\int_a^b f(x)\ \mathsf{d}\,x = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\ \mathsf{d}\,\varphi(t) = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\ \mathsf{d}\,t \tag{7.3.150}$$

Доказательство. Пусть F – первообразная функции f на отрезке $[\overrightarrow{ab}]$:

$$F'(x) = f(x), \qquad x \in [\overrightarrow{ab}] \tag{7.3.151}$$

(такая первообразная существует, например, по теореме 7.3.1).

Тогда композиция $F \circ \varphi$ будет первообразной для функции $(f \circ \varphi) \cdot \varphi'$, на отрезке $[\overrightarrow{\alpha\beta}]$, по формуле (5.1.28):

$$(F \circ \varphi)'(t) = F'(\underbrace{\varphi(t)}_{\substack{\Cap \\ [\overrightarrow{ab}] \\ \| \\ \mathsf{D}(F')}}) \cdot \varphi'(t) = f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t), \qquad t \in [\overrightarrow{\alpha\beta}] \tag{7.3.152}$$

Поэтому

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\ \mathsf{d}\,t = (7.3.142) = (F \circ \varphi)(t)\Big|_{t=\alpha}^{t=\beta} = F\Big(\underbrace{\varphi(\beta)}_{\substack{\| \ (7.3.149) \\ b}}\Big) - F\Big(\underbrace{\varphi(\alpha)}_{\substack{\| \ (7.3.149) \\ a}}\Big) =$$

$$= F(b) - F(a) = (7.3.142) = \int_a^b f(x)\ \mathsf{d}\,x$$

□

В противоположность примерам на с.452 теперь оказывается полезным вносить под знак дифференциала.

◇ **7.3.13.**

$$\int_0^2 x\cdot e^{x^2}\,\mathsf{d}\,x=\frac{1}{2}\cdot\int_0^2 e^{x^2}\cdot 2x\,\mathsf{d}\,x=$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^2 e^{x^2}\,\mathsf{d}\,x^2=\left|\begin{smallmatrix} x=\sqrt{t}, & t=x^2\\ x\in\overrightarrow{0;2}\Leftrightarrow t\in\overrightarrow{0;4}\end{smallmatrix}\right|=$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^4 e^t\,\mathsf{d}\,t=\frac{1}{2}e^t\Big|_0^4=\frac{e^4-1}{2}$$

◇ **7.3.14.**

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\operatorname{tg}x\,\mathsf{d}\,x=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x}{\cos x}\,\mathsf{d}\,x=$$

$$=-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{-\sin x\,\mathsf{d}\,x}{\cos x}\,\mathsf{d}\,x=-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\mathsf{d}\cos x}{\cos x}=$$

$$=\left|\begin{smallmatrix} x=\arccos t, & t=\cos x\\ x\in\overrightarrow{0;\frac{\pi}{4}}\Leftrightarrow t\in\overrightarrow{1;\frac{1}{2}}\end{smallmatrix}\right|=-\int_1^{\frac{1}{2}}\frac{\mathsf{d}\,y}{y}=$$

$$=-\ln|y|\,\Big|_1^{\frac{1}{2}}=-\ln\frac{1}{2}+\ln 1=\ln 2$$

◇ **7.3.15.** Иногда, однако, бывает удобно сразу заменять переменную, не внося ничего под знак дифференциала:

$$\int_1^4\frac{x\,\mathsf{d}\,x}{1+\sqrt{x}}=\left|\begin{smallmatrix} 1+\sqrt{x}=t, & x=t^2-1\\ x\in\overrightarrow{1;4}\Leftrightarrow t\in\overrightarrow{2;3}\end{smallmatrix}\right|=$$

$$=\int_2^3\frac{(t^2-1)\,\mathsf{d}(t^2-1)}{t}=\int_2^3\frac{(t^2-1)\cdot 2t\,\mathsf{d}\,t}{t}=$$

$$=2\int_2^3(t^2-1)\,\mathsf{d}\,t=2\cdot\left(\frac{t^3}{3}-t\right)\Big|_{t=2}^{t=3}=$$

$$=2\left\{(9-3)-\left(\frac{8}{3}-2\right)\right\}=\frac{32}{3}$$

▷▷ **7.3.16.** Найдите определенные интегралы:

1) $\int_0^1\sqrt{4-x^2}\,\mathsf{d}\,x$
2) $\int_0^{\ln 5}\frac{e^x\sqrt{e^x-1}}{e^x+3}\,\mathsf{d}\,x$
3) $\int_0^{\frac{a}{2}}\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$
4) $\int_0^1 x^2\sqrt{1-x^2}\,\mathsf{d}\,x$
5) $\int_0^1\frac{dx}{e^x+e^{-x}}$
6) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{1+\sin x+\cos x}$
7) $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{dx}{1+2\sin^2 x}$

▷▷ **7.3.17.** Найдите определенные интегралы:

1) $\int_0^1\sqrt{1+x}\,\mathsf{d}\,x$
2) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3 x\,\mathsf{d}\,x$
3) $\int_0^1\frac{x\,\mathsf{d}\,x}{(x^2+1)^3}$
4) $\int_1^e\frac{1+\ln x}{x}\,\mathsf{d}\,x$
5) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{4}}\frac{\cos^3 x}{\sqrt[3]{\sin x}}\,\mathsf{d}\,x$
7) $\int_0^1\frac{dx}{x^2+4x+5}$
8) $\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{3+2x-x^2}}$

Интегрирование по частям.

Теорема 7.3.6 (об интегрировании по частям). *Если f и g – гладкие функции на ориентированном отрезке $\overrightarrow{ab}$, то*

$$\int_a^b f(x)\,\mathsf{d}\,g(x)=f(x)\cdot g(x)\,\Big|_{x=a}^{x=b}-\int_a^b g(x)\,\mathsf{d}\,f(x)\qquad(7.3.153)$$

Доказательство.

$$\int_a^b f(x)\,\mathsf{d}\,g(x)+\int_a^b g(x)\,\mathsf{d}\,f(x)=(7.3.144)=\int_a^b f(x)\cdot g'(x)\,\mathsf{d}\,x+\int_a^b g(x)\cdot f'(x)\,\mathsf{d}\,x=(7.3.138)=$$

$$=\int_a^b\Big(\underbrace{f(x)\cdot g'(x)+f'(x)\cdot g(x)}_{\underset{(f\cdot g)'(x)}{\parallel}}\Big)\,\mathsf{d}\,x=\int_a^b(f\cdot g)'(x)\,\mathsf{d}\,x=(7.3.146)=(f\cdot g)(x)\Big|_{x=a}^{x=b}=f(x)\cdot g(x)\Big|_{x=a}^{x=b}$$

$$\Downarrow\quad\text{(переносим }\textstyle\int_a^b g(x)\,\mathsf{d}\,f(x)\text{ направо)}$$

$$\int_a^b f(x)\,\mathsf{d}\,g(x)=f(x)\cdot g(x)\,\Big|_{x=a}^{x=b}-\int_a^b g(x)\,\mathsf{d}\,f(x)$$

□

◇ **7.3.18.**

$$\int_1^e\ln x\,\mathsf{d}\,x=(7.3.153)=x\cdot\ln x\,\Big|_{x=1}^{x=e}-$$

$$-\int_1^e x\,\mathsf{d}\ln x=x\cdot\ln x\,\Big|_{x=1}^{x=e}-\int_1^e x\cdot\frac{1}{x}\,\mathsf{d}\,x=$$

$$=x\cdot\ln x\,\Big|_{x=1}^{x=e}-\int_1^e 1\,\mathsf{d}\,x=x\cdot\ln x\,\Big|_{x=1}^{x=e}-x\,\Big|_{x=1}^{x=e}=$$

$$= e\cdot\ln e - 1\cdot\ln 1 - (e-1) = 1$$

◇ **7.3.19.**

$$\int_0^2 e^x\, x \;\mathsf{d}\, x = \int_0^2 x \;\mathsf{d}\, e^x = (7.3.153) =$$

$$= x\cdot e^x\Big|_{x=0}^{x=2} - \int_0^2 e^x \;\mathsf{d}\, x = x\cdot e^x\Big|_{x=0}^{x=2} - e^x\Big|_{x=0}^{x=2} =$$

$$= 2\cdot e^2 - 0\cdot e^0 - (e^2 - e^0) = e^2 + 1$$

◇ **7.3.20.** Повторное интегрирование по частям:

$$\int_0^2 e^x\, x^2 \;\mathsf{d}\, x = \int_0^2 x \;\mathsf{d}\, e^x = (7.3.153) =$$

$$= \underbrace{x^2\cdot e^x\Big|_{x=0}^{x=2}}_{\substack{\| \\ 4e^2}} - \int_0^2 e^x \;\mathsf{d}\, x^2 =$$

$$= 4e^2 - \int_0^2 e^x\, 2x \;\mathsf{d}\, x =$$

$$= 4e^2 - 2\int_0^2 x \;\mathsf{d}\, e^x = (7.3.153) =$$

$$= 4e^2 - \underbrace{2x\cdot e^x\Big|_{x=0}^{x=2}}_{\substack{\| \\ 4e^2}} + 2\int_0^2 e^x \;\mathsf{d}\, x =$$

$$= 2e^x\Big|_{x=0}^{x=2} = 2\cdot e^2 - 2$$

◇ **7.3.21.** Следующий прием называется "возвращением к исходному интегралу". Чтобы сосчитать интеграл

$$\int_0^\pi e^x \cos x \;\mathsf{d}\, x,$$

обозначим его какой-нибудь буквой, например,

$$I = \int_0^\pi e^x \cos x \;\mathsf{d}\, x.$$

Тогда, дважды применяя интегрирование по частям, можно получить следующую цепочку, начинающуюся с I и в итоге снова возвращающуюся к I, но так, что из полученной формулы I можно выразить:

$$I = \int_0^\pi e^x \cos x \;\mathsf{d}\, x = \int_0^\pi \cos x \;\mathsf{d}\, e^x = (7.3.153) =$$

$$= \underbrace{\cos x\cdot e^x\Big|_0^\pi}_{\substack{\| \\ e^\pi - 1}} - \int_0^\pi e^x \;\mathsf{d}\, \cos x =$$

$$= e^\pi - 1 + \int_0^\pi e^x \sin x \;\mathsf{d}\, x =$$

$$= e^\pi - 1 + \int_0^\pi \sin x \;\mathsf{d}\, e^x = (7.3.153) =$$

$$= e^\pi - 1 + \underbrace{\sin x\cdot e^x\Big|_0^\pi}_{\substack{\| \\ 0}} - \int_0^\pi e^x \;\mathsf{d}\, \sin x =$$

$$= e^\pi - 1 - \int_0^\pi e^x \cos x \;\mathsf{d}\, x = e^\pi - 1 - I$$

Итогом этих вычислений будет равенство

$$I = e^\pi - 1 - I,$$

из которого I выражается формулой

$$I = \frac{e^\pi - 1}{2}.$$

▷▷ **7.3.22.** Найдите определенные интегралы:

1) $\int_0^1 \operatorname{arctg} x \;\mathsf{d}\, x$

2) $\int_0^1 x e^{-x} \;\mathsf{d}\, x$

3) $\int_0^{\frac12} \arcsin x \;\mathsf{d}\, x$

4) $\int_1^2 x \ln x \;\mathsf{d}\, x$

5) $\int_0^\pi x^3 \sin x \;\mathsf{d}\, x$

6) $\int_0^\pi e^x \sin x \;\mathsf{d}\, x$

7) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x} \cos x \;\mathsf{d}\, x$

Использование рекуррентных соотношений.

◇ **7.3.23.** Некоторые определенные интегралы вычисляются с помощью рекуррентных соотношений. Например, следующие равенства[10]:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \;\mathsf{d}\, x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x \;\mathsf{d}\, x =$$

$$= \begin{cases} \frac{(n-1)!!}{n!!}\cdot\frac{\pi}{2}, & n \in 2\mathbb{N} - 1 \\ \frac{(n-1)!!}{n!!}, & n \in 2\mathbb{N} \end{cases} \qquad (7.3.154)$$

(напомним, что двойной факториал $n!!$ был определен формулами (2.2.238) и (2.2.239)). Сначала проверим, что эти интегралы совпадают:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \;\mathsf{d}\, x = \left| \begin{matrix} & x = \frac{\pi}{2} - y & \\ x = 0 & \Leftrightarrow & y = \frac{\pi}{2} \\ x = \frac{\pi}{2} & \Leftrightarrow & y = 0 \end{matrix} \right| =$$

$$= \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \sin^n\left(\frac{\pi}{2} - y\right) \;\mathsf{d}\left(\frac{\pi}{2} - y\right) =$$

$$= -\int_{\frac{\pi}{2}}^0 \cos^n y \;\mathsf{d}\, y = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n y \;\mathsf{d}\, y$$

После этого выведем рекуррентную формулу:

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \;\mathsf{d}\, x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-1} x \;\mathsf{d}(-\cos x) =$$

$$= \underbrace{-\sin^{n-1} x\cdot\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}}_{\substack{\| \\ 0}} +$$

$$+ (n-1)\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x\cdot\cos^2 x \;\mathsf{d}\, x =$$

[10] Равенства (7.3.154) понадобятся нам на с.472 при доказательстве формулы Валлиса.

$$= (n-1)\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x\cdot(1-\sin^2 x)\ \mathsf{d}\, x =$$
$$= (n-1)\cdot I_{n-2} - (n-1)\cdot I_n$$
$$\Downarrow$$
$$I_n = \frac{n-1}{n}\cdot I_{n-2}$$

Теперь для $n=0$ получаем:

$$I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\ \mathsf{d}\, x = \frac{\pi}{2}$$

и поэтому при $n=2k$,

$$I_{2k} = \frac{2k-1}{2k}\cdot I_{2k-2} = \frac{(2k-1)\cdot(2k-3)}{2k\cdot(2k-2)}\cdot I_{2k-4} =$$
$$= \ldots = \frac{(2k-1)\cdot(2k-3)\cdot\ldots\cdot 1}{2k\cdot(2k-2)\cdot\ldots\cdot 2}\cdot I_0 = \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}\cdot\frac{\pi}{2}$$

А для $n=1$ получаем:

$$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\ \mathsf{d}\, x = -\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{1}} = 1,$$

поэтому при $n=2k+1$,

$$I_{2k+1} = \frac{2k}{2k+1}\cdot I_{2k-1} = \frac{2k\cdot(2k-2)}{(2k+1)\cdot(2k-1)}\cdot I_{2k-3} =$$
$$= \ldots = \frac{(2k)\cdot(2k-2)\cdot\ldots\cdot 2}{(2k+1)\cdot(2k-1)\cdot\ldots\cdot 1}\cdot I_1 = \frac{(2k)!!}{(2k+1)!!}$$

(c) Интегрирование кусочно-непрерывных и кусочно-гладких функций

Интегралы, с которыми нам придется иметь дело в дальнейшем, будут, как правило, интегралами от непрерывных функций, возможно, вдоль гладких функций. Однако в главе 11, где речь пойдет о рядах Фурье, а также в главе 6, где будут изучаться асимптотики, нам придется интегрировать функции из несколько более широкого класса, а именно, кусочно-непрерывные функции, возможно, вдоль непрерывных кусочно-гладких функций. В этом пункте мы поговорим о таких интегралах.

Кусочно-непрерывные функции.

- Функция f на отрезке $[a,b]$ называется *кусочно-непрерывной*, если
  1) на $[a,b]$ функция f непрерывна во всех точках, кроме, возможно, конечного набора;
  2) в каждой точке разрыва $c\in\mathbb{R}$ функция f имеет конечные левый и правый предел
  $$f(c-0) = \lim_{x\to c-0} f(x),\qquad f(c+0) = \lim_{x\to c+0} f(x) \qquad (7.3.155)$$

Теорема 7.3.7. *Функция f кусочно-непрерывна на отрезке $[a,b]$ тогда и только тогда, когда существует разбиение $\tau=\{c_0,\ldots,c_k\}$ этого отрезка такое, что на каждом отрезке $[c_{i-1},c_i]$ можно определить непрерывную функцию φ_i, совпадающую с f на интервале (c_{i-1},c_i):*

$$f(x) = \varphi_i(x),\qquad x\in(c_{i-1},c_i)$$

Доказательство. Занумеруем по возрастанию точки разрыва функции f и добавим к ним, если этого не произошло сразу, концы отрезка $[a,b]$. У нас получится некоторое разбиение:

$$a = c_0 < c_1 < \ldots < c_k = b$$

На всяком отрезке $[c_{i-1},c_i]$ формула

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} f(x), & x\in(c_{i-1},c_i)\\ f(c_{i-1}+0), & x=c_{i-1}\\ f(c_i-0), & x=c_i\end{cases}$$

определяет непрерывную функцию φ_i, совпадающую с f на интервале (c_{i-1},c_i). □

▷ **7.3.24.** Проверьте, что функция

$$f(x) = \operatorname{sgn}\sin x$$

имеющая график

является кусочно-непрерывной на любом отрезке $[a, b]$.

▷ **7.3.25.** Наоборот, функция

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{sgn} \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

с графиком

не является кусочно-непрерывной, например, на отрезке $[0, 1]$, потому что имеет на нем бесконечное число точек разрыва ($x = \frac{1}{\pi n}$).

▷ **7.3.26.** Функция

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

с графиком

тоже не будет кусочно-непрерывной на отрезке $[0, 1]$, потому что имеет бесконечный предел в точке 0.

Теорема 7.3.8. *Всякая кусочно-непрерывная функция f на отрезке $[a, b]$ интегрируема на нем.*

Для доказательства теоремы 7.3.8 нам понадобится следующая

Лемма 7.3.9. *Пусть функции f и φ определены на отрезке $[a, b]$ и совпадают на интервале (a, b):*

$$f(x) = \varphi(x), \qquad x \in (a, b)$$

Тогда если φ интегрируема на отрезке $[a, b]$, то и f интегрируема на $[a, b]$, причем

$$\int_a^b f(x)\, \mathsf{d}\, x = \int_a^b \varphi(x)\, \mathsf{d}\, x$$

Доказательство. Заметим сразу, что обе функции f и φ должны быть ограничены на $[a, b]$: функция φ ограничена по теореме 7.2.2, как интегрируемая на $[a, b]$, а функция f отличается от нее не более чем в двух точках. Мы можем даже считать, что они ограничены одной константой:

$$\sup_{x \in [a,b]} |f(x)| \leqslant M, \qquad \sup_{x \in [a,b]} |\varphi(x)| \leqslant M$$

Теперь для произвольных разбиений τ отрезка $[a; b]$ и выделенных точек ξ_i мы получим:

$$\left| \overbrace{\sum_{i=1}^{k} f(\xi_i) \cdot \Delta x_i}^{\substack{\text{интегральная} \\ \text{сумма для } f}} - \underbrace{\overbrace{\sum_{i=1}^{k} \varphi(\xi_i) \cdot \Delta x_i}^{\substack{\text{интегральная} \\ \text{сумма для } \varphi}}}_{\substack{\downarrow \ \ \underset{0}{\overset{\mathsf{diam}\,\tau}{\downarrow}} \\ \int_a^b \varphi(x)\ \mathsf{d}\, x}} \right| =$$

$$= \left| \left(f(\xi_1) \cdot \Delta x_1 + \underbrace{\sum_{i=2}^{k-1} f(\xi_i) \cdot \Delta x_i}_{\uparrow} + f(\xi_k) \cdot \Delta x_k \right) - \left(\varphi(\xi_1) \cdot \Delta x_1 + \underbrace{\sum_{i=2}^{k-1} \varphi(\xi_i) \cdot \Delta x_i}_{\uparrow} + \varphi(\xi_k) \cdot \Delta x_k \right) \right| =$$

сокращаются, поскольку $f(\xi) = \varphi(\xi)$ при $\xi \in (a, b)$

$$= \left| \Big(f(\xi_1) - \varphi(\xi_1) \Big) \cdot \Delta x_1 + \Big(f(\xi_k) - \varphi(\xi_k) \Big) \cdot \Delta x_k \right| \leqslant$$

$$\leqslant \underbrace{\Big| f(\xi_1) - \varphi(\xi_1) \Big|}_{\substack{\geqslant \\ |f(\xi_1)| - |\varphi(\xi_1)| \\ \geqslant \\ 2M}} \cdot \underbrace{\Delta x_1}_{\substack{\geqslant \\ \operatorname{diam} \tau}} + \underbrace{\Big| f(\xi_k) - \varphi(\xi_k) \Big|}_{\substack{\geqslant \\ |f(\xi_k)| - |\varphi(\xi_k)| \\ \geqslant \\ 2M}} \cdot \underbrace{\Delta x_k}_{\substack{\geqslant \\ \operatorname{diam} \tau}} \leqslant 4M \cdot \operatorname{diam} \tau \underset{\operatorname{diam} \tau \to 0}{\longrightarrow} 0$$

Отсюда получаем:

$$\sum_{i=1}^{k} f(\xi_i) \cdot \Delta x_i \underset{\operatorname{diam} \tau \to 0}{\longrightarrow} \int_a^b \varphi(x) \, \mathrm{d}\, x$$

Это значит, что функция f интегрируема на $[a, b]$ и ее интеграл равен $\int_a^b \varphi(x) \, \mathrm{d}\, x$. □

Доказательство теоремы 7.3.8. Подберем с помощью теоремы 7.3.7 разбиение отрезка $[a, b]$

$$a = c_0 < c_1 < ... < c_k = b$$

такое, что на всяком интервале (c_{i-1}, c_i) функция f совпадает с некоторой функцией φ_i, непрерывной на отрезке $[c_{i-1}, c_i]$. Тогда по лемме 7.3.9, функция f будет интегрируемой на всяком отрезке $[c_{i-1}, c_i]$. Значит, по свойству аддитивности интеграла (2^0 на с.434), f интегрируема на отрезке $[a, b] = [a, c_1] \cup [c_1, c_2] \cup ... \cup [c_n, b]$. □

Кусочно-гладкие функции.

- Функция f на отрезке $[a, b]$ называется *кусочно-гладкой*, если
  1) на отрезке $[a, b]$ она дифференцируема во всех точках, кроме, возможно, конечного набора;
  2) в каждой точке $c \in [a, b]$, где f дифференцируема, ее производная непрерывна,
  $$f'(c) = \lim_{x \to c} f'(x) \tag{7.3.156}$$
  3) в каждой точке $c \in [a, b]$, где f не дифференцируема, она обладает следующими свойствами:
     (i) f имеет конечные левый и правый пределы (либо один из них, если c совпадает с каким-то из концов отрезка $[a, b]$)
     $$f(c-0) = \lim_{x \to c-0} f(x), \quad f(c+0) = \lim_{x \to c+0} f(x) \tag{7.3.157}$$
     (ii) f имеет конечные левую и правую производные (либо одну из них, если c совпадает с каким-то из концов отрезка $[a, b]$)
     $$f'_-(c) = \lim_{x \to c-0} \frac{f(x) - f(c-0)}{x - c}, \quad f'_+(c) = \lim_{x \to c+0} \frac{f(x) - f(c+0)}{x - c} \tag{7.3.158}$$
     (iii) при приближении аргумента x к c справа или слева, значение $f'(x)$ стремится соответственно к $f'_-(c)$ или $f'_+(c)$:
     $$f'_-(c) = \lim_{x \to c-0} f'(x), \quad f'_+(c) = \lim_{x \to c+0} f'(x) \tag{7.3.159}$$

Следующее утверждение доказывается в точности, как теорема 7.3.7:

Теорема 7.3.10. *Функция f является кусочно-гладкой на отрезке $[a, b]$ тогда и только тогда, когда существует разбиение $\tau = \{c_0, ..., c_k\}$ этого отрезка такое, что на каждом отрезке $[c_{i-1}, c_i]$ можно определить гладкую функцию φ_i, совпадающую с f на интервале (c_{i-1}, c_i):*

$$f(x) = \varphi_i(x), \qquad x \in (c_{i-1}, c_i)$$

Следующее утверждение мы считаем очевидным:

Теорема 7.3.11. *Пусть g – непрерывная кусочно-гладкая функция на отрезке $[a,b]$. Тогда*

(i) *произвольным образом доопределяя производную g' функции g в точках недифференцируемости g на $[a,b]$, мы получим кусочно-непрерывную функцию на $[a,b]$;*

(ii) *для любой интегрируемой функции f на $[a,b]$ интеграл*

$$\int_a^b f(x)\cdot g'(x)\ \mathsf{d}\,x$$

не зависит от того, как доопределена функция g' в точках недифференцируемости g.

- Как следствие, для любой интегрируемой функции f и любой непрерывной[11] кусочно-гладкой функции g на отрезке $[a,b]$ формула

$$\int_a^b f(x)\ \mathsf{d}\,g(x) := \int_a^b f(x)\cdot g'(x)\ \mathsf{d}\,x \tag{7.3.160}$$

однозначно определяет число, называемое *определенным интегралом от функции f вдоль функции g на отрезке* $[a,b]$. В частном случае, когда $f=1$ эта величина обозначается

$$\int_a^b \mathsf{d}\,g(x) := \int_a^b g'(x)\ \mathsf{d}\,x \tag{7.3.161}$$

Целью наших рассмотрений здесь является обобщение теорем 7.3.12 и 7.3.6 об интегрировании вдоль функции на случай, когда эта функция является непрерывной кусочно-гладкой (а не просто гладкой).

Теорема 7.3.12 (о скачке непрерывной кусочно-гладкой функции). *Скачок непрерывной кусочно-гладкой функции g на ориентированном отрезке $\overrightarrow{ab}$ равен интегралу от единицы вдоль g по этому отрезку:*

$$\int_a^b \mathsf{d}\,g(x) = \int_a^b g'(x)\ \mathsf{d}\,x = g(x)\Big|_{x=a}^{x=b} \tag{7.3.162}$$

Доказательство. Понятно, что здесь достаточно считать, что $a<b$, потому что противоположный случай получается умножением равенства (7.3.162) на -1.

1. Пусть сначала функция g дифференцируема везде внутри отрезка $[a,b]$ (а недифференцируема может быть только на концах этого отрезка). Тогда для любых точек α и β таких, что

$$a<\alpha<\beta<b,$$

функция v будет гладкой на отрезке $[\alpha,\beta]$, и значит к ним применима теорема 7.3.12:

$$\int_\alpha^\beta \mathsf{d}\,g(x) = g(\beta)-g(\alpha)$$

Переходя к пределам при $\alpha\to a$ и $\beta\to b$, мы получаем как раз (7.3.162):

$$\begin{array}{ccc}
\underbrace{\int_\alpha^\beta \mathsf{d}\,g(x)} & = & \underbrace{g(\beta)-g(\alpha)} \\
\begin{array}{c} \Vert\ (7.3.160) \\ \int_\alpha^\beta g'(x)\ \mathsf{d}\,x \\ \downarrow \\ \int_a^b g'(x)\ \mathsf{d}\,x \\ \Vert\ (7.3.160) \\ \int_a^b \mathsf{d}\,g(x) \end{array} & & \begin{array}{c} \downarrow \\ g(b)-g(a) \\ \left(\begin{array}{c}\text{здесь используется}\\ \text{непрерывность } g\end{array}\right) \end{array}
\end{array}$$

2. В общем случае мы выбираем по теореме 7.3.10 разбиение отрезка $[a,b]$

$$a=c_0<c_1<...<c_k=b$$

[11]Объяснение, почему функцию g в определении интеграла $\int_a^b f(x)\ \mathsf{d}\,g(x)$ нужно брать непрерывной кусочно-гладкой (а не просто кусочно-гладкой) заключается в том, что только тогда этот интеграл можно определить формулой (7.3.160). В общем случае эта конструкция называется *интегралом Римана-Стилтьеса* и определяется она по аналогии с интегралом Римана но с заменой $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ на $\Delta g_i = g(x_i)-g(x_{i-1})$. Для сходимости частичных сумм необходимо требовать, чтобы g была *функцией ограниченной вариации*. Подробности можно найти, например, в учебнике: А.Н.Колмогоров, С.В.Фомин, Элементы теории функций и функционального анализа, М.: Наука, 1981.

так, чтобы внутри каждого отрезка $[c_{i-1}, c_i]$ функция g была дифференцируема, и, по уже доказанному, мы получим:

$$\int_a^b \mathsf{d}\, g(x) = \sum_{i=1}^k \int_{c_{i-1}}^{c_i} \mathsf{d}\, g(x) = \sum_{i=1}^k g(x) \Big|_{x=c_{i-1}}^{x=c_i} = g(x) \Big|_{x=b}^{x=a}$$

$\square$

Следствие 7.3.13. *Функция $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ является непрерывной кусочно-гладкой тогда и только тогда, когда она представима в виде интеграла с переменным верхним пределом от некоторой кусочно-непрерывной функции $f : [a, b] \to \mathbb{R}$:*

$$g(x) = g(a) + \int_a^x f(t) \ \mathsf{d}\, t$$

Доказательство. В качестве f нужно взять производную g' функции g, доопределенную произвольным образом в точках недифференцируемости g. $\square$

Теорема 7.3.14 (об интегрировании по частям для непрерывных кусочно-гладких функций). *Если f и g – непрерывные кусочно-гладкие функции на ориентированном отрезке $\overrightarrow{ab}$, то*

$$\int_a^b f(x) \ \mathsf{d}\, g(x) = f(x) \cdot g(x) \Big|_{x=a}^{x=b} - \int_a^b g(x) \ \mathsf{d}\, f(x) \tag{7.3.163}$$

Доказательство. Как и в доказательстве теоремы 7.3.12, здесь достаточно считать, что $a < b$.

1. Пусть для начала функции f и g дифференцируемы везде внутри отрезка $[a, b]$ (а недифференцируемы могут быть только на концах этого отрезка). Тогда для любых точек α и β таких, что

$$a < \alpha < \beta < b,$$

функции f и g будут гладкими на отрезке $[\alpha, \beta]$, и значит к ним применима теорема 7.3.6:

$$\int_\alpha^\beta f(x) \ \mathsf{d}\, g(x) = f(x) \cdot g(x) \Big|_{x=\alpha}^{x=\beta} - \int_\alpha^\beta g(x) \ \mathsf{d}\, f(x)$$

Переходя к пределам при $\alpha \to a$ и $\beta \to b$ по формулам (7.2.101) и (7.2.102), мы получаем как раз (7.3.163):

$$\underbrace{\int_\alpha^\beta f(x) \ \mathsf{d}\, g(x)}_{\begin{array}{c} \| \ (7.3.160) \\ \int_\alpha^\beta f(x)\cdot g'(x) \ \mathsf{d}\, x \\ \downarrow \\ \int_a^b f(x)\cdot g'(x) \ \mathsf{d}\, x \\ \| \ (7.3.160) \\ \int_a^b f(x) \ \mathsf{d}\, g(x) \end{array}} = \underbrace{f(x) \cdot g(x) \Big|_{x=\alpha}^{x=\beta}}_{\begin{array}{c} \downarrow \\ f(x)\cdot g(x)\Big|_{x=a}^{x=b} \\ \left(\begin{array}{c}\text{здесь используется} \\ \text{непрерывность } f \text{ и } g\end{array}\right) \end{array}} - \underbrace{\int_\alpha^\beta g(x) \ \mathsf{d}\, f(x)}_{\begin{array}{c} \| \ (7.3.160) \\ \int_\alpha^\beta g(x)\cdot f'(x) \ \mathsf{d}\, x \\ \downarrow \\ \int_a^b g(x)\cdot f'(x) \ \mathsf{d}\, x \\ \| \ (7.3.160) \\ \int_a^b g(x) \ \mathsf{d}\, f(x) \end{array}}$$

2. В общем случае мы выбираем по теореме 7.3.10 разбиение отрезка $[a, b]$

$$a = c_0 < c_1 < ... < c_k = b$$

так, чтобы внутри каждого отрезка $[c_{i-1}, c_i]$ функции f и g были дифференцируемы, и, по уже доказанному, мы получим:

$$\int_a^b f(x) \ \mathsf{d}\, g(x) = \sum_{i=1}^k \int_{c_{i-1}}^{c_i} f(x) \ \mathsf{d}\, g(x) = \sum_{i=1}^k f(x) \cdot g(x) \Big|_{x=c_{i-1}}^{x=c_i} - \sum_{i=1}^k \int_{c_{i-1}}^{c_i} g(x) \ \mathsf{d}\, f(x) =$$
$$= f(x) \cdot g(x) \Big|_{x=a}^{x=b} - \int_a^b g(x) \ \mathsf{d}\, f(x)$$

$\square$

(d) Некоторые следствия формулы Ньютона-Лейбница

Первообразная на интервале. Напомним, что понятие первообразной для функции, определенной на отрезке было введено нами на с.399. Для случая интервала определение ничем не отличается:

- Функция F называется *первообразной для функции f на интервале* (α,β), если производная F на этом интервале равна f:

$$F'(x)=f(x),\qquad x\in(\alpha,\beta). \tag{7.3.164}$$

Предложение 7.3.15. *Для любой непрерывной функции f на интервале (α,β) и любой точки $c\in(\alpha;\beta)$ формула*

$$F(x)=\int_c^x f(t)\,\mathsf{d}\,t,\qquad x\in(\alpha,\beta)$$

определяет первообразную функции f на интервале (α,β).

Доказательство. Здесь используется теорема 7.3.1 об интеграле с переменным верхним пределом.

1. Зафиксируем $x_0\in(c,\beta)$. Взяв какое-нибудь $b\in(x_0,\beta)$, мы можем считать, что переменная x бегает по отрезку $[c,b]$, на котором x_0 будет внутренней точкой, поэтому производную функции F в x_0 можно вычислить по формуле (7.3.126):

$$F'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{1}{x-x_0}\left(\int_c^x f(t)\,\mathsf{d}\,t-\int_c^{x_0} f(t)\,\mathsf{d}\,t\right)=$$
$$=\lim_{x\to x_0}\frac{1}{x-x_0}\left(\int_{[c,x]} f(t)\,\mathsf{d}\,t-\int_{[c,x_0]} f(t)\,\mathsf{d}\,t\right)=(7.3.126)=f(x_0). \tag{7.3.165}$$

Более того, представив F тем же интегралом с x бегающим по отрезку $[c,b]$, мы можем найти правую производную F в точке c по формуле (7.3.127):

$$F'_+(c)=\lim_{x\to c+0}\frac{F(x)-F(c)}{x-c}=\lim_{x\to c+0}\frac{1}{x-c}\int_c^x f(t)\ \mathsf{d}\,t=$$
$$=\lim_{x\to c+0}\frac{1}{x-c}\int_{[c,x]} f(t)\ \mathsf{d}\,t=(7.3.127)=f(c). \tag{7.3.166}$$

2. Если $\alpha<x_0<c$, то взяв какое-нибудь $a:\ \alpha<a<x_0$, мы получим

$$F'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{1}{x-x_0}\left(\int_c^x f(t)\,\mathsf{d}\,t-\int_c^{x_0} f(t)\,\mathsf{d}\,t\right)=(7.3.140)=\lim_{x\to x_0}\frac{1}{x-x_0}\left(\int_{x_0}^x f(t)\,\mathsf{d}\,t\right)=$$
$$=(7.3.140)=\lim_{x\to x_0}\frac{1}{x-x_0}\left(\int_a^x f(t)\,\mathsf{d}\,t-\int_a^{x_0} f(t)\,\mathsf{d}\,t\right)=$$
$$=\lim_{x\to x_0}\frac{1}{x-x_0}\left(\int_{[a,x]} f(t)\,\mathsf{d}\,t-\int_{[a,x_0]} f(t)\,\mathsf{d}\,t\right)=(7.3.126)=f(x_0) \tag{7.3.167}$$

И представив F тем же интегралом с x бегающим по отрезку $[a,c]$, мы можем найти левую производную F в точке c по формуле (7.3.128):

$$F'_-(c)=\lim_{x\to c-0}\frac{F(x)-F(c)}{x-c}=\lim_{x\to c-0}\frac{1}{x-c}\int_c^x f(t)\ \mathsf{d}\,t=$$
$$=\lim_{x\to c-0}\frac{1}{c-x}\int_x^c f(t)\ \mathsf{d}\,t=(7.3.128)=f(c). \tag{7.3.168}$$

3. Теперь мы получаем, что формулы (7.3.166) и (7.3.168) вместе дают (7.3.164) для случая $x_0=c$, а для всех остальных точек $x_0\ne c$ то же самое утверждается в формулах (7.3.165) и (7.3.167). $\square$

Лемма Адамара.

Лемма 7.3.16 (Адамар)**.** *Для любой гладкой функции f на отрезке $[a,b]$ и любой точки $c\in[a,b]$ найдется непрерывная функция g на $[a,b]$ такая, что*

$$f(x)-f(c)=(x-c)\cdot g(x),\qquad x\in[a,b] \tag{7.3.169}$$

Доказательство. Положим

$$g(x) = \int_0^1 f'\Big((x-c)\cdot s + c\Big)\ \mathsf{d}\,s, \qquad x\in[a,b]$$

Из непрерывности функции f' следует, что функция g тоже непрерывна на $[a,b]$. Действительно, пусть $\varepsilon>0$. По теореме Кантора 3.3.10, найдется $\delta>0$ такое, что для любых $x,y\in[a,b]$

$$|x-y|<\delta \qquad \Longrightarrow \qquad |f'(x)-f'(y)|<\varepsilon$$

Поэтому справедлива цепочка:

$$|x-y|<\delta$$

$$\Downarrow$$

$$\forall s\in[0,1] \qquad \Big|\big((x-c)\cdot s+c\big)-\big((y-c)\cdot s+c\big)\Big| = \Big|(x-y)\cdot s\Big| = |x-y|\cdot|s| \leqslant |x-y|<\delta$$

$$\Downarrow$$

$$\forall s\in[0,1] \qquad \Big|f'\big((x-c)\cdot s+c\big)-f'\big((y-c)\cdot s+c\big)\Big|<\varepsilon$$

$$\Downarrow$$

$$|g(x)-g(y)| = \left|\int_0^1 f'\big((x-c)\cdot s+c\big)\ \mathsf{d}\,s - \int_0^1 f'\big((y-c)\cdot s+c\big)\ \mathsf{d}\,s\right| =$$

$$= \left|\int_{[0;1]} f'\big((x-c)\cdot s+c\big)\ \mathsf{d}\,s - \int_{[0;1]} f'\big((y-c)\cdot s+c\big)\ \mathsf{d}\,s\right| =$$

$$= \left|\int_{[0;1]} \Big(f'\big((x-c)\cdot s+c\big)-f'\big((y-c)\cdot s+c\big)\Big)\ \mathsf{d}\,s\right| \leqslant$$

$$\leqslant \int_{[0;1]} \underbrace{\Big|f'\big((x-c)\cdot s+c\big)-f'\big((y-c)\cdot s+c\big)\Big|}_{\substack{\wedge\\ \varepsilon}}\ \mathsf{d}\,s < \int_{[0;1]}\varepsilon\ \mathsf{d}\,s = \varepsilon$$

Остается проверить тождество (13.1.44). Для любого $x>c$ мы получаем:

$$f(x)-f(c) = \int_c^x f'(t)\ \mathsf{d}\,t = \left|\begin{array}{c} t=(x-c)\cdot s+c \\ s\in[0,1] \\ \mathsf{d}\,t=(x-c)\ \mathsf{d}\,s \\ t\in\overrightarrow{cx} \ \Leftrightarrow\ s\in\overrightarrow{0;1}\end{array}\right| = \int_0^1 f'\Big((x-c)\cdot s+c\Big)\cdot(x-c)\ \mathsf{d}\,s =$$

$$= (x-c)\cdot\int_0^1 f'\Big((x-c)\cdot s+c\Big)\ \mathsf{d}\,s = (x-c)\cdot g(x)$$

□

(e) Приложения определенного интеграла

Площадь правильной области на плоскости. Пусть функции f и g непрерывны на отрезке $[a,b]$ и удовлетворяют неравенству

$$f(x)\leqslant g(x), \quad x\in[a;b]$$

Тогда система неравенств

$$\begin{cases} a\leqslant x\leqslant b \\ f(x)\leqslant y\leqslant g(x)\end{cases}$$

задает на координатной плоскости некоторую область D

Всякая такая область называется *правильной* (относительно оси OX).

Теорема 7.3.17. *Площадь S_D правильной области*

$$D: \quad \begin{cases} a \leqslant x \leqslant b \\ f(x) \leqslant y \leqslant g(x) \end{cases}$$

равна

$$S_D = \int_a^b \Big[g(x) - f(x)\Big] \, \mathsf{d}\, x \qquad (7.3.170)$$

$\diamond$ **7.3.27.** Найдем площадь фигуры, ограниченной кривыми

$$y = x, \quad y = 2 - x^2$$

Найдем сначала точки пересечения этих линий:

$$\begin{Bmatrix} y = x \\ y = 2 - x^2 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} y = x \\ x = 2 - x^2 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{Bmatrix} y = x \\ x^2 + x - 2 = 0 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \left\{ \begin{matrix} y = x \\ \begin{bmatrix} x = -2 \\ x = 1 \end{bmatrix} \end{matrix} \right\} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{matrix} \begin{Bmatrix} x = -2 \\ y = -2 \end{Bmatrix} \\ \begin{Bmatrix} x = 1 \\ y = 1 \end{Bmatrix} \end{matrix} \right]$$

На плоскости эта область изображается картинкой (которую можно построить по точкам):

Теперь интересующая нас область в правильном виде записывается следующим образом:

$$D: \quad \begin{cases} -2 \leqslant x \leqslant 1 \\ x \leqslant y \leqslant 2 - x^2 \end{cases}$$

и остается применить формулу (7.3.170):

$$S_D = \int_{-2}^1 \{2 - x^2 - x\} \, \mathsf{d}\, x =$$

$$= \left\{2x - \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\right\} \Big|_{-2}^1 =$$

$$= \left\{2 - \frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right\} - \left\{-4 + \frac{8}{3} - 2\right\} = \frac{9}{2}$$

$\triangleright\triangleright$ **7.3.28.** Найдите площади фигур, ограниченных линиями:

1) $y = 6x - x^2 - 7$, $y = x - 3$;
2) $y = 2x - x^2$, $y = x$;
3) $y = x^3$, $y = x$;
4) $y = \frac{x^2}{2}$, $y = 2 - \frac{3x}{2}$;
5) $y = -x^2$, $y = x^2 - 2x - 4$;
6) $y = 2x^2$, $y = \frac{x^3}{3}$;
7) $y = x(x-a)^2$, $y = 0$.

$\triangleright\triangleright$ **7.3.29.** Найдите площади фигур, ограниченных линиями:

1) $y = e^x$, $y = e^{-x}$, $x = 1$,
2) $y = 2px^2$, $x = 2py^2$,
3) $y = -x$, $y = 2x - x^2$.

Площадь области, ограниченной параметризованной кривой. Для любых непрерывных функций $\varphi, \chi : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ система уравнений вида

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \chi(t) \\ t \in [\alpha; \beta] \end{cases}$$

задает на плоскости некоторое множество точек, называемых *параметризованной кривой* (параметр t необязательно бегает по отрезку).

$\diamond$ **7.3.30** (эллипс)**.** Можно проверить, что уравнения

$$\begin{cases} x = a \cos t \\ y = b \sin t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$$

определяют эллипс:

Действительно,

$$\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} = \cos^2 t + \sin^2 t = 1$$

$\diamond$ **7.3.31** (астроида)**.** Уравнения

$$\begin{cases} x = a \cos^3 t \\ y = a \sin^3 t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$$

задают на плоскости кривую, называемую *астроидой*. Для ее построения можно составить таблицу

t	0	$\pm\frac{\pi}{6}$	$\pm\frac{\pi}{4}$	$\pm\frac{\pi}{3}$	$\pm\frac{\pi}{2}$
x	a	$\frac{3\sqrt{3}}{8}a$	$\frac{\sqrt{2}}{4}a$	$\frac{1}{8}a$	0
y	0	$\pm\frac{1}{8}a$	$\pm\frac{\sqrt{2}}{4}a$	$\pm\frac{3\sqrt{3}}{8}a$	$\pm a$

t	$\pm\frac{2\pi}{3}$	$\pm\frac{3\pi}{4}$	$\pm\frac{5\pi}{6}$	$\pm\pi$
x	$-\frac{1}{8}a$	$-\frac{\sqrt{2}}{4}a$	$-\frac{3\sqrt{3}}{8}a$	$-a$
y	$\pm\frac{3\sqrt{3}}{8}a$	$\pm\frac{\sqrt{2}}{4}a$	$\pm\frac{1}{8}a$	0

затем отметить все эти точки на рисунке:

и соединить их “плавной линией”. Получится картинка

◇ **7.3.32** (циклоида)**.** Уравнения

$$\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$$

задают на плоскости кривую, называемую *циклоидой*. Ее также можно построить по точкам, и соответсвующая картинка будет выглядеть так:

Область на плоскости можно определять параметризованными кривыми. Например, система

$$D: \quad \begin{cases} x = \varphi(t) \\ 0 \leqslant y \leqslant \psi(t) \end{cases}, \quad t \in [\alpha; \beta]$$

задает на плоскости примерно такую область

если φ) возрастает, и

если φ убывает.

Теорема 7.3.18. *Пусть*

1) *φ – гладкая монотонная функция на отрезке $t \in [\alpha; \beta]$;*
2) *χ – непрерывная неотрицательная функция на отрезке $t \in [\alpha; \beta]$: $\chi(t) \geqslant 0$.*

Тогда площадь S_D области, ограниченной параметризованной кривой

$$D: \quad \begin{cases} x = \varphi(t) \\ 0 \leqslant y \leqslant \chi(t) \end{cases}, \quad t \in [\alpha; \beta]$$

равна

$$S_D = \left| \int_\alpha^\beta \chi(t) \, \mathsf{d}\, \varphi(t) \right| \tag{7.3.171}$$

◇ **7.3.33** (площадь эллипса)**.** Найдем площадь эллипса из примера 7.3.30.

Для этого выделим четвертинку этой области, определяемую системой

$$D: \quad \begin{cases} x = a \cos t \\ 0 \leqslant y \leqslant b \sin t \end{cases}, \quad t \in [0; \frac{\pi}{2}]$$

и найдем ее площадь:

$$S_D = \left| \int_0^{\frac{\pi}{2}} b \sin t \,\mathsf{d}\, a \cos t \right| = ab \left| \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t \,\mathsf{d}\, t \right| =$$

$$= ab \left| \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \cos 2t}{2} \,\mathsf{d}\, t \right| = \frac{ab}{2} \left| \left(t - \frac{\sin 2t}{2} \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \right| =$$

$$= \frac{\pi ab}{4}$$

Умножив это число на 4, получаем площадь эллипса:

$$S = \pi ab$$

◇ **7.3.34.** Найдем площадь фигуры, ограниченной астроидой из примера 7.3.31.

Для этого выделим четвертинку, определяемую системой

$$D: \quad \begin{cases} x = a \cos^3 t \\ 0 \leqslant y \leqslant a \sin^3 t \end{cases}, \quad t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$$

и найдем ее площадь:

$$S_D = \left| \int_0^{\frac{\pi}{2}} a \sin^3 t \,\mathsf{d}\left(a \cos^3 t \right) \right| =$$

$$= 3a^2 \left| \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 t \cos^2 t \,\mathsf{d}\, t \right| =$$

$$= 3a^2 \left| \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1 - \cos 2t}{2} \right)^2 \frac{1 + \cos 2t}{2} \,\mathsf{d}\, t \right| =$$

$$= \frac{3a^2}{8} \left| \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos 2t) \left(1 - \cos^2 2t \right) \,\mathsf{d}\, t \right| =$$

$$= \frac{3a^2}{8} \left| \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos 2t) \left(1 - \frac{1 + \cos 4t}{2} \right) \,\mathsf{d}\, t \right| =$$

$$= \frac{3a^2}{16} \left| \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos 2t)(1 - \cos 4t) \,\mathsf{d}\, t \right| =$$

$$= \frac{3a^2}{16} \left| \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos 2t - \cos 4t + \cos 2t \cos 4t) \,\mathsf{d}\, t \right| =$$

$$= \frac{3a^2}{16} \left| \int_0^{\frac{\pi}{2}} \Big(1 - \cos 2t - \cos 4t + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2} (\cos 6t + \cos 2t) \Big) \,\mathsf{d}\, t \right| =$$

$$= \frac{3a^2}{32} \left| \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2 - \cos 2t - 2 \cos 4t + \cos 6t) \,\mathsf{d}\, t \right| =$$

$$= \frac{3a^2}{32} \left| \left(2t - \frac{1}{6} \sin 2t - \frac{1}{2} \sin 4t + \frac{1}{6} \sin 6t \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \right| =$$

$$= \frac{3a^2 \pi}{32}$$

Умножив это число на 4, получим площадь всей фигуры:

$$S = \frac{3a^2 \pi}{8}$$

◇ **7.3.35.** Найдем площадь фигуры, ограниченной аркой циклоиды

$$D: \quad \begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ 0 \leqslant y \leqslant a(1 - \cos t) \end{cases}, \quad t \in [0; 2\pi]$$

Вычисляем площадь:

$$S_D = \left| \int_0^{2\pi} a(1 - \cos t) \,\mathsf{d}\, a(t - \sin t) \right| =$$

$$= a^2 \left| \int_0^{2\pi} (1 - \cos t)^2 \,\mathsf{d}\, t \right| =$$

$$= a^2 \left| \int_0^{2\pi} \left(1 - 2 \cos t + \cos^2 t \right) \,\mathsf{d}\, t \right| =$$

$$= a^2 \left| \int_0^{2\pi} \left(1 - 2 \cos t + \frac{1 + \cos 2t}{2} \right) \,\mathsf{d}\, t \right| =$$

$$= a^2 \left| \left(\frac{3}{2} t - 2 \sin t + \frac{\sin 2t}{4} \right) \Big|_0^{2\pi} \right| = 3\pi a^2$$

▷▷ **7.3.36.** Найдите площади фигур, ограниченных параметризованными кривыми:

1) $x = a(t^2+1)$, $y = b(t^3-3t)$ (площадь петли)

2) $x = \frac{1}{3}(3-t^2)$, $y = t^2$ (площадь петли)

3) $x = 2t - t^2$, $y = 2t^2 - t^3$ (площадь петли)

Площадь области в полярных координатах. Положение точки A на плоскости можно задавать не только декартовыми координатами (то есть обычными значениями переменных x и y), но также полярными координатами – значением угла φ между лучом OX и лучом OA, соединяющим начало координат O с точкой A, и расстояния ρ от A до начала координат O:

При этом, полярные координаты связаны с декартовыми формулами

$$\begin{cases} x = \rho\cdot\cos\varphi \\ y = \rho\cdot\sin\varphi \end{cases}, \qquad \begin{cases} \rho = \sqrt{x^2+y^2} \\ \operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{x} \end{cases},$$

Как и в случае с декартовыми координатами, всякое уравнение, связывающее полярные координаты,

$$\rho = R(\varphi)$$

задает некоторую кривую на плоскости. Рассмотрим примеры.

◇ **7.3.37** (кардиоида)**.** Построим кривую, заданную уравнением в полярных координатах

$$\rho = a\cdot(1+\cos\varphi)$$

Это можно сделать по точкам. Сначала составляется таблица

φ	0	$\pm\frac{\pi}{6}$	$\pm\frac{\pi}{4}$	$\pm\frac{\pi}{3}$	$\pm\frac{\pi}{2}$
ρ	$2a$	$a\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$	$a\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$	$\frac{3a}{2}$	a

φ	$\pm\frac{2\pi}{3}$	$\pm\frac{3\pi}{4}$	$\pm\frac{5\pi}{6}$	$\pm\pi$
ρ	$\frac{a}{2}$	$a\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$	$a\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$	0

Потом соответствующие точки строятся на плоскости:

Эти точки соединяются плавной линией, и получается кривая:

◇ **7.3.38** (лемниската Бернулли)**.** Построим кривую, заданную уравнением в полярных координатах

$$\rho = a\sqrt{\cos 2\varphi}$$

Это также делается по точкам. Сначала составляется таблица (в которой знак $\nexists$ говорит, что для данного значения φ соответсвующее значение параметра ρ не определено):

φ	0	$\pm\frac{\pi}{6}$	$\pm\frac{\pi}{4}$	$\pm\frac{\pi}{3}$	$\pm\frac{\pi}{2}$
ρ	a	$\frac{a}{\sqrt{2}}$	0	$\nexists$	$\nexists$

φ	$\pm\frac{2\pi}{3}$	$\pm\frac{3\pi}{4}$	$\pm\frac{5\pi}{6}$	$\pm\pi$
ρ	$\nexists$	0	$\frac{a}{\sqrt{2}}$	a

Потом соответствующие точки строятся на плоскости:

И в результате получается кривая:

◇ **7.3.39** (окружность)**.** Построим кривую, заданную уравнением в полярных координатах

$$\rho = a\sin\varphi$$

Составляем таблицу

φ	$-\pi$	$-\frac{3\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{4}$	0
ρ	0	$\nexists$	$\nexists$	$\nexists$	0

φ	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π
ρ	$\frac{a}{\sqrt{2}}$	a	$\frac{a}{\sqrt{2}}$	0

(здесь знак $\nexists$ мы пишем в случае, когда значение ρ получается отрицательным; это должно означать, что при данном φ соответствующая точка не существует, поскольку ρ есть расстояние до нуля, и значит не может быть отрицательным).

Потом на плоскости строятся точки:

В результате получается кривая:

Нетрудно показать, что эта кривая – окружность. Для этого нужно перейти к декартовым координатам:

$$\rho = a\sin\varphi \iff \rho^2 = a\rho\sin\varphi \iff x^2+y^2 = ay \iff$$
$$\iff x^2+y^2-ay+\frac{a^2}{4} = \frac{a^2}{4} \iff x^2+\Big(y-\frac{a}{2}\Big)^2 = \Big(\frac{a}{2}\Big)^2$$

Теорема 7.3.19. *Площадь области на плоскости, заданной неравенствами*

$$D : \begin{cases} \alpha \leqslant \varphi \leqslant \beta \\ \rho \leqslant R(\varphi) \end{cases}$$

вычисляется по формуле

$$S_D = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta R(\varphi)^2 \,\mathsf{d}\,\varphi \qquad (7.3.172)$$

◇ **7.3.40.** Вычислим площадь области, ограниченной кардиоидой (линией, построенной нами в примере 7.3.37):

$$\rho = a\cdot(1+\cos\varphi)$$

По теореме 7.3.19 получаем:

$$S_D = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} a^2\cdot(1+\cos\varphi)^2 \,\mathsf{d}\,\varphi =$$
$$= \frac{a^2}{2}\cdot\int_0^{2\pi}(1+2\cos\varphi+\cos^2\varphi)\,\mathsf{d}\,\varphi =$$
$$= \frac{a^2}{2}\cdot\int_0^{2\pi}\left(1+2\cos\varphi+\frac{1+\cos 2\varphi}{2}\right)\mathsf{d}\,\varphi =$$
$$= \frac{a^2}{2}\cdot\int_0^{2\pi}\left(\frac{3}{2}+2\cos\varphi+\frac{\cos 2\varphi}{2}\right)\mathsf{d}\,\varphi =$$
$$= \frac{a^2}{2}\cdot\left(\frac{3}{2}\varphi+2\sin\varphi+\frac{\sin 2\varphi}{4}\right)\Big|_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} = \frac{3\pi a^2}{2}$$

◇ **7.3.41.** Вычислим площадь области, ограниченной лемнискатой Бернулли (линией, построенной нами в примере 7.3.38):

$$\rho = a\sqrt{\cos 2\varphi}$$

Для этого достаточно найти площадь одного “лепестка”:

$$S_A = \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} a^2\cdot\cos 2\varphi \,\mathsf{d}\,\varphi = \frac{a^2}{2}\cdot\frac{\sin 2\varphi}{2}\Big|_{\varphi=-\frac{\pi}{4}}^{\varphi=\frac{\pi}{4}} =$$
$$= \frac{a^2}{4}\cdot(1-(-1)) = \frac{a^2}{2}$$

Общая площадь теперь получается удвоением площади одного лепестка:

$$S_D = 2S_A = a^2$$

◇ **7.3.42.** Убедимся, что формула (7.3.172), будучи применена к вычислению площади круга, построенного в примере 7.3.39, приводит к правильному результату : $\pi R^2 = \frac{\pi a^2}{4}$.

$$\rho = a\sin\varphi$$

$$S_D = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} a^2 \cdot \sin^2\varphi \,\mathsf{d}\,\varphi =$$
$$= \frac{a^2}{2}\cdot\int_0^{\pi}\left(\frac{1-\cos 2\varphi}{2}\right)\mathsf{d}\,\varphi =$$
$$= \frac{a^2}{2}\cdot\left(\frac{\varphi}{2} - \frac{\sin 2\varphi}{2}\right)\Big|_{\varphi=0}^{\varphi=\pi} = \frac{\pi a^2}{4}$$

⊳⊳ **7.3.43.** Найдите площади фигур, ограниченных линиями:

1) $\rho = 4\sin^2\varphi$
2) $\rho = a(2+\sin\varphi)$
3) $\rho = a\cos\varphi$
4) $\rho = a\sin 3\varphi$
5) $\rho = a\cos 4\varphi$
6) $\rho = a\sin^2 3\varphi$
7) $\rho = a\cos^2 3\varphi$

Длина кривой.

Теорема 7.3.20. *Если кривая задана уравнением*

$$y = f(x), \quad x \in [a;b]$$

(в котором f – гладкая функция на отрезке $[a;b]$), то ее длина равна

$$l = \int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}\,\mathsf{d}\,x \tag{7.3.173}$$

◇ **7.3.44.** Найдем длину куска экспоненты

$$y = e^x, \qquad x \in [a,b]$$

По формуле (7.3.173) имеем:

$$l = \int_a^b \sqrt{1+e^{2x}}\,\mathsf{d}\,x =$$
$$= \left| \begin{array}{c} t = \sqrt{1+e^{2x}},\ x = \frac{1}{2}\ln(t^2-1) \\ \mathsf{d}\,x = \frac{t\,\mathsf{d}\,t}{t^2-1} \\ x \in \overrightarrow{a,b} \leftrightarrow t \in \overrightarrow{\sqrt{1+e^{2a}},\sqrt{1+e^{2b}}} \end{array}\right| =$$
$$= \int_{\sqrt{1+e^{2a}}}^{\sqrt{1+e^{2b}}} \frac{t^2\,\mathsf{d}\,t}{t^2-1} = \int_{\sqrt{1+e^{2a}}}^{\sqrt{1+e^{2b}}} \frac{t^2-1+1}{t^2-1}\,\mathsf{d}\,t =$$
$$= \int_{\sqrt{1+e^{2a}}}^{\sqrt{1+e^{2b}}} \left(1+\frac{1}{t^2-1}\right)\mathsf{d}\,t =$$
$$= \int_{\sqrt{1+e^{2a}}}^{\sqrt{1+e^{2b}}} \left(1+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t+1}\right)\right)\mathsf{d}\,t =$$
$$= t + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|\Big|_{\sqrt{1+e^{2a}}}^{\sqrt{1+e^{2b}}} =$$
$$= \sqrt{1+e^{2b}} - \sqrt{1+e^{2a}} +$$
$$+ \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{1+e^{2b}}-1}{\sqrt{1+e^{2b}}+1}\cdot\frac{\sqrt{1+e^{2a}}+1}{\sqrt{1+e^{2a}}-1}\right|$$

◇ **7.3.45.** Найдем длину куска полукубической параболы:

$$y = x^{\frac{3}{2}}, \quad x \in [0;1]$$

По формуле (7.3.173) имеем:

$$l = \int_0^1 \sqrt{1+\left(\frac{3}{2}\cdot x^{\frac{1}{2}}\right)^2}\,\mathsf{d}\,x =$$
$$= \int_0^1 \sqrt{1+\frac{9}{4}\cdot x}\,\mathsf{d}\,x =$$
$$= \left| \begin{array}{c} t = \sqrt{1+\frac{9}{4}x} \\ x = \frac{4}{9}(t^2-1) \\ x \in [0;1] \Leftrightarrow t \in [1;\frac{\sqrt{13}}{2}] \end{array}\right| =$$
$$= \int_1^{\frac{\sqrt{13}}{2}} t\,\mathsf{d}\left\{\frac{4}{9}\cdot(t^2-1)\right\} = \frac{8}{9}\cdot\int_1^{\frac{\sqrt{13}}{2}} \cdot t^2\,\mathsf{d}\,t =$$
$$= \frac{8}{9}\cdot\frac{t^3}{3}\Big|_1^{\frac{\sqrt{13}}{2}} = \frac{8}{27}\cdot\left\{\left(\frac{\sqrt{13}}{2}\right)^3 - 1\right\} = \frac{13\sqrt{13}-8}{27}$$

◇ **7.3.46.** Найдем длину куска обычной параболы:

$$y = x^2, \quad x \in [0;1]$$

По формуле (7.3.173) (с использованием тождества $\sin\operatorname{arctg} x = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$) мы получаем:

$$l = \int_0^1 \sqrt{1+4x^2}\,\mathsf{d}\,x =$$
$$= \left| \begin{array}{c} 2x = \operatorname{tg} t,\ t = \operatorname{arctg} 2x \\ \mathsf{d}\,x = \frac{\mathsf{d}\,t}{2\cos^2 t} \\ x \in \overrightarrow{0,1} \ \Leftrightarrow\ t \in \overrightarrow{0,\operatorname{arctg} 4} \end{array}\right| = \int_0^{\operatorname{arctg} 4} \frac{\mathsf{d}\,t}{2\cos^3 t} =$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^{\operatorname{arctg} 4} \frac{\mathsf{d}\sin t}{\cos^4 t} = \frac{1}{2}\int_0^{\operatorname{arctg} 4} \frac{\mathsf{d}\sin t}{(1-\sin^2 t)^2} =$$
$$= \left| \begin{array}{c} z = \sin t,\ t = \arcsin z \\ t \in \overrightarrow{0,\operatorname{arctg} 4} \ \Leftrightarrow\ z \in \overrightarrow{0,\sin\operatorname{arctg} 4} = \overrightarrow{0,\frac{4}{\sqrt{17}}} \end{array}\right| =$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{4}{\sqrt{17}}} \frac{\mathsf{d}\,z}{(1-z^2)^2} = \left(\begin{array}{c} \text{раскладываем} \\ \text{на простейшие дроби} \\ \text{по теореме 7.1.10} \end{array}\right) =$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{4}{\sqrt{17}}} \frac{1}{4}\left(\frac{1}{1-z}+\frac{1}{1+z}+\frac{1}{(1-z)^2}+\frac{1}{(1+z)^2}\right)\mathsf{d}\,z =$$
$$= \frac{1}{8}\cdot\left(\ln\left|\frac{1+z}{1-z}\right| + \frac{1}{1-z} - \frac{1}{1+z}\right)\Big|_0^{\frac{4}{\sqrt{17}}} =$$
$$= \frac{1}{8}\cdot\left(\ln\left|\frac{\sqrt{17}+4}{\sqrt{17}-4}\right| + \frac{\sqrt{17}}{\sqrt{17}-4} - \frac{\sqrt{17}}{\sqrt{17}+4}\right) =$$
$$= \frac{1}{8}\cdot\ln\left|\frac{\sqrt{17}+4}{\sqrt{17}-4}\right| + \sqrt{17}$$

Теорема 7.3.21. *Если кривая задана параметрическими уравнениями*

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \chi(t) \end{cases}, \quad t \in [\alpha;\beta]$$

причем $\varphi(t)$, $\chi(t)$ – гладкие функции на $[\alpha;\beta]$, то ее длина равна

$$l=\int_\alpha^\beta \sqrt{\big(\varphi'(t)\big)^2+\big(\chi'(t)\big)^2}\,\mathsf{d}\,t \qquad (7.3.174)$$

◇ **7.3.47** (длина астроиды). Найдем длину астроиды:

$$\begin{cases} x=a\cos^3 t\\ y=a\sin^3 t\end{cases}$$

По формуле (7.3.174), длина четвертинки равна

$$\frac{l}{4}=$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\big(-3a\cos^2 t\sin t\big)^2+\big(3a\sin^2 t\cos t\big)^2}\,\mathsf{d}\,t=$$
$$=3a\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos^4 t\sin^2 t+\sin^4 t\cos^2 t}\,\mathsf{d}\,t=$$
$$=3a\int_0^{\frac{\pi}{2}} |\cos t\sin t|\,\sqrt{\cos^2 t+\sin^2 t}\,\mathsf{d}\,t=$$
$$=3a\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos t\sin t\sqrt{1}\,\mathsf{d}\,t=3a\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin t\,\mathsf{d}\sin t=$$
$$=3a\frac{\sin^2 t}{2}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{3a}{2}$$

Умножив на 4, получаем ответ:

$$l=6a$$

◇ **7.3.48** (длина арки циклоиды). Вспомним кривую из примера 7.3.35:

$$\begin{cases} x=a(t-\sin t)\\ y=a(1-\cos t)\end{cases},\qquad t\in[0;2\pi]$$

По формуле (7.3.174) получаем:

$$l=\int_0^{2\pi}\sqrt{a^2(1-\cos t)^2+a^2\sin^2 t}\,\mathsf{d}\,t=$$
$$=\int_0^{2\pi}\sqrt{a^2-2a^2\cos t+a^2\cos^2 t+a^2\sin^2 t}\,\mathsf{d}\,t=$$
$$=\int_0^{2\pi}\sqrt{2a^2-2a^2\cos t}\,\mathsf{d}\,t=$$
$$=a\sqrt{2}\int_0^{2\pi}\sqrt{1-\cos t}\,\mathsf{d}\,t=$$
$$=a\sqrt{2}\int_0^{2\pi}\sqrt{2\sin^2\frac{t}{2}}\,\mathsf{d}\,t=$$
$$=2a\int_0^{2\pi}\Big|\underbrace{\sin\frac{t}{2}}_{\substack{\vee\!\!/\\0}}\Big|\,\mathsf{d}\,t=2a\int_0^{2\pi}\sin\frac{t}{2}\,\mathsf{d}\,t=$$
$$=4a\int_0^{2\pi}\sin\frac{t}{2}\,\mathsf{d}\,\frac{t}{2}=-4a\cos\frac{t}{2}\Big|_0^{2\pi}=$$
$$=-4a(\cos\pi-\cos 0)=8a.$$

Теорема 7.3.22. *Если кривая задана уравнением в полярных координатах,*

$$\rho=R(\varphi),\quad \varphi\in[\alpha;\beta]$$

(где $R(\varphi)$ – гладкая функция на $[\alpha;\beta]$), то ее длина равна

$$l=\int_\alpha^\beta\sqrt{R(\varphi)^2+\big(R'(\varphi)\big)^2}\,\mathsf{d}\,\varphi \qquad (7.3.175)$$

◇ **7.3.49** (длина кардиоиды). Найдем длину кардиоиды:

$$\rho=a\cdot(1+\cos\varphi)$$

По формуле (7.3.175),

$$l=\int_0^{2\pi}\sqrt{\big\{a\cdot(1+\cos\varphi)\big\}^2+(a\sin\varphi)^2}\,\mathsf{d}\,\varphi=$$
$$=a\int_0^{2\pi}\sqrt{1+2\cos\varphi+\cos^2\varphi+\sin^2\varphi}\,\mathsf{d}\,\varphi=$$
$$=a\int_0^{2\pi}\sqrt{2+2\cos\varphi}\,\mathsf{d}\,\varphi=$$
$$=a\int_0^{2\pi}\sqrt{4\cos^2\frac{\varphi}{2}}\,\mathsf{d}\,\varphi=2a\int_0^{2\pi}\Big|\cos\frac{\varphi}{2}\Big|\,\mathsf{d}\,\varphi=$$
$$=\begin{pmatrix}\text{разбиваем отрезок } [0;2\pi]\\ \text{на два отрезка, где } \cos\frac{\varphi}{2}\\ \text{имеет постоянный знак}\end{pmatrix}=$$
$$=2a\int_0^{\pi}\Big|\cos\frac{\varphi}{2}\Big|\,\mathsf{d}\,\varphi+2a\int_\pi^{2\pi}\Big|\cos\frac{\varphi}{2}\Big|\,\mathsf{d}\,\varphi=$$
$$=\begin{pmatrix}\text{при } \varphi\in[0;\pi] \text{ имеем}\\ \big|\cos\frac{\varphi}{2}\big|=\cos\frac{\varphi}{2}\\ \text{а при } \varphi\in[\pi;2\pi] \text{ имеем}\\ \big|\cos\frac{\varphi}{2}\big|=-\cos\frac{\varphi}{2}\end{pmatrix}=2a\int_0^{\pi}\cos\frac{\varphi}{2}\,\mathsf{d}\,\varphi-$$
$$-2a\int_\pi^{2\pi}\cos\frac{\varphi}{2}\,\mathsf{d}\,\varphi=4a\sin\frac{\varphi}{2}\Big|_0^{\pi}-4a\sin\frac{\varphi}{2}\Big|_\pi^{2\pi}=$$
$$=4a\Big(\sin\frac{\pi}{2}-0\Big)-4a\Big(\sin\frac{2\pi}{2}-\sin\frac{\pi}{2}\Big)=$$
$$=4a+4a=8a$$

▷▷ **7.3.50.** Найдите длину кривой:

1) $y=\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{2}\ln x$, $x\in[1;e]$,
2) $y=\frac{1}{3}(3-x)\sqrt{x}$, $x\in[1;2]$,
3) $x=e^t\cos t, y=e^t\sin t$, $t\in[0;\pi]$,
4) $\rho=e^\varphi$, $\varphi\in[0;2\pi]$.

Объем тела вращения. Пусть на отрезке $[a;b]$ задана непрерывная неотрицательная функция f

Если ее график заставить вращаться вокруг оси

OX, получится поверхность, описываемая уравнением

$$y^2 + z^2 = f(x)^2, \quad x \in [a; b]$$

и называемая *поверхностью вращения.*

Эта поверхность ограничивает вместе с плоскостями $x = a$ и $x = b$ область в терхмерном пространстве, которая называется *телом вращения* и описывается системой неравенств

$$\begin{cases} y^2 + z^2 \leqslant f(x)^2 \\ a \leqslant x \leqslant b \end{cases} \qquad (7.3.176)$$

Теорема 7.3.23. *Объем тела вращения* (7.3.176) *вычисляется по формуле*

$$V = \pi \int_a^b f(x)^2 \,\mathsf{d}\, x \qquad (7.3.177)$$

◇ **7.3.51.** Найдем объем тела, образованного вращением параболы $y = \sqrt{x}$ и плоскостью $x = b$:

По формуле (7.3.177) получаем

$$V = \pi \int_0^b \left(\sqrt{x}\right)^2 \,\mathsf{d}\, x = \pi \int_0^b x \,\mathsf{d}\, x = \frac{\pi}{2} x^2 \Big|_0^b = \frac{\pi}{2} b^2$$

◇ **7.3.52.** Найдем объем тела, образованного вращением полуволны синусоиды $y = \sin x$, $x \in [0; \pi]$:

По формуле (7.3.177) получаем

$$V = \pi \int_0^\pi \sin^2 x \,\mathsf{d}\, x = \pi \int_0^\pi \frac{1 - \cos 2x}{2} \,\mathsf{d}\, x = \\ = \frac{\pi}{2} \left(x - \frac{\sin 2x}{2} \right) \Big|_0^\pi = \frac{\pi^2}{2}$$

Кривая, вращаемая вокруг оси, может быть задана параметрически, и тогда соответствующее тело вращения будет описываться системой

$$D: \quad \begin{cases} x = \varphi(t) \\ y^2 + z^2 \leqslant \chi(t)^2 \end{cases}, \quad t \in [\alpha; \beta] \qquad (7.3.178)$$

Теорема 7.3.24. *Объем тела вращения* (7.3.178) *вычисляется по формуле*

$$V = \pi \left| \int_\alpha^\beta \chi(t)^2 \,\mathsf{d}\, \varphi(t) \right| \qquad (7.3.179)$$

◇ **7.3.53.** Найдем объем эллипсоида, то есть тела, образованного вращением эллипса

$$\begin{cases} x = a \cos t \\ y = b \sin t \end{cases}$$

вокруг оси OX:

По формуле (7.3.179) получаем

$$V = \pi \left| \int_0^\pi (b \sin t)^2 \,\mathsf{d}\, (a \cos t) \right| = \\ = ab^2 \pi \left| \int_0^\pi \sin^2 t \,\mathsf{d} \cos t \right| = \\ = ab^2 \pi \left| \int_0^\pi \left(1 - \cos^2 t\right) \,\mathsf{d} \cos t \right| = \\ = ab^2 \pi \left| \left(\cos t - \frac{\cos^3 t}{3} \right) \Big|_0^\pi \right| = \\ = ab^2 \pi \left(2 - \frac{2}{3} \right) = \frac{4\pi}{3} ab^2$$

▷▷ **7.3.54.** Найдите объем тел вращения:

1) $y = x^3$, $x \in [0; b]$
2) $y = e^x$, $x \in [a; b]$
3) $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, $t \in [0; 2\pi]$
4) $x = a \cos^3 t$, $y = a \sin^3 t$

Площадь поверхности вращения.

Теорема 7.3.25. *Пусть* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *– гладкая функция, причем*

$$f(x) > 0, \qquad x \in (a.b) \qquad (7.3.180)$$

Тогда площадь поверхности вращения

$$y^2 + z^2 = f(x)^2, \quad x \in [a; b] \qquad (7.3.181)$$

вычисляется по формуле

$$S = 2\pi \int_a^b f(x) \cdot \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, \mathsf{d}\, x \qquad (7.3.182)$$

$\diamond$ **7.3.55.** Найдем площадь поверхности, образованной вращением параболы $y = \sqrt{x}, \quad x \in [0; b]$:

По формуле (7.3.182) получаем

$$S = 2\pi \int_0^b \sqrt{x} \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)^2}\, \mathsf{d}\, x =$$

$$= 2\pi \int_0^b \sqrt{x} \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{4x}}\, \mathsf{d}\, x = 2\pi \int_0^b \sqrt{x + \frac{1}{4}}\, \mathsf{d}\, x =$$

$$= 2\pi \int_0^b \sqrt{x + \frac{1}{4}}\, \mathsf{d}\left(x + \frac{1}{4}\right) = 2\pi \frac{2}{3}\left(x + \frac{1}{4}\right)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^b =$$

$$= \frac{4\pi}{3}\left\{\left(b + \frac{1}{4}\right)^{\frac{3}{2}} - \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{3}{2}}\right\} =$$

$$= \frac{4\pi}{3}\left\{\left(b + \frac{1}{4}\right)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{8}\right\}$$

$\diamond$ **7.3.56.** Найдем площадь поверхности, образованной вращением полуволны синусоиды $y = \sin x$, $x \in [0; \pi]$:

По формуле (7.3.177) получаем

$$S = 2\pi \int_0^\pi \sin x \cdot \sqrt{1 + \cos^2 x}\, \mathsf{d}\, x =$$

$$= -2\pi \int_0^\pi \sqrt{1 + \cos^2 x}\, \mathsf{d} \cos x =$$

$$= \left| \begin{array}{c} \cos x = t \\ x \in [0; \pi] \Leftrightarrow t \in [1; -1] \end{array} \right| = -2\pi \int_1^{-1} \sqrt{1 + t^2}\, \mathsf{d}\, t =$$

$$= \left(\begin{array}{c} \text{меняем местами} \\ \text{пределы интегрирования} \end{array}\right) = 2\pi \int_{-1}^1 \sqrt{1 + t^2}\, \mathsf{d}\, t =$$

$$= \left(\begin{array}{c} \text{интегрируем по частям} \\ \text{с возвращением к исходному} \\ \text{интегралу (как в примере 7.1.37)} \end{array}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(t\sqrt{1 + t^2} + \ln\left|t + \sqrt{1 + t^2}\right|\right) \Big|_{-1}^1 =$$

$$= \frac{1}{2}\left(2\sqrt{2} + \ln\left|1 + \sqrt{2}\right| - \ln\left|-1 + \sqrt{2}\right|\right) =$$

$$= \sqrt{2} + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{2} + 1}{\sqrt{2} - 1}\right| = \sqrt{2} + \frac{1}{2}\ln\left(\sqrt{2} + 1\right)^2 =$$

$$= \sqrt{2} + \ln\left(\sqrt{2} + 1\right)$$

Теорема 7.3.26. *Пусть $\varphi : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ и $\chi : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ – две гладкие функции, причем*

$$\chi(t) > 0, \quad t \in (\alpha, \beta) \qquad (7.3.183)$$

и

$$\varphi'(t) > 0, \qquad t \in (\alpha, \beta). \qquad (7.3.184)$$

Тогда площадь поверхности вращения, образованной параметризованной кривой

$$D: \quad \begin{cases} x = \varphi(t) \\ y^2 + z^2 = \chi(t)^2 \end{cases}, \quad t \in [\alpha; \beta] \qquad (7.3.185)$$

вычисляется по формуле

$$S = 2\pi \int_\alpha^\beta \chi(t) \cdot \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\chi'(t))^2}\, \mathsf{d}\, t \qquad (7.3.186)$$

$\diamond$ **7.3.57.** Найдем площадь поверхности, образованной вращением астроиды

$$\begin{cases} x = a\cos^3 t \\ y = a\sin^3 t \end{cases}$$

вокруг оси OX:

По формуле (7.3.186) получаем площадь половинки равна

$$\frac{S}{2} =$$

$$= 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} a\sin^3 t \cdot \sqrt{(-3a\cos^2 t \sin t)^2 + (3a\sin^2 t \cos t)^2}\, \mathsf{d}\, t =$$

$$= 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} a\sin^3 t \cdot \sqrt{9a^2\cos^4 t \sin^2 t + 9a^2 \sin^4 t \cos^2 t}\, \mathsf{d}\, t =$$

$$= 6a^2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 t \cdot |\cos t \sin t| \sqrt{\cos^2 t + \sin^2 t}\, \mathsf{d}\, t =$$

$$= 6a^2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 t \cdot \cos t \sin t \cdot 1 \cdot\, \mathsf{d}\, t =$$

$$= 6a^2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 t \cdot \cos t \, \mathsf{d}\, t =$$

$$= 6a^2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 t \, \mathsf{d} \sin t = 6a^2\pi \frac{\sin^5 t}{5} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= \frac{6}{5} a^2 \pi$$

Отсюда полная площадь

$$S = \frac{12}{5} a^2 \pi$$

⊳⊳ **7.3.58.** Найдите площади поверхностей, образованных вращением следующих кривых вокруг оси OX:

1) $x = a\cos t$, $y = b \sin t$
2) $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, $t \in [0; 2\pi]$
3) $y = \operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$, $x \in [a; b]$

Формула Стирлинга. Закончить разговор о приложениях интеграла будет поучительно знаменитой *формулой Стирлинга*, описывающей асимптотическое поведение факториала:

$$n! \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{n^n \cdot \sqrt{2\pi n}}{e^n} \qquad (7.3.187)$$

Для ее доказательства нам понадобится еще одно соотношение, называемое *формулой Валлиса*:

$$\frac{1}{2k+1} \cdot \left(\frac{(2k)!!}{(2k-1)!!} \right)^2 \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \frac{\pi}{2} \qquad (7.3.188)$$

Доказательство формулы Валлиса. Здесь применяется формула (7.3.154). Обозначим

$$x_k = \left(\frac{(2k)!!}{(2k-1)!!} \right)^2$$

Тогда:

$$\sin^{2k+1} x < \sin^{2k} x < \sin^{2k-1} x, \qquad x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

$$\Downarrow$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2k+1} x \ \mathsf{d}\, x < \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2k} x \ \mathsf{d}\, x < $$

$$< \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2k-1} x \ \mathsf{d}\, x$$

$$\Downarrow \ (7.3.154)$$

$$\frac{(2k)!!}{(2k+1)!!} < \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} \cdot \frac{\pi}{2} < \frac{(2k-2)!!}{(2k-1)!!}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{1}{2k+1} \cdot \underbrace{\left(\frac{(2k)!!}{(2k-1)!!} \right)^2}_{x_k} < \frac{\pi}{2} < \frac{1}{2k} \cdot \underbrace{\left(\frac{(2k)!!}{(2k-1)!!} \right)^2}_{x_k}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{x_k}{2k+1} < \frac{\pi}{2} < \frac{x_k}{2k}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{2k}{2k+1} \cdot \underbrace{\frac{\pi}{2}}_{\substack{\wedge \\ \frac{x_k}{2k}}} < \frac{2k}{2k+1} \cdot \frac{x_k}{2k} = \frac{x_k}{2k+1} < \frac{\pi}{2}$$

$$\Downarrow$$

$$\underbrace{\frac{2k}{2k+1}}_{\substack{\downarrow \\ 1}} \cdot \frac{\pi}{2} < \frac{x_k}{2k+1} < \frac{\pi}{2}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{x_k}{2k+1} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \frac{\pi}{2}$$

□

Доказательство формулы Стирлинга. Обозначим

$$x_n = \frac{n! \cdot e^n}{n^{n+\frac{1}{2}}}$$

Из маклореновского разложения для логарифма (10.2.77) получаем такую цепочку:

$$\ln(1+x) = \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m-1} \cdot \frac{x^m}{m}, \qquad x \in (0,1).$$

$$\Downarrow$$

$$\ln \frac{1+x}{1-x} = \ln(1+x) - \ln(1-x) =$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m-1} \cdot \frac{x^m}{m} - \sum_{m=1}^{\infty} \left(-\frac{x^m}{m} \right) =$$

$$= \underbrace{2x}_{\substack{\vee \\ 0}} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{\frac{x^{2k}}{2k+1}}_{\substack{\vee \\ 0}} > 2x \cdot \underbrace{1}_{k=0} = 2x$$

$$\Downarrow \quad \text{подстановка: } x = \frac{1}{2n+1}$$

$$\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \ln \frac{1 + \frac{1}{2n+1}}{1 - \frac{1}{2n+1}} > \frac{2}{2n+1} = \frac{1}{n + \frac{1}{2}}$$

$$\Downarrow$$

$$\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}} = \left(n + \frac{1}{2}\right) \cdot \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) > 1$$

$$\Downarrow$$

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}} > e$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{x_n}{x_{n+1}} = \frac{\frac{n! \cdot e^n}{n^{n+\frac{1}{2}}}}{\frac{(n+1)! \cdot e^{n+1}}{(n+1)^{n+1+\frac{1}{2}}}} = \frac{(n+1)^{n+1+\frac{1}{2}}}{(n+1) \cdot n^{n+\frac{1}{2}} \cdot e} =$$

$$=\frac{1}{e}\cdot\frac{(n+1)^{n+\frac{1}{2}}}{n^{n+\frac{1}{2}}}=\frac{1}{e}\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}}>1$$

$$\Downarrow$$

$$x_n>x_{n+1}$$

Мы получили, что $\{x_n\}$ – убывающая и ограниченная снизу нулем последовательность. Значит, у нее имеется предел:

$$x_n=\frac{n!\cdot e^n}{n^{n+\frac{1}{2}}}\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}a$$

Это соотношение можно понимать как эквивалентность

$$n!\underset{n\to\infty}{\sim}a\cdot\frac{n^{n+\frac{1}{2}}}{e^n},\tag{7.3.189}$$

в которой $a\in\mathbb{R}$ – пока неизвестное число. Для его нахождения и нужна доказанная выше формула Валлиса (7.3.188):

$$\frac{\pi}{2}\underset{\infty\leftarrow k}{\longleftarrow}\frac{1}{2k+1}\cdot\left(\frac{(2k)!!}{(2k-1)!!}\right)^2=(2.2.257)=$$
$$=\frac{1}{2k+1}\cdot\left(\frac{(2k)!!\cdot(2k-2)!!}{(2k-1)!}\right)^2=(2.2.256)=$$
$$=\frac{1}{2k+1}\cdot\left(\frac{2^k\cdot k!\cdot 2^{k-1}\cdot(k-1)!}{(2k-1)!}\right)^2=$$
$$=\frac{1}{2k+1}\cdot\left(\frac{2^k\cdot k!\cdot 2^k\cdot k!}{2k\cdot(2k-1)!}\right)^2=$$
$$=\frac{2^{4k}}{2k+1}\cdot\frac{(k!)^4}{\big((2k)!\big)^2}\overset{(7.3.189)}{\underset{k\to\infty}{\sim}}$$
$$\underset{k\to\infty}{\sim}\frac{2^{4k}}{2k}\cdot\frac{\left(a\cdot\frac{k^{k+\frac{1}{2}}}{e^k}\right)^4}{\left(a\cdot\frac{(2k)^{2k+\frac{1}{2}}}{e^{2k}}\right)^2}=\frac{2^{4k}}{2k}\cdot\frac{a^4\cdot\frac{k^{4k+2}}{e^{4k}}}{a^2\cdot\frac{(2k)^{4k+1}}{e^{4k}}}=$$
$$=\frac{2^{4k}}{2k}\cdot\frac{a^2\cdot k^{4k+2}}{(2k)^{4k+1}}=\frac{2^{4k}}{2k}\cdot\frac{a^2\cdot k^{4k+2}}{2^{4k+1}\cdot k^{4k+1}}=\frac{a^2}{4}$$

$$\Downarrow$$

$$2\pi=a^2$$

$$\Downarrow$$

$$\sqrt{2\pi}=a$$

Это превращает (7.3.189) в (7.3.187). □

Глава 8

НЕСОБСТВЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ И ЧИСЛОВЫЕ РЯДЫ

§ 1 Несобственные интегралы

Несобственный интеграл формализует в математическом анализе идею площади неограниченной фигуры.

◇ **8.1.1.** В предыдущей главе мы изучали определенный интеграл, геометрический смысл которого – площадь криволинейной трапеции. Рассмотрим теперь какую-нибудь неограниченную криволинейную трапецию (то есть такую, которая не лежит ни в каком прямоугольнике)

Ее площадь будет непонятно чему равна, потому что определенный интеграл от неограниченной функции не существует (по теореме 7.2.2).

Тем более неожиданным должно быть наблюдение, что у некоторых неограниченных криволинейных трапеций все-таки имеется конечная площадь. Точнее, понятие площади можно обобщить таким образом, что некоторые неограниченные криволинейные трапеции будут иметь конечную площадь. Например, если Вы задумаетесь, чему должна быть равна площадь криволинейной трапеции, ограниченной кривой $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$

то Вас наверняка удивит наблюдение, что эта площадь конечна и равна 2 (хотя сама фигура неограничена).

Дело в том, что эту величину можно посчитать как предел площадей ограниченных криволинейных трапеций:

$$S = \lim_{t\to+0} \int_t^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathsf{d}\,x = \lim_{t\to+0} 2\sqrt{x}\,\Big|_t^1 = \\ = \lim_{t\to+0}\left(2 - 2\sqrt{t}\right) = 2$$

◇ **8.1.2.** С другой стороны, если вместо кривой $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$ взять ничем особенным, как будто, не отличающуюся от нее кривую $y = \frac{1}{x}$,

то окажется, что соответствующая площадь, посчитанная тем же способом бесконечна:

$$S = \lim_{t\to+0} \int_t^1 \frac{1}{x}\, \mathsf{d}\, x = \lim_{t\to+0} \ln x \Big|_t^1 = \\ = \lim_{t\to+0} (\ln 1 - \ln t) = +\infty$$

◇ **8.1.3.** Еще один пример – площадь криволинейной трапеции, ограниченной кривой $y = \frac{1}{1+x^2}$ на полуинтервале $[0; +\infty)$:

Ее можно вычислить как предел площадей получающихся, когда x бегает по отрезкам $[0, t]$, при $t \to \infty$,

и оказывается, что она равна $\frac{\pi}{2}$:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathsf{d}\, x}{1+x^2} = \lim_{t\to+\infty} \int_0^t \frac{\mathsf{d}\, x}{1+x^2} = \\ = \lim_{t\to+\infty} \operatorname{arctg} x \Big|_0^t = \lim_{t\to+\infty} \operatorname{arctg} t = \frac{\pi}{2}$$

После этих примеров естественно спросить, какой должна быть неограниченная криволинейная трапеция, чтобы ее площадь была конечна? И чему равны площади конкретных неограниченных криволинейных трапеций? Об этом мы поговорим в настоящей главе.

(a) Определение несобственного интеграла и его свойства

Начнем со следующего определения.

- Функция f называется *локально интегрируемой на множестве* E, если она определена на E и интегрируема на любом отрезке $[a, b]$, содержащемся в E.

◇ **8.1.4.** Функция

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

конечно, не интегрируема на отрезке $[0, 1]$ (потому что не ограничена на нем). Но она локально интегрируема на полуинтервале $(0, 1]$ (потому что непрерывна на $(0, 1]$).

◇ **8.1.5.** Функция Дирихле, которую мы определяли формулой (3.1.4),

$$D(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

не будет локально интегрируемой, например на $\mathbb{R}$, потому что она не интегрируема ни на каком отрезке.

Несобственный интеграл по конечному промежутку.

- Пусть функция f локально интегрируема на полуинтервале $(a;b]$, где a,b – произвольные числа. Тогда предел
$$\lim_{t\to a+0}\int_t^b f(x)\ \mathsf{d}\,x$$
называется *несобственным интегралом от f по конечному промежутку* $(a;b]$ и обозначается
$$\int_a^b f(x)\ \mathsf{d}\,x$$
Если этот предел существует и конечен, то говорят, что *несобственный интеграл сходится*, а если не существует или бесконечен, то говорят, что *несобственный интеграл расходится.*
- Аналогично, если f локально интегрируема на полуинтервале $[a;b)$, то предел
$$\lim_{t\to b-0}\int_a^t f(x)\ \mathsf{d}\,x$$
называется *несобственным интегралом от f по конечному промежутку* $[a;b)$ и обозначается
$$\int_a^b f(x)\ \mathsf{d}\,x$$
и опять если этот предел существует и конечен, то говорят, что *несобственный интеграл сходится*, а если не существует или бесконечен, то говорят, что *несобственный интеграл расходится.*

Рассмотрим примеры.

◇ **8.1.6.**
$$\int_0^1 \frac{\mathsf{d}\,x}{x^2}=\lim_{t\to+0}\int_t^1\frac{\mathsf{d}\,x}{x^2}=\lim_{t\to+0}\left(-\frac{1}{x}\right)\Big|_{x=t}^{x=1}=$$
$$=\lim_{t\to+0}\left(-1+\frac{1}{t}\right)=+\infty$$

Вывод: интеграл расходится.

◇ **8.1.7.**
$$\int_0^1\frac{\mathsf{d}\,x}{\sqrt{1-x^2}}=\lim_{t\to1-0}\int_0^t\frac{\mathsf{d}\,x}{\sqrt{1-x^2}}=$$
$$=\lim_{t\to1-0}\arcsin x\Big|_{x=0}^{x=t}=\lim_{t\to1-0}(\arcsin t-0)=$$
$$=\arcsin 1=\frac{\pi}{2}$$

Вывод: интеграл сходится и равен $\frac{\pi}{2}$.

◇ **8.1.8.**
$$\int_0^1\frac{\sin\frac{1}{x}\ \mathsf{d}\,x}{x^2}=\lim_{t\to+0}\int_t^1\frac{\sin\frac{1}{x}\ \mathsf{d}\,x}{x^2}=$$
$$=-\lim_{t\to+0}\int_t^1\sin\frac{1}{x}\ \mathsf{d}\,\frac{1}{x}=\lim_{t\to+0}\cos\frac{1}{x}\Big|_t^1=$$
$$=\lim_{t\to+0}\left\{\cos1-\cos\frac{1}{t}\right\}=\left|\begin{array}{c}\frac{1}{t}=y\\ t=\frac{1}{y}\\ t\to+0\\ y\to+\infty\end{array}\right|=$$
$$=\cos1-\underbrace{\lim_{y\to+\infty}\cos y}_{\text{предел не существует}}$$

Вывод: интеграл расходится.

◇ **8.1.9.**
$$\int_0^{\frac12}\frac{\mathsf{d}\,x}{x\ln^2x}=\lim_{t\to+0}\int_t^{\frac12}\frac{\mathsf{d}\,x}{x\ln^2x}=$$
$$=\lim_{t\to+0}\int_t^{\frac12}\frac{\mathsf{d}(\ln x)}{\ln^2x}=-\lim_{t\to+0}\frac{1}{\ln x}\Big|_t^{\frac12}=$$
$$=\lim_{t\to+0}\left(\frac{1}{\ln t}-\frac{1}{\ln\frac12}\right)=\frac{1}{\ln2}$$

Вывод: интеграл сходится и равен $\frac{1}{\ln 2}$.

▷▷ **8.1.10.** Вычислите интегралы или установите их расходимость:

1) $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\operatorname{ctg}x\ \mathsf{d}\,x$
2) $\int_0^1\frac{x\ \mathsf{d}\,x}{\sqrt{1-x^2}}$
3) $\int_0^4\frac{\mathsf{d}\,x}{x+\sqrt{x}}$
4) $\int_0^{\frac12}\frac{\mathsf{d}\,x}{x\ln x}$
5) $\int_{-1}^0 e^{\frac1x}\frac{\mathsf{d}\,x}{x^2}$
6) $\int_0^1 e^{\frac1x}\frac{\mathsf{d}\,x}{x^2}$
7) $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x+\cos x}{\sqrt[3]{\sin x-\cos x}}$

Несобственный интеграл по бесконечному промежутку. Выше мы определили несобственный интеграл *по конечному промежутку*, формализующий понятие площади криволинейной трапеции специального вида: основанием такой трапеции является конечный полуинтервал, а "по вертикали" эта фигура может быть неограничена (такие фигуры мы описывали в примерах 8.1.1 и 8.1.2).

Но помимо таких криволинейных трапеций можно рассматривать другие, основаниями которых являются бесконечные полуинтервалы, и которые поэтому "неограничены по горизонтали" (эту ситуацию мы описывали в примере 8.1.3). Соответствующий математический объект, формализующий это понятие также называется неопределенным интегралом, но уже *по бесконечному промежутку.*

- Пусть функция f локально интегрируема на полуинтервале $[a; +\infty)$, где a – произвольное число. Тогда предел
$$\lim_{t\to+\infty}\int_a^t f(x)\,\mathsf{d}\,x$$
называется *несобственным интегралом от f по бесконечному промежутку* $[a; +\infty)$ и обозначается
$$\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathsf{d}\,x$$
Если этот предел существует и конечен, то говорят, что *несобственный интеграл сходится*, а если не существует или бесконечен, то говорят, что *несобственный интеграл расходится.*
- Аналогично, если f локально интегрируема на полуинтервале $(-\infty; a]$, то предел
$$\lim_{t\to-\infty}\int_t^b f(x)\,\mathsf{d}\,x$$
называется *несобственным интегралом от f по бесконечному промежутку* $(-\infty; a]$ и обозначается
$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,\mathsf{d}\,x$$
и опять если этот предел существует и конечен, то говорят, что *несобственный интеграл сходится*, а если не существует или бесконечен, то говорят, что *несобственный интеграл расходится.*

Рассмотрим примеры.

◇ **8.1.11.**
$$\int_1^{+\infty}\frac{\mathsf{d}\,x}{x} = \lim_{t\to+\infty}\int_1^t \frac{\mathsf{d}\,x}{x} = \\ = -\lim_{t\to+\infty}\ln x\Big|_1^t = -\lim_{t\to+\infty}\ln t = \infty$$
Вывод: интеграл расходится.

◇ **8.1.12.**
$$\int_{-\infty}^0 e^x\,\mathsf{d}\,x = \lim_{t\to-\infty}\int_t^0 e^x\,\mathsf{d}\,x = \lim_{t\to-\infty} e^x\Big|_t^0 = \\ = \lim_{t\to-\infty}\left(1-e^t\right) = 1$$
Вывод: интеграл сходится и равен 1.

◇ **8.1.13.**
$$\int_0^{+\infty}\cos x\,\mathsf{d}\,x = \lim_{t\to+\infty}\int_0^t \cos x\,\mathsf{d}\,x = \\ = -\lim_{t\to+\infty}\sin x\Big|_0^t = -\underbrace{\lim_{t\to+\infty}\sin t}_{\text{предел не существует}}$$
Вывод: интеграл расходится.

▷▷ **8.1.14.** Вычислите интегралы или установите их расходимость:

1) $\int_2^{+\infty}\frac{\operatorname{arctg} x\,\mathsf{d}\,x}{x^2+1}$
2) $\int_0^{+\infty} e^x\,\mathsf{d}\,x$
3) $\int_{-\infty}^0 e^x\,\mathsf{d}\,x$
4) $\int_0^{+\infty} xe^x\,\mathsf{d}\,x$
5) $\int_e^{+\infty}\frac{\mathsf{d}\,x}{x\ln x}$
6) $\int_3^{+\infty}\frac{x\,\mathsf{d}\,x}{x^2-1}$
7) $\int_{-\infty}^0\frac{\mathsf{d}\,x}{x^2+2x+2}$

(b) Несобственные интегралы от степенной и показательной функций

Мы видели, что несобственный интеграл может сходиться, а может расходиться. Здесь мы поймем, в каких случаях сходится интеграл от конкретных двух функций – $\frac{1}{x^\alpha}$ и a^x.

Теорема 8.1.1 (о несобственном интеграле по конечному промежутку от степенной функции)**.**

$$\int_0^b \frac{\mathsf{d}\,x}{x^\alpha} \quad \longleftarrow \quad \begin{cases} \textit{сходится, если} \quad \alpha < 1 \\ \textit{расходится, если} \quad \alpha \geqslant 1 \end{cases}$$

Доказательство. Рассмотрим три случая.

1) Если $\alpha < 1$, то интеграл сходится:

$$\int_0^b \frac{\mathsf{d}\,x}{x^\alpha} = \int_0^b x^{-\alpha}\,\mathsf{d}\,x = \lim_{t\to+0}\int_t^b x^{-\alpha}\,\mathsf{d}\,x = \lim_{t\to+0}\frac{x^{1-\alpha}}{(1-\alpha)}\Big|_{x=t}^{x=b} = \lim_{t\to+0}\left\{\frac{b^{1-\alpha}}{(1-\alpha)}-\frac{t^{1-\alpha}}{(1-\alpha)}\right\} = \begin{pmatrix}1-\alpha>0\\ \text{поэтому}\\ t^{1-\alpha}\to 0\end{pmatrix} = \frac{b^{1-\alpha}}{(1-\alpha)}$$

2) Если $\alpha = 1$, то интеграл расходится:

$$\int_0^b \frac{\mathsf{d}\,x}{x^\alpha} = \int_0^b \frac{\mathsf{d}\,x}{x} = \lim_{t\to+0}\int_t^b \frac{\mathsf{d}\,x}{x} = \lim_{t\to+0}\ln x\Big|_{x=t}^{x=b} = \lim_{t\to+0}\{\ln b-\ln t\} = \infty$$

3) Если $\alpha > 1$, то интеграл расходится:

$$\int_0^b \frac{\mathsf{d}\,x}{x^\alpha} = \int_0^b x^{-\alpha}\,\mathsf{d}\,x = \lim_{t\to+0}\int_t^b x^{-\alpha}\,\mathsf{d}\,x = \lim_{t\to+0}\frac{x^{1-\alpha}\,\mathsf{d}\,x}{(1-\alpha)}\Big|_{x=t}^{x=b} = \lim_{t\to+0}\left\{\frac{b^{1-\alpha}\,\mathsf{d}\,x}{(1-\alpha)}-\frac{t^{1-\alpha}\,\mathsf{d}\,x}{(1-\alpha)}\right\} = \begin{pmatrix}1-\alpha<0\\ \text{поэтому}\\ t^{1-\alpha}\to \infty\end{pmatrix} = \infty$$

□

Теорема 8.1.2 (о несобственном интеграле по бесконечному промежутку от степенной функции)**.**

$$\int_a^{+\infty} \frac{\mathsf{d}\,x}{x^\alpha} \quad \longleftarrow \quad \begin{cases} \textit{сходится, если} \quad \alpha > 1 \\ \textit{расходится, если} \quad \alpha \leqslant 1 \end{cases}$$

Доказательство. Рассмотрим три случая.

1) Если $\alpha > 1$, то интеграл сходится:

$$\int_a^{+\infty} \frac{\mathsf{d}\,x}{x^\alpha} = \int_a^{+\infty} x^{-\alpha}\,\mathsf{d}\,x = \lim_{t\to+\infty}\int_a^t x^{-\alpha}\,\mathsf{d}\,x = \lim_{t\to+\infty}\frac{x^{1-\alpha}\,\mathsf{d}\,x}{(1-\alpha)}\Big|_{x=a}^{x=t} = \lim_{t\to+\infty}\left\{\frac{t^{1-\alpha}}{(1-\alpha)}-\frac{a^{1-\alpha}}{(1-\alpha)}\right\} = \begin{pmatrix}1-\alpha<0\\ \text{поэтому}\\ t^{1-\alpha}\to 0\end{pmatrix} = \frac{t^{1-\alpha}}{(1-\alpha)}$$

2) Если $\alpha = 1$, то интеграл расходится:

$$\int_a^{+\infty} \frac{\mathsf{d}\,x}{x^\alpha} = \int_a^{+\infty} \frac{\mathsf{d}\,x}{x} = \lim_{t\to+\infty}\int_a^t \frac{\mathsf{d}\,x}{x} = \lim_{t\to+\infty}\ln x\Big|_{x=a}^{x=t} = \lim_{t\to+\infty}\{\ln t-\ln a\} = \infty$$

3) Если $\alpha < 1$, то интеграл расходится:

$$\int_a^{+\infty} \frac{\mathsf{d}\,x}{x^\alpha} = \int_a^{+\infty} x^{-\alpha}\,\mathsf{d}\,x = \lim_{t\to+\infty}\int_a^t x^{-\alpha}\,\mathsf{d}\,x = \lim_{t\to+\infty}\frac{x^{1-\alpha}\,\mathsf{d}\,x}{(1-\alpha)}\Big|_{x=a}^{x=t} = \lim_{t\to+\infty}\left\{\frac{t^{1-\alpha}}{(1-\alpha)}-\frac{a^{1-\alpha}}{(1-\alpha)}\right\} = \begin{pmatrix}1-\alpha>0\\ \text{поэтому}\\ t^{1-\alpha}\to \infty\end{pmatrix} = \infty$$

□

Теорема 8.1.3 (о несобственном интеграле от показательной функции)**.**

$$\int_a^{+\infty} A^x\,\mathsf{d}\,x \quad \longleftarrow \quad \begin{cases} \textit{сходится, если} \quad 0 < A < 1 \\ \textit{расходится, если} \quad A \geqslant 1 \end{cases}$$

Доказательство. Рассмотрим три случая.

1) Если $0 < A < 1$, то интеграл сходится:

$$\int_a^{+\infty} A^x\,\mathsf{d}\,x = \lim_{t\to+\infty}\int_a^t A^x\,\mathsf{d}\,x = \lim_{t\to+\infty}\frac{A^x}{\ln A}\Big|_a^t = \frac{1}{\ln A}\lim_{t\to+\infty}(A^t-A^a) = \begin{pmatrix}0<A<1\\ \text{поэтому}\\ A^t\to 0\end{pmatrix} = -\frac{A^a}{\ln A}$$

2) Если $A = 1$, то интеграл расходится:

$$\int_a^{+\infty} A^x\,\mathsf{d}\,x = \int_a^{+\infty} 1\,\mathsf{d}\,x = \lim_{t\to+\infty}\int_a^t 1\,\mathsf{d}\,x = \lim_{t\to+\infty}\frac{x}{\ln A}\Big|_a^t = \lim_{t\to+\infty}\frac{t-a}{\ln A} = +\infty$$

3) Если $A > 1$, то интеграл расходится:

$$\int_a^{+\infty} A^x\,\mathsf{d}\,x = \lim_{t\to+\infty}\int_a^t A^x\,\mathsf{d}\,x = \lim_{t\to+\infty}\frac{A^x}{\ln A}\Big|_a^t = \frac{1}{\ln A}\lim_{t\to+\infty}(A^t-A^a) = \begin{pmatrix}A>1\\ \text{поэтому}\\ A^t\to \infty\end{pmatrix} = \infty$$

□

(c) Замена переменной в несобственном интеграле

Если функции f и g определены на полуинтервале $[a;b)$, то символом

$$\int_a^b f(x)\ \mathsf{d}\, g(x)$$

обозначается несобственный интеграл от функции $f \cdot g'$ по $[a;b)$:

$$\int_a^b f(x)\ \mathsf{d}\, g(x) := \int_a^b f(x) \cdot g'(x)\ \mathsf{d}\, x = \lim_{t \to b-0} \int_a^t f(x) \cdot g'(x)\ \mathsf{d}\, x$$

◇ **8.1.15.**

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}}\ \mathsf{d} \ln x = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}\ \mathsf{d}\, x = \lim_{t \to +\infty} \int_1^t \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}\ \mathsf{d}\, x = \lim_{t\to+\infty}\left(-\frac{2}{x^{\frac{1}{2}}}\right)\Big|_1^t = \lim_{t\to+\infty}\left(2 - \frac{2}{t^{\frac{1}{2}}}\right) = 2$$

Теорема 8.1.4 (о замене переменной в несобственном интеграле)**.** *Пусть даны:*

1) *функция f, непрерывная на полуинтервале $[a;b)$*
2) *функция φ, определенная на полуинтервале $[\alpha;\beta)$, со следующими свойствами:*
   a) *φ дифференцируема на полуинтервале $[\alpha;\beta)$ (то есть φ дифференцируема на интервале $(\alpha;\beta)$, и в точке α имеет левую производную);*
   b) *$\forall t \in [\alpha;\beta) \qquad \varphi(t) \in [a;b)$;*
   c) *$\varphi(\alpha) = a, \quad \varphi(t) \underset{t\to\beta-0}{\longrightarrow} b$.*

Тогда

$$\int_a^b f(x)\ \mathsf{d}\, x = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\ \mathsf{d}\, \varphi(t) = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\ \mathsf{d}\, t \tag{8.1.1}$$

Доказательство. Здесь используется тот же прием, что и при доказательстве теоремы 7.3.5 о замене переменной в определенном интеграле.[1] Пусть F – первообразная функции f на полуинтервале $[a,b)$:

$$F'(x) = f(x), \qquad x \in [a,b) \tag{8.1.2}$$

Например, в качестве F можно взять интеграл с переменным верхним пределом:

$$F(x) = \int_{[a,x]} f(t)\,\mathsf{d}\, t = \int_a^x f(t)\,\mathsf{d}\, t, \qquad x \in [a,b)$$

(тогда по теореме 7.3.1 F будет первообразной для f на каждом отрезке $[a,c] \subseteq [a,b)$, и значит, на всем полуинтервале $[a,b)$). Композиция $F \circ \varphi$ будет первообразной для функции $(f \circ \varphi) \cdot \varphi'$, на полуинтервале $[\alpha,\beta)$, по формуле (5.1.28):

$$(F \circ \varphi)'(t) = F'(\underbrace{\varphi(t)}_{\substack{\Cap \\ [a,b) \\ \| \\ \mathsf{D}(F')}}) \cdot \varphi'(t) = f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t), \qquad t \in [\alpha,\beta) \tag{8.1.3}$$

Поэтому

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\ \mathsf{d}\, t = \lim_{T\to\beta-0} \int_\alpha^T f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\ \mathsf{d}\, t = (7.3.142) = \lim_{T\to\beta-0} (F\circ\varphi)(t)\Big|_{t=\alpha}^{t=T} =$$

[1] Можно использовать теорему 7.3.5 напрямую, но для этого нужно ввести дополнительное условие, что функция $\varphi : [\alpha,\beta) \to [a,b)$ монотонна, чтобы для всякого $T \in [\alpha,\beta)$ ограничение $\varphi|_{[\alpha,T]}$ было отображением из $[a,T]$ в $[a,\varphi(T)]$ (и поэтому преобразованием ориентированного отрезка $\overrightarrow{\alpha,T}$ в ориентированный отрезок $\overrightarrow{a,\varphi(T)}$).

$$= \lim_{T\to\beta-0}\Big(F\big(\varphi(T)\big) - F\big(\underbrace{\varphi(\alpha)}_{\underset{a}{\overset{(7.3.149)}{\parallel}}}\big)\Big) = \lim_{T\to\beta-0}\Big(F\big(\varphi(T)\big) - F(a)\Big) = (7.3.142) =$$

$$= \lim_{T\to\beta-0}\int_a^{\varphi(T)} f(x)\,\mathsf{d}\,x = \lim_{y\to b-0}\int_a^{y} f(x)\,\mathsf{d}\,x = \int_a^b f(x)\,\mathsf{d}\,x$$

□

◇ **8.1.16.**

$$\int_2^{+\infty}\frac{\mathsf{d}\,x}{x\sqrt{x^2-1}} = \left|\begin{matrix} x=\frac{1}{t}, \qquad t=\frac{1}{x} \\ x=2 \Leftrightarrow t=\frac{1}{2} \\ x\to+\infty \Leftrightarrow t\to+0\end{matrix}\right| =$$

$$= \int_{\frac{1}{2}}^0 \frac{-\,\mathsf{d}\,t}{\sqrt{1-t^2}} = \int_0^{\frac{1}{2}}\frac{\mathsf{d}\,t}{\sqrt{1-t^2}} = \arcsin t\Big|_0^{\frac{1}{2}} = \frac{\pi}{6}$$

◇ **8.1.17.**

$$\int_0^1\frac{\mathsf{d}\,x}{(2-x)\sqrt{1-x}} = \left|\begin{matrix} t=\sqrt{1-x}, \qquad x=1-t^2 \\ x=0 \Leftrightarrow t=1 \\ x\to1-0 \Leftrightarrow t\to+0\end{matrix}\right| =$$

$$= \int_1^0\frac{-t\,\mathsf{d}\,t}{t(t^2+1)} = \int_0^1\frac{\mathsf{d}\,t}{t^2+1} = \operatorname{arctg} t\Big|_0^1 = \frac{\pi}{2}$$

(d) Признаки сходимости несобственных интегралов

Не всякий несобственный интеграл можно явно вычислить, даже если известно, что он сходится. Например, попробуйте найти несобственный интеграл

$$\int_0^1\frac{\sin^2\frac{1}{x}}{\sqrt{x}}\,\mathsf{d}\,x \tag{8.1.4}$$

и Вы увидите, что это нелегко. Поэтому часто бывает важно просто понять, сходится или нет данный несобственный интеграл, не вычисляя его. Например, интеграл (8.1.4), как будет показано в примере 8.1.19 сходится (хотя и непонятно, чему равен).

В этом параграфе мы приведем некоторые признаки сходимости несобственных интегралов.

Признаки сходимости знакопостоянных интегралов

- Несобственный интеграл $\int_a^b f(x)\,\mathsf{d}\,x$ называется
  - *знакопостоянным*, если его подынтегральная функция f не меняет знак на промежутке интегрирования;
  - *знакоположительным*, если его подынтегральная функция f неотрицательная на промежутке интегрирования

$$f(x)\geqslant 0, \qquad x\in(a,b)$$

Понятно, что исследование на сходимость знакопостоянных интегралов сводится исследованию знакоположительных: если $f(x)\leqslant 0$, то можно взять функцию $g(x)=-f(x)\geqslant 0$, и окажется, что

$$\int_a^b f(x)\,\mathsf{d}\,x = \lim_{t\to b-0}\int_a^t f(x)\,\mathsf{d}\,x = -\lim_{t\to b-0}\int_a^t g(x)\,\mathsf{d}\,x = -\int_a^b g(x)\,\mathsf{d}\,x$$

откуда и будет следовать, что интеграл

$$\int_a^b f(x)\,\mathsf{d}\,x$$

сходится тогда и только тогда, когда сходится интеграл

$$\int_a^b g(x)\,\mathsf{d}\,x$$

Критерий сходимости знакоположительного интеграла.

Теорема 8.1.5. *Пусть функция f локально интегрируема и неотрицательна на полуинтервале $[a;b)$*

$$f(x) \geqslant 0, \qquad x \in [a,b)$$

Тогда сходимость интеграла $\int_a^b f(x)\,\mathsf{d}\,x$ эквивалентна ограниченности интегралов $\int_a^t f(x)\,\mathsf{d}\,x$, $t \in [a,b)$:

$$\int_a^b f(x)\,\mathsf{d}\,x \quad \text{сходится} \quad \Longleftrightarrow \quad \sup_{t\in[a,b)} \int_a^t f(x)\,\mathsf{d}\,x < \infty$$

! **8.1.18.** Условие справа (то есть утверждение, что интегралы $\int_a^b f(x)\,\mathsf{d}\,x$ ограничены) принято записывать неравенством

$$\int_a^b f(x)\,\mathsf{d}\,x < \infty$$

и, в силу теоремы 8.1.5, такая запись считается эквивалентной утверждению, что интеграл $\int_a^b f(x)\,\mathsf{d}\,x$ сходится (при неотрицательной f).

Доказательство. Обозначим

$$F(t) = \int_a^t f(x)\,\mathsf{d}\,x$$

и заметим, что это будет монотонно неубывающая функция, поскольку под интегралом стоит неотрицательная функция: если $\alpha \leqslant \beta$, то

$$F(\alpha) = \int_a^\alpha f(x)\,\mathsf{d}\,x \leqslant \int_a^\alpha f(x)\,\mathsf{d}\,x + \underbrace{\int_\alpha^\beta f(x)\,\mathsf{d}\,x}_{\substack{\veebar \\ 0}} = \int_a^\beta f(x)\,\mathsf{d}\,x = F(\beta)$$

Отсюда мы получим цепочку:

$$\text{интеграл} \quad \int_a^b f(x)\,\mathsf{d}\,x \quad \text{сходится}$$

$$\Updownarrow$$

$$F \text{ имеет конечный предел слева в } b\text{:} \quad \underbrace{\lim_{t\to b-0} F(t)}_{\substack{\| \\ \sup_{t\in[a,b)} F(t)}} = \lim_{t\to b-0} \int_a^t f(x)\,\mathsf{d}\,x < \infty$$

(применяем (3.4.151), поскольку F – неубывающая функция)

$$\Updownarrow$$

$$\sup_{t\in[a,b)} \int_a^t f(x)\,\mathsf{d}\,x = \sup_{t\in[a,b)} F(t) < \infty.$$

□

Признак сравнения интегралов.

Теорема 8.1.6 (признак сравнения несобственных интегралов)**.** *Пусть f и g – локально интегрируемые функции на полуинтервале $[a;c)$ (где c – число или символ бесконечности $+\infty$), причем*

$$0 \leqslant f(x) \leqslant g(x), \quad x \in [a;c) \tag{8.1.5}$$

Соответствующая зависимость между несобственными интегралами коротко записывается следующим образом:

$$\int_a^c f(x)\,\mathsf{d}\,x \leqslant \int_a^c g(x)\,\mathsf{d}\,x$$

Тогда

(i) *из сходимости большего интеграла* $\int_a^c g(x)\,\mathsf{d}\,x$ *следует сходимость меньшего интеграла* $\int_a^c f(x)\,\mathsf{d}\,x$*:*

$$\int_a^c f(x)\,\mathsf{d}\,x \quad \textit{сходится} \quad \Longleftarrow \quad \int_a^c g(x)\,\mathsf{d}\,x \quad \textit{сходится}$$

(ii) *из расходимости меньшего интеграла* $\int_a^c f(x)\,\mathsf{d}\,x$ *следует расходимость большего интеграла* $\int_a^c g(x)\,\mathsf{d}\,x$*:*

$$\int_a^c f(x)\,\mathsf{d}\,x \quad \textit{расходится} \quad \Longrightarrow \quad \int_a^c g(x)\,\mathsf{d}\,x \quad \textit{расходится}$$

Доказательство. Обозначим

$$F(t)=\int_a^t f(x)\,\mathsf{d}\,x, \quad G(t)=\int_a^t g(x)\,\mathsf{d}\,x$$

тогда из (8.1.5) следует, что, во-первых, как и в доказательстве теоремы 8.1.5,

$$F(t) \text{ и } G(t) \text{ -- неубывающие функции на промежутке } t\in[a;c), \tag{8.1.6}$$

и, во-вторых,

$$0\leqslant F(t)\leqslant G(t), \quad t\in[a;c). \tag{8.1.7}$$

1. Теперь мы получаем цепочку:

$$\int_a^c g(x)\,\mathsf{d}\,x \quad \text{сходится}$$

$$\Downarrow \quad \text{теорема 8.1.5}$$

$$\sup_{t\in[a,b)} \underbrace{G(t)}_{\substack{\mathbin{\rotatebox{90}{$\geqslant$}} \ (8.1.7) \\ F(t)}} = \sup_{t\in[a,b)} \int_a^t g(x)\,\mathsf{d}\,x < \infty$$

$$\Downarrow$$

$$\sup_{t\in[a,b)} F(t) = \sup_{t\in[a,b)} \int_a^t f(x)\,\mathsf{d}\,x < \infty$$

$$\Downarrow \quad \text{теорема 8.1.5}$$

$$\int_a^c f(x)\,\mathsf{d}\,x \quad \text{сходится}$$

2. Мы доказали утверждение (i). Утверждение (ii) является его следствием: если интеграл $\int_a^c f(x)\,\mathsf{d}\,x$ расходится, то интеграл $\int_a^c g(x)\,\mathsf{d}\,x$ не может сходиться (потому что иначе мы получили бы что $\int_a^c f(x)\,\mathsf{d}\,x$ расходится, а $\int_a^c g(x)\,\mathsf{d}\,x$ сходится, а это невозможно в силу уже доказанного утверждения 2 (A)). □

◇ **8.1.19.** Чтобы понять, сходится ли интеграл

$$\int_0^1 \frac{\sin^2\frac{1}{x}}{\sqrt{x}}\,\mathsf{d}\,x$$

заметим, что подынтегральная функция положительна и меньше функции $\frac{1}{\sqrt{x}}$:

$$0\leqslant \frac{\sin^2\frac{1}{x}}{\sqrt{x}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{x}}$$

Отсюда получаем

$$0\leqslant \int_0^1 \frac{\sin^2\frac{1}{x}}{\sqrt{x}}\,\mathsf{d}\,x \leqslant \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathsf{d}\,x$$

причем больший интеграл сходится по теореме 8.1.1. Значит, по теореме 8.1.6, наш исходный интеграл тоже сходится.

Вывод: интеграл $\int_0^1 \frac{\sin^2\frac{1}{x}}{\sqrt{x}}\,\mathsf{d}\,x$ сходится.

◇ **8.1.20.** Для следующего интеграла

$$\int_0^1 \frac{1}{\sin x}\,\mathsf{d}\,x$$

мы аналогичные рассуждения запишем более коротко:

$$\int_0^1 \frac{1}{\sin x}\,\mathsf{d}\,x \geqslant \underbrace{\int_0^1 \frac{1}{x}\,\mathsf{d}\,x}_{\substack{\text{расходится по}\\ \text{теореме 8.1.1}}}$$

Вывод: интеграл $\int_0^1 \frac{1}{\sin x}\,\mathsf{d}\,x$ расходится.

◇ **8.1.21.** Теперь рассмотрим интеграл по бесконечному промежутку:

$$\int_\pi^{+\infty} \frac{3+\cos x}{x\sqrt{x}}\,\mathsf{d}\,x \leqslant \int_\pi^{+\infty} \frac{4}{x\sqrt{x}}\,\mathsf{d}\,x = \\ = 4\underbrace{\int_\pi^{+\infty} \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}\,\mathsf{d}\,x}_{\substack{\text{сходится по}\\ \text{теореме 8.1.2}}}$$

Вывод: интеграл $\int_\pi^{+\infty} \frac{3+\cos x}{x\sqrt{x}}\,\mathsf{d}\,x$ сходится.

◇ **8.1.22.** Снова рассмотрим интеграл по бесконечному промежутку:

$$\int_\pi^{+\infty} \frac{3+\cos x}{\sqrt{x}}\,\mathsf{d}\,x \geqslant \int_\pi^{+\infty} \frac{2}{\sqrt{x}}\,\mathsf{d}\,x = \\ = 2\underbrace{\int_\pi^{+\infty} \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}\,\mathsf{d}\,x}_{\substack{\text{расходится по}\\ \text{теореме 8.1.2}}}$$

Вывод: интеграл $\int_\pi^{+\infty} \frac{3+\cos x}{\sqrt{x}}\,\mathsf{d}\,x$ расходится.

▷▷ **8.1.23.** Исследуйте на сходимость интегралы:

1) $\int_\pi^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2}\,\mathsf{d}\,x$;

2) $\int_e^{+\infty} \frac{\ln x}{\sqrt[3]{x}}\,\mathsf{d}\,x$;

3) $\int_2^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{x\sqrt{x}}\,\mathsf{d}\,x$;

4) $\int_0^1 \frac{\cos\frac{1}{x}}{\sqrt[3]{x}}\,\mathsf{d}\,x$;

5) $\int_0^1 \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^3}\,\mathsf{d}\,x$;

6) $\int_{-1}^0 \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^3}\,\mathsf{d}\,x$

Критерий Коши сходимости несобственного интеграла

Теперь от знакопостоянных интегралов мы возвращаемся к произвольным.

Теорема 8.1.7 (критерий Коши сходимости несобственного интеграла)**.** [2] *Пусть функция f локально интегрируема на полуинтервале $[a;b)$. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(i) *несобственный интеграл*

$$\int_a^b f(x)\,\mathsf{d}\,x$$

сходится;

(ii) *для любых двух числовых последовательностей $s_n, t_n \in [a;b)$, стремящихся к b*

$$s_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} b, \quad t_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} b,$$

интеграл от функции f по отрезку $[s_n;t_n]$ стремится к нулю при $n\to\infty$:

$$\int_{s_n}^{t_n} f(x)\,\mathsf{d}\,x \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} b$$

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$F(t) = \int_a^t f(x)\,\mathsf{d}\,x$$

Тогда мы получим следующую логическую цепочку:

$$\text{несобственный интеграл} \quad \int_a^b f(x)\,\mathsf{d}\,x \quad \text{сходится}$$

$$\Updownarrow$$

$$\text{существует конечный предел} \quad \lim_{t\to b-0} F(t)$$

$$\Updownarrow \qquad \text{(теорема 3.4.12)}$$

[2] Этот результат понадобится ниже при доказательстве признака абсолютной сходимости несобственного интеграла (теорема 8.1.8)

$$\forall s_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} b, \quad \forall t_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} b \qquad \underbrace{F(t_n)-F(s_n)}_{\substack{\| \\ \int_a^{t_n} f(x)\,\mathsf{d}\,x - \int_a^{s_n} f(x)\,\mathsf{d}\,x \\ \| \\ \int_{s_n}^{t_n} f(x)\,\mathsf{d}\,x}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

$$\Updownarrow$$

$$\forall s_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} b, \quad \forall t_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} b \qquad \int_{s_n}^{t_n} f(x)\,\mathsf{d}\,x \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

□

◇ **8.1.24.** Критерий Коши обычно бывает удобен для доказательства расходимости несобственного интеграла (если он действительно расходится). Рассмотрим, например, интеграл

$$\int_0^{+\infty} x\cdot\sin x\,\mathsf{d}\,x$$

Выберем следующие две числовые последовательности:

$$s_n = \frac{\pi}{6}+2\pi n, \quad t_n = \frac{5\pi}{6}+2\pi n$$

Тогда

$$\forall x\in[s_n;t_n] \quad \sin x \geqslant \frac{1}{2}$$

поэтому

$$\int_{s_n}^{t_n} x\cdot\sin x\,\mathsf{d}\,x \geqslant \int_{s_n}^{t_n} x\cdot\frac{1}{2}\,\mathsf{d}\,x = \\ = \frac{x^2}{4}\Big|_{\frac{\pi}{6}+2\pi n}^{\frac{5\pi}{6}+2\pi n} =$$

$$= \frac{1}{4}\left\{\left(\frac{5\pi}{6}+2\pi n\right)^2 - \left(\frac{\pi}{6}+2\pi n\right)^2\right\} = \\ = \frac{1}{4}\Big\{\frac{25\pi^2}{36}+\frac{5}{3}\pi^2 n+\pi^2\cdot n^2- \\ = \frac{\pi^2}{36}-\frac{1}{3}\pi^2 n-\pi^2\cdot n^2\Big\} = \\ = \frac{1}{4}\Big\{\frac{24\pi^2}{36}+\frac{4}{3}\pi^2 n\Big\} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty \neq 0,$$

и по признаку Коши это означает, что наш интеграл расходится.

Вывод: интеграл $\int_0^{+\infty} x\cdot\sin x\,\mathsf{d}\,x$ расходится.

▷ **8.1.25.** Проверьте по критерию Коши, что интеграл

$$\int_0^{+\infty} x\cdot\cos x\,\mathsf{d}\,x$$

расходится.

Признак абсолютной сходимости

Теорема 8.1.8 (признак абсолютной сходимости). *Пусть функция f локально интегрируема на полуинтервале $[a;b)$. Тогда справедливы импликации:*

$$\int_a^b f(x)\,\mathsf{d}\,x \quad \textit{сходится} \quad \Longleftarrow \quad \int_a^b |f(x)|\,\mathsf{d}\,x \quad \textit{сходится} \quad \Longleftarrow \quad \sup_{t\in[a,b)} \int_a^t |f(x)|\,\mathsf{d}\,x < \infty$$

Доказательство.

$$\text{интеграл} \quad \int_a^b |f(x)|\,\mathsf{d}\,x \quad \text{сходится}$$

$$\Downarrow \quad \text{(теорема 8.1.7)}$$

$$\forall s_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} b, \quad \forall t_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} b \qquad \underbrace{\int_{s_n}^{t_n} |f(x)|\,\mathsf{d}\,x}_{\substack{\geqslant \\ \left|\int_{s_n}^{t_n} f(x)\,\mathsf{d}\,x\right| \\ \geqslant \\ 0}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

$$\Downarrow$$

$$\forall s_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} b, \quad \forall t_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} b \qquad \left|\int_{s_n}^{t_n} f(x)\,\mathsf{d}\,x\right| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

$$\Downarrow$$

$$\forall s_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} b, \quad \forall t_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} b \qquad \int_{s_n}^{t_n} f(x)\,\mathsf{d}\,x \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

$$\Downarrow \quad \text{(теорема 8.1.7)}$$

$$\text{несобственный интеграл} \quad \int_a^b f(x)\,\mathsf{d}\,x \quad \text{сходится}$$

□

◇ **8.1.26.** Чтобы исследовать на сходимость несобственный интеграл

$$\int_0^1 \sin\frac{1}{x}\,\mathsf{d}\,x$$

рассмотрим соответствующий интеграл от модуля

$$0 \leqslant \int_0^1 \left|\sin\frac{1}{x}\right|\,\mathsf{d}\,x \leqslant \int_0^1 1\,\mathsf{d}\,x$$

и применим признак сравнения для знакопостоянных интегралов (теорема 8.1.6): поскольку больший интеграл – $\int_0^1 1\,\mathsf{d}\,x = 1$ – сходится, меньший – $\int_0^1 \left|\sin\frac{1}{x}\right|\,\mathsf{d}\,x$ – тоже должен сходиться. Отсюда по признаку абсолютной сходимости (теорема 8.1.8) получаем

Вывод: Интеграл $\int_0^1 \sin\frac{1}{x}\,\mathsf{d}\,x$ сходится.

◇ **8.1.27.** Интеграл

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2}\,\mathsf{d}\,x$$

исследуется тем же способом:

$$0 \leqslant \int_1^{+\infty} \left|\frac{\sin x}{x^2}\right|\,\mathsf{d}\,x \leqslant \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,\mathsf{d}\,x$$

По признаку сравнения для знакопостоянных интегралов (теорема 8.1.6), из сходимости большего интеграла – $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,\mathsf{d}\,x$ – следует сходимость меньшего – $\int_1^{+\infty} \left|\frac{sinx}{x^2}\right|\,\mathsf{d}\,x$. Отсюда по признаку абсолютной сходимости (теорема 8.1.8)

Вывод: интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2}\,\mathsf{d}\,x$ сходится.

▷▷ **8.1.28.** Исследуйте на сходимость интегралы:

1) $\int_0^{+\infty} e^{-x}\cos x\,\mathsf{d}\,x$;
2) $\int_2^{+\infty} \frac{\sqrt{x}\cos x}{x^2+x+\ln x}\,\mathsf{d}\,x$;
3) $\int_2^{+\infty} \frac{(1+\sqrt{x}+\ln x)\sin x}{x^2+x^3+x^4}\,\mathsf{d}\,x$;
4) $\int_0^1 \frac{\cos\frac{1}{x}}{\sqrt{x}+x+x^2}\,\mathsf{d}\,x$;
5) $\int_0^1 \frac{\cos\frac{1}{x}}{e^{\sqrt{x}}-1}\,\mathsf{d}\,x$;
6) $\int_0^1 \frac{\sqrt{x}\sin\frac{1}{x^2}}{\ln(1+x+x^2)}\,\mathsf{d}\,x$.

Признаки Дирихле и Абеля для интегралов.

Теорема 8.1.9 (признак Дирихле). *Пусть даны:*

(i) непрерывная функция $f : [a;+\infty) \to \mathbb{R}$ с ограниченной первообразной на $[a;+\infty)$:

$$\sup_{t\geqslant a}\left|\int_a^t f(x)\,\mathsf{d}\,x\right| < \infty \tag{8.1.8}$$

(ii) монотонная функция $g : [a;+\infty) \to \mathbb{R}$, стремящаяся к нулю:

$$g(x) \underset{x\to+\infty}{\overset{\text{монотонно}}{\longrightarrow}} 0. \tag{8.1.9}$$

Тогда интеграл

$$\int_a^{+\infty} f(x)\cdot g(x)\,\mathsf{d}\,x$$

сходится.

Доказательство. Обозначим

$$C = \sup_{t\geqslant a}\left|\int_a^t f(x)\,\mathsf{d}\,x\right| < \infty$$

и заметим, что

$$\forall s,t\in[a,\infty) \qquad \left|\int_s^t f(x)\,\mathsf{d}\,x\right| \leqslant 2C \tag{8.1.10}$$

Действительно,

$$\left|\int_s^t f(x)\,\mathsf{d}\,x\right| = \left|\int_a^t f(x)\,\mathsf{d}\,x - \int_a^s f(x)\,\mathsf{d}\,x\right| \leqslant \underbrace{\left|\int_a^t f(x)\,\mathsf{d}\,x\right|}_{\substack{\wedge\!\backslash\\ C}} + \underbrace{\left|\int_a^s f(x)\,\mathsf{d}\,x\right|}_{\substack{\wedge\!\backslash\\ C}} \leqslant 2C$$

Чтобы убедиться, что интеграл $\int_a^\infty f(x)\cdot g(x)\ \mathsf{d}\,x$ сходится, воспользуемся критерием Коши (теорема 8.1.7): выберем произвольные последовательности

$$s_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty, \quad t_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

По формуле Бонне (7.3.143), для любого n найдется точка $\xi_n \in \overrightarrow{s_n, t_n}$ такая, что

$$\int_{s_n}^{t_n} f(x)\cdot g(x)\ \mathsf{d}\,x = g(s_n)\cdot\int_{s_n}^{\xi_n} f(x)\ \mathsf{d}\,x + g(t_n)\cdot\int_{\xi_n}^{t_n} f(x)\ \mathsf{d}\,x$$

Поскольку при этом $\xi_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$ (это следует из условия $\xi_n\in\overrightarrow{s_n,t_n}$), мы получим:

$$\left|\int_{s_n}^{t_n} f(x)\cdot g(x)\ \mathsf{d}\,x\right| \leqslant \underbrace{|g(s_n)|}_{\substack{\downarrow\\ 0}}\cdot\underbrace{\left|\int_{s_n}^{\xi_n} f(x)\ \mathsf{d}\,x\right|}_{\substack{\wedge\!\backslash\,(8.1.10)\\ 2C}} + \underbrace{|g(t_n)|}_{\substack{\downarrow\\ 0}}\cdot\underbrace{\left|\int_{\xi_n}^{t_n} f(x)\ \mathsf{d}\,x\right|}_{\substack{\wedge\!\backslash\,(8.1.10)\\ 2C}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

Это верно для любых последовательностей s_n, t_n, стремящихся к $+\infty$. Значит, интеграл $\int_a^\infty f(x)\cdot g(x)\ \mathsf{d}\,x$ сходится. □

◇ **8.1.29.** Для исследования интеграла

$$\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\ \mathsf{d}\,x$$

можно воспользоваться признаком Дирихле, положив $f(x)=\sin x$ и $g(x)=\frac{1}{x}$, и мы получим

Вывод: интеграл $\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\ \mathsf{d}\,x$ сходится.

◇ **8.1.30.** Интеграл

$$\int_1^{+\infty} x^2\cdot\sin x^2\ \mathsf{d}\,x = \left|\begin{matrix} x^2=t, \quad x=\sqrt{t}\\ x=1\Leftrightarrow t=1\\ x\to+\infty\Leftrightarrow t\to+\infty\end{matrix}\right| = \\ = \int_1^{+\infty} t\cdot\sin t\ \mathsf{d}\sqrt{t} = \int_1^{+\infty}\frac{\sin t}{2\sqrt{t}}\ \mathsf{d}\,t$$

тоже сходится по признаку Дирихле (с $f(t)=\sin t$, $g(t)=\frac{1}{2\sqrt{t}}$).

◇ **8.1.31.** Интеграл

$$\int_0^1\frac{\cos\frac{1}{x}}{x\sqrt[3]{x}}\ \mathsf{d}\,x = \left|\begin{matrix}\frac{1}{x}=t, \quad x=\frac{1}{t}\\ x=1\Leftrightarrow t=1\\ x\to+0\Leftrightarrow t\to+\infty\end{matrix}\right| = \\ = \int_{+\infty}^1 t\sqrt[3]{t}\cdot\cos t\ \mathsf{d}\left(\frac{1}{t}\right) = -\int_{+\infty}^1\frac{\cos t}{t^{\frac{2}{3}}}\ \mathsf{d}\,t = \\ = \int_1^{+\infty}\frac{\cos t}{t^{\frac{2}{3}}}\ \mathsf{d}\,t$$

тоже сходится по признаку Дирихле.

Теорема 8.1.10 (признак Абеля)**.** *Пусть даны:*

(*i*) *сходящийся интеграл* $\int_a^\infty f(x)\ \mathsf{d}\,x$ *и*

(*ii*) *монотонная и ограниченная функция* $g:[a,\infty)\to\mathbb{R}$.

Тогда интеграл $\int_a^\infty f(x)\cdot g(x)\ \mathsf{d}\,x$ *сходится.*

Доказательство. Воспользуемся критерием Коши (теорема 8.1.7): выберем произвольные последовательности

$$s_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty, \quad t_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

По формуле Бонне (7.3.143), для любого n найдется точка $\xi_n \in \overrightarrow{s_n, t_n}$ такая, что

$$\int_{s_n}^{t_n} f(x)\cdot g(x)\ \mathsf{d}\,x = g(s_n)\cdot\int_{s_n}^{\xi_n} f(x)\ \mathsf{d}\,x + g(t_n)\cdot\int_{\xi_n}^{t_n} f(x)\ \mathsf{d}\,x$$

Поскольку при этом $\xi_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$ (это следует из условия $\xi_n \in \overrightarrow{s_n, t_n}$), мы получим:

$$\int_{s_n}^{t_n} f(x)\cdot g(x)\ \mathsf{d}\,x = \overbrace{g(s_n)}^{\text{ограничена}} \cdot \underbrace{\int_{s_n}^{\xi_n} f(x)\ \mathsf{d}\,x}_{\substack{\downarrow\ \text{теорема 8.1.7}\\ 0,\\ \text{поскольку}\\ \int_a^\infty f(x)\ \mathsf{d}\,x\\ \text{сходится}}} + \overbrace{g(t_n)}^{\text{ограничена}} \cdot \underbrace{\int_{\xi_n}^{t_n} f(x)\ \mathsf{d}\,x}_{\substack{\downarrow\ \text{теорема 8.1.7}\\ 0,\\ \text{поскольку}\\ \int_a^\infty f(x)\ \mathsf{d}\,x\\ \text{сходится}}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

Это верно для любых последовательностей s_n, t_n, стремящихся к $+\infty$. Значит, интеграл $\int_a^\infty f(x)\cdot g(x)\ \mathsf{d}\,x$ сходится. □

◇ **8.1.32.** Для исследования интеграла

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\cdot \operatorname{arctg} x\ \mathsf{d}\,x$$

вспомним, что в примере (8.1.29) мы убедились, что интеграл

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\ \mathsf{d}\,x$$

сходится. Поскольку функция $x \mapsto \operatorname{arctg} x$ монотонна, по признаку Абеля мы получаем, что интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\cdot \operatorname{arctg} x\ \mathsf{d}\,x$ тоже сходится.

◇ **8.1.33.** Для исследования интеграла

$$\int_1^{+\infty} x^2\cdot \sin x^2 \cdot \cos\frac{1}{x}\ \mathsf{d}\,x$$

вспомним, что в примере 8.1.30 мы доказали сходимость интеграла

$$\int_1^{+\infty} x^2\cdot \sin x^2\ \mathsf{d}\,x$$

Поскольку функция $x \mapsto \cos\frac{1}{x}$ монотонна, по признаку Абеля интеграл $\int_1^{+\infty} x^2\cdot\sin x^2\cdot\cos\frac{1}{x}\ \mathsf{d}\,x$ тоже сходится.

◇ **8.1.34.** Следующий интеграл заменой переменных превращается в интеграл, который можно исследовать по признаку Абеля:

$$\int_0^1 \frac{\arccos x}{x}\cdot\cos\frac{1}{x}\ \mathsf{d}\,x = \left|\begin{matrix} t=\frac{1}{x}\\ x=\frac{1}{t}\\ \mathsf{d}\,x = -\frac{\mathsf{d}\,t}{t^2}\end{matrix}\right| =$$
$$= -\int_{+\infty}^1 t\cdot\arccos\frac{1}{t}\cdot\cos t\cdot\frac{\mathsf{d}\,t}{t^2} =$$
$$= \int_1^\infty \frac{\cos t}{t}\cdot\arccos\frac{1}{t}\ \mathsf{d}\,t$$

По признаку Дирихле интеграл $\int_1^\infty \frac{\cos t}{t}\ \mathsf{d}\,t$ сходится. А функция $x\mapsto \arccos\frac{1}{t}$ монотонна и ограничена на $[0,+\infty)$. Значит, по признаку Абеля, сходится интеграл $\int_1^\infty \frac{\cos t}{t}\cdot\arccos\frac{1}{t}\ \mathsf{d}\,t$, а вместе с ним и интеграл $\int_0^1 \frac{\arccos x}{x}\cdot\cos\frac{1}{x}\ \mathsf{d}\,x$.

(e) Асимптотика интегралов

Асимптотическая эквивалентность интегралов

Теорема 8.1.11 (признак эквивалентности несобственных интегралов). *Пусть функции f и g обладают следующими свойствами:*

a) f *и* g *непрерывны на полуинтервале* $[a;c)$*;*

b) $f(x) \underset{x\to c-0}{\sim} g(x)$*;*

c) $g(x) > 0, \quad \forall x\in(a;c)$.

Соответствующая зависимость между несобственными интегралами коротко записывается формулой:

$$\int_a^c f(x)\ \mathsf{d}\,x \underset{c}{\sim} \int_a^c g(x)\ \mathsf{d}\,x$$

Тогда сходимость интеграла $\int_a^c f(x)\,\mathsf{d}\,x$ эквивалентна сходимости интеграла $\int_a^c g(x)\,\mathsf{d}\,x$:

$$\int_a^c f(x)\,\mathsf{d}\,x \quad \textit{сходится} \quad \Longleftrightarrow \quad \int_a^c g(x)\,\mathsf{d}\,x \quad \textit{сходится}, \tag{8.1.11}$$

При этом,

(i) *если эти интегралы сходятся, то справедливо следующее соотношение, показывающее, что скорость их сходимости будет одинаковой:*

$$\int_T^c f(x)\,\mathsf{d}\,x \underset{T\to c-0}{\sim} \int_T^c g(x)\,\mathsf{d}\,x \tag{8.1.12}$$

(ii) *если эти интегралы расходятся, то справедливо следующее соотношение, показывающее, что скорость их расходимости будет одинаковой:*

$$\int_a^T f(x)\,\mathsf{d}\,x \underset{T\to c-0}{\sim} \int_a^T g(x)\,\mathsf{d}\,x \tag{8.1.13}$$

! 8.1.35. Если интегралы (8.1.11) расходятся, то формула (8.1.12) утрачивает смыл, и поэтому перестает быть верной. А если интегралы (8.1.11) сходятся, то формула (8.1.13), хотя и сохраняет смысл, но также перестает работать. Например,

$$\frac{x-1}{x^3} \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{x^2}$$

однако

$$\int_1^T \frac{x-1}{x^3}\ \mathsf{d}\,x = \int_1^T \left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^3}\right)\ \mathsf{d}\,x =$$
$$= \left(-\frac{1}{x}+\frac{1}{2x^2}\right)\Big|_1^T = -\frac{1}{T}+1+\frac{1}{2T^2}-\frac{1}{2} \underset{T\to+\infty}{\sim}$$
$$\underset{T\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2} \underset{T\to+\infty}{\not\sim} 1 \underset{T\to+\infty}{\sim} 1-\frac{1}{T} = -\frac{1}{x}\Big|_1^T =$$
$$= \int_1^T \frac{1}{x^2}\ \mathsf{d}\,x$$

То есть

$$\int_1^T \frac{x-1}{x^3}\ \mathsf{d}\,x \underset{T\to+\infty}{\not\sim} \int_1^T \frac{1}{x^2}\ \mathsf{d}\,x$$

Более того, можно заметить, что если одна из функций не превосходит другую на интервале интегрирования, например,

$$f(x) \leqslant g(x), \qquad x\in[a,c)$$

то соотношение (8.1.13) для сходящихся интегралов возможно только, если подынтегральные функции совпадают. Действительно, из неравенства $g(x)>0$ следует, что интеграл от g не может быть нулевым,

$$\int_a^c g(x)\ \mathsf{d}\,x = \lim_{T\to c-0}\int_a^T g(x)\ \mathsf{d}\,x \neq 0$$

Поэтому соотношение (8.1.13), если оно выполняется, означает просто равенство пределов:

$$\lim_{T\to c-0}\int_a^T f(x)\ \mathsf{d}\,x = \lim_{T\to c-0}\int_a^T g(x)\ \mathsf{d}\,x$$

Отсюда

$$\lim_{T\to c-0}\int_a^T \overbrace{\Big(g(x)-f(x)\Big)}^{\substack{0\\ \wedge\!\!\!\backslash}}\ \mathsf{d}\,x =$$
$$= \lim_{T\to c-0}\int_a^T g(x)\ \mathsf{d}\,x - \lim_{T\to c-0}\int_a^T f(x)\ \mathsf{d}\,x = 0$$

$$\Downarrow$$

$$f(x)=g(x), \qquad x\in[a,c)$$

Для доказательства теоремы 8.1.11 нам понадобится следующая

Лемма 8.1.12. *Пусть функция f непрерывна на полуинтервале $[a;c)$ и пусть $b\in[a;c)$. Тогда сходимость несобственного интеграла от f на промежутке $[a;c)$ эквивалентна сходимости на промежутке $[b;c)$:*

$$\int_a^c f(x)\,\mathsf{d}\,x \quad \textit{сходится} \quad \Longleftrightarrow \quad \int_b^c f(x)\,\mathsf{d}\,x \quad \textit{сходится}$$

Доказательство. Это следует из того, что интегралы по промежуткам $[a;c)$ и $[b;c)$ отличаются друг от друга на константу

$$\int_a^c f(x)\,\mathsf{d}\,x = \lim_{t\to c}\int_a^t f(x)\,\mathsf{d}\,x = \lim_{t\to c}\left(\int_a^b f(x)\,\mathsf{d}\,x + \int_b^t f(x)\,\mathsf{d}\,x\right) =$$
$$= \int_a^b f(x)\,\mathsf{d}\,x + \lim_{t\to c}\int_b^t f(x)\,\mathsf{d}\,x = \int_a^b f(x)\,\mathsf{d}\,x + \int_b^c f(x)\,\mathsf{d}\,x$$

□

Доказательство теоремы 8.1.11. . 1. Сначала докажем (8.1.11). Условие (b) означает, что

$$\frac{f(x)}{g(x)} \underset{x\to c-0}{\longrightarrow} 1 \tag{8.1.14}$$

По определению предела Коши (с.274), существует $b \in [a;c)$ такое что $\forall x \in [b;c)$ $\frac{f(x)}{g(x)} \in (\frac{1}{2};\frac{3}{2})$, то есть

$$\forall x \in [b;c) \quad \frac{1}{2} < \frac{f(x)}{g(x)} < \frac{3}{2}$$

Поскольку $g(x) \geqslant 0$, можно умножить это двойное неравенство на $g(x)$, и при этом знаки неравенства не изменятся:

$$\forall x \in [b;c) \quad \frac{1}{2}g(x) < f(x) < \frac{3}{2}g(x)$$

Перепишем это иначе:

$$\forall x \in [b;c) \quad \begin{cases} g(x) < 2f(x) \\ f(x) < \frac{3}{2}g(x) \end{cases} \tag{8.1.15}$$

Отсюда получаются две цепочки следствий. Во-первых,

$$\text{интеграл } \int_a^c f(x)\,\mathsf{d}\,x \text{ сходится}$$
$$\Downarrow \quad \text{(применяем лемму 8.1.12)}$$
$$\text{интеграл } \int_b^c f(x)\,\mathsf{d}\,x \text{ сходится}$$
$$\Downarrow$$
$$\text{интеграл } \int_b^c 2f(x)\,\mathsf{d}\,x \text{ сходится}$$
$$\Downarrow \quad \begin{pmatrix}\text{вспоминаем первое неравенство}\\ \text{в (8.1.15) и теорему 8.1.6}\end{pmatrix}$$
$$\text{интеграл } \int_b^c g(x)\,\mathsf{d}\,x \text{ сходится}$$
$$\Downarrow \quad \text{(применяем лемму 8.1.12)}$$
$$\text{интеграл } \int_a^c g(x)\,\mathsf{d}\,x \text{ сходится}$$

И, во-вторых,

$$\text{интеграл } \int_a^c g(x)\,\mathsf{d}\,x \text{ сходится}$$
$$\Downarrow \quad \text{(применяем лемму 8.1.12)}$$
$$\text{интеграл } \int_b^c g(x)\,\mathsf{d}\,x \text{ сходится}$$
$$\Downarrow$$
$$\text{интеграл } \int_b^c \frac{3}{2}g(x)\,\mathsf{d}\,x \text{ сходится}$$
$$\Downarrow \quad \begin{pmatrix}\text{вспоминаем второе неравенство}\\ \text{в (8.1.15) и теорему 8.1.6}\end{pmatrix}$$
$$\text{интеграл } \int_b^c f(x)\,\mathsf{d}\,x \text{ сходится}$$

$$\Downarrow \qquad \text{(применяем лемму 8.1.12)}$$

$$\text{интеграл } \int_a^c f(x)\,\mathsf{d}\,x \text{ сходится}$$

Мы доказали (8.1.11).

2. Остается доказать (8.1.12) и (8.1.13). Обе эти формулы доказываются с помощью правила Лопиталя. Сначала предположим, что оба интеграла сходятся, и обозначим

$$F(T) = \int_T^c f(x)\,\mathsf{d}\,x = \int_a^c f(x)\,\mathsf{d}\,x - \int_a^T f(x)\,\mathsf{d}\,x, \qquad G(T) = \int_T^c g(x)\,\mathsf{d}\,x = \int_a^c g(x)\,\mathsf{d}\,x - \int_a^T g(x)\,\mathsf{d}\,x$$

Тогда

$$F'(T) = -f(T), \qquad G'(T) = -g(T) \qquad \Big(T \in (a,c)\Big)$$

и поэтому

$$\lim_{T\to c-0} \frac{\int_T^c f(x)\,\mathsf{d}\,x}{\int_T^c g(x)\,\mathsf{d}\,x} = \left(\frac{0}{0}\right) = (5.2.91) = \lim_{T\to c-0} \frac{-f(T)}{-g(T)} = \lim_{T\to c-0} \frac{f(T)}{g(T)} = (8.1.14) = 1$$

Наоборот, предположим, что оба интеграла расходятся, и обозначим

$$F(T) = \int_a^T f(x)\,\mathsf{d}\,x, \qquad G(T) = \int_a^T g(x)\,\mathsf{d}\,x$$

Тогда

$$F'(T) = f(T), \qquad G'(T) = g(T) \qquad \Big(T \in (a,c)\Big)$$

и поэтому

$$\lim_{T\to c-0} \frac{\int_a^T f(x)\,\mathsf{d}\,x}{\int_a^T g(x)\,\mathsf{d}\,x} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = (5.2.94) = \lim_{T\to c-0} \frac{f(T)}{g(T)} = (8.1.14) = 1$$

$\square$

◇ **8.1.36.** Чтобы понять, сходится ли интеграл

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x^2}\,\mathsf{d}\,x$$

заметим, что подынтегральная функция положительна, и подберем к ней эквивалентную:

$$\frac{\sqrt{x^2+1}}{x^2} \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{x}{x^2} = \frac{1}{x}$$

Теперь по теореме 8.1.11 получаем, что сходимость нашего интеграла эквивалентна сходимости более простого интеграла:

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x^2}\,\mathsf{d}\,x \underset{x\to+\infty}{\sim} \int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\,\mathsf{d}\,x = \\ = \ln x \Big|_1^{+\infty} = +\infty$$

Поскольку второй интеграл расходится, мы получаем, что наш исходный интеграл тоже расходится:

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x^2}\,\mathsf{d}\,x = \infty$$

Из формулы (8.1.13) можно вывести скорость расходимости:

$$\int_1^T \frac{\sqrt{x^2+1}}{x^2}\,\mathsf{d}\,x \underset{T\to+\infty}{\sim} \int_1^T \frac{1}{x}\,\mathsf{d}\,x = \ln T$$

◇ **8.1.37.** Рассмотрим интеграл

$$\int_0^1 \frac{\sin\sqrt{x}}{e^x-1}\,\mathsf{d}\,x$$

Здесь особой точкой ($x=0$) будет нижняя граница интегрирования, но теорема 8.1.11 применима и к этому случаю, в очевидным образом переформулированном виде. Опять подынтегральная функция положительна. Подберем к ней эквивалентную функцию при стремлении x к особой точке:

$$\frac{\sin\sqrt{x}}{e^x-1} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{\sqrt{x}}{x} = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

Мы получаем по теореме 8.1.11, что сходимость исходного интеграла эквивалентна сходимости более простого интеграла

$$\int_0^1 \frac{\sin\sqrt{x}}{e^x-1}\,\mathsf{d}\,x \underset{0}{\sim} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathsf{d}\,x = 2\sqrt{x}\,\Big|_0^1$$

Второй интеграл сходится, значит, наш исходный интеграл тоже сходится. Его скорость сходимости описывается формулой (8.1.12):

$$\int_0^T \frac{\sin\sqrt{x}}{e^x-1}\,\mathsf{d}\,x \underset{T\to+0}{\sim} \int_0^T \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathsf{d}\,x = 2\sqrt{T}.$$

◇ **8.1.38.** Те же самые рассуждения для интеграла

$$\int_0^1 \frac{1-\cos x}{\ln(1+x^3)}\,\mathsf{d}\,x$$

запишем короче:

$$\int_0^1 \frac{1-\cos x}{\ln(1+x^3)}\,\mathsf{d}\,x \underset{0}{\sim} \int_0^1 \frac{\frac{x^2}{2}}{x^3}\,\mathsf{d}\,x = \\ = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{1}{x}\,\mathsf{d}\,x = \ln x\,\Big|_0^1$$

Второй интеграл расходится, значит, наш исходный интеграл тоже расходится. Скорость расходимости описывается формулой

$$\int_T^1 \frac{1-\cos x}{\ln(1+x^3)}\,\mathsf{d}\,x \underset{T\to+0}{\sim} \frac{1}{2}\int_T^1 \frac{1}{x}\,\mathsf{d}\,x = -\ln T$$

◇ **8.1.39.** Снова интеграл по бесконечному промежутку:

$$\int_1^{+\infty} \frac{x+\sin x}{\sqrt{1+x^6}}\,\mathsf{d}\,x \underset{x\to+\infty}{\sim} \int_1^{+\infty} \frac{x}{\sqrt{x^6}}\,\mathsf{d}\,x = \\ = \int_1^{+\infty} \frac{x}{x^3}\,\mathsf{d}\,x = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,\mathsf{d}\,x = -\frac{1}{x}\,\Big|_1^{+\infty}$$

Последний интеграл сходится, значит, наш исходный интеграл тоже сходится. Скорость сходимости:

$$\int_T^{+\infty} \frac{x+\sin x}{\sqrt{1+x^6}}\,\mathsf{d}\,x \underset{T\to+\infty}{\sim} \int_T^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,\mathsf{d}\,x = \frac{1}{T}$$

◇ **8.1.40.** Еще один интеграл по бесконечному промежутку:

$$\int_1^{+\infty} \frac{x+\sin x}{\sqrt{1+x^3}}\,\mathsf{d}\,x \underset{x\to+\infty}{\sim} \int_1^{+\infty} \frac{x}{\sqrt{x^3}}\,\mathsf{d}\,x = \\ = \int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathsf{d}\,x = 2\sqrt{x}\,\Big|_1^{+\infty}$$

Последний интеграл расходится, значит, наш исходный интеграл тоже расходится. Скорость расходимсоти:

$$\int_1^{T} \frac{x+\sin x}{\sqrt{1+x^3}}\,\mathsf{d}\,x \underset{T\to+\infty}{\sim} \int_1^{T} \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathsf{d}\,x = \\ = 2\sqrt{x}\,\Big|_1^{T} = 2\sqrt{T}-2 \underset{T\to+\infty}{\sim} 2\sqrt{T}$$

▷▷ **8.1.41.** Исследуйте на сходимость интегралы и оцените скорость сходимости и расходимости:

1) $\int_2^{+\infty} \frac{1}{1+\sqrt{x}}\,\mathsf{d}\,x$;
2) $\int_2^{+\infty} \frac{1}{1+\sqrt{x}+x^5}\,\mathsf{d}\,x$;
3) $\int_{-\infty}^{-2} \frac{1}{1+x^5}\,\mathsf{d}\,x$;
4) $\int_0^1 \frac{\operatorname{arctg} x}{x\sqrt[3]{x}}\,\mathsf{d}\,x$;
5) $\int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{x\sqrt[3]{x}}\,\mathsf{d}\,x$;
6) $\int_0^1 \frac{\operatorname{arctg} x}{\sqrt[3]{x}}\,\mathsf{d}\,x$;
7) $\int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{\sqrt[3]{x}}\,\mathsf{d}\,x$;
8) $\int_0^1 \frac{e^x-1}{x^3}\,\mathsf{d}\,x$;
9) $\int_{-1}^0 \frac{e^x-1}{x^3}\,\mathsf{d}\,x$;
10) $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}-1}\,\mathsf{d}\,x$;
11) $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x-1}}\,\mathsf{d}\,x$;
12) $\int_0^1 \frac{1}{e^x-\cos x}\,\mathsf{d}\,x$;
13) $\int_0^1 \frac{\ln(1+\sqrt[3]{x^2})}{e^x-1}\,\mathsf{d}\,x$;
14) $\int_e^{+\infty} \frac{\ln(1+\frac{1}{x})}{x+\ln x}\,\mathsf{d}\,x$;
15) $\int_e^{+\infty} \frac{\ln(1+\frac{1}{x}+x)}{1+\ln x+\sin x}\,\mathsf{d}\,x$.

Асимптотическое сравнение интегралов

Теорема 8.1.13 (асимптотический признак сравнения)**.** *Пусть функции f и g обладают следующими свойствами:*

a) f *и* g *непрерывны на полуинтервале* $[a;c)$*;*

b) $f(x) \underset{x\to c-0}{\ll} g(x)$ *(то есть* $f(x) = \underset{x\to c-0}{\mathbf{o}}(g(x))$*);*

c) $g(x)>0,\quad \forall x\in(a;c)$*.*

- Возникающая зависимость между несобственными интегралами коротко записывается формулой

$$\int_a^c f(x)\,\mathsf{d}\,x \underset{c}{\ll} \int_a^c g(x)\,\mathsf{d}\,x.$$

Тогда

(i) из сходимости большего интеграла $\int_a^c g(x)\,\mathsf{d}\,x$ следует сходимость меньшего интеграла $\int_a^c f(x)\,\mathsf{d}\,x$:

$$\int_a^c f(x)\,\mathsf{d}\,x \quad \text{сходится} \quad \Longleftarrow \quad \int_a^c g(x)\,\mathsf{d}\,x \quad \text{сходится}, \tag{8.1.16}$$

причем скорости сходимости оцениваются соотношением

$$\int_T^c f(x)\,\mathsf{d}\,x \underset{T\to c-0}{\ll} \int_T^c g(x)\,\mathsf{d}\,x; \tag{8.1.17}$$

(ii) из расходимости меньшего интеграла $\int_a^c f(x)\,\mathsf{d}\,x$ следует расходимость большего интеграла $\int_a^c g(x)\,\mathsf{d}\,x$:

$$\int_a^c f(x)\,\mathsf{d}\,x \quad \text{расходится} \quad \Longrightarrow \quad \int_a^c g(x)\,\mathsf{d}\,x \quad \text{расходится} \tag{8.1.18}$$

причем скорости расходимости оцениваются соотношением

$$\int_a^T f(x)\,\mathsf{d}\,x \underset{T\to c-0}{\ll} \int_a^T g(x)\,\mathsf{d}\,x; \tag{8.1.19}$$

Доказательство. 1. Забудем на время о формулах (8.1.17) и (8.1.19). Оставшиеся в условиях (i) и (ii) утверждения (8.1.16) и (8.1.18) эквивалентны, поэтому из них достаточно доказать какое-нибудь одно, например, первое. Условие (b) означает, что

$$\frac{f(x)}{g(x)} \underset{x\to c-0}{\longrightarrow} 0. \tag{8.1.20}$$

По определению предела Коши (с.274), существует $b \in [a;c)$ такое что $\forall x \in [b;c)$ $\frac{f(x)}{g(x)} \in (-1;1)$, то есть

$$\forall x \in [b;c) \quad -1 < \frac{f(x)}{g(x)} < 1$$

Поскольку $g(x) > 0$, можно умножить это двойное неравенство на $g(x)$, и при этом знаки неравенства не изменятся:

$$\forall x \in [b;c) \quad -g(x) < f(x) < g(x)$$

Перепишем это иначе:

$$\forall x \in [b;c) \quad |f(x)| < g(x) \tag{8.1.21}$$

Отсюда получается следующая цепочка следствий:

$$\text{интеграл } \int_a^c g(x)\,\mathsf{d}\,x \text{ сходится}$$

$$\Downarrow \quad \text{лемма 8.1.12}$$

$$\text{интеграл } \int_b^c g(x)\,\mathsf{d}\,x \text{ сходится}$$

$$\Downarrow \quad \text{неравенство (8.1.21) и теорема 8.1.6}$$

$$\text{интеграл } \int_b^c |f(x)|\,\mathsf{d}\,x \text{ сходится}$$

$$\Downarrow \quad \text{теорема 8.1.8}$$

$$\text{интеграл } \int_b^c f(x)\,\mathsf{d}\,x \text{ сходится}$$

2. Теперь вспомним о формулах (8.1.17) и (8.1.19). Они доказывается тем же приемом (с помощью правила Лопиталя), что и формулы (8.1.12)-(8.1.13) выше. Сначала предположим, что оба интеграла сходятся, и обозначим

$$F(T) = \int_T^c f(x)\,\mathsf{d}\,x = \int_a^c f(x)\,\mathsf{d}\,x - \int_a^T f(x)\,\mathsf{d}\,x, \qquad G(T) = \int_T^c g(x)\,\mathsf{d}\,x = \int_a^c g(x)\,\mathsf{d}\,x - \int_a^T g(x)\,\mathsf{d}\,x$$

Тогда

$$F'(T) = -f(T), \qquad G'(T) = -g(T) \qquad \Big(T \in (a, c)\Big)$$

и поэтому

$$\lim_{T\to c-0} \frac{\int_T^c f(x)\,\mathsf{d}\,x}{\int_T^c g(x)\,\mathsf{d}\,x} = \left(\frac{0}{0}\right) = (5.2.91) = \lim_{T\to c-0} \frac{-f(T)}{-g(T)} = \lim_{T\to c-0} \frac{f(T)}{g(T)} = (8.1.20) = 0$$

Наоборот, предположим, что оба интеграла расходятся, и обозначим

$$F(T) = \int_a^T f(x)\,\mathsf{d}\,x, \qquad G(T) = \int_a^T g(x)\,\mathsf{d}\,x$$

Тогда

$$F'(T) = f(T), \qquad G'(T) = g(T) \qquad \Big(T \in (a, c)\Big)$$

и поэтому

$$\lim_{T\to c-0} \frac{\int_a^T f(x)\,\mathsf{d}\,x}{\int_a^T g(x)\,\mathsf{d}\,x} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = (5.2.94) = \lim_{T\to c-0} \frac{f(T)}{g(T)} = (8.1.20) = 0$$

□

◇ **8.1.42.** Чтобы исследовать на сходимость несобственный интеграл

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^{10}\sin x}{e^x}\,\mathsf{d}\,x$$

заметим, что

$$\frac{x^{10}\sin x}{e^x} \underset{x\to+\infty}{\ll} \frac{1}{e^{\frac{x}{2}}} = e^{-\frac{x}{2}}$$

Поэтому

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^{10}\sin x}{e^x}\,\mathsf{d}\,x \underset{+\infty}{\ll} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{x}{2}}\,\mathsf{d}\,x = -2e^{-\frac{x}{2}}\Big|_0^{+\infty}$$

Поскольку больший интеграл (справа от $\ll$) сходится, меньший (то есть наш исходный) интеграл тоже должен сходиться. Его скорость сходимости оценивается формулой (8.1.17):

$$\int_T^{+\infty} \frac{x^{10}\sin x}{e^x}\,\mathsf{d}\,x \underset{T\to+\infty}{\ll} \int_T^{+\infty} e^{-\frac{x}{2}}\,\mathsf{d}\,x = 2e^{-\frac{T}{2}}$$

или, если упростить,

$$\int_T^{+\infty} \frac{x^{10}\sin x}{e^x}\,\mathsf{d}\,x \underset{T\to+\infty}{\ll} e^{-\frac{T}{2}}$$

Применяя оценку

$$x^{10} \underset{x\to+\infty}{\ll} e^{\varepsilon x} \qquad (\varepsilon > 0),$$

можно доказать более точную формулу:

$$\int_T^{+\infty} \frac{x^{10}\sin x}{e^x}\,\mathsf{d}\,x \underset{T\to+\infty}{\ll} a^T \qquad (a < e).$$

◇ **8.1.43.** Чтобы исследовать на сходимость несобственный интеграл

$$\int_1^{+\infty} \frac{e^x}{x^{10}}\,\mathsf{d}\,x$$

заметим, что

$$\frac{e^x}{x^{10}} \underset{x\to+\infty}{\gg} e^{\frac{x}{2}}$$

Поэтому

$$\int_1^{+\infty} \frac{e^x}{x^{10}}\,\mathsf{d}\,x \underset{+\infty}{\gg} \int_1^{+\infty} e^{\frac{x}{2}}\,\mathsf{d}\,x = 2e^{\frac{x}{2}}\Big|_1^{+\infty}$$

Поскольку меньший интеграл расходится, больший тоже должен расходиться. Скорость расходимости оценивается формулой

$$\int_1^{T} \frac{e^x}{x^{10}}\,\mathsf{d}\,x \underset{T\to+\infty}{\gg} \int_1^{T} e^{\frac{x}{2}}\,\mathsf{d}\,x = \\ = 2e^{\frac{T}{2}} - 2e^{\frac{1}{2}} \underset{T\to+\infty}{\sim} 2e^{\frac{T}{2}}$$

и, если упростить,

$$\int_1^{T} \frac{e^x}{x^{10}}\,\mathsf{d}\,x \underset{T\to+\infty}{\gg} e^{\frac{T}{2}}$$

Применяя оценку

$$x^{10} \underset{x\to+\infty}{\ll} e^{\varepsilon x} \qquad (\varepsilon > 0),$$

можно доказать формулу

$$\int_1^{T} \frac{e^x}{x^{10}}\,\mathsf{d}\,x \underset{T\to+\infty}{\gg} a^T \qquad (a < e)$$

◇ **8.1.44.**

$$\int_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt[3]{x}}\,\mathsf{d}\,x = \left| \begin{array}{c} \frac{1}{\sqrt[3]{x}} = y, \quad x = \frac{1}{y^3} \\ x\to+0 \Leftrightarrow y\to+\infty \\ x = 1 \Leftrightarrow y = 1 \end{array} \right| = \\ = \int_{+\infty}^1 y\ln\frac{1}{y^3}\,\mathsf{d}\,\frac{1}{y^3} = \int_{+\infty}^1 (-3y\ln y)\,\frac{-3}{y^4}\,\mathsf{d}\,y =$$

$$= 9\int_{+\infty}^{1} \frac{\ln y}{y^3}\,\mathsf{d}\,y = -9\int_{1}^{+\infty} \frac{\ln y}{y^3}\,\mathsf{d}\,y \underset{+\infty}{\ll}$$

$$\underset{+\infty}{\ll} -9\int_{1}^{+\infty} \frac{y}{y^3}\,\mathsf{d}\,y = -9\int_{1}^{+\infty} \frac{1}{y^2}\,\mathsf{d}\,y = \frac{9}{y}\Big|_1^{+\infty}$$

Последний интеграл сходится, значит меньший (исходный) интеграл тоже сходится. Для скорости сходимости с помощью той же оценки получается формула:

$$\int_0^T \frac{\ln x}{\sqrt[3]{x}}\,\mathsf{d}\,x = \left| \begin{matrix} \frac{1}{\sqrt[3]{x}} = y, \quad x = \frac{1}{y^3} \\ x \to +0 \Leftrightarrow y \to +\infty \\ x = T \Leftrightarrow y = \frac{1}{T} \end{matrix} \right| =$$

$$= -9\int_{\frac{1}{T}}^{+\infty} \frac{\ln y}{y^3}\,\mathsf{d}\,y \underset{T\to+0}{\ll} -9\int_{\frac{1}{T}}^{+\infty} \frac{y}{y^3}\,\mathsf{d}\,y =$$

$$= \frac{9}{y}\Big|_{\frac{1}{T}}^{+\infty} = 9T$$

Сокращая константу 9, получаем:

$$\int_0^T \frac{\ln x}{\sqrt[3]{x}}\,\mathsf{d}\,x \underset{T\to+0}{\ll} T$$

Оценкой

$$\ln y \underset{y\to+\infty}{\ll} y^{\varepsilon} \qquad (\varepsilon > 0)$$

можно добиться формулы

$$\int_0^T \frac{\ln x}{\sqrt[3]{x}}\,\mathsf{d}\,x \underset{T\to+0}{\ll} T^{\alpha} \qquad (\alpha < 2).$$

◇ **8.1.45.**

$$\int_0^1 e^{\frac{1}{x}}\,\mathsf{d}\,x = \left| \begin{matrix} \frac{1}{x} = y, \quad x = \frac{1}{y} \\ x \to +0 \Leftrightarrow y \to +\infty \\ x = 1 \Leftrightarrow y = 1 \end{matrix} \right| =$$

$$= \int_{+\infty}^{1} e^y\,\mathsf{d}\,\frac{1}{y} = \int_{+\infty}^{1} \frac{-e^y}{y^2}\,\mathsf{d}\,y = \int_{1}^{+\infty} \frac{e^y}{y^2}\,\mathsf{d}\,y \underset{+\infty}{\gg}$$

$$\underset{+\infty}{\gg} \int_{1}^{+\infty} \frac{y^2}{y^2}\,\mathsf{d}\,y = \int_{1}^{+\infty} 1\,\mathsf{d}\,y = y\Big|_1^{+\infty}$$

Последний интеграл расходится, значит больший (исходный) интеграл тоже расходится. Для скорости расходимости получаем с помощью той же оценки формулу:

$$\int_T^1 e^{\frac{1}{x}}\,\mathsf{d}\,x = \left| \begin{matrix} \frac{1}{x} = y, \quad x = \frac{1}{y} \\ x = T \Leftrightarrow y = \frac{1}{T} \\ x = 1 \Leftrightarrow y = 1 \end{matrix} \right| = \int_{\frac{1}{T}}^{1} e^y\,\mathsf{d}\,\frac{1}{y} \underset{T\to+0}{\gg}$$

$$\underset{T\to+0}{\gg} \int_1^{\frac{1}{T}} \frac{y^2}{y^2}\,\mathsf{d}\,y = y\Big|_1^{\frac{1}{T}} = \frac{1}{T} - 1 \underset{T\to+0}{\sim} \frac{1}{T}$$

Применяя формулу

$$e^y \underset{y\to+\infty}{\gg} y^{\varepsilon} \qquad (\varepsilon > 0)$$

можно добиться оценки

$$\int_T^1 e^{\frac{1}{x}}\,\mathsf{d}\,x \underset{T\to+0}{\gg} \frac{1}{T^n} \qquad (n \in \mathbb{N})$$

▷▷ **8.1.46.** Исследуйте на сходимость несобственные интегралы и найдите оценки сходимости и расходимости:

1) $\int_{-1}^0 e^{\frac{1}{x}}\,\mathsf{d}\,x$;

2) $\int_0^1 \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^3}\,\mathsf{d}\,x$;

3) $\int_{-1}^0 \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^3}\,\mathsf{d}\,x$;

4) $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\mathsf{d}\,x}{x^3 \ln x}$;

5) $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\ln^7 x\,\mathsf{d}\,x}{\sqrt{x}}$;

6) $\int_e^{+\infty} \frac{\ln(1+x+x^2)}{1+x+x^2}\,\mathsf{d}\,x$;

7) $\int_e^{+\infty} \frac{\ln(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{\sqrt{x}})}{\ln(1+x+\sqrt{x})}\,\mathsf{d}\,x$;

8) $\int_e^{+\infty} \frac{\ln(1+\frac{1}{\ln x}+\frac{1}{\sqrt{x}})}{x+x^{\frac{5}{4}}+x^{\frac{4}{3}}}\,\mathsf{d}\,x$;

Интегрирование асимптотических формул. Из теоремы 8.1.13 сразу следует

Теорема 8.1.14. *Пусть функции f, g и h обладают следующими свойствами:*

a) *f, g и h непрерывны на полуинтервале $[a;c)$;*

b) *f, g и h удовлетворяют асимптотическому соотношению*

$$f(x) = g(x) + \underset{x\to c-0}{\mathbf{o}}(h(x))$$

c) *$h(x) > 0$, $\forall x \in (a;c)$.*

Тогда

(i) *если несобственные интегралы $\int_a^c f(x)\,\mathsf{d}\,x$, $\int_a^c g(x)\,\mathsf{d}\,x$ и $\int_a^c h(x)\,\mathsf{d}\,x$ сходятся, то справедлива асимптотическая формула*

$$\int_x^c f(t)\,\mathsf{d}\,t = \int_x^c g(t)\,\mathsf{d}\,t + \underset{x\to c-0}{\mathbf{o}}\left(\int_x^c f(t)\,\mathsf{d}\,t\right) \tag{8.1.22}$$

(ii) *если несобственный интеграл $\int_a^c h(x)\,\mathsf{d}\,x$ расходится, то справедлива асимптотическая формула*

$$\int_a^x f(t)\,\mathsf{d}\,t = \int_a^x g(t)\,\mathsf{d}\,t + \underset{x\to c-0}{\mathbf{o}}\left(\int_a^x f(t)\,\mathsf{d}\,t\right) \tag{8.1.23}$$

Из теоремы 8.1.14 тут же следует метод нахождения асимптотики интегралов

$$F(x)=\int_a^x f(t)\ \mathsf{d}\,t,\qquad F(x)=\int_x^c f(t)\ \mathsf{d}\,t$$

– для этого нужно найти асимптотику для подынтегральной функции, а затем проинтегрировать ее. Покажем, как это делается на примерах.

◇ **8.1.47.** Найдем асимптотику интеграла

$$F(x)=\int_1^x \sqrt{t^2+1}\ \mathsf{d}\,t,\qquad x\to+\infty$$

Оговоримся сразу, что этот интеграл можно вычислить явно (мы даже предлагали это читателю в упражнении 7.1.38), и как следствие, его асимптотику можно вывести по аналогии с примерами § 2(b) (вычислив $F(x)$, и, после преобразований, разложив полученное выражение с помощью формул Пеано). Однако здесь наша цель – объяснить, как находится асимптотика подобных интегралов без их явного вычисления. Мы выбрали этот пример только чтобы не усложнять вычисления. Читателю же мы предлагаем самостоятельно найти асимптотику так, как мы описали, а затем сравнить ответы, полученные разными методами.

Вспомним, что в примере 6.2.10 мы уже искали асимптотику подынтегрального выражения, и (с точностью до замены переменной) мы получили такой ответ:

$$\sqrt{t^2+1}=t+\frac{1}{2t}-\frac{1}{8t^3}+\underset{t\to+\infty}{\mathbf{o}}\left(\frac{1}{t^3}\right)\qquad(8.1.24)$$

К этой формуле, однако, невозможно применить часть (ii) теоремы 8.1.14, как нам бы хотелось, потому что получающийся интеграл под символом **o** сходится. Но если огрубить эту формулу до формулы

$$\sqrt{t^2+1}=t+\frac{1}{2t}+\underset{t\to+\infty}{\mathbf{o}}\left(\frac{1}{t}\right)$$

то интеграл под **o** становится расходящимся, и теорема 8.1.14 (ii) становится применима:

$$\begin{aligned}
&\int_1^x \sqrt{t^2+1}\ \mathsf{d}\,t=\\
&=\int_1^x\left(t+\frac{1}{2t}\right)\mathsf{d}\,t+\underset{t\to+\infty}{\mathbf{o}}\left(\int_1^x\frac{1}{t}\ \mathsf{d}\,t\right)=\\
&=\left(\frac{t^2}{2}+\frac12\cdot\ln t\right)\Big|_{t=1}^{t=x}+\underset{t\to+\infty}{\mathbf{o}}\left(\ln t\Big|_{t=1}^{t=x}\right)=\\
&=\frac{x^2}{2}+\frac12\cdot\ln x\underbrace{-\frac12+\underset{t\to+\infty}{\mathbf{o}}(\ln x)}_{\underset{t\to+\infty}{\mathbf{o}}(\ln x)}=\\
&=\frac{x^2}{2}+\frac12\cdot\ln x+\underset{t\to+\infty}{\mathbf{o}}(\ln x)
\end{aligned}$$

Мы получили асимптотическую формулу:

$$\int_1^x \sqrt{t^2+1}\ \mathsf{d}\,t=\frac{x^2}{2}+\frac12\cdot\ln x+\underset{t\to+\infty}{\mathbf{o}}(\ln x)$$

Можно было бы поступить иначе: вместо того, чтобы огрублять формулу (8.1.24) перед тем как ее интегрировать, можно переписать ее так, чтобы была применима часть (i) теоремы 8.1.14:

$$\sqrt{t^2+1}-t-\frac{1}{2t}=-\frac{1}{8t^3}+\underset{t\to+\infty}{\mathbf{o}}\left(\frac{1}{t^3}\right)\qquad(8.1.25)$$

Здесь правая часть бесконечно мала по сравнению с функцией $\frac{1}{t^2}$, интеграл от которой на $[1,+\infty)$ сходится. Поэтому по теореме 8.1.13, интеграл от левой части тоже должен сходиться:

$$\int_1^\infty\left(\sqrt{t^2+1}-t-\frac{1}{2t}\right)\mathsf{d}\,t=A\in\mathbb{R}$$

Теперь, применяя к (8.1.25) теорему 8.1.14 (i), получаем:

$$\begin{aligned}
&\int_x^\infty\left(\sqrt{t^2+1}-t-\frac{1}{2t}\right)\mathsf{d}\,t=\\
&=-\int_x^\infty\frac{1}{8t^3}\ \mathsf{d}\,t+\underset{t\to+\infty}{\mathbf{o}}\left(\int_x^\infty\frac{1}{t^3}\ \mathsf{d}\,t\right)=\\
&=\frac{1}{16t^2}\Big|_{t=x}^{t=\infty}+\underset{t\to+\infty}{\mathbf{o}}\left(-\frac{1}{2t^2}\Big|_{t=x}^{t=\infty}\right)=\\
&=-\frac{1}{16x^2}+\underset{t\to+\infty}{\mathbf{o}}\left(\frac{1}{2x^2}\right)=\\
&=-\frac{1}{16x^2}+\underset{t\to+\infty}{\mathbf{o}}\left(\frac{1}{x^2}\right)
\end{aligned}$$

Отсюда следует:

$$\begin{aligned}
&\int_1^x\left(\sqrt{t^2+1}-t-\frac{1}{2t}\right)\mathsf{d}\,t=\\
&=\underbrace{\int_1^\infty\left(\sqrt{t^2+1}-t-\frac{1}{2t}\right)\mathsf{d}\,t}_{A}-\\
&-\underbrace{\int_x^\infty\left(\sqrt{t^2+1}-t-\frac{1}{2t}\right)\mathsf{d}\,t}_{-\frac{1}{16x^2}+\underset{t\to+\infty}{\mathbf{o}}\left(\frac{1}{x^2}\right)}=\\
&=A+\frac{1}{16x^2}+\underset{t\to+\infty}{\mathbf{o}}\left(\frac{1}{x^2}\right)
\end{aligned}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{aligned}
&\int_1^x \sqrt{t^2+1}\ \mathsf{d}\,t=\underbrace{\int_1^x\left(\sqrt{t^2+1}-t-\frac{1}{2t}\right)\mathsf{d}\,t}_{\frac{x^2}{2}+\frac12\cdot\ln x-\frac12}+\\
&+A+\frac{1}{16x^2}+\underset{t\to+\infty}{\mathbf{o}}\left(\frac{1}{x^2}\right)=\\
&=\frac{x^2}{2}+\frac12\cdot\ln x-\frac12+A+\frac{1}{16x^2}+\underset{t\to+\infty}{\mathbf{o}}\left(\frac{1}{x^2}\right)
\end{aligned}$$

Мы получили асимптотическое разложение нашего интеграла порядка 2 вдоль степенной последовательности на бесконечности:

$$\int_1^x \sqrt{t^2+1}\ \mathsf{d}\,t = \\ = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}\cdot \ln x - \frac{1}{2} + A + \frac{1}{16x^2} + \underset{t\to+\infty}{\mathbf{o}}\left(\frac{1}{x^2}\right),$$

где

$$A = \int_1^\infty \left(\sqrt{t^2+1} - t - \frac{1}{2t}\right)\ \mathsf{d}\,t.$$

Заметим, наконец, что, выписывая более точную асимптотику для подынтегральной функции (то есть заменяя формулу (8.1.24) на более точную), можно по этому алгоритму получать и асимптотику интеграла нужной точности.

Нахождение асимптотики интегрированием по частям Описанный в предыдущем пункте способ нахождения асимптотики интеграла не всегда работает. Например, асимптотику интегралов

$$\int_1^x \frac{\sin t}{t^2}\ \mathsf{d}\,t, \qquad \int_1^x t^2\cdot e^t\ \mathsf{d}\,t \qquad (x\to+\infty)$$

невозможно получить, раскладывая подынтегральную функцию в асимптотическую формулу, а затем интегрируя ее (потому что асимптотику для подынтегральной функции здесь трудно придумать). В таких случаях полезно держать в голове другой метод – интегрирование по частям. Здесь мы рассмотрим несколько примеров на эту тему.

◇ **8.1.48.** Найдем асимптотику интеграла

$$F(x) = \int_1^x \frac{\sin t}{t^2}\ \mathsf{d}\,t \qquad (8.1.26)$$

Прежде всего заметим, что существует конечный предел

$$A = \lim_{x\to\infty} F(x) = \int_1^\infty \frac{\sin t}{t^2}\ \mathsf{d}\,t$$

– поскольку интеграл $\int_1^\infty \frac{\sin t}{t^2}\ \mathsf{d}\,t$ сходится абсолютно:

$$\int_1^\infty \left|\frac{\sin t}{t^2}\right|\ \mathsf{d}\,t \leqslant \int_1^\infty \frac{1}{t^2}\ \mathsf{d}\,t = -\frac{1}{t}\Big|_1^\infty = 1$$

Запомним это число A. Тогда, интегрируя по частям один раз, получим:

$$F(x) = \int_1^x \frac{\sin t}{t^2}\ \mathsf{d}\,t = \overset{\int_1^\infty \frac{\sin t}{t^2}\ \mathsf{d}\,t}{\overset{\parallel}{A}} - \int_x^\infty \frac{\sin t}{t^2}\ \mathsf{d}\,t = \\ = A + \int_x^\infty \frac{\mathsf{d}\cos t}{t^2} = A + \frac{\cos t}{t^2}\Big|_x^\infty - 2\int_x^\infty \frac{\cos t}{t^3}\ \mathsf{d}\,t = \\ = A - \underbrace{\frac{\cos x}{x^2}}_{\underset{x\to+\infty}{\mathbf{o}}\left(\frac{1}{x}\right)} \underbrace{+2\int_x^\infty \underbrace{\frac{\cos t}{t^3}}_{\underset{t\to+\infty}{\mathbf{o}}\left(\frac{1}{t^2}\right)}\ \mathsf{d}\,t}_{\underset{x\to+\infty}{\mathbf{o}}\left(\frac{1}{x}\right)} = \\ = A + \underset{x\to+\infty}{\mathbf{o}}\left(\frac{1}{x}\right)$$

Это первое асимптотическое разложение. Если проинтегрировать по частям два раза, получится более точная формула:

$$F(x) = \int_1^x \frac{\sin t}{t^2}\ \mathsf{d}\,t = ... = \\ = A - \frac{\cos x}{x^2} - 2\int_x^\infty \frac{\cos t}{t^3}\ \mathsf{d}\,t = \\ = A - \frac{\cos x}{x^2} - 2\int_x^\infty \frac{\mathsf{d}\sin t}{t^3} = \\ = A - \frac{\cos x}{x^2} - \frac{2\sin t}{t^3}\Big|_x^\infty - 6\int_x^\infty \frac{\sin t}{t^4}\ \mathsf{d}\,t = \\ = A - \frac{\cos x}{x^2} + \underbrace{\frac{2\sin x}{x^3}}_{\underset{x\to+\infty}{\mathbf{o}}\left(\frac{1}{x^2}\right)} \underbrace{-6\int_x^\infty \underbrace{\frac{\sin t}{t^4}}_{\underset{t\to+\infty}{\mathbf{o}}\left(\frac{1}{t^3}\right)}\ \mathsf{d}\,t}_{\underset{x\to+\infty}{\mathbf{o}}\left(\frac{1}{x^2}\right)} = \\ = A - \frac{\cos x}{x^2} + \underset{x\to+\infty}{\mathbf{o}}\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

И так далее. Увеличивая число интегрирований по частям, мы будем повышать точность асимптотического разложения.

◇ **8.1.49.** Найдем асимптотику интеграла

$$F(x) = \int_1^x t^\alpha\cdot e^t\ \mathsf{d}\,t, \quad x\to+\infty$$

Интегрируя по частям, получаем:

$$F(x) = \int_1^x t^\alpha\cdot e^t\ \mathsf{d}\,t = \int_1^x t^\alpha\ \mathsf{d}\,e^t = \\ = t^\alpha\cdot e^t\Big|_{t=1}^{t=x} - \int_1^x e^t\ \mathsf{d}\,t^\alpha = \\ = x^\alpha\cdot e^x - e - \alpha\cdot\int_1^x t^{\alpha-1}\cdot e^t\ \mathsf{d}\,t \quad (8.1.27)$$

Поглядим внимательно на последний интеграл:

$$t^{\alpha-1}\cdot e^t \underset{t\to+\infty}{\ll} t^\alpha\cdot e^t$$

$$\Downarrow \quad (8.1.19)$$

$$\int_1^x t^{\alpha-1}\cdot e^t \ \mathsf{d}\,t \underset{x\to+\infty}{\ll} \int_1^x t^{\alpha}\cdot e^t \ \mathsf{d}\,t = F(x)$$

Мы получаем:

$$F(x) = x^\alpha\cdot e^x \underbrace{-e + \underset{x\to+\infty}{\mathbf{o}}(F(x))}_{\underset{x\to+\infty}{\mathbf{o}}(F(x))}$$

$$\Downarrow$$

$$F(x) = x^\alpha\cdot e^x + \underset{x\to+\infty}{\mathbf{o}}(F(x))$$

$$\Downarrow$$

$$F(x) = \int_1^x t^{\alpha}\cdot e^t \ \mathsf{d}\,t \underset{x\to+\infty}{\sim} x^\alpha\cdot e^x$$

$$\Downarrow$$

$$\int_1^x t^{\alpha}\cdot e^t \ \mathsf{d}\,t = x^\alpha\cdot e^x + \underset{x\to+\infty}{\mathbf{o}}(x^\alpha\cdot e^x) \qquad (8.1.28)$$

Это первое асимптотическое разложение. Из него можно выводить асимптотики более высокого порядка. Заменив в (8.1.28) α на $\alpha-1$, мы получим цепочку:

$$\int_1^x t^{\alpha-1}\cdot e^t \ \mathsf{d}\,t = x^{\alpha-1}\cdot e^x + \underset{x\to+\infty}{\mathbf{o}}\left(x^{\alpha-1}\cdot e^x\right) \qquad (8.1.29)$$

$$\Downarrow$$

$$\int_1^x t^{\alpha}\cdot e^t \ \mathsf{d}\,t = (8.1.27) =$$

$$= x^\alpha\cdot e^x - e - \alpha\cdot\int_1^x t^{\alpha-1}\cdot e^t \ \mathsf{d}\,t = (8.1.29) =$$

$$= x^\alpha\cdot e^x - e - \alpha\cdot\left(x^{\alpha-1}\cdot e^x + \underset{x\to+\infty}{\mathbf{o}}\left(x^{\alpha-1}\cdot e^x\right)\right) =$$

$$= x^\alpha\cdot e^x - \alpha\cdot x^{\alpha-1}\cdot e^x \underbrace{-e + \underset{x\to+\infty}{\mathbf{o}}\left(x^{\alpha-1}\cdot e^x\right)}_{\underset{x\to+\infty}{\mathbf{o}}(x^{\alpha-1}\cdot e^x)} =$$

$$= x^\alpha\cdot e^x - \alpha\cdot x^{\alpha-1}\cdot e^x + \underset{x\to+\infty}{\mathbf{o}}\left(x^{\alpha-1}\cdot e^x\right)$$

Получается разложение:

$$\int_1^x t^{\alpha}\cdot e^t \ \mathsf{d}\,t = x^\alpha\cdot e^x - \alpha\cdot x^{\alpha-1}\cdot e^x + \underset{x\to+\infty}{\mathbf{o}}\left(x^{\alpha-1}\cdot e^x\right) \qquad (8.1.30)$$

Здесь также можно заменить α на $\alpha-1$ и после этого подставить полученную формулу в (8.1.27) – тогда появится асимптотика более высокого порядка, и так далее. Понятно, что асимптотическая последовательность здесь берется такая:

$$x^\alpha\cdot e^x \underset{x\to+\infty}{\gg} x^{\alpha-1}\cdot e^x \underset{x\to+\infty}{\gg} x^{\alpha-2}\cdot e^x \underset{x\to+\infty}{\gg} ...$$

---

§ 2 Числовые ряды

Представим, что у нас есть числовая последовательность $\{a_n\}$ и нам захотелось сосчитать (бесконечную) сумму ее элементов:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + ...$$

В таких случаях говорят, что нужно вычислить сумму числового ряда. Интересное наблюдение, с которого начинается вся теория рядов, состоит в том, что иногда такая бесконечная сумма оказывается конечной величиной.

◇ **8.2.1.** Например, нетрудно убедиться (это следует из приводимой ниже формулы (8.2.33)), что

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n} = 1$$

Труднее доказать, что

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \qquad (8.2.31)$$

(мы это сделаем в замечании 11.2.15 на с.651). С другой стороны, сумма может оказаться и бесконечной, например,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} = \infty$$

(это будет доказано в примере 8.2.13).

Заинтриговав читателя этими заявлениями, мы можем перейти к точным формулировкам.

(a) Определение числового ряда

- Пусть задана числовая последовательность $\{a_n\}$ и из нее составлена новая последовательность $\{S_N\}$ по формуле

$$S_N = \sum_{n=1}^{N} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_N$$

Тогда такая пара последовательностей $\{a_n\}$ и $\{S_N\}$ называется *числовым рядом* и обозначается

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + ...$$

Числа a_n называются *слагаемыми* ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, а числа S_N – *частичными суммами* этого ряда.

- Если частичные суммы стремятся к некоторому конечному пределу

$$S_N \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} S, \qquad (S \in \mathbb{R})$$

то этот предел S называется *суммой ряда* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, а сам ряд называется *сходящимся* (или про него говорят, что он *сходится*). Коротко это записывают формулой

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$$

- Если же последовательность частичных сумм не имеет конечного предела

$$\nexists \lim_{N\to\infty} S_N \in \mathbb{R},$$

то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ называется *расходящимся* (или про него говорят, что он *расходится*).

◇ **8.2.2.** Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$$

Чтобы понять, сходится он или нет, заметим, что слагаемые можно разложить на простейшие дроби:

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

Теперь найдем частичные суммы:

$$S_N = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{N} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) =$$

сокращаются

$$= \underbrace{\frac{1}{1} - \frac{1}{2}}_{n=1} + \underbrace{\frac{1}{2} - \frac{1}{3}}_{n=2} + \underbrace{\frac{1}{3} - \frac{1}{4}}_{n=3} + ... + \underbrace{\frac{1}{N} - \frac{1}{N+1}}_{n=N} =$$

$$= 1 - \frac{1}{N+1} \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} 1 = S$$

Вывод: ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ сходится, и его сумма равна 1.

◇ **8.2.3.** Чтобы исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}$$

преобразуем его слагаемые:

$$\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}} = \left(\begin{smallmatrix}\text{умножаем на}\\ \text{сопряженный радикал}\end{smallmatrix}\right) =$$

$$= \frac{\sqrt{n}-\sqrt{n+1}}{(\sqrt{n}+\sqrt{n+1})(\sqrt{n}-\sqrt{n+1})} =$$

$$= \frac{\sqrt{n}-\sqrt{n+1}}{n-(n+1)} = \frac{\sqrt{n}-\sqrt{n+1}}{-1} =$$

$$= -\sqrt{n}+\sqrt{n+1}$$

Теперь найдем частичные суммы:

$$S_N = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}} =$$

$$= \sum_{n=1}^{N} \left(-\sqrt{n}+\sqrt{n+1}\right) =$$

$$= \underbrace{-\sqrt{1}+\sqrt{2}}_{n=1} \underbrace{-\sqrt{2}+\sqrt{3}}_{n=2} \underbrace{-\sqrt{3}+\sqrt{4}}_{n=3} + ...$$

$$... \underbrace{-\sqrt{N}+\sqrt{N+1}}_{n=N} = -1+\sqrt{N+1} \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$$

Вывод: ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}$ расходится.

◇ **8.2.4.** Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n$$

Найдем первые несколько частичных сумм:

$$S_1=\sum_{n=1}^{1}(-1)^n=(-1)^1=-1$$

$$S_2=\sum_{n=1}^{2}(-1)^n=(-1)^1+(-1)^2=-1+1=0$$

$$S_3=\sum_{n=1}^{3}(-1)^n=(-1)^1+(-1)^2+(-1)^3=$$
$$=-1+1-1=-1$$

Теперь видна закономерность:

$$S_N=\begin{cases}-1, & \text{если } N \text{ нечетное}\\ 0, & \text{если } N \text{ четное}\end{cases}$$

Ясно, что такая последовательность не имеет предела:

$$\nexists \lim_{N\to\infty} S_N$$

Вывод: ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n$ расходится.

Следующий пример особенно важен.

Теорема 8.2.1 (геометрическая прогрессия)**.**

$$\sum_{n=0}^{\infty}q^n \quad \leftarrow \quad \begin{cases}\textit{сходится,} & \textit{если } |q|<1\\ \textit{расходится,} & \textit{если } |q|\geqslant 1\end{cases}$$

причем

$$\sum_{n=0}^{\infty}q^n=\frac{1}{1-q},\quad |q|<1 \tag{8.2.32}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}q^n=\frac{q}{1-q},\quad |q|<1 \tag{8.2.33}$$

Доказательство. Здесь используется формула (2.2.246) суммы конечного числа членов геометрической прогрессии, которую мы доказали в главе 2:

$$S_N=\sum_{n=0}^{N}q^n=\frac{1-q^{N+1}}{1-q},\quad q\neq 1 \tag{8.2.34}$$

Рассмотрим три случая:

а) если $|q|<1$, то

$$S_N=\frac{1-\boxed{q^{N+1}}^{\nearrow 0}}{1-q}\underset{N\to\infty}{\longrightarrow}\frac{1}{1-q}$$

и, значит в этом случае ряд сходится, причем мы сразу получаем формулу (8.2.32), из которой в свою очередь тут же следует формула (8.2.33):

$$\sum_{n=1}^{\infty}q^n=q\cdot\sum_{n=1}^{\infty}q^{n-1}=q\cdot\underbrace{\sum_{k=0}^{\infty}q^k}_{\frac{1}{1-q}}=\frac{q}{1-q}$$

б) если $|q|>1$, то

$$S_N=\frac{1-\boxed{q^{N+1}}^{\nearrow \infty}}{1-q}\underset{N\to\infty}{\longrightarrow}\infty$$

и, значит в этом случае ряд расходится.

в) если $|q|=1$, то это означает, что $q=1$ или $q=-1$, и тогда

— при $q=1$ получается

$$S_N=\sum_{n=0}^{N}1=\boxed{N}^{\nearrow\infty}+1\underset{N\to\infty}{\longrightarrow}\infty;$$

— а если $q=1$, то этот случай мы уже рассмотрели в примере 8.2.4, и показали, что получающийся ряд $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n$ расходится.

□

▷▷ **8.2.5.** Исследуйте на сходимость ряды:

1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2-1}$;
2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$;
3) $\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n}-2\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2})$.

(b) Арифметические свойства числовых рядов

1^0. *Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ сходится, то для всякого числа $\lambda\in\mathbb{R}$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\lambda\cdot a_n$ тоже сходится, причем*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\lambda\cdot a_n=\lambda\cdot\sum_{n=1}^{\infty}a_n \tag{8.2.35}$$

2^0. *Если ряды* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *и* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *сходятся, то ряд* $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)$ *тоже сходится, причем*

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \tag{8.2.36}$$

Доказательство. 1. Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, то это означает, что его частичные суммы $S_N = \sum_{n=1}^{N} a_n$ стремятся к какому-то числу S:

$$\sum_{n=1}^{N} a_n = S_N \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} S$$

Поэтому для всякого $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\sum_{n=1}^{N} \lambda a_n = \lambda \sum_{n=1}^{N} a_n = \lambda S_N \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} \lambda S$$

Это означает, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda a_n$ сходится, и его сумма равна $\lambda S = \lambda \sum_{n=1}^{\infty} a_n$, то есть справедлива формула (8.2.35).

2. Пусть ряды $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сходятся. Это означает, что если обозначить через A_N и B_N их частичные суммы, то они стремятся к каким-то числам A и B:

$$\sum_{n=1}^{N} a_n = A_N \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} A, \quad \sum_{n=1}^{N} b_n = B_N \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} B$$

Поэтому

$$\sum_{n=1}^{N}(a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{N} a_n + \sum_{n=1}^{N} b_n = A_N + B_N \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} A + B$$

Это означает, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)$ сходится, и его сумма равна $A + B = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n$, то есть справедлива формула (8.2.36). □

◇ **8.2.6.**

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{2^n} = \frac{5}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}} = \begin{pmatrix} \text{делаем замену} \\ n-1=k \\ \text{тогда } k=0,1,2,\dots \end{pmatrix} = \frac{5}{2}\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2^k} = \frac{5}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 5$$

◇ **8.2.7.**

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + 3^n}{5^n} = \sum_{n=1}^{\infty}\left\{\left(\frac{2}{5}\right)^n + \left(\frac{3}{5}\right)^n\right\} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{5}\right)^n + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{5}\right)^n = (8.2.33) = \frac{1}{1-\frac{2}{5}} + \frac{1}{1-\frac{3}{5}} = \frac{5}{3} + \frac{5}{2} = \frac{25}{6}$$

(c) Признаки сходимости рядов

Как правило, сумму ряда точно вычислить невозможно, даже если известно, что ряд сходится. Например, формула, упомянутая нами в начале этого параграфа

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6},$$

является результатом случайного наблюдения, а не какого-то найденного математиками способа вычисления сумм, с помощью которого ее и другие подобные формулы можно было бы выводить. Из-за этого в теории рядов становится важно просто понять, сходится данный ряд или нет, не вычисляя его суммы.

Правила, объясняющие, когда данный ряд сходится, а когда нет, называются *признаками сходимости*. В этом параграфе мы приведем некоторые признаки сходимости рядов. Мы начнем со знакопостоянных рядов.

Общие признаки сходимости рядов

Необходимое условие сходимости.

Теорема 8.2.2. *Если ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходится, то* $a_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

Теорема 8.2.3 (эквивалентная формулировка)**.** *Если* $a_n \underset{n\to\infty}{\not\longrightarrow} 0$*, то ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *расходится.*

Доказательство. Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, то для последовательностей $k_i = i-1$ и $l_i = 1$, по критерию Коши (теорема 8.2.4), мы получим

$$\sum_{n=k_i-1+1}^{k_i-1+1} a_n = a_{k_i-1+1} = a_{k_i} = a_i \underset{i\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

□

◇ **8.2.8.** Чтобы исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}}$$

достаточно вычислить предел

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = \lim_{n\to\infty} n^{-\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} e^{\ln\left(n^{-\frac{1}{n}}\right)} =$$
$$= \lim_{n\to\infty} e^{-\frac{\ln n}{n}} = e^0 = 1 \neq 0$$

Вывод: ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}}$ расходится.

◇ **8.2.9.** Чтобы исследовать ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n+\frac{1}{n}}}{(n+1)^n}$$

вычисляем предел

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^{n+\frac{1}{n}}}{(n+1)^n} = \left(\begin{matrix}\text{делим числитель}\\ \text{и знаменатель на } n^n\end{matrix}\right) =$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n^{\frac{1}{n}}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{e} \neq 0$$

Вывод: ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n+\frac{1}{n}}}{(n+1)^n}$ расходится.

◇ **8.2.10.** Чтобы исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot n \cdot \sin\frac{1}{n}$$

достаточно вычислить предел

$$\lim_{n\to\infty} |a_n| = \lim_{n\to\infty} n \cdot \sin\frac{1}{n} = \lim_{n\to\infty} n \cdot \frac{1}{n} = 1 \neq 0$$

То есть $|a_n| \underset{n\to\infty}{\not\longrightarrow} 0$, откуда $a_n \underset{n\to\infty}{\not\longrightarrow} 0$.

Вывод: ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot n \cdot \sin\frac{1}{n}$ расходится.

▷▷ **8.2.11.** Исследуйте на сходимость ряды:

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[n]{n}}$;
2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{\ln n}}$;
3) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot n^2 \cdot \left(1-\cos\frac{1}{n}\right)$.

Критерий Коши сходимости ряда.

Теорема 8.2.4 (критерий Коши сходимости ряда)**.** *Пусть* $\{a_n\}$ *– произвольная числовая последовательность. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(i) *ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

сходится;

(ii) *для любой последовательности* $l_i \in \mathbb{N}$*, и любой бесконечно большой последовательности* $k_i \in \mathbb{N}$

$$k_i \underset{i\to\infty}{\longrightarrow} \infty,$$

сумма $\sum_{n=k_i+1}^{k_i+l_i} a_n$ *стремится к нулю при* $i \to \infty$*:*

$$\sum_{n=k_i+1}^{k_i+l_i} a_n \underset{i\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

Доказательство. Рассмотрим частичные суммы ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$:

$$S_N = \sum_{n=1}^{N} a_n$$

Мы получаем следующую логическую цепочку:

$$\text{ряд } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ сходится}$$

$$\Updownarrow$$

$$\text{последовательность } S_N \text{ сходится}$$

$$\Updownarrow \qquad \left(\begin{matrix}\text{вспоминаем критерий Коши сходимости}\\ \text{последовательности – теорему 3.2.15}\end{matrix}\right)$$

$$\begin{gathered}\text{для любой последовательности } l_i \in \mathbb{N},\\ \text{и любой бесконечно большой последовательности } k_i \in \mathbb{N} \quad k_i \underset{i\to\infty}{\longrightarrow} \infty,\\ \text{выполняется соотношение:} \quad S_{k_i+l_i} - S_{k_i} \underset{i\to\infty}{\longrightarrow} 0\end{gathered}$$

$$\Updownarrow \qquad \left(\begin{matrix}\text{замечаем, что}\\ S_{k_i+l_i} - S_{k_i} = \sum_{n=k_i+1}^{k_i+l_i} a_n\end{matrix}\right)$$

$$\begin{gathered}\text{для любой последовательности } l_i \in \mathbb{N},\\ \text{и любой бесконечно большой последовательности } k_i \in \mathbb{N} \quad k_i \underset{i\to\infty}{\longrightarrow} \infty,\\ \text{выполняется соотношение:} \quad \sum_{n=k_i+1}^{k_i+l_i} a_n \underset{i\to\infty}{\longrightarrow} 0\end{gathered}$$

□

Сходимость знакопостоянных рядов

- Числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ называется
  - *знакопостоянным*, если его члены a_n не меняют знак:
  $$\Big(\forall n \in \mathbb{N} \quad a_n \geqslant 0\Big) \quad \text{или} \quad \Big(\forall n \in \mathbb{N} \quad a_n \leqslant 0\Big)$$
  - *знакоположительным*, если его члены a_n неотрицательны:
  $$\forall n \in \mathbb{N} \qquad a_n \geqslant 0$$

Как и в случае с несобственными интегралами, исследование на сходимость знакопостоянных рядов сводится к исследованию знакоположительных: если $a_n \leqslant 0$, то можно взять последовательность $b_n = -a_n \geqslant 0$, и окажется, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=1}^{N} a_n = -\lim_{N\to+\infty} \sum_{n=1}^{N} b_n = -\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

откуда и будет следовать, что ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

сходится тогда и только тогда, когда сходится ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

Критерий сходимости знакоположительного ряда.

Теорема 8.2.5. *Пусть последовательность a_n неотрицательна*

$$a_n \geqslant 0, \qquad n \in \mathbb{N}$$

Тогда сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ эквивалентна ограниченности его частичных сумм $\sum_{n=1}^{N} a_n$, $N \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \textit{сходится} \quad \Longleftrightarrow \quad \sup_{N\in\mathbb{N}} \sum_{n=1}^{N} a_n < \infty$$

! 8.2.12. Условие справа (то есть утверждение, что частичные суммы $\sum_{n=1}^{N} a_n$, $N \in \mathbb{N}$ ограничены) принято записывать неравенством

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$$

и, в силу теоремы 8.2.5, такая запись считается эквивалентной утверждению, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится (при неотрицательных a_n).

Доказательство. Поскольку $a_n \geqslant 0$, частичные суммы

$$S_N = \sum_{n=1}^{N} a_n$$

образуют монотонно неубывающую последовательность. Поэтому справедлива цепочка

$$\text{ряд} \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{сходится}$$

$$\Updownarrow$$

$$S_N \text{ имеет конечный предел } \lim_{N\to\infty} S_N \in \mathbb{R}$$

$$\Updownarrow \quad {\scriptstyle S_N \text{ – монотонно неубывает}}$$

$$S_N \text{ – ограничена сверху: } \sup_{N\in\mathbb{N}} \sum_{n=1}^{N} a_n = \sup_{N\in\mathbb{N}} S_N < \infty.$$

$\square$

Интегральный признак Коши и постоянная Эйлера.

Теорема 8.2.6 (интегральный признак Коши)**.** *Пусть f – неотрицательная и монотонная функция на полуинтервале $[1; +\infty)$. Тогда существует такое число $C \in \mathbb{R}$, что*

$$\sum_{n=1}^{N} f(n) - \int_1^N f(x) \, \mathsf{d}\, x \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} C \tag{8.2.37}$$

- Число C в этой формуле называется *постоянной Эйлера* ряда $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$.

Как следствие,

$$\textit{ряд} \quad \sum_{n=1}^{\infty} f(n) \quad \textit{сходится} \quad \Longleftrightarrow \quad \textit{интеграл} \quad \int_1^{\infty} f(x) \, \mathsf{d}\, x \quad \textit{сходится}$$

- Такую связь между рядом и несобственным интегралом (когда сходимость одного эквивалентна сходимости другого) коротко записывают формулой

  $$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) \sim \int_1^{\infty} f(x) \, \mathsf{d}\, x.$$

  и говорят при этом, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ *эквивалентен* интегралу $\int_1^{\infty} f(x) \, \mathsf{d}\, x$.

Доказательство. Заметим с самого начала, что нам достаточно рассмотреть случай ненулевой невозрастающей функции f, потому что

— если f нулевая, то и ряд
$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n),$$
и интеграл
$$\int_1^{\infty} f(x)\, \mathsf{d}\, x$$
оба сходятся,

— если же f ненулевая и неубывает,
$$x \leqslant y \quad \Rightarrow \quad f(x) \leqslant f(y),$$
то ни ряд
$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n),$$
ни интеграл
$$\int_1^{\infty} f(x)\, \mathsf{d}\, x$$
сходиться не могут (первый по необходимому признаку сходимости 8.2.3, а второй по критерию Коши сходимости несобственного интеграла 8.1.7)

1. Итак далее мы считаем, что функция f ненулевая и невозрастает. Рассмотрим сначала вспомогательную последовательность
$$F_N = \sum_{n=1}^{N} f(n) - \int_1^{N+1} f(x)\ \mathsf{d}\, x$$
и покажем, что она сходится. Для этого нужно просто заметить, что она ограничена и монотонна. Действительно, во-первых,
$$\overbrace{f(n) \geqslant f(x) \geqslant f(n+1)}^{\forall x\in[n,n+1]}$$
$$\Downarrow$$
$$f(n) \geqslant \int_n^{n+1} f(x)\ \mathsf{d}\, x \geqslant f(n+1) \tag{8.2.38}$$
$$\Downarrow$$
$$-f(n) \leqslant -\int_n^{n+1} f(x)\ \mathsf{d}\, x \leqslant -f(n+1)$$
$$\Downarrow$$
$$0 \leqslant f(n) - \int_n^{n+1} f(x)\ \mathsf{d}\, x \leqslant f(n) - f(n+1) \tag{8.2.39}$$
$$\Downarrow$$
$$0 \leqslant \overbrace{\sum_{n=1}^{N}\Big(f(n) - \int_n^{n+1} f(x)\ \mathsf{d}\, x\Big)}^{\substack{F_N \\ \| \\ \sum_{n=1}^{N} f(n) - \int_1^{N+1} f(x)\ \mathsf{d}\, x \\ \| \\ \sum_{n=1}^{N} f(n) - \sum_{n=1}^{N}\int_n^{n+1} f(x)\ \mathsf{d}\, x \\ \|}} \leqslant \sum_{n=1}^{N}\Big(f(n) - f(n+1)\Big) =$$

$$= \underbrace{f(1) - \overbrace{f(2)}}_{n=1} + \underbrace{\overbrace{f(2)} - \overbrace{f(3)}}_{n=2} + \ldots + \underbrace{\overbrace{f(N)} - f(N+1)}_{n=N} = f(1) - \underbrace{f(N+1)}_{\substack{\vee\!\!/ \\ 0}} \leqslant f(1)$$

$$\Downarrow$$

$$0 \leqslant F_N \leqslant f(1)$$

И, во-вторых,

$$F_{N+1} - F_N = \left(\sum_{n=1}^{N+1} f(n) - \int_1^{N+2} f(x) \ \mathsf{d}\, x\right) - \left(\sum_{n=1}^{N} f(n) - \int_1^{N+1} f(x) \ \mathsf{d}\, x\right) =$$

$$= \left(\sum_{n=1}^{N+1} f(n) - \sum_{n=1}^{N} f(n)\right) - \left(\int_1^{N+2} f(x) \ \mathsf{d}\, x - \int_1^{N+1} f(x) \ \mathsf{d}\, x\right) = f(N+1) - \int_N^{N+1} f(x) \ \mathsf{d}\, x \overset{(8.2.39)}{\geqslant} 0$$

$$\Downarrow$$

$$F_{N+1} \geqslant F_N$$

Итак, F_N монотонна и ограничена, и значит, имеет предел:

$$F_N \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} A$$

2. Заметим далее, что последовательность $f(n)$ тоже монотонна и ограничена, и значит тоже имеет предел:

$$f(n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} B$$

Отсюда, в силу (8.2.38), следует, что

$$\int_n^{n+1} f(x) \ \mathsf{d}\, x \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} B$$

(потому что $\int_n^{n+1} f(x) \ \mathsf{d}\, x$ заключена между двумя милиционерами, стремящимися к B). Теперь получаем:

$$\sum_{n=1}^{N} f(n) - \int_1^{N} f(x) \ \mathsf{d}\, x = \underbrace{\sum_{n=1}^{N} f(n) - \int_1^{N+1} f(x) \ \mathsf{d}\, x}_{\substack{\parallel \\ F_N \\ \downarrow \\ A}} + \underbrace{\int_N^{N+1} f(x) \ \mathsf{d}\, x}_{\substack{\downarrow \\ B}} \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} A + B = C$$

Это доказывает (8.2.37).

3. Из (8.2.37) следует, что если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ сходится, то есть $\sum_{n=1}^{N} f(n) \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} S \in \mathbb{R}$, то

$$\int_1^{N} f(x) \ \mathsf{d}\, x = \underbrace{\sum_{n=1}^{N} f(n)}_{\substack{\downarrow \\ S}} - \underbrace{\left(\sum_{n=1}^{N} f(n) - \int_1^{N} f(x) \ \mathsf{d}\, x\right)}_{\substack{\downarrow \\ C}} \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} S - C$$

Отсюда следует, что

$$\int_1^{y} f(x) \ \mathsf{d}\, x \underset{y\to\infty}{\longrightarrow} S - C$$

поскольку функция $F(y) = \int_1^{y} f(x) \ \mathsf{d}\, x$ монотонна (из-за неотрицательности f). То есть, интеграл $\int_1^{\infty} f(x) \ \mathsf{d}\, x$ сходится.

4. Наоборот, если интеграл $\int_1^{\infty} f(x) \ \mathsf{d}\, x$ сходится, то есть $\int_1^{y} f(x) \ \mathsf{d}\, x \underset{y\to\infty}{\longrightarrow} I \in \mathbb{R}$, то

$$\int_1^{N} f(x) \ \mathsf{d}\, x \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} I$$

и поэтому

$$\sum_{n=1}^{N} f(n) = \underbrace{\left(\sum_{n=1}^{N} f(n) - \int_1^N f(x)\,\mathsf{d}\,x\right)}_{\substack{\downarrow\\ C}} + \underbrace{\int_1^N f(x)\,\mathsf{d}\,x}_{\substack{\downarrow\\ I}} \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} C - I$$

То есть, ряд $\sum_{n=1}^{N} f(n)$ сходится. □

◇ **8.2.13. Гармонический ряд.** Числовой ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

называется *гармоническим.* Он расходится, потому что эквивалентен расходящемуся интегралу:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sim \int_1^{\infty} \frac{1}{x}\,\mathsf{d}\,x = \ln x\Big|_1^{\infty} = \infty$$

Несмотря на то, что суммы у этого ряда нет, у него есть постоянная Эйлера:

$$C = \lim_{N\to\infty}\left(\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} - \underbrace{\ln N}_{\substack{\parallel\\ \int_1^N \frac{1}{x}\,\mathsf{d}\,x}}\right) \qquad (8.2.40)$$

Это число привлекает внимание специалистов по теории чисел тем, что за прошедшие с его открытия два с половиной века до сих пор так и не удалось понять, будет ли оно рациональным.

◇ **8.2.14. Ряд Дирихле.** Покажем, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} \quad \leftarrow \begin{cases} \text{сходится,} & \text{если } \alpha > 1 \\ \text{расходится,} & \text{если } \alpha \leqslant 1 \end{cases} \qquad (8.2.41)$$

Этот ряд называется *рядом Дирихле.* При $\alpha > 0$ к нему применима теорема 8.2.6, и в этом случае ему соответствуют постоянные Эйлера

$$C_{\alpha} = \lim_{N\to\infty}\left(\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^{\alpha}} - \underbrace{\frac{N^{1-\alpha}-1}{1-\alpha}}_{\substack{\parallel\\ \int_1^N \frac{1}{x^{\alpha}}\,\mathsf{d}\,x}}\right) \qquad (8.2.42)$$

Доказательство. Если $\alpha \leqslant 0$, то общий член этого ряда не меньше единицы

$$\frac{1}{n^{\alpha}} \geqslant 1,$$

и тогда

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^{\alpha}} \geqslant \sum_{n=1}^{N} 1 = N \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} \infty,$$

и значит, ряд расходится. Если же $\alpha > 0$, то можно применить теорему 8.2.6, и мы получим:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} \sim \underbrace{\int_1^{\infty} \frac{1}{x^{\alpha}}\,\mathsf{d}\,x}_{\substack{\text{сходится}\\ \text{только при } \alpha > 1,\\ \text{по теореме 8.1.2}}} .$$

□

◇ **8.2.15.**

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\ln n} \sim \int_2^{\infty} \frac{1}{x\ln x}\,\mathsf{d}\,x = \int_2^{\infty} \frac{1}{\ln x}\,\mathsf{d}\ln x = \ln\ln x\Big|_2^{\infty} = \infty$$

Вывод: ряд $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\ln n}$ расходится.

◇ **8.2.16.**

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\ln^2 n} \sim \int_2^{\infty} \frac{1}{x\ln^2 x}\,\mathsf{d}\,x = \int_2^{\infty} \frac{1}{\ln^2 x}\,\mathsf{d}\ln x = -\frac{1}{\ln x}\Big|_2^{\infty} = \frac{1}{\ln 2}$$

Вывод: ряд $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\ln^2 n}$ сходится.

▷▷ **8.2.17.** Исследуйте на сходимость ряды:

1) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\ln^{\alpha} n}$
2) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\ln n\ln^{\alpha}\ln n}$
3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}$

Признак сравнения рядов.

Теорема 8.2.7 (признак сравнения рядов)**.** *Пусть* $0 \leqslant a_n \leqslant b_n$. *Соответствующая зависимость между рядами коротко записывается следующим образом:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} b_n \qquad (8.2.43)$$

Тогда

1) *из сходимости большего ряда* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *следует сходимость меньшего ряда* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$*:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \textit{сходится} \quad \Longleftarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n \quad \textit{сходится}$$

2) *из расходимости меньшего ряда* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *следует расходимость большего ряда* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$*:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \textit{расходится} \quad \Longrightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n \quad \textit{расходится}$$

Доказательство. Обозначим через A_N и B_N частичные суммы рядов $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$:

$$A_N = \sum_{n=1}^{N} a_n, \qquad B_N = \sum_{n=1}^{N} b_n$$

Тогда

$$\begin{array}{ccccccccccc} B_1 & \leqslant & B_2 & \leqslant & B_3 & \leqslant & ... & \leqslant & B_N & \leqslant & ... \\ \rotatebox{90}{$\leqslant$} & & \rotatebox{90}{$\leqslant$} & & \rotatebox{90}{$\leqslant$} & & & & \rotatebox{90}{$\leqslant$} & & \\ A_1 & \leqslant & A_2 & \leqslant & A_3 & \leqslant & ... & \leqslant & A_N & \leqslant & ... \end{array}$$

1. Теперь возникает логическая цепочка:

$$\text{ряд } \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ сходится}$$

$$\Downarrow \quad \text{\small теорема 8.2.5}$$

$$\text{последовательность } B_N \text{ ограничена} : B_1 \leqslant B_2 \leqslant B_3 \leqslant ... \leqslant B_N \leqslant ... \leqslant B$$

$$\Downarrow$$

$$\text{последовательность } A_N \text{ ограничена} : A_1 \leqslant A_2 \leqslant A_3 \leqslant ... \leqslant A_N \leqslant ... \leqslant B$$

$$\Downarrow \quad \text{\small теорема 8.2.5}$$

$$\text{ряд } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ сходится}$$

2. Мы доказали, что если $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится, то $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ тоже сходится. То есть,

$$\textit{невозможна ситуация, когда } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \textit{ расходится. а } \sum_{n=1}^{\infty} b_n \textit{ сходится}$$

Поэтому если $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится, то $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ тоже должен расходиться. □

◇ **8.2.18.**

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^2 n}{2^n} \leqslant \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}}_{\substack{\text{сходится,} \\ \text{как сумма геометрической прогрессии} \\ \text{со знаменателем } |q|<1}}$$

Больший ряд сходится, значит и меньший ряд сходится.

Вывод: ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^2 n}{2^n}$ сходится.

◇ **8.2.19.**

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2+\cos n}{n} \geqslant \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}}_{\substack{\text{расходится,} \\ \text{в силу примера 8.2.13}}}$$

Меньший ряд расходится, значит и больший ряд расходится.

Вывод: ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2+\cos n}{n}$ расходится.

◇ **8.2.20.**

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2+\cos n}{n^2}\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{n^2}=3\cdot\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}}_{\substack{\text{сходится,}\\ \text{в силу примера 8.2.14}}}$$

Вывод: ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2+\cos n}{n^2}$ сходится.

◇ **8.2.21.**

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}\cdot\operatorname{arctg}(3+\sin n)}\geqslant\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}\cdot\operatorname{arctg}4}=$$

$$=\frac{1}{\operatorname{arctg}4}\cdot\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}}_{\substack{\text{расходится,}\\ \text{в силу примера 8.2.14}}}$$

Вывод: ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}\cdot\operatorname{arctg}(3+\sin n)}$ расходится.

▷▷ **8.2.22.** Исследуйте на сходимость ряды:

1) $\sum_{n=1}^{\infty}e^{-n^2}$;
2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{\sqrt[3]{n^2}}$;
3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n\cdot 3^n}$;
4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4+\cos n}{n^{\alpha}}$;
5) $\sum_{n=1}^{\infty}(2+\sin n)\cdot n^{\alpha}$.

Признак Даламбера.

Теорема 8.2.8 (признак Даламбера). *Пусть* $a_n>0$, *и*

$$D=\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}\tag{8.2.44}$$

Тогда

— *если* $D<1$, *то ряд* $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ *сходится;*
— *если* $D>1$, *то ряд* $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ *расходится.*

- Число D, определяемое формулой (8.2.44), называется *числом Даламбера* ряда $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$.

Для доказательства нам понадобится следующая

Лемма 8.2.9 (лемма об остатке). *Пусть* $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ *– числовой ряд, и* $M\in\mathbb{N}$ *– произвольное число. Тогда*

$$\text{ряд}\sum_{n=1}^{\infty}a_n\ \text{сходится}\quad\Longleftrightarrow\quad\text{сходится ряд}\sum_{n=M}^{\infty}a_n\left(\text{называемый остатком ряда}\sum_{n=1}^{\infty}a_n\right)$$

Доказательство. Обозначим через S_N и R_N частичные суммы самого ряда и его остатка:

$$S_N=\sum_{n=1}^{N}a_n,\qquad R_N=\sum_{n=M}^{N}a_n$$

Очевидно, при $N\geqslant M$

$$S_N=\sum_{n=1}^{N}a_n=\sum_{n=1}^{M-1}a_n+\sum_{n=M}^{N}a_n=C+R_N,$$

где $C=\sum_{n=1}^{M-1}a_n$ – константа, не зависящая от N. Теперь получаем следующую логическую цепочку:

$$\text{ряд}\sum_{n=1}^{\infty}a_n\ \text{сходится}$$

$$\Updownarrow$$

$$\text{существует конечный предел}\ \lim_{N\to\infty}S_N$$

$$\Updownarrow$$

$$\text{существует конечный предел}\ \lim_{N\to\infty}R_N$$

$$\Updownarrow$$

$$\text{остаток}\sum_{n=M}^{\infty}a_n\ \text{сходится}$$

□

Доказательство теоремы 8.2.8. 1. Предположим, что

$$D = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1 \tag{8.2.45}$$

Возьмем какое-нибудь число $\varepsilon > 0$ так чтобы $D+\varepsilon < 1$. Из (8.2.45) следует, что ε-окрестность числа D содержит почти все числа $\frac{a_{n+1}}{a_n}$, то есть

$$\exists M \quad \forall n \geqslant M \quad D - \varepsilon < \frac{a_{n+1}}{a_n} < D + \varepsilon$$

Если обозначить $q = D + \varepsilon$, то мы получим что $q < 1$ и

$$\forall n \geqslant M \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} < q$$

то есть

$$\forall n \geqslant M \quad a_{n+1} < q \cdot a_n$$

В частности,

$$a_{M+1} < q \cdot a_M$$
$$a_{M+2} < q \cdot a_{M+1} < q \cdot (q \cdot a_M) = q^2 \cdot a_M$$
$$a_{M+3} < q \cdot a_{M+2} < q \cdot (q^2 \cdot a_M) = q^3 \cdot a_M$$
$$...$$
$$a_{M+k} < q \cdot a_{M+k-1} < ... < q^k \cdot a_M$$

Отсюда

$$\sum_{n=M}^{\infty} a_n = \sum_{k=0}^{\infty} a_{M+k} < \sum_{k=0}^{\infty} \left(q^k \cdot a_M\right) = a_M \cdot \sum_{k=0}^{\infty} q^k$$

Последний ряд сходится как геометрическая прогрессия со знаменателем $q < 1$. Значит, по признаку сравнения, меньший ряд $\sum_{n=M}^{\infty} a_n$ тоже сходится. Отсюда по лемме об остатке 8.2.9, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится.

2. Предположим, что наоборот,

$$D = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1 \tag{8.2.46}$$

Возьмем какое-нибудь число $\varepsilon > 0$ так чтобы $D-\varepsilon > 1$. Из (8.2.46) следует, что ε-окрестность числа D содержит почти все числа $\frac{a_{n+1}}{a_n}$, то есть

$$\exists M \quad \forall n \geqslant M \quad D - \varepsilon < \frac{a_{n+1}}{a_n} < D + \varepsilon$$

Если обозначить $q = D - \varepsilon$, то мы получим что $q > 1$ и

$$\forall n \geqslant M \quad q < \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

то есть

$$\forall n \geqslant M \quad a_{n+1} > q \cdot a_n$$

В частности,

$$a_{M+1} > q \cdot a_M$$
$$a_{M+2} > q \cdot a_{M+1} > q \cdot (q \cdot a_M) = q^2 \cdot a_M$$
$$a_{M+3} > q \cdot a_{M+2} > q \cdot (q^2 \cdot a_M) = q^3 \cdot a_M$$
$$...$$
$$a_{M+k} > q \cdot a_{M+k-1} > ... > q^k \cdot a_M$$

Отсюда

$$\sum_{n=M}^{\infty} a_n = \sum_{k=0}^{\infty} a_{M+k} > \sum_{k=0}^{\infty} \left(q^k \cdot a_M\right) = a_M \cdot \sum_{k=0}^{\infty} q^k$$

Последний ряд расходится как геометрическая прогрессия со знаменателем $q > 1$. Значит, по признаку сравнения, больший ряд $\sum_{n=M}^{\infty} a_n$ тоже расходится. Отсюда по лемме об остатке 8.2.9, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится. □

◇ **8.2.23.** Чтобы исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cdot 2^n}{3^n}$$

найдем его число Даламбера:

$$D = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+1)\cdot 2^{n+1}}{3^{n+1}}}{\frac{n\cdot 2^n}{3^n}} = \\ = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)\cdot 2^{n+1}\cdot 3^n}{n\cdot 2^n \cdot 3^{n+1}} = \\ = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)\cdot 2}{n\cdot 3} = \frac{2}{3} < 1$$

Вывод: ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\cdot 2^n}{3^n}$ сходится.

◇ **8.2.24.** Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$$

Его число Даламбера:

$$D = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{n^n}{n!}} = \\ = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^{n+1}\cdot n!}{n^n\cdot (n+1)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^{n+1}\cdot n!}{n^n \cdot (n+1)\cdot n!} = \\ = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^n}{n^n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \\ = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e > 1$$

Вывод: ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$ расходится.

▷▷ **8.2.25.** Исследуйте на сходимость ряды:

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$;
2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n}{n!}$;
3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$;
4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n\cdot n!}{n^n}$;
5) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n\cdot n!}{n^n}$;
6) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{2^{n^2}}$;
7) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^5}{2^n+3^n}$.

Радикальный признак Коши.

Теорема 8.2.10 (радикальный признак Коши)**.** *Пусть* $a_n \geqslant 0$, *и*

$$C = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \tag{8.2.47}$$

Тогда

— *если* $C < 1$, *то ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходится;*
— *если* $C > 1$, *то ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *расходится.*

- Число C, определяемое формулой (8.2.47), называется *числом Коши* ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Доказательство. 1. Предположим, что

$$C = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} < 1 \tag{8.2.48}$$

Возьмем какое-нибудь число $\varepsilon > 0$ так чтобы $C+\varepsilon < 1$. Из (8.2.48) следует, что ε-окрестность числа C содержит почти все числа $\sqrt[n]{a_n}$, то есть

$$\exists M \quad \forall n \geqslant M \quad C-\varepsilon < \sqrt[n]{a_n} < C+\varepsilon$$

Если обозначить $q = C+\varepsilon$, то мы получим что $q < 1$ и

$$\forall n \geqslant M \quad \sqrt[n]{a_n} < q$$

то есть

$$\forall n \geqslant M \quad a_n < q^n$$

Отсюда

$$\sum_{n=M}^{\infty} a_n < \sum_{n=M}^{\infty} q^n$$

Последний ряд сходится как геометрическая прогрессия со знаменателем $q < 1$. Значит, по признаку сравнения, меньший ряд $\sum_{n=M}^{\infty} a_n$ тоже сходится. Отсюда по лемме об остатке 8.2.9, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится.

2. Предположим, что наоборот

$$C = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} > 1 \tag{8.2.49}$$

Возьмем какое-нибудь число $\varepsilon > 0$ так чтобы $C-\varepsilon > 1$. Из (8.2.49) следует, что ε-окрестность числа C содержит почти все числа $\sqrt[n]{a_n}$, то есть

$$\exists M \quad \forall n \geqslant M \quad C-\varepsilon < \sqrt[n]{a_n} < C+\varepsilon$$

Если обозначить $q = C-\varepsilon$, то мы получим что $q > 1$ и

$$\forall n \geqslant M \quad \sqrt[n]{a_n} > q$$

то есть

$$\forall n \geqslant M \quad a_n > q^n$$

Отсюда

$$\sum_{n=M}^{\infty} a_n > \sum_{n=M}^{\infty} q^n$$

Последний ряд расходится как геометрическая прогрессия со знаменателем $q > 1$. Значит, по признаку сравнения, меньший ряд $\sum_{n=M}^{\infty} a_n$ тоже расходится. Отсюда по лемме об остатке 8.2.9, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится. □

◇ **8.2.26.** Чтобы исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-1}{2n+1}\right)^n$$

найдем его число Коши:

$$C = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n-1}{2n+1} = \frac{1}{2} < 1$$

Вывод: ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-1}{2n+1}\right)^n$ сходится.

◇ **8.2.27.** Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}$$

Его число Коши:

$$C = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e > 1$$

Вывод: ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}$ расходится.

▷▷ **8.2.28.** Исследуйте на сходимость ряды:

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \cdot \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}$;
2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} \cdot \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}$;
3) $\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \left(\arcsin\frac{1}{n}\right)^n$;
4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n+\frac{1}{n}}}{(n+1)^n}$ (здесь признак Коши не дает результатов);
5) $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n+\sin n}$;
6) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2+(-1)^n}{2^n}$ (этот ряд исследуется по признаку Коши, но не по признаку Даламбера).

Признак абсолютной сходимости. Следующая теорема позволяет свести в некоторых случаях исследование на сходимость произвольного ряда к исследованию на сходимость знакоположительного.

Теорема 8.2.11. *Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ сходится, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ тоже сходится.*

Доказательство.

$$\text{ряд } \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \text{ сходится}$$

$$\Downarrow \quad \left(\begin{smallmatrix}\text{применяем критерий Коши}\\ \text{сходимости ряда – теорему 8.2.4}\end{smallmatrix}\right)$$

$$\forall\, l_i, k_i \in \mathbb{N} \quad \left(k_i \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty\right) \quad \sum_{n=k_i+1}^{k_i+l_i} |a_n| \underset{i\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

$$\Downarrow$$

$$\left(0 \leqslant \left|\sum_{n=k_i+1}^{k_i+l_i} a_n\right| \leqslant \sum_{n=k_i+1}^{k_i+l_i} |a_n| \underset{i\to\infty}{\longrightarrow} 0 \quad \Rightarrow \quad \left|\sum_{n=k_i+1}^{k_i+l_i} a_n\right| \underset{i\to\infty}{\longrightarrow} 0 \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=k_i+1}^{k_i+l_i} a_n \underset{i\to\infty}{\longrightarrow} 0\right)$$

$$\Downarrow$$

$$\forall\, l_i, k_i \in \mathbb{N} \quad \Big(k_i \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty\Big) \quad \sum_{n=k_i+1}^{k_i+l_i} a_n \underset{i\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

$$\Downarrow \quad \left(\begin{matrix}\text{снова применяем критерий Коши}\\ \text{сходимости ряда}\end{matrix}\right)$$

$$\text{ряд } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ сходится}$$

$\square$

◇ **8.2.29.** Чтобы исследовать ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n\sqrt{n}}$$

рассмотрим соответствующий ряд из модулей:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^n}{n\sqrt{n}} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}} = \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}}_{\substack{\text{сходится как ряд Дирихле} \\ \text{с показателем степени } \alpha > 1}}$$

Вывод: ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n\sqrt{n}}$ сходится.

◇ **8.2.30.** Чтобы исследовать ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{2^n}$$

рассмотрим соответствующий ряд из модулей:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{\sin n}{2^n} \right| \leqslant \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}}_{\substack{\text{сходится,} \\ \text{как сумма геометрической прогрессии} \\ \text{со знаменателем } |q| < 1}}$$

Вывод: ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{2^n}$ сходится.

▷▷ **8.2.31.** Исследуйте на сходимость ряды:

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{n^2+n+\ln n}$;

2) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \frac{n^5}{3^n}$.

Специальные признаки сходимости рядов

Признак Лейбница.

Теорема 8.2.12. *Пусть последовательность $\{b_n\}$ обладает свойствами:*

(i) она неотрицательна и невозрастает,

$$b_0 \geqslant b_1 \geqslant b_2 \geqslant \ldots \geqslant 0 \tag{8.2.50}$$

(ii) и стремится к нулю:

$$b_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \tag{8.2.51}$$

Тогда

(a) ряд $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n b_n$ сходится,

(b) его остаток оценивается сверху своим первым членом:

$$\left| \sum_{n=N+1}^{\infty} (-1)^n b_n \right| \leqslant b_{N+1} \tag{8.2.52}$$

! **8.2.32.** То же справедливо и для ряда, у которого нижний предел суммирования равен 1:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n b_n$$

Доказательство. Рассмотрим частичные суммы нашего ряда:

$$S_N = \sum_{n=0}^{N} (-1)^n b_n$$

Мы покажем, что S_N образуют последовательность, которую можно изобразить картинкой

(нечетные суммы образуют возрастающую последовательность, а четные – убывающую, причем расстояние между четными и нечетными стремится к нулю).

Действительно, рассмотрим подпоследовательности нечетных и четных сумм:

$$A_k = S_{2k-1}, \quad B_k = S_{2k}$$

1. Покажем сначала, что A_k монотонна и ограничена:

$$A_1 \leqslant A_2 \leqslant A_3 \leqslant ... \leqslant b_0 \tag{8.2.53}$$

Действительно, с одной стороны,

$$A_{k+1} = S_{2k+1} = \sum_{n=0}^{2k+1} (-1)^n b_n = \underbrace{\sum_{n=0}^{2k-1} (-1)^n b_n}_{\substack{\parallel \\ S_{2k-1}}} + \underbrace{b_{2k} - b_{2k+1}}_{\substack{\vee\!\!/ \\ 0}} \geqslant S_{2k-1} = A_k$$

А, с другой, –

$$A_k = S_{2k-1} = b_0 - \underbrace{(b_1 - b_2)}_{\substack{\vee\!\!/ \\ 0}} - \underbrace{(b_3 - b_4)}_{\substack{\vee\!\!/ \\ 0}} - ... - \underbrace{b_{2k-1}}_{\substack{\vee\!\!/ \\ 0}} \leqslant b_0$$

2. Докажем монотонность и ограниченность последовательности $\{B_k\}$:

$$0 \leqslant ... \leqslant B_2 \leqslant B_1 \leqslant B_0 \tag{8.2.54}$$

С одной стороны, получаем:

$$B_{k+1} = S_{2k+2} = \sum_{n=0}^{2k+2} (-1)^n b_n = \underbrace{\sum_{n=0}^{2k} (-1)^n b_n}_{\substack{\parallel \\ S_{2k}}} - \underbrace{(b_{2k+1} - b_{2k+2})}_{\substack{\vee\!\!/ \\ 0}} \leqslant S_{2k} = B_k$$

А, с другой, –

$$B_k = S_{2k} = \underbrace{(b_0 - b_1)}_{\substack{\vee\!\!/ \\ 0}} + \underbrace{(b_2 - b_3)}_{\substack{\vee\!\!/ \\ 0}} + ... + \underbrace{(b_{2k-1} - b_{2k})}_{\substack{\vee\!\!/ \\ 0}} \geqslant 0$$

3. Из (8.2.53) и (8.2.54) следует, что последовательности $\{A_k\}$ и $\{B_k\}$ сходятся:

$$A_k \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} A = \sup_{k\in\mathbb{Z}_+} A_k, \qquad B_k \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} B = \inf_{k\in\mathbb{Z}_+} B_k \tag{8.2.55}$$

При этом,

$$B - A = \lim_{k\to\infty} B_k - \lim_{k\to\infty} A_k = \lim_{k\to\infty} (B_k - A_k) = \lim_{k\to\infty} (S_{2k} - S_{2k-1}) = \lim_{k\to\infty} b_{2k} = 0,$$

то есть

$$A = B,$$

и поэтому соотношения (8.2.55) удобно переписать так:

$$S_{2k-1} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \sup_{k\in\mathbb{Z}_+} S_{2k-1} = S = \inf_{k\in\mathbb{Z}_+} S_{2k} \underset{\infty\leftarrow k}{\longleftarrow} S_{2k} \tag{8.2.56}$$

где $S = A = B$. Отсюда сразу следует, что последовательность S_N сходится к S,

$$S_N \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} S,$$

то есть ряд $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n b_n$ сходится. С другой стороны, из (8.2.56) следует двойное неравенство

$$\forall k \in \mathbb{N} \qquad S_{2k-1} \leqslant S \leqslant S_{2k} \tag{8.2.57}$$

из которого мы получаем, во-первых,

$$|S - S_{2k-1}| = S - S_{2k-1} \leqslant S_{2k} - S_{2k-1} = (-1)^{2k} \cdot b_{2k} = b_{2k} \tag{8.2.58}$$

и, во-вторых,

$$|S - S_{2k}| = S_{2k} - S \underset{\substack{\Uparrow \\ -S \leqslant -S_{2k+1} \\ \Uparrow \\ S_{2k+1} \leqslant S \\ \Uparrow \\ (8.2.57)}}{\leqslant} S_{2k} - S_{2k+1} = -(-1)^{2k+1} \cdot b_{2k+1} = b_{2k+1} \tag{8.2.59}$$

Цепочки (8.2.58) и (8.2.59) вместе дают оценку

$$|S - S_N| \leqslant b_{N+1},$$

((8.2.58) доказывает это неравенство для нечетных N, а (8.2.59) для четных). Это как раз и есть неравенство (8.2.52). □

◇ **8.2.33.** Ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$$

можно представить в виде $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n b_n$, где

$$b_n = \frac{1}{n} \underset{n\to\infty}{\overset{\text{монотонно}}{\longrightarrow}} 0$$

поэтому по теореме Лейбница получаем

Вывод: ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ сходится.

◇ **8.2.34.** Ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \ln n}{n}$$

можно представить в виде $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n b_n$, где

$$b_n = \frac{\ln n}{n}$$

Эта последовательность стремится к нулю по теореме о шкале бесконечностей, но непонятно, будет ли это стремление монотоным. Для того, чтобы это проверить, можно рассмотреть вспомогательную функцию

$$f(x) = \frac{\ln x}{x}$$

Ее производная будет отрицательной на промежутке $x \geqslant 3$

$$f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2} < 0, \qquad x \geqslant 3$$

Поэтому $f(x)$ монотонно убывает при $x \geqslant 3$, значит, наша последовательность $b_n = f(n)$ монотонно убывает начиная с номера $n = 3$. Отсюда по теореме Лейбница получаем, что должен сходиться ряд $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{(-1)^n \ln n}{n}$. Он является остатком ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \ln n}{n}$, значит этот ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \ln n}{n}$ тоже сходится (по лемме об остатке 8.2.9).

Вывод: ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \ln n}{n}$ сходится.

▷▷ **8.2.35.** Исследуйте на сходимость ряды:

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln n}$;
2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$;
3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n\cdot(\ln n)^\alpha}$.

Признаки Дирихле и Абеля для рядов.

Теорема 8.2.13 (признак Дирихле)**.** *Пусть последовательности $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ обладают следующими свойствами:*

(*i*) *частичные суммы ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ограничены:*

$$\sup_{N\in\mathbb{N}} \left| \sum_{n=1}^{N} a_n \right| < \infty$$

(*ii*) *последовательность $\{b_n\}$ монотонно стремится к нулю:*

$$b_n \underset{n\to\infty}{\overset{\textit{монотонно}}{\longrightarrow}} 0$$

Тогда ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot b_n$ сходится.

Доказательство. Обозначим

$$\sup_{N\in\mathbb{N}} \left| \sum_{n=1}^{N} a_n \right| = C < \infty$$

и заметим, что

$$\forall p, q \in \mathbb{N} \qquad \left| \sum_{n=p}^{q} a_n \right| \leqslant 2C \tag{8.2.60}$$

Действительно,

$$\left| \sum_{n=p}^{q} a_n \right| = \left| \sum_{n=1}^{q} a_n - \sum_{n=1}^{p-1} a_n \right| \leqslant \underbrace{\left| \sum_{n=1}^{q} a_n \right|}_{\substack{\wedge\!\!\!\backslash \\ C}} + \underbrace{\left| \sum_{n=1}^{p-1} a_n \right|}_{\substack{\wedge\!\!\!\backslash \\ C}} \leqslant 2C$$

Чтобы убедиться, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot b_n$ сходится, воспользуемся критерием Коши (теорема 8.2.4): выберем произвольные последовательности $l_i \in \mathbb{N}$ и $k_i \in \mathbb{N}$ ($k_i \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$). По неравенству Абеля (7.2.114) получаем:

$$\left| \sum_{n=k_i+1}^{k_i+l_i} a_n \cdot b_n \right| \leqslant 3 \cdot \underbrace{\max_{k_i \leqslant N \leqslant k_i+l_i} \left| \sum_{n=k_i+1}^{N} a_n \right|}_{\substack{\wedge\!\!\!\backslash \ (8.2.60) \\ 2C}} \cdot \max\Big\{ \underbrace{|b_{k_i+1}|}_{\substack{\downarrow \\ 0}}, \underbrace{|b_{k_i+l_i}|}_{\substack{\downarrow \\ 0}} \Big\} \underset{i\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

Это верно для любых последовательностей $l_i \in \mathbb{N}$ и $k_i \in \mathbb{N}$ ($k_i \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$), значит ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot b_n$ сходится. □

Признак Дирихле часто используется для исследования рядов вида

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \cdot \sin nx, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cdot \cos nx$$

В этих случаях бывают полезны следующие тригонометрические формулы:

$$\sum_{n=1}^{N} \sin nx = \frac{\sin \frac{N}{2}x \cdot \sin \frac{N+1}{2}x}{\sin \frac{x}{2}}, \qquad \sum_{n=1}^{N} \cos nx = \frac{\sin \frac{N}{2}x \cdot \cos \frac{N+1}{2}x}{\sin \frac{x}{2}} \qquad (x \neq 2\pi k) \tag{8.2.61}$$

Покажем как они применяются.

◇ **8.2.36.** Исследуем на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n}$$

Если положить

$$a_n = \sin n, \quad b_n = \frac{1}{n}$$

то мы получим $b_n \xrightarrow[n\to\infty]{\text{монотонно}} 0$, и

$$\sup_{N\in\mathbb{N}} \left| \sum_{n=1}^{N} a_n \right| = \sup_{N\in\mathbb{N}} \left| \sum_{n=1}^{N} \sin n \right| =$$
$$= (8.2.61) =$$
$$= \sup_{N\in\mathbb{N}} \left| \frac{\sin \frac{N}{2} \cdot \sin \frac{N+1}{2}}{\sin \frac{1}{2}} \right| \leqslant \frac{1}{\sin \frac{1}{2}} < +\infty$$

По признаку Дирихле, получаем

Вывод: ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n}$ сходится.

◇ **8.2.37.** Исследуем на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$$

Если положить

$$a_n = \sin nx, \quad b_n = \frac{1}{n}$$

то мы получим $b_n \xrightarrow[n\to\infty]{\text{монотонно}} 0$, и

$$\sup_{N\in\mathbb{N}} \left| \sum_{n=1}^{N} a_n \right| = \sup_{N\in\mathbb{N}} \left| \sum_{n=1}^{N} \sin nx \right| =$$
$$= (8.2.61) =$$
$$= \sup_{N\in\mathbb{N}} \left| \frac{\sin \frac{N}{2}x \cdot \sin \frac{N+1}{2}x}{\sin \frac{x}{2}} \right| \leqslant \frac{1}{\left|\sin \frac{x}{2}\right|} < +\infty$$

По признаку Дирихле, получаем, что наш ряд сходится при $x \neq 2\pi k$.

Остается проверить, будет ли он сходиться при $x = 2\pi k$. Подставим это значение в наш ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2\pi kn}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} 0$$

Ясно, что этот ряд сходится.

Вывод: ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$ сходится при любом $x \in \mathbb{R}$.

▷▷ **8.2.38.** Исследуйте на сходимость ряды:

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{n}$;
2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n}$;
3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{\pi n}{12}}{\ln n}$;
4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n} \cdot \cos \frac{\pi n}{12}$;
5) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}}$.

Теорема 8.2.14 (признак Абеля). *Пусть последовательности $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ обладают следующими свойствами:*

(*i*) *ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится;*

(*ii*) *последовательность $\{b_n\}$ монотонна и ограничена.*

Тогда ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot b_n$ сходится.

Доказательство. Заметим, что из сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ следует, что для произвольных последовательностей $l_i \in \mathbb{N}$ и $k_i \in \mathbb{N}$ ($k_i \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$) выполняется соотношение

$$\max_{k_i\leqslant N\leqslant k_i+l_i} \left| \sum_{n=k_i+1}^{N} a_n \right| \underset{i\to\infty}{\longrightarrow} 0 \tag{8.2.62}$$

Действительно, если бы это было не так,

$$\max_{k_i\leqslant N\leqslant k_i+l_i} \left| \sum_{n=k_i+1}^{N} a_n \right| \underset{i\to\infty}{\not\longrightarrow} 0$$

то, переходя к подпоследовательности, мы получили бы, что для некоторого $\varepsilon > 0$ выполняется соотношение

$$\max_{k_i\leqslant N\leqslant k_i+l_i} \left| \sum_{n=k_i+1}^{N} a_n \right| > \varepsilon$$

$$\Downarrow$$

$$\exists N_i \in [k_i, k_i + l_i] \qquad \underbrace{\left|\sum_{n=k_i+1}^{N_i} a_n\right|}_{\substack{\text{здесь } N_i > k_i,\\ \text{потому что}\\ \text{иначе было бы}\\ \sum_{n=k_i+1}^{N_i} a_n = 0}} > \varepsilon$$

$$\Downarrow$$

$$\exists m_i = N_i - k_i \qquad \underbrace{\left|\sum_{n=k_i+1}^{k_i+m_i} a_n\right| > \varepsilon}_{\substack{\uparrow\\ \text{это невозможно,}\\ \text{потому что}\\ \text{по критерию Коши}\\ \text{(теорема 8.2.4)}\\ \left|\sum_{n=k_i+1}^{k_i+m_i} a_n\right| \underset{i\to\infty}{\longrightarrow} 0}}$$

Теперь обозначим

$$B = \sup_{n\in\mathbb{N}} |b_n| < \infty$$

Чтобы доказать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot b_n$, снова воспользуемся критерием Коши (теоремой 8.2.4): для произвольных последовательностей $l_i \in \mathbb{N}$ и $k_i \in \mathbb{N}$ ($k_i \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$) по неравенству Абеля (7.2.114) мы получим

$$\left|\sum_{n=k_i+1}^{k_i+l_i} a_n \cdot b_n\right| \leqslant 3 \cdot \underbrace{\max_{k_i \leqslant N \leqslant k_i+l_i} \left|\sum_{n=k_i+1}^{N} a_n\right|}_{\substack{\downarrow\ (8.2.62)\\ 0}} \cdot \max\Big\{ \underbrace{|b_{k_i+1}|}_{\substack{\wedge\!\!\!\backslash\\ B}}, \underbrace{|b_{k_i+l_i}|}_{\substack{\wedge\!\!\!\backslash\\ B}} \Big\} \underset{i\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

Это верно для любых последовательностей $l_i \in \mathbb{N}$ и $k_i \in \mathbb{N}$ ($k_i \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$), значит ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot b_n$ сходится. □

◇ **8.2.39.** Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n} \cos\frac{\pi}{n}$$

Если положить

$$a_n = \frac{\sin n}{n}, \quad b_n = \cos\frac{\pi}{n}$$

то мы получим, что $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ – сходящийся ряд (мы уже доказали это в примере 8.2.36), а b_n – монотонная ограниченная последовательность. Значит, по признаку Абеля, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n} \cos\frac{\pi}{n}$ сходится.

◇ **8.2.40.** Следующий ряд

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin nx \cdot \cos nx}{\ln n} \operatorname{arctg}(nx)$$

исследуется таким же образом. Если положить

$$a_n = \frac{\sin nx \cdot \cos nx}{\ln n}, \quad b_n = \operatorname{arctg}(nx)$$

то мы получим, что

$$\sum_{n=2}^{\infty} a_n = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin nx \cdot \cos nx}{\ln n} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin 2nx}{2\ln n}$$

– сходящийся ряд при любом $x \in \mathbb{R}$ (это доказывается так же, как в примере 8.2.37), а b_n – монотонная ограниченная последовательность. Значит, по признаку Абеля, ряд $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin nx \cdot \cos nx}{\ln n} \operatorname{arctg}(nx)$ сходится при любом $x \in \mathbb{R}$.

▷▷ **8.2.41.** Исследуйте на сходимость ряды:

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{n} \cdot \arcsin\frac{n}{n+1}$;
2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n} \cdot \operatorname{arctg}(nx)$;
3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\frac{\pi n}{12}}{\ln n} \cdot \operatorname{arcctg}(-n)$;
4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n} \cdot \cos\frac{\pi n}{12} \cdot \arccos\left(-\frac{n}{n+1}\right)$;
5) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} \cdot \frac{\cos\frac{1}{n}}{\sqrt{n}}$.

(d) Асимптотика сумм и рядов

По аналогии с определением асимптотической эквивалентности функций на с.360, мы говорим, что две числовые последовательности a_n и b_n *асимптотически эквивалентны*, и изображаем это записью

$$a_n \underset{n\to\infty}{\sim} b_n,$$

если их отношение стремится к единице:

$$\frac{a_n}{b_n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1. \tag{8.2.63}$$

Это автоматически означает, что последовательность b_n должна быть ненулевой, по крайней мере, начиная с какого-то номера (потому что иначе делить на нее будет нельзя), и то же самое должно быть справедливо для a_n (потому что иначе в пределе не получится единицы).

Асимптотическая эквивалентность рядов.

Теорема 8.2.15 (признак эквивалентности рядов)**.** *Пусть*

$$a_n \geqslant 0, \qquad b_n \geqslant 0, \qquad a_n \underset{n\to\infty}{\sim} b_n \tag{8.2.64}$$

- Коротко эти три условия записываются формулой

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

Тогда сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ эквивалентна сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \textit{сходится} \quad \Longleftrightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n \quad \textit{сходится}$$

При этом,

(i) если эти ряды сходятся, то справедливо следующее соотношение, показывающее, что скорость их сходимости будет одинаковой:

$$\sum_{n=N}^{\infty} a_n \underset{N\to\infty}{\sim} \sum_{n=N}^{\infty} b_n \tag{8.2.65}$$

(ii) если эти ряды расходятся, то справедливо следующее соотношение, показывающее, что скорость их расходимости будет одинаковой:

$$\sum_{n=1}^{N} a_n \underset{N\to\infty}{\sim} \sum_{n=1}^{N} b_n \tag{8.2.66}$$

Доказательство. Зафиксируем сначала какое-нибудь $\varepsilon \in (0,1)$ и заметим такую логическую цепочку:

$$a_n \underset{n\to\infty}{\sim} b_n$$
$$\Downarrow$$
$$\frac{a_n}{b_n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$$
$$\Downarrow$$
$$\exists L \quad \forall n \geqslant L \quad \frac{a_n}{b_n} \in [1-\varepsilon; 1+\varepsilon]$$
$$\Downarrow$$
$$\exists L \quad \forall n \geqslant L \quad 1-\varepsilon \leqslant \frac{a_n}{b_n} \leqslant 1+\varepsilon$$
$$\Downarrow$$

$$\exists L \quad \forall n \geqslant L \quad (1-\varepsilon)\cdot b_n \leqslant a_n \leqslant (1+\varepsilon)\cdot b_n$$

$$\Downarrow$$

$$\sum_{n=L}^{\infty}(1-\varepsilon)\cdot b_n \leqslant \sum_{n=L}^{\infty} a_n \leqslant \sum_{n=L}^{\infty}(1+\varepsilon)\cdot b_n \tag{8.2.67}$$

(последнее двойное неравенство понимается как почленное сравнение рядов, определенное формулой (8.2.43)).

1. Покажем теперь, что сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ эквивалентна сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$. С одной стороны, справедлива такая цепочка:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{сходится}$$

$$\Downarrow \qquad \text{(применяем лемму об остатке 8.2.9)}$$

$$\sum_{n=L}^{\infty} a_n \quad \text{сходится}$$

$$\Downarrow \qquad \begin{pmatrix}\text{применяем неравенство (8.2.67)}\\ \text{и признак сравнения 8.2.7}\end{pmatrix}$$

$$\sum_{n=L}^{\infty}(1-\varepsilon)\cdot b_n \quad \text{сходится}$$

$$\Downarrow \qquad \text{(применяем свойство } 1^0\text{, §2)}$$

$$\sum_{n=L}^{\infty} b_n \quad \text{сходится}$$

$$\Downarrow \qquad \text{(применяем лемму об остатке 8.2.9)}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \quad \text{сходится}$$

А, с другой стороны, справедлива цепочка в обратном направлении:

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \quad \text{сходится}$$

$$\Downarrow \qquad \text{(применяем лемму об остатке 8.2.9)}$$

$$\sum_{n=L}^{\infty} b_n \quad \text{сходится}$$

$$\Downarrow \qquad \text{(применяем свойство } 1^0\text{, §2)}$$

$$\sum_{n=L}^{\infty}(1+\varepsilon)\cdot b_n \quad \text{сходится}$$

$$\Downarrow \qquad \begin{pmatrix}\text{применяем неравенство (8.2.67)}\\ \text{и признак сравнения 8.2.7}\end{pmatrix}$$

$$\sum_{n=L}^{\infty} a_n \quad \text{сходится}$$

$$\Downarrow \qquad \text{(применяем лемму об остатке 8.2.9)}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{сходится}$$

2. Теперь предположим, что оба ряда сходятся и докажем формулу (8.2.65). Из (8.2.67) получаем:

$$\exists L\in\mathbb{N} \quad \forall N \geqslant L \quad (1-\varepsilon)\cdot\sum_{n=N}^{\infty} b_n \leqslant \sum_{n=N}^{\infty} a_n \leqslant (1+\varepsilon)\cdot\sum_{n=N}^{\infty} b_n \qquad \left(\text{здесь уже } \sum_{n=N}^{\infty} a_n \text{ и } \sum_{n=N}^{\infty} b_n \text{ – числа}\right)$$

$$\Downarrow$$

$$\exists L \in \mathbb{N} \quad \forall N \geqslant L \qquad 1-\varepsilon \leqslant \frac{\sum_{n=N}^{\infty} a_n}{\sum_{n=N}^{\infty} b_n} \leqslant 1+\varepsilon \qquad \Big(\text{здесь } \varepsilon \in (0;1) \text{ с самого начала выбиралось произвольным}\Big)$$

$$\Downarrow$$

$$\forall \varepsilon \in (0,1) \quad \exists L \in \mathbb{N} \quad \forall N \geqslant L \qquad 1-\varepsilon \leqslant \frac{\sum_{n=N}^{\infty} a_n}{\sum_{n=N}^{\infty} b_n} \leqslant 1+\varepsilon$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{\sum_{n=N}^{\infty} a_n}{\sum_{n=N}^{\infty} b_n} \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} 1$$

то есть справедливо (8.2.65).

3. Нам остается доказать (8.2.66) в предположении, что оба ряда расходятся. Здесь применяется теорема Штольца 3.2.18. Из условия $a_n \sim b_n$ следует, что, начиная с некоторого номера M, все числа b_n ненулевые (мы отмечали это при определении асимптотически эквивалентных последовательностей на с.518), и поэтому положительны:

$$\forall n \geqslant M \qquad b_n > 0 \tag{8.2.68}$$

Зафиксируем это M и обозначим

$$A_N = \sum_{n=M}^{N} a_n, \qquad B_N = \sum_{n=M}^{N} b_n.$$

Из (8.2.68) следует, что последовательность B_N $(N \geqslant M)$ строго возрастает:

$$B_M < B_{M+1} < ... < B_N < ...$$

С другой стороны, она стремится к бесконечности, поскольку мы предполагаем ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ расходящимся:

$$B_N = \sum_{n=M}^{N} b_n \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} \infty$$

Поэтому по теореме 3.2.18,

$$\lim_{N\to\infty} \frac{A_N}{B_N} = \lim_{N\to\infty} \frac{A_N - A_{N-1}}{B_N - B_{N-1}} = \lim_{N\to\infty} \frac{a_N}{b_N} = 1$$

Если теперь обозначить

$$A = \sum_{n=1}^{M-1} a_n, \qquad B = \sum_{n=1}^{M-1} b_n,$$

то мы получим:

$$\lim_{N\to\infty} \frac{\sum_{n=1}^{N} a_n}{\sum_{n=1}^{N} b_n} = \lim_{N\to\infty} \frac{\sum_{n=1}^{M-1} a_n + \sum_{n=M}^{N} a_n}{\sum_{n=1}^{M-1} b_n + \sum_{n=M}^{N} b_n} = \lim_{N\to\infty} \frac{A + A_N}{B + B_N} = \lim_{N\to\infty} \frac{\overset{\nearrow 0}{\boxed{\frac{A}{B_N}}} + \overset{\nearrow 1}{\boxed{\frac{A_N}{B_N}}}}{\underset{\searrow 0}{\boxed{\frac{B}{B_N}}} + 1} = 1$$

То есть справедливо (8.2.66). $\square$

◇ **8.2.42.**

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+n-1} \sim \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}}_{\text{сходится}}$$

Вывод: ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+n-1}$ сходится.

В соответствии с теоремой 8.2.15, можно дать асимптотическую оценку скорости сходимости этого ряда:

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^2+n-1} \underset{N\to\infty}{\sim} \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^2},$$

однако это будет мало информативно, потому что до теорем 8.2.17 и 8.2.18 мы не сможем выражать асимптотику рядов через стандартные функции.

◇ **8.2.43.**

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+\sqrt{n}}{\sqrt{n^3+2n}} \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n^3}} = \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}}_{\text{расходится}}$$

Вывод: ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+\sqrt{n}}{\sqrt{n^3+2n}}$ расходится.

◇ **8.2.44.**

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sin\frac{1}{n}\right)^{\alpha} \sim \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}}_{\substack{\text{сходится}\\ \text{при } \alpha>1}}$$

Вывод: ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sin\frac{1}{n}\right)^{\alpha}$ сходится при $\alpha > 1$.

◇ **8.2.45.**

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{n^{\alpha}} \sim \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha+1}}}_{\substack{\text{сходится}\\ \text{при } \alpha+1>1\\ \text{то есть при } \alpha>0}}$$

Вывод: ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{n^{\alpha}}$ сходится при $\alpha > 0$.

▷▷ **8.2.46.** Исследуйте на сходимость ряды:

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n}\cdot\left(\frac{1+n^2}{1+n^3}\right)^2$;
2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)(n+2)}}$;
3) $\sum_{n=1}^{\infty} n\cdot\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}\right)$;
4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n}}\cdot\ln\frac{n+1}{n-1}$;
5) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln\left(n+\sqrt{n}+\ln n+1\right)}{3n-\ln n+\operatorname{arctg} n-1}$;
6) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)}{\ln\left(n-n\sqrt{n}+\ln n+3\right)}$;
7) $\sum_{n=1}^{\infty} n\cdot\left(e^{\frac{1}{n}}-1\right)^{\alpha}$;
8) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+n}{\left(\frac{1}{n}-\sin\frac{1}{n}\right)^{\alpha}}$;
9) $\sum_{n=1}^{\infty} \left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{3}{2}}-1\right\}^{\alpha}$;
10) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{n}\right)^{\alpha}}{1-\cos\frac{1}{n}}$.

Асимптотическое сравнение рядов.

Теорема 8.2.16 (асимптотический признак сравнения рядов)**.** *Пусть последовательности* $\{a_n\}$ *и* $\{b_n\}$ *обладают следующими свойствами:*

(1) $a_n \underset{n\to\infty}{\ll} b_n$ *(то есть* $a_n = \underset{n\to\infty}{\mathbf{o}}(b_n)$*);*

(2) $b_n \geqslant 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

- Коротко эти два условия записываются формулой:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \ll \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

Тогда

(i) *из сходимости большего ряда* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *следует сходимость меньшего ряда* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$*:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \textit{сходится} \quad \Longleftarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n \quad \textit{сходится} \tag{8.2.69}$$

причем скорости сходимости оцениваются соотношением

$$\sum_{n=N}^{\infty} a_n \underset{N\to\infty}{\ll} \sum_{n=N}^{\infty} b_n; \tag{8.2.70}$$

(ii) *из расходимости меньшего ряда* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *следует расходимость большего ряда* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$*:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \textit{расходится} \quad \Longrightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n \quad \textit{расходится} \tag{8.2.71}$$

причем скорости расходимости оцениваются соотношением

$$\sum_{n=1}^{N} a_n \underset{N\to\infty}{\ll} \sum_{n=1}^{N} b_n; \tag{8.2.72}$$

Доказательство. Зафиксируем сначала какое-нибудь $\varepsilon > 0$ и заметим такую логическую цепочку:

$$a_n \underset{n\to\infty}{\ll} b_n$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{a_n}{b_n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{|a_n|}{b_n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

$$\Downarrow$$

$$\exists L \quad \forall n \geqslant L \quad \frac{|a_n|}{b_n} < \varepsilon$$

$$\Downarrow$$

$$\exists L \quad \forall n \geqslant L \quad |a_n| < \varepsilon \cdot b_n$$

$$\Downarrow$$

$$\sum_{n=L}^{\infty} |a_n| < \sum_{n=L}^{\infty} \varepsilon \cdot b_n \tag{8.2.73}$$

(последнее неравенство понимается как почленное сравнение рядов).

1. Докажем (8.2.69) и (8.2.71). Замечаем такую цепочку:

$$\text{ряд } \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ сходится}$$

$$\Downarrow \quad \text{(применяем лемму об остатке 8.2.9)}$$

$$\text{ряд } \sum_{n=L}^{\infty} b_n \text{ сходится}$$

$$\Downarrow$$

$$\text{ряд } \sum_{n=L}^{\infty} \varepsilon \cdot b_n \text{ сходится}$$

$$\Downarrow \quad \begin{pmatrix}\text{вспоминаем неравенство (8.2.73)}\\ \text{и признак сравнения рядов 8.2.7}\end{pmatrix}$$

$$\text{ряд } \sum_{n=L}^{\infty} |a_n| \text{ сходится}$$

$$\Downarrow \quad \text{(применяем лемму об остатке 8.2.9)}$$

$$\text{ряд } \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \text{ сходится}$$

$$\Downarrow$$

$$\text{ряд } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ сходится}$$

Это доказывает утверждение (8.2.69). Его можно переформулировать так:

$$\textit{невозможна ситуация, когда } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \textit{ расходится. а } \sum_{n=1}^{\infty} b_n \textit{ сходится}$$

и отсюда следует, что если $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится, то $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ тоже должен расходиться. То есть выполняется и (8.2.71).

2. Теперь предположим, что оба ряда сходятся и докажем формулу (8.2.70). Из (8.2.73) получаем:

$$\exists L \in \mathbb{N} \quad \forall N \geqslant L \qquad \sum_{n=N}^{\infty} |a_n| < \varepsilon \cdot \sum_{n=N}^{\infty} b_n \qquad \left(\text{здесь уже } \sum_{n=N}^{\infty} a_n \text{ и } \sum_{n=N}^{\infty} b_n \text{ – числа}\right)$$

$$\Downarrow$$

$$\exists L \in \mathbb{N} \quad \forall N \geqslant L \qquad \frac{\sum_{n=N}^{\infty} |a_n|}{\sum_{n=N}^{\infty} b_n} < \varepsilon \qquad \left(\text{здесь } \varepsilon > 0 \text{ с самого начала выбиралось произвольным}\right)$$

$$\Downarrow$$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists L \in \mathbb{N} \quad \forall N \geqslant L \qquad \frac{\sum_{n=N}^{\infty} |a_n|}{\sum_{n=N}^{\infty} b_n} < \varepsilon$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{\sum_{n=N}^{\infty} |a_n|}{\sum_{n=N}^{\infty} b_n} \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{\sum_{n=N}^{\infty} a_n}{\sum_{n=N}^{\infty} b_n} \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

то есть справедливо (8.2.70).

3. Нам остается доказать (8.2.72) в предположении, что оба ряда расходятся. Здесь применяется теорема Штольца 3.2.18. Из условия $a_n \underset{n\to\infty}{\ll} b_n$ следует, что начиная с некоторого номера M все числа b_n ненулевые, и поэтому положительны:

$$\forall n \geqslant M \qquad b_n > 0 \tag{8.2.74}$$

Зафиксируем это M и обозначим

$$A_N = \sum_{n=M}^{N} a_n, \qquad B_N = \sum_{n=M}^{N} b_n.$$

Из (8.2.74) следует, что последовательность B_N $(N \geqslant M)$ строго возрастает:

$$B_M < B_{M+1} < ... < B_N < ...$$

С другой стороны, она стремится к бесконечности, поскольку мы предполагаем ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ расходящимся:

$$B_N = \sum_{n=M}^{N} b_n \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} \infty$$

Поэтому по теореме 3.2.18,

$$\lim_{N\to\infty} \frac{A_N}{B_N} = \lim_{N\to\infty} \frac{A_N - A_{N-1}}{B_N - B_{N-1}} = \lim_{N\to\infty} \frac{a_N}{b_N} = 0$$

Если теперь обозначить

$$A = \sum_{n=1}^{M-1} a_n, \qquad B = \sum_{n=1}^{M-1} b_n,$$

то мы получим:

$$\lim_{N\to\infty}\frac{\sum_{n=1}^{N}a_n}{\sum_{n=1}^{N}b_n}=\lim_{N\to\infty}\frac{\sum_{n=1}^{M-1}a_n+\sum_{n=M}^{N}a_n}{\sum_{n=1}^{M-1}b_n+\sum_{n=M}^{N}b_n}=\lim_{N\to\infty}\frac{A+A_N}{B+B_N}=\lim_{N\to\infty}\frac{\overbrace{\boxed{\frac{A}{B_N}}}^{0}+\overbrace{\boxed{\frac{A_N}{B_N}}}^{0}}{\underbrace{\boxed{\frac{B}{B_N}}}_{0}+1}=0$$

То есть справедливо (8.2.72). □

Асимптотический признак сравнения рядов удобно применять, переписав и дополнив для дискретного аргумента шкалу бесконечностей (6.1.16) следующим образом:

$$\boxed{1 \underset{n\to\infty}{\ll} \underset{(a>1)}{\log_a n} \underset{n\to\infty}{\ll} \underset{(\alpha>0)}{n^\alpha} \underset{n\to\infty}{\ll} \underset{(a>1)}{a^n} \underset{n\to\infty}{\ll} n! \underset{n\to\infty}{\ll} n^n} \tag{8.2.75}$$

◇ **8.2.47.**

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n^2}\ll\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{\frac12}}{n^2}=\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac32}}}_{\substack{\text{сходится,}\\ \text{в силу примера 8.2.14}}}$$

Больший ряд сходится, значит и меньший ряд сходится.

Вывод: ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n^2}$ сходится.

В соответствии с теоремой 8.2.16, можно дать асимптотическую оценку скорости сходимости этого ряда:

$$\sum_{n=1}^{N}\frac{\ln n}{n^2}\underset{N\to\infty}{\ll}\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^{\frac32}},$$

но как и в примерах, иллюстрировавших теорему 8.2.15, это мало что объяснит, поскольку, как мы уже говорили, до теорем 8.2.17 и 8.2.18 мы не сможем выражать асимптотику рядов через стандартные функции.

◇ **8.2.48.**

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln n}\gg\underbrace{\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n}}_{\substack{\text{расходится,}\\ \text{в силу примера 8.2.13}}}$$

Меньший ряд расходится, значит и больший ряд расходится.

Вывод: ряд $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln n}$ расходится.

⊳⊳ **8.2.49.** Исследуйте на сходимость ряды:

1) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n^5}{2^n}$;
2) $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{5^n}{n!}$;
3) $\sum_{n=2}^{\infty}\sin n\frac{\ln n}{n\sqrt{n}}$;
4) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{e^n}{n^{100}}$;
5) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{5^n}{\sqrt{n!}}$.

◇ **8.2.50.** Чтобы понять, сходится ли ряд

$$\sum_{n=2}^{\infty}\ln\left(1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}\ln n}\right), \tag{8.2.76}$$

выпишем асимптотику его общего члена:

$$\ln\left(1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}\ln n}\right)=(6.2.50)=\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}\ln n}-$$
$$-\frac12\cdot\left(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}\ln n}\right)^2+\underset{n\to\infty}{\mathbf{o}}\left(\left(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}\ln n}\right)^2\right)=$$
$$=\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}\ln n}-\frac{1}{2n\ln^2 n}+\underset{n\to\infty}{\mathbf{o}}\left(\frac{1}{n\ln^2 n}\right)$$

Отсюда

$$\sum_{n=2}^{\infty}\ln\left(1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}\ln n}\right)=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}\ln n}-$$
$$-\frac12\cdot\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln^2 n}+\sum_{n=2}^{\infty}\underset{n\to\infty}{\mathbf{o}}\left(\frac{1}{n\ln^2 n}\right) \tag{8.2.77}$$

причем последний ряд надо понимать так, что его общий член является последовательностью, точное выражение которой через элементарные функции нам неважно, но про нее мы знаем, что она бесконечно мала по сравнению с последовательностью $\frac{1}{n\ln^2 n}$. Отсюда следует, что ряды в правой части (8.2.77) сходятся:

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}\ln n}$$

– по признаку Лейбница (теорема 8.2.12),

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln^2 n}$$

– по интегральному признаку (теорема 8.2.6), а

$$\sum_{n=2}^{\infty} \underset{n\to\infty}{\mathbf{o}}\left(\frac{1}{n\ln^2 n}\right)$$

– по асимптотическому признаку сравнения рядов (теорема 8.2.16). В итоге получаем, что исходный ряд (8.2.76) сходится.

▷▷ **8.2.51.** Исследуйте на сходимость ряды:

1) $\sum_{n=2}^{\infty}\left(2^{\frac{(-1)^n}{n\ln n}}-1\right)$;

2) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt[3]{1+\frac{(-1)^{n+1}}{n}}-1\right)$;

3) $\sum_{n=2}^{\infty}\left(e^{\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}\ln n}}-1\right)$;

4) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(4^{\frac{(-1)^{n+1}}{n}}-1\right)$.

Связь с несобственными интегралами и формула суммирования Эйлера. Связь между рядами и несобственными интегралами, успевшая к настоящему времени проявить себя в интегральном признаке сходимости (теорема 8.2.6), позволяет в некоторых случаях выразить асимптотику частичных сумм ряда в стандартных функциях. Первый результат на эту тему – очевидное следствие теоремы 8.2.6:

Теорема 8.2.17. *Пусть f – неотрицательная и невозрастающая функция на полуинтервале $[1;+\infty)$. Тогда*

$$\sum_{n=1}^{N} f(n) = \int_1^N f(x)\ \mathsf{d}\, x + C + \underset{N\to\infty}{\mathbf{o}}(1) \tag{8.2.78}$$

где C – постоянная Эйлера ряда $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$. Если вдобавок ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ расходится, то

$$\sum_{n=1}^{N} f(n) \underset{N\to\infty}{\sim} \int_1^N f(x)\ \mathsf{d}\, x \tag{8.2.79}$$

Доказательство. Формула (8.2.78) – просто по-другому переписанное соотношение (8.2.37):

$$\sum_{n=1}^{N} f(n) - \int_1^N f(x)\ \mathsf{d}\, x \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} C$$

Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ расходится, то есть

$$\sum_{n=1}^{N} f(n) \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} \infty,$$

то, мы получим:

$$\sum_{n=1}^{N} f(n) = \int_1^N f(x)\ \mathsf{d}\, x + \overbrace{C}^{\underset{N\to\infty}{\mathbf{o}}\left(\sum_{n=1}^N f(n)\right)} + \underbrace{\underset{N\to\infty}{\mathbf{o}}(1)}_{\underset{N\to\infty}{\mathbf{o}}\left(\sum_{n=1}^N f(n)\right)} = \int_1^N f(x)\ \mathsf{d}\, x + \underset{N\to\infty}{\mathbf{o}}\left(\sum_{n=1}^{N} f(n)\right)$$

а это эквивалентно формуле (8.2.78) по теореме 6.1.9. □

◇ **8.2.52.** Частичные суммы гармонического ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$$

по теореме 8.2.17 удовлетворяют формуле

$$\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n} = \underbrace{\ln N}_{\int_1^N \frac{1}{x}\ \mathsf{d}\, x} + C + \underset{N\to\infty}{\mathbf{o}}(1) \tag{8.2.80}$$

где C – постоянная Эйлера (8.2.40). Мы отмечали в примере 8.2.13, и это видно из формулы (8.2.80), что этот ряд расходится. Формула (8.2.79) для него принимает вид:

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} \underset{N\to\infty}{\sim} \ln N.$$

◇ **8.2.53.** Частичные суммы ряда Дирихле

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha},$$

который мы рассматривали в примере 8.2.14, при $0 < \alpha \neq 1$ должны по теореме 8.2.17 удовлетворять формуле

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^\alpha} = \underbrace{\frac{N^{1-\alpha}-1}{1-\alpha}}_{\substack{\parallel \\ \int_1^N \frac{1}{x^\alpha}\,\mathsf{d}\,x}} + C_\alpha + \underset{N\to\infty}{\mathbf{o}}(1) \qquad (8.2.81)$$

где C_α – постоянные Эйлера (8.2.42). При $0 < \alpha < 1$ этот ряд расходится, поэтому выполняется соотношение (8.2.79)

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^\alpha} \underset{N\to\infty}{\sim} \frac{N^{1-\alpha}-1}{1-\alpha}.$$

Его можно немного упростить, воспользовавшись теоремой 6.1.9,

$$\frac{N^{1-\alpha}-1}{1-\alpha} = \underbrace{\frac{N^{1-\alpha}}{1-\alpha}}_{\substack{\downarrow \\ \infty}} + \underbrace{\frac{1}{1-\alpha}}_{\substack{\parallel \\ \underset{N\to\infty}{\mathbf{o}}(1)}} \underset{N\to\infty}{\sim} \frac{N^{1-\alpha}}{1-\alpha},$$

и в результате мы получим

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^\alpha} \underset{N\to\infty}{\sim} \frac{N^{1-\alpha}}{1-\alpha} \qquad (0 < \alpha < 1).$$

Теорема 8.2.18. *Для любой гладкой функции f на отрезке $[1, N]$, $N \in \mathbb{N}$, справедлива формула:*

$$\sum_{n=1}^{N} f(n) = f(1) + \int_1^N f(x)\,\mathsf{d}\,x + \int_1^N \{x\} \cdot f'(x)\,\mathsf{d}\,x \qquad (8.2.82)$$

(здесь $\{x\}$ – дробная часть x).

- Эта формула называется *формулой суммирования Эйлера.*

! **8.2.54.** Понятно, что выбор единицы в качестве нижнего предела суммирования здесь несущественен – сдвигом аргумента из (8.2.82) выводится, например, что для любой гладкой функции f на отрезке $[0, N]$ справедлива формула

$$\sum_{n=0}^{N} f(n) = f(0) + \int_0^N f(x)\,\mathsf{d}\,x + \int_0^N \{x\} \cdot f'(x)\,\mathsf{d}\,x$$

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$F(x) = \sum_{n=1}^{[x]} f(n) + \{x\} \cdot f(x)$$

(здесь $[x]$ – целая часть x).

1. Заметим, что функция F кусочно-гладкая. Действительно, при $x \in (k, k+1)$, $k \in \mathbb{N}$, выполняется равенство $[x] = k$, поэтому $\{x\} = x - [x] = x - k$, и значит

$$F(x) = \sum_{n=1}^{[x]} f(n) + \{x\} \cdot f(x) = \sum_{n=1}^{k} f(n) + (x - k) \cdot f(x) \qquad (8.2.83)$$

Отсюда видно, что на интервале $(k, k+1)$ функция F гладкая и имеет конечные односторонние производные на концах.

2. Заметим далее (и это неожиданно), что функция F непрерывна. Мы уже показали, что на каждом интервале $(k, k+1)$, $k \in \mathbb{N}$, она будет гладкой, поэтому ее непрерывность нужно проверить только в целых точках. Зафиксируем какую-нибудь точку $k \in \mathbb{N}$ и вычислим в ней значение F и значения ее односторонних пределов:

$$F(k) = \sum_{n=1}^{[k]} f(n) + \underbrace{\{k\}}_{\substack{\parallel \\ 0}} \cdot f(k) = \sum_{n=1}^{k} f(n)$$

$$\lim_{x\to k-0} F(x) = \lim_{x\to k-0}\Big\{\sum_{n=1}^{[x]} f(n) + \{x\}\cdot f(x)\Big\} = \sum_{n=1}^{k-1} f(n) + 1\cdot f(k) = \sum_{n=1}^{k} f(n)$$

$$\lim_{x\to k+0} F(x) = \lim_{x\to k+0}\Big\{\sum_{n=1}^{[x]} f(n) + \{x\}\cdot f(x)\Big\} = \sum_{n=1}^{k} f(n) + 0\cdot f(k) = \sum_{n=1}^{k} f(n)$$

Видно, что эти три величины совпадают между собой, значит F непрерывна в k.

3. Заметим, что из формулы (8.2.83) следует, что на каждом интервале $(k, k+1)$, $k\in\mathbb{N}$, производная функции F имеет вид:

$$F'(x) = \frac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}\,x}\Big(\sum_{n=1}^{k} f(n) + (x-k)\cdot f(x)\Big) = \frac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}\,x}\Big((x-k)\cdot f(x)\Big) = 1\cdot f(x) + (x-k)\cdot f'(x) = f(x) + \{x\}\cdot f'(x)$$

Теперь по формуле перемещения непрерывной кусочно-гладкой функции (7.3.162) получаем:

$$\underbrace{F(N)}_{\substack{\| \\ \sum_{n=1}^N f(n) + \underbrace{\{N\}}_{\substack{\| \\ 0}}\cdot f(N) \\ \| \\ \sum_{n=1}^N f(n)}} - \overbrace{F(1)}^{\substack{f(1) \\ \| \\ \sum_{n=1}^1 f(n) + \overbrace{\{1\}}^{\substack{0 \\ \|}}\cdot f(1) \\ \|}} = \int_1^N F'(x)\ \mathsf{d}\,x = \int_1^N f(x)\ \mathsf{d}\,x + \int_1^N \{x\}\cdot f'(x)\ \mathsf{d}\,x$$

$$\Downarrow$$

$$\sum_{n=1}^{N} f(n) - f(1) = \int_1^N f(x)\ \mathsf{d}\,x + \int_1^N \{x\}\cdot f'(x)\ \mathsf{d}\,x$$

Остается перенести $f(1)$ в правую часть, и получится формула (8.2.82). □

Формула суммирования Эйлера сводит нахождение асимптотики суммы к асимптотике интеграла. Чтобы объяснить, как ее применять, нам понадобится некое новое понятие:

- *Функциями Эйлера* называются функции, определенные индуктивным правилом

$$E_0(x) = \{x\} \tag{8.2.84}$$

$$E_k(x) = \int_0^x E_{k-1}(t)\ \mathsf{d}\,t - x\cdot\int_0^1 E_{k-1}(t)\ \mathsf{d}\,t, \tag{8.2.85}$$

  Интегралы

$$\varepsilon_k = \int_0^1 E_k(t)\ \mathsf{d}\,t \tag{8.2.86}$$

  называются *числами Эйлера*, и с их помощью формула (8.2.85) записывается в виде:

$$E_k(x) = \int_0^x E_{k-1}(t)\ \mathsf{d}\,t - \varepsilon_{k-1}\cdot x \tag{8.2.87}$$

Предложение 8.2.19. *Каждая функция Эйлера E_k*

— *кусочно-гладка, а если $k>0$, то и непрерывна,*

— *периодична с периодом 1,*

$$E_k(x+1) = E_k(x), \qquad x\in\mathbb{R}$$

— *ограничена на $\mathbb{R}$,*

— *равна нулю в целых точках:*

$$E_k(n) = 0, \qquad n\in\mathbb{Z} \tag{8.2.88}$$

— *имеет производную в нецелых точках:*

$$E_k'(x) = E_{k-1}(x) - \varepsilon_{k-1}, \qquad x \notin \mathbb{Z} \tag{8.2.89}$$

Доказательство. Кусочная гладкость и непрерывность при $k > 0$ следует из теоремы 7.3.13. Периодичность доказывается по индукции: для $E_0(x) = \{x\}$ это верно, а если $E_{k-1}(x+1) = E_{k-1}(x)$, то

$$E_k(x+1) - E_k(x) = \int_0^{x+1} E_{k-1}(t)\ \mathsf{d}\,t - \varepsilon_{k-1}\cdot(x+1) - \left(\int_0^x E_{k-1}(t)\ \mathsf{d}\,t - \varepsilon_{k-1}\cdot x\right) =$$
$$= \int_x^{x+1} E_{k-1}(t)\ \mathsf{d}\,t - \varepsilon_{k-1} = \int_0^1 E_{k-1}(t)\ \mathsf{d}\,t - \varepsilon_{k-1} = 0.$$

После этого ограниченность становится следствием непрерывности и периодичности. А равенство нулю в целых точках следует из равенства нулю в нуле:

$$E_k(0) = \int_0^0 E_{k-1}(t)\ \mathsf{d}\,t - \varepsilon_{k-1}\cdot 0 = 0.$$

□

Для приложений будет полезно вычислить несколько первых чисел Эйлера и функций Эйлера на периоде $[0,1)$.

Предложение 8.2.20. *При $x \in [0,1)$ справедливы формулы:*

$$E_0(x) = x, \qquad \varepsilon_0 = \frac{1}{2} \tag{8.2.90}$$

$$E_1(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{x}{2}, \qquad \varepsilon_1 = -\frac{1}{12} \tag{8.2.91}$$

$$E_2(x) = \frac{x^3}{6} - \frac{x^2}{4} + \frac{x}{12}, \qquad \varepsilon_2 = 0 \tag{8.2.92}$$

Доказательство. При $x \in [0,1)$ получаем цепочку:

$$E_0(x) = \{x\} = x$$

$$\Downarrow$$

$$\varepsilon_0 = \int_0^1 E_0(t)\ \mathsf{d}\,t = \int_0^1 t\ \mathsf{d}\,t = \frac{1}{2}$$

$$\Downarrow$$

$$E_1(x) = \int_0^x E_0(t)\ \mathsf{d}\,t - \varepsilon_0\cdot x = \int_0^x t\ \mathsf{d}\,t - \frac{x}{2} = \frac{x^2}{2} - \frac{x}{2}$$

$$\Downarrow$$

$$\varepsilon_1 = \int_0^1 E_1(t)\ \mathsf{d}\,t = \int_0^1 \left(\frac{t^2}{2} - \frac{t}{2}\right)\ \mathsf{d}\,t = \left(\frac{t^3}{6} - \frac{t^2}{4}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{1}{6} - \frac{1}{4} = -\frac{1}{12}$$

$$\Downarrow$$

$$E_2(x) = \int_0^x E_1(t)\ \mathsf{d}\,t - \varepsilon_1\cdot x = \int_0^x \left(\frac{t^2}{2} - \frac{t}{2}\right)\ \mathsf{d}\,t + \frac{x}{12} = \frac{x^3}{6} - \frac{x^2}{4} + \frac{x}{12}$$

$$\Downarrow$$

$$\varepsilon_2 = \int_0^1 E_2(t)\ \mathsf{d}\,t = \int_0^1 \left(\frac{t^3}{6} - \frac{t^2}{4} + \frac{t}{12}\right)\ \mathsf{d}\,t = \left(\frac{t^4}{24} - \frac{t^3}{12} + \frac{t^2}{24}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{1}{24} - \frac{1}{12} + \frac{1}{24} = 0$$

□

Теперь перейдем к асимптотикам сумм.

◇ **8.2.55.** В примере 8.2.52 мы нашли асимптотическую формулу для частичной суммы гармонического ряда:

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} = \ln N + C + \underset{N\to\infty}{\mathbf{o}}(1) \qquad (8.2.80)$$

(C – постоянная Эйлера (8.2.40)).

Покажем теперь, как с помощью формулы Эйлера (8.2.82) можно эту асимптотику уточнять. Взяв $f(x) = \frac{1}{x}$, мы по формуле Эйлера получим:

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} = 1 + \int_1^N \frac{\mathsf{d}\,x}{x} - \int_1^N \frac{\{x\}}{x^2}\,\mathsf{d}\,x = \\ = 1 + \ln N - \int_1^N \frac{\{x\}}{x^2}\,\mathsf{d}\,x. \qquad (8.2.93)$$

Таким образом, нахождение асимптотики суммы свелось к нахождению асимптотики интеграла

$$I(N) = \int_1^N \frac{\{t\}}{t^2}\,\mathsf{d}\,t = \int_1^N \frac{E_0(t)}{t^2}\,\mathsf{d}\,t \qquad (8.2.94)$$

Он отличается от изучавшегося уже нами интеграла (8.1.26)

$$\int_1^x \frac{\sin t}{t^2}\,\mathsf{d}\,t$$

тем, что синус $\sin t$ в подынтегральном выражении заменен дробной частью $\{t\}$, а верхний предел стал дискретным. Метод нахождения асимптотики для (8.2.94) представляет собой модификацию метода для (8.1.26).

Коротко идею можно сформулировать так: *здесь тоже нужно интегрировать по частям, но сначала нужно добиваться, чтобы в дифференциале стояла функция Эйлера с подходящим индексом.* А это достигается добавлением и вычитанием чисел Эйлера в периодической части подынтегрального выражения.

Продемонстрируем это на интеграле (8.2.94). Прежде всего замечаем, что существует конечный предел

$$A = \lim_{N\to\infty} I(N) = \int_1^\infty \frac{E_0(t)}{t^2}\,\mathsf{d}\,t$$

– поскольку интеграл $\int_1^\infty \frac{E_0(t)}{t^2}\,\mathsf{d}\,t$ сходится абсолютно:

$$\int_1^\infty \left|\frac{E_0(t)}{t^2}\right| \mathsf{d}\,t \leqslant \int_1^\infty \frac{1}{t^2}\,\mathsf{d}\,t = -\frac{1}{t}\Big|_1^\infty = 1$$

Запомним это число A. Тогда:

$$I(N) = \int_1^N \frac{E_0(t)}{t^2}\,\mathsf{d}\,t = \\ = \underbrace{\int_1^\infty \frac{E_0(t)}{t^2}\,\mathsf{d}\,t}_{\substack{\parallel \\ A}} - \int_N^\infty \frac{E_0(t)}{t^2}\,\mathsf{d}\,t = \\ = A - \int_N^\infty \frac{\varepsilon_0 + E_0(t) - \varepsilon_0}{t^2}\,\mathsf{d}\,t = \\ = A - \underbrace{\varepsilon_0}_{\substack{(8.2.90)\ \parallel \\ \frac{1}{2}}} \int_N^\infty \frac{1}{t^2}\,\mathsf{d}\,t - \int_N^\infty \frac{E_0(t) - \varepsilon_0}{t^2}\,\mathsf{d}\,t = \\ = A + \frac{1}{2t}\Big|_N^\infty - \int_N^\infty \frac{E_1'(t)}{t^2}\,\mathsf{d}\,t = \\ = A - \frac{1}{2N} - \int_N^\infty \frac{1}{t^2}\,\mathsf{d}\,E_1(t) = (7.3.163) = \\ = A - \frac{1}{2N} - \frac{E_1(t)}{t^2}\Big|_N^\infty - 2\int_N^\infty \frac{E_1(t)}{t^3}\,\mathsf{d}\,t = \\ = A - \frac{1}{2N} + \underbrace{\frac{E_1(N)}{N^2}}_{\substack{(8.2.89)\ \parallel \\ 0}} \underbrace{-2\int_N^\infty \underbrace{\frac{E_1(t)}{t^3}}_{\underset{t\to\infty}{\mathbf{o}}\left(\frac{1}{t^2}\right)}\,\mathsf{d}\,t}_{\underset{N\to\infty}{\mathbf{o}}\left(\frac{1}{N}\right)} = \\ = A - \frac{1}{2N} + \underset{N\to\infty}{\mathbf{o}}\left(\frac{1}{N}\right)$$

Подставим это в (8.2.93):

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} = 1 + \ln N - \int_1^N \frac{\{x\}}{x^2}\,\mathsf{d}\,x = \\ = 1 + \ln N - A + \frac{1}{2N} + \underset{N\to\infty}{\mathbf{o}}\left(\frac{1}{N}\right).$$

Сравнив с (8.2.80), мы видим теперь, что постоянная A связана с постоянной Эйлера C равенством

$$1 - A = C$$

и поэтому полученную асимптотику можно переписать так:

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} = \ln N + C + \frac{1}{2N} + \underset{N\to\infty}{\mathbf{o}}\left(\frac{1}{N}\right). \qquad (8.2.95)$$

Это уточняет асимптотическую формулу (8.2.80).

Ее можно и дальше уточнять. Для этого нужно заметить, что, вычисляя асимптотику для $I(N)$, мы попутно вывели формулу

$$I(N) = A - \frac{1}{2N} - 2\int_N^\infty \frac{E_1(t)}{t^3}\,\mathsf{d}\,t$$

Подставим ее в (8.2.93):

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} = 1 + \ln N - \int_1^N \frac{\{x\}}{x^2}\,\mathsf{d}\,x = \\ = 1 + \ln N - A + \frac{1}{2N} + 2\int_N^\infty \frac{E_1(t)}{t^3}\,\mathsf{d}\,t = \\ = \ln N + C + \frac{1}{2N} + 2\int_N^\infty \frac{E_1(t)}{t^3}\,\mathsf{d}\,t \qquad (8.2.96)$$

Отдельно найдем асимптотику последнего интеграла:

$$
\begin{aligned}
I_2(N) = 2\int_N^\infty \frac{E_1(t)}{t^3}\ \mathsf{d}\,t &= \\
= 2\int_N^\infty \frac{\varepsilon_1 + E_1(t) + \varepsilon_1}{t^3}\ \mathsf{d}\,t &= \\
= 2\underbrace{\varepsilon_1}_{\substack{(8.2.91)\ \| \\ -\frac{1}{12}}} \int_N^\infty \frac{1}{t^3}\ \mathsf{d}\,t + 2\int_N^\infty \frac{E_1(t)-\varepsilon_1}{t^3}\ \mathsf{d}\,t &= \\
= \frac{2}{2\cdot 12}\cdot \frac{1}{t^2}\Big|_N^\infty + 2\int_N^\infty \frac{\mathsf{d}\,E_2(t)}{t^3} &= \\
= -\frac{1}{12N^2} + \frac{2E_2(t)}{t^3}\Big|_N^\infty + 6\int_N^\infty \frac{E_2(t)}{t^4}\ \mathsf{d}\,t &= \\
= -\frac{1}{12N^2} - \underbrace{\frac{2E_2(N)}{N^3}}_{\substack{(8.2.89)\ \| \\ 0}} + \underbrace{6\int_N^\infty \underbrace{\frac{E_2(t)}{t^4}}_{\underset{t\to\infty}{\mathbf{o}}\left(\frac{1}{t^3}\right)}\ \mathsf{d}\,t}_{\underset{N\to\infty}{\mathbf{o}}\left(\frac{1}{N^2}\right)} &= \\
= -\frac{1}{12N^2} + \underset{N\to\infty}{\mathbf{o}}\left(\frac{1}{N^2}\right)
\end{aligned}
$$

Подставив это в (8.2.96), получим:

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=1}^N \frac{1}{n} &= \ln N + C + \frac{1}{2N} + 2\int_N^\infty \frac{E_1(t)}{t^3}\ \mathsf{d}\,t = \\
&= \ln N + C + \frac{1}{2N} - \frac{1}{12N^2} + \underset{N\to\infty}{\mathbf{o}}\left(\frac{1}{N^2}\right)
\end{aligned}
$$

Мы получили уточнение для формулы (8.2.95):

$$
\sum_{n=1}^N \frac{1}{n} = \ln N + C + \frac{1}{2N} + -\frac{1}{12N^2} + \underset{N\to\infty}{\mathbf{o}}\left(\frac{1}{N^2}\right). \tag{8.2.97}
$$

И так далее. Применяя функции Эйлера нужное число раз, можно добиться любой точности асимптотического разложения.

◇ **8.2.56.** Найдем асимптотику суммы

$$
\sum_{n=1}^N \ln n
$$

По формуле Эйлера (8.2.82) получаем:

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=1}^N \ln n = \overbrace{\ln 1}^{\substack{0 \\ \|}} + \overbrace{\int_1^N \ln x\ \mathsf{d}\,x}^{\substack{N\cdot\ln N - (N-1) \\ \| \\ x\cdot \ln x\big|_1^N - \int_1^N x\ \mathsf{d}\ln x \\ \|}} + \int_1^N \frac{\{x\}}{x}\ \mathsf{d}\,x &= \\
= N\cdot\ln N - N + 1 + \int_1^N \frac{\{x\}}{x}\ \mathsf{d}\,x &= \\
= N\cdot\ln N - N + 1 + \int_1^N \frac{E_0(x)}{x}\ \mathsf{d}\,x &= \\
= N\cdot\ln N - N + 1 + \int_1^N \frac{\varepsilon_0 + E_0(x) - \varepsilon_0}{x}\ \mathsf{d}\,x &= \\
= N\cdot\ln N - N + 1 + &\\
+ \underbrace{\varepsilon_0}_{\substack{(8.2.90)\ \| \\ \frac{1}{2}}} \int_1^N \frac{\mathsf{d}\,x}{x} + \int_1^N \frac{E_0(x)-\varepsilon_0}{x}\ \mathsf{d}\,x &= \\
= N\cdot\ln N - N + 1 + \frac{1}{2}\ln N + \int_1^N \frac{\mathsf{d}\,E_1(x)}{x}\ \mathsf{d}\,x &= \\
= N\cdot\ln N - N + 1 + \frac{1}{2}\ln N + \underbrace{\frac{E_1(x)}{x}\Big|_1^N}_{\substack{\| \\ \frac{E_1(N)}{N} - \frac{E_1(1)}{1} \\ (8.2.89)\ \| \\ 0}} &+ \\
+ \int_1^N \frac{E_1(x)}{x^2}\ \mathsf{d}\,x = N\cdot\ln N - N + 1 + \frac{1}{2}\ln N &+ \\
+ \int_1^N \frac{E_1(x)}{x^2}\ \mathsf{d}\,x &
\end{aligned}
$$

Теперь заметим, что поскольку функция E_1 ограничена на $\mathbb{R}$, сходится абсолютно интеграл $\int_1^\infty \frac{E_1(x)}{x^2}\ \mathsf{d}\,x$:

$$
\int_1^\infty \left|\frac{E_1(x)}{x^2}\right|\ \mathsf{d}\,x \leqslant \int_1^\infty \frac{M}{x^2}\ \mathsf{d}\,x < \infty
$$

Обозначим буквой A его значение:

$$
A = \int_1^\infty \frac{E_1(x)}{x^2}\ \mathsf{d}\,x
$$

Тогда

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=1}^N \ln n = N\cdot\ln N - N + 1 + \frac{1}{2}\ln N &+ \\
+ \int_1^N \frac{E_1(x)}{x^2}\ \mathsf{d}\,x = N\cdot\ln N - N + 1 + \frac{1}{2}\ln N &+ \\
+ \underbrace{\int_1^\infty \frac{E_1(x)}{x^2}\ \mathsf{d}\,x}_{\substack{\| \\ A}} - \underbrace{\int_N^\infty \underbrace{\frac{E_1(x)}{x^2}}_{\substack{\| \\ \underset{x\to\infty}{\mathbf{o}}\left(\frac{1}{x}\right)}}\ \mathsf{d}\,x}_{\substack{\| \\ \underset{N\to\infty}{\mathbf{o}}(1)}} &
\end{aligned}
$$

И в качестве ответа получаем:

$$
\sum_{n=1}^N \ln n = N\cdot\ln N - N + \frac{1}{2}\ln N + 1 - A + \underset{N\to\infty}{\mathbf{o}}(1)
$$

(A определено выше). Понятно, что эту асимптотику можно уточнять.

▷ **8.2.57.** Уточните асимптотическую формулу (8.2.81) для частичных сумм ряда Дирихле:

$$
\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^\alpha}, \qquad 0 < \alpha \neq 1
$$

Точное вычисление сумм. Неожиданное следствие формулы Эйлера состоит в том, что, если под знаком суммы стоит многочлен, то мы можем в точности сосчитать частичную сумму ряда.

◇ **8.2.58.** Выведем формулу для суммы

$$\sum_{n=1}^{N} n^2$$

По формуле Эйлера получаем:

$$\sum_{n=1}^{N} n^2 = 1 + \int_1^N x^2 \ \mathsf{d}\, x + 2\int_1^N \{x\} \cdot x \ \mathsf{d}\, x =$$

$$= 1 + \frac{N^3-1}{3} + 2\int_1^N \Big(\varepsilon_0 + E_0(x) - \varepsilon_0\Big) \cdot x \ \mathsf{d}\, x =$$

$$= 1 + \frac{N^3-1}{3} + 2\underbrace{\varepsilon_0}_{\substack{(8.2.90)\ \| \\ \frac{1}{2}}} \int_1^N x \ \mathsf{d}\, x +$$

$$+ 2\int_1^N \Big(E_0(x) - \varepsilon_0\Big) \cdot x \ \mathsf{d}\, x =$$

$$= 1 + \frac{N^3-1}{3} + \frac{N^2-1}{2} + 2\int_1^N x \ \mathsf{d}\, E_1(x) =$$

$$= 1 + \frac{N^3-1}{3} + \frac{N^2-1}{2} +$$

$$+ \underbrace{2x \cdot E_1(x)\Big|_1^N}_{\substack{\| \\ 2N \cdot E_1(N) - 2 \cdot E_1(1) \\ (8.2.89)\ \| \\ 0}} - 2\underbrace{\int_1^N E_1(x) \ \mathsf{d}\, x}_{\substack{\| \\ (N-1)\int_0^1 E_1(x) \ \mathsf{d}\, x \\ \| \\ (N-1)\cdot \varepsilon_1 \\ (8.2.91)\ \| \\ -\frac{N-1}{12}}} =$$

$$= 1 + \frac{N^3-1}{3} + \frac{N^2-1}{2} + \frac{N-1}{6} =$$

$$= \frac{N^3}{3} + \frac{N^2}{2} + \frac{N}{6}$$

Вывод:

$$\sum_{n=1}^{N} n^2 = \frac{N^3}{3} + \frac{N^2}{2} + \frac{N}{6} \qquad (8.2.98)$$

▷ **8.2.59.** Найдите формулы для сумм:

1) $\sum_{n=1}^{N} n^3$,
2) $\sum_{n=1}^{N} n^4$.

Глава 9

ФУНКЦИОНАЛЬНАЯ СХОДИМОСТЬ, ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ РЯДЫ И АППРОКСИМАЦИЯ

§ 1 Функциональные последовательности и функциональные ряды

- *Функциональной последовательностью* называется последовательность, элементами которой являются функции:
$$f_1, f_2, f_3, \ldots$$
- Если задана функциональная последовательность $\{a_n\}$, то последовательностью ее *частичных сумм* называется функциональная последовательность
$$S_N(x) = \sum_{n=1}^{N} a_n(x) = a_1(x) + a_2(x) + a_3(x) + \ldots + a_N(x)$$
Пара последовательностей $\{a_n\}$ и $\{S_N\}$ называется *функциональным рядом* и обозначается
$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) = a_1(x) + a_2(x) + a_3(x) + \ldots$$
Функции a_n называются *слагаемыми* ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, а функции S_N – его *частичными суммами*.

(a) Поточечная сходимость

Область сходимости функциональной последовательности

- Пусть задана функциональная последовательность
$$f_n(x).$$
При каждом фиксированном значении переменной $x = x_0$ она превращается в числовую последовательность
$$f_n(x_0).$$
Если эта числовая последовательность сходится
$$\exists \lim_{n\to\infty} f_n(x_0) = f(x_0),$$
то говорят, что *функциональная последовательность $f_n(x)$ сходится в точке $x = x_0$*.

- Множество всех точек x, в которых последовательность $f_n(x)$ сходится называется *областью сходимости*
$$D = \{x \in \mathbb{R}: \quad \text{предел } \lim_{n\to\infty} f_n(x) \text{ существует и конечен}\},$$
а функция $x \in D \mapsto f(x)$ – *поточечным пределом функциональной последовательности* $f_n(x)$.
- Говорят, что функциональная последовательность $\{f_n\}$ стремится к функции f *поточечно* на множестве E, если для всякого $x \in E$ числовая последовательность $\{f_n(x)\}$ стремится к числу $f(x)$:
$$\forall x \in E \quad f_n(x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f(x) \tag{9.1.1}$$
коротко это записывается так:
$$f_n(x) \underset{n\to\infty}{\overset{x\in E}{\longrightarrow}} f(x)$$

$\diamond$ **9.1.1.** Функциональная последовательность
$$f_n(x) = x^n$$
имеет область сходимости
$$D = (-1; 1],$$
и ее пределом будет функция
$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \in (-1; 1) \\ 1, & \text{если } x = 1 \end{cases}$$
Это следует из очевидного соотношения
$$x^n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \begin{cases} \infty, & \text{если } |x| > 1 \\ 0, & \text{если } |x| < 1 \end{cases} \tag{9.1.2}$$

$\diamond$ **9.1.2.** Функциональная последовательность
$$f_n(x) = n^x$$
имеет область сходимости
$$D = (-\infty; 0]$$
и ее пределом будет функция
$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x < 0 \\ 1, & \text{если } x = 0 \end{cases}$$
Это следует из соотношения
$$n^\alpha \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \begin{cases} \infty, & \text{если } \alpha > 0 \\ 0, & \text{если } \alpha < 0 \end{cases} \tag{9.1.3}$$

$\diamond$ **9.1.3.** Рассмотрим функцию, заданную формулой
$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+x^n}$$
Покажем, что, несмотря на такой необычный способ задания функции, можно построить ее график (и заодно найти точки разрыва). Здесь надо использовать (9.1.2) и рассмотреть несколько случаев:

1) если $|x| > 1$, то $f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+x^n} = \left(\frac{1}{1+\infty}\right) = 0$;
2) если $|x| < 1$, то $f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+x^n} = \frac{1}{1+0} = 0$;
3) если $x = 1$, то получаем $f(1) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+x^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+1^n} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$;
4) если $x = -1$, то $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+x^n}$ не существует, и поэтому $f(-1)$ не определено.

В результате получаем
$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } |x| > 1 \\ 1, & \text{если } |x| < 1 \\ \frac{1}{2}, & \text{если } x = 1 \end{cases}$$
и график этой функции выглядит следующим образом:

Видно, что $x = 1$ здесь является точкой разрыва, а все остальные точки, в которых функция определена – то есть точки $x \in (-\infty; -1) \cup (-1; 1) \cup (1; +\infty)$ – являются точками непрерывности $f(x)$. (При этом, в точке $x = -1$ функция f не определена, и поэтому не имеет смысла говорить о непрерывности f в этой точке.)

$\diamond$ **9.1.4.** Решим ту же задачу для функции
$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{n^x - n^{-x}}{n^x + n^{-x}}$$
Рассмотрим несколько случаев (используя (9.1.3)):

1) если $x > 0$, то $f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{n^x - n^{-x}}{n^x + n^{-x}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1-n^{-2x}}{1+n^{-2x}} = \frac{1-0}{1+0} = 1$;

2) если $x < 0$, то $f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{n^x - n^{-x}}{n^x + n^{-x}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^{2x}-1}{n^{2x}+1} = \frac{0-1}{0+1} = -1$;
3) если $x = 0$, то $f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{n^0 - n^0}{n^0 + n^0} = \frac{1-1}{1+1} = 0$.

В результате получаем

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x > 0 \\ 0, & \text{если } x = 0 \\ -1, & \text{если } x < 0 \end{cases}$$

то есть $f(x)$ совпадает с функцией сигнум:

Видно, что $x = 0$ здесь является точкой разрыва, а все остальные точки, – то есть точки $x \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$ – являются точками непрерывности $f(x)$.

$\diamond$ **9.1.5.** Рассмотрим функциональную последовательность

$$f_n(x) = \sqrt[n]{1 + x^{2n}}$$

Ее областью сходимости будет вся числовая прямая

$$D = \mathbb{R}$$

а пределом будет функция

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } |x| < 1 \\ 1, & \text{если } |x| = 1 \\ x^2, & \text{если } |x| > 1 \end{cases}$$

потому что

— при $|x| < 1$

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{1 + x^{2n}} = \\ = \lim_{n\to\infty} (1 + \underbrace{x^{2n}}_{\downarrow \atop 0})^{\frac{1}{n}} = 1^0 = 1,$$

— при $|x| = 1$

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} (1 + \underbrace{x^{2n}}_{\| \atop 1})^{\frac{1}{n}} = 2^0 = 1,$$

— при $|x| > 1$

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} (1 + x^{2n})^{\frac{1}{n}} = \\ = \lim_{n\to\infty} x^2 \cdot \left(\frac{1}{\underbrace{x^{2n}}_{\downarrow \atop 0}} + 1 \right)^{\frac{1}{n}} = x^2 \cdot 1^0 = x^2.$$

$\triangleright\triangleright$ **9.1.6.** Постройте графики и найдите точки разрыва следующих функций:

1) $f(x) = \lim_{n\to\infty} x^n - x^{n+1}$;
2) $f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{x^{-n}-1}{x^{-n}+1}$;
3) $f(x) = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x^2 + \frac{1}{n^2}}$.
4) $f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{x^3 n^x - n^{-x}}{n^x + n^{-x}}$
5) $f(x) = \lim_{n\to\infty} \arcsin \frac{n^x - 1}{n^x + 1}$.
6) $f(x) = \lim_{n\to\infty} \cos^{2n} x$;
7) $f(x) = \lim_{n\to\infty} (\sin^{2n} x - \cos^{2n} x)$;
8) $f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{x}{1 + (2\sin x)^{2n}}$;
9) $f(x) = \lim_{n\to\infty} \operatorname{arctg}(nx)$;
10) $f(x) = \lim_{n\to\infty} x \cdot \operatorname{arctg}(n \cdot \operatorname{ctg} x)$;
11) $f(x) = \lim_{n\to\infty} x^2 \cdot \operatorname{arctg}(x^{2n})$;
12) $f(x) = \lim_{n\to\infty} \operatorname{arctg} \frac{x}{n}$;
13) $f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{-nx} - 2^{nx}}{2^{-nx} + 2^{nx}}$;
14) $f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{x + x^2 2^{nx}}{1 + 2^{nx}}$;
15) $f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{x 2^{nx} - 3^{nx}}{2^{nx} + 3^{nx}}$;
16) $f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{n\sin x} - 2^{-n\sin x}\cos x}{2^{n\sin x} + 2^{-n\sin x}}$;
17) $f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{n\cos x} - 2^{-n\cos x}\sin x}{2^{n\cos x} + 2^{-n\cos x}}$;
18) $f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{\log_2(1 + 2^{nx})}{\log_2(1 + 2^n)}$.

$\diamond$ **9.1.7.** Докажем следующую формулу, выражающую функцию Дирихле из (3.1.4) как двойной поточечный предел стандартных функций:

$$D(x) = \left\{ \begin{matrix} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \notin \mathbb{Q} \end{matrix} \right\} = \lim_{n\to\infty} \lim_{m\to\infty} \cos^m 2\pi \cdot n! \cdot x \tag{9.1.4}$$

(эту формулу надо понимать так: чтобы вычислить значение в точке x нужно сначала взять предел при $m \to \infty$, а затем предел при $n \to \infty$).

Доказательство. Пусть $x \in \mathbb{Q}$, то есть $x = \frac{p}{q}$, $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$, тогда при $n \geqslant q$ мы получим:

$$n! \,\vdots\, q$$

$$\Downarrow$$

$$n! \cdot x = n! \cdot \frac{p}{q} \in \mathbb{Z}$$

$$\Downarrow$$

$$\cos 2\pi \cdot n! \cdot x = 1$$

$$\Downarrow$$

$$\cos^m 2\pi \cdot n! \cdot x = 1$$

$$\Downarrow$$

$$\lim_{m\to\infty} \cos^m 2\pi \cdot n! \cdot x = 1$$

Это верно для $n \geqslant q$, то есть для почти всех n. Поэтому

$$\lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty}\cos^m 2\pi\cdot n!\cdot x = 1 = D(x)$$

Наоборот, если $x \notin \mathbb{Q}$, то при любом $n \in \mathbb{N}$ получим:

$$n!\cdot x \notin \mathbb{Z}$$

$$\Downarrow$$

$$|\cos 2\pi\cdot n!\cdot x| < 1$$

$$\Downarrow$$

$$\lim_{m\to\infty}\cos^m 2\pi\cdot n!\cdot x = 0$$

Это верно для всех n, значит

$$\lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty}\cos^m 2\pi\cdot n!\cdot x = 0 = D(x)$$

□

Область сходимости функционального ряда

- Пусть задан функциональный ряд
$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x).$$
При каждом фиксированном значении переменной $x = x_0$ последовательность его частичных сумм превращается в числовую последовательность
$$S_N(x_0) = \sum_{n=1}^{N} a_n(x_0)$$
Если эта числовая последовательность сходится
$$\exists \lim_{N\to\infty} S_N(x_0) = S(x_0) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x_0)$$
(то есть, если числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x_0)$ сходится), то говорят, что *функциональный ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходится в точке* $x = x_0$.
- Множество всех точек x, в которых ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ сходится (то есть, область сходимости функциональной последовательности S_N) называется *областью сходимости*
$$D = \{x \in \mathbb{R}: \quad \text{предел } \lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N} a_n(x) \text{ существует и конечен}\},$$
а функция $x \in D \mapsto S(x)$ – *поточечной суммой функционального ряда* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$.
- Говорят, что функциональный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходится к функции* S *поточечно* на множестве $E \subseteq \mathbb{R}$, , если для всякого $x \in E$ числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ сходится к числу $S(x)$:
$$\forall x \in E \quad \sum_{n=1}^{N} a_n(x) \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} S(x). \tag{9.1.5}$$

◇ **9.1.8.** Областью сходимости ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^n$$

будет, как мы уже отмечали в теореме 8.2.1, множество $(-1;1)$. Для наглядности в таких случаях рисуют картинку:

◇ **9.1.9.** Областью сходимости ряда Дирихле

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^x}$$

будет, как уже говорилось в примере 9.1.16, множество $(1;+\infty)$.

◇ **9.1.10.** Найдем область сходимости ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^x}$$

Для этого заметим, что

$$\left|\frac{(-1)^n}{n^x}\right| = \frac{1}{n^x} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \begin{cases} 0, & \text{если } x > 0 \\ 1, & \text{если } x = 0 \\ \infty, & \text{если } x < 0 \end{cases}$$

Отсюда получаем:

1) если $x > 0$, то $\frac{1}{n^x} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^x}$ будет сходиться по признаку Лейбница;

2) если $x \leqslant 0$, то $\left|\frac{(-1)^n}{n^x}\right| \underset{n\to\infty}{\not\longrightarrow} 0$, и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^x}$ будет расходиться в силу необходимого условия сходимости.

Вывод: областью сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^x}$ является множество $(0;+\infty)$.

◇ **9.1.11.** Найдем область сходимости ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n\cdot 3^n \cdot \sqrt{(x+2)^n}}$$

Для этого сразу заметим, что область определения нашего ряда (то есть общая область определения слагаемых ряда) есть множество $x > -2$.

1. Исследуем теперь ряд на абсолютную сходимость (то есть пробуем применить к нему теорему 8.2.11):

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{(-1)^n}{n\cdot 3^n \cdot \sqrt{(x+2)^n}}\right| = \\ = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\cdot 3^n \cdot \sqrt{(x+2)^n}} = \\ = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\cdot \left(3\cdot\sqrt{x+2}\right)^n}$$

Находим число Коши:

$$C = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n\cdot\left(3\cdot\sqrt{x+2}\right)^n}} = \frac{1}{3\cdot\sqrt{x+2}}$$

Отсюда

$$C = \frac{1}{3\cdot\sqrt{x+2}} < 1 \quad\Leftrightarrow\quad \sqrt{x+2} > \frac{1}{3} \quad\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow\quad x+2 > \frac{1}{9} \quad\Leftrightarrow\quad x > \frac{1}{9} - 2 = -\frac{17}{9}$$

Теперь можно сделать вывод, что ряд сходится при $x > -\frac{17}{9}$:

2. Посмотрим, что получается при $x < -\frac{17}{9}$:

$$x < -\frac{17}{9} \ \Rightarrow\ \sqrt{x+2} < \frac{1}{3} \ \Rightarrow\ \frac{1}{3\cdot\sqrt{x+2}} > 1 \ \Rightarrow \\ \Rightarrow\ \left|\frac{(-1)^n}{3\cdot\sqrt{x+2}}\right| = \frac{1}{3\cdot\sqrt{x+2}} \underset{n\to\infty}{\not\longrightarrow} 0 \ \Rightarrow \\ \Rightarrow\ \left(\begin{array}{c}\text{вспоминаем}\\ \text{необходимое условие}\\ \text{сходимости}\end{array}\right) \Rightarrow \\ \Rightarrow\ \text{ряд} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n\cdot 3^n\cdot\sqrt{(x+2)^n}} \text{ расходится}$$

Отмечаем это на картинке:

3. Нам остается посмотреть, что будет при $x = -\frac{17}{9}$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n\cdot 3^n\cdot\sqrt{(x+2)^n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n\cdot 3^n\cdot\sqrt{\left(\frac{1}{9}\right)^n}} = \\ = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n\cdot 3^n\cdot\frac{1}{3^n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$$

Этот ряд сходится по признаку Лейбница:

Вывод: областью сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n\cdot 3^n\cdot\sqrt{(x+2)^n}}$ является множество $\left[-\frac{17}{9};+\infty\right)$.

▷▷ **9.1.12.** Найдите область сходимости функциональных рядов:

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n}$ (признак Дирихле + необходимое условие сходимости);
2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n\sqrt{n}}$ (теорема об абсолютной сходимости);
3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{x^n}$ (необходимое условие сходимости);
4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1-x^n}$ (теорема об абсолютной сходимости + признак Даламбера + необходимое условие сходимости);
5) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \cdot \sin^n x}{n^2}$ (теорема об абсолютной сходимости + признак Даламбера + необходимое условие сходимости);
6) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(x^n + \frac{1}{n \cdot 2^n \cdot x^n}\right)$ (теорема об абсолютной сходимости + признак Даламбера + необходимое условие сходимости);
7) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1} \cdot \left(\frac{x}{2x+1}\right)^n$ (теорема об абсолютной сходимости + признак Даламбера + необходимое условие сходимости);
8) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cdot 3^{2n}}{2^n} \cdot x^n \cdot (1-x)^n$ (теорема об абсолютной сходимости + признак Даламбера + необходимое условие сходимости).

(b) Равномерная сходимость

- *Равномерной нормой функции f на множестве E*, называется величина

$$\|f\|_E = \|f(x)\|_{x \in E} := \sup_{x \in E} |f(x)| \tag{9.1.6}$$

(здесь предполагается, что функция f определена на множестве E).

◇◇ **9.1.13.**

$$\| \, x^2 \, \|_{x \in [0;2]} = \sup_{x \in [0;2]} |x^2| = 4$$

$$\| \, x^2 \, \|_{x \in \mathbb{R}} = \sup_{x \in \mathbb{R}} |x^2| = \infty$$

$$\| \sin x \, \|_{x \in \mathbb{R}} = \sup_{x \in \mathbb{R}} |\sin x| = 1$$

$$\|\operatorname{arctg} x\|_{x \in \mathbb{R}} = \sup_{x \in \mathbb{R}} |\operatorname{arctg} x| = \frac{\pi}{2}$$

Свойства равномерной нормы

1°. *Неотрицательность:*

$$\|f\|_E \geqslant 0 \tag{9.1.7}$$

причем

$$\|f\|_E = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \forall x \in E \quad f(x) = 0 \tag{9.1.8}$$

2°. *Однородность:*

$$\|\lambda \cdot f\|_E = |\lambda| \cdot \|f\|_E \,, \qquad \lambda \in \mathbb{R} \tag{9.1.9}$$

3°. *Полуаддитивность:*

$$\|f + g\|_E \leqslant \|f\|_E + \|g\|_E \tag{9.1.10}$$

4°. *Полумультпликативность:*

$$\|f \cdot g\|_E \leqslant \|f\|_E \cdot \|g\|_E \tag{9.1.11}$$

5°. *При расширении множества норма не убывает:*

$$D \subseteq E \qquad \Longrightarrow \qquad \|f\|_D \leqslant \|f\|_E \tag{9.1.12}$$

Доказательство. Все эти свойства напрямую следуют из свойств модуля. Например, полуаддитивность доказывается так:

$$\|f + g\|_E = \sup_{x \in E} |f(x) + g(x)| \leqslant (3.1.10) \leqslant \sup_{x \in E} \Big(|f(x)| + |g(x)|\Big) = (3.1.27) =$$

$$= \sup_{x \in E} |f(x)| + \sup_{x \in E} |g(x)| = \|f\|_E + \|g\|_E$$

□

Равномерная сходимость функциональной последовательности

- Говорят, что *последовательность функций* $\{f_n\}$ *стремится к функции* f *равномерно на множестве* E, если равномерная норма разности $f_n - f$ на множестве E стремится к нулю при $n \to \infty$:
$$\|f_n - f\|_E \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \tag{9.1.13}$$
Коротко это записывается так:
$$f_n(x) \overset{x\in E}{\underset{n\to\infty}{\rightrightarrows}} f(x)$$

Теорема 9.1.1 (о связи между поточечной и равномерной сходимостью). *Если последовательность функций* f_n *стремится к функции* f *равномерно на множестве* E*, то* f_n *стремится к* f *поточечно на* E*:*
$$f_n(x) \overset{x\in E}{\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}} f(x) \quad \Longleftarrow \quad f_n(x) \overset{x\in E}{\underset{n\to\infty}{\rightrightarrows}} f(x)$$

Доказательство.
$$f_n(x) \overset{x\in E}{\underset{n\to\infty}{\rightrightarrows}} f(x)$$
$$\Downarrow$$
$$\| f_n(x) - f(x) \|_{x\in E} = \sup_{x\in E} |f_n(x) - f(x)| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$
$$\Downarrow$$
$$\forall x \in E \quad 0 \leqslant |f_n(x) - f(x)| \leqslant \sup_{x\in E} |f_n(x) - f(x)| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$
$$\Downarrow$$
$$\forall x \in E \quad |f_n(x) - f(x)| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$
$$\Downarrow$$
$$\forall x \in E \quad f_n(x) - f(x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$
$$\Downarrow$$
$$\forall x \in E \quad f_n(x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f(x)$$
$$\Downarrow$$
$$f_n(x) \overset{x\in E}{\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}} f(x)$$

□

Обсудим на примерах понятие равномерной сходимости. Мы увидим, что утверждение, противоположное теореме 9.1.1 неверно: из примеров 9.1.14 и 9.1.17 следует, что функции могут сходиться поточечно, но не равномерно:
$$f_n(x) \overset{x\in E}{\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}} f(x) \quad \not\Longrightarrow \quad f_n(x) \overset{x\in E}{\underset{n\to\infty}{\rightrightarrows}} f(x).$$

◇ **9.1.14.** Очевидно,
$$x^n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \begin{cases} 0, & x \in (-1;1) \\ 1, & x = 1 \end{cases}.$$

Это соотношение можно интерпретировать так, что функциональнгая последовательность
$$f_n(x) = x^n, \qquad x \in (-1,1],$$
поточечно стремится к функции
$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in (-1;1) \\ 1, & x = 1 \end{cases}. \tag{9.1.14}$$

Однако f_n не стремится к f равномерно на $(-1,1]$:
$$\|f_n(x) - f(x)\|_{x\in(-1,1]} =$$
$$= \sup_{x\in(-1,1]} |f_n(x) - f(x)| =$$
$$= \max\{ \sup_{x\in(-1,1)} |f_n(x) - f(x)|, |f_n(1) - f(1)|\} =$$
$$= \max\{ \sup_{x\in(-1,1)} |x^n - 0|, |1^n - 1|\} =$$
$$= \max\{1, 0\} = 1 \underset{n\to\infty}{\not\longrightarrow} 0$$

◇ **9.1.15.** Та же самая функциональная последовательность, рассмотренная на отрезке $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$,

$$f_n(x) = x^n, \qquad x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right],$$

будет равномерно на нем стремиться к функции $f(x) = 0$ (получающейся из функции (9.1.14) ограничением на этот отрезок):

$$||f_n(x) - f(x)||_{x\in E} = ||x^n - 0||_{x\in\left[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right]} =$$
$$= \sup_{x\in\left[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right]} |x^n - 0| = \sup_{x\in\left[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right]} |x^n| = \left(\frac{1}{2}\right)^n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

◇ **9.1.16.** Последовательность

$$f_n(x) = \frac{\sin x}{n}$$

стремится к функции $f(x) = 0$ поточечно на множестве $E = \mathbb{R}$:

$$\frac{\sin x}{n} \underset{n\to\infty}{\overset{x\in\mathbb{R}}{\longrightarrow}} 0,$$

и эта сходимость равномерна на $E = \mathbb{R}$:

$$||f_n(x) - f(x)||_{x\in E} = \parallel \frac{\sin x}{n} - 0 \parallel_{x\in\mathbb{R}} =$$
$$= \sup_{x\in\mathbb{R}} \left|\frac{\sin x}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} \cdot \sup_{x\in\mathbb{R}} |\sin x| = \frac{1}{n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

◇ **9.1.17.** Похожая последовательность

$$f_n(x) = \sin\frac{x}{n}$$

тоже стремится к функции $f(x) = 0$ поточечно на множестве $E = \mathbb{R}$:

$$\sin\frac{x}{n} \underset{n\to\infty}{\overset{x\in\mathbb{R}}{\longrightarrow}} 0,$$

однако эта сходимость не равномерна:

$$||f_n(x) - f(x)||_{x\in E} = \parallel \sin\frac{x}{n} - 0 \parallel_{x\in\mathbb{R}} =$$
$$= \sup_{x\in\mathbb{R}} \left|\sin\frac{x}{n} - 0\right| = \sup_{x\in\mathbb{R}} \left|\sin\frac{x}{n}\right| = 1 \underset{n\to\infty}{\not\longrightarrow} 0.$$

◇ **9.1.18.** Рассмотрим функциональную последовательность

$$f_n(x) = x^n - x^{n+1}$$

на множестве $E = [0; 1]$. Ясно, что она поточечно стремится к нулю:

$$x^n - x^{n+1} \underset{n\to\infty}{\overset{x\in[0;1]}{\longrightarrow}} 0$$

Чтобы проверить стремится ли она равномерно, нужно найти норму

$$\|f_n(x) - f(x)\|_{x\in[0;1]} = \left\|x^n - x^{n+1}\right\|_{x\in[0;1]} =$$
$$= \sup_{x\in[0;1]} \left|x^n - x^{n+1}\right|$$

Это можно сделать, построив график функции $f_n(x) = x^n - x^{n+1}$ с помощью производной:

$$f_n'(x) = nx^{n-1} - (n+1)x^n =$$
$$= x^{n-1}(n - (n+1)x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \in \left(0; \frac{n}{n+1}\right)$$

Интервалы возрастания и убывания на отрезке $[0; 1]$:

Значение функции в точке максимума:

$$f_n\left(\frac{n}{n+1}\right) = \frac{n^n}{(n+1)^n} - \frac{n^{n+1}}{(n+1)^{n+1}} =$$
$$= \frac{n^n}{(n+1)^n}\left(1 - \frac{n}{n+1}\right) = \frac{n^n}{(n+1)^n} \cdot \frac{1}{n+1} =$$
$$= \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} \cdot \frac{1}{n+1}$$

График:

Норма на отрезке $[0; 1]$:

$$\|f_n(x) - f(x)\|_{x\in[0;1]} = \sup_{x\in[0;1]} \left|x^n - x^{n+1}\right| =$$
$$= f_n\left(\frac{n}{n+1}\right) = \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} \cdot \frac{1}{n+1} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{e} \cdot 0 = 0$$

Вывод: последовательность $f_n(x) = x^n - x^{n+1}$ стремится к $f(x) = 0$ (поточечно и) равномерно на множестве $E = [0; 1]$:

$$x^n - x^{n+1} \underset{n\to\infty}{\overset{x\in[0;1]}{\rightrightarrows}} 0$$

◇ **9.1.19.** Рассмотрим функциональную последовательность

$$f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}}$$

на множестве $E = \mathbb{R}$. Ясно, что она поточечно стремится к функции $f(x) = |x|$:

$$\sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}} \underset{n\to\infty}{\overset{x\in\mathbb{R}}{\longrightarrow}} \sqrt{x^2 + 0} = |x|$$

Проверим, будет ли это стремление равномерным:

$$\| f_n(x) - f(x) \|_{x\in\mathbb{R}} = \| \sqrt{x^2+\frac{1}{n^2}} - |x| \|_{x\in\mathbb{R}} =$$

$$= \sup_{x\in\mathbb{R}} \left| \sqrt{x^2+\frac{1}{n^2}} - |x| \right| = \begin{pmatrix}\text{домножаем на}\\ \text{сопряженный}\\ \text{радикал}\end{pmatrix} =$$

$$= \sup_{x\in\mathbb{R}} \left| \frac{\left(\sqrt{x^2+\frac{1}{n^2}}\right)^2 - |x|^2}{\sqrt{x^2+\frac{1}{n^2}}+|x|} \right| =$$

$$= \sup_{x\in\mathbb{R}} \left| \frac{x^2+\frac{1}{n^2}-x^2}{\sqrt{x^2+\frac{1}{n^2}}+|x|} \right| = \sup_{x\in\mathbb{R}} \left| \frac{\frac{1}{n^2}}{\sqrt{x^2+\frac{1}{n^2}}+|x|} \right| =$$

$$= \frac{1}{n^2}\cdot\frac{1}{\inf_{x\in\mathbb{R}}\left(\sqrt{x^2+\frac{1}{n^2}}+|x|\right)} =$$

$$= \frac{1}{n^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{0+\frac{1}{n^2}}+0} = \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

Вывод: последовательность $f_n(x) = \sqrt{x^2+\frac{1}{n^2}}$ стремится к $f(x)=|x|$ (поточечно и) равномерно на множестве $E=\mathbb{R}$:

$$\sqrt{x^2+\frac{1}{n^2}} \overset{x\in\mathbb{R}}{\underset{n\to\infty}{\rightrightarrows}} |x|$$

◇ **9.1.20.** Рассмотрим функциональную последовательность

$$f_n(x) = \operatorname{arctg}\frac{x}{n}$$

на множестве $E=[-a;a]$. Ясно, что она поточечно стремится к функции $f(x)=0$:

$$\operatorname{arctg}\frac{x}{n} \quad \overset{x\in[-a;a]}{\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}} \quad \operatorname{arctg} 0 = 0$$

Проверим, будет ли это стремление равномерным:

$$\| f_n(x) - f(x) \|_{x\in[-a;a]} = \| \operatorname{arctg}\frac{x}{n} \|_{x\in[-a;a]} =$$

$$= \sup_{x\in[-a;a]} \left| \operatorname{arctg}\frac{x}{n} \right| =$$

$$= \sup_{x\in[-a;a]} \left| \int_{-a}^{x} \left(\operatorname{arctg}\frac{t}{n}\right)'_t \,\mathsf{d}\,t \right| =$$

$$= \sup_{x\in[-a;a]} \left| \int_{-a}^{x} \frac{\frac{1}{n}}{1+\frac{t^2}{n^2}} \,\mathsf{d}\,t \right| =$$

$$= \sup_{x\in[-a;a]} \int_{-a}^{x} \frac{\frac{1}{n}}{1+\frac{t^2}{n^2}} \,\mathsf{d}\,t \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{x\in[-a;a]} \int_{-a}^{x} \frac{\frac{1}{n}}{1+0} \,\mathsf{d}\,t = \frac{1}{n}\cdot(a-a) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

Вывод: последовательность $f_n(x) = \operatorname{arctg}\frac{x}{n}$ стремится к $f(x)=0$ (поточечно и) равномерно на множестве $E=[-a;a]$:

$$\operatorname{arctg}\frac{x}{n} \overset{x\in[-a;a]}{\underset{n\to\infty}{\rightrightarrows}} 0$$

⊳⊳ **9.1.21.** Проверьте соотношения:

1) $\operatorname{arctg}\frac{x}{n} \overset{x\in\mathbb{R}}{\underset{n\to\infty}{\rightrightarrows}} 0$;

2) $\sin\frac{x}{n} \overset{x\in[-a;a]}{\underset{n\to\infty}{\rightrightarrows}} 0$ (воспользоваться тем же приемом, что и в примере 9.1.20);

3) $n^x \overset{x\in(-\infty;0)}{\underset{n\to\infty}{\rightrightarrows}} 0$;

4) $\frac{1}{1+x^n} \overset{|x|<\frac{3}{4}}{\underset{n\to\infty}{\rightrightarrows}} 1$;

5) $\frac{1}{1+x^n} \overset{|x|<1}{\underset{n\to\infty}{\rightrightarrows}} 1$;

6) $\frac{n^x-n^{-x}}{n^x+n^{-x}} \overset{x>0}{\underset{n\to\infty}{\rightrightarrows}} 1$;

7) $\sin^{2n} x \overset{|x|<1}{\underset{n\to\infty}{\rightrightarrows}} 0$;

8) $\sin^{2n} x \overset{|x|<\frac{\pi}{2}}{\underset{n\to\infty}{\rightrightarrows}} 0$;

Свойства равномерно сходящихся функциональных последовательностей.

1°. *Если функции f_n равномерно сходятся к функции f на множестве E, то равномерная норма последовательности f_n ограничена:*

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \|f_n\|_E < \infty.$$

2°. *Если функции f_n непрерывны на множестве E и равномерно сходятся на нем к функции f*

$$f_n(x) \overset{x\in E}{\underset{n\to\infty}{\rightrightarrows}} f(x),$$

то функция f непрерывна на множестве E.

3°. *Если функции f_n непрерывны и равномерно сходятся на интервале (a,b), то для всякой точки $c\in(a,b)$ справедливо равенство*

$$\lim_{x\to c}\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty}\lim_{x\to c} f_n(x) \tag{9.1.15}$$

4°. *Если функции f_n непрерывны и равномерно сходятся на отрезке $[a,b]$, то*

$$\int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)\ \mathsf{d}\,x = \lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\ \mathsf{d}\,x \tag{9.1.16}$$

5°. *Пусть f_n – гладкие функции на $[a,b]$, их производные f_n' равномерно сходятся на отрезке $[a,b]$, и хотя бы для одной точки $c\in[a,b]$ существует конечный предел*

$$\lim_{n\to\infty} f_n(c) \tag{9.1.17}$$

Тогда функции f_n равномерно сходятся на отрезке $[a,b]$, причем

$$\Big(\lim_{n\to\infty} f_n\Big)' = \lim_{n\to\infty} f_n' \tag{9.1.18}$$

Доказательство. 1. Если $\|f_n-f\|_E \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, то $\sup_{n\in\mathbb{N}}\|f_n-f\|_E<\infty$, и

$$\|f_n\|_E \leqslant \|f_n-f\|_E+\|f\|_E \leqslant \sup_{n\in\mathbb{N}}\|f_n-f\|_E+\|f\|_E<\infty.$$

2. Пусть функции f_n непрерывны на множестве E и равномерно сходятся к функции f на E. Покажем, что f непрерывна на E, то есть что для любой последовательности $x_i\in E$, сходящейся к точке $c\in E$

$$x_i \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} c$$

обязательно выполняется соотношение

$$f(x_i)\underset{i\to\infty}{\longrightarrow} f(c)$$

Для этого зафиксируем какой-нибудь $\varepsilon>0$ и покажем, что почти все числа $f(x_i)$ содержатся в интервале $(f(c)-\varepsilon, f(c)+\varepsilon)$, то есть, что для почти всех номеров $i\in\mathbb{N}$ выполняется неравенство

$$|f(x_i)-f(c)|<\varepsilon \tag{9.1.19}$$

Для этого заметим, что из равномерной сходимости f_n к f то есть из соотношения

$$\|\ f_n(x)-f(x)\ \|_{x\in E}\underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

следует что найдется номер $N\in\mathbb{N}$, для которого

$$\|\ f_N(x)-f(x)\ \|_{x\in E}<\frac{\varepsilon}{3}$$

Поскольку функция f_N непрерывна на множестве E, должно выполняться соотношение

$$f_N(x_i)\underset{i\to\infty}{\longrightarrow} f_N(c)$$

Значит, найдется такой номер $I\in\mathbb{N}$, что

$$\forall i\geqslant I\quad |f_N(x_i)-f_N(c)|<\frac{\varepsilon}{3}$$

Теперь получаем $\forall i\geqslant I$

$$\begin{aligned}|f(x_i)-f(c)| = |f(x_i)-f_N(x_i)+f_N(x_i)-f_N(c)+f_N(c)-f(c)|\leqslant\\ \leqslant |f(x_i)-f_N(x_i)|+|f_N(x_i)-f_N(c)|+|f_N(c)-f(c)|\leqslant\\ \leqslant\|\ f(x)-f_N(x)\ \|_{x\in E}+|f_N(x_i)-f_N(c)|+\|\ f_N(c)-f(c)\ \|_{x\in E}<\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon\end{aligned}$$

Мы получили то, что хотели: формула (9.1.19) выполняется для почти всех $i\in\mathbb{N}$.

3. Пусть функции f_n непрерывны и равномерно сходятся на интервале (a,b) к какой-то функции f:

$$f_n(x)\underset{n\to\infty}{\overset{x\in(a,b)}{\rightrightarrows}} f(x)$$

Тогда функция f будет непрерывна в силу уже доказанного свойства 1^0, поэтому для всякой точки $c \in (a,b)$ мы получим

$$\lim_{x\to c}\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{x\to c} f(x) = f(c) = \lim_{n\to\infty} f_n(c) = \lim_{n\to\infty}\lim_{x\to c} f_n(x)$$

4. Пусть функции f_n непрерывны и равномерно сходятся на отрезке $[a,b]$ к какой-нибудь функции f. Тогда

$$\left|\int_a^b f_n(x)\,\mathsf{d}\,x - \int_a^b f(x)\,\mathsf{d}\,x\right| = \left|\int_a^b (f_n(x)-f(x))\,\mathsf{d}\,x\right| \leqslant \int_a^b |f_n(x)-f(x)|\,\mathsf{d}\,x \leqslant$$

$$\leqslant \int_a^b \sup_{x\in[a,b]} |f_n(x)-f(x)|\,\mathsf{d}\,x = \sup_{x\in[a,b]} |f_n(x)-f(x)|\cdot \int_a^b 1\,\mathsf{d}\,x = \| f_n(x)-f(x)\|_{x\in[a,b]}\cdot(b-a) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

То есть

$$\int_a^b f_n(x)\,\mathsf{d}\,x - \int_a^b f(x)\,\mathsf{d}\,x \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

или

$$\int_a^b f_n(x)\,\mathsf{d}\,x \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int_a^b f(x)\,\mathsf{d}\,x$$

а это уже означает, что выполняется (9.1.16):

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\,\mathsf{d}\,x = \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,\mathsf{d}\,x$$

5. Пусть f_n – гладкие функции на $[a,b]$, их производные f_n' равномерно сходятся на отрезке $[a,b]$ к какой-то функции g,

$$f_n'(x) \overset{x\in E}{\underset{n\to\infty}{\rightrightarrows}} g(x), \tag{9.1.20}$$

и хотя бы для одной точки $c\in[a,b]$ существует конечный предел (9.1.17):

$$H = \lim_{n\to\infty} f_n(c).$$

Тогда, в силу доказанного уже свойства 2°, функция g непрерывна на отрезке $[a,b]$. Поэтому можно рассмотреть функцию

$$f(x) = H + \int_c^x g(t)\,\mathsf{d}\,t, \quad x\in[a,b] \tag{9.1.21}$$

Покажем, что функции f_n равномерно сходятся к функции f на отрезке $[a,b]$. Заметим, что

$$|f_n(x)-f(x)| = \left|\left(f_n(c)+\int_c^x f_n'(t)\,\mathsf{d}\,x\right) - \left(H + \int_c^x g(t)\,\mathsf{d}\,t\right)\right| =$$

$$= \left|(f_n(c)-H) + \left(\int_c^x f_n'(t)\,\mathsf{d}\,x - \int_c^x g(t)\,\mathsf{d}\,t\right)\right| \leqslant |f_n(c)-H| + \left|\int_c^x (f_n'(t)-g(t))\,\mathsf{d}\,t\right| \leqslant$$

$$\leqslant |f_n(c)-H| + \int_c^x |f_n'(t)-g(t)|\,\mathsf{d}\,t \leqslant |f_n(c)-H| + \int_c^x \sup_{t\in[a,b]} |f_n'(t)-g(t)|\,\mathsf{d}\,t =$$

$$= |f_n(c)-H| + \sup_{t\in[a,b]} |f_n'(t)-g(t)|\cdot|x-c| = |f_n(c)-H| + \| f_n'(t)-g(t)\|_{t\in[a,b]}\cdot|x-c|$$

Отсюда

$$\| f_n(x)-f(x)\|_{x\in[a,b]} = \sup_{x\in[a,b]} |f_n(x)-f(x)| = |f_n(c)-H| + \| f_n'(t)-g(t)\|_{t\in[a,b]}\cdot \sup_{x\in[a,b]}|x-c| \leqslant$$

$$\leqslant |f_n(c)-H| + \| f_n'(t)-g(t)\|_{t\in[a,b]}\cdot|b-a| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0+0=0$$

То есть,

$$f_n(x) \overset{x\in E}{\underset{n\to\infty}{\rightrightarrows}} f(x). \tag{9.1.22}$$

Теперь формула (9.1.18) становится очевидной:

$$\left(\lim_{n\to\infty} f_n\right)' = (9.1.22) = (f)' = (9.1.21) = g = (9.1.20) = \lim_{n\to\infty} f_n'$$

□

Критерий Коши равномерной сходимости последовательности.

Теорема 9.1.2 (критерий Коши равномерной сходимости функциональной последовательности). *Функциональная последовательность $\{f_n\}$ тогда и только тогда равномерно сходится на множестве E, когда она удовлетворяет следующим двум эквивалентным условиям:*

(i) для любых двух бесконечно больших последовательностей индексов $\{p_i\}$, $\{q_i\} \subseteq \mathbb{N}$

$$p_i \underset{i\to\infty}{\longrightarrow} \infty, \quad q_i \underset{i\to\infty}{\longrightarrow} \infty \tag{9.1.23}$$

соответствующие подпоследовательности $\{f_{p_i}\}$ и $\{f_{q_i}\}$ последовательности $\{f_n\}$ равномерно стремятся друг к другу на множестве E:

$$\| f_{p_i}(x) - f_{q_i}(x) \|_{x\in E} \underset{i\to\infty}{\longrightarrow} 0 \tag{9.1.24}$$

(ii) для любой последовательности $\{l_i\} \subseteq \mathbb{N}$ и любой бесконечно большой последовательности $\{k_i\} \subseteq \mathbb{N}$

$$k_i \underset{i\to\infty}{\longrightarrow} \infty \tag{9.1.25}$$

выполняется соотношение

$$\| f_{k_i+l_i}(x) - f_{k_i}(x) \|_{x\in E} \underset{i\to\infty}{\longrightarrow} 0 \tag{9.1.26}$$

Доказательство. Убедимся сначала, что условия (i) и (ii) действительно эквивалентны.

1. Импликация $(i) \Rightarrow (ii)$ очевидна: если выполняется (i) то есть любые две подпоследовательности $\{f_{p_i}(x)\}$ и $\{f_{q_i}(x)\}$ последовательности $\{f_n(x)\}$ стремятся друг к другу

$$\| f_{p_i}(x) - f_{q_i}(x) \|_{x\in E} \underset{i\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

то автоматически выполняется и (ii), потому что для любой последовательности $\{l_i\} \subseteq \mathbb{N}$ и любой бесконечно большой последовательности $\{k_i\} \subseteq \mathbb{N}$ мы можем положить $p_i = k_i + l_i$ и $q_i = k_i$, и тогда будет выполняться соотношение

$$\| f_{k_i+l_i}(x) - f_{k_i}(x) \|_{x\in E} = \| f_{p_i}(x) - f_{q_i}(x) \|_{x\in E} \underset{i\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

2. Докажем импликацию $(ii) \Rightarrow (i)$. Пусть выполняется (ii), то есть для любой последовательности $\{l_i\} \subseteq \mathbb{N}$ и любой бесконечно большой последовательности $\{k_i\} \subseteq \mathbb{N}$ выполняется соотношение (9.1.26). Возьмем какие-нибудь две бесконечно большие последовательности индексов

$$p_i \underset{i\to\infty}{\longrightarrow} \infty, \quad q_i \underset{i\to\infty}{\longrightarrow} \infty$$

и положим

$$k_i = \min\{p_i; q_i\}, \quad l_i = \max\{p_i; q_i\} - k_i$$

Тогда

$$k_i + l_i = \max\{p_i; q_i\}$$

и поэтому

$$f_{p_i}(x) - f_{q_i}(x) = \begin{pmatrix} f_{\max\{p_i;q_i\}}(x) - f_{\min\{p_i;q_i\}}(x), & \text{если } p_i > q_i \\ f_{\min\{p_i;q_i\}}(x) - f_{\max\{p_i;q_i\}}(x), & \text{если } p_i < q_i \\ 0, \quad \text{если } p_i = q_i \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} f_{k_i+l_i}(x) - f_{k_i}(x), & \text{если } p_i > q_i \\ f_{k_i}(x) - f_{k_i+l_i}(x), & \text{если } p_i < q_i \\ 0, \quad \text{если } p_i = q_i \end{pmatrix}$$

В любом случае получается

$$\| f_{p_i}(x) - f_{q_i}(x) \|_{x\in E} = \| f_{k_i+l_i}(x) - f_{k_i}(x) \|_{x\in E}$$

поэтому

$$\| f_{p_i}(x) - f_{q_i}(x) \|_{x\in E} = \| f_{k_i+l_i}(x) - f_{k_i}(x) \|_{x\in E} \underset{i\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

и значит,

$$\| f_{p_i}(x) - f_{q_i}(x) \|_{x\in E} \underset{i\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

Последовательности $\{p_i\}$ и $\{q_i\}$ здесь выбирались с самого начала произвольными. Это значит, что выполняется (i). Таким образом, мы доказали, что из (ii) следует (i).

3. Докажем теперь, что если последовательность $\{f_n(x)\}$ сходится равномерно к некоторой функции f, то есть

$$\| f_n(x) - f(x) \|_{x\in E} \underset{i\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

то $\{f_n(x)\}$ обязательно должна обладать свойством (i). Возьмем любые две бесконечно большие последовательности индексов $\{p_i\}$, $\{q_i\} \subseteq \mathbb{N}$

$$p_i \underset{i\to\infty}{\longrightarrow} \infty, \quad q_i \underset{i\to\infty}{\longrightarrow} \infty$$

Соответствующие подпоследовательности $\{f_{p_i}(x)\}$ и $\{f_{q_i}(x)\}$ тоже сходится равномерно к $f(x)$, потому что

$$\| f_{p_i}(x) - f(x) \|_{x\in E} \underset{i\to\infty}{\longrightarrow} 0, \quad \| f_{q_i}(x) - f(x) \|_{x\in E} \underset{i\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

поэтому

$$0 \leqslant \| f_{p_i}(x) - f_{q_i}(x) \|_{x\in E} = \| f_{p_i}(x) - f(x) + f(x) - f_{q_i}(x) \|_{x\in E} \leqslant (9.1.10) \leqslant$$
$$\leqslant \| f_{p_i}(x) - f(x) \|_{x\in E} + \| f(x) - f_{q_i}(x) \|_{x\in E} \underset{i\to\infty}{\longrightarrow} 0 + 0 = 0$$

То есть,

$$\| f_{p_i}(x) - f_{q_i}(x) \|_{x\in E} \underset{i\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

и это значит, что $\{f_n(x)\}$ действительно должна обладать свойством (i).

4. Пусть выполнено (i), то есть для любых последовательностей индексов

$$p_i \underset{i\to\infty}{\longrightarrow} \infty, \quad q_i \underset{i\to\infty}{\longrightarrow} \infty$$

выполняется соотношение

$$\| f_{p_i}(x) - f_{q_i}(x) \|_{x\in E} \underset{i\to\infty}{\longrightarrow} 0 \qquad (9.1.27)$$

Тогда для всякой точки $a \in E$ мы получим

$$0 \leqslant |f_{p_i}(a) - f_{q_i}(a)| \leqslant \sup_{x\in E} |f_{p_i}(x) - f_{q_i}(x)| = \| f_{p_i}(x) - f_{q_i}(x) \|_{x\in E} \underset{i\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

откуда по теореме о двух милиционерах,

$$f_{p_i}(a) - f_{q_i}(a) \underset{i\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

Это значит, что для всякой точки $a \in E$ числовая последовательность $\{f_n(a)\}$ сходится по критерию Коши 3.2.15. Обозначим через $f(a)$ ее предел:

$$f(a) = \lim_{n\to\infty} f_n(a), \quad a \in E \qquad (9.1.28)$$

Мы получили функцию f, определенную на множестве $x \in E$.

Покажем, что функциональная последовательность $f_n(x)$ равномерно сходится к функции f на множестве E.

$$\| f_n(x) - f(x) \|_{x\in E} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

Предположим, что это не так, то есть что числовая последовательность $c_n = \| f_n(x) - f(x) \|_{x\in E}$ не стремится к нулю:

$$c_n = \| f_n(x) - f(x) \|_{x\in E} \underset{n\to\infty}{\not\longrightarrow} 0 \qquad (9.1.29)$$

Тогда, по свойству 2^0 на с.228, существуют подпоследовательность $p_i \underset{i\to\infty}{\longrightarrow} \infty$ и число $\varepsilon > 0$ такие, что

$$c_{p_i} > \varepsilon$$

То есть,

$$\| f_{p_i}(x) - f(x) \|_{x\in E} = \sup_{x\in E} |f_{p_i}(x) - f(x)| > \varepsilon$$

Отсюда следует, что для всякого i существует точка $a_i \in E$ такая что

$$|f_{p_i}(a_i) - f(a_i)| > \varepsilon$$

то есть

$$f_{p_i}(a_i) - \varepsilon < f(a_i) < f_{p_i}(a_i) - \varepsilon$$

Вспомним теперь формулу (9.1.28): число $f(a_i)$ является пределом последовательности $f_n(a_i)$ и лежит в интервале $(f_{p_i}(a_i) - \varepsilon, f_{p_i}(a_i) - \varepsilon)$ Значит, почти все числа $f_n(a_i)$ лежат в этом интервале:

$$f_{p_i}(a_i) - \varepsilon < f_n(a_i) < f_{p_i}(a_i) - \varepsilon$$

Обозначим через q_i какое-нибудь значение n с таким свойством:

$$f_{p_i}(a_i) - \varepsilon < f_{q_i}(a_i) < f_{p_i}(a_i) - \varepsilon$$

Из этого двойного неравенства получаем

$$|f_{p_i}(a_i) - f_{q_i}(a_i)| > \varepsilon$$

а отсюда

$$\| f_{p_i}(x) - f_{q_i}(x) \|_{x\in E} \geqslant |f_{p_i}(a_i) - f_{q_i}(a_i)| > \varepsilon$$

Это противоречит формуле (9.1.27). Таким образом, наше предположение (5.7) неверно. $\square$

Равномерная сходимость функционального ряда

Говорят, что функциональный ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$$

сходится *равномерно* на множестве E к сумме S, если последовательность его частичных сумм

$$S_N(x) = \sum_{n=1}^{N} a_n(x)$$

стремится к функции S равномерно на E:

$$S_N(x) \underset{N\to\infty}{\overset{x\in E}{\rightrightarrows}} S(x) \qquad (9.1.30)$$

(то есть $||S_N(x) - S(x)||_{x\in E} \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} 0$).

◇ **9.1.22.** Выясним, будет ли ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} (1-x)\cdot x^n$$

сходиться равномерно на множестве $E = (0;1)$. Для этого найдем предел его частичных сумм:

$$S_N(x) = \sum_{n=1}^{N} (1-x)\cdot x^n = \sum_{n=1}^{N} (x^n - x^{n+1}) =$$
$$= (x-x^2)+(x^2-x^3)+(x^3-x^4)+...+(x^N-x^{N+1}) =$$
$$= x - x^2 + x^2 - x^3 + x^3 - x^4 + ... + x^N - x^{N+1} =$$
$$= x - x^{N+1} \underset{N\to\infty}{\overset{x\in(0;1)}{\longrightarrow}} x = S(x)$$

Теперь найдем норму остатка

$$||S_N(x) - S(x)||_{x\in(0;1)} =$$
$$= ||\left(x - x^{N+1}\right) - x||_{x\in(0;1)} =$$
$$= \sup_{x\in(0;1)} \left|x^{N+1}\right| = 1 \underset{N\to\infty}{\not\longrightarrow} 0$$

Вывод: ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(1-x)\cdot x^n$ сходится на множестве $(0;1)$ поточечно, но не равномерно к сумме $S(x) = x$.

◇ **9.1.23.** Выясним, будет ли ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x}{(nx-x+1)(nx+1)}$$

сходиться равномерно на множестве $E = (1;+\infty)$. Для этого сразу заметим, что слагаемые раскладываются на простейшие дроби:

$$\frac{x}{(nx-x+1)(nx+1)} = \frac{1}{nx-x+1} - \frac{1}{nx+1}$$

Вычислим частичные суммы:

$$S_N(x)=\sum_{n=0}^{N}\left(\frac{1}{nx-x+1}-\frac{1}{nx+1}\right)=$$

$$=\underbrace{\frac{1}{-x+1}-\frac{1}{1}}_{n=0}+\underbrace{\frac{1}{1}-\frac{1}{x+1}}_{n=1}+\underbrace{\frac{1}{x+1}-\frac{1}{2x+1}}_{n=2}+$$

$$+\ldots+\underbrace{\frac{1}{(N-1)x+1}-\frac{1}{Nx+1}}_{n=N}=$$

$$=\frac{1}{1-x}-\frac{1}{Nx+1}\underset{N\to\infty}{\overset{x\in(0;1)}{\longrightarrow}}\frac{1}{1-x}=S(x)$$

Теперь найдем норму

$$||S_N(x)-S(x)||_{x\in(1;+\infty)}=\sup_{x\in(1;+\infty)}\left|\frac{1}{Nx+1}\right|=$$

$$=\frac{1}{N+1}\underset{N\to\infty}{\longrightarrow}0$$

Вывод: ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x}{(nx-x+1)(nx+1)}$ сходится на множестве $(1;+\infty)$ равномерно к сумме $S(x)=\frac{1}{1-x}$.

⊳⊳ **9.1.24.** Выясните, будет ли данный ряд сходиться равномерно на множестве E:

1) $\sum_{n=1}^{\infty}(1-x)\cdot x^n$, $E=\left(0;\frac{1}{2}\right)$;
2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x}{(nx-x+1)(nx+1)}$, $E=(0;1)$;
3) $\sum_{n=1}^{\infty}(1-x^n)\cdot x^n$, $E=(0;1)$, $E=\left(0;\frac{1}{2}\right)$ (представить как сумму двух геометрических прогрессий);
4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x}{\sqrt{nx+x}+\sqrt{nx}}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{nx+x}-\sqrt{nx}\right)$, $E=(0;1)$;
5) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{nx+2x}-2\sqrt{nx+x}+\sqrt{nx}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x}{\sqrt{nx+2x}+\sqrt{nx+x}}-\frac{x}{\sqrt{nx+x}+\sqrt{nx}}\right)$, $E=(0;+\infty)$, $E=(1;+\infty)$;
6) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n+(x+1)^n}{x^n\cdot(x+1)^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{(x+1)^n}+\frac{1}{x^n}\right)$, $E=(0;1)$, $E=(1;+\infty)$.

Свойства равномерно сходящихся функциональных рядов.

1°. *Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty}a_n(x)$ равномерно сходится на множестве E, то равномерная норма его частичных сумм ограничена:*

$$\sup_{n\in\mathbb{N}}\left\|\sum_{n=1}^{N}a_n\right\|_E<\infty.$$

2^0. *Если функции a_n непрерывны на множестве E и ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n(x)$$

равномерно сходится на множестве E то его сумма

$$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n(x)$$

непрерывна на множестве E.

3^0. *Если функции a_n непрерывны на интервале (a,b) и ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n(x)$$

равномерно сходится на (a,b), то для всякой точки $c\in(a,b)$ справедливо равенство

$$\lim_{x\to c}\left(\sum_{n=1}^{\infty}a_n(x)\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\lim_{x\to c}a_n(x)\right)\qquad(9.1.31)$$

4^0. *Если функции a_n непрерывны на отрезке $[a,b]$ и ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n(x)$$

равномерно сходится на $[a,b]$, то

$$\int_a^b\left(\sum_{n=1}^{\infty}a_n(x)\right)\mathsf{d}\,x=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_a^b a_n(x)\,\mathsf{d}\,x\right)\qquad(9.1.32)$$

5^0. *Пусть a_n – гладкие функции на отрезке $[a,b]$, ряд из производных*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n'(x)$$

равномерно сходится на отрезке $[a,b]$, и хотя бы для одной точки $c \in [a,b]$ сходится числовой ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(c) \tag{9.1.33}$$

Тогда функциональный ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$$

равномерно сходится на отрезке $[a,b]$, причем его сумма будет гладкой на $[a,b]$, и ее производную можно вычислить почленным дифференцированием:

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} a_n' \tag{9.1.34}$$

Доказательство. 1. Свойство 1° следует сразу из свойства 1° на с.540.

2. Пусть дан ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$, коэффициенты которого $a_n(x)$ – непрерывные функции на множестве E. Тогда частичные суммы

$$S_N(x) = \sum_{n=1}^{N} a_n(x)$$

будут непрерывны на множестве E (по теореме 3.3.2), как конечные суммы непрерывных функций). Если ряд сходится равномерно на E, то есть частичные суммы стремятся равномерно на E к некоторой функции $S(x)$

$$S_N(x) \underset{N\to\infty}{\overset{x\in E}{\rightrightarrows}} S(x),$$

то по свойству 2° на с.540 эта функция

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$$

должна быть непрерывна на множестве E.

3. Пусть функции $a_n(x)$ непрерывны и ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$$

равномерно сходятся на интервале (a,b). Это значит, что его частичные суммы

$$S_N(x) = \sum_{n=1}^{N} a_n(x)$$

непрерывны на (a,b) и стремятся равномерно на (a,b) к некоторой функции $S(x)$

$$S_N(x) \underset{N\to\infty}{\overset{x\in(a,b)}{\rightrightarrows}} S(x),$$

По свойству 3° на с.540, отсюда следует, что для всякой точки $c \in (a,b)$ справедливо равенство

$$\lim_{x\to c}\lim_{N\to\infty} S_N(x) = \lim_{N\to\infty}\lim_{x\to c} S_N(x)$$

то есть равенство

$$\lim_{x\to c}\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\lim_{x\to c} a_n(x)\right)$$

4. Пусть функции a_n непрерывны и ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

равномерно сходятся на отрезке $[a,b]$. Это означает, что частичные суммы ряда $S_N = \sum_{n=1}^{N} a_n$ непрерывны на $[a,b]$ и стремятся равномерно на $[a,b]$ к некоторой функции S

$$S_N(x) \overset{x\in(a,b)}{\underset{N\to\infty}{\rightrightarrows}} S(x),$$

По свойству 4° на с.541, отсюда следует, что

$$\int_a^b \lim_{N\to\infty} S_N(x)\ \mathsf{d}\,x = \lim_{N\to\infty} \int_a^b S_N(x)\ \mathsf{d}\,x$$

то есть,

$$\int_a^b \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) \right)\ \mathsf{d}\,x = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_a^b a_n(x)\ \mathsf{d}\,x \right)$$

5. Пусть a_n – гладкие функции на $[a,b]$, ряд из производных

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n'(x)$$

равномерно сходятся на отрезке $[a,b]$, и для какой-нибудь точки $c \in [a,b]$ сходится ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(c)$$

Тогда частичные суммы $S_N = \sum_{n=1}^{N} a_n$ – гладкие функции на $[a,b]$, последовательность их производных равномерно сходится на $[a,b]$ к некоторой функции $g(x)$

$$S_N'(x) \overset{x\in[a,b]}{\underset{N\to\infty}{\rightrightarrows}} g(x),$$

и для точки $c \in [a,b]$ существует конечный предел

$$\lim_{N\to\infty} S_N(c)$$

По свойству 5° на с.541, отсюда следует, что функции S_N равномерно на $[a,b]$ сходится (к некоторой гладкой функции S),

$$S_N(x) \overset{x\in[a,b]}{\underset{N\to\infty}{\rightrightarrows}} S(x),$$

причем

$$\left(\lim_{N\to\infty} S_N \right)' = \lim_{N\to\infty} S_N'$$

Это означает, что ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$$

равномерно сходятся на отрезке $[a,b]$, и

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} a_n'$$

$\square$

◇ **9.1.25.** Сумма членов геометрической прогрессии, рассматривавшаяся в теореме 8.2.1, представляетс собой функциональныцй ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^n$$

сходящийся поточечно на интервале $(-1, 1)$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}, \qquad x \in (-1, 1).$$

Однако эта сходимость не равномерна на $(-1, 1)$, потому что частичные суммы ряда не ограничены по равномерной норме на этом интервале:

$$\|S_N(x)\|_{x\in(-1;1)} = \sup_{x\in(-1;1)} \left| \sum_{n=1}^{N} x^n \right| \geqslant$$

$$\geqslant \lim_{x\to 1} \left| \sum_{n=1}^{N} x^n \right| = \left| \sum_{n=1}^{N} 1^n \right| = N \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} \infty.$$

(а в силу свойства 1° на с.546 для сходимости ряда эта последовательность должна быть ограничена).

Критерий Коши равномерной сходимости ряда.

Теорема 9.1.3 (критерий Коши равномерной сходимости ряда)**.** *Пусть $\{a_n\}$ – произвольная последовательность функций, определенных на множестве $x \in E$. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(i) *функциональный ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

сходится равномерно на множестве E;

(ii) *для любой последовательности $l_i \in \mathbb{N}$, и любой бесконечно большой последовательности $k_i \in \mathbb{N}$*

$$k_i \underset{i\to\infty}{\longrightarrow} \infty,$$

сумма $\sum_{n=k_i+1}^{k_i+l_i} a_n(x)$ стремится к нулю при $i \to \infty$ равномерно на множестве E:

$$\left\| \sum_{n=k_i+1}^{k_i+l_i} a_n \right\|_E \underset{i\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

Доказательство. Для частичных суммы $S_N(x) = \sum_{n=1}^{N} a_n(x)$ мы получаем следующую логическую цепочку:

$$\text{ряд } \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) \text{ сходится равномерно на } E$$

$$\Updownarrow$$

$$\text{последовательность } S_N(x) \text{ сходится равномерно на } E$$

$$\Updownarrow \quad \begin{matrix}\text{критерий Коши (теорема 9.1.2)} \\ \text{сходимости функциональной последовательности}\end{matrix}$$

$$\begin{matrix}\text{для любой последовательности } l_i \in \mathbb{N}, \\ \text{и любой бесконечно большой последовательности } k_i \in \mathbb{N} \quad k_i \underset{i\to\infty}{\longrightarrow} \infty, \\ \text{выполняется соотношение:} \quad \| S_{k_i+l_i}(x) - S_{k_i}(x) \|_{x\in E} \underset{i\to\infty}{\longrightarrow} 0\end{matrix}$$

$$\Updownarrow \quad S_{k_i+l_i}(x) - S_{k_i}(x) = \textstyle\sum_{n=k_i+1}^{k_i+l_i} a_n(x)$$

$$\begin{matrix}\text{для любой последовательности } l_i \in \mathbb{N}, \\ \text{и любой бесконечно большой последовательности } k_i \in \mathbb{N} \quad k_i \underset{i\to\infty}{\longrightarrow} \infty, \\ \text{выполняется соотношение:} \quad \left\| \sum_{n=k_i+1}^{k_i+l_i} a_n(x) \right\|_{x\in E} \underset{i\to\infty}{\longrightarrow} 0\end{matrix}$$

□

Необходимое условие равномерной сходимости ряда. Часто бывает, что частичные суммы функционального ряда не поддаются вычислению, как, например, в случае с рядом

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{x}{n^2} \tag{9.1.35}$$

Чтобы понять, сходится этот ряд равномерно, или нет, используются теоремы, называемые признаками равномерной сходимости. Первый из них звучит так:

Теорема 9.1.4. *Если функциональный ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$$

равномерно сходится на множестве E, то его общий член равномерно стремится к нулю на E:

$$a_n(x) \underset{n\to\infty}{\overset{x\in E}{\rightrightarrows}} 0$$

Доказательство. По критерию Коши (теорема 9.1.3), если этот ряд сходится равномерно на E, то для последовательностей $l_i = 1$, и $k_i = i$ должно выполняться условие

$$\left|\left|\sum_{n=k_i+1}^{k_i+l_i} a_n(x)\right|\right|_{x\in E} = \left|\left|\sum_{n=i+1}^{i+1} a_n(x)\right|\right|_{x\in E} = ||a_{i+1}(x)||_{x\in E} \underset{i\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

$\square$

◇ **9.1.26.** Рассмотрим ряд (9.1.35):

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{x}{n^2}$$

По признаку абсолютной сходимости (теорема 8.2.11), он сходится при любом $x \in \mathbb{R}$:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\sin\frac{x}{n^2}\right| \leqslant (4.1.92) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{x}{n^2}\right| = |x|\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} < \infty$$

Поймем, будет ли он сходиться равномерно на множестве $E = \mathbb{R}$. Для этого вычислим норму общего члена:

$$\left\|\sin\frac{x}{n^2}\right\|_{x\in\mathbb{R}} = \sup_{x\in\mathbb{R}}\left|\sin\frac{x}{n^2}\right| = 1 \underset{n\to\infty}{\not\longrightarrow} 0$$

Вывод: ряд сходится на $\mathbb{R}$, но не равномерно.

▷ **9.1.27.** Проверьте, будет ли ряд сходится равномерно на множестве $\mathbb{R}$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg}\frac{x}{n^2}$$

Здесь предварительно нужно доказать формулу, аналогичную (4.1.92):

$$|\operatorname{arctg} x| \leqslant |x|, \qquad x\in\mathbb{R} \tag{9.1.36}$$

Это можно сделать, например, с помощью формулы Ньютона-Лейбница: при $x > 0$ мы получаем

$$|\overbrace{\operatorname{arctg} x}^{\substack{0\\ \wedge\ (4.1.129)}}| = \operatorname{arctg} x = \int_0^x \frac{\mathsf{d}\, t}{1+t^2} \leqslant$$
$$\leqslant \int_0^x 1\ \mathsf{d}\, t = x = |x|$$

и отсюда уже для $x < 0$ получаем

$$\overbrace{\operatorname{arctg} x}^{\substack{0\\ \vee\ (4.1.130)}} = -\operatorname{arctg} x = \operatorname{arctg}(\overbrace{-x}^{\substack{0\\ \wedge}}) \leqslant -x = |x|$$

▷▷ **9.1.28.** Проверьте, будут ли данные ряды сходится равномерно на множестве E:

1. $\sum_{n=1}^{\infty} x^n$, $E = (-1; 1)$;
2. $\sum_{n=1}^{\infty} x^n\cdot(1-x^n)$, $E = [0; 1]$ (здесь необходимо исследование функции $x^n\cdot(1-x^n)$ на экстремум на множестве $[0; 1]$).

Признак Вейерштрасса равномерной сходимости.

Теорема 9.1.5. *Если числовой ряд, состоящий из норм функций a_n на множестве E*

$$\sum_{n=1}^{\infty} ||a_n||_E \tag{9.1.37}$$

сходится, то функциональный ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

равномерно сходится на множестве E.

Доказательство. Если ряд (9.1.37) сходится, то, по критерию Коши сходимости числового ряда (теорема 8.2.4), для любой последовательности $l_i \in \mathbb{N}$, и любой бесконечно большой последовательности $k_i \in \mathbb{N}$ $k_i \underset{i\to\infty}{\longrightarrow} \infty$,

$$\sum_{n=k_i+1}^{k_i+l_i} ||a_n(x)||_{x\in E} \underset{i\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

Отсюда

$$0 \leqslant \left\| \sum_{n=k_i+1}^{k_i+l_i} a_n(x) \right\|_{x\in E} \leqslant \sum_{n=k_i+1}^{k_i+l_i} ||a_n(x)||_{x\in E} \underset{i\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

$$\Downarrow$$

$$\left\| \sum_{n=k_i+1}^{k_i+l_i} a_n(x) \right\|_{x\in E} \underset{i\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

Поскольку это верно для любых последовательностей $l_i \in \mathbb{N}$ и $k_i \in \mathbb{N}$ ($k_i \underset{i\to\infty}{\longrightarrow} \infty$), по критерию Коши равномерной сходимости функционального ряда (теорема 9.1.3), ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ равномерно сходится на множестве E. □

◇ **9.1.29.** Проверим, будет ли ряд (9.1.35) сходиться равномерно на множестве $[0; 1]$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{x}{n^2}$$

Для этого вычислим норму общего члена:

$$\left\|\sin\frac{x}{n^2}\right\|_{x\in[0;1]} = \sup_{x\in[0;1]} \left|\sin\frac{x}{n^2}\right| = \sin\frac{1}{n^2}$$

Теперь получаем

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left\|\sin\frac{x}{n^2}\right\|_{x\in[0;1]} = \sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{1}{n^2} \leqslant$$

$$\leqslant (4.1.92) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty$$

Вывод: ряд сходится равномерно на отрезке $[0; 1]$.

▷▷ **9.1.30.** Проверьте, будут ли данные ряды сходится равномерно на множестве E:

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^2+n^2}, \quad E = \mathbb{R}$;
2. $\sum_{n=1}^{\infty} x^n, \quad E = \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$;
3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{1+n^4\cdot x^2}$, $E = \mathbb{R}$ (здесь необходимо исследование функции $\frac{x}{1+n^4\cdot x^2}$ на экстремум);
4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\cdot x}{1+n^5\cdot x}, \quad E = \mathbb{R}$;
5. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x^n}{n} - \frac{x^{n+1}}{n+1}\right), \quad E = \mathbb{R}$;
6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{\sqrt{n!}} \left(x^n + x^{-n}\right), \quad E = \left[\frac{1}{2}, 2\right]$.

Признак Лейбница равномерной сходимости.

Теорема 9.1.6. *Пусть функциональная последовательность $\{b_n;\ x \in E\}$ обладает следующими свойствами:*

(i) *она неотрицательна и невозрастает,*

$$b_0(x) \geqslant b_1(x) \geqslant b_2(x) \geqslant ... \geqslant 0 \tag{9.1.38}$$

(ii) *она стремится к нулю равномерно на E:*

$$||b_n||_E \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \tag{9.1.39}$$

Тогда

(a) *функциональный ряд $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n b_n$ сходится равномерно на множестве E,*

(b) *его остаток оценивается сверху нормой своего первого члена:*

$$\left|\left|\sum_{n=N+1}^{\infty}(-1)^n b_n(x)\right|\right|_{x\in E} \leqslant ||b_{N+1}||_E \tag{9.1.40}$$

Доказательство. Из признака Лейбница сходимости числового ряда (теорема 8.2.12) следует, что при каждом фиксированном $x\in E$ числовой ряд $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n b_n(x)$ сходится. Обозначим через $S(x)$ его сумму, а через $S_N(x)$ его частичные суммы:

$$S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n b_n(x), \qquad S_N(x)=\sum_{n=0}^{N}(-1)^n b_n(x)$$

В силу (8.2.52), мы получаем:

$$\forall x\in E \qquad |S(x)-S_N(x)| = \left|\sum_{n=N+1}^{\infty}(-1)^n b_n(x)\right| \leqslant b_{N+1}(x) \leqslant ||b_{N+1}||_E$$

$$\Downarrow$$

$$||S(x)-S_N(x)||_{x\in E} = \sup_{x\in E}|S(x)-S_N(x)| = \sup_{x\in E}\left|\sum_{n=N+1}^{\infty}(-1)^n b_n(x)\right| \leqslant ||b_{N+1}||_E$$

То есть справедлива оценка (9.1.40). Из нее сразу следует равномерная сходимость ряда:

$$||S(x)-S_N(x)||_{x\in E} \leqslant ||b_{N+1}||_E \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

$$\Downarrow$$

$$||S(x)-S_N(x)||_{x\in E} \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

$$\Downarrow$$

$$S_N(x) \overset{x\in E}{\underset{N\to\infty}{\rightrightarrows}} S(x)$$

□

Признаки Дирихле и Абеля равномерной сходимости.

Теорема 9.1.7 (признак Дирихле). [1] *Пусть функциональные последовательности $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ обладают следующими свойствами:*

(i) *частичные суммы ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ равномерно ограничены на множестве E:*

$$\sup_{N\in\mathbb{N}}\left|\left|\sum_{n=1}^{N} a_n(x)\right|\right|_{x\in E} < \infty$$

(ii) *последовательность $\{b_n(x)\}$ монотонна при любом $x\in E$;*

(iii) *последовательность $\{b_n\}$ равномерно стремится к нулю на множестве E:*

$$\|b_n(x)\|_{x\in E} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \tag{9.1.41}$$

Тогда ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)\cdot b_n(x)$ равномерно сходится на множестве E.

[1] Теорема 9.1.7 часто называется также признаком Харди.

Доказательство. Здесь с очевидными изменениями копируется доказательство теоремы 8.2.13. Обозначим

$$C = \sup_{N\in\mathbb{N}} \left\| \sum_{n=1}^{N} a_n(x) \right\|_{x\in E} < \infty$$

и заметим, что

$$\sup_{p,q\in\mathbb{N}} \left\| \sum_{n=p}^{q} a_n(x) \right\|_{x\in E} \leqslant 2C < \infty \qquad (9.1.42)$$

Действительно,

$$\left\| \sum_{n=p}^{q} a_n(x) \right\|_{x\in E} = \left\| \sum_{n=1}^{q} a_n(x) - \sum_{n=1}^{p-1} a_n(x) \right\|_{x\in E} \leqslant \underbrace{\left\| \sum_{n=1}^{q} a_n(x) \right\|_{x\in E}}_{\substack{\wedge\!\!\backslash \\ C}} + \underbrace{\left\| \sum_{n=1}^{p-1} a_n(x) \right\|_{x\in E}}_{\substack{\wedge\!\!\backslash \\ C}} \leqslant 2C$$

Воспользуемся теперь критерием Коши (теорема 9.1.3): выберем произвольные последовательности $l_i \in \mathbb{N}$ и $k_i \in \mathbb{N}$ ($k_i \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$). По неравенству Абеля (7.2.114) получаем:

$$\left| \sum_{n=k_i+1}^{k_i+l_i} a_n(x)\cdot b_n(x) \right| \leqslant 3\cdot \max_{k_i\leqslant N\leqslant k_i+l_i} \underbrace{\left| \sum_{n=k_i+1}^{N} a_n(x) \right|}_{\substack{\wedge\!\!\backslash \\ \left\| \sum_{n=k_i+1}^{N} a_n(x) \right\|_{x\in E} \\ \wedge\!\!\backslash\ (9.1.42) \\ 2C}} \cdot \max\Big\{ \underbrace{|b_{k_i+1}(x)|}_{\substack{\wedge\!\!\backslash \\ \|b_{k_i+1}(x)\|_{x\in E}}},\ \underbrace{|b_{k_i+l_i}(x)|}_{\substack{\wedge\!\!\backslash \\ \|b_{k_i+l_i}(x)\|_{x\in E}}} \Big\}$$

$$\Downarrow$$

$$\left\| \sum_{n=k_i+1}^{k_i+l_i} a_n(x)\cdot b_n(x) \right\|_{x\in E} \leqslant 6\cdot C\cdot \max\Big\{ \underbrace{\|b_{k_i+1}(x)\|_{x\in E}}_{\substack{\downarrow\ (9.1.41) \\ 0}}, \underbrace{\|b_{k_i+l_i}(x)\|_{x\in E}}_{\substack{\downarrow\ (9.1.41) \\ 0}} \Big\} \underset{i\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

Это верно для любых последовательностей $l_i \in \mathbb{N}$ и $k_i \in \mathbb{N}$ ($k_i \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$), значит ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot b_n$ сходится.

□

◇ **9.1.31.** Проверим, будет ли ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n}}$$

сходиться равномерно на множестве $(-1;0)$. Обозначим

$$a_n(x) = x^n, \quad b_n(x) = \frac{1}{\sqrt{n}}$$

Тогда

$$\left\| \sum_{n=1}^{N} a_n(x) \right\|_{x\in(-1;0)} = \sup_{x\in(-1;0)} \left| \sum_{n=1}^{N} a_n(x) \right| =$$

$$= \sup_{x\in(-1;0)} \left| \sum_{n=1}^{N} x^n \right| = \sup_{x\in(-1;0)} \left| x\cdot \frac{1-x^N}{1-x} \right| \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{x\in(-1;0)} \frac{|x|\cdot(1+|x^N|)}{|1-x|} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\sup_{x\in(-1;0)} |x|\cdot(1+|x^N|)}{\inf_{x\in(-1;0)} |1-x|} \leqslant \frac{2}{1} = 2$$

откуда

$$\sup_{N\in\mathbb{N}} \left\| \sum_{n=1}^{N} a_n(x) \right\|_{x\in(-1;0)} \leqslant 2 < \infty$$

А, с другой стороны,

$$b_n(x) = \frac{1}{\sqrt{n}} \underset{n\to\infty}{\overset{\substack{\text{монотонно} \\ \text{и равномерно} \\ \text{по } x\in(-1,0)}}{\rightrightarrows}} 0$$

Вывод: ряд сходится равномерно на множестве $(-1;0)$.

▷▷ **9.1.32.** Проверьте, будут ли данные ряды сходится равномерно на множестве E:

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{\sqrt[3]{n^2+e^x}}$, $E=\mathbb{R}$;
2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos\frac{2\pi n}{3}}{\sqrt{n^2+x^2}}$, $E=\mathbb{R}$ (здесь нужно применить формулы (8.2.61));
3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin x\cdot\sin nx}{\sqrt{n+1}}$, $E=\mathbb{R}$ (тоже нужны формулы (8.2.61)).

Теорема 9.1.8 (признак Абеля)**.** *Пусть функциональные последовательности* $\{a_n\}$ *и* $\{b_n\}$ *на множестве* E *обладают следующими свойствами:*

(i) *ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходится равномерно на* E*;*

(ii) *последовательность* $\{b_n\}$ *монотонна и равномерно ограничена на* E*:*

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \|b_n(x)\|_{x\in E} < \infty$$

Тогда ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot b_n$ *сходится равномерно на* E*.*

Доказательство. Здесь повторяются рассуждения, применявшиеся при доказательстве теоремы 8.2.14. Сначала нужно заметить, что из равномерной сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ следует, что для произвольных последовательностей $l_i \in \mathbb{N}$ и $k_i \in \mathbb{N}$ ($k_i \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$) выполняется соотношение

$$\max_{k_i\leqslant N\leqslant k_i+l_i} \left\| \sum_{n=k_i+1}^{N} a_n \right\|_E \underset{i\to\infty}{\longrightarrow} 0 \tag{9.1.43}$$

После этого, обозначив

$$B = \sup_{n\in\mathbb{N}} \|b_n\|_E = \sup_{n\in\mathbb{N}} \sup_{x\in E} |b_n(x)| < \infty$$

мы пользуемся критерием Коши (теоремой 9.1.3): для произвольных последовательностей $l_i \in \mathbb{N}$ и $k_i \in \mathbb{N}$ ($k_i \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$) по неравенству Абеля (7.2.114) мы получим

$$\left| \sum_{n=k_i+1}^{k_i+l_i} a_n(x)\cdot b_n(x) \right| \leqslant 3\cdot \max_{k_i\leqslant N\leqslant k_i+l_i} \underbrace{\left| \sum_{n=k_i+1}^{N} a_n(x) \right|}_{\substack{\wedge\!\!\backslash \\ \left\|\sum_{n=k_i+1}^{N} a_n\right\|_E}} \cdot \max\Big\{ \underbrace{|b_{k_i+1}(x)|}_{\substack{\wedge\!\!\backslash \\ B}}, \underbrace{|b_{k_i+l_i}(x)|}_{\substack{\wedge\!\!\backslash \\ B}} \Big\}$$

$$\Downarrow$$

$$\left| \sum_{n=k_i+1}^{k_i+l_i} a_n\cdot b_n \right| \leqslant 3B\cdot \underbrace{\max_{k_i\leqslant N\leqslant k_i+l_i} \left| \sum_{n=k_i+1}^{N} a_n \right|}_{\substack{\downarrow\ (9.1.43) \\ 0}} \underset{i\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

Это верно для любых последовательностей $l_i \in \mathbb{N}$ и $k_i \in \mathbb{N}$ ($k_i \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$), значит ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot b_n$ сходится равномерно. □

Всюду непрерывная, но нигде не дифференцируемая функция.

◇ **9.1.33.** *Пусть числа* a *и* b *удовлетворяют условиям:*

$$0 < b < 1, \quad a \in 2\mathbb{N}-1, \quad ab > 1 + \frac{3}{2}\pi$$

Тогда функция

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b^n \cos(a^n \pi x) \tag{9.1.44}$$

определена и непрерывна всюду на $\mathbb{R}$*, но не дифференцируема ни в одной точке.*

Доказательство. Равномерные нормы слагаемых этого ряда образуют сходящийся ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} b^n \|\cos(a^n\pi x)\|_{x\in\mathbb{R}} = \sum_{n=0}^{\infty} b^n < \infty$$

поэтому по признаку Вейерштрасса (теорема 9.1.5), функциональный ряд в (9.1.44) сходится равномерно, и значит, определяет непрерывную функцию. Зафиксируем точку $x \in \mathbb{R}$ и убедимся, что f не дифференцируема в ней.

Заметим прежде всего, что

$$ab > 1 + \frac{3}{2}\pi$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{3}{2} > \frac{\pi}{ab-1} \tag{9.1.45}$$

Далее рассмотрим три последовательности:

$$\xi_k = \left\{a^k x + \frac{1}{2}\right\} - \frac{1}{2} \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$
$$\alpha_k = \left[a^k x + \frac{1}{2}\right] = a^k x - \xi_k \in \mathbb{Z}$$
$$h_k = \frac{1-\xi_k}{a^k} = \frac{\frac{3}{2} - \left\{a^k x + \frac{1}{2}\right\}}{a^k}$$

(здесь $[\cdot]$ и $\{\cdot\}$ – целая и дробная части числа, определенные формулами (2.2.286) и (2.2.292)). Очевидно, что

$$0 < h_k \leqslant \frac{3}{2a^k} \qquad (9.1.46)$$
$$\Downarrow$$
$$h_k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

поэтому наша задача будет выполнена, если мы докажем, что

$$\frac{f(x+h_k) - f(x)}{h_k} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \infty$$

Обозначим

$$S = \sum_{n=0}^{k-1} b^n \cdot \frac{\cos\big(a^n\pi(x+h_k)\big) - \cos(a^n\pi x)}{h_k}$$
$$R = \sum_{n=k}^{\infty} b^n \cdot \frac{\cos\big(a^n\pi(x+h_k)\big) - \cos(a^n\pi x)}{h_k}.$$

Тогда

$$\frac{f(x+h_k) - f(x)}{h_k} = \sum_{n=0}^{\infty} b^n \cdot \frac{\cos\big(a^n\pi(x+h_k)\big) - \cos(a^n\pi x)}{h_k} = \sum_{n=0}^{k-1} + \sum_{n=k}^{\infty} = S + R$$

Сначала оценим сверху S:

$$\left|\cos\big(a^n\pi(x+h_k)\big) - \cos(a^n\pi x)\right| = \left|\cos\big(a^n\pi x + a^n\pi h_k\big) - \cos(a^n\pi x)\right| = (4.1.89) = 2\underbrace{\left|\sin\frac{2a^n\pi x + a^n\pi h_k}{2}\right|}_{\leqslant 1} \cdot \underbrace{\left|\sin\frac{a^n\pi h_k}{2}\right|}_{\substack{\leqslant\ (4.1.92) \\ \left|\frac{a^n\pi h_k}{2}\right| \\ \| \\ \frac{a^n\pi h_k}{2}}} \leqslant a^n\pi h_k$$
$$\Downarrow$$
$$|S| = \left|\sum_{n=0}^{k-1} b^n \cdot \frac{\cos\big(a^n\pi(x+h_k)\big) - \cos(a^n\pi x)}{h_k}\right| \leqslant \sum_{n=0}^{k-1} b^n \cdot \left|\frac{\cos\big(a^n\pi(x+h_k)\big) - \cos(a^n\pi x)}{h_k}\right| \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{n=0}^{k-1} b^n \cdot \frac{a^n\pi h_k}{h_k} = \pi \cdot \sum_{n=0}^{k-1} (ab)^n = (2.2.246) = \pi \cdot \frac{(ab)^k - 1}{ab-1} \leqslant \frac{\pi a^k b^k}{ab-1}$$

После этого оценим R. Пусть $n \geqslant k$. Тогда, во-первых,

$$a^k \cdot (x+h_k) = a^k \cdot x + a^k \cdot h_k = a^k \cdot x + \frac{3}{2} - \left\{a^k x + \frac{1}{2}\right\} = a^k \cdot x + \frac{1}{2} - \left\{a^k x + \frac{1}{2}\right\} + 1 = \left[a^k x + \frac{1}{2}\right] + 1 = \alpha_k + 1$$
$$\Downarrow$$
$$a^n \cdot \pi \cdot (x+h_k) = a^{n-k} \cdot a^k (x+h_k) \cdot \pi = a^{n-k} \cdot (\alpha_k + 1) \cdot \pi$$
$$\Downarrow$$
$$\cos\Big(a^n \cdot \pi \cdot (x+h_k)\Big) = \cos\Big(\underbrace{a^{n-k} \cdot (\alpha_k+1)}_{\substack{\Cap \\ \mathbb{Z}}} \cdot \pi\Big) = (-1)^{a^{n-k}\cdot(\alpha_k+1)} = \Big((-1)^{\overbrace{a^{n-k}}^{\substack{2\mathbb{N}-1 \\ \Cup}}}\Big)^{\alpha_k+1} = (-1)^{\alpha_k+1}$$

Во-вторых,

$$a^k \cdot x = \alpha_k + \xi_k$$
$$\Downarrow$$
$$a^n \cdot x = a^{n-k} \cdot (\alpha_k + \xi_k)$$
$$\Downarrow$$
$$\cos\Big(a^n\pi x\Big) = \cos\Big(a^{n-k} \cdot \pi \cdot (\alpha_k + \xi_k)\Big) = \cos\Big(a^{n-k}\pi\alpha_k + a^{n-k}\pi\xi_k\Big) = (10.3.135) =$$
$$= \underbrace{\cos\Big(a^{n-k}\alpha_k\pi\Big)}_{\substack{\| \\ (-1)^{a^{n-k}\cdot\alpha_k}}} \cdot \cos\Big(a^{n-k}\pi\xi_k\Big) - \underbrace{\sin\Big(a^{n-k}\alpha_k\pi\Big)}_{\substack{\| \\ 0}} \cdot \sin\Big(a^{n-k}\pi\xi_k\Big) =$$
$$= (-1)^{a^{n-k}\cdot\alpha_k} \cdot \cos\Big(a^{n-k}\pi\xi_k\Big) = \Big((-1)^{\overbrace{a^{n-k}}^{\substack{2\mathbb{N}-1 \\ \Cup}}}\Big)^{\alpha_k} \cdot \cos\Big(a^{n-k}\pi\xi_k\Big) =$$

$$= (-1)^{\alpha_k} \cdot \cos\left(a^{n-k}\pi\xi_k\right)$$

Вместе мы получаем:

$$\cos\left(a^n\pi(x+h_k)\right) - \cos(a^n\pi x) =$$
$$= (-1)^{\alpha_k+1} - (-1)^{\alpha_k} \cdot \cos\left(a^{n-k}\pi\xi_k\right) =$$
$$= (-1)^{\alpha_k+1}\Big(1+\cos\left(a^{n-k}\pi\xi_k\right)\Big)$$

$$\Downarrow$$

$$|R| = \left|(-1)^{\alpha_k} \cdot \sum_{n=k}^{\infty} b^n \cdot \frac{1+\cos\left(a^{n-k}\pi\xi_k\right)}{h_k}\right| =$$
$$= \Big|\sum_{n=k}^{\infty} \underbrace{b^n \cdot \frac{1+\cos\left(a^{n-k}\pi\xi_k\right)}{h_k}}_{\substack{\geqslant \\ 0}}\Big| =$$
$$= \sum_{n=k}^{\infty} b^n \cdot \frac{1+\cos\left(a^{n-k}\pi\xi_k\right)}{h_k} \geqslant$$

$$\geqslant \underbrace{b^k \cdot \frac{1+\cos\left(a^{\overbrace{k-k}^{\substack{0 \\ \parallel}}}\pi\xi_k\right)}{h_k}}_{n=k} =$$

$$= b^k \cdot \frac{1+\cos\big(\overbrace{\pi\xi_k}^{\substack{[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}) \\ \Psi}}\big)}{h_k} \geqslant \frac{b^k}{h_k} (9.1.46) \geqslant \frac{2a^kb^k}{3}$$

Теперь получаем:

$$\left|\frac{f(x+h_k)-f(x)}{h_k}\right| \geqslant |R| - |S| \geqslant$$
$$\geqslant \frac{2a^kb^k}{3} - \frac{\pi a^kb^k}{ab-1} =$$
$$= \underbrace{\left(\frac{2}{3} - \frac{\pi}{ab-1}\right)}_{\substack{\vee\ (9.1.45) \\ 0}} (ab)^k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \infty$$

□

(c) Равномерная по производным сходимость

Пусть E – интервал или отрезок в $\mathbb{R}$.

- Функция f называется *гладкой на E порядка m*, если она имеет m непрерывных производных на E, то есть если существует конечная последовательность непрерывных функций $f_0, f_1, ..., f_m$ на E таких, что
$$f_0 = f$$
и для всякого $k = 0, ..., m-1$ функция f_k дифференцируема на E (если E – отрезок, то дифференцируемость на нем понимается в смысле определения на с.399) и ее производная равна f_{k+1}:
$$f_k' = f_{k+1}, \qquad k < m$$
Множество всех функций, гладких на E порядка m, обозначается $\mathcal{C}^m(E)$.
- Функция f называется *бесконечно гладкой на E*, если для всякого $m \in \mathbb{N}$ она является гладкой на E порядка m:
$$\forall m \in \mathbb{N} \qquad f \in \mathcal{C}^m(E).$$
Множество всех бесконечно гладких функций на E обозначается $\mathcal{C}^\infty(E)$. Таким образом,
$$\mathcal{C}^\infty(E) = \bigcap_{m=0}^{\infty} \mathcal{C}^m(E)$$
Можно заметить, что бесконечная гладкость f эквивалентна просто существованию производной любого порядка, то есть существованию бесконечной последовательности функций $\{f_k\}$ на E такой, что
$$f_0 = f, \qquad \forall k \in \mathbb{Z}_+ \quad \exists f_k' = f_{k+1}.$$
- *Нормой функции $f \in \mathcal{C}^m(E)$, равномерной на множестве E по производным до порядка $m \in \mathbb{Z}_+$*, называется величина
$$\|f\|_E^{(m)} = \|f(x)\|_{x\in E}^{(m)} := \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!} \cdot \left\|f^{(k)}\right\|_E = \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!} \cdot \sup_{x\in I} |f^{(k)}(x)| \qquad (9.1.47)$$

Если для какого-нибудь k функция $f^{(k)}$ не ограничена на E, то эта величина считается бесконечной. Однако такое может случиться только если E – интервал, потому что если E – отрезок, то по теореме Вейерштрасса 3.3.7, все функции $f^{(k)}$ будут ограничены на E. Отметим, что равномерная по производным норма мажорирует обычную равномерную норму, которую мы определяли формулой (9.1.6):

$$\|f\|_E \leqslant \|f\|_E^{(m)}$$

◇◇ **9.1.34.**

$$\left\|x^2\right\|_{x\in[0;2]}^{(0)} = \sup_{x\in[0;2]} |x^2| = 4$$

$$\left\|x^2\right\|_{x\in[0;2]}^{(1)} = \sup_{x\in[0;2]} |x^2| + \sup_{x\in[0;2]} |2x| = 4 + 4 = 8$$

$$\left\|x^2\right\|_{x\in[0;2]}^{(2)} = \sup_{x\in[0;2]} |x^2| + \sup_{x\in[0;2]} |2x| + \frac{1}{2}\cdot \sup_{x\in[0;2]} |2| = 4 + 4 + 1 = 9$$

$$\|\sin x\|_{x\in\mathbb{R}}^{(1)} = \sup_{x\in\mathbb{R}} |\sin x| + \sup_{x\in\mathbb{R}} |\cos x| = 1 + 1 = 2$$

$$\|\sin x\|_{x\in\mathbb{R}}^{(2)} = \sup_{x\in\mathbb{R}} |\sin x| + \sup_{x\in\mathbb{R}} |\cos x| + \frac{1}{2}\cdot \sup_{x\in\mathbb{R}} |-\sin x| = 1 + 1 + \frac{1}{2} = 2,5$$

Свойства равномерной по производным нормы

1°. *Неотрицательность:*

$$\|f\|_E^{(m)} \geqslant 0 \tag{9.1.48}$$

причем

$$\|f\|_E^{(m)} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \forall k = 0, ..., m \quad \forall x \in E \quad f^{(k)}(x) = 0 \tag{9.1.49}$$

2°. *Однородность:*

$$\|\lambda \cdot f\|_E^{(m)} = |\lambda| \cdot \|\lambda \cdot f\|_E^{(m)}, \qquad \lambda \in \mathbb{R} \tag{9.1.50}$$

3°. *Полуаддитивность:*

$$\|f + g\|_E^{(m)} \leqslant \|f\|_E^{(m)} + \|g\|_E^{(m)} \tag{9.1.51}$$

4°. *Полумультпликативность:*

$$\|f \cdot g\|_E^{(m)} \leqslant \|f\|_E^{(m)} \cdot \|g\|_E^{(m)} \tag{9.1.52}$$

5°. *При расширении множества норма не убывает:*

$$D \subseteq E \qquad \Longrightarrow \qquad \|f\|_D^{(m)} \leqslant \|f\|_E^{(m)} \tag{9.1.53}$$

6°. *При увеличении индекса норма не убывает:*

$$m \leqslant n \qquad \Longrightarrow \qquad \|f\|_E^{(m)} \leqslant \|f\|_E^{(n)} \tag{9.1.54}$$

7°. *Норма функции мажорирует норму ее производной: для любого $k \leqslant m$*

$$\left\|f^{(k)}\right\|_E^{(m)} \leqslant \|f\|_E^{(k+m)} \tag{9.1.55}$$

Доказательство. Как и в случае со свойствами равномерной нормы на с.537, все эти утверждения следуют напрямую из свойств модуля. Мы предоставляем читателю самостоятельно проверить их справедливость. □

Равномерная по производным сходимость последовательности

- Говорят, что *последовательность функций $\{f_n\}$ стремится к функции f равномерно по производным до порядка m на множестве E*, если

$$\|f_n - f\|_E^{(m)} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \tag{9.1.56}$$

Следующие свойства доказываются по аналогии со свойствами 1° и 5° на с.540.

Свойства функциональных последовательностей, сходящихся равномерно по производным.

1°. *Если функции f_n равномерно по производным до порядка m сходятся к функции f на множестве E, то норма $\|\cdot\|^{(m)}$ последовательности f_n ограничена:*

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \|f_n\|_E^{(m)} < \infty.$$

2°. *Пусть функции $f_n \in \mathcal{C}^m[a,b]$ равномерно по производным до порядка m сходятся на отрезке $[a,b]$. Тогда их поточечный предел лежит в $\mathcal{C}^m[a,b]$,*

$$\lim_{n\to\infty} f_n \in \mathcal{C}^m[a,b],$$

и для всякого $k \leqslant m$ его производная порядка k совпадает с поточечным пределом производных порядка k:

$$\Big(\lim_{n\to\infty} f_n\Big)^{(k)} = \lim_{n\to\infty} f_n^{(k)}. \tag{9.1.57}$$

Следующее утверждение аналогично теореме 9.1.2 и доказывается так же:

Теорема 9.1.9 (критерий Коши равномерной по производным сходимости функциональной последовательности)**.** *Функциональная последовательность $f_n \in \mathcal{C}^m(E)$ тогда и только тогда сходится к некоторой функции $f \in \mathcal{C}^m(E)$ равномерно по производным до порядка m на множестве E, когда она удовлетворяет следующим двум эквивалентным условиям:*

(i) *для любых двух бесконечно больших последовательностей индексов $\{p_i\}$, $\{q_i\} \subseteq \mathbb{N}$*

$$p_i \underset{i\to\infty}{\longrightarrow} \infty, \quad q_i \underset{i\to\infty}{\longrightarrow} \infty \tag{9.1.58}$$

соответствующие подпоследовательности $\{f_{p_i}\}$ и $\{f_{q_i}\}$ равномерно по производным до порядка m стремятся друг к другу на множестве E:

$$\|f_{p_i} - f_{q_i}\|_E^{(m)} \underset{i\to\infty}{\longrightarrow} 0 \tag{9.1.59}$$

(ii) *для любой последовательности $\{l_i\} \subseteq \mathbb{N}$ и любой бесконечно большой последовательности $\{k_i\} \subseteq \mathbb{N}$*

$$k_i \underset{i\to\infty}{\longrightarrow} \infty \tag{9.1.60}$$

выполняется соотношение

$$\|f_{k_i+l_i} - f_{k_i}\|_E^{(m)} \underset{i\to\infty}{\longrightarrow} 0 \tag{9.1.61}$$

Равномерная по производным сходимость ряда

- Говорят, что *функциональный ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ сходится на множестве E равномерно по производным до порядка m к функции S*, если частичные суммы этого ряда сходятся к S на E равномерно по производным до порядка m:

$$\left\| \sum_{k=0}^{n} a_k - S \right\|_E^{(m)} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \tag{9.1.62}$$

Следующие свойства доказываются по аналогии со свойствами 1° и 5° на с.540.

Свойства функциональных рядов, сходящихся равномерно по производным.

1°. *Если функциональный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ равномерно по производным до порядка m сходятся на множестве E, то норма $\|\cdot\|^{(m)}$ последовательности его частичных сумм S_N ограничена:*

$$\sup_{N\in\mathbb{N}} \left\| \sum_{n=1}^{N} a_n \right\|_E^{(m)} < \infty.$$

2°. *Пусть слагаемые функционального ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ принадлежат пространству $\mathcal{C}^m[a,b]$, и ряд равномерно по производным до порядка m сходятся на отрезке $[a,b]$. Тогда поточечный предел этого ряда тоже лежит в $\mathcal{C}^m[a,b]$,*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \in \mathcal{C}^m[a,b],$$

и для всякого $k \leqslant m$ его производная порядка k совпадает с поточечной суммой производных порядка k:

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right)^{(k)} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^{(k)}. \tag{9.1.63}$$

Следующие две теоремы аналогичны теоремам 9.1.3 и 9.1.5, и доказывается так же:

Теорема 9.1.10 (критерий Коши равномерной по производным сходимости ряда)**.** *Для последовательности функций $a_n \in \mathcal{C}^m(E)$ следующие условия эквивалентны:*

(i) *функциональный ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$$

сходится равномерно по производным до порядка m на множестве E к некоторой сумме $S \in \mathcal{C}^m(E)$;

(ii) *для любой последовательности $l_i \in \mathbb{N}$, и любой бесконечно большой последовательности $k_i \in \mathbb{N}$*

$$k_i \underset{i\to\infty}{\longrightarrow} \infty,$$

сумма $\sum_{n=k_i+1}^{k_i+l_i} a_n$ стремится к нулю при $i \to \infty$ равномерно по производным до порядка m на множестве E:

$$\left\| \sum_{n=k_i+1}^{k_i+l_i} a_n \right\|_E^{(m)} \underset{i\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

Теорема 9.1.11 (признак Вейерштрасса для равномерной по производным сходимости)**.** *Пусть $a_n \in \mathcal{C}^m(E)$, и числовой ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|a_n(x)\|_{x\in E}^{(m)}$$

сходится. Тогда функциональный ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$$

сходится равномерно по производным до порядка m на множестве E.

Контрпримеры в классе гладких функций.

◇ **9.1.35.** *Существует бесконечно гладкая функция $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ со следующими свойствами:*

$$\begin{cases} f(x) = 0, & x \leqslant 0 \\ f(x) > 0, & x > 0 \end{cases}$$

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}}, & x > 0 \\ 0, & x \leqslant 0 \end{cases}$$

Все объявленные ее свойства очевидны, кроме бесконечной гладкости. Очевидно, f будет бесконечно гладкой в некоторой окрестности каждой точки $x \neq 0$, поэтому нужно только доказать, что она является бесконечно гладкой в окрестности точки $x = 0$. Чтобы это понять, вычислим сначала односторонние производные в этой точке. Ясно, что левая производная равна нулю:

$$f'_-(0) = 0$$

Найдем правую:

$$f'_+(0) = \lim_{x\to+0} \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x} = \left| \begin{matrix} \frac{1}{x} = t \\ t \to +\infty \end{matrix} \right| = \lim_{t\to+\infty} te^{-t} = 0$$

Мы получили, что первая производная существует в каждой точке. Существование остальных проверяется по индукции. Предположим, что мы доказали, что существует производная порядка n. Очевидно, она имеет вид

$$f^{(n)}(x)=\begin{cases}\frac{P_n(x)}{Q_n(x)}e^{-\frac{1}{x}}, & x>0\\ 0, & x\leqslant 0\end{cases}$$

где $P_n(x)$ и $Q_n(x)$ некоторые многочлены. Отсюда получаем

$$f_+^{(n+1)}(0)=\lim_{x\to+0}\frac{P_n(x)e^{-\frac{1}{x}}}{xQ_n(x)}= \\ =\left|\begin{matrix}\frac{1}{x}=t\\ t\to+\infty\end{matrix}\right|=\lim_{t\to+\infty}\frac{R_n(t)}{S_n(t)}e^{-t}=0$$

где $R_n(t)$ и $S_n(t)$ – некоторые новые многочлены. □

◇ **9.1.36.** *Для любого интервала (a,b) на $\mathbb{R}$ существует бесконечно гладкая функция $g\in\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ со следующими свойствами:*

$$\begin{cases}g_{a,b}(x)=0, & x\notin(a,b)\\ g_{a,b}(x)>0, & x\in(a,b)\end{cases}$$

Доказательство. Можно положить

$$g_{a,b}(x)=f(b-x)\cdot f(x-a),$$

где f – функция из примера 9.1.35. □

◇ **9.1.37.** *Для любого интервала (a,b) на $\mathbb{R}$ существует бесконечно гладкая функция $h_{a,b}\in\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ со следующими свойствами:*

$$\begin{cases}h_{a,b}(x)=0, & x\leqslant a\\ 0<h_{a,b}(x)<1, & x\in(a,b)\\ h_{a,b}(x)=1, & x\geqslant b\end{cases}$$

Доказательство. Этими свойствами будет обладать функция

$$h_{a,b}(x)=\frac{\int_a^x g_{a,b}(t)\,\mathsf{d}\,t}{\int_a^b g_{a,b}(t)\,\mathsf{d}\,t},$$

где $g_{a,b}$ – функция из примера 9.1.36. □

◇ **9.1.38.** *Для любой последовательности чисел*

$$a<\alpha<\beta<b$$

существует бесконечно гладкая функция $\eta\in\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ со следующими свойствами:

$$\begin{cases}\eta(x)=0, & x\notin(a,b)\\ \eta(x)=1, & x\in(\alpha,\beta)\\ 0<\eta(x)<1, & x\in(a,\alpha)\cup(\beta,b)\end{cases}$$

Доказательство. Можно взять

$$\eta(x)=h_{a,\alpha}(x)+1-h_{\beta,b}(x),$$

где $h_{a,\alpha}$ и $h_{\beta,b}$ – функции из примера 9.1.37. □

Лемма 9.1.12. *Для любых $\varepsilon>0$ и $n\in\mathbb{Z}_+$ существует гладкая функция $\varphi\in\mathcal{C}^\infty[-1;1]$ со следующими свойствами:*

1) *в точке $x=0$ все ее производные равны нулю, кроме производной порядка n, которая равна единице,*

$$\varphi^{(k)}(0)=\begin{cases}0, & k\neq n\\ 1, & k=n\end{cases}$$

2) *ее равномерная норма на отрезке $[-1,1]$ по производным до порядка $n-1$ меньше ε,*

$$\|\varphi\|_{[-1,1]}^{(n-1)}<\varepsilon.$$

Доказательство. Положим $\delta=\frac{\varepsilon}{e}$ (где e – число Непера) и рассмотрим функцию η из примера 9.1.38 со следующими свойствами:

$$\begin{cases}\eta(x)=0, & x\notin(-\delta,\delta)\\ \eta(x)=1, & x\in\left(-\frac{\delta}{2},\frac{\delta}{2}\right)\\ 0<\eta(x)<1, & \text{– в остальных случаях}\end{cases}$$

Рассмотрим последовательность функций f_n, определенную рекуррентными соотношениями:

$$f_0=\eta,$$

$$f_m(x)=\begin{cases}\int_0^x f_{m-1}(t)\,\mathsf{d}\,t, & x\notin[0,1]\\ -\int_x^0 f_{m-1}(t)\,\mathsf{d}\,t, & x\notin[-1,0)\end{cases},\quad m\geqslant 1$$

По предложению 7.3.15, все функции f_m являются гладкими на отрезке $[-1,1]$, причем

$$f_m'=f_{m-1},\qquad m\geqslant 1$$

Отсюда следует формула:

$$f_m^{(k)}=\begin{cases}f_{m-k}, & 0\leqslant k<m\\ \eta, & k=m\\ \eta^{(k-m)}, & k>m\end{cases}\tag{9.1.64}$$

Из нее, в свою очередь, следует три важных для нас соотношения:

$$f_m^{(k)}(0)=\begin{cases}0, & k\neq m\\ 1, & k=m\end{cases},\tag{9.1.65}$$

$$\|f_m\|_{[-1,1]}=\sup_{x\in[-1,1]}|f_m(x)|\leqslant\delta,\quad m\geqslant 1\tag{9.1.66}$$

$$\|f_m\|_{[-1,1]}^{(m-1)}<\varepsilon\tag{9.1.67}$$

Здесь равенство (9.1.65) доказывается перечислением случаев: если $0\leqslant k<m$, то

$$f_m^{(k)}(0)=f_{m-k}(0)=\int_0^0 f_{m-1}(t)\,\mathsf{d}\,t=0,$$

если $k=m$, то

$$f_m^{(k)}(0)=\eta(0)=1,$$

и если же $k > m$, то

$$f_m^{(k)}(0) = \underset{\substack{\text{постоянная}\\ \text{на интервале}\\ (-\frac{\delta}{2}, \frac{\delta}{2})}}{\underset{\uparrow}{\eta}}{}^{(k-m)}(0) = 0.$$

Неравенство (9.1.66) доказывается индукцией. При $m = 1$ получаем, с одной стороны,

$$\|f_1\|_{[0,1]} = \sup_{x\in[0,1]} |f_1(x)| = \sup_{x\in[0,1]} \left|\int_0^x \eta(t)\ \mathsf{d}\,t\right| = \\ = \sup_{x\in[0,1]} \int_0^x \eta(t)\ \mathsf{d}\,t = \int_0^\delta \eta(t)\ \mathsf{d}\,t \leqslant \\ \leqslant \delta \cdot \sup_{x\in[0,\delta]} \eta(x) = \delta$$

С другой стороны,

$$\|f_1\|_{[-1,0]} = \sup_{x\in[-1,0]} |f_1(x)| = \\ = \sup_{x\in[-1,0]} \left|-\int_x^0 \eta(t)\ \mathsf{d}\,t\right| = \sup_{x\in[-1,0]} \int_x^0 \eta(t)\ \mathsf{d}\,t = \\ = \int_{-\delta}^0 \eta(t)\ \mathsf{d}\,t \leqslant \delta \cdot \sup_{x\in[-\delta,0]} \eta(x) = \delta$$

Вместе это дает

$$\|f_1\|_{[-1,1]} = \max\left\{\|f_1\|_{[-1,0]}, \|f_1\|_{[0,1]}\right\} \leqslant \delta$$

Далее, если для $m-1$ неравенство (9.1.66) уже доказано, то для m получаем: с одной стороны,

$$\|f_m\|_{[0,1]} = \sup_{x\in[0,1]} |f_m(x)| = \\ = \sup_{x\in[0,1]} \left|\int_0^x f_{m-1}(t)\ \mathsf{d}\,t\right| \leqslant \\ \leqslant \sup_{x\in[0,1]} (x-0) \cdot \sup_{x\in[0,1]} |f_{m-1}(x)| \leqslant \\ \leqslant 1 \cdot \underbrace{\|f_{m-1}\|_{[-1,1]}}_{\substack{\wedge\!\backslash\\ \delta,\\ \text{по предположению}\\ \text{индукции}}} \leqslant \delta$$

А с другой стороны,

$$\|f_m\|_{[-1,0]} = \sup_{x\in[-1,0]} |f_m(x)| = \\ = \sup_{x\in[-1,0]} \left|\int_x^0 f_{m-1}(t)\ \mathsf{d}\,t\right| \leqslant \\ \leqslant \sup_{x\in[-1,0]} (0-x) \cdot \sup_{x\in[-1,0]} |f_{m-1}(x)| \leqslant \\ \leqslant 1 \cdot \underbrace{\|f_{m-1}\|_{[-1,1]}}_{\substack{\wedge\!\backslash\\ \delta,\\ \text{по предположению}\\ \text{индукции}}} \leqslant \delta$$

И вместе получается (9.1.66) для m:

$$\|f_m\|_{[-1,1]} = \max\left\{\|f_m\|_{[-1,0]}, \|f_m\|_{[0,1]}\right\} \leqslant \delta$$

Неравенство (9.1.67) доказывается вычислением:

$$\|f_m\|_{[-1,1]}^{(m-1)} = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{1}{k!} \cdot \left\|f_m^{(k)}\right\|_{[-1,1]} = (9.1.64) = \\ = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{1}{k!} \cdot \|f_{m-k}\|_{[-1,1]} \leqslant (9.1.66) \leqslant \\ \leqslant \sum_{k=0}^{m-1} \frac{1}{k!} \cdot \delta < \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\right) \cdot \delta = e \cdot \frac{\varepsilon}{e} = \varepsilon$$

После того, как соотношения (9.1.65)–(9.1.67) доказаны, нам остается положить

$$\varphi = f_n$$

и мы получим

$$\varphi^{(k)} = (9.1.65) = \begin{cases} 0, & k \ne n \\ 1, & k = n \end{cases}$$

и

$$\|\varphi\|_{[-1,1]}^{(n-1)} < (9.1.67) < \varepsilon$$

□

Теорема 9.1.13 (Борель). *Для любой последовательности чисел $a = \{a_n;\ n \in \mathbb{Z}_+\}$ существует гладкая функция f на $\mathbb{R}$ такая, что*

$$\forall n \in \mathbb{Z}_+ \qquad f^{(n)}(0) = a_n \tag{9.1.68}$$

Доказательство. Выберем последовательность функций φ_n со следующими свойствами:

1) если $a_n = 0$, то $\varphi_n = 0$,
2) если $a_n \ne 0$, то φ_n выбирается по лемме 9.1.12 так, чтобы выполнялись условия:

$$\varphi_n^{(k)} = \begin{cases} 0, & k \ne n \\ 1, & k = n \end{cases}, \tag{9.1.69}$$

$$\|\varphi_n\|_{[-1,1]}^{(n-1)} < \frac{1}{2^{n-1} \cdot |a_n|} \tag{9.1.70}$$

Заметим, что функциональный ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot \varphi_n$$

сходится на $[-1,1]$ равномерно по производным до произвольного порядка k. Действительно, при любом фиксированном k мы получаем:

$$\sum_{n\geqslant k+1} \underbrace{\|a_n \cdot \varphi_n\|_{[-1,1]}^{(k)}}_{\substack{\wedge\!\backslash\\ \|a_n \cdot \varphi_n\|_{[-1,1]}^{(n-1)},\\ \Uparrow\\ (9.1.55)\\ \Uparrow\\ k \leqslant n-1}} \leqslant \sum_{n\geqslant k+1} \|a_n \cdot \varphi_n\|_{[-1,1]}^{(n-1)} =$$

$$= \sum_{n\geqslant k+1} |a_n| \cdot \|\varphi_n\|_{[-1,1]}^{(n-1)} \leqslant (9.1.70) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{n\geqslant k+1} |a_n| \cdot \frac{1}{2^{n-1}\cdot |a_n|} = \sum_{n\geqslant k+1} \frac{1}{2^{n-1}} < \infty$$

Из сходимости этого ряда по признаку Вейерштрасса 9.1.11 следует, что его сумма

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot \varphi_n$$

является гладкой функцией порядка k. Это справедливо для любого k, значит f является гладкой. При этом, по свойству 2° на с.559,

$$f^{(k)} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot \varphi_n^{(k)}$$

и отсюда

$$f^{(k)}(0) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot \underbrace{\varphi_n^{(k)}(0)}_{\substack{\uparrow\\ \text{среди этих чисел}\\ \text{отлично от нуля}\\ \text{только с индексом}\\ n=k}} = (9.1.69) = a_k$$

□

(d) Интегральная сходимость

- Пусть функция f определена и интегрируема на отрезке $[a,b]$. Ее *интегральной нормой на отрезке* $[a,b]$, называется величина

$$\|f\|_{[a,b]}^{\int} = \|f(x)\|_{x\in[a,b]}^{\int} := \int_{[a,b]} |f(x)| \, \mathsf{d}\, x. \tag{9.1.71}$$

◇◇ **9.1.39.**

$$\left\|x^2\right\|_{x\in[0;2]}^{\int} = \int_{[0;2]} |x^2| \, \mathsf{d}\, x = \frac{x^3}{3}\Big|_{x=0}^{x=2} = \frac{8}{3}$$

$$\|\sin x\|_{x\in[0;\pi]}^{\int} = \int_{[0;\pi]} |\sin x| \, \mathsf{d}\, x = \int_0^{\pi} \sin x \, \mathsf{d}\, x = -\cos x\Big|_{x=0}^{x=\pi} = 2$$

$$\|\sin x\|_{x\in[0,2\pi]}^{\int} = \int_{[0,2\pi]} |\sin x| \, \mathsf{d}\, x = \int_0^{\pi} \sin x \, \mathsf{d}\, x - \int_{\pi}^{2\pi} \sin x \, \mathsf{d}\, x = -\cos x\Big|_{x=0}^{x=\pi} + \cos x\Big|_{x=\pi}^{x=2\pi} = 2+2 = 4$$

Свойства интегральной нормы

1°. *Неотрицательность:*

$$\|f\|_{[a,b]}^{\int} \geqslant 0 \tag{9.1.72}$$

2°. *Однородность:*

$$\|\lambda\cdot f\|_{[a,b]}^{\int} = |\lambda| \cdot \|\lambda\cdot f\|_{[a,b]}^{\int}, \qquad \lambda\in\mathbb{R} \tag{9.1.73}$$

3°. *Полуаддитивность:*

$$\|f+g\|_{[a,b]}^{\int} \leqslant \|f\|_{[a,b]}^{\int} + \|g\|_{[a,b]}^{\int} \tag{9.1.74}$$

4°. *Монотонность по отрезку $[a,b]$:*

$$[a,b]\subseteq[c,d] \qquad \Longrightarrow \qquad \|f\|_{[a,b]}^{\int} \leqslant \|f\|_{[c,d]}^{\int} \tag{9.1.75}$$

5°. *Связь с равномерной нормой:*

$$\|f\|_{[a,b]}^{\int} \leqslant |b-a| \cdot \|f\|_{[a,b]}. \tag{9.1.76}$$

Доказательство. Как и в случаях с равномерной нормой и с равномерной по производным нормой эти свойства следуют из свойств модуля (и в данном случае еще из свойств интеграла). □

Интегральная сходимость последовательности

- Говорят, что *последовательность функций* $\{f_n\}$ *стремится к функции* f *интегрально на отрезке* $[a,b]$, если

$$\|f_n - f\|^{\int}_{[a,b]} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \tag{9.1.77}$$

Следующие свойства доказываются по аналогии со свойствами 1° и 4° на с.540.

Свойства функциональных последовательностей, сходящихся интегрально

1°. *Если функции* f_n *интегрально сходятся на отрезке* $[a,b]$*, то интегральная норма последовательности* f_n *ограничена:*

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \|f_n\|^{\int}_{[a,b]} < \infty.$$

2°. *Пусть функции* f_n *интегрально сходятся на отрезке* $[a,b]$*, тогда интеграл их предела совпадает с пределом интегралов:*

$$\int_a^b \Big(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\Big)\,\mathsf{d}\,x = \lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\,\mathsf{d}\,x. \tag{9.1.78}$$

Из неравенства (9.1.76) следует

Теорема 9.1.14. *Если последовательность интегрируемых функций* f_n *сходится к интегрируемой функции* f *равномерно на отрезке* $[a,b]$*, то* f_n *сходится к* f *интегрально на* $[a,b]$.

◇ **9.1.40.** Функциональная последовательность

$$f_n(x) = x^n, \qquad x\in[0,1],$$

интегрально сходится к функции $f(x)=0$, потому что

$$\|f_n - f\|^{\int}_{[0,1]} = \int_0^1 |f_n(x)-f(x)|\,\mathsf{d}\,x = \\ = \int_0^1 x^n\,\mathsf{d}\,x = \frac{x^{n+1}}{n+1}\Big|_0^1 = \frac{1}{n+1} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Однако эта сходимость не равномерна, потому что

$$\|f_n - f\|_{[0,1]} = \max_{x\in[0,1]} |f_n(x)-f(x)| = \\ = \max_{x\in[0,1]} x^n = 1 \underset{n\to\infty}{\not\longrightarrow} 0.$$

Более того, эта сходимость и не поточечна, потому что в точке $x=1$ мы получаем

$$f_x(1) = 1^n = 1 \underset{n\to\infty}{\not\longrightarrow} 0 = f(1).$$

Интегральная сходимость ряда

- Говорят, что *функциональный ряд* $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ *сходится к сумме* S *интегрально на отрезке* $[a,b]$, если последовательность его частичных сумм сходится к S интегрально на $[a,b]$

$$\left\|\sum_{i=1}^{n} a_i - S\right\|^{\int}_{[a,b]} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \tag{9.1.79}$$

Следующие свойства следуют из свойств 1° и 2° на с.563.

Свойства функциональных рядов, сходящихся интегрально

1°. *Если функциональный ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *интегрально сходятся на отрезке* $[a,b]$*, то интегральная норма последовательности его частичных сумм ограничена:*

$$\sup_{N\in\mathbb{N}} \left\|\sum_{n=1}^{N} a_n\right\|^{\int}_{[a,b]} < \infty.$$

2°. *Пусть функциональный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ интегрально сходится на отрезке $[a,b]$, тогда интеграл его суммы совпадает с суммой интегралов:*

$$\int_a^b \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)\right) \mathsf{d}\, x = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b a_n(x) \,\mathsf{d}\, x. \tag{9.1.80}$$

◇ **9.1.41.** Ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^n$$

не сходится интегрально на отрезке $[0;1]$, потому что его частичные суммы не ограничены по интегральной норме на этом отрезке:

$$\|S_N(x)\|^{\int}_{x\in[0;1]} = \int_0^1 \sum_{n=1}^{N} x^n \,\mathsf{d}\, x =$$

$$= \sum_{n=1}^{N} \int_0^1 x^n \,\mathsf{d}\, x = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n+1} \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} \infty.$$

(а в силу замечания (d) для сходимости ряда эта последовательность должна быть ограничена).

◇ **9.1.42.** Выясним, будет ли ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} (1-x)\cdot x^n$$

сходиться интегрально на отрезке $[0;1]$. В примере 9.1.42 мы нашли поточечный предел его частичных сумм:

$$S_N(x) = \sum_{n=1}^{N} (1-x)\cdot x^n = \sum_{n=1}^{N} (x^n - x^{n+1}) =$$

$$= x - x^{N+1} \underset{N\to\infty}{\overset{x\in[0;1]}{\longrightarrow}} x = S(x)$$

Интегральная норма остатка:

$$\|S_N(x) - S(x)\|^{\int}_{x\in[0;1]} =$$

$$= \int_0^1 \left|(x - x^{N+1}) - x\right| \mathsf{d}\, x =$$

$$= \int_0^1 x^{N+1} \,\mathsf{d}\, x = \frac{x^{N+2}}{N+2}\Big|_0^1 = \frac{1}{N+2} \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

Вывод: ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (1-x)\cdot x^n$ сходится на отрезке $[0;1]$ интегрально к сумме $S(x) = x$.

▷▷ **9.1.43.** Выясните, будет ли данный ряд сходиться интегрально на отрезке $[0,1]$:

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{(nx-x+1)(nx+1)}$;
2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{\sqrt{nx+x}+\sqrt{nx}} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{nx+x} - \sqrt{nx}\right)$;
3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n+(x+1)^n}{x^n\cdot(x+1)^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{(x+1)^n} + \frac{1}{x^n}\right)$.

---

§ 2 Аппроксимация

(a) Приближение интегрируемых функций

Приближение интегрируемой функции кусочно постоянными.

- Функция g на отрезке $[a,b]$ называется *кусочно-постоянной*, если существует разбиение $\tau = \{x_0, ..., x_k\}$ отрезка $[a,b]$ такое, что на каждом интервале (x_{i-1}, x_i) функция g постоянна:

$$g(s) = g(t), \qquad s,t \in (x_{i-1}, x_i)$$

Понятно, что всякая кусочно-постоянная функция g будет кусочно-гладкой, и значит, интегрируемой на $[a,b]$. Если через C_i обозначить значения g на интервалах постоянства (x_{i-1}, x_i),

$$g(x) = C_i, \qquad x \in (x_{i-1}, x_i),$$

то по лемме 7.3.9, интеграл по каждому отрезку $[x_{i-1}, x_i]$ от g будет равен интегралу от C_i по этому отрезку

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} g(x)\ \mathsf{d}\, x = C_i \cdot \left(x_i - x_{i-1}\right)$$

Как следствие, интеграл от g по всему $[a,b]$ будет равен

$$\int_a^b g(x)\ \mathsf{d}\, x = \sum_{i=1}^{k} C_i \cdot \left(x_i - x_{i-1}\right) \tag{9.2.81}$$

Теорема 9.2.1. *Для любой интегрируемой функции f на отрезке $[a,b]$ и любого $\varepsilon > 0$ можно найти кусочно-постоянную функцию g на $[a,b]$ такую, что*

$$\|f-g\|^{\int}_{[a,b]} = \int_a^b |f(x)-g(x)| \ \mathsf{d}\, x < \varepsilon \tag{9.2.82}$$

Функцию g можно выбрать так, чтобы выполнялось условие:

$$\sup_{x\in[a,b]} |g(x)| \leqslant \sup_{x\in[a,b]} |f(x)| \tag{9.2.83}$$

Доказательство. Выберем разбиение $\tau = \{x_0, ..., x_k\}$ отрезка $[a,b]$ так, чтобы нижняя сумма Дарбу s_τ отличалась от интеграла меньше чем на ε:

$$0 \leqslant \int_a^b f(x) \ \mathsf{d}\, x - s_\tau < \varepsilon$$

(этого всегда можно добиться, в силу соотношений (7.2.86)). Положим

$$g(t) = \inf_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x), \qquad t\in[x_{i-1},x_i)$$

(а в последней точке $x_k = b$ функцию g можно определить, например, положив $g(b) = f(b)$). Тогда мы получим:

$$g(x) \leqslant f(x), \qquad x\in[a,b]$$

и поэтому

$$\int_a^b |\underbrace{f(x)-g(x)}_{\substack{\vee\!/\\ 0}}| \ \mathsf{d}\, x = \int_a^b \Big(f(x)-g(x)\Big) \ \mathsf{d}\, x = \int_a^b f(x) \ \mathsf{d}\, x - \int_a^b g(x) \ \mathsf{d}\, x = (9.2.81) =$$

$$= \int_a^b f(x) \ \mathsf{d}\, x - \underbrace{\sum_{i=1}^k \inf_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x)\cdot\Delta x_i}_{\substack{\|\\ s_\tau}} = \int_a^b f(x) \ \mathsf{d}\, x - s_\tau < \varepsilon$$

Условие (9.2.83) выполняется по построению g. □

Приближение интегрируемой функции непрерывными.

Теорема 9.2.2. *Для любой интегрируемой функции f на отрезке $[a,b]$ и любого $\varepsilon > 0$ можно найти непрерывную функцию g на $[a,b]$ такую, что*

$$\|f-g\|^{\int}_{[a,b]} = \int_a^b |f(x)-g(x)| \ \mathsf{d}\, x < \varepsilon \tag{9.2.84}$$

Функцию g можно выбрать так, чтобы выполнялось условие:

$$\sup_{x\in[a,b]} |g(x)| \leqslant \sup_{x\in[a,b]} |f(x)| \tag{9.2.85}$$

а также условие

$$g(a) = 0 = g(b) \tag{9.2.86}$$

Доказательство. 1. Рассмотрим сначала случай, когда функция f представляет собой ступеньку, то есть имеет вид

$$f(x) = \begin{cases} C, & x\in[\alpha,\beta] \\ 0, & x\notin[\alpha,\beta] \end{cases}$$

для некоторого отрезка $[\alpha,\beta] \subseteq [a,b]$ и некоторого числа $C\in\mathbb{R}$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ можно поправить функцию f линейно в окрестностях точек разрыва α и β (или в окрестности одной из них, если другая является концом отрезка $[a,b]$) так, чтобы получилась непрерывная функция g, отличающаяся от f только в этих окрестностях, и интеграл от модуля разности будет маленьким.

На языке формул это можно выразить так: если $a \neq \alpha$ и $\beta \neq b$, то положим

$$\delta = \min\left\{\frac{\varepsilon}{3|C|}, \alpha - a, b - \beta\right\}, \qquad g(x) = \begin{cases} 0, & x < \alpha - \delta \\ \frac{C}{\delta}\cdot x + C - \frac{C}{\delta}\cdot\alpha, & x \in [\alpha-\delta, \alpha] \\ C, & x \in [\alpha, \beta] \\ -\frac{C}{\delta}\cdot x + C + \frac{C}{\delta}\cdot\beta, & x \in [\beta, \beta+\delta] \\ 0, & x > \beta + \delta \end{cases}$$

и тогда g непрерывна, отличается от f только на интервалах $(\alpha-\delta,\alpha)$ и $(\beta,\beta+\delta)$, и разность $f-g$ нигде не превосходит $|C|$, поэтому

$$\int_a^b |f(x)-g(x)| \ \mathsf{d}\,x = \int_{\alpha-\delta}^{\alpha} |f(x)-g(x)| \ \mathsf{d}\,x + \int_{\beta}^{\beta+\delta} |f(x)-g(x)| \ \mathsf{d}\,x \leqslant 2|C|\delta \leqslant 2|C|\cdot\frac{\varepsilon}{3|C|} = \frac{2\varepsilon}{3} < \varepsilon$$

Если же $a = \alpha$ или $\beta = b$, то в определении g интервал $(\alpha-\delta,\alpha)$ или интервал $(\beta,\beta+\delta)$ соответственно нужно исключить, и результат будет тем же. Условие (9.2.85) при этом выполняется автоматически.

2. После этого предположим, что функция f кусочно-постоянна. Тогда, если не считать ее значений в точках разрыва, она будет совпадать с суммой некоторого конечного набора ступенек $f_1, ..., f_n$:

$$f = \sum_{i=1}^n f_i$$

Для каждой ступеньки f_i подберем непрерывную функцию g_i так, чтобы

$$\int_a^b |f_i(x)-g_i(x)| \ \mathsf{d}\,x < \frac{\varepsilon}{n}$$

Тогда, положив $g = \sum_{i=1}^n g_i$, мы получим:

$$\int_a^b |f(x)-g(x)| \ \mathsf{d}\,x = \int_a^b \left|\sum_{i=1}^n f_i(x) - \sum_{i=1}^n g_i(x)\right| \ \mathsf{d}\,x = \int_a^b \left|\sum_{i=1}^n \Big(f_i(x)-g_i(x)\Big)\right| \ \mathsf{d}\,x \leqslant$$
$$\leqslant \int_a^b \sum_{i=1}^n \Big|f_i(x)-g_i(x)\Big| \ \mathsf{d}\,x = \sum_{i=1}^n \int_a^b \Big|f_i(x)-g_i(x)\Big| \ \mathsf{d}\,x < \sum_{i=1}^n \frac{\varepsilon}{n} = \varepsilon$$

Если вдобавок g_i выбирались так, чтобы выполнялось условие (9.2.85),

$$\sup_{x\in[a,b]} |g_i(x)| \leqslant \sup_{x\in[a,b]} |f_i(x)|$$

то это условие будет выполняться и для g:

$$\sup_{x\in[a,b]} |g(x)| = \max_{1\leqslant i\leqslant n} \sup_{x\in[a,b]} |g_i(x)| \leqslant \max_{1\leqslant i\leqslant n} \sup_{x\in[a,b]} |f_i(x)| = \sup_{x\in[a,b]} |f(x)|$$

3. Наконец, если f – произвольная интегрируемая функция, и $\varepsilon > 0$, то, подберем для нее по теореме 9.2.1 кусочно-постоянную функцию, обозначим ее h, так, чтобы

$$\int_a^b |f(x)-h(x)| \ \mathsf{d}\,x < \frac{\varepsilon}{2}$$

Затем, по уже доказанному, мы можем подобрать для функции h непрерывную функцию g так, чтобы

$$\int_a^b |h(x)-g(x)| \ \mathsf{d}\,x < \frac{\varepsilon}{2}$$

И тогда мы получим:

$$\int_a^b |f(x)-g(x)| \ \mathsf{d}\,x = \int_a^b |f(x)-h(x)+h(x)-g(x)| \ \mathsf{d}\,x \leqslant \int_a^b \Big(|f(x)-h(x)|+|h(x)-g(x)|\Big) \ \mathsf{d}\,x =$$
$$= \int_a^b |f(x)-h(x)| \ \mathsf{d}\,x + \int_a^b |h(x)-g(x)| \ \mathsf{d}\,x < \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Если кроме того, h и g выбирались так, чтобы удовлетворять условиям (9.2.85) и (9.2.83), то мы получим

$$\sup_{x\in[a,b]}|g(x)| \overset{(9.2.85)}{\leqslant} \sup_{x\in[a,b]}|h(x)| \overset{(9.2.83)}{\leqslant} \sup_{x\in[a,b]}|f(x)|$$

4. Последнее условие (9.2.86) можно обеспечить, поправив еще немного функцию g в окрестности точки a или b так, как мы это делали в пункте 1 (то есть линейно). □

(b) Свертка

- *Сверткой* функций $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ и $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ называется функция $f*g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, определенная формулой

$$(f*g)(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(y)\cdot g(x-y)\ \mathsf{d}\,y=\lim_{\substack{A\to-\infty\\ B\to+\infty}}\int_A^B f(y)\cdot g(x-y)\ \mathsf{d}\,y,\qquad y\in\mathbb{R}\quad (9.2.87)$$

Здесь в правой части стоит несобственный интеграл, который, конечно, не для любых f, g и x существует, и поэтому свертка $f*g$ не всегда определена. Среди достаточных условий для существования свертки нас будет интересовать только одно, а именно, то, в котором функции f и g локально интегрируемы, причем одна из них финитна. Понятие локально интегрируемой функции было введено нами на с.475, а что такое финитная функция объясняется в следующем определении:

- Функция $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ называется *финитной*, если существует отрезок $[a,b]$, вне которого функция f обращается в нуль:

$$\forall x\notin[a,b]\qquad f(x)=0$$

Наименьший из таких отрезков мы будем называть *выпуклым носителем функции* f и обозначать $\mathsf{conv\,supp}\,f$:

$$\mathsf{conv\,supp}\,f=\bigcap\Big\{[a,b]:\quad \forall x\notin[a,b]\qquad f(x)=0\Big\}$$

(если f финитная и не везде нулевая, то такой отрезок всегда существует).

Теорема 9.2.3. *Если функции f и g локально интегрируемы, причем одна из них финитна, то свертка $f*g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ корректно определена и непрерывна.*

Доказательство. Если финитна функция f, то интеграл в правой части (9.2.87) будет равен интегралу по ее выпуклому носителю $[a,b]=\mathsf{conv\,supp}\,f$:

$$(f*g)(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(y)\cdot g(x-y)\ \mathsf{d}\,y=\lim_{\substack{A\to-\infty\\ B\to+\infty}}\int_A^B f(y)\cdot g(x-y)\ \mathsf{d}\,y=$$

$$=\lim_{\substack{A\to-\infty\\ B\to+\infty}}\Bigg\{\underbrace{\int_A^a f(y)\cdot g(x-y)\ \mathsf{d}\,y}_{\substack{\parallel\\ 0}}+\int_a^b f(y)\cdot g(x-y)\ \mathsf{d}\,y+\underbrace{\int_b^B f(y)\cdot g(x-y)\ \mathsf{d}\,y}_{\substack{\parallel\\ 0}}\Bigg\}=$$

$$=\int_a^b f(y)\cdot g(x-y)\ \mathsf{d}\,y$$

Если же финитна функция g, и $[a,b]=\mathsf{conv\,supp}\,g$ – ее выпуклый носитель, то для всякого фиксированного $x\in\mathbb{R}$ функция $y\mapsto g(x-y)$ будет тоже финитной, и ее выпуклым носителем будет отрезок $[x-b,x-a]$:

$$x-y\in[a,b]\quad\Leftrightarrow\quad a\leqslant x-y\leqslant b\quad\Leftrightarrow\quad -a\geqslant y-x\geqslant -b\quad\Leftrightarrow\quad x-a\geqslant y\geqslant x-b\quad\Leftrightarrow\quad y\in[x-b,x-a]$$

Поэтому интеграл в (9.2.87) будет интегралом по отрезку $[x-b,x-a]$:

$$(f*g)(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(y)\cdot g(x-y)\ \mathsf{d}\,y=\lim_{\substack{A\to-\infty\\ B\to+\infty}}\int_A^B f(y)\cdot g(x-y)\ \mathsf{d}\,y=$$

$$= \lim_{\substack{A\to -\infty \\ B\to +\infty}} \left\{ \underbrace{\int_A^{x-b} f(y)\cdot g(x-y)\ \mathsf{d}\, y}_{\substack{\| \\ 0}} + \int_{x-b}^{x-a} f(y)\cdot g(x-y)\ \mathsf{d}\, y + \underbrace{\int_{x-a}^{B} f(y)\cdot g(x-y)\ \mathsf{d}\, y}_{\substack{\| \\ 0}} \right\} =$$

$$= \int_{x-b}^{x-a} f(y)\cdot g(x-y)\ \mathsf{d}\, y$$

Остается проверить, что функция $f * g$ непрерывна – мы это сделаем позже, на с.570. □

- *Сдвигом функции* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ на величину $a \in \mathbb{R}$ называется функция $T_a f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, определенная правилом
$$T_a f(x) := f(x+a), \qquad x \in \mathbb{R} \tag{9.2.88}$$

Свойства свертки

1°. *Дистрибутивность:*
$$(f+g) * h = f * h + g * h \tag{9.2.89}$$

2°. *Коммутативность:*
$$f * g = g * f \tag{9.2.90}$$

3°. *Перестановочность со сдвигом:*
$$(T_a f) * g = T_a(f * g) = f * (T_a g) \tag{9.2.91}$$

4°. *Оценка равномерной нормы: если функция g (локально интегрируема и) сосредоточена на отрезке $[a, b]$,*
$$\forall x \notin [a, b] \quad g(x) = 0,$$
то для любой (локально интегрируемой) функции f и любого отрезка $[A, B]$ выполняются неравенства:
$$\|f * g\|_{[A,B]} \leqslant \|f\|_{[A-b,B-a]} \cdot \|g\|^{\int}_{[a,b]} \tag{9.2.92}$$
$$\|f * g\|_{[A,B]} \leqslant \|f\|^{\int}_{[A-b,B-a]} \cdot \|g\|_{[a,b]} \tag{9.2.93}$$

Доказательство. 1. Первое свойство доказывается просто вычислением:

$$\Big((f+g) * h\Big)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Big(f(y) + g(y)\Big) \cdot h(x-y)\ \mathsf{d}\, y =$$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} f(y)\cdot h(x-y)\ \mathsf{d}\, y + \int_{-\infty}^{+\infty} g(y)\cdot h(x-y)\ \mathsf{d}\, y = (f*h)(x) + (g*h)(x)$$

2. Следующие два свойства доказываются заменой переменной. Коммутативность:

$$f * g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(y)\cdot g(x-y)\ \mathsf{d}\, y = \lim_{\substack{A\to -\infty \\ B\to +\infty}} \int_A^B f(y)\cdot g(x-y)\ \mathsf{d}\, y = \begin{vmatrix} x-y=t \\ y=x-t \\ \mathsf{d}\, y = -\mathsf{d}\, t \end{vmatrix} = (7.2.104) =$$
$$= -\lim_{\substack{A\to -\infty \\ B\to +\infty}} \int_{x-A}^{x-B} f(x-t)\cdot g(t)\ \mathsf{d}\, t = \lim_{\substack{A\to -\infty \\ B\to +\infty}} \int_{x-B}^{x-A} f(x-t)\cdot g(t)\ \mathsf{d}\, t = \begin{vmatrix} \widetilde{B} = x-A \underset{A\to-\infty}{\longrightarrow} +\infty \\ \widetilde{A} = x-B \underset{B\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty \end{vmatrix} =$$
$$= \lim_{\substack{\widetilde{A}\to -\infty \\ \widetilde{B}\to +\infty}} \int_{\widetilde{A}}^{\widetilde{B}} f(x-t)\cdot g(t)\ \mathsf{d}\, t = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t)\cdot g(t)\ \mathsf{d}\, t = (g*f)(x)$$

3. Перестановочность со сдвигами:

$$(T_a f) * g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} T_a f(y)\cdot g(x-y)\ \mathsf{d}\, y = \lim_{\substack{A\to -\infty \\ B\to +\infty}} \int_A^B f(y+a)\cdot g(x-y)\ \mathsf{d}\, y = \begin{vmatrix} y+a=t \\ y=t-a \\ \mathsf{d}\, y = \mathsf{d}\, t \end{vmatrix} = (7.2.104) =$$

$$= \lim_{\substack{A\to-\infty\\ B\to+\infty}} \int_{A+a}^{B+a} f(t)\cdot g(x+a-t)\ \mathsf{d}\,t = \begin{vmatrix} \alpha = A+a \underset{A\to-\infty}{\longrightarrow} -\infty \\ \beta = B+a \underset{B\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty \end{vmatrix} =$$

$$= \lim_{\substack{\alpha\to-\infty\\ \beta\to+\infty}} \int_{\alpha}^{\beta} f(t)\cdot g(x+a-t)\ \mathsf{d}\,t = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cdot g(x+a-t)\ \mathsf{d}\,t = (g*f)(x+a) = \big(T_a(g*f)\big)(x)$$

И точно так же доказывается вторая формула в (9.2.91).

4. Докажем (9.2.92):

$$\forall x\in[A,B] \qquad \Big|(f*g)(x)\Big| = \Big|\int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)\cdot \underbrace{g(y)}_{\substack{\uparrow\\ \text{отлично от нуля}\\ \text{только при } y\in[a,b]}}\ \mathsf{d}\,y\Big| = \Big|\int_a^b f(x-y)\cdot g(y)\ \mathsf{d}\,y\Big| \leqslant$$

$$\leqslant \int_a^b \underbrace{|f(\overbrace{x-y}^{\substack{[A-b,B-a]\\ \cup\!|\\ [x-b,x-a]\\ \Psi}})|}_{\substack{\wedge\!\!\backslash\\ \|f\|_{[A-b,B-a]}}}\cdot\Big|g(y)\Big|\ \mathsf{d}\,y \leqslant \|f\|_{[A-b,B-a]}\cdot\int_a^b\Big|g(y)\Big|\ \mathsf{d}\,y = \|f\|_{[A-b,B-a]}\cdot\|g\|^{\int}_{[a,b]}$$

$$\Downarrow$$

$$\|f*g\|_{[A,B]} = \sup_{x\in[A,B]}\Big|(f*g)(x)\Big| \leqslant \|f\|_{[A-b,B-a]}\cdot\|g\|^{\int}_{[a,b]}$$

Теперь (9.2.93):

$$\forall x\in[A,B] \qquad \Big|(f*g)(x)\Big| = \Big|\int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)\cdot \underbrace{g(y)}_{\substack{\uparrow\\ \text{отлично от нуля}\\ \text{только при } y\in[a,b]}}\ \mathsf{d}\,y\Big| =$$

$$= \Big|\int_a^b f(x-y)\cdot g(y)\ \mathsf{d}\,y\Big| \leqslant \int_a^b \Big|f(x-y)\Big|\cdot \underbrace{|g(y)|}_{\substack{\wedge\!\!\backslash\\ \|g\|_{[a,b]}}}\ \mathsf{d}\,y \leqslant (7.2.97) \leqslant$$

$$\leqslant \int_a^b \Big|f(x-y)\Big|\ \mathsf{d}\,y\cdot\|g\|_{[a,b]} = \begin{vmatrix} x-y=t\\ y=x-t\\ \mathsf{d}\,y=-\mathsf{d}\,t\end{vmatrix} = -\|g\|_{[a,b]}\cdot\int_{x-a}^{x-b}\Big|f_n(t)-f(t)\Big|\ \mathsf{d}\,t =$$

$$= \int_{x-b}^{x-a}\Big|f(t)\Big|\ \mathsf{d}\,t\cdot\|g\|_{[a,b]} \underset{\substack{\uparrow\\ [x-b,x-a]\subseteq[A-b,B-a]}}{\leqslant} \int_{A-b}^{B-a}\Big|f(t)\Big|\ \mathsf{d}\,t\cdot\|g\|_{[a,b]} = \|f\|^{\int}_{[A-b,B-a]}\cdot\|g\|_{[a,b]}$$

$$\Downarrow$$

$$\|f*g\|_{[A,B]} = \sup_{x\in[A,B]}\Big|(f*g)(x)\Big| \leqslant \|f\|^{\int}_{[A-b,B-a]}\cdot\|g\|_{[a,b]}$$

$\square$

Лемма 9.2.4. *Пусть f – непрерывная функция на $\mathbb{R}$. Тогда для любого отрезка $[\alpha,\beta]$ справедливо соотношение:*

$$\|T_{s_n}f-f\|_{[\alpha,\beta]} = \|f(x+s)-f(x)\|_{x\in[\alpha,\beta]} \underset{s\to0}{\longrightarrow} 0 \tag{9.2.94}$$

Доказательство. Функция f непрерывна на отрезке $[\alpha-1,\beta+1]$, значит по теореме Кантора 3.3.10 она равномерно непрерывна на нем, то есть для любого $\varepsilon>0$ существует $\delta>0$ такое что для любых x и y будет справедлива импликация:

$$\left\{\begin{matrix} y\in[\alpha-1,\beta+1]\\ x\in[\alpha-1,\beta+1]\\ |y-x|<\delta\end{matrix}\right\} \quad\Longrightarrow\quad |f(y)-f(x)|<\varepsilon$$

Здесь при необходимости число δ можно уменьшить так, чтобы выполнялось дополнительное неравенство

$$\delta \leqslant 1$$

Тогда для любых $s \in (-\delta, \delta)$ и $x \in [\alpha, \beta]$ мы получим:

$$\underset{\substack{\Downarrow \\ \begin{Bmatrix} x+s \in [\alpha-1, \beta+1] \\ x \in [\alpha-1, \beta+1] \\ |(x+s)-x| = |s| < \delta \end{Bmatrix}}}{|f(x+s) - f(x)| < \varepsilon}$$

Поэтому

$$\|T_s f - f\|_{[\alpha,\beta]} = \sup_{x\in[\alpha,\beta]} |f(x+s) - f(x)| \leqslant \varepsilon \tag{9.2.95}$$

То есть по произвольному данному $\varepsilon > 0$ мы нашли такое $\delta > 0$, что для всех $s \in (-\delta, \delta)$ выполняется (9.2.95). Это и нужно было доказать. $\square$

Лемма 9.2.5. *Пусть f – гладкая функция на $\mathbb{R}$. Тогда для любого отрезка $[\alpha, \beta]$ справедливо соотношение:*

$$\left\| \frac{T_s f - f}{s} - f' \right\|_{[\alpha,\beta]} = \left\| \frac{f(x+s) - f(x)}{s} - f'(x) \right\|_{x\in[\alpha,\beta]} \underset{s\to 0}{\longrightarrow} 0 \tag{9.2.96}$$

Доказательство. Здесь тот же прием примененяется не к функции f, а к ее производной f'. Функция f' непрерывна на отрезке $[\alpha - 1, \beta + 1]$, значит по теореме Кантора 3.3.10 она равномерно непрерывна на нем, то есть для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое что для любых x и y будет справедлива импликация:

$$\begin{Bmatrix} y \in [\alpha-1, \beta+1] \\ x \in [\alpha-1, \beta+1] \\ |y - x| < \delta \end{Bmatrix} \implies |f'(y) - f'(x)| < \varepsilon$$

Опять замечаем, что при необходимости число δ можно уменьшить так, чтобы выполнялось дополнительное неравенство

$$\delta \leqslant 1$$

Тогда для любых $s \in (-\delta, \delta)$ и $x \in [\alpha, \beta]$ мы получим:

$$\left| \frac{1}{s} \cdot \underbrace{\Big(f(x+s) - f(x) \Big)}_{\substack{\overset{(7.3.142)}{\parallel} \\ \int_x^{x+s} f'(y)\, \mathsf{d}\, y \\ \parallel \\ \int_0^s f'(x+t)\, \mathsf{d}\, t \\ \overset{(7.3.141)}{\parallel} \\ f'(x+\tau)\cdot s, \\ \tau \in \overrightarrow{0s}}} - f'(x) \right| = |f'(x + \underset{\substack{\Cap \\ \overrightarrow{0s}}}{\tau}) - f'(x)| \overset{\substack{\begin{Bmatrix} x+\tau \in [\alpha-1, \beta+1] \\ x \in [\alpha-1, \beta+1] \\ |(x+\tau)-x| = |\tau| \leqslant |s| < \delta \end{Bmatrix} \\ \Downarrow}}{<} \varepsilon$$

Поэтому

$$\left\| \frac{T_s f - f}{s} - f' \right\|_{[\alpha,\beta]} = \sup_{x\in[\alpha,\beta]} \left| \frac{f(x+s) - f(x)}{s} - f'(x) \right| \leqslant \varepsilon \tag{9.2.97}$$

То есть по произвольному данному $\varepsilon > 0$ мы нашли такое $\delta > 0$, что для всех $s \in (-\delta, \delta)$ выполняется (9.2.97). Это и нужно было доказать. $\square$

Окончание доказательства теоремы 9.2.3. Вспомним, что в доказательстве теоремы 9.2.3 мы отложили на будущее проверку того, что свертка $f * g$ действительно является непрерывной функцией. Теперь можем в этом убедиться.

1. Предположим сначала, что функция g непрерывна и финитна. Пусть $[a, b]$ – ее выпуклый носитель:

$$\operatorname{conv}\operatorname{supp} g = [a, b]$$

Тогда для любой последовательности $s_n \to 0$, по модулю не превосходящей 1,

$$|s_n| \leqslant 1$$

сдвиги $T_{s_n} g$ функции g будут сосредоточены на отрезке $[a-1, b+1]$:

$$\operatorname{conv}\operatorname{supp} T_{s_n} g \subseteq [a-1, b+1] \tag{9.2.98}$$

Из леммы 9.2.4 мы получим цепочку:

$$\|T_{s_n} g - g\|_{[a-1,b+1]} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \qquad \text{(лемма 9.2.4)}$$

$$\Downarrow$$

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad |(f*g)(x+s_n) - (f*g)(x)| = |T_{s_n}(f*g)(x) - (f*g)(x)| = \|T_{s_n}(f*g) - f*g\|_{[x,x]} =$$
$$= (9.2.91) = \|f*(T_{s_n} g) - f*g\|_{[x,x]} = (9.2.89) = \left\| f * \Big(T_{s_n} g - g \Big) \right\|_{[x,x]} \leqslant$$
$$\leqslant (9.2.93) \leqslant \|f\|^{\int}_{[x-b-1,x-a+1]} \cdot \underbrace{\|T_{s_n} g - g\|_{[a-1,b+1]}}_{\substack{\downarrow \\ 0}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

$$\Downarrow$$

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad (f*g)(x+s_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} (f*g)(x)$$

Это верно для любой последовательности $s_n \to 0$ со свойством $|s_n| \leqslant 1$, значит,

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad (f*g)(x+s) \underset{s\to 0}{\longrightarrow} (f*g)(x)$$

то есть функция $f*g$ непрерывна.

2. Теперь пусть g – произвольная локально интегрируемая финитная функция и $[a, b]$ – ее выпуклый носитель. По теореме 9.2.2 можно подобрать последовательность непрерывных функций g_n так, чтобы выполнялись условия

$$\|g_n - g\|^{\int}_{[a,b]} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0, \qquad g(a) = 0 = g(b)$$

Второе из этих условий означает, что функции g_n можно продолжить нулем вне отрезка $[a, b]$, и они станут непрерывными функциями, определенными на всей прямой $\mathbb{R}$, и, как и g, сосредоточенными на отрезке $[a, b]$, поэтому

$$\forall n \qquad \operatorname{conv}\operatorname{supp}(g_n - g) \subseteq [a, b]$$

После этого для всякого отрезка $[A, B] \subset \mathbb{R}$ мы получим:

$$\|f*g_n - f*g\|_{[A,B]} = (9.2.89) = \|f*(g_n - g)\|_{[A,B]} \leqslant (9.2.92) \leqslant \|f\|_{[A-b,B-a]} \cdot \|g_n - g\|^{\int}_{[a,b]} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

$$\Downarrow$$

$$(f*g_n)(x) \overset{x\in[A,B]}{\underset{n\to\infty}{\rightrightarrows}} (f*g)(x)$$

При этом, поскольку функции g_n непрерывны, по уже доказанному, свертки $f*g_n$ – тоже непрерывные функции. Значит, по свойству 1° на с.540, равномерный на отрезке $[A, B]$ предел $f*g$ функций $f*g_n$ должен быть непрерывной функцией на $[A, B]$. Это верно для любого отрезка $[A, B]$, значит функция $f*g$ должна быть непрерывна всюду на $\mathbb{R}$. □

Теорема 9.2.6. *Если одна из функций f или g является гладкой, то свертка $f*g$ тоже является гладкой, причем если гладкой является функция f, то*

$$(f*g)' = f' * g \tag{9.2.99}$$

если же гладкой является функция g, то

$$(f*g)' = f * g' \tag{9.2.100}$$

Доказательство. Пусть функция f – гладкая, а g – финитная (и локально интегрируемая) с носителем $[a,b]$. Тогда для произвольной последовательности $s_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, $s_n \neq 0$, мы получим:

$$\forall[\alpha,\beta]\subset\mathbb{R} \qquad \left\|\frac{1}{s_n}\Big(T_{s_n}f-f\Big)-f'\right\|_{[\alpha,\beta]} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \qquad \text{(лемма 9.2.5)}$$

$$\Downarrow$$

$$\forall x\in\mathbb{R} \qquad \left|\frac{(f*g)(x+s_n)-(f*g)(x)}{s_n}-(f'*g)(x)\right| =$$
$$= \left|\frac{1}{s_n}\Big((T_{s_n}f*g)(x)-(f*g)(x)\Big)-(f'*g)(x)\right| = \left\|\frac{1}{s_n}\Big(T_{s_n}f*g-f*g\Big)-f'*g\right\|_{[x,x]} =$$
$$= \left\|\left(\frac{1}{s_n}\Big(T_{s_n}f-f\Big)-f'\right)*g\right\|_{[x,x]} \leqslant (9.2.92) \leqslant \underbrace{\left\|\frac{1}{s_n}\Big(T_{s_n}f-f\Big)-f'\right\|_{[x-b,x-a]}}_{\substack{\downarrow \\ 0}\ \substack{n\\ \downarrow\\ \infty}} \cdot \|g\|^{\int}_{[a,b]} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

$$\Downarrow$$

$$\forall x\in\mathbb{R} \qquad \frac{(f*g)(x+s_n)-(f*g)(x)}{s_n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} (f'*g)(x)$$

Это верно для любой последовательности $s_n \to 0$. Поэтому

$$\forall x\in\mathbb{R} \qquad \frac{(f*g)(x+s)-(f*g)(x)}{s} \underset{s\to 0}{\longrightarrow} (f'*g)(x)$$

Мы получаем, что функция $f*g$ дифференцируема и ее производная будет равна $f'*g$. Остается вспомнить, что в силу только что законченного доказательства теоремы 9.2.3, функция $f'*g$ будет непрерывна.

По аналогии рассматривается случай, когда функция f – произвольная (локально интегрируемая), а g – гладкая и финитная. □

Следствие 9.2.7. *Если одна из функций f или g является бесконечно гладкой, то их свертка тоже будет бесконечно гладкой.*

Доказательство. Пусть f бесконечно гладкая. Тогда по теореме 9.2.6 свертка $f*g$ будет гладкой, причем

$$(f*g)' = f'*g$$

Поскольку f' тоже гладкая, опять по теореме 9.2.6 получаем, что свертка $f'*g$, то есть функция $(f*g)'$, будет гладкой, причем

$$(f*g)'' = (f'*g)' = f''*g$$

И так далее. □

(c) Приближение непрерывных функций

Аппроксимативная единица.

- Последовательность локально интегрируемых функций $\varDelta_n:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ называется *аппроксимативной единицей*, если выполняются следующие условия:

  (i) функции $\varDelta_n$ имеют общий компактный носитель, то есть существует отрезок $[\alpha,\beta]$, вне которого все они равны нулю:

  $$\forall x\notin[\alpha,\beta] \qquad \forall n\in\mathbb{N} \qquad \varDelta_n(x)=0$$

  если это верно, то в качестве $[\alpha,\beta]$ всегда можно выбрать отрезок вида $[-D,D]$, где $D>0$, и тогда будет выполняться условие

  $$\forall x\in\mathbb{R} \qquad \Big(\quad |x|>D \quad\Longrightarrow\quad \forall n\in\mathbb{N} \qquad \varDelta_n(x)=0 \quad\Big) \tag{9.2.101}$$

(ii) все функции $\mathit{\Delta}_n$ неотрицательны:

$$\mathit{\Delta}_n \geqslant 0 \tag{9.2.102}$$

(iii) интеграл от всякой функции $\mathit{\Delta}_n$ равен единице:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathit{\Delta}_n(x)\ \mathsf{d}\,x = 1 \tag{9.2.103}$$

(iv) для всякого $\delta > 0$ выполняется соотношение:

$$\int_{-\delta}^{+\delta} \mathit{\Delta}_n(x)\ \mathsf{d}\,x \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1 \tag{9.2.104}$$

или, что равносильно, соотношение

$$\int_{|x|\geqslant\delta} \mathit{\Delta}_n(x)\ \mathsf{d}\,x \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \tag{9.2.105}$$

◇ **9.2.1.** Покажем, что функции

$$\mathit{\Delta}_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{\int_{-1}^{1}(1-x^2)^n\ \mathsf{d}\,x} \cdot (1-x^2)^n, & |x| \leqslant 1 \\ 0, & |x| > 1 \end{cases} \tag{9.2.106}$$

образуют аппроксимативную единицу. Условия (i)-(iii) здесь очевидны. Докажем (iv). Для всякого $\delta > 0$ мы получим:

$$\int_{-1}^{1}(1-x^2)^n\ \mathsf{d}\,x = 2\int_0^1 (1-x^2)^n\ \mathsf{d}\,x \geqslant$$

$$\geqslant 2\int_0^1 (1-x)^n\ \mathsf{d}\,x = -2\cdot\frac{(1-x)^{n+1}}{n+1}\Bigg|_{x=0}^{x=1} = \frac{2}{n+1}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{2}{\int_{-1}^{1}(1-x^2)^n\ \mathsf{d}\,x} \leqslant n+1$$

$$\Downarrow$$

$$\int_{|x|\geqslant\delta} \mathit{\Delta}_n(x)\ \mathsf{d}\,x = 2\cdot\int_\delta^1 \mathit{\Delta}_n(x)\ \mathsf{d}\,x =$$

$$= \underbrace{\frac{2}{\int_{-1}^{1}(1-x^2)^n\ \mathsf{d}\,x}}_{\substack{\wedge\!\backslash \\ n+1}} \cdot \underbrace{\int_\delta^1 (1-x^2)^n\ \mathsf{d}\,x}_{\substack{\wedge\!\backslash \\ \int_\delta^1 (1-\delta^2)^n\ \mathsf{d}\,x \\ \| \\ (1-\delta^2)^n\cdot(1-\delta)}} \leqslant$$

$$\leqslant (n+1)\cdot(1-\delta^2)^n\cdot(1-\delta) \underset{n\to\infty}{\overset{(3.2.58)}{\longrightarrow}} 0$$

◇ **9.2.2.** Покажем, что функции

$$\mathit{\Delta}_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{\int_{-\pi}^{\pi}\cos^{2n}\frac{x}{2}\ \mathsf{d}\,x} \cdot \cos^{2n}\frac{x}{2}, & |x| \leqslant \pi \\ 0, & |x| > \pi \end{cases} \tag{9.2.107}$$

образуют аппроксимативную единицу. Как и в предыдущем примере, здесь нужно проверить только условие (iv). Для всякого $\delta > 0$ мы получим:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^{2n}\frac{x}{2}\ \mathsf{d}\,x = \left| \begin{matrix} \frac{x}{2} = y \\ x = 2y \end{matrix} \right| =$$

$$= 2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n} y\ \mathsf{d}\,y = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{\cos^{2n} y}_{\substack{\vee\!\!/ \\ 1-\frac{2y}{\pi}, \\ \text{потому что} \\ \cos\text{ – выпуклая} \\ \text{функция на } [0,\frac{\pi}{2}]}}\ \mathsf{d}\,y \geqslant$$

$$\geqslant 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1-\frac{2y}{\pi}\right)^{2n}\ \mathsf{d}\,y =$$

$$= -\frac{2\pi}{2n+1}\left(1-\frac{2y}{\pi}\right)^{2n+1}\Bigg|_{y=0}^{y=\frac{\pi}{2}} = \frac{2\pi}{2n+1}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{1}{\int_{-\pi}^{\pi}\cos^{2n}\frac{x}{2}\ \mathsf{d}\,x} \leqslant \frac{2n+1}{2\pi}$$

$$\Downarrow$$

$$\int_{|x|\geqslant\delta} \mathit{\Delta}_n(x)\ \mathsf{d}\,x = 2\int_\delta^\pi \mathit{\Delta}_n(x)\ \mathsf{d}\,x =$$

$$= \underbrace{\frac{1}{\int_{-\pi}^{\pi}\cos^{2n}\frac{x}{2}\ \mathsf{d}\,x}}_{\substack{\wedge\!\backslash \\ \frac{2n+1}{2\pi}}} \cdot 2\int_\delta^\pi \left(\cos\frac{x}{2}\right)^{2n}\ \mathsf{d}\,x \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2n+1}{2\pi}\cdot 2\int_\delta^\pi \left(\cos\frac{x}{2}\right)^{2n}\ \mathsf{d}\,x = \left| \begin{matrix} \frac{x}{2} = y \\ x = 2y \end{matrix} \right| =$$

$$= \frac{2n+1}{2\pi}\cdot 4\int_\delta^{\frac{\pi}{2}} \Big(\underbrace{\cos y}_{\substack{\wedge\!\backslash \\ \cos\delta, \\ \text{потому что} \\ \cos\text{ убывает} \\ \text{на } [0,\frac{\pi}{2}]}}\Big)^{2n}\ \mathsf{d}\,y \leqslant$$

$$\leqslant \frac{4n+2}{\pi}\cdot\int_\delta^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n}\delta\ \mathsf{d}\,x =$$

$$= \frac{4n+2}{\pi}\cdot\Big(\underbrace{\cos^2\delta}_{\substack{\wedge \\ 1}}\Big)^n\cdot\left(\frac{\pi}{2}-\delta\right) \underset{n\to\infty}{\overset{(3.2.58)}{\longrightarrow}} 0$$

◇ **9.2.3. Бесконечно гладкая аппроксимативная единица.** Следуя примеру 9.1.36 построим гладкую функцию $g \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ со следующими свойствами:

$$\begin{cases} g(x) = 0, & x \notin (-1,1) \\ g(x) > 0, & x \in (-1,1) \end{cases}$$

Положив

$$h(x) = \frac{g(x)}{\int_{-1}^{1} g(t) \ \mathsf{d}\, t}$$

мы получим функцию со следующими свойствами:

$$\begin{cases} h(x) = 0, & x \notin (-1,1) \\ h(x) > 0, & x \in (-1,1) \\ \int_{-1}^{1} h(x) \ \mathsf{d}\, x = 1 \end{cases}$$

Теперь положив

$$\Delta_n(x) = n \cdot h(nx)$$

мы получим последовательность неотрицательных функций $\Delta_n \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$, имеющих в качестве общего носителя отрезок $[-1,1]$:

$$x \notin (-1,1) \quad \Longrightarrow \quad nx \notin (-1,1) \quad \Longrightarrow \quad \Delta_n(x) = h(nx) = 0$$

Интеграл от каждой такой функции будет равен единице:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Delta_n(x) \ \mathsf{d}\, x = \int_{-\infty}^{\infty} n \cdot h(nx) \ \mathsf{d}\, x = \\ = \int_{-\infty}^{\infty} h(nx) \ \mathsf{d}(nx) = \int_{-\infty}^{\infty} h(y) \ \mathsf{d}\, y = 1$$

А для каждого $\delta > 0$ и любого $n > \frac{1}{\delta}$ мы получим:

$$\int_{-\delta}^{\delta} \Delta_n(x) \ \mathsf{d}\, x = \int_{-\delta}^{\delta} n \cdot h(nx) \ \mathsf{d}\, x = \\ = \int_{-\delta}^{\delta} h(nx) \ \mathsf{d}(nx) = \underbrace{\int_{-n\delta}^{n\delta} h(y) \ \mathsf{d}\, y}_{n\delta > 1} = \\ = \int_{-1}^{1} h(y) \ \mathsf{d}\, y = 1$$

Таким образом, выполняются все четыре условия (i)-(iv) на с.572, и наша последовательность Δ_n является аппроксимативной единицей.

Теорема 9.2.8. *Пусть $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ – непрерывная функция на $\mathbb{R}$. Тогда для всякой аппроксимативной единицы Δ_n последовательность сверток $f * \Delta_n$ стремится к f равномерно на каждом отрезке $[a,b]$:*

$$f * \Delta_n(x) \underset{n\to\infty}{\overset{x\in[a,b]}{\rightrightarrows}} f(x) \tag{9.2.108}$$

Доказательство. Зафиксируем отрезок $[a,b]$ и число D со свойством (9.2.101). Поскольку функция f непрерывна на отрезке $[a-D, b+D]$, по теореме Вейерштрасса 3.3.8 должна быть конечна величина

$$M = \|f\|_{[a-D,b+D]} = \sup_{s\in[a-D,b+D]} |f(s)| \tag{9.2.109}$$

Пусть далее $\varepsilon > 0$. Поскольку функция f непрерывна на $\mathbb{R}$, она непрерывна и на отрезке $[a-D, b+D]$. По теореме Кантора 3.3.10 это означает, что f равномерно непрерывна на $[a-D, b+D]$, поэтому для числа $\frac{\varepsilon}{2} > 0$ должно существовать $\delta > 0$, которое можно подчинить дополнительному условию $\delta < D$, такое, что

$$\forall s,t \in [a-D, b+D] \qquad |s-t| < \delta \quad \Longrightarrow \quad |f(s) - f(t)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

В частности, при $t = x \in [a,b]$ и $s = x - y$, где $y \in (-\delta, \delta)$, мы получим такое соотношение:

$$\forall x \in [a,b] \quad \forall y \in (-\delta,\delta) \qquad |f(x-y) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2} \tag{9.2.110}$$

Теперь для любого $x \in [a,b]$ мы получаем:

$$\big|f * \Delta_n(x) - f(x)\big| = \Bigg| \overbrace{\int_{-\infty}^{\infty} f(x-y) \cdot \Delta_n(y) \, \mathsf{d}\, y}^{\substack{f*\Delta_n(x) \\ \|_{(9.2.87)}}} - f(x) \cdot \overbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \Delta_n(y) \, \mathsf{d}\, y}^{\substack{1 \\ \|_{(9.2.103)}}} \Bigg| = \\ = \left| \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y) \cdot \Delta_n(y) \, \mathsf{d}\, y - \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y) \cdot \Delta_n(y) \, \mathsf{d}\, y \right| = \left| \int_{-\infty}^{\infty} \Big(f(x-y) - f(x) \Big) \cdot \underbrace{\Delta_n(y)}_{\substack{\| \\ 0, \\ \text{при } |y| > D}} \, \mathsf{d}\, y \right| =$$

$$= \left| \int_{-D}^{D} \Big(f(x-y) - f(x) \Big) \cdot \varDelta_n(y)\,\mathsf{d}\,y \right| \leqslant \int_{-D}^{D} \Big| f(x-y) - f(x) \Big| \cdot \varDelta_n(y)\,\mathsf{d}\,y \leqslant$$

$$\leqslant \int_{-\delta}^{\delta} \underbrace{\Big| f(x-y) - f(x) \Big|}_{\substack{\wedge\!\backslash (9.2.110) \\ \frac{\varepsilon}{2}}} \cdot \varDelta_n(y)\,\mathsf{d}\,y + \int_{|y|\geqslant\delta} \underbrace{\Big| f(x-y) - f(x) \Big|}_{\substack{\wedge\!\backslash \\ |f(x-y)|+|f(x)| \\ \wedge\!\backslash (9.2.109) \\ M+M \\ \| \\ 2M}} \cdot \varDelta_n(y)\,\mathsf{d}\,y \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\varepsilon}{2} \cdot \int_{-\delta}^{\delta} \varDelta_n(y)\,\mathsf{d}\,y + 2M \cdot \int_{|y|\geqslant\delta} \varDelta_n(y)\,\mathsf{d}\,y$$

Это верно для любого $x \in [a,b]$. Значит,

$$\|f * \varDelta_n - f\|_{[a,b]} = \sup_{x\in[a,b]} \Big| f*\varDelta_n(x) - f(x) \Big| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} \cdot \underbrace{\int_{-\delta}^{\delta} \varDelta_n(y)\,\mathsf{d}\,y}_{\substack{(9.2.104)\ \downarrow\ \overset{n}{\underset{\infty}{\downarrow}} \\ 1}} + 2M \cdot \underbrace{\int_{|y|\geqslant\delta} \varDelta_n(y)\,\mathsf{d}\,y}_{\substack{(9.2.105)\ \downarrow\ \overset{n}{\underset{\infty}{\downarrow}} \\ 0}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

И это верно для любого $\varepsilon > 0$. Мы получаем, что, какое ни возьми $\varepsilon > 0$, для почти всех $n \in \mathbb{N}$ будет верно неравенство

$$\|f * \varDelta_n - f\|_{[a,b]} < \varepsilon$$

То есть,

$$\|f * \varDelta_n - f\|_{[a,b]} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

а это нам и нужно было доказать. □

Аппроксимация гладкими функциями.

Теорема 9.2.9. *Для любой непрерывной функции $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ можно подобрать последовательность бесконечно гладких функций $\varphi_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, равномерно сходящуюся к f на каждом отрезке $[a,b] \subset \mathbb{R}$:*

$$\forall [a,b] \subset \mathbb{R} \qquad \varphi_n(x) \underset{n\to\infty}{\overset{x\in[a,b]}{\rightrightarrows}} f(x) \tag{9.2.111}$$

Доказательство. Пусть $\varDelta_n$ – бесконечно гладкая аппроксимативная единица, построенная в примере 9.2.3. Тогда по следствию 9.2.7, функции

$$\varphi_n = f * \varDelta_n$$

будут бесконечно гладкими, а по теореме 9.2.8, они будут стремиться к f равномерно на каждом отрезке в $\mathbb{R}$. □

Следствие 9.2.10. *Для любой непрерывной функции $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ можно подобрать последовательность бесконечно гладких функций $\varphi_n : [a,b] \to \mathbb{R}$, равномерно сходящуюся к f на $[a,b]$:*

$$\varphi_n(x) \underset{n\to\infty}{\overset{x\in[a,b]}{\rightrightarrows}} f(x) \tag{9.2.112}$$

Доказательство. Нужно сначала продолжить f до непрерывной функции на всю прямую $\mathbb{R}$. Это можно сделать, например, положив

$$f(x) = \begin{cases} f(a), & x < a \\ f(b), & x > b \end{cases}$$

После этого по теореме 9.2.9, найдется последовательность гладких функций φ_n, приближающая f равномерно на каждом отрезке, в частности, на отрезке $[a,b]$. □

Аппроксимация алгебраическими многочленами. Напомним, что

- функции вида
$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot x^k \qquad (x \in \mathbb{R}),$$
где $n \in \mathbb{N}$ и $a_k \in \mathbb{R}$, называются *алгебраическими многочленами* или просто *многочленами* (от одной переменной). Если $a_n \neq 0$, то число n называется *степенью многочлена* f.

Теорема 9.2.11 (Вейерштрасса об аппроксимации алгебраическими многочленами)**.** *Для любой непрерывной функции* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *можно подобрать последовательность многочленов* $\varphi_n : [a,b] \to \mathbb{R}$*, равномерно сходящуюся к* f *на* $[a,b]$*:*

$$f_n(x) \underset{n\to\infty}{\overset{x\in[a,b]}{\rightrightarrows}} f(x) \tag{9.2.113}$$

Доказательство. 1. Прежде всего заметим, что линейной заменой переменной утверждение сводится к случаю $[a,b] \subset (0,1)$. Например, функция

$$\varphi(t) = 3(b-a)\cdot t + 2a - b$$

превращает отрезок $\left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right]$ в отрезок $[a,b]$:

$$\varphi\left(\left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right]\right) = [a,b]$$

А функция f в композиции с φ превращается в функцию $f\circ\varphi$ на отрезке $\left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right]$. Если мы сможем построить последовательность многочленов g_n, приближающую $f\circ\varphi$ равномерно на отрезке $\left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right]$ (содержащимся в интервале $(0,1)$)

$$g_n(t) \underset{n\to\infty}{\overset{t\in\left[\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right]}{\rightrightarrows}} f\Big(\varphi(t)\Big),$$

то функции $f_n = g_n \circ \varphi^{-1}$ будут многочленами, приближающими f равномерно на $[a,b]$:

$$f_n(x) = g_n\Big(\varphi^{-1}(x)\Big) \underset{n\to\infty}{\overset{x\in[a,b]}{\rightrightarrows}} f\Big(\varphi\big(\varphi^{-1}(x)\big)\Big) = f(x)$$

2. Итак, можно считать, что отрезок $[a,b]$ лежит в интервале $(0;1)$:

$$[a,b] \subset (0,1)$$

Тогда f можно доопределить непрерывно на всю прямую $\mathbb{R}$ так, чтобы ее выпуклым носителем был отрезок $[0,1]$. Например, можно на оставшихся кусках интервала $(0,1)$ доопределить функцию f линейно, то есть положить

$$f(x) = \begin{cases} \frac{f(a)}{a}\cdot x, & x \in (0,a) \\ \frac{f(b)}{b-1}\cdot(x-b) + f(b), & x \in (b,1) \\ 0, & x \in (-\infty, 0] \cup [1, +\infty) \end{cases}$$

Запомним это, и рассмотрим аппроксимативную единицу (9.2.106):

$$\varDelta_n(x) = \begin{cases} C_n\cdot(1-x^2)^n, & |x| \leqslant 1 \\ 0, & |x| > 1 \end{cases}, \qquad C_n = \frac{1}{\int_{-1}^{1}(1-x^2)^n \, \mathsf{d}\, x}$$

По теореме 9.2.8, выполняется соотношение

$$f * \varDelta_n(x) \underset{n\to\infty}{\overset{x\in[a,b]}{\rightrightarrows}} f(x)$$

Нам остается только заметить, что на отрезке $[a,b]$ функции $f*\varDelta_n$ представляют собой многочлены:

$$f*\varDelta_n(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(y)\cdot \underbrace{\varDelta_n(x-y)}_{\substack{\parallel\\ 0,\\ \text{при } y\notin[x-1,x+1],\\ \text{поскольку}\\ \operatorname{conv}\operatorname{supp}\varDelta_n=[-1,1]}}\ \mathsf{d}\,y=\int_{x-1}^{x+1} f(y)\cdot\varDelta_n(x-y)\ \mathsf{d}\,y=$$

$$=C_n\cdot\int_{x-1}^{x+1} \underbrace{f(y)}_{\substack{\parallel\\ 0,\\ \text{при } y\notin[0,+1],\\ \text{причем}\\ x-1\leqslant 0<1\leqslant x+1}}\cdot\Big(1-(x-y)^2\Big)^n\ \mathsf{d}\,y=C_n\cdot\int_0^1 f(y)\cdot\underbrace{\Big(1-(x-y)^2\Big)^n}_{\text{многочлен по } y}\ \mathsf{d}\,y=$$

$$=C_n\cdot\int_0^1 f(y)\cdot\sum_{k=0}^{2n} p_k(x)\cdot y^n\ \mathsf{d}\,y=\sum_{k=0}^{2n}\overbrace{\left(C_n\cdot\int_0^1 f(y)\cdot y^n\ \mathsf{d}\,y\right)}^{\text{число}}\cdot\underbrace{p_k(x)}_{\substack{\text{многочлен}\\ \text{по } x}}$$

□

Аппроксимация тригонометрическими многочленами.

- Функции вида
$$f(x)=c+\sum_{k=1}^{n}\Big\{a_k\cdot\cos kx+b_k\cdot\sin kx\Big\}\qquad (x\in\mathbb{R}),$$
где $n\in\mathbb{N}$, $c,a_k,b_k\in\mathbb{R}$, называются *тригонометрическими многочленами.* Если $a_n\neq 0$ или $b_n\neq 0$, то число n называется *степенью тригонометрического многочлена* f.

Теорема 9.2.12 (Вейерштрасса об аппроксимации тригонометрическими многочленами)**.** *Для любой непрерывной 2π-периодической функции $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ можно подобрать последовательность тригонометрических многочленов $f_n:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, равномерно сходящуюся к f на $\mathbb{R}$:*

$$f_n(x)\underset{n\to\infty}{\overset{x\in\mathbb{R}}{\rightrightarrows}} f(x)\tag{9.2.114}$$

Доказательство. Здесь нужно рассмотреть аппроксимативную единицу (9.2.107). По теореме 9.2.8, выполняется соотношение

$$f*\varDelta_n(x)\underset{n\to\infty}{\overset{x\in[-\pi,\pi]}{\rightrightarrows}} f(x)$$

и наша задача – убедиться, что функции $f*\varDelta_n$ являются тригонометрическими многочленами. Для этого нужно заметить, что на отрезке $[-\pi,\pi]$ функции $\varDelta_n$ сами будут тригонометрическими многочленами:

$$\varDelta_n(x)=c+\sum_{k=1}^{N}\Big\{a_k\cos kx+b_k\sin kx\Big\}$$

Отсюда следует цепочка:

$$f*\varDelta_n(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(y)\cdot \underbrace{\varDelta_n(x-y)}_{\substack{\parallel\\ 0,\\ \text{при } y\notin[x-\pi,x+\pi],\\ \text{поскольку}\\ \operatorname{conv}\operatorname{supp}\varDelta_n=[-\pi,\pi]}}\ \mathsf{d}\,y=\int_{x-\pi}^{x+\pi} f(y)\cdot\varDelta_n(\underbrace{x-y}_{\substack{\Cap\\ [-\pi,\pi]}})\ \mathsf{d}\,y=$$

$$=\int_{x-\pi}^{x+\pi}\underbrace{f(y)\cdot\left(c+\sum_{k=1}^{N}\Big\{a_k\cdot\cos k(x-y)+b_k(x)\cdot\sin k(x-y)\Big\}\right)}_{2\pi\text{-периодическая функция от } y}\ \mathsf{d}\,y=\left|\substack{\text{интеграл по сдвинутому периоду}\\ \text{равен интегралу по периоду}}\right|=$$

$$=\int_{-\pi}^{+\pi} f(y)\cdot\left(c+\sum_{k=1}^{N}\Big\{a_k\cdot\cos k(x-y)+b_k(x)\cdot\sin k(x-y)\Big\}\right)\ \mathsf{d}\,y=(4.1.82),(4.1.81)=$$

$$= \int_{-\pi}^{+\pi} f(y) \cdot \left(C + \sum_{k=1}^{N} \Big\{ \underbrace{A_k(x)}_{\substack{\text{тригоно-}\\ \text{метрический}\\ \text{многочлен}\\ \text{от } x}} \cdot \cos ky + \underbrace{B_k(x)}_{\substack{\text{тригоно-}\\ \text{метрический}\\ \text{многочлен}\\ \text{от } x}} \cdot \sin ky \Big\} \right) \, \mathsf{d}\, y =$$

$$= C \cdot \overbrace{\int_{-\pi}^{+\pi} f(y) \, \mathsf{d}\, y}^{\text{число}} + \sum_{k=1}^{N} \Big\{ \underbrace{A_k(x)}_{\substack{\text{тригоно-}\\ \text{метрический}\\ \text{многочлен}\\ \text{от } x}} \cdot \overbrace{\int_{-\pi}^{+\pi} f(y) \cdot \cos ky \, \mathsf{d}\, y}^{\text{число}} + \underbrace{B_k(x)}_{\substack{\text{тригоно-}\\ \text{метрический}\\ \text{многочлен}\\ \text{от } x}} \cdot \overbrace{\int_{-\pi}^{+\pi} f(y) \cdot \sin ky \, \mathsf{d}\, y}^{\text{число}} \Big\}$$

$\square$

Глава 10

СТЕПЕННЫЕ РЯДЫ И АНАЛИТИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

- *Степенным рядом* называется функциональный ряд следующего специального вида:

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n \cdot (x-x_0)^n \tag{10.0.1}$$

Число x_0 называется *центром* этого степенного ряда, а числа c_n – его *коэффициентами*.

- Частным случаем степенного ряда будет ряд, в котором коэффициенты c_n вычисляются по формулам

$$c_0 = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \tag{10.0.2}$$

где f – некоторая функция, бесконечно гладкая в окрестности точки x_0. Такой степенной ряд называется *рядом Тейлора* функции f в точке x_0. Его коэффициенты (10.0.2) называются *коэффициентами Тейлора* функции f в точке x_0, а частичные суммы

$$T_N(x) = \sum_{n=0}^{N} c_n \cdot (x-x_0)^n, \qquad N \in \mathbb{Z}_+, \tag{10.0.3}$$

– *многочленами Тейлора* функции f в точке x_0.

Среди всевозможных функций в математическом анализе важный класс образуют функции, являющиеся суммами своего ряда Тейлора:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cdot (x-x_0)^n.$$

Такие функции называются аналитическими (точное определение см. на с.606), и в этой главе мы поговорим о них.

§ 1 Степенные ряды, аналитические последовательности и производящие функции

(a) Степенные ряды

Область сходимости степенного ряда.

Теорема 10.1.1 (об области сходимости степенного ряда)**.** *Область сходимости D всякого степенного ряда*

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n \cdot (x-x_0)^n \tag{10.1.4}$$

имеет следующий вид:

— *либо D состоит из одной точки: $D = \{x_0\}$;*
— *либо D совпадает со всей числовой прямой: $D = (-\infty, +\infty)$;*
— *либо существует такое число $R > 0$, что D совпадает с отрезком $[x_0 - R, x_0 + R]$, исключая, может быть, точки на границе: $(x_0 - R, x_0 + R) \subseteq D \subseteq [x_0 - R, x_0 + R]$.*

- Число R при этом называется *радиусом сходимости*, а интервал $(x_0 - R, x_0 + R)$ – *интервалом сходимости* степенного ряда (10.1.4).

Доказательство этой теоремы использует следующую лемму.

Лемма 10.1.2 (Абель)**.** *Пусть нам дан степенной ряд*

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n \cdot z^n. \tag{10.1.5}$$

Тогда:

— *если ряд* (10.1.5) *сходится в какой-то точке $z = \zeta$, то он сходится также в любой точке $z = \eta$ по модулю меньшей ζ:*
$$|\eta| < |\zeta|$$
— *если ряд* (10.1.5) *расходится в какой-то точке $z = \eta$, то он расходится также в любой точке $z = \zeta$ по модулю большей η:*
$$|\eta| < |\zeta|.$$

Доказательство. 1. Докажем сначала первую часть. Здесь используется некий стандартный прием, постоянно применяемый при изучении степенных рядов, и называемый *логической цепочкой Абеля*. Он состоит в следующем.

$$\text{Ряд (10.1.5) сходится в точке } z = \zeta$$
$$\Downarrow$$
$$\text{числовой ряд} \quad \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cdot \zeta^n \quad \text{сходится}$$
$$\Downarrow$$
$$\text{общий член стремится к нулю:} \quad c_n \cdot \zeta^n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$
$$\Downarrow$$
$$\text{последовательность } c_n \cdot \zeta^n \text{ ограничена:} \quad \exists M > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad |c_n \cdot \zeta^n| \leqslant M \tag{10.1.6}$$
$$\Downarrow$$
$$\text{для всякого} \quad \eta : |\eta| < |\zeta| \quad \text{получаем:}$$
$$|c_n \cdot \eta^n| = \left| c_n \cdot \zeta^n \cdot \frac{\eta^n}{\zeta^n} \right| = |c_n \cdot \zeta^n| \cdot \left| \frac{\eta}{\zeta} \right|^n \leqslant (\text{применяем (10.1.6)}) \leqslant M \cdot \left| \frac{\eta}{\zeta} \right|^n, \quad \text{где} \quad \left| \frac{\eta}{\zeta} \right| < 1$$
$$\Downarrow$$
$$\sum_{n=0}^{\infty} |c_n \cdot \eta^n| \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} M \cdot \left| \frac{\eta}{\zeta} \right|^n = M \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{\eta}{\zeta} \right|^n \quad - \quad \text{сходится, поскольку} \quad \left| \frac{\eta}{\zeta} \right| < 1$$
$$\Downarrow$$
$$\sum_{n=0}^{\infty} |c_n \cdot \eta^n| \quad - \quad \text{сходится, по признаку сравнения (теорема 8.2.7)}$$
$$\Downarrow$$
$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n \cdot \eta^n \quad - \quad \text{сходится, по признаку абсолютной сходимости (теорема 8.2.11)}$$

2. Для доказательства второй части достаточно переформулировать доказанное утверждение так: *не бывает, чтобы* $|\eta| < |\zeta|$*, и при этом ряд* $\sum_{n=0}^{\infty} c_n \cdot \eta^n$ *расходился, а ряд* $\sum_{n=0}^{\infty} c_n \cdot \zeta^n$ *сходился.* Отсюда сразу получается импликация

$$|\eta| < |\zeta| \quad \& \quad \text{ряд} \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cdot \eta^n \text{ расходится} \quad \Longrightarrow \quad \text{ряд} \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cdot \zeta^n \text{ расходится}$$

□

Доказательство теоремы 10.1.1. Заметим сразу, что нам достаточно рассмотреть ряд (10.1.5), потому что ряд (10.1.4) превращается в него заменой переменной

$$x - x_0 = z$$

Обозначим через D его область сходимости. Нам нужно доказать, что либо $D = \{0\}$, либо $D = \mathbb{R}$, либо существует такое число $R > 0$, что $(-R, R) \subseteq D \subseteq [-R, R]$.

Ясно, что $D \neq \varnothing$, поскольку $0 \in D$. Кроме того, из леммы Абеля 10.1.2 следуют утверждения:

$$\text{если} \quad z \in \mathbb{R} \quad \text{и} \quad \exists \zeta \in D: \quad |z| < |\zeta| \quad \text{то} \quad z \in D \tag{10.1.7}$$

и

$$\text{если} \quad z \in \mathbb{R} \quad \text{и} \quad \exists \eta \notin D: \quad |\eta| < |z| \quad \text{то} \quad z \notin D \tag{10.1.8}$$

Положим

$$R = \sup\{|\zeta|; \zeta \in D\}$$

и рассмотрим несколько возможных случаев.

1. Если $R = 0$, то это означает, что область сходимости состоит из одной точки: $D = \{0\}$.

2. Если $R = \infty$, то это означает, что для всякой точки $z \in \mathbb{R}$ найдется $\zeta \in D$ такое, что $|z| < |\zeta|$. Поэтому, в силу (10.1.7), z принадлежит D. Это верно для любой $z \in \mathbb{R}$, поэтому $D = \mathbb{R}$.

3. Пусть $0 < R < \infty$, тогда мы получим

– если $z \in (-R, R)$, то есть $|z| < R$, то это означает, что найдется $\zeta \in D$ такое, что $|z| < |\zeta|$, поэтому, в силу утверждения (10.1.7), $z \in D$;

– если же $z \notin [-R, R]$, то есть $|z| > R$, то это означает, что найдется $\eta \notin D$ такое, что $|z| > |\eta|$, поэтому, в силу утверждения (10.1.8), $z \notin D$;

Таким образом, мы получаем, что D содержит интервал $(-R, R)$ и не содержит точек, не лежащих в отрезке $[-R, R]$. То есть,

$$(-R, R) \subseteq D \subseteq [-R, R]$$

Это нам и нужно было доказать. □

Теорема 10.1.3 (о радиусе сходимости степенного ряда)**.** *Радиус сходимости R произвольного степенного ряда*

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n \cdot (x - x_0)^n$$

можно вычислить по формулам

$$R = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right| = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|c_n|}}$$

(если такие пределы существуют). При этом, равенство

$$R = 0$$

означает, что область сходимости D этого ряда имеет вид $D = \{x_0\}$, а равенство

$$R = \infty$$

– что $D = \mathbb{R}$.

Доказательство. Достаточно рассмотреть ряды с нулевым центром, то есть рядов вида (10.1.5). Мы докажем лишь первую формулу, сказав про вторую лишь, что она доказывается аналогично. Пусть

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right|,$$

причем предел справа существует и конечен. Тогда

— если $|z| < R$, то ряд $\sum_{n=0}^{\infty} |c_n \cdot z^n|$ будет сходиться по признаку Даламбера (теорема 8.2.8), потому что число Даламбера будет меньше единицы:

$$D = \lim_{n\to\infty} \frac{|c_{n+1} \cdot z^{n+1}|}{|c_n \cdot z^n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{|c_{n+1}|}{|c_n|} \cdot |z| = \frac{|z|}{\lim_{n\to\infty} \frac{|c_n|}{|c_{n+1}|}} = \frac{|z|}{R} < 1;$$

значит, ряд $\sum_{n=0}^{\infty} c_n \cdot z^n$ тоже должен сходиться;

— если $|z| > R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right|$, то есть $\lim_{n\to\infty} \left| \frac{c_{n+1}\cdot z}{c_n} \right| > 1$, то это означает, что существует такое число $C > 1$, что, для некоторого номера N выполняется следующее:

$$\forall n \geqslant N \quad \left| \frac{c_{n+1} z}{c_n} \right| \geqslant C$$

$$\Downarrow$$

$$\forall n \geqslant N \quad |c_{n+1} z| \geqslant C |c_n|$$

$$\Downarrow$$

$$\forall n \geqslant N \quad \left| c_{n+1} z^{n+1} \right| \geqslant C \left| c_n z^n \right|$$

то есть, последовательность $\left| c_{n+1} z^{n+1} \right|$ должна быть неубывающей; отсюда следует, что

$$c_n z^n \underset{n\to\infty}{\not\longrightarrow} 0,$$

значит, ряд $\sum_{n=0}^{\infty} c_{n+1} z^{n+1}$ не может сходиться.

Мы доказали, что

$$(-R, R) \subseteq D \subseteq [-R, R]$$

и поэтому R действительно должен быть радиусом сходимости ряда (10.1.5).

Нам нужно только еще рассмотреть случай $R = \lim_{n\to\infty} \frac{|c_n|}{|c_{n+1}|} = \infty$. Тогда мы получим для любого $z \in \mathbb{R}$ ряд $\sum_{n=0}^{\infty} |c_n \cdot z^n|$ снова будет сходиться по признаку Даламбера:

$$D = \lim_{n\to\infty} \frac{|c_{n+1} \cdot z^{n+1}|}{|c_n \cdot z^n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{|c_{n+1}|}{|c_n|} \cdot |z| = \frac{|z|}{\lim_{n\to\infty} \frac{|c_n|}{|c_{n+1}|}} = \left(\frac{|z|}{\infty} \right) = 0$$

поэтому ряд $\sum_{n=0}^{\infty} c_n \cdot z^n$ тоже сходится, и таким образом, $D = \mathbb{R}$. □

Перейдем, наконец, к примерам.

◇ **10.1.1.** Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} n! \cdot x^n$$

Радиус сходимости в этом случае оказывается равным нулю

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0$$

поэтому область сходимости будет состоять из одной точки – центра нашего ряда $x_0 = 0$.

Вывод: Область сходимости $D = \{0\}$.

◇ **10.1.2.** Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

Радиус сходимости в этом случае оказывается равным бесконечности

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!}{n!} = \lim_{n\to\infty} (n+1) = \infty$$

поэтому область сходимости будет совпадать со всей прямой $\mathbb{R}$.

Вывод: Область сходимости $D = \mathbb{R}$.

◇ **10.1.3.** Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$$

Вычисляем радиус сходимости:

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = 1$$

Это значит, что область сходимости D является отрезком $[-1, 1]$, кроме, может быть, точек на границе. Наглядно это удобно показать следующей картинкой:

Нам остается лишь проверить точки $x = -1$ и $x = 1$.

1) При $x = -1$ получаем ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$$

который сходится по признаку Лейбница (теорема 8.2.12).

2) При $x = 1$ получаем гармонический ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

который расходится, в силу примера 8.2.13.

Таким образом, нашу картинку можно поправить следующим образом:

Вывод: Область сходимости $D = [-1, 1)$.

◇ **10.1.4.** Рассмотрим ряд с ненулевым центром:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{2^n}$$

Радиус сходимости:

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{n+1}}{2^n} = 2$$

Картинка:

Проверяем точки $x = -3$ и $x = 1$.

1) При $x = -3$ получаем ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$$

расходящийся по необходимому условию сходимости (теорема 8.2.2).

2) При $x = 1$ получаем ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} 1$$

также расходящийся по необходимому условию сходимости.

Поправленная картинка:

Вывод: Область сходимости $D = (-3, 1)$.

▷▷ **10.1.5.** Найдите область сходимости:

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{n^2}$;
2. $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 \cdot (x-2)^n$;
3. $\sum_{n=1}^{\infty} 3^n \cdot (x+2)^n$;
4. $\sum_{n=1}^{\infty} n^n \cdot x^n$;
5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^n}$.
6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{n \cdot 3^n}$.
7. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+3)^n}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}}$.

Равномерная сходимость степенного ряда.

Теорема 10.1.4. *Всякий степенной ряд*

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n \cdot (x - x_0)^n$$

сходится равномерно на каждом отрезке $[a, b]$ *внутри интервала сходимости* $(x_0 - R, x_0 + R)$.

Доказательство. Поскольку $[a,b] \subseteq (x_0 - R, x_0 + R)$, можно найти число $C > 0$ такое, что

$$x_0 - R < x_0 - C < a < b < x_0 + C < x_0 + R$$

Зафиксируем его и заметим, что

$$\sup_{x\in[a,b]} \frac{|x-x_0|}{C} = \max\left\{ \frac{|a-x_0|}{C}; \frac{|b-x_0|}{C} \right\} = \lambda < 1 \qquad (10.1.9)$$

Наш ряд сходится в точке $x_0 + C \in (x_0 - R, x_0 + R)$, и это приводит к логической цепочке Абеля (описывавшейся при доказательстве леммы 10.1.2):

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n \cdot C^n \quad - \quad \text{сходится}$$

$$\Downarrow$$

$$c_n \cdot C^n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

$$\Downarrow$$

$$\text{последовательность} \quad c_n \cdot C^n \quad \text{ограничена :}$$

$$\exists M > 0 \quad \forall n \quad |c_n \cdot C^n| \leqslant M \qquad (10.1.10)$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{aligned}
||c_n \cdot (x-x_0)^n||_{x\in[a,b]} &= \sup_{x\in[a,b]} |c_n \cdot (x-x_0)^n| = \sup_{x\in[a,b]} \left| c_n \cdot C^n \cdot \frac{(x-x_0)^n}{C^n} \right| = \\
&= |c_n \cdot C^n| \cdot \sup_{x\in[a,b]} \left| \frac{(x-x_0)^n}{C^n} \right| \leqslant (\text{применяем } (10.1.10)) \leqslant \\
&\leqslant M \cdot \left(\sup_{x\in[a,b]} \frac{|x-x_0|}{C} \right)^n \leqslant (\text{применяем } (10.1.9)) \leqslant M \cdot \lambda^n \quad (\text{где} \quad \lambda < 1)
\end{aligned}$$

$$\Downarrow$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} ||c_n \cdot (x-x_0)^n||_{x\in[a,b]} \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} M \cdot \lambda^n = M \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n \quad (\text{где} \quad \lambda < 1)$$

$$\Downarrow$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} ||c_n \cdot (x-x_0)^n||_{x\in[a,b]} \quad - \quad \text{сходится}$$

$$\Downarrow \quad \left(\begin{array}{c} \text{вспоминаем признак Вейерштрасса} \\ \text{равномерной сходимости (теорему 9.1.5)} \end{array} \right)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n \cdot (x-x_0)^n \quad - \quad \text{сходится равномерно на отрезке} \quad [a,b]$$

□

Непрерывность суммы степенного ряда.

Теорема 10.1.5. *Сумма всякого степенного ряда*

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cdot (x - x_0)^n$$

непрерывна на интервале сходимости $(x_0 - R, x_0 + R)$.

Доказательство. По теореме 10.1.4, этот ряд сходится равномерно на любом отрезке $[a, b] \subseteq (x_0 - R, x_0 + R)$. С другой стороны, он состоит их непрерывных функций $c_n \cdot (x - x_0)^n$, поэтому, по свойству 2^0 на с.546, сумма S должна быть непрерывна на $[a, b]$. Это верно для любого отрезка $[a, b] \subseteq (x_0 - R, x_0 + R)$, поэтому сумма $S(x)$ должна быть непрерывна на всем интервале $(x_0 - R, x_0 + R)$. $\square$

Дифференцирование и интегрирование степенных рядов. Зафиксируем произвольный степенной ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n \cdot (x - x_0)^n \tag{10.1.11}$$

и выпишем ряд, получающийся его почленным дифференцированием

$$\sum_{n=0}^{\infty} \{c_n \cdot (x - x_0)^n\}' = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cdot n \cdot (x - x_0)^{n-1} \tag{10.1.12}$$

и ряд, получающийся почленным интегрированием:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_{x_0}^{x} c_n \cdot (t - x_0)^n \, \mathsf{d}\, t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n+1} \cdot (x - x_0)^{n+1} \tag{10.1.13}$$

Теорема 10.1.6. *Радиусы (и интервалы) сходимости рядов* (10.1.11), (10.1.12) *и* (10.1.13) *совпадают, и*

(i) *сумма ряда* (10.1.11) *является гладкой функцией на интервале сходимости, и ее производную на нем можно вычислить почленным дифференцированием:*

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n \cdot (x - x_0)^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\partial}{\partial x}\Big(c_n \cdot (x - x_0)^n\Big) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cdot n \cdot (x - x_0)^{n-1} \tag{10.1.14}$$

(ii) *интеграл от суммы ряда* (10.1.11) *можно вычислить почленным интегрированием:*

$$\int_{x_0}^{x}\left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n \cdot (t - x_0)^n\right) \mathsf{d}\, t = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{x_0}^{x} c_n \cdot (t - x_0)^n \, \mathsf{d}\, t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n+1} \cdot (x - x_0)^{n+1} \tag{10.1.15}$$

Доказательство. 1. Убедимся сначала, что радиусы сходимости рядов (10.1.11), (10.1.12) и (10.1.13) совпадают. Заметим прежде всего, что для этого нам достаточно проверить совпадение радиусов сходимости для рядов (10.1.11) и (10.1.12). Это будет означать, что при дифференцировании степенного ряда его радиус сходимости не меняется, значит, поскольку ряд (10.1.11) тоже получается из ряда (10.1.13) почленным дифференцированием, их радиусы сходимости тоже будут совпадать.

Сделаем после этого замену переменной

$$x - x_0 = z$$

Тогда ряды (10.1.11) и (10.1.12) перепишутся следующим образом:

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n \cdot z^n \tag{10.1.16}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \cdot n \cdot z^{n-1} \tag{10.1.17}$$

Обозначим через R_1 радиус сходимости ряда (10.1.16), а через R_2 – радиус сходимости ряда (10.1.17).

A) Докажем сначала, что $R_1 \leqslant R_2$. Это равносильно тому, что если ряд $\sum_{n=0}^{\infty} c_n \cdot \zeta^n$ сходится при каком-нибудь ζ, то при любом $z: 0 < |z| < |\zeta|$ сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} c_n \cdot n \cdot z^{n-1}$. Применяем логическую цепочку Абеля:

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n \cdot \zeta^n \quad - \quad \text{сходится}$$

$$\Downarrow$$

$$c_n \cdot \zeta^n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

$$\Downarrow$$

$$\exists M > 0 \quad \forall n \quad |c_n \cdot \zeta^n| \leqslant M$$

$$\Downarrow$$

$$\text{для всякого} \quad z: 0 < |z| < |\zeta|$$

$$|c_n \cdot n \cdot z^{n-1}| = \left| c_n \cdot \zeta^n \cdot \frac{n}{z} \cdot \frac{z^n}{\zeta^n} \right| = |c_n \cdot \zeta^n| \cdot \frac{n}{|z|} \cdot \left|\frac{z}{\zeta}\right|^n \leqslant M \cdot \frac{n}{|z|} \cdot \left|\frac{z}{\zeta}\right|^n$$

$$\Downarrow$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} |c_n \cdot n \cdot z^{n-1}| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} M \cdot \frac{n}{|z|} \cdot \left|\frac{z}{\zeta}\right|^n = M \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{|z|} \cdot \left|\frac{z}{\zeta}\right|^n$$

$$- \quad \text{сходится по признаку Даламбера, поскольку} \quad \left|\frac{z}{\zeta}\right| < 1$$

$$\Downarrow$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} |c_n \cdot n \cdot z^{n-1}| \quad - \quad \text{сходится по признаку сравнения}$$

$$\Downarrow$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \cdot n \cdot z^{n-1} \quad - \quad \text{сходится по признаку абсолютной сходимости}$$

B) Теперь докажем, что $R_2 \leqslant R_1$. Это равносильно тому, что если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} c_n \cdot n \cdot \zeta^{n-1}$ сходится при каком-нибудь ζ, то при любом $z: 0 < |z| < |\zeta|$ сходится ряд $\sum_{n=0}^{\infty} c_n \cdot z^n$. Применяем логическую цепочку Абеля:

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \cdot n \cdot \zeta^{n-1} \quad - \quad \text{сходится}$$

$$\Downarrow$$

$$c_n \cdot n \cdot \zeta^{n-1} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

$$\Downarrow$$

$$\exists M > 0 \quad \forall n \quad |c_n \cdot n \cdot \zeta^{n-1}| \leqslant M$$

$$\Downarrow$$

$$\text{для всякого} \quad z: 0 < |z| < |\zeta|$$

$$|c_n \cdot z^n| = \left| c_n \cdot n \cdot \zeta^{n-1} \cdot \frac{\zeta}{n} \cdot \frac{z^n}{\zeta^n} \right| = |c_n \cdot n \cdot \zeta^{n-1}| \cdot \frac{|\zeta|}{n} \cdot \left|\frac{z}{\zeta}\right|^n \leqslant M \cdot \frac{|\zeta|}{n} \cdot \left|\frac{z}{\zeta}\right|^n$$

$$\Downarrow$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} |c_n \cdot z^n| \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} M \cdot \frac{|\zeta|}{n} \cdot \left|\frac{z}{\zeta}\right|^n = M \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\zeta|}{n} \cdot \left|\frac{z}{\zeta}\right|^n$$

$$- \quad \text{сходится по признаку Даламбера, поскольку} \quad \left|\frac{z}{\zeta}\right| < 1$$

$$\Downarrow$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} |c_n \cdot z^n| \quad - \quad \text{сходится по признаку сравнения}$$

$$\Downarrow$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n \cdot z^n \quad - \quad \text{сходится по признаку абсолютной сходимости}$$

Итак, мы доказали, что

$$R_1 \leqslant R_2 \leqslant R_1$$

то есть

$$R_1 = R_2$$

2. Докажем далее тождество (10.1.14). Возьмем какие-нибудь точки a, b так чтобы

$$x_0 - R < a < x_0 < b < x_0 + R$$

Тогда, по теореме 10.1.4, мы получим, что ряд (10.1.12)

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \cdot n \cdot (x - x_0)^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(c_n \cdot n \cdot (x - x_0)^n\right)'$$

сходится равномерно на отрезке $[a, b]$, а, с другой стороны, ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n \cdot (x - x_0)^n$$

сходится в точке x_0, потому что все его члены, кроме нулевого равны нулю в этой точке:

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n \cdot n \cdot (x - x_0)^n \Big|_{x=x_0} = c_0 \cdot 1 + c_1 \cdot 0 + c_2 \cdot 0 + ...$$

По свойству 5^0 на с.547, это означает, что сумма ряда (10.1.11) будет дифференцируема на $[a, b]$, и ее производную в каждой точке $x \in [a, b]$ можно вычислить почленным дифференцированием:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n \cdot (x - x_0)^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\partial}{\partial x}\Big(c_n \cdot (x - x_0)^n\Big) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cdot n \cdot (x - x_0)^{n-1}, \quad x \in [a, b]$$

То есть тождество (10.1.14) выполняется для $x \in [a, b]$. Поскольку числа a, b здесь выбирались произвольными, удовлетворяющими условию $x_0 - R < a < x_0 < b < x_0 + R$, мы получаем, что это тождество выполняется при любом $x \in (x_0 - R, x_0 + R)$.

3. Теперь докажем (10.1.15). Зафиксируем x из интервала сходимости (общего для рядов (10.1.11) и (10.1.13)). По теореме 10.1.4, мы получим, что ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n \cdot n \cdot (t - x_0)^n$$

сходится равномерно на отрезке $[x_0, x]$. Поэтому, по свойству 4^0 на с.546, должно выполняться равенство

$$\int_{x_0}^{x} \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cdot (t - x_0)^n \, \mathsf{d}\, t = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{x_0}^{x} c_n \cdot (t - x_0)^n \, \mathsf{d}\, t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n+1} \cdot (x - x_0)^{n+1}$$

То есть справедливо (10.1.15). □

Следствие 10.1.7. *Сумма всякого степенного ряда является бесконечно гладкой функцией на интервале сходимости $(x_0 - R, x_0 + R)$ этого ряда, и производная порядка k этой функции вычисляется по формуле*

$$\frac{\partial^k}{\partial x^k}\left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n \cdot (x - x_0)^n\right) = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{n!}{(n-k)!} \cdot c_n \cdot (x - x_0)^{n-k}, \qquad x \in (x_0 - R, x_0 + R) \qquad (10.1.18)$$

Доказательство. Обозначим для удобства сумму нашего степенного ряда буквой P:

$$P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cdot (x - x_0)^n, \qquad x \in (x_0 - R, x_0 + R)$$

По теореме 10.1.6, P дифференцируема на $(x_0 - R, x_0 + R)$, причем ее производная является суммой степенного ряда с тем же интервалом сходимости:

$$P'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cdot n \cdot (x - x_0)^{n-1}, \qquad x \in (x_0 - R, x_0 + R)$$

Значит, опять по теореме 10.1.6, P' дифференцируема на $(x_0 - R, x_0 + R)$, причем ее производная является суммой степенного ряда с тем же интервалом сходимости:

$$P''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} c_n \cdot n \cdot (n-1) \cdot (x - x_0)^{n-2}, \qquad x \in (x_0 - R, x_0 + R)$$

И так далее. Индукцией по k получаем формулу (10.1.18). □

Вычисление суммы степенного ряда. Теорема 10.1.6 позволяет в некоторых случаях явно вычислить сумму степенного ряда. Здесь мы покажем на примерах, как это делается.

Все начинается с формулы для суммы членов бесконечной геометрической прогрессии, которую мы выписывали в примере 8.2.1:

$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}, \quad |x| < 1} \tag{10.1.19}$$

Из нее выводится целый ряд других полезных формул для сумм степенных рядов. Прежде всего, заменой x на $-x$ мы получаем тождество

$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot x^n = \frac{1}{1+x}, \quad |x| < 1} \tag{10.1.20}$$

Интегрируя его при $|x| < 1$ мы получаем

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot \frac{x^n}{n} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{n+1}}{n+1} = \\ = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x (-1)^n \cdot t^n \, \mathsf{d}\, t = \ln(1+x) = \int_0^x \frac{\mathsf{d}\, t}{1+t}$$

То есть,

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot \frac{x^n}{n} = \ln(1+x), \quad |x| < 1} \tag{10.1.21}$$

Наоборот, дифференцируя (10.1.19) при $|x| < 1$, получаем:

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot x^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}, \quad |x| < 1} \tag{10.1.22}$$

Точно так же, дифференцируя k раз, по индукции получаем:

$$\boxed{\sum_{n=k}^{\infty} \frac{n!}{(n-k)!} \cdot x^{n-k} = \frac{k!}{(1-x)^{k+1}}, \quad |x| < 1} \tag{10.1.23}$$

Далее, заменив в (10.1.20) x на x^2, мы получим

$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot x^{2n} = \frac{1}{1+x^2}, \quad |x| < 1} \tag{10.1.24}$$

Интегрируя (10.1.24) по теореме 10.1.6 (при $|x| < 1$) мы получаем:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x (-1)^n \cdot t^{2n} \, \mathsf{d}\, t = \\ = \int_0^x \frac{\mathsf{d}\, t}{1+t^2} = \operatorname{arctg} x$$

То есть

$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \operatorname{arctg} x, \quad |x| < 1} \tag{10.1.25}$$

Полученных формул уже достаточно, чтобы перейти к решению задач.

◇ **10.1.6.** Предположим, нам нужно найти сумму степенного ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} \tag{10.1.26}$$

Рецепт решения заключается в том, чтобы сообразить, как этот ряд можно получить из формул (10.1.19)-(10.1.25) с помощью операций дифференцирования, интегрирования, замены переменной и умножения на x^k. Для данного ряда последовательность действий выглядит следующим образом. Сначала мы выписываем формулу (10.1.19):

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$

Затем меняем в ней индекс n на $k-1$:

$$\sum_{k=1}^{\infty} x^{k-1} = \frac{1}{1-x}$$

После этого интегрируем:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k} = \int_0^x \sum_{k=1}^{\infty} t^{k-1}\, \mathsf{d}\, t = \int_0^x \frac{1}{1-t}\, \mathsf{d}\, t = -\ln(1-x)$$

Остается увидеть, что полученный ряд отличается от (10.1.26) только индексом. Если теперь поменять k на n, то получится

Ответ:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x)$$

◇ **10.1.7.** Найти сумму степенного ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot x^n$$

Снова выписываем формулу (10.1.19):

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$

Дифференцируем ее:

$$\left\{\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right\}' = \left\{\frac{1}{1-x}\right\}'$$

$$\Downarrow$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot x^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$$

Умножаем на x:

$$x \cdot \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot x^{n-1} = \frac{x}{(1-x)^2}$$

$$\Downarrow$$

Ответ:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot x^n = \frac{x}{(1-x)^2}$$

◇ **10.1.8.** Найти сумму степенного ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^n}{2n+1}$$

Здесь вычисления начинаются с формулы (10.1.25), которую мы перепишем с переменной t вместо x:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{t^{2n+1}}{2n+1} = \operatorname{arctg} t$$

Мы делим ее на t

$$\frac{1}{t} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{t^{2n+1}}{2n+1} = \frac{\operatorname{arctg} t}{t}$$

$$\Downarrow$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{t^{2n}}{2n+1} = \frac{\operatorname{arctg} t}{t}$$

Потом делаем замену переменной $t^2 = x$ и получается

Ответ:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^n}{2n+1} = \frac{\operatorname{arctg}\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$$

▷▷ **10.1.9.** Найдите сумму ряда:

1. $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 \cdot x^n$;
2. $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \cdot x^n$;
3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{3n}}{n}$;
4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1} \cdot x^n$;
5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n(1+x)}{n}$;
6. $\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot x^n(1+x)$;
7. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n(1+x^n)}{n}$;
8. $\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot x^n(1+x^n)$.

(b) Аналитические последовательности и производящие функции

- Числовая последовательность $\{a_n;\ n \in \mathbb{Z}_+\}$ называется *аналитической*, если она удовлетворяет следующим эквивалентным условиям:
  - (i) степенной ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n$ имеет ненулевой радиус сходимости:
  $$\exists r > 0 \qquad \text{ряд } \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot r^n \text{ сходится} \tag{10.1.27}$$
  - (ii) для некоторого числа $A > 0$ последовательность A^n мажорирует последовательность $|a_n|$:
  $$\forall n \in \mathbb{Z}_+ \qquad |a_n| \leqslant A^n \tag{10.1.28}$$

Множество всех аналитических последовательностей обозначается символом $\mathcal{A}$.

- Радиус сходимости степенного ряда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n$ называется *радиусом сходимости последовательности* a и обозначается $\rho(a)$:

$$\rho(a) = \sup\left\{ r > 0 : \quad \text{ряд } \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot r^n \text{ сходится} \right\}$$

- *Производящей функцией*[1] или *генератриссой* Gen_a аналитической последовательности $a \in \mathcal{A}$ называется функция, определенная в окрестности нуля $(-\rho(a), \rho(a))$ формулой

$$\mathsf{Gen}_a(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n$$

По теореме 10.1.6 эта функция является гладкой на интервале $(-\rho(a), \rho(a))$.

◇ **10.1.10.** Последовательность

$$a_n = n!$$

не будет аналитической, потому что в силу примера 10.1.1, порождаемый ею ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} n! \cdot x^n$$

имеет нулевой радиус сходимости. К такому же выводу можно прийти, используя критерий (10.1.28).

◇ **10.1.11.** Наоборот, последовательность

$$a_n = \frac{1}{n!}$$

будет аналитической, потому что, как мы убедились в примере 10.1.2, порождаемый ею ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

имеет радиус сходимости $R = \infty$ (для нас главное, что $R \neq 0$). Критерий (10.1.28) дает то же самое.

Алгебраические операции с аналитическими последовательностями.

- Если $a \in \mathcal{A}$, то есть $a = \{a_n;\ n \in \mathbb{Z}_+\}$ – аналитическая последовательность, то *противоположная последовательность* $-a$ определяется формулой

$$(-a)_n := -a_n$$

Из (10.1.28) сразу следует, что $-a \in \mathcal{A}$.

- Если же $a, b \in \mathcal{A}$, то есть $a = \{a_n;\ n \in \mathbb{Z}_+\}$ и $b = \{b_n;\ n \in \mathbb{Z}_+\}$ – аналитические последовательности, то их *сумма* $a + b$ и *свертка* $a * b$ определяются формулами

$$(a+b)_n := a_n + b_n, \qquad (a * b)_n := \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot b_{n-k}$$

Сейчас мы покажем, что $a + b \in \mathcal{A}$ и $a * b \in \mathcal{A}$.

Доказательство. В силу (10.1.28), условия $a \in \mathcal{A}$ и $b \in \mathcal{A}$ означают, что для некоторых $A > 0$ и $B > 0$ выполняются неравенства

$$|a_n| \leqslant A^n, \qquad |b_n| \leqslant B^n \qquad (n \in \mathbb{Z}_+)$$

Отсюда следует, во-первых,

$$|(a+b)_n| = |a_n + b_n| \leqslant |a_n| + |b_n| \leqslant A^n + B^n \leqslant \sum_{k=0}^{n} C_n^k \cdot A^k \cdot B^{n-k} = (A+B)^n$$

[1] Подробнее на эту тему можно прочитать в книжке: С. К. Ландо, Лекции о производящих функциях, М.: МЦНМО, 2007.

то есть последовательность $|(a+b)_n|$ мажорируется последовательностью $(A+B)^n$, и значит, по условию (10.1.28), $a+b \in \mathcal{A}$.

И, во-вторых,

$$|(a*b)_n| = \left|\sum_{k=0}^{n} a_k \cdot b_{n-k}\right| \leqslant \sum_{k=0}^{n} |a_k| \cdot |b_{n-k}| \leqslant \sum_{k=0}^{n} A^k \cdot B^{n-k} \leqslant \sum_{k=0}^{n} C_n^k \cdot A^k \cdot B^{n-k} = (A+B)^n$$

то есть последовательность $|(a*b)_n|$ мажорируется последовательностью $(A+B)^n$, и опять в силу (10.1.28), $a*b \in \mathcal{A}$. □

Свойства алгебраических операций над аналитическими последовательностями:

1°. *Операция сложения на множестве $\mathcal{A}$ удовлетворяет следующим тождествам:*

$$a+b=b+a, \quad (a+b)+c=a+(b+c), \quad a+0=a, \quad a+(-a)=0 \qquad (10.1.29)$$

где 0 – последовательность, состоящая из нулей:

$$0_n := 0$$

2°. *Операция свертки на множестве $\mathcal{A}$ удовлетворяет следующим тождествам:*

$$a*b=b*a, \quad (a*b)*c=a*(b*c), \quad a*1=a \qquad (10.1.30)$$

где 1 – последовательность, у которой на нулевом месте стоит единица, а на остальных местах нули:

$$1_n := \begin{cases} 1, & n=0 \\ 0, & n>0 \end{cases} \qquad (10.1.31)$$

3°. *Операции + и $*$ связаны между собой тождеством дистрибутивности:*

$$(a+b)*c = a*c+b*c \qquad (10.1.32)$$

4°. *Производящая функция суммы равна сумме производящих функций,*

$$\mathsf{Gen}_{a+b}(x) = \mathsf{Gen}_a(x) + \mathsf{Gen}_b(x), \qquad (10.1.33)$$

причем $\rho(a+b) \geqslant \min\{\rho(a), \rho(b)\}$.

5°. *Производящая функция свертки равна произведению производящих функций,*

$$\mathsf{Gen}_{a*b}(x) = \mathsf{Gen}_a(x) \cdot \mathsf{Gen}_b(x), \qquad (10.1.34)$$

причем $\rho(a*b) \geqslant \min\{\rho(a), \rho(b)\}$.

Для доказательства нам понадобится следующая

Лемма 10.1.8. *Пусть $\sum_{k=0}^{\infty} u_k$ и $\sum_{l=0}^{\infty} v_l$ – два абсолютно сходящихся ряда. Положим*

$$w_n = \sum_{k=0}^{n} u_k \cdot v_{n-k}$$

Тогда ряд $\sum_{n=0}^{\infty} w_n$ абсолютно сходится, и его сумма равна произведению сумм рядов $\sum_{k=0}^{\infty} u_k$ и $\sum_{l=0}^{\infty} v_l$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} w_n = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N}\sum_{k=0}^{n} u_k \cdot v_{n-k} = \left(\lim_{N\to\infty}\sum_{k=0}^{N} u_k\right)\cdot\left(\lim_{N\to\infty}\sum_{l=0}^{N} v_l\right) = \left(\sum_{k=0}^{\infty} u_k\right)\cdot\left(\sum_{l=0}^{\infty} v_l\right) \qquad (10.1.35)$$

Доказательство. Для всякого $N \in \mathbb{N}$ получаем:

$$\sum_{n=0}^{N} |w_n| \leqslant \sum_{n=0}^{N}\left|\sum_{k=0}^{n} u_k \cdot v_{n-k}\right| \leqslant \sum_{n=0}^{N}\sum_{k=0}^{n} |u_k|\cdot|v_{n-k}| = \underbrace{\sum_{k+l\leqslant N} |u_k|\cdot|v_l| \leqslant \sum_{\max\{k,l\}\leqslant N} |u_k|\cdot|v_l|}_{k+l\leqslant N \ \Longrightarrow\ \max\{k,l\}\leqslant N} =$$

$$= \sum_{k=0}^{N}\sum_{l=0}^{N}|u_k|\cdot|v_l| = \left(\sum_{k=0}^{N}|u_k|\right)\cdot\left(\sum_{l=0}^{N}|v_l|\right) \leqslant \left(\sum_{k=0}^{\infty}|u_k|\right)\cdot\left(\sum_{l=0}^{\infty}|v_l|\right) < \infty$$

Отсюда следует, что ряд $\sum_{n=0}^{\infty} w_n$ абсолютно сходится. С другой стороны, снова для любого $N\in\mathbb{N}$ имеем:

$$\left|\sum_{n=0}^{2N} w_n - \left(\sum_{k=0}^{N}u_k\right)\cdot\left(\sum_{l=0}^{N}v_l\right)\right| = \left|\sum_{n=0}^{2N}\sum_{k=0}^{n}u_k\cdot v_{n-k} - \sum_{k=0}^{N}\sum_{l=0}^{N}u_k\cdot v_l\right| =$$

$$= \underbrace{\left|\sum_{k+l\leqslant 2N}u_k\cdot v_l - \sum_{\max\{k,l\}\leqslant N}u_k\cdot v_l\right|}_{k+l\leqslant 2N \ \Longleftarrow\ \max\{k,l\}\leqslant N} = \left|\sum_{\left\{\begin{smallmatrix}k+l\leqslant 2N\\ \max\{k,l\}>N\end{smallmatrix}\right\}}u_k\cdot v_l\right| \leqslant \sum_{\left\{\begin{smallmatrix}k+l\leqslant 2N\\ \max\{k,l\}>N\end{smallmatrix}\right\}}|u_k|\cdot|v_l| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{\left\{\begin{smallmatrix}\max\{k,l\}\leqslant 2N\\ \max\{k,l\}>N\end{smallmatrix}\right\}}|u_k|\cdot|v_l| = \sum_{N<\max\{k,l\}\leqslant 2N}|u_k|\cdot|v_l| = \sum_{\substack{0\leqslant k\leqslant N\\ N<l\leqslant 2N}}|u_k|\cdot|v_l| + \sum_{\substack{N<k\leqslant 2N\\ 0\leqslant l\leqslant 2N}}|u_k|\cdot|v_l| =$$

$$= \left(\sum_{0\leqslant k\leqslant N}|u_k|\right)\cdot\left(\sum_{N<l\leqslant 2N}|v_l|\right) + \left(\sum_{N<k\leqslant 2N}|u_k|\right)\cdot\left(\sum_{0\leqslant l\leqslant N}|v_l|\right) =$$

$$= \underbrace{\left(\sum_{k=0}^{\infty}|u_k|\right)}_{\substack{\wedge\\ \infty}}\cdot\underbrace{\left(\sum_{l>N}|v_l|\right)}_{\substack{\downarrow\\ 0,\\ \text{при } N\to\infty}} + \underbrace{\left(\sum_{k>N}|u_k|\right)}_{\substack{\downarrow\\ 0,\\ \text{при } N\to\infty}}\cdot\underbrace{\left(\sum_{l=0}^{\infty}|v_l|\right)}_{\substack{\wedge\\ \infty}} \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

И поэтому

$$\sum_{n=0}^{\infty} w_n = \lim_{N\to\infty}\sum_{n=0}^{2N} w_n = \lim_{N\to\infty}\left[\left(\sum_{k=0}^{N}u_k\right)\cdot\left(\sum_{l=0}^{N}v_l\right)\right] = \left(\sum_{k=0}^{\infty}u_k\right)\cdot\left(\sum_{l=0}^{\infty}v_l\right)$$

□

Доказательство свойств 1°-5°. Свойство 1° мы считаем очевидным и сразу переходим к 2°. Коммутативность свертки:

$$(a*b)_n = \sum_{k=0}^{n}a_k\cdot b_{n-k} = \left|\begin{matrix} n-k=i, & k=n-i\\ 0\leqslant k\leqslant n & \Leftrightarrow \quad 0\leqslant i\leqslant n\end{matrix}\right| = \sum_{i=0}^{n}a_{n-i}\cdot b_i = (b*a)_n$$

Ассоциативность свертки:

$$((a*b)*c)_n = \sum_{k=0}^{n}(a*b)_k\cdot c_{n-k} = \sum_{k=0}^{n}\left(\sum_{i=0}^{k}a_i\cdot b_{k-i}\right)\cdot c_{n-k} = \sum_{\substack{0\leqslant k\leqslant n\\ 0\leqslant i\leqslant k}}a_i\cdot b_{k-i}\cdot c_{n-k} =$$

$$= \sum_{\substack{0\leqslant i\leqslant n\\ i\leqslant k\leqslant n}}a_i\cdot b_{k-i}\cdot c_{n-k} = \sum_{i=0}^{n}a_i\cdot\left(\sum_{k=i}^{n}b_{k-i}\cdot c_{n-k}\right) = \left|\begin{matrix} k-i=j, & k=i+j\\ i\leqslant k\leqslant n & \Leftrightarrow \quad 0\leqslant j\leqslant n-i\end{matrix}\right| =$$

$$= \sum_{i=0}^{n}a_i\cdot\left(\sum_{j=0}^{n-i}b_j\cdot c_{n-i-j}\right) = \sum_{i=0}^{n}a_i\cdot(b*c)_{n-i} = (a*(b*c))_n$$

Единица относительно свертки:

$$(a*1)_n = \sum_{k=0}^{n}a_k\cdot\underbrace{1_{n-k}}_{\substack{\parallel\\ \begin{cases}1, & k=n\\ 0, & k\neq n\end{cases}}} = \sum_{k=n}a_k\cdot 1 = a_n$$

Остается свойство дистрибутивности 3°:

$$((a+b)*c)_n = \sum_{k=0}^{n}(a+b)_k \cdot c_{n-k} = \sum_{k=0}^{n}(a_k+b_k)\cdot c_{n-k} = \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot c_{n-k} + \sum_{k=0}^{n} b_k \cdot c_{n-k} = (a*c)_n + (b*c)_n$$

4. Если $|x| < \min\{\rho(a), \rho(b)\}$, то

$$\mathsf{Gen}_{a+b}(x) = \lim_{N\to\infty} \sum_{n\leqslant N} (a+b)_n \cdot x^n = \lim_{N\to\infty} \sum_{n\leqslant N} (a_n+b_n)\cdot x^n =$$
$$= \lim_{N\to\infty} \left(\sum_{n\leqslant N} a_n \cdot x^n + \sum_{n\leqslant N} b_n \cdot x^n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n \cdot x^n = \mathsf{Gen}_a(x) + \mathsf{Gen}_b(x)$$

Это верно для любого x такого, что $|x| < \min\{\rho(a), \rho(b)\}$, поэтому $\rho(a+b) \geqslant \min\{\rho(a), \rho(b)\}$.

5. Если $|x| < \min\{\rho(a), \rho(b)\}$, то

$$\mathsf{Gen}_{a*b}(x) = \lim_{N\to\infty} \sum_{n\leqslant N} (a*b)_n \cdot x^n = \lim_{N\to\infty} \sum_{n\leqslant N} \left(\sum_{k=0}^{n} a_k \cdot b_{n-k} \right) \cdot x^n =$$
$$= \lim_{N\to\infty} \sum_{n\leqslant N} \sum_{k=0}^{n} \left(a_k \cdot x^k\right)\cdot\left(b_{n-k}\cdot x^{n-k}\right) = (10.1.35) = \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot x^k \right) \cdot \left(\sum_{l=0}^{\infty} b_l \cdot x^l \right) = \mathsf{Gen}_a(x)\cdot \mathsf{Gen}_b(x)$$

Это верно для любого x такого, что $|x| < \min\{\rho(a), \rho(b)\}$, поэтому $\rho(a+b) \geqslant \min\{\rho(a), \rho(b)\}$. □

Порядок аналитической последовательности.

- *Порядком* аналитической последовательности $b \in \mathcal{A}$ называется число

$$\omega(a) = \min\{n \in \mathbb{Z}_+ : \quad a_n \neq 0\}$$

Теорема 10.1.9. *Справедливо неравенство:*

$$\omega(a*b) \geqslant \omega(a) + \omega(b) \tag{10.1.36}$$

Доказательство. Справедлива логическая цепочка:

$$(a*b)_n = \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot b_{n-k} \neq 0$$
$$\Downarrow$$
$$\exists k \in \{0, ..., n\} \quad a_k \cdot b_{n-k} \neq 0$$
$$\Downarrow$$
$$\exists k \in \{0, ..., n\} \quad \begin{cases} a_k \neq 0 \\ b_{n-k} \neq 0 \end{cases}$$
$$\Downarrow$$
$$\exists k \in \{0, ..., n\} \quad \begin{cases} k \geqslant \omega(a) \\ n-k \geqslant \omega(b) \end{cases}$$
$$\Downarrow$$
$$\exists k \in \{0, ..., n\} \quad \begin{cases} k \geqslant \omega(a) \\ n \geqslant \omega(b) + k \geqslant \omega(b) + \omega(a) \end{cases}$$
$$\Downarrow$$
$$n \geqslant \omega(b) + \omega(a)$$

Из нее получаем:

$$\omega(a*b) = \min\left\{n \in \mathbb{Z}_+ : \ (a*b)_n \neq 0\right\} \geqslant \omega(b) + \omega(a)$$

□

Сравнение аналитических последовательностей.

- Неравенство $a \leqslant b$ для последовательностей $a, b \in \mathcal{A}$ означает, что каждая компонента a не превосходит соответствующую компоненту b:

$$a \leqslant b \quad \iff \quad \forall n \in \mathbb{Z}_+ \quad a_n \leqslant b_n$$

Предложение 10.1.10. *Производящая функция сохраняет неравенства для неотрицательных аргументов:*

$$a \leqslant b \quad \Longrightarrow \quad \forall r \in (0, \rho(b)) \quad \mathsf{Gen}_a(r) \leqslant \mathsf{Gen}_b(r) \tag{10.1.37}$$

Доказательство. $\mathsf{Gen}_a(r) = \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot r^n \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} b_n \cdot r^n}_{a_n \leqslant b_n} \leqslant \mathsf{Gen}_b(r)$. □

Модуль аналитической последовательности.

- *Модулем* последовательности $a \in \mathcal{A}$ называется последовательность $|a| \in \mathcal{A}$, определенная формулой:

$$|a|_n := |a_n| \tag{10.1.38}$$

Очевидно, последовательность $a = \{a_n;\ n \in \mathbb{Z}_+\}$ является аналитической тогда и только тогда, когда ее модуль $|a| = \{|a_n|;\ n \in \mathbb{Z}_+\}$ является аналитической последовательностью:

$$a \in \mathcal{A} \quad \iff \quad |a| \in \mathcal{A} \tag{10.1.39}$$

Свойства модуля аналитической последовательности:

1°. *Модуль суммы не превосходит суммы модулей:*

$$|a + b| \leqslant |a| + |b| \tag{10.1.40}$$

2°. *Модуль свертки не превосходит свертки модулей:*

$$|a * b| \leqslant |a| * |b| \tag{10.1.41}$$

3°. *Радиус сходимости модуля совпадает с радиусом сходимости исходной последовательности:*

$$\rho(|a|) = \rho(a) \tag{10.1.42}$$

а производящие функции удовлетворяют неравенству:

$$|\,\mathsf{Gen}_a(x)| \leqslant \mathsf{Gen}_{|a|}(|x|) \tag{10.1.43}$$

Доказательство. Первые два свойства мы считаем очевидными, и перейдем сразу к 3°. В нем неравенство (10.1.43) тоже очевидно

$$|\,\mathsf{Gen}_a(x)| = \left|\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n\right| \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \cdot |x|^n = \mathsf{Gen}_{|a|}(|x|)$$

А равенство (10.1.42) доказывается двукратным применением логической цепочки Абеля (см. с.580). С одной стороны,

$$0 < r < \rho(a)$$

$$\Downarrow$$

$$\text{числовой ряд } \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot r^n \text{ сходится}$$

$$\Downarrow$$

$$\text{общий член стремится к нулю: } a_n \cdot r^n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

$$\Downarrow$$

$$\text{последовательность } a_n \cdot r^n \text{ ограничена:} \quad \sup_{n\in\mathbb{Z}_+} |a_n \cdot r^n| = M < \infty$$

$$\Downarrow$$

$$\forall \sigma \in (0, r) \quad \Longrightarrow \quad |a_n| \cdot \sigma^n = |a_n \cdot r^n| \cdot \left|\frac{\sigma}{r}\right|^n \leqslant M \cdot \left|\frac{\sigma}{r}\right|^n \qquad \left(\left|\frac{\sigma}{r}\right| < 1\right)$$

$$\Downarrow$$

$$\text{для всякого } \sigma \in (0, r) \text{ числовой ряд } \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \cdot \sigma^n \text{ сходится}$$

$$\Downarrow$$

$$\text{радиус сходимости ряда } \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \cdot x^n \text{ не меньше } r$$

$$\Downarrow$$

$$\rho(|a|) \geqslant r \quad \leftarrow \text{ верно для любого } r \in (0, \rho(a))$$

$$\Downarrow$$

$$\rho(|a|) \geqslant \rho(a)$$

А с другой стороны,

$$0 < r < \rho(|a|)$$

$$\Downarrow$$

$$\text{числовой ряд } \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \cdot r^n \text{ сходится}$$

$$\Downarrow$$

$$\text{общий член стремится к нулю: } |a_n| \cdot r^n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

$$\Downarrow$$

$$\text{последовательность } |a_n| \cdot r^n \text{ ограничена:} \quad \sup_{n\in\mathbb{Z}_+} |a_n| \cdot r^n = M < \infty$$

$$\Downarrow$$

$$\forall \sigma \in (0, r) \quad \Longrightarrow \quad |a_n \cdot \sigma^n| = |a_n \cdot r^n| \cdot \left|\frac{\sigma}{r}\right|^n \leqslant M \cdot \left|\frac{\sigma}{r}\right|^n \qquad \left(\left|\frac{\sigma}{r}\right| < 1\right)$$

$$\Downarrow$$

$$\text{для всякого } \sigma \in (0, r) \text{ числовой ряд } \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot \sigma^n \text{ сходится}$$

$$\Downarrow$$

$$\text{радиус сходимости ряда } \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n \text{ не меньше } r$$

$$\Downarrow$$

$$\rho(a) \geqslant r \quad \leftarrow \text{ верно для любого } r \in (0, \rho(|a|))$$

$$\Downarrow$$

$$\rho(a) \geqslant \rho(|a|).$$

$\square$

Степень аналитической последовательности.

- *Степень* b^k аналитической последовательности $b \in \mathcal{A}$ определяется индуктивно правилами
$$b^0 = 1, \qquad b^{k+1} = b^k * b, \qquad k \in \mathbb{Z}_+$$
(здесь 1 – единичная последовательность, определенная равенством (10.1.31)).

Свойства степени:

1°. *Модуль степени не превосходит степени модуля:*
$$|b^k| \leqslant |b|^k \tag{10.1.44}$$

2°. *Производящая функция степени равна степени производящей функции:*
$$\mathsf{Gen}_{b^k}(x) = \Big(\mathsf{Gen}_b(x)\Big)^k \tag{10.1.45}$$

3°. *Порядок и степень аналитической последовательности связаны неравенством:*
$$\forall k \in \mathbb{Z}_+ \qquad \omega(b^k) \geqslant k \cdot \omega(b) \tag{10.1.46}$$

Доказательство. Свойство 1° следует из (10.1.41), 2° – из (10.1.34), а 3° – из (10.1.36) . □

Композиция аналитических последовательностей.

- Пусть порядок аналитической последовательности $b \in \mathcal{A}$ отличен от нуля, то есть не меньше единицы:
$$\omega(b) \geqslant 1.$$
Тогда по формуле (10.1.46), порядок ее степени не меньше показателя степени:
$$\omega(b^k) \geqslant k, \qquad k \in \mathbb{Z}_+.$$
То есть
$$\forall n < k \qquad (b^k)_n = 0$$
и это можно интерпретировать так, что при фиксированном номере $n \in \mathbb{Z}$ почти все числа $(b^k)_n;\ k \in \mathbb{Z}_+$ равны нулю:
$$\forall n \in \mathbb{Z}_+ \qquad \forall k > n \qquad (b^k)_n = 0 \tag{10.1.47}$$
Отсюда следует, что для любой последовательности $a \in \mathcal{A}$ и любого $n \in \mathbb{Z}_+$ в ряде $\sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot (b^k)_n$ только первые n элементов (с индексами $k = 1, ..., n$) могут быть отличны от нуля, поэтому он сходится. Его сумма обозначается $(a \circ b)_n$:
$$(a \circ b)_n = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot (b^k)_n = \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot (b^k)_n \tag{10.1.48}$$
Эта формула определяет некую последовательность
$$a \circ b = \Big\{(a \circ b)_n;\ n \in \mathbb{Z}_+\Big\},$$
называемую *композицией последовательностей* a и b. Более коротко ее определение можно записать формулой:
$$a \circ b = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot b^k = \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot b^k. \tag{10.1.49}$$

Теорема 10.1.11. *Композиция аналитических последовательностей тоже является аналитической последовательностью:*
$$a, b \in \mathcal{A} \quad \& \quad \omega(b) \geqslant 1 \quad \Longrightarrow \quad a \circ b \in \mathcal{A} \tag{10.1.50}$$

Доказательство. Пусть $a, b \in \mathcal{A}$ и $\omega(b) \geqslant 1$. Выберем $\varepsilon \in (0, \rho(|a|))$, то есть $\varepsilon > 0$ такое, что

$$\mathsf{Gen}_{|a|}(\varepsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \cdot \varepsilon^m < \infty$$

Условие $\omega(b) \geqslant 1$ означает, что $b_0 = 0$, поэтому производящая функция последовательности $|b|$ имеет вид

$$\mathsf{Gen}_{|b|}(x) = \sum_{m=0}^{\infty} |b_m| \cdot x^m = \sum_{m=1}^{\infty} |b_m| \cdot x^m$$

Отсюда в свою очередь следует, что

$$\mathsf{Gen}_{|b|}(0) = 0$$

и, поскольку $\mathsf{Gen}_{|b|}$ – непрерывная функция, существует $\delta > 0$ такое, что

$$|\,\mathsf{Gen}_{|b|}(\delta)| < \varepsilon$$

Теперь получаем:

$$\forall k \in \mathbb{Z}_+ \qquad |b^k| \leqslant |b|^k \qquad \text{(10.1.44)}$$

$$\Downarrow \qquad \text{(10.1.37)}$$

$$\forall k \in \mathbb{Z}_+ \qquad \mathsf{Gen}_{|b^k|}(\delta) \leqslant \Big(\mathsf{Gen}_{|b|}(\delta) \Big)^k < \varepsilon^k$$

$$\Downarrow$$

$$\forall K, N \in \mathbb{Z}_+, \qquad K \geqslant N \quad \Longrightarrow$$

$$\sum_{n=0}^{N} |(a \circ b)_n| \cdot \delta^n = \sum_{n=0}^{N} \left| \sum_{k=0}^{K} a_k \cdot (b^k)_n \right| \cdot \delta^n \leqslant \sum_{n=0}^{N} \sum_{k=0}^{K} |a_k| \cdot |(b^k)_n| \cdot \delta^n = \sum_{k=0}^{K} \sum_{n=0}^{N} |a_k| \cdot |(b^k)_n| \cdot \delta^n =$$

$$= \sum_{k=0}^{K} |a_k| \cdot \sum_{n=0}^{N} |(b^k)_n| \cdot \delta^n \leqslant \sum_{k=0}^{K} |a_k| \cdot \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} |(b^k)_n| \cdot \delta^n}_{\mathsf{Gen}_{|b^k|(\delta)}} = \sum_{k=0}^{K} |a_k| \cdot \mathsf{Gen}_{|b^k|(\delta)} < \sum_{k=0}^{K} |a_k| \cdot \varepsilon^k \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} |a_k| \cdot \varepsilon^k =$$

$$= \mathsf{Gen}_{|a|}(\varepsilon) < \infty$$

$$\Downarrow$$

$$\mathsf{Gen}_{|a \circ b|}(\delta) = \sum_{n=0}^{\infty} |(a \circ b)_n| \cdot \delta^n \leqslant \mathsf{Gen}_{|a|}(\varepsilon) < \infty$$

Это означает, что $|a \circ b| \in \mathcal{A}$, и по свойству (10.1.39), $a \circ b \in \mathcal{A}$. □

Свойства композиции:

1°. *Модуль композиции аналитических последовательностей не превосходит композиции модулей:*

$$|a \circ b| \leqslant |a| \circ |b| \qquad (10.1.51)$$

2°. *Выполняется следующее правило дистрибутивности:*

$$(a + b) \circ c = a \circ c + b \circ c \qquad (10.1.52)$$

3°. *Производящая функция композиции аналитических последовательностей равна композиции производящих функций в некоторой окрестности нуля:*

$$\exists \delta > 0 \qquad \forall x \in (-\delta, \delta) \qquad \mathsf{Gen}_{a \circ b}(x) = (\mathsf{Gen}_a \circ \mathsf{Gen}_b)(x) \qquad (10.1.53)$$

Доказательство. Свойство 1° доказывается цепочкой:

$$|a\circ b|_n=(10.1.38)=|(a\circ b)_n|=(10.1.48)=\left|\sum_{k=0}^n a_k\cdot(b^k)_n\right|\leqslant\sum_{k=0}^n|a_k|\cdot|(b^k)_n|=(10.1.38)=$$
$$=\sum_{k=0}^n|a|_k\cdot|b^k|_n\leqslant(10.1.44)\leqslant\sum_{k=0}^n|a|_k\cdot(|b|^k)_n=(10.1.48)=(|a|\circ|b|)_n$$

Свойство 2°:

$$((a+b)\circ c)_n=(10.1.48)=\sum_{k=0}^n(a+b)_k\cdot(c^k)_n=\sum_{k=0}^n(a_k+b_k)\cdot(c^k)_n=$$
$$=\sum_{k=0}^n a_k\cdot(c^k)_n+\sum_{k=0}^n b_k\cdot(c^k)_n=(10.1.48)=(a\circ c)_n+(b\circ c)_n=(a\circ c+b\circ c)_n$$

Свойство 3° мы сначала докажем для случая, когда a – финитная последовательность, то есть такая, у которой почти все элементы равны нулю:

$$\sup\{k\in\mathbb{Z}_+:\quad a_k\neq 0\}=K<\infty \tag{10.1.54}$$

В этом случае для всякого $x\in(-\rho(b),\rho(b))$ мы получим:

$$\mathsf{Gen}_{a\circ b}(x)=\sum_{n=0}^\infty(a\circ b)_n\cdot x^n=\sum_{n=0}^\infty\sum_{k=0}^\infty a_k\cdot(b^k)_n\cdot x^n=(10.1.54)=\sum_{n=0}^\infty\sum_{k=0}^K a_k\cdot(b^k)_n\cdot x^n=$$
$$=\sum_{k=0}^K a_k\cdot\underbrace{\sum_{n=0}^\infty(b^k)_n\cdot x^n}_{\mathsf{Gen}_{b^k}(x)}=\sum_{k=0}^K a_k\cdot\mathsf{Gen}_{b^k}(x)=(10.1.45)=\sum_{k=0}^K a_k\cdot\Big(\mathsf{Gen}_b(x)\Big)^k=$$
$$=\sum_{k=0}^\infty a_k\cdot\Big(\mathsf{Gen}_b(x)\Big)^k=\mathsf{Gen}_a\Big(\mathsf{Gen}_b(x)\Big)$$

После этого рассматривается общий случай. Для любой последовательности $a\in\mathcal{A}$ и для всякого $N\in\mathbb{Z}_+$ обозначим через $P_N a$ последовательность, определенную формулой

$$(P_K a)_k=\begin{cases}a_k, & k\leqslant K\\ 0, & k>K\end{cases}$$

Это будет финитная последовательность, поэтому по уже доказанному,

$$\mathsf{Gen}_{P_K a\circ b}(x)=\mathsf{Gen}_{P_K a}\Big(\mathsf{Gen}_b(x)\Big),\qquad x\in(-\rho(b),\rho(b)) \tag{10.1.55}$$

Зафиксируем $\varepsilon>0$ такое, что $\mathsf{Gen}_{|a|}(\varepsilon)<\infty$, и подберем $\delta>0$ такое, что $|\mathsf{Gen}_{|b|}(\delta)|<\varepsilon$. Покажем, что при $x\in(-\delta,\delta)$ и $K\to\infty$ равенство (10.1.55) превращается в (10.1.53):

$$\underbrace{\mathsf{Gen}_{P_K a\circ b}(x)}_{\substack{(K\to\infty)\ \downarrow\\ \mathsf{Gen}_{a\circ b}(x)}}=\underbrace{\mathsf{Gen}_{P_K a}\Big(\mathsf{Gen}_b(x)\Big)}_{\substack{\downarrow\ (K\to\infty)\\ \mathsf{Gen}_{a\circ b}(x)}},\qquad x\in(-\delta,\delta) \tag{10.1.56}$$

– это и будет доказательством для (10.1.53) в общем случае.

Предельный переход справа в (10.1.56) очевиден:

$$\mathsf{Gen}_{P_K a}(y)=\sum_{k=0}^K a_k\cdot y^k\underset{K\to\infty}{\longrightarrow}\sum_{k=0}^\infty a_k\cdot y^k=\mathsf{Gen}_a(y),\qquad y\in(-\varepsilon,\varepsilon)$$
$$\Downarrow$$
$$\mathsf{Gen}_{P_K a}\Big(\mathsf{Gen}_b(x)\Big)\underset{K\to\infty}{\longrightarrow}\mathsf{Gen}_a\Big(\mathsf{Gen}_b(x)\Big),\qquad x\in(-\delta,\delta)$$

Докажем левый предельный переход. Для этого заметим прежде всего, что

$$a_k - (P_K a)_k = \begin{cases} 0, & k \leqslant K \\ a_k, & k > K \end{cases} \tag{10.1.57}$$

Тогда для всякого $x \in (-\delta, \delta)$ мы получим:

$$|\mathsf{Gen}_{a\circ b}(x) - \mathsf{Gen}_{P_K a\circ b}(x)| = (10.1.33) = |\mathsf{Gen}_{a\circ b - P_K a\circ b}(x)| = (10.1.52) = \left|\mathsf{Gen}_{(a-P_K a)\circ b}(x)\right| \leqslant (10.1.43) \leqslant$$
$$\leqslant \mathsf{Gen}_{|(a-P_K a)\circ b|}(|x|) \leqslant \mathsf{Gen}_{|a-P_K a|\circ|b|}(|x|) = \sum_{n=0}^{\infty}(|a-P_K a|\circ|b|)_n \cdot |x|^n = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}|a-P_K a|_k \cdot (|b|^k)_n \cdot |x|^n =$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}|a_k - (P_K a)_k| \cdot (|b|^k)_n \cdot |x|^n = (10.1.57) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=K+1}^{\infty}|a_k| \cdot (|b|^k)_n \cdot |x|^n =$$
$$= \sum_{k=K+1}^{\infty}|a_k| \cdot \sum_{n=0}^{\infty}(|b|^k)_n \cdot |x|^n = \sum_{k=K+1}^{\infty}|a_k| \cdot \mathsf{Gen}_{|b|^k}(|x|) \leqslant \sum_{k=K+1}^{\infty}|a_k| \cdot \Big(\mathsf{Gen}_{|b|}(|x|)\Big)^k \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{k=K+1}^{\infty}|a_k| \cdot \Big(\mathsf{Gen}_{|b|}(\delta)\Big)^k \leqslant \sum_{k=K+1}^{\infty}|a_k| \cdot \varepsilon^k \underset{K\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

потому что $\sum_{k=0}^{\infty}|a_k| \cdot \varepsilon^k = \mathsf{Gen}_{|a|}(\varepsilon) < \infty$. Отсюда уже следует нужное нам соотношение

$$\mathsf{Gen}_{P_K a\circ b}(x) \underset{K\to\infty}{\longrightarrow} \mathsf{Gen}_{a\circ b}(x), \qquad x \in (-\delta, \delta)$$

□

§ 2 Ряд Тейлора и аналитические функции

(a) Формулы Тейлора

Теорема об остатке.

- Функция f называется
  - *дифференцируемой порядка* n на интервале (a, b), если на (a, b) она имеет производные до порядка n включительно, то есть существует конечная последовательность функций $f_0, f_1, ..., f_m$ на (a, b) таких, что
  $$f_0 = f,$$
  и для всякого $k = 0, ..., n-1$ функция f_k дифференцируема на (a, b) и ее производная равна f_{k+1}:
  $$f_k' = f_{k+1}, \qquad k < n.$$

Теорема 10.2.1. *Пусть нам даны:*

1) *функция f, дифференцируемая порядка $n+1$ на отрезке $[a, b]$, и*
2) *функция g, непрерывная на отрезке $[a, b]$, и имеющая внутри этого отрезка ненулевую производную:*
$$\forall t \in (a, b) \qquad g'(t) \neq 0$$

Тогда найдутся:

– *точка $\zeta \in (a; b)$, для которой будет справедливо равенство:*
$$f(b) = \sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!} \cdot (b-a)^k + \frac{g(b)-g(a)}{g'(\zeta) \cdot n!} \cdot f^{(n+1)}(\zeta) \cdot (b-\zeta)^n \tag{10.2.58}$$

– *точка $\eta \in (a; b)$, для которой будет справедливо равенство:*
$$f(a) = \sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(b)}{k!} \cdot (a-b)^k + \frac{g(a)-g(b)}{g'(\eta) \cdot n!} \cdot f^{(n+1)}(\eta) \cdot (a-\eta)^n \tag{10.2.59}$$

! **10.2.1.** Формулы (10.2.58) и (10.2.59) можно объединить в одну, усложнив формулировку теоремы следующим образом: *пусть* x_0 *и* x *обозначают концы отрезка* $[a,b]$, *причем возможны оба варианта, как* $\begin{Bmatrix} x_0 = a \\ x = b \end{Bmatrix}$, *так и* $\begin{Bmatrix} x = a \\ x_0 = b \end{Bmatrix}$; *тогда найдется точка* $\xi \in (a;b)$ *такая, что*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \cdot (x-x_0)^k + \frac{g(x)-g(x_0)}{g'(\xi)\cdot n!} \cdot f^{(n+1)}(\xi) \cdot (x-\xi)^n \qquad (10.2.60)$$

В такой формулировке случай $\begin{Bmatrix} x_0 = a \\ x = b \end{Bmatrix}$ превращает формулу (10.2.60) в (10.2.58), а при $\begin{Bmatrix} x = a \\ x_0 = b \end{Bmatrix}$ формула (10.2.60) превращается в (10.2.59).

Доказательство. 1. Для доказательства (10.2.58) рассмотрим вспомогательную функцию

$$F(t) = f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(t)}{k!} \cdot (b-t)^k$$

Применим к паре функций F и g теорему Коши об отношении приращений 5.1.8: должна существовать точка $\zeta \in (a;b)$ такая, что

$$\frac{F(b)-F(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{F'(\zeta)}{g'(\zeta)}$$

Или, иначе

$$F(b)-F(a) = \frac{g(b)-g(a)}{g'(\zeta)} \cdot F'(\zeta) \qquad (10.2.61)$$

Выразим в этой формуле F через f. Во-первых,

$$F(b) = f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(b)}{k!} \cdot (b-b)^k = f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(b)}{k!} \cdot \underbrace{0^k}_{\substack{\parallel \\ \begin{cases} 0, & \text{при } k>0 \\ 0, & \text{при } k=0 \end{cases}}} = f(b) - \underbrace{\frac{f^{(0)}(b)}{0!}}_{\substack{\parallel \\ f(b)}} = 0$$

Во-вторых,

$$F(a) = f(a) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} \cdot (b-a)^k$$

И, в-третьих,

$$F'(t) = \frac{\partial}{\partial t}\left(f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(t)}{k!} \cdot (b-t)^k \right) = \frac{\partial}{\partial t}\left(f(b) - f(t) - \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(t)}{k!} \cdot (b-t)^k \right) =$$

$$= 0 - f'(t) - \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{f^{(k)}(t)}{k!} \cdot (b-t)^k \right) =$$

$$= -f'(t) - \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{f^{(k)}(t)}{k!} \right) \cdot (b-t)^k + \frac{f^{(k)}(t)}{k!} \cdot \frac{\partial}{\partial t}\left((b-t)^k \right) \right) =$$

$$= -f'(t) - \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{f^{(k+1)}(t)}{k!} \cdot (b-t)^k + \frac{f^{(k)}(t)}{k!} \cdot k \cdot (b-t)^{k-1} \cdot (-1) \right) =$$

$$= \underbrace{- \underbrace{f'(t)}_{\substack{\parallel \\ \frac{f^{(1)}(t)}{0!} \cdot (b-t)^0}} - \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k+1)}(t)}{k!} \cdot (b-t)^k}_{\text{объединяем в одну сумму}} + \underbrace{\sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(t)}{(k-1)!} \cdot (b-t)^{k-1}}_{\text{заменяем } k-1 \text{ на } i} =$$

$$= - \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k+1)}(t)}{k!} \cdot (b-t)^k}_{\text{отщепляем последнее слагаемое}} + \sum_{i=0}^{n-1} \frac{f^{(i+1)}(t)}{i!} \cdot (b-t)^i =$$

$$= -\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!} \cdot (b-t)^n \underbrace{- \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k+1)}(t)}{k!} \cdot (b-t)^k + \sum_{i=0}^{n-1} \frac{f^{(i+1)}(t)}{i!} \cdot (b-t)^i}_{\text{сокращаем}} = -\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!} \cdot (b-t)^n$$

Подставляя ζ вместо t получим:

$$F'(\zeta) = -\frac{f^{(n+1)}(\zeta)}{n!} \cdot (b-\zeta)^n$$

Теперь подставим полученные выражения в (10.2.61):

$$0 - \left(f(a) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} \cdot (b-a)^k \right) = \frac{g(b)-g(a)}{g'(\zeta)} \cdot \left(-\frac{f^{(n+1)}(\zeta)}{n!} \cdot (b-\zeta)^n \right)$$

Убрав минус в обеих частях, получим равенство, эквивалентное (10.2.58):

$$f(a) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} \cdot (b-a)^k = \frac{g(b)-g(a)}{g'(\zeta)} \cdot \frac{f^{(n+1)}(\zeta)}{n!} \cdot (b-\zeta)^n$$

2. Для доказательства (10.2.59) нужно рассмотреть другую вспомогательную функцию:

$$F(t) = f(a) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(t)}{k!} \cdot (a-t)^k$$

Тогда

$$F(b) = f(a) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(b)}{k!} \cdot (a-b)^k$$

$$F(a) = f(a) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} \cdot (a-a)^k = 0$$

$$F'(t) = -\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!} \cdot (a-t)^n$$

И при подстановке в (10.2.61) получается равенство, эквивалентное (10.2.59):

$$f(a) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(b)}{k!} \cdot (a-b)^k - 0 = \frac{g(b)-g(a)}{g'(\zeta)} \cdot \left(-\frac{f^{(n+1)}(\zeta)}{n!} \cdot (a-\zeta)^n \right)$$

□

Формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа.

Теорема 10.2.2 (Тейлор-Лагранж)**.** *Пусть функция f определена и дифференцируема $n+1$ раз на интервале (a,b). Тогда для любых дух точек $x_0, x \in (a,b)$ найдется точка ξ, лежащая между ними (то есть $\xi \in (x_0, x)$, если $x_0 < x$, и $\xi \in (x, x_0)$, если $x < x_0$) такая, что выполняется равенство*

$$\boxed{f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \cdot (x-x_0)^k + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \cdot (x-x_0)^{n+1}} \qquad (10.2.62)$$

- Равенство (10.2.62) называется *формулой Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа порядка n* для функции f в точке x_0.

Доказательство. Этот факт следует из теоремы 10.2.1, если в ней выбрать в качестве g функцию

$$g(t) = (x-t)^{n+1}$$

□

Формула Тейлора с остаточным членом в форме Коши.

Теорема 10.2.3 (Тейлора-Коши). *Пусть функция f определена и дифференцируема $n+1$ раз на интервале (a,b). Тогда для любых дух точек $x_0, x \in (a,b)$ найдется точка ξ, лежащая между ними (то есть $\xi \in (x_0, x)$, если $x_0 < x$, и $\xi \in (x, x_0)$, если $x < x_0$) такая, что выполняется равенство*

$$\boxed{f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \cdot (x-x_0)^k + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!} \cdot (x-\xi)^n \cdot (x-x_0)} \tag{10.2.63}$$

- Равенство (10.2.63) называется *формулой Тейлора с остаточным членом в форме Коши порядка n* для функции f в точке x_0:

Доказательство. Это следует из теоремы 10.2.1, если в ней выбрать в качестве g функцию

$$g(t) = x - t$$

□

Дифференциал функции и запись формулы Тейлора с его помощью.

- *Дифференциалом k-го порядка* функции $f : \mathbb{R} \hookrightarrow \mathbb{R}$ в точке x называется функция $p \mapsto \mathsf{d} f(x)[p]$ от нового переменного $p \in \mathbb{R}$, которая в каждой точке $p \in \mathbb{R}$ определяется равенством:

$$\mathsf{d}^k f(x)[p] = f^{(k)}(x) \cdot p^k \tag{10.2.64}$$

В частности, дифференциал нулевого порядка описывается формулой

$$\mathsf{d}^0 f(x)[p] = f(x) \tag{10.2.65}$$

(и поэтому не зависит от p), а дифференциал первого порядка формулой

$$\mathsf{d} f(x)[p] = f'(x) \cdot p. \tag{10.2.66}$$

(и поэтому линейно зависит от p).

Следующий факт следует из теоремы 10.2.2:

Теорема 10.2.4. *Справедлива следующая модификация формулы Тейлора-Лагранжа* (10.2.62)*:*

$$f(x+p) = \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!} \cdot \mathsf{d}^k f(x)[p] + \frac{1}{(m+1)!} \cdot \mathsf{d}^{m+1} f(x + \theta \cdot p)[p], \qquad \theta \in [0,1] \tag{10.2.67}$$

(b) Ряд Тейлора

Формулы Тейлора (10.2.62)-(10.2.63)-(6.2.35) подсказывают следующую конструкцию.

- Если f – гладкая функция на интервале (a,b), то любой точке $x_0 \in (a,b)$ можно поставить в соответствие степенной ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \cdot (x-x_0)^n \tag{10.2.68}$$

Этот ряд называется *рядом Тейлора функции f в точке x_0*.

- В частном случае, когда $x_0 = 0$ ряд Тейлора называется *рядом Маклорена*:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \cdot x^n \tag{10.2.69}$$

От ряда Тейлора естественно ожидать, что он будет сходиться к порождающей его функции f хотя бы в некоторой окрестности $(x_0-\delta; x_0+\delta)$ точки x_0, то есть что выполняется следующее тождество, называемое *разложением Тейлора* функции f в окрестности $(x_0-\delta; x_0+\delta)$:

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\cdot(x-x_0)^n,\quad x\in(x_0-\delta;x_0+\delta) \tag{10.2.70}$$

В частном случае, когда $x_0=0$, оно называется *разложением Маклорена* (в окрестности $(-\delta;\delta)$):

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}\cdot x^n,\quad x\in(-\delta;\delta) \tag{10.2.71}$$

Часто так и бывает (мы приведем примеры такого рода на с.604). Но не всегда. В следующих примерах мы увидим, что ряд Тейлора функции f необязательно сходится, а если сходится, то его сумма необязательно совпадает с функцией f.

Контрпримеры.

◇ **10.2.2. Ряд Маклорена, расходящийся везде, кроме точки 0.** Рассмотрим последовательность

$$a_n=(n!)^2$$

По теореме Бореля 9.1.13 существует гладкая функция f на $\mathbb{R}$ такая, что

$$\forall n\in\mathbb{Z}_+\qquad f^{(n)}(0)=a_n=(n!)^2$$

Ее ряд Маклорена имеет вид

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}\cdot x^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n!)^2}{n!}\cdot x^n=\sum_{n=0}^{\infty}n!\cdot x^n$$

В примере 10.1.1 мы уже рассматривали такой степенной ряд, и поняли, что он сходится только в точке 0.

◇ **10.2.3. Ряд Маклорена сходящийся всюду, но не к порождающей его функции.** Рассмотрим функцию из примера 9.1.35, то есть гладкую на $\mathbb{R}$ функцию f со свойствами:

$$\begin{cases}f(x)=0, & x\leqslant 0\\ f(x)>0, & x>0\end{cases}$$

Поскольку на левой полупрямой эта функция нулевая, в точке 0 все ее производные равны нулю, поэтому ряд Маклорена будет нулевой:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\overbrace{\frac{f^{(n)}(0)}{n!}}^{\substack{0\\ \parallel}}\cdot x^n=\sum_{n=0}^{\infty}0\cdot x^n$$

Сумма такого ряда, понятное дело, тоже будет нулевой,

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}\cdot x^n=0$$

и поэтому она не может совпадать с f ни на каком интервале $(-\delta,+\delta)$: тождество

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}\cdot x^n=0=f(x),\qquad x\in(-\delta,+\delta),$$

невозможно потому что при $x>0$ функция f отлична от нуля.

Всякий сходящийся степенной ряд есть ряд Тейлора своей суммы. Несмотря на отмеченное нами нерегулярное поведение ряда Тейлора, эта конструкция оказывается центральным примером в теории степенных рядов из-за следующей теоремы:

Теорема 10.2.5. *Если функция f является суммой какого-то степенного ряда в некоторой окрестности его центра*

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n\cdot(x-x_0)^n,\qquad x\in(x_0-\delta,x_0+\delta), \tag{10.2.72}$$

то этот степенной ряд является рядом Тейлора функции f в точке x_0:

$$c_n=\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$$

Доказательство. В силу следствия 10.1.7, функция f является гладкой на интервале $(x_0-\delta,x_0+\delta)$, и по формуле (10.1.18),

$$f^{(k)}(x)=\sum_{n=k}^{\infty}\frac{n!}{(n-k)!}\cdot c_n\cdot(x-x_0)^{n-k}=$$
$$=\frac{k!}{(k-k)!}\cdot c_k\cdot(x-x_0)^0+\frac{(k+1)!}{(k+1-k)!}\cdot c_{k+1}\cdot(x-x_0)^1+\frac{(k+2)!}{(k+2-k)!}\cdot c_{k+2}\cdot(x-x_0)^2+...=$$
$$=k!\cdot c_k+\frac{(k+1)!}{1!}\cdot c_{k+1}\cdot(x-x_0)+\frac{(k+2)!}{2!}\cdot c_{k+2}\cdot(x-x_0)^2+..., \qquad x\in(x_0-R,x_0+R)$$

Подставив сюда $x=x_0$, получим

$$f^{(k)}(x_0)=k!\cdot c_k+\frac{(k+1)!}{1!}\cdot c_{k+1}\cdot 0+\frac{(k+2)!}{2!}\cdot c_{k+2}\cdot 0+...=k!\cdot c_k$$

То есть, $c_k=\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$ □

! **10.2.4.** Из этой теоремы следует, что если степенной ряд $\sum_{n=0}^{\infty}c_n\cdot(x-x_0)^n$ сходится хотя бы в одной точке x, отличной от его центра x_0, то автоматически он является рядом Тейлора для некоторой функции f, а именно, для своей суммы $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n\cdot(x-x_0)^n$ (которая будет определена как минимум в окрестности точки x_0 радиуса $\delta=|x-x_0|$).

Сходимость ряда Тейлора. Обсудим теперь, когда все-таки ряд Тейлора сходится к порождающей его функции. Удобное достаточное условие для этого выглядит так:

Предложение 10.2.6. *Пусть функция f определена в δ-окрестности некоторой точки x_0, бесконечно гладкая на $(x_0-\delta;x_0+\delta)$, и имеет ограниченные в совокупности производные:*

$$\sup_{n\in\mathbb{Z}_+}\ \sup_{x\in(x_0-\delta;x_0+\delta)}|f^{(n)}(x)|=M<\infty \tag{10.2.73}$$

Тогда на интервале $(x_0-\delta;x_0+\delta)$ функция f удовлетворяет тождеству:

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\cdot(x-x_0)^n \tag{10.2.74}$$

Доказательство. Выпишем формулу Тейлора-Лагранжа (10.2.62) для f: для любой точки $x\in(x_0-\delta;x_0+\delta)$ найдется точка ξ, лежащая между x_0 и x, такая что выполняется равенство

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}\cdot(x-x_0)^k+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\cdot(x-x_0)^{n+1}$$

Из него мы получаем:

$$f(x)-\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}\cdot(x-x_0)^k=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\cdot(x-x_0)^{n+1}$$
$$\Downarrow$$
$$\left|f(x)-\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}\cdot(x-x_0)^k\right|=\left|\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\cdot(x-x_0)^{n+1}\right|\leqslant M\cdot\frac{\delta^n}{(n+1)!}\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}0$$
$$\Downarrow$$
$$\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}\cdot(x-x_0)^k\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}f(x)$$

□

Стандартные разложения Маклорена.

◇◇ **10.2.5.** Следующие разложения Маклорена справедливы в интервале $|x|<1$:

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+...+x^k+...=$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} x^n, \qquad (10.2.75)$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + ... + (-1)^k \cdot x^k + ... =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot x^n \qquad (10.2.76)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + ... + (-1)^k \cdot \frac{x^k}{k} + ... =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot \frac{x^n}{n} \qquad (10.2.77)$$

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 + ... + (-1)^k \cdot x^{2k} + ... =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot x^{2n} \qquad (10.2.78)$$

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - ... + (-1)^k \cdot \frac{x^{2k+1}}{2k+1} +$$

$$+ ... = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \qquad (10.2.79)$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha \cdot x + \alpha(\alpha-1) \cdot \frac{x^2}{2!} + ...$$

$$... + \alpha(\alpha-1)...(\alpha-k+1) \cdot \frac{x^k}{k!} + ... =$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1) \cdot \frac{x^n}{n!} \qquad (10.2.80)$$

Доказательство. Тождества (10.2.75)-(10.2.79) мы уже доказали на с.588, поэтому их доказывать нет необходимости, нужно только заметить, что в силу теоремы 10.2.5 они будут разложениями Маклорена (поскольку центром ряда здесь будет точка 0).

Таким образом, интерес в этом списке представляет лишь формула (10.2.80). Для ее доказательства заметим, что функция $f(x) = (1+x)^\alpha$ имеет производные

$$f^{(n)}(x) = \alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1) \cdot (1+x)^{\alpha-n}$$

Применим к этой функции теорему Тейлора-Коши 10.2.3: для любого $x \in (-1,1)$ и любого $n \in \mathbb{N}$ найдется точка ξ, лежащая между 0 и x такая, что

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \cdot x^k + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!} \cdot (x-\xi)^n \cdot x \qquad (10.2.81)$$

Заметим две вещи: во-первых,

$$1 - |x| \leqslant 1 - |\xi| \leqslant |1+\xi| \leqslant 1 + |\xi| \leqslant 1 + |x|$$

$$\Downarrow$$

$$|1+\xi|^{\alpha-1} \leqslant \max\left\{(1-|x|)^{\alpha-1}; (1+|x|)^{\alpha-1}\right\} \qquad (10.2.82)$$

И, во-вторых,

$$\frac{|x-\xi|}{|1+\xi|} \leqslant \frac{|x|-|\xi|}{1-|\xi|} = \frac{1-|\xi|-(1-|x|)}{1-|\xi|} =
= 1 - \frac{1-|x|}{1-|\xi|} \leqslant 1 - \frac{1-|x|}{1-0} = |x| \qquad (10.2.83)$$

Теперь остаток ряда Маклорена можно оценить так:

$$\left| f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \cdot x^k \right| = (10.2.81) = \left| \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!} \cdot (x-\xi)^n \cdot x \right| =$$

$$= \left| \frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n) \cdot (1+\xi)^{\alpha-n-1}}{n!} \right| \cdot |x-\xi|^n \cdot |x| =$$

$$= \left| \alpha \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) ... \left(1 - \frac{\alpha}{n}\right) \right| \cdot |1+\xi|^{\alpha-n-1} \cdot |x-\xi|^n \cdot |x| =$$

$$= \left| \alpha \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) ... \left(1 - \frac{\alpha}{n}\right) \right| \cdot |1+\xi|^{\alpha-1} \cdot \left(\frac{|x-\xi|}{|1+\xi|} \right)^n \cdot |x| \leqslant$$

$$\leqslant (10.2.82), (10.2.83) \leqslant$$

$$\leqslant \left| \alpha \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) ... \left(1 - \frac{\alpha}{n}\right) \right| \cdot \max\left\{(1-|x|)^{\alpha-1}; (1+|x|)^{\alpha-1}\right\} \cdot |x|^{n+1}$$

Обозначим последнюю величину M_n

$$M_n = \left| \alpha \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) ... \left(1 - \frac{\alpha}{n}\right) \right| \cdot \max\left\{(1-|x|)^{\alpha-1}; (1+|x|)^{\alpha-1}\right\} \cdot |x|^{n+1}.$$

Нам нужно показать, что M_n стремится к нулю при $n \to \infty$. Зафиксируем какое-нибудь число q такое, что

$$|x| < q < 1$$

(такое q найдется, поскольку $|x| < 1$). Теперь мы получаем:

$$\left| 1 - \frac{\alpha}{n+1} \right| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{M_{n+1}}{M_n} = \left| 1 - \frac{\alpha}{n+1} \right| \cdot |x| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} |x| < q$$

$$\Downarrow$$

$$\exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geqslant N \quad \frac{M_{n+1}}{M_n} < q$$

$$\Downarrow$$

$$\forall k \in \mathbb{Z}_+ \quad M_{N+k} < M_N \cdot q^k$$

$$\Downarrow$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} M_{N+k} \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} M_N \cdot q^k < \infty$$

$$\Downarrow$$

$$M_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

□

◇◇ **10.2.6.** Следующие разложения Маклорена справедливы на всей числовой прямой $x \in \mathbb{R}$:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + ... + \frac{x^k}{k!} + ... = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \qquad (10.2.84)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - ... + (-1)^n \cdot \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + ... = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \qquad (10.2.85)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - ... + (-1)^k \cdot \frac{x^{2k}}{(2k)!} + ... = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n}}{(2n)!} \qquad (10.2.86)$$

Доказательство. 1. Из формулы для производных функции e^x

$$\frac{\partial^n}{(\partial x)^n} e^x = e^x$$

видно, что она удовлетворяет условию (10.2.73) на любом интервале $(-R, R)$, $R > 0$:

$$\sup_{n\in\mathbb{Z}_+} \sup_{x\in(-R,R)} |f^{(n)}(x)| = \sup_{n\in\mathbb{Z}_+} \sup_{x\in(-R,R)} |e^x| = e^R < \infty$$

В силу предложения 10.2.6, это означает, что функцию $f(x) = e^x$ представить сходящимся на интервале $(-R, R)$ рядом (10.2.84). Поскольку это верно для любого $R > 0$, мы получаем, что $f(x) = e^x$ формула (10.2.84) верна при любом $x \in \mathbb{R}$.

2. Производные функции sin

$$\frac{\partial^n}{(\partial x)^n} \sin x = \begin{cases} \sin x, & n = 4k, \quad k \in \mathbb{Z}_+ \\ \cos x, & n = 4k+1, \quad k \in \mathbb{Z}_+ \\ -\sin x, & n = 4k+2, \quad k \in \mathbb{Z}_+ \\ -\cos x, & n = 4k+3, \quad k \in \mathbb{Z}_+ \end{cases}$$

ограничены в совокупности на $\mathbb{R}$ (и как следствие, на любом интервале $(-R, R)$):

$$\sup_{n\in\mathbb{Z}_+} \sup_{x\in(-R,R)} |\sin^{(n)}(x)| \leqslant 1 < \infty$$

В силу предложения 10.2.6, это означает, функцию sin можно представить сходящимся на интервале $(-R, R)$ рядом (10.2.85). Поскольку это верно для любого $R > 0$, мы получаем, что формула (10.2.85) верна при любом $x \in \mathbb{R}$.

3. Производные функции cos

$$\cos^{(n)} x = \begin{cases} \cos x, & n = 4k, \quad k \in \mathbb{Z}_+ \\ -\sin x, & n = 4k+1, \quad k \in \mathbb{Z}_+ \\ -\cos x, & n = 4k+2, \quad k \in \mathbb{Z}_+ \\ \sin x, & n = 4k+3, \quad k \in \mathbb{Z}_+ \end{cases}$$

ограничены в совокупности на $\mathbb{R}$. Поэтому функция cos удовлетворяет условию (10.2.73) на любом интервале $(-R, R)$, $R > 0$:

$$\sup_{n\in\mathbb{Z}_+} \sup_{x\in(-R,R)} |\sin^{(n)}(x)| \leqslant 1 < \infty$$

В силу предложения 10.2.6, cos можно представить сходящимся на интервале $(-R, R)$ рядом (10.2.86). Поскольку это верно для любого $R > 0$, равенство (10.2.86) будет выполняться для любого $x \in \mathbb{R}$.

□

(c) Аналитические и целые функции

Аналитические функции.

- Функция f называется *аналитической на интервале* (a, b), если она определена на (a, b) и удовлетворяет следующим равносильным условиям:

  (i) у любой точки $x_0 \in (a, b)$ найдется окрестность $(x_0 - \delta; x_0 + \delta)$, в которой функция f представима в виде суммы степенного ряда:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cdot (x - x_0)^n, \qquad x \in (x_0 - \delta; x_0 + \delta) \qquad (10.2.87)$$

иными словами, в окрестности $(x_0-\delta; x_0+\delta)$ функция f должна быть сдвигом производящей функции некоторой аналитической последовательности c_n:

$$f(x) = \mathsf{Gen}_c(x-x_0), \qquad x \in (x_0-\delta; x_0+\delta) \tag{10.2.88}$$

(ii) у любой точки $x_0 \in (a,b)$ найдется окрестность $(x_0-\delta; x_0+\delta)$, в которой функция f (является гладкой и) представима в виде суммы своего ряда Тейлора:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \cdot (x-x_0)^n, \qquad x \in (x_0-\delta; x_0+\delta) \tag{10.2.89}$$

иными словами, в окрестности $(x_0-\delta; x_0+\delta)$ функция f должна быть сдвигом производящей функции последовательности своих коэффициентов Тейлора:

$$f(x) = \mathsf{Gen}_c(x-x_0), \qquad c_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}, \qquad x \in (x_0-\delta; x_0+\delta) \tag{10.2.90}$$

Доказательство. Равносильность условий (i) и (ii) следует из теоремы 10.2.5. □

Теорема 10.2.7. *Сумма всякого степенного ряда*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cdot (x-x_0)^n, \qquad x \in (x_0-R; x_0+R)$$

является аналитической функцией на интервале сходимости $(x_0-R; x_0+R)$ этого степенного ряда.

Доказательство. Понятно, что здесь достаточно рассмотреть случай $x_0 = 0$. Пусть

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cdot x^n, \qquad |x| < R.$$

Зафиксируем какую-нибудь точку $x_1 \in (-R; R)$ и выберем произвольные числа ρ и r так, чтобы

$$0 < |x_1| < \rho < r < R.$$

Строим логическую цепочку Абеля (как на с.580):

$$\text{числовой ряд} \quad \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cdot r^n \quad \text{сходится}$$

$$\Downarrow$$

$$\text{общий член стремится к нулю:} \quad c_n \cdot r^n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

$$\Downarrow$$

$$\text{последовательность } c_n \cdot r^n \text{ ограничена:} \quad \exists M > 0 \quad \forall n \in \mathbb{Z}_+ \quad |c_n \cdot r^n| = |c_n| \cdot r^n \leqslant M$$

$$\Downarrow$$

$$\exists M > 0 \quad \forall n \in \mathbb{Z}_+ \quad |c_n| \leqslant \frac{M}{r^n} \tag{10.2.91}$$

Выберем $\delta < \min\{\rho - |x_1|; r-\rho\}$. Тогда для любой точки $\xi \in (x_1-\delta; x_1+\delta)$ мы получим $|\xi| < \rho$, поэтому

$$\left|f^{(k)}(\xi)\right| = (10.1.18) = \left|\sum_{n=k}^{\infty} \frac{c_n \cdot n!}{(n-k)!} \cdot \xi^{n-k}\right| \leqslant \sum_{n=k}^{\infty} \frac{\overbrace{|c_n|}^{\overset{\frac{M}{r^n}}{\vee\!\!/}} \cdot n!}{(n-k)!} \cdot \underbrace{|\xi|^{n-k}}_{\underset{\rho^{n-k}}{\wedge\!\!\backslash}} \leqslant \sum_{n=k}^{\infty} \frac{n!}{(n-k)!} \cdot \frac{M \cdot \rho^{n-k}}{r^n} =$$

$$= \frac{M}{r^k} \cdot \sum_{n=k}^{\infty} \frac{n!}{(n-k)!} \cdot \left(\frac{\rho}{r}\right)^{n-k} = (10.1.23) = \frac{M \cdot k!}{r^k \cdot \left(1 - \frac{\rho}{r}\right)^{k+1}} = \frac{M \cdot r \cdot k!}{(r-\rho)^{k+1}}$$

$$\Downarrow$$

$$\forall x \in (x_1 - \delta; x_1 + \delta) \qquad \left| f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_1)}{k!} \cdot (x - x_1)^k \right| = (10.2.62) = \left| \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \cdot (x - x_1)^{n+1} \right| =$$

$$= \frac{\left|f^{(n+1)}(\xi)\right|}{(n+1)!} \cdot |x - x_1|^{n+1} \leqslant \frac{M \cdot r \cdot (n+1)!}{(n+1)! \cdot (r-\rho)^{n+2}} \cdot \delta^{n+1} = \frac{M \cdot r}{r - \rho} \cdot \left(\frac{\delta}{r-\rho}\right)^{n+1} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0. \quad (10.2.92)$$

□

Выше на с.246 мы показывали, что сумма, разность, произведение, частное и композиция непрерывных функций снова является непрерывной функцией. Те же самые свойства для дифференцируемых функций доказывались нами на с.323: сумма, разность, произведение, частное и композиция дифференцируемых функций снова является дифференцируемой функцией. Оказывается, что то же самое верно и для аналитических функций.

Теорема 10.2.8 (о композиции аналитических функций)**.** *Если f – аналитическая функция на множестве U, а g – аналитическая функция на множестве $V \supseteq f(U)$, то их композиция $h(x) = g(f(x))$ – аналитическая функция на множестве U.*

Доказательство. Зафиксируем точку $x_0 \in U$ и положим

$$F(x) = f(x) - f(x_0), \qquad G(y) = g(y + f(x_0))$$

Композиция этих функций тоже равна h:

$$G(F(x)) = g(f(x) - f(x_0) + f(x_0)) = g(f(x)) = h(x), \qquad x \in U$$

С другой стороны, эти функции тоже аналитические, поэтому

$$F(x) = \mathsf{Gen}_b(x - x_0), \qquad G(y) = \mathsf{Gen}_a(y), \qquad x \in U_\delta(x_0),\ y \in U_\varepsilon(0)$$

для некоторых аналитических последовательностей a и b. При этом

$$b_0 = \mathsf{Gen}_b(0) = F(x_0) = f(x_0) - f(x_0) = 0,$$

то есть порядок аналитической последовательности $b \in \mathcal{A}$ отличен от нуля:

$$\omega(b) \geqslant 1.$$

Значит, определена композиция последовательностей $a \circ b$, которая по теореме 10.1.11 тоже является аналитической: $a \circ b \in \mathcal{A}$. А производящие функции этих последовательностей связаны формулой (10.1.53), из которой получаем:

$$h(x) = (G \circ F)(x) = G(F(x)) = \mathsf{Gen}_a\left(\mathsf{Gen}_b(x - x_0)\right) = (10.1.53) = \mathsf{Gen}_{a \circ b}(x - x_0), \qquad x \in U_\delta(x_0)$$

Таким образом, в некоторой окрестности $U_\delta(x_0)$ точки x_0 функция h совпадает с производящей функцией некоторой аналитической последовательности $(a \circ b)$. Поскольку это верно для произвольной точки $x_0 \in U$, функция h является аналитической на множестве U. □

Теорема 10.2.9 (об арифметических операциях с аналитическими функциями)**.** *Если f и g – аналитические функции на множестве U, то следующие функции – тоже аналитические на множестве U:*

$$f + g, \quad f - g, \quad C \cdot f, \quad f \cdot g,$$

(C – произвольная константа). А функция

$$\frac{g}{f}$$

– аналитическая на множестве $U \setminus \{x : \ f(x) = 0\}$.

Доказательство. В первых четырех случаях утверждение следует из формул (10.1.33)-(10.1.34): для произвольной точки $x_0 \in U$ выберем окрестность $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ и аналитические последовательности a и b так, чтобы

$$f(x) = \mathsf{Gen}_a(x-x_0), \qquad g(x) = \mathsf{Gen}_b(x-x_0), \qquad x \in (x_0-\delta, x_0+\delta)$$

Тогда

$$(f+g)(x) = f(x)+g(x) = \mathsf{Gen}_a(x-x_0)+\mathsf{Gen}_b(x-x_0) = (10.1.33) = \mathsf{Gen}_{a+b}(x-x_0), \qquad x \in (x_0-\delta, x_0+\delta)$$

То есть в некоторой окрестности $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ точки x_0 функция $f+g$ совпадает с производящей функцией некоторой аналитической последовательности $(a+b)$. Поскольку это верно для произвольной точки $x_0 \in U$, функция $f+g$ является аналитической на множестве U. То же самое верно для $f-g$, $C \cdot f$, $f \cdot g$ (в последнем случае используется формула (10.1.34)).

Теперь для доказательства аналитичности $\frac{g}{f}$ достаточно доказать аналитичность обратной функции $\frac{1}{f}$. Это делается с помощью теоремы 10.2.8: поскольку функция $G(y) = \frac{1}{y}$ аналитична в силу примера 10.2.9, ее композиция с f

$$G(f(x)) = \frac{1}{f(x)}$$

– тоже аналитична. □

◇ **10.2.7. Гладкая, но не аналитическая функция.** Рассмотрим функцию из примера 9.1.35, то есть гладкую на $\mathbb{R}$ функцию f со свойствами:

$$\begin{cases} f(x) = 0, & x \leqslant 0 \\ f(x) > 0, & x > 0 \end{cases}$$

В примере 10.2.3 мы отмечали, что ряд Маклорена этой функции

$$\sum_{n=0}^{\infty} \overbrace{\frac{f^{(n)}(0)}{n!}}^{\substack{0 \\ \parallel}} x^n = 0,$$

не сходится к ней ни в какой окрестности нуля $(-\delta, +\delta)$, потому что при $x > 0$ наша функция отлична от нуля. Отсюда следует, что f не может быть аналитической в точке $x = 0$.

Целые функции.

- Функция f называется *целой*, если она определена всюду на $\mathbb{R}$ и удовлетворяет следующим равносильным условиям:

  (i)* f представима в виде суммы всюду сходящегося на $\mathbb{R}$ степенного ряда в нуле:

  $$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cdot x^n, \qquad x \in \mathbb{R} \tag{10.2.93}$$

  иными словами, функция f всюду на $\mathbb{R}$ должна совпадать с производящей функцией некоторой аналитической последовательности c_n:

  $$f(x) = \mathsf{Gen}_c(x), \qquad x \in \mathbb{R} \tag{10.2.94}$$

  (i)** f представима в виде суммы всюду сходящегося на $\mathbb{R}$ степенного ряда в произвольной точке $x_0 \in \mathbb{R}$:

  $$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cdot (x-x_0)^n, \qquad x \in \mathbb{R} \tag{10.2.95}$$

  иными словами, функция f всюду на $\mathbb{R}$ должна совпадать со сдвигом производящей функции некоторой аналитической последовательности c_n:

  $$f(x) = \mathsf{Gen}_c(x-x_0), \qquad x \in \mathbb{R} \tag{10.2.96}$$

(ii)* f является гладкой и всюду на $\mathbb{R}$ совпадает с суммой своего ряда Маклорена:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \cdot x^n, \qquad x \in \mathbb{R} \tag{10.2.97}$$

иными словами, функция f всюду на $\mathbb{R}$ должна совпадать с производящей функцией последовательности своих коэффициентов Маклорена:

$$f(x) = \mathsf{Gen}_c(x), \qquad c_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}, \qquad x \in \mathbb{R} \tag{10.2.98}$$

(ii)** f является гладкой и всюду на $\mathbb{R}$ совпадает с суммой своего ряда Тейлора в произвольной точке $x_0 \in \mathbb{R}$:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \cdot (x - x_0)^n, \qquad x \in \mathbb{R} \tag{10.2.99}$$

иными словами, функция f всюду на $\mathbb{R}$ должна совпадать со сдвигом производящей функции последовательности своих коэффициентов Тейлора:

$$f(x) = \mathsf{Gen}_c(x - x_0), \qquad c_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}, \qquad x \in \mathbb{R}. \tag{10.2.100}$$

Доказательство. Равносильности (i)* $\Leftrightarrow$(ii)* и (i)** $\Leftrightarrow$(ii)** следуют из теоремы 10.2.5. С другой стороны, импликация (i)* $\Leftarrow$(i)** очевидна, и поэтому остается доказать импликацию (i)* $\Rightarrow$(ii)**. Здесь используется тот же прием, что при доказательстве теоремы 10.2.7: поскольку параметры r и ρ мы можем выбирать произвольными (так, чтобы выполнялась $0 < |x_1| < \rho < r$), для всякой точки $x \in \mathbb{R}$ можно найти r, ρ и δ так, чтобы $x \in (x_1 - \delta, x_1 + \delta)$ и выполнялось (10.2.92). □

Из теоремы 10.2.7 сразу следует

Теорема 10.2.10. *Всякая целая функция является аналитической (и поэтому бесконечно гладкой) на* $\mathbb{R}$.

◇ **10.2.8.** В примере 10.1.2 мы убедились, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ сходится всюду на $\mathbb{R}$. В соответствии с нашим определением, это означает, что порождаемая им функция

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

является целой.

◇ **10.2.9. Аналитическая, но не целая функция.** Покажем, что функция

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

является аналитической (на области своего определения $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$). Зафиксируем точку $x_0 \neq 0$. Тогда при $|x - x_0| < |x_0|$ справедливо разложение в степенной ряд:

$$f(x) = \frac{1}{x} = \frac{1}{x_0 + (x - x_0)} = \frac{1}{x_0} \cdot \frac{1}{1 + \underbrace{\frac{x - x_0}{x_0}}_{\substack{\text{по модулю}\\ \text{меньше}\\ \text{единицы}}}} =$$

$$= (10.2.76) = \frac{1}{x_0} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \left(\frac{x - x_0}{x_0}\right)^n =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{x_0^{n+1}} \cdot (x - x_0)^n$$

Таким образом, функция f аналитическая. Ее, однако, нельзя считать целой хотя бы потому что она определена не на всей прямой $\mathbb{R}$. Более того, ее нельзя продолжить до целой функции на $\mathbb{R}$, потому что по теореме 10.1.5 целая функция должна быть непрерывна на $\mathbb{R}$, а f не продолжается до непрерывной функции на $\mathbb{R}$ из-за соотношения

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \infty.$$

◇ **10.2.10. Всюду определенная аналитическая, но не целая функция.** Функция

$$f(x) = \frac{1}{1 + x^2}$$

является аналитический по теореме 10.2.9, как отношение двух аналитических функций. Но она не является целой, потому что ее ряд Маклорена

$$\frac{1}{1 + x^2} = (10.2.76) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot x^{2n}$$

сходится только при $|x| < 1$.

§ 3 Приложения степенных рядов

(a) Доказательство зависимости Аксиомы степеней.

Читатель помнит, наверное, что степенное отображение

$$(a, b) \mapsto a^b,$$

вводилось нами в общем случае (то есть для необязательно целых показателей b) с помощью Аксиомы степеней B1 на с.278, зависимость которой от других аксиом мы пообещали доказать позже. Теперь, наконец, мы можем выполнить данное тогда обещание. Собственно доказательству этой аксиомы (на с.616), мы предпошлем 16 вспомогательных утверждений (леммы 10.3.1-10.3.16). Все это время читателю предлагается делать вид, что до сих пор он не глядел на текст в двух колонках и, как следствие не знает ничего об отображении $(a, b) \mapsto a^b$, по крайней мере, для случая нецелого b (случай целых степеней можно считать известным, поскольку для него все необходимые факты были аккуратно доказаны нами еще в главе 2 в теореме о степенном отображении 2.2.17). Только после приведенного здесь доказательства Аксиомы степеней все сказанное нами ранее на этот счет вступит в законную силу, и этой цели посвящен настоящий раздел.

Функция $\exp$**.**

Лемма 10.3.1. *Формула*

$$\exp x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \tag{10.3.101}$$

определяет функцию $\exp$ *всюду на прямой* $\mathbb{R}$.

Доказательство. Радиус сходимости этого степенного ряда равен бесконечности:

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(n+1)!}{n!} \right| = \\ = \lim_{n\to\infty} (n+1) = \infty$$

поэтому ряд сходится всюду на $\mathbb{R}$. □

Лемма 10.3.2. *Функция* $\exp$*, определенная рядом* (10.3.101)*, имеет производную, причем*

$$\frac{\partial}{\partial x} \exp x = \exp x \tag{10.3.102}$$

Доказательство. Продифференцируем ряд (10.3.101) с помощью теоремы 10.1.6:

$$\frac{\partial}{\partial x} \exp x = \frac{\partial}{\partial x} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x^n}{n!} \right) = \\ = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = \exp x$$

□

Лемма 10.3.3. *Функция* $\exp$*, определенная рядом* (10.3.101)*, удовлетворяет следующему равенству и двум тождествам:*

$$\exp 0 = 1, \tag{10.3.103}$$

$$\exp(-x) = \frac{1}{\exp x} \tag{10.3.104}$$

$$\exp(x + y) = \exp x \cdot \exp y, \tag{10.3.105}$$

Доказательство. 1. Первое равенство доказывается простым вычислением:

$$\exp 0 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{0^n}{n!} = \underbrace{\frac{0^0}{0!}}_{1} + \underbrace{\frac{0^1}{1!}}_{0} + \underbrace{\frac{0^2}{2!}}_{0} + ... = 1$$

2. Докажем затем последнее равенство. По определению, функция $\exp$ является целой, и значит (по условию (ii)** на с.610), она совпадает с суммой своего ряда Тейлора в произвольной точке $a \in \mathbb{R}$:

$$\exp(a + y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\exp^{(n)} a}{n!} \cdot y^n \tag{10.3.106}$$

По лемме 10.3.2, производная функции $\exp$ равна самой этой функции, поэтому вторая, третья, и все остальные производные $\exp$ тоже совпадают с $\exp$:

$$\exp^{(n)} = \exp$$

Подставив это в (10.3.106), мы получим:

$$\exp(a + y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\exp^{(n)} a}{n!} \cdot y^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\exp a}{n!} \cdot y^n = \\ = \exp a \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \cdot y^n = \exp a \cdot \exp y$$

От (10.3.105) это отличается только заменой a на x.

3. Второе тождество оказывается следствием первого и третьего:

$$1 = \exp 0 = \exp(x - x) = \exp x \cdot \exp(-x)$$

$$\Downarrow$$

$$\exp(-x) = \frac{1}{\exp x}$$

$\square$

Лемма 10.3.4. *Функция* exp*, определенная рядом* (10.3.101)*, всюду положительна, а в нуле равна единице:*

$$\exp x > 0 \qquad (10.3.107)$$

Доказательство. Предположим, что в какой-то точке a функция exp равняется нулю:

$$\exp a = 0.$$

Тогда:

$$1 = \exp 0 = \exp(a - a) = (10.3.105) = \\ = \underbrace{\exp a}_{0} \cdot \exp(-a) = 0,$$

что, конечно, невозможно. Таким образом, exp – непрерывная функция, определенная всюду на прямой $\mathbb{R}$, нигде не обращающаяся в нуль, а в точке 0 равная единице. Такое возможно только если exp всюду положительна. $\square$

Лемма 10.3.5. *Функция* exp*, определенная рядом* (10.3.101)*, возрастает на* $\mathbb{R}$*:*

$$x < y \quad \Longrightarrow \quad \exp x < \exp y \qquad (10.3.108)$$

Доказательство. Производная этой функции всюду положительна

$$\frac{\partial}{\partial x} \exp x = (10.3.102) = \exp x > (10.3.107) > 0,$$

поэтому по теореме 5.2.7 о строгой монотонности, эта функция должна возрастать. $\square$

Лемма 10.3.6. *Функция* exp*, определенная рядом* (10.3.101)*, имеет следующие пределы на бесконечности:*

$$\lim_{x \to -\infty} \exp x = 0 \qquad \lim_{x \to +\infty} \exp x = +\infty \qquad (10.3.109)$$

Доказательство. Второй предел следует из очевидного неравенства:

$$\forall x > 0 \qquad \exp x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + ... > 1 + x$$

После того, как он доказан, первый предел получается заменой переменных:

$$\lim_{x \to -\infty} \exp x = \begin{pmatrix} y = -x \\ y \to +\infty \end{pmatrix} = \lim_{y \to +\infty} \exp(-y) = \\ = (10.3.104) = \lim_{y \to +\infty} \frac{1}{\exp y} = \left(\frac{1}{\lim_{y \to +\infty} \exp y} \right) = \\ = \left(\frac{1}{+\infty} \right) = 0$$

$\square$

Функция ln.

Лемма 10.3.7. *Функция* exp*, определенная рядом* (10.3.101)*, биективно отображает прямую* $\mathbb{R}$ *на интервал* $(0; +\infty)$

$$\exp : \mathbb{R} \to (0; +\infty) \qquad (10.3.110)$$

и поэтому правило

$$t = \ln x \quad \Longleftrightarrow \quad \exp t = x \qquad (10.3.111)$$

корректно определяет функцию ln*, обратную к* exp*:*

$$\ln : (0; +\infty) \to \mathbb{R} \qquad (10.3.112)$$

Доказательство. 1. Прежде всего, неравенство (10.3.107) означает, что отображение exp действительно переводит $\mathbb{R}$ в $(0; +\infty)$.

2. Далее из условия возрастания (10.3.109) следует, что отображение exp инъективно.

3. Покажем, что exp сюръективно отображает $\mathbb{R}$ на $(0; +\infty)$. Пусть $C \in (0; +\infty)$. Поскольку $\lim_{x \to -\infty} \exp x = 0$ (первое равенство в (10.3.109)), найдется $x \in \mathbb{R}$ такое, что $\exp x < C$. С другой стороны, $\lim_{x \to +\infty} \exp x = +\infty$ (второе равенство в (10.3.109)), поэтому найдется $y \in \mathbb{R}$ такое, что $\exp y > C$. Мы получаем, что

$$\exp x < C < \exp y$$

причем exp – непрерывная функция по теореме 10.1.5. Значит, по теореме Коши о среднем значении 3.3.6, найдется точка $c \in \mathbb{R}$ такая, что

$$\exp c = C$$

Мы получили, что какое ни возьми $C \in (0; +\infty)$, для него найдется точка $c \in \mathbb{R}$, в которой функция exp принимает значение C. Это и означает сюръективность exp как отображения из $\mathbb{R}$ в $(0; +\infty)$.

4. Инъективность и сюръективность вместе означают биективность $\exp : \mathbb{R} \to (0; +\infty)$. $\square$

Лемма 10.3.8. *Функция* ln*, определенная правилом* (10.3.111)*, возрастает:*

$$0 < x < y \quad \Longrightarrow \quad \ln x < \ln y \qquad (10.3.113)$$

Доказательство. Если бы оказалось, что $\ln x \geqslant \ln y$, то, в силу возрастания exp, мы получили бы

$$\ln x \geqslant \ln y$$

$$\Downarrow$$

$$\underbrace{\exp(\ln x)}_{x} \geqslant \underbrace{\exp(\ln y)}_{y}$$

$$\Downarrow$$

$$x \geqslant y$$

$\square$

Лемма 10.3.9. *Функция* ln, *определенная правилом* (10.3.111), *удовлетворяет следующему равенству и двум тождествам:*

$$\ln 1 = 0, \tag{10.3.114}$$

$$\ln \frac{1}{x} = -\ln x \tag{10.3.115}$$

$$\ln(x \cdot y) = \ln x + \ln y, \tag{10.3.116}$$

Доказательство. Первое равенство следует непосредственно из определения (10.3.111):

$$\exp 0 = (10.3.103) = 1 \qquad \Longleftrightarrow \qquad 0 = \ln 1$$

Чтобы доказать второе, достаточно вычислить значения функции exp в обеих его частях:

$$\exp\left(\ln\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x} = \frac{1}{\exp(\ln x)} = \\ = (10.3.104) = \exp(-\ln x)$$

Поскольку exp – инъективное отображение, равенство $\exp\left(\ln\frac{1}{x}\right) = \exp(-\ln x)$ означает, что аргументы у exp должны быть равны: $\ln\frac{1}{x} = -\ln x$.

Точно так же доказывается последнее равенство:

$$\exp\left(\ln(x\cdot y)\right) = x\cdot y = \exp(\ln x)\cdot\exp(\ln y) = \\ = (10.3.105) = \exp(\ln x + \ln y)$$

Опять, поскольку exp – инъективное отображение, равенство $\exp\left(\ln(x\cdot y)\right) = \exp(\ln x + \ln y)$ возможно только если аргументы у exp равны: $\ln(x\cdot y) = \ln x + \ln y$. □

Определение степеней a^b и доказательство Аксиомы степеней. Теперь мы можем определить степенное отображение $(a,b) \mapsto a^b$. В его определении участвует отображение $\operatorname{sgn}_2 : \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{N}-1} \to \{-1;+1\}$, которое мы когда-то давно задавали формулой (2.2.349):

$$a^b := \begin{cases} \exp(b\cdot\ln a), & a>0 \\ 0, & a=0,\ b>0 \\ 1, & a=0,\ b=0 \\ \operatorname{sgn}_2 b\cdot\exp(b\cdot\ln|a|), & a<0,\ b\in\frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{N}-1} \end{cases} \tag{10.3.117}$$

Напомним, что еще в главе 2 (формула (2.1.204)) мы условились символом $a\vee b$ обозначать операцию взятия максимума двух чисел:

$$a\vee b = \max\{a,b\}$$

Такая запись позволяет сделать более наглядными (или более "алгебраическими") выкладки, которыми мы займемся в этом пункте.

Лемма 10.3.10. *При* $a\neq 0$ *и* $b\in\frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{N}-1}$ *справедливо тождество:*

$$a^b = \Big(\operatorname{sgn}_2 b\vee\operatorname{sgn} a\Big)\cdot\exp(b\cdot\ln|a|) \tag{10.3.118}$$

Доказательство. Если $a>0$, то мы получаем:

$$a^b = (10.3.117) = \exp(b\cdot\ln a) = \\ = \underbrace{\Big(\operatorname{sgn}_2 b\vee\overbrace{\operatorname{sgn} a}^{1}\Big)}_{1}\cdot\exp(b\cdot\ln\underbrace{|a|}_{a})$$

Если же $a<0$, то

$$a^b = (10.3.117) = \operatorname{sgn}_2 b\cdot\exp(b\cdot\ln|a|) = \\ = \underbrace{\Big(\operatorname{sgn}_2 b\vee\overbrace{\operatorname{sgn} a}^{-1}\Big)}_{\operatorname{sgn}_2 b}\cdot\exp(b\cdot\ln|a|)$$

□

Лемма 10.3.11. *Отображение* $(a,b)\mapsto a^b$, *определенное формулой* (10.3.117), *удовлетворяет показательным законам* (4.1.1)-(4.1.3)*:*

$$a^0 = 1, \tag{10.3.119}$$

$$a^{-x} = \frac{1}{a^x}, \tag{10.3.120}$$

$$a^{x+y} = a^x\cdot a^y \tag{10.3.121}$$

(каждое из этих равенств верно всякий раз, когда обе его части определены).

Доказательство. Здесь нужно рассмотреть несколько случаев.

1. Проверим сначала эти равенства в случае, когда $a>0$. Тогда, во-первых,

$$a^0 = (10.3.117) = \exp(0\cdot\ln a) = \exp 0 = (10.3.103) = 1$$

Во-вторых,

$$a^{-x} = (10.3.117) = \exp(-x\cdot\ln a) = \\ = (10.3.104) = \frac{1}{\exp(x\cdot\ln a)} = (10.3.117) = \frac{1}{a^x}$$

И, в-третьих,

$$a^{x+y} = (10.3.117) = \exp((x+y)\cdot\ln a) = \\ = \exp(x\cdot\ln a + y\cdot\ln a) = (10.3.105) = \\ = \exp(x\cdot\ln a)\cdot\exp(y\cdot\ln a) = (10.3.117) = a^x\cdot a^y$$

2. После этого перейдем к случаю $a=0$. Тогда, во-первых,

$$a^0 = 0^0 = (10.3.117) = 1$$

Во-вторых, в соответствии с определением (10.3.117), выражение 0^{-x} имеет смысл только при $x\leqslant 0$, а и 0^x – только при $x\geqslant 0$. Значит, одновременно то и другое имеет смысл только при $x=0$. Мы получаем, что равенство $0^{-x} = \frac{1}{0^x}$ нужно проверять лишь для случая $x=0$, но тогда оно становится следствием уже отмеченного равенства $0^0=1$:

$$0^{-0} = 0^0 = 1 = \frac{1}{1} = \frac{1}{0^0}$$

В-третьих, выражения 0^{x+y}, 0^x, 0^y имеют смысл при $x \geqslant 0$ и $y \geqslant 0$. Поэтому для доказательства равенства $0^{x+y} = 0^x \cdot 0^y$ придется рассмотреть дополнительно четыре случая:

— если $x = y = 0$, то

$$0^{x+y} = 0^{0+0} = 0^0 = 1 = \\ = 1 \cdot 1 = 0^0 \cdot 0^0 = 0^x \cdot 0^y$$

— если $x = 0$, $y > 0$, то

$$0^{x+y} = 0^{0+y} = 0^y = (10.3.117) = 0 = \\ = 1 \cdot 0 = (10.3.117) = 0^0 \cdot 0^y = 0^x \cdot 0^y$$

— если $x > 0$, $y = 0$, то

$$0^{x+y} = 0^{x+0} = 0^x = (10.3.117) = 0 = \\ = 0 \cdot 1 = (10.3.117) = 0^x \cdot 0^0 = 0^x \cdot 0^y$$

— если $x > 0$, $y > 0$, то

$$0^{x+y} = (10.3.117) = 0 = \\ = 0 \cdot 0 = (10.3.117) = 0^x \cdot 0^y$$

3. Остается случай $a < 0$. Во-первых,

$$a^0 = (10.3.117) = \underbrace{\operatorname{sgn}_2 0}_{1} \cdot \exp(0 \cdot \ln|a|) = \\ = \exp(0) = (10.3.103) = 1$$

Во-вторых, в соответствии с определением (10.3.117), выражения a^{-x} и a^x имеют смысл для $x \in \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{N}-1}$. В этом случае получается:

$$a^{-x} = (10.3.117) = \operatorname{sgn}_2(-x) \cdot \exp(-x \cdot \ln|a|) = \\ = (2.2.351), (10.3.104) = \operatorname{sgn}_2 x \cdot \frac{1}{\exp(x \cdot \ln|a|)} = \\ = (2.2.350) = \frac{1}{\operatorname{sgn}_2 x \cdot \exp(x \cdot \ln|a|)} = (10.3.117) = \frac{1}{a^x}$$

В-третьих, выражения a^{x+y}, a^x, a^y имеют смысл при $x, y \in \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{N}-1}$, и мы получаем:

$$a^{x+y} = (10.3.117) = \\ = \operatorname{sgn}_2(x+y) \cdot \exp((x+y) \cdot \ln|a|) = \\ = \operatorname{sgn}_2(x+y) \cdot \exp(x \cdot \ln|a| + y \cdot \ln|a|) = \\ = (2.2.352), (10.3.105) = \\ = \operatorname{sgn}_2 x \cdot \operatorname{sgn}_2 y \cdot \exp(x \cdot \ln|a|) \cdot \exp(y \cdot \ln|a|) = \\ = \underbrace{\operatorname{sgn}_2 x \cdot \exp(x \cdot \ln|a|)}_{a^x} \cdot \underbrace{\operatorname{sgn}_2 y \cdot \exp(y \cdot \ln|a|)}_{a^y} = \\ = (10.3.117) = a^x \cdot a^y$$

□

Лемма 10.3.12. *Отображение* $(a, b) \mapsto a^b$, *определенное формулой* (10.3.117), *удовлетворяет степенным законам* (4.1.4)-(4.1.6):

$$1^b = 1, \qquad \left(\frac{1}{x}\right)^b = \frac{1}{x^b}, \qquad (x \cdot y)^b = x^b \cdot y^b \tag{10.3.122}$$

(каждое из этих равенств верно всякий раз, когда обе его части определены).

Доказательство. 1. Первое равенство имеет смысл при любом $b \in \mathbb{R}$, и мы получаем:

$$1^b = (10.3.117) = \exp(b \cdot \ln 1) = (10.3.114) = \\ = \exp(b \cdot 0) = \exp 0 = (10.3.103) = 1$$

2. Для доказательства второго тождества нужно рассмотреть три случая:

— если $x > 0$, то $b \in \mathbb{R}$, и

$$\left(\frac{1}{x}\right)^b = (10.3.117) = \exp\left(b \cdot \ln\frac{1}{x}\right) = \\ = (10.3.115) = \exp(-b \cdot \ln x) = (10.3.104) = \\ = \frac{1}{\exp(b \cdot \ln x)} = (10.3.117) = \frac{1}{x^b}$$

— если $x = 0$, то выражение $\frac{1}{x}$ не имеет смысл, поэтому проверять нечего;

— если $x < 0$, то $b \in \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{N}-1}$, и

$$\left(\frac{1}{x}\right)^b = (10.3.117) = \\ = \operatorname{sgn}_2 b \cdot \exp\left(b \cdot \ln\left|\frac{1}{x}\right|\right) = \\ = \operatorname{sgn}_2 b \cdot \exp\left(b \cdot \ln\frac{1}{|x|}\right) = (10.3.115) = \\ = \operatorname{sgn}_2 b \cdot \exp(-b \cdot \ln|x|) = (10.3.104) = \\ = \operatorname{sgn}_2 b \cdot \frac{1}{\exp(b \cdot \ln|x|)} = (2.2.350) = \\ = \frac{1}{\operatorname{sgn}_2 b \cdot \exp(b \cdot \ln|x|)} = (10.3.117) = \frac{1}{x^b}$$

3. Для доказательства третьего тождества приходится рассматривать 6 случаев. Во-первых, нужно отдельно поглядеть, что получается, когда x или y равно нулю:

— если $x = 0$, то чтобы x^b имело смысл, нужно чтобы $b \geqslant 0$, и при этом становится неважно, каким будет y:

1) при $b = 0$ получаем:

$$(x \cdot y)^b = (0 \cdot y)^0 = 0^0 = (10.3.117) = 1 = \\ = 1 \cdot 1 = (10.3.117) = 0^0 \cdot y^0 = x^b \cdot y^b$$

2) при $b > 0$ получаем:

$$(x \cdot y)^b = (0 \cdot y)^b = 0^b = (10.3.117) = 0 = \\ = 0 \cdot y^b = (10.3.117) = 0^b \cdot y^b = x^b \cdot y^b$$

— по тем же причинам при $y = 0$ нужно чтобы $b \geqslant 0$, при этом становится неважно каким будет x, и тождество также выполняется.

После этого остается рассмотреть 4 случая, когда x и y принимают разные знаки:

— если $x > 0$, $y > 0$, то $b \in \mathbb{R}$, и

$$\begin{gathered}(x \cdot y)^b = (10.3.117) = \exp(b \cdot \ln(x \cdot y)) = \\ = (10.3.116) = \exp(b \cdot (\ln x + \ln y)) = \\ = \exp(b \cdot \ln x + b \cdot \ln y) = (10.3.105) = \\ = \exp(b \cdot \ln x) \cdot \exp(b \cdot \ln y) = (10.3.117) = x^b \cdot y^b\end{gathered}$$

— если $x < 0$, $y > 0$, то $b \in \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{N}-1}$, и

$$\begin{gathered}(x \cdot y)^b = (10.3.117) = \operatorname{sgn}_2 b \cdot \exp(b \cdot \ln|x \cdot y|) = \\ = \operatorname{sgn}_2 b \cdot \exp(b \cdot \ln(|x| \cdot y)) = (10.3.116) = \\ = \operatorname{sgn}_2 b \cdot \exp(b \cdot \ln|x| + b \cdot \ln y) = (10.3.105) = \\ = \underbrace{\operatorname{sgn}_2 b \cdot \exp(b \cdot \ln|x|)}_{x^b} \cdot \underbrace{\exp(b \cdot \ln y)}_{y^b} = x^b \cdot y^b\end{gathered}$$

— то же самое, с точностью до очевидных перестановок, получается при $x > 0$, $y < 0$ (тогда опять $b \in \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{N}-1}$);

— наконец, если $x < 0$, $y < 0$, то $b \in \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{N}-1}$, и

$$\begin{gathered}(\overbrace{x \cdot y}^{\substack{0 \\ \wedge}})^b = (10.3.117) = \exp(b \cdot \ln(x \cdot y)) = \\ = \overbrace{(\operatorname{sgn}_2 b)^2}^{1} \cdot \exp(b \cdot \ln(\overbrace{|x| \cdot |y|}^{x \cdot y})) = \\ = (10.3.116) = (\operatorname{sgn}_2 b)^2 \cdot \exp(b \cdot \ln|x| + b \cdot \ln|y|) = \\ = (10.3.105) = \\ = \underbrace{\operatorname{sgn}_2 b \cdot \exp(b \cdot \ln|x|)}_{x^b} \cdot \underbrace{\operatorname{sgn}_2 b \cdot \exp(b \cdot \ln|y|)}_{y^b} = \\ = x^b \cdot y^b\end{gathered}$$

□

Лемма 10.3.13. *Отображение* $(a, b) \mapsto a^b$, *определенное формулой* (10.3.117), *удовлетворяет накопительному закону* (4.1.7)*:*

$$(a^x)^y = a^{x \cdot y} \qquad (a \geqslant 0) \qquad (10.3.123)$$

в следующих случаях:

— *при* $a > 0$ *и* $x, y \in \mathbb{R}$,

— *при* $a = 0$ *и* $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$,

— *при* $a < 0$ *и* $x, y \in \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{N}-1}$.

Доказательство. 1. Пусть $a > 0$ и $x, y \in \mathbb{R}$. Тогда:

$$\begin{gathered}(a^x)^y = (10.3.117) = \exp(y \cdot \ln a^x) = (10.3.117) = \\ = \exp\Big(y \cdot \underbrace{\ln\big(\exp(x \cdot \ln a)\big)}_{x \cdot \ln a}\Big) = \exp(y \cdot x \cdot \ln a) = \\ = (10.3.117) = a^{x \cdot y}\end{gathered}$$

2. Пусть $a = 0$ и $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$. Тогда:

— если $x = 0$, то

$$\begin{gathered}(a^x)^y = (\underbrace{0^0}_{1})^y = 1^y = (10.3.122) = \\ = 1 = (10.3.117) = 0^0 = 0^{0 \cdot y} = a^{x \cdot y}\end{gathered}$$

— если $x > 0$ и $y = 0$, то

$$(a^x)^y = (\underbrace{0^x}_{0})^0 = \underbrace{0^0}_{1} = 0^{x \cdot 0} = a^{x \cdot y}$$

— если $x > 0$ и $y > 0$, то

$$(a^x)^y = (\underbrace{0^x}_{0})^y = \underbrace{0^y}_{0} = 0^{x \cdot y} = a^{x \cdot y}$$

3. Пусть $a < 0$ и $x, y \in \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{N}-1}$. Тогда нужно воспользоваться формулами (10.3.118) и (2.2.353):

$$\begin{gathered}(\underbrace{a}_{\substack{\wedge \\ 0}}{}^x)^y = (10.3.117) = \\ = \Big(\underbrace{\operatorname{sgn}_2 x \cdot \exp(x \cdot \ln|a|)}_{\substack{\not\gtrless \\ 0}}\Big)^y = (10.3.118) = \\ = \Big(\operatorname{sgn}_2 y \ \vee \ \underbrace{\operatorname{sgn}\Big(\operatorname{sgn}_2 x \cdot \exp(x \cdot \ln|a|)\Big)}_{\operatorname{sgn}_2 x}\Big) \cdot \\ \cdot \exp\Big(y \cdot \ln \underbrace{\Big|\operatorname{sgn}_2 x \cdot \exp(x \cdot \ln|a|)\Big|}_{\exp(x \cdot \ln|a|)}\Big) = \\ = \underbrace{\big(\operatorname{sgn}_2 y \ \vee \ \operatorname{sgn}_2 x\big)}_{\substack{\| \\ (2.2.353) \\ \| \\ \operatorname{sgn}_2(y \cdot x)}} \cdot \\ \cdot \exp\Big(y \cdot \underbrace{\ln\Big(\exp(x \cdot \ln|a|)\Big)}_{\substack{\| \\ x \cdot \ln|a|}}\Big) = \\ = \operatorname{sgn}_2(y \cdot x) \cdot \exp\big(y \cdot x \cdot \ln|a|\big) = a^{y \cdot x} = a^{x \cdot y}\end{gathered}$$

□

Лемма 10.3.14. *Отображение* $(a, b) \mapsto a^b$, *определенное формулой* (10.3.117), *удовлетворяет условию сохранения знака* (2.2.279)*:*

$$a > 0 \quad \Rightarrow \quad a^n > 0 \quad (n \in \mathbb{Z}) \qquad (10.3.124)$$

Доказательство.

$$a > 0 \quad \Rightarrow \quad a^n \overset{(10.3.117)}{=} \exp(b \cdot \ln a) \overset{(10.3.107)}{>} 0$$

□

Лемма 10.3.15. *Отображение* $(a,b) \mapsto a^b$, *определенное формулой* (10.3.117), *удовлетворяет условиям монотонности* (4.1.10)-(4.1.11):

$$\Big(b>0 \quad \& \quad 0<x<y\Big) \quad \Longrightarrow \quad 0<x^b<y^b \tag{10.3.125}$$

$$\Big(b<0 \quad \& \quad 0<x<y\Big) \quad \Longrightarrow \quad x^b>y^b>0 \tag{10.3.126}$$

Доказательство. При $b>0$ получаем:

$$0<x<y$$
$$\Downarrow$$
$$\ln x<\ln y$$
$$\Downarrow$$
$$b\cdot\ln x<b\cdot\ln y$$
$$\Downarrow$$
$$\underbrace{\exp(b\cdot\ln x)}_{x^b}<\underbrace{\exp(b\cdot\ln y)}_{y^b}$$

А при $b<0$:

$$0<x<y$$
$$\Downarrow$$
$$\ln x<\ln y$$
$$\Downarrow$$
$$b\cdot\ln x>b\cdot\ln y$$
$$\Downarrow$$
$$\underbrace{\exp(b\cdot\ln x)}_{x^b}>\underbrace{\exp(b\cdot\ln y)}_{y^b}$$

□

Лемма 10.3.16. *Отображение* $(a,b) \mapsto a^b$, *определенное формулой* (10.3.117), *удовлетворяет условиям монотонности* (4.1.12)-(4.1.13):

$$\Big(a>1 \quad \& \quad x<y\Big) \quad \Longrightarrow \quad a^x<a^y \tag{10.3.127}$$

$$\Big(0<a<1 \quad \& \quad x<y\Big) \quad \Longrightarrow \quad a^x>a^y \tag{10.3.128}$$

Доказательство. Если $a>1$, то $\ln a>\ln 1=0$ (поскольку функция ln возрастает), поэтому при умножении на $\ln a$ знак неравенства не меняется:

$$x<y$$
$$\Downarrow$$
$$x\cdot\ln a<y\cdot\ln a$$
$$\Downarrow$$
$$\underbrace{\exp(x\cdot\ln a)}_{a^x}<\underbrace{\exp(y\cdot\ln a)}_{a^y}$$

Если же $0<a<1$, то $\ln a<\ln 1=0$ (поскольку функция ln возрастает), поэтому при умножении на $\ln a$ знак неравенства меняется:

$$x<y$$
$$\Downarrow$$
$$x\cdot\ln a>y\cdot\ln a$$
$$\Downarrow$$
$$\underbrace{\exp(x\cdot\ln a)}_{a^x}>\underbrace{\exp(y\cdot\ln a)}_{a^y}$$

□

Доказательство зависимости Аксиомы B1 на с.278. Формула (10.3.117) определяет отображение $(a,b) \mapsto a^b$ в точности для тех ситуаций, что перечислены в условии P_0 Аксиомы степеней B1. По леммам 10.3.11 и 10.3.12, это отображение удовлетворяет показательным и степенным законам, то есть условию P_1. По лемме 10.3.13, оно удовлетворяет накопительному закону, то есть условию P_2. По лемме 10.3.14, закон сохранения знака (4.1.9) тоже выполняется, а в силу замечания 4.1.4, формула (4.1.8) выполняется автоматически, поэтому ее доказывать не нужно. Наконец, по леммам 10.3.15 и 10.3.16 оно удовлетворяет условиям монотонности P_4. □

(b) Доказательство зависимости Аксиомы тригонометрии.

Наступил момент вспомнить еще об одном важном результате, доказательство которого (как в случае с Аксиомой степеней B1 на с.278) было отложено нами на будущее. Это Аксиома тригонометрии B2 на с.291, с помощью которой мы вводили функции синус и косинус. Теперь мы можем доказать и ее. Мы предпошлем доказательству 11 вспомогательных утверждений (леммы 10.3.17-10.3.27). Здесь (как в случае с Аксиомой степеней B1 на с.278) мы опять предлагаем читателю сделать вид, что до настоящего времени он не глядел на текст в двух колонках и не знает ничего из того, что писалось о синусе и косинусе вплоть до момента, когда мы собственно примемся за доказательство Аксиомы тригонометрии (на с.621). Только в самом доказательстве мы вспомним, что следствия из Аксиомы тригонометрии уже рассматривались ранее нами в иллюстрациях (и из этого будет выводиться единственность функций sin и cos).

Лемма 10.3.17. *Формулы*

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \qquad (10.3.129)$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n}}{(2n)!} \qquad (10.3.130)$$

определяют функции $\sin$ *и* $\cos$ *всюду на прямой* $\mathbb{R}$.

Доказательство. 1. Первый ряд перепишем в виде

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{(x^2)^n}{(2n+1)!} = \\ = x \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{y^n}{(2n+1)!} \Bigg|_{y=x^2}$$

и вычислим радиус сходимости у последнего степенного ряда (от переменной y) по формуле Даламбера:

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(-1)^n \cdot (2n+3)!}{(-1)^{n+1} \cdot (2n+1)!} \right| = \\ = \lim_{n\to\infty} (2n+2)(2n+3) = \infty$$

То есть ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{y^n}{(2n+1)!}$$

сходится при любом y. Значит при подстановке $y = x^2$ получающийся ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{(x^2)^n}{(2n+1)!}$$

тоже сходится независимо от того, какое значение принимает x. После умножения на x получающийся ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

тоже должен сходиться в силу свойства 1° на с.499, каким бы ни был x. Все это означает, что формула (10.3.129) определяет функцию $\sin$ всюду на прямой $\mathbb{R}$.

2. Второй ряд можно переписать так:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n}}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{(x^2)^n}{(2n)!} = \\ = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{y^n}{(2n)!} \Bigg|_{y=x^2}$$

Радиус сходимости последнего степенного ряда будет таким:

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(-1)^n \cdot (2n+2)!}{(-1)^{n+1} \cdot (2n)!} \right| = \\ = \lim_{n\to\infty} (2n+1)(2n+2) = \infty$$

Значит ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{y^n}{(2n)!}$$

сходится при любом y. Как следствие, при подстановке $y = x^2$ получающийся ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{(x^2)^n}{(2n)!}$$

тоже должен сходиться, независимо от того, какое значение принимает x. Мы получаем, что формула (10.3.130) определяет функцию $\cos$ всюду на прямой $\mathbb{R}$. $\square$

Лемма 10.3.18. *Функции* $\sin$ *и* $\cos$, *определенные рядами* (10.3.129)-(10.3.130), *удовлетворяют тождествам:*

$$\sin(-x) = -\sin x \qquad \cos(-x) = \cos x \qquad (10.3.131)$$

Доказательство.

$$\sin(-x) = (10.3.129) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{(-x)^{2n+1}}{(2n+1)!} = \\ = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{-(x^{2n+1})}{(2n+1)!} = \\ = -\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = (10.3.129) = -\sin x$$

$$\cos(-x) = (10.3.130) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{(-x)^{2n}}{(2n)!} = \\ = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n}}{(2n)!} = (10.3.130) = \cos x$$

$\square$

Лемма 10.3.19. *Функции* $\sin$ *и* $\cos$, *определенные рядами* (10.3.129)-(10.3.130), *удовлетворяют равенствам:*

$$\sin 0 = 0 \qquad \cos 0 = 1 \qquad (10.3.132)$$

Доказательство.

$$\sin 0 = (10.3.129) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{0^{2n+1}}{(2n+1)!} = \\ = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot 0 = 0$$

$$\cos 0 = (10.3.130) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \cdot \frac{0^{2n}}{(2n)!} = \\ = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \cdot \frac{0^{2n}}{(2n)!} = \underbrace{(-1)^0 \cdot \frac{0^{2\cdot 0}}{(2\cdot 0)!}}_{1} + \\ + \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \cdot \frac{0^{2n}}{(2n)!}}_{0} = 1$$

□

Лемма 10.3.20. *Функции* sin *и* cos*, определенные рядами* (10.3.129)-(10.3.130)*, имеют следующие производные:*

$$\frac{\partial}{\partial x}\sin x = \cos x \qquad \frac{\partial}{\partial x}\cos x = -\sin x \qquad (10.3.133)$$

Доказательство.

$$\frac{\partial}{\partial x}\sin x = (10.3.129) = \\ = \frac{\partial}{\partial x}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \\ = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \cdot \frac{\partial}{\partial x}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \\ = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \cdot \frac{(2n+1)\cdot x^{2n}}{(2n+1)!} = \\ = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \cdot \frac{x^{2n}}{(2n)!} = \cos x$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\cos x = (10.3.130) = \\ = \frac{\partial}{\partial x}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \cdot \frac{x^{2n}}{(2n)!} = \\ = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \cdot \frac{\partial}{\partial x}\frac{x^{2n}}{(2n)!} = \\ = (-1)^n \cdot 0 + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \cdot \frac{(2n)\cdot x^{2n-1}}{(2n)!} = \\ = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \cdot \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} = \begin{pmatrix}\text{замена:}\\ k=n-1\\ n=k+1\end{pmatrix} = \\ = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1} \cdot \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = \\ = -\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \cdot \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = -\sin x$$

□

Лемма 10.3.21. *Функции* sin *и* cos*, определенные рядами* (10.3.129)-(10.3.130)*, удовлетворяют тождествам:*

$$\sin(x+y) = \sin x \cdot \cos y + \cos x \cdot \sin y \quad (10.3.134)$$
$$\cos(x+y) = \cos x \cdot \cos y - \sin x \cdot \sin y \quad (10.3.135)$$

Доказательство. Зафиксируем какое-нибудь число $a \in \mathbb{R}$ и рассмотрим три функции:

$$F(x) = \sin(x+a) - \sin x \cdot \cos a - \cos x \cdot \sin a \\ G(x) = \cos(x+a) - \cos x \cdot \cos a + \sin x \cdot \sin a \\ H(x) = F(x)^2 + G(x)^2$$

Заметим две вещи: во-первых,

$$\begin{cases} F(0) = \sin a - \sin 0 \cdot \cos a - \cos 0 \cdot \sin a = 0 \\ G(0) = \cos a - \cos 0 \cdot \cos a + \sin 0 \cdot \sin a = 0 \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$H(0) = F(0)^2 + G(0)^2 = 0$$

И, во-вторых,

$$\begin{cases} F'(x) = \cos(x+a) - \cos x \cdot \cos a + \\ \qquad + \sin x \cdot \sin a = G(x) \\ G'(x) = -\sin(x+a) + \sin x \cdot \cos a + \\ \qquad + \cos x \cdot \sin a = -F(x) \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$H'(x) = 2\cdot F(x)\cdot F'(x) + 2\cdot G(x)\cdot G'(x) = \\ = 2\cdot F(x)\cdot G(x) - 2\cdot G(x)\cdot F(x) = 0$$

Вместе это означает, что функция H должна быть тождественно равна нулю, а значит F и G тоже тождественно равны нулю:

$$H(x) = F(x)^2 + G(x)^2 \equiv 0$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} F(x) \equiv 0 \\ G(x) \equiv 0 \end{cases}$$

Заменяя a на y, мы из последних тождеств получаем (10.3.134)-(10.3.135). □

Лемма 10.3.22. *Функции* sin *и* cos*, определенные рядами* (10.3.129)-(10.3.130)*, удовлетворяют тождеству:*

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \qquad (10.3.136)$$

Доказательство. Подставив $y = -x$ в (10.3.135), мы получим:

$$1 = (10.3.132) = \cos 0 = \cos(x-x) = \\ = \cos x \cdot \cos(-x) - \sin x \cdot \sin(-x) = \\ = (10.3.131) = \cos^2 x + \sin^2 x$$

□

Лемма 10.3.23. *Функция* sin*, определенная рядом* (10.3.129)*, строго положительна на интервале* $(0,2)$*:*

$$\forall x \in (0,2) \qquad \sin x > 0$$

Доказательство. Перепишем ряд, определяющий sin таким образом:

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \\ = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots = \\ = x \cdot \left(1 - \frac{x^2}{2 \cdot 3}\right) - \frac{x^5}{5!} \cdot \left(1 - \frac{x^2}{6 \cdot 7}\right) + \ldots = \\ = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{4k+1}}{(4k+1)!} \cdot \left(1 - \frac{x^2}{(4k+3)\cdot(4k+4)}\right)$$

И заметим, что при $x \in [0,2]$ множитель в скобках в последнем ряде положителен:

$$x \in [0,2]$$

$$\Downarrow$$

$$x^2 \leqslant 4 < (4k+3)\cdot(4k+4) \qquad (k \in \mathbb{Z}_+)$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{x^2}{(4k+3)\cdot(4k+4)} < 1 \qquad (k \in \mathbb{Z}_+)$$

$$\Downarrow$$

$$1 - \frac{x^2}{(4k+3)\cdot(4k+4)} > 0 \qquad (k \in \mathbb{Z}_+) \tag{10.3.137}$$

Отсюда следует, что при $x \in (0,2)$ в полученном ряде все слагаемые тоже положительны, и значит

$$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{4k+1}}{(4k+1)!} \cdot \left(1 - \frac{x^2}{(4k+3)\cdot(4k+4)}\right) > 0$$

□

Лемма 10.3.24. *Функция* cos, *определенная рядом* (10.3.130), *имеет на промежутке* $(0,2)$ *ровно один нуль:*

$$\exists!\ a \in (0,2) \qquad \cos a = 0 \tag{10.3.138}$$

Доказательство. Перепишем ряд, определяющий cos, иначе:

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n}}{(2n)!} = \\ = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \ldots = \\ = 1 - \frac{x^2}{2!} \cdot \left(1 - \frac{x^2}{3 \cdot 4}\right) - \frac{x^6}{6!} \cdot \left(1 - \frac{x^2}{7 \cdot 8}\right) + \ldots = \\ = 1 - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{4k+2}}{(4k+2)!} \cdot \left(1 - \frac{x^2}{(4k+3)\cdot(4k+4)}\right)$$

В силу (10.3.137), при $x \in [0,2]$ множитель в скобках в последнем ряде положителен, поэтому слагаемые в этом ряду неотрицательны. Значит, cos на отрезке $x \in [0,2]$ можно оценить сверху, оборвав последний ряд после первого слагаемого:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{4k+2}}{(4k+2)!} \cdot \left(1 - \frac{x^2}{(4k+3)\cdot(4k+4)}\right) \geqslant \\ \geqslant \sum_{k=0}^{0} \frac{x^{4k+2}}{(4k+2)!} \cdot \left(1 - \frac{x^2}{(4k+3)\cdot(4k+4)}\right) = \\ = \frac{x^2}{2!} \cdot \left(1 - \frac{x^2}{3 \cdot 4}\right)$$

$$\Downarrow$$

$$\cos x = 1 - \\ - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{4k+2}}{(4k+2)!} \cdot \left(1 - \frac{x^2}{(4k+3)\cdot(4k+4)}\right) \leqslant \\ \leqslant 1 - \frac{x^2}{2!} \cdot \left(1 - \frac{x^2}{3 \cdot 4}\right)$$

В частности, при $x = 2$ получаем:

$$\cos 2 \leqslant 1 - \frac{2^2}{2!} \cdot \left(1 - \frac{2^2}{3 \cdot 4}\right) = \\ = 1 - \frac{2}{2!} \cdot \left(1 - \frac{1}{3}\right) = -\frac{1}{3} < 0$$

С другой стороны, в силу (10.3.132),

$$\cos 0 = 1$$

Мы получаем, что на отрезке $[0,2]$ функция cos меняет знак. Значит, по теореме Коши о промежуточном значении 3.3.6, она обращается в нуль в некоторой точке $a \in (0,2)$.

Остается показать, что это единственный нуль на $(0,2)$. Действительно, по лемме 10.3.23, производная этой функции отрицательна на интервале $(0,2)$:

$$\frac{\partial}{\partial x} \cos x = -\sin x < 0$$

Значит, по теореме 5.2.7 cos монотонно убывает на интервале $(0,2)$, и поэтому не может дважды обращаться в нуль на нем. □

Лемма 10.3.25. *Точка* $a \in (0,2)$, *определенная условием* (10.3.138), *обладает следующими свойствами:*

$$\cos a = 0 \qquad \sin a = 1 \tag{10.3.139}$$

$$\cos 2a = -1 \qquad \sin 2a = 0 \tag{10.3.140}$$

$$\cos 4a = 1 \qquad \sin 4a = 0 \tag{10.3.141}$$

Доказательство. Первая строчка:

$$\cos a = 0$$
$$\Downarrow$$
$$\sin^2 a = 1 - \cos^2 a = 1$$
$$\Downarrow$$
$$\left[\begin{array}{l} \sin a = 1 \\ \sin a = -1 \quad \leftarrow \text{невозможно, в силу леммы 10.3.23} \end{array}\right]$$
$$\Downarrow$$
$$\sin a = 1$$

Вторая строчка:

$$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 0 - 1 = -1,$$

$$\sin 2a = 2 \cdot \sin a \cdot \cos a = 2 \cdot 1 \cdot 0 = 0$$

Третья строчка:

$$\cos 4a = \cos^2 2a - \sin^2 2a = 0 - 1 = -1,$$

$$\sin 2a = 2 \cdot \sin a \cdot \cos a = 2 \cdot 1 \cdot 0 = 0$$

□

Лемма 10.3.26. *Число* $4a$, *где* $a \in (0, 2)$ *определено условием* (10.3.138), *является периодом для функций* sin *и* cos, *определенных рядами* (10.3.129)-(10.3.130)*:*

$$\sin(x + 4a) = \sin x, \qquad \cos(x + 4a) = \cos x$$

Доказательство. Здесь просто применяется (10.3.141):

$$\sin(x + 4a) = \sin x \cdot \underbrace{\cos 4a}_{1} + \cos x \cdot \underbrace{\sin 4a}_{0} = \sin x$$

$$\cos(x + 4a) = \cos x \cdot \underbrace{\cos 4a}_{1} - \sin x \cdot \underbrace{\sin 4a}_{0} = \cos x$$

□

Лемма 10.3.27. *При* $x \in (0; 1)$ *для функций* sin *и* cos, *определенных рядами* (10.3.129)-(10.3.130) *выполняется следующее тройное неравенство:*

$$0 < x \cos x < \sin x < x. \qquad (10.3.142)$$

Доказательство. Здесь всюду используется прием, который мы применяли при доказательстве леммы 10.3.23 – нужно представить ряд, которым записывается функция, в удобном для оценок виде.

1. Первое неравенство:

$$x \cdot \cos x = x \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n}}{(2n)!} =$$
$$= x - \frac{x^3}{2!} + \frac{x^5}{4!} - \frac{x^7}{6!} + ... =$$
$$= x \cdot \left(1 - \frac{x^2}{2}\right) + \frac{x^5}{4!} \cdot \left(1 - \frac{x^2}{5 \cdot 6}\right) + ... =$$
$$= x \cdot \underbrace{\left(1 - \frac{x^2}{2}\right)}_{\substack{\vee \\ 0, \\ \text{при } x \in (0,1)}} +$$
$$+ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{4k+1}}{(4k)!} \cdot \underbrace{\left(1 - \frac{x^2}{(4k+1) \cdot (4k+2)}\right)}_{\substack{\vee \\ 0, \\ \text{при } x \in (0,1)}} > 0$$

2. Второе неравенство:

$$\sin x - x \cdot \cos x =$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} - x \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n}}{(2n)!} =$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} - \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{(2n)!} =$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \left(\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} - \frac{x^{2n+1}}{(2n)!}\right) =$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \cdot \Big(1 - (2n+1)\Big) =$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \cdot 2n =$$
$$= 0 + \frac{x^3}{3!} \cdot 2 - \frac{x^5}{5!} \cdot 4 + \frac{x^7}{7!} \cdot 6 - \frac{x^9}{9!} \cdot 8 + ... =$$
$$= \frac{x^3}{3!} \cdot \left(2 - \frac{x^2}{5}\right) + \frac{x^7}{7!} \cdot \left(6 - \frac{x^2}{9} \cdot 8\right) + ... =$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{4k+3}}{(4k+3)!} \cdot \underbrace{\left((4k+2) - \frac{x^2}{4k+5}\right)}_{\substack{\vee \\ 0, \\ \text{при } x \in (0,1)}} > 0$$

3. Третье неравенство:

$$x - \sin x = x - \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} =$$
$$= \frac{x^3}{3!} - \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} - \frac{x^9}{9!} + ... =$$
$$= \frac{x^3}{3!} \cdot \left(1 - \frac{x^2}{4 \cdot 5}\right) + \frac{x^7}{7!} \cdot \left(1 - \frac{x^2}{8 \cdot 9}\right) + ... =$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{4k+3}}{(4k+3)!} \cdot \underbrace{\left(1 - \frac{x^2}{(4k+4) \cdot (4k+5)}\right)}_{\substack{\vee \\ 0, \\ \text{при } x \in (0,1)}} > 0$$

□

Доказательство зависимости Аксиомы B2. 1. Лемма 10.3.17 определяет функции sin и cos всюду на числовой прямой $\mathbb{R}$, а по лемме 10.3.26 эти функции являются периодическими. Это доказывает условие T_0 Аксиомы тригонометрии.

2. Условие T_1 доказывается леммами 10.3.21 и 10.3.22.

3. Условие T_1 доказывается леммой 10.3.27.

4. Остается заметить, что единственность функций sin и cos, удовлетворяющих условиям T_0-T_1 Аксиомы тригонометрии, уже доказана: в иллюстративном тексте мы, последовательно выводя следствия из Аксиомы B2, получили, что если какие-то функции sin и cos удовлетворяют условиям T_0-T_2 Аксиомы B2, то они автоматически должны описываться рядами (10.2.85) и (10.2.86), или, что то же самое, рядами (10.3.129)-(10.3.130). □

(c) Значение числа π

В заключение разговора о степенных рядах и аналитических функциях отметим еще одно приложение этой теории – формулу для нахождения числа π, которую мы обещали читателю еще на с.291, когда определяли это число.

Предложение 10.3.28. *Число π представимо в виде суммы числового ряда формулой*

$$\pi = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 4}{2n+1}, \tag{10.3.143}$$

и для всякого $N \in \mathbb{N}$ удовлетворяет оценке

$$\left| \pi - \sum_{n=0}^{N} \frac{(-1)^n \cdot 4}{2n+1} \right| \leqslant \frac{4}{2N+3} \tag{10.3.144}$$

или, что то же самое, оценке

$$\sum_{n=0}^{N} \frac{(-1)^n \cdot 4}{2n+1} - \frac{4}{2N+3} < \pi < \sum_{n=0}^{N} \frac{(-1)^n \cdot 4}{2n+1} + \frac{4}{2N+3} \tag{10.3.145}$$

Доказательство. Рассмотрим функциональный ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \qquad x \in [0,1] \tag{10.3.146}$$

Если обозначить $b_n(x) = \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$, то при $x \in [0,1]$ это будет неотрицательная невозрастающая последовательность

$$b_0(x) \geqslant b_1(x) \geqslant b_2(x) \geqslant ... \geqslant 0$$

стремящаяся к нулю равномерно на $[0,1]$:

$$||b_n||_{[0,1]} = \frac{1}{2n+1} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

То есть ряд (10.3.146) удовлетворяет условиям теоремы 9.1.6 (признак Лейбница равномерной сходимости), и значит, он равномерно сходится на отрезке $[0,1]$. Обозначим его сумму буквой f:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \qquad x \in [0,1]$$

Как сумма равномерно сходящегося ряда из непрерывных функций, функция f должна быть непрерывна на отрезке $[0,1]$. С другой стороны, в силу тождества (10.1.25), функция f совпадает с функцией arctg на полуинтервале $[0,1)$:

$$\forall x \in [0,1) \qquad \operatorname{arctg} x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = f(x)$$

При этом, как мы знаем, функция arctg непрерывна на $\mathbb{R}$ (и значит на $[0,1]$) в силу предложения 4.1.46. Отсюда следует, что функции f и arctg совпадают в точке 1:

$$\operatorname{arctg} 1 = \lim_{x\to 1-0} \operatorname{arctg} x = \lim_{x\to 1-0} f(x) = f(1)$$

Теперь мы получаем:

$$\underbrace{\frac{\pi}{4} = \operatorname{arctg} 1}_{\substack{\text{по определению} \\ \text{арктангенса (4.1.124)}}} = f(1) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1}\Big|_{x=1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{2n+1}$$

Умножая это на 4, мы получим формулу (10.3.143), а из оценки остатка знакочередующегося ряда (8.2.52) получаем оценку (10.3.144). □

! 10.3.1. Как и в случае с числом Непера e, значение которого, как мы помним оценивались с помощью неравенства (3.2.99), значения π также можно оценивать, используя теперь неравенство (10.3.145), однако эти два случая качественно различаются тем, что нужная точность для π достигается гораздо медленнее, чем для e. Например, для вычисления первых двух знаков после запятой для π нужно брать сумму 1000 слагаемых: во-первых,

$$\frac{4}{2\cdot 1000+3} = 0,0019970...$$
$$\Downarrow$$
$$0,001 < \frac{4}{2\cdot 1000+3} < 0,002$$
$$\Downarrow$$
$$-0,002 < -\frac{4}{2\cdot 1000+3} < -0,001$$

во-вторых,

$$\sum_{n=0}^{1000} \frac{(-1)^n\cdot 4}{2n+1} = 3,14259165...$$
$$\Downarrow$$
$$3,142 < \sum_{n=0}^{1000} \frac{(-1)^n\cdot 4}{2n+1} < 3,143$$

и вместе это дает

$$3,140 = 3,142 - 0,002 < \sum_{n=0}^{1000} \frac{(-1)^n\cdot 4}{2n+1} - \frac{4}{2\cdot 1000+3} < \pi <$$
$$< \sum_{n=0}^{1000} \frac{(-1)^n\cdot 4}{2n+1} - \frac{4}{2\cdot 1000+3} <$$
$$< 3,142 + 0,002 = 3,144$$
$$\Downarrow$$
$$\boxed{3,14 < \pi < 3,15} \qquad (10.3.147)$$
$$\Downarrow$$
$$\boxed{\pi = 3,14...} \qquad (10.3.148)$$

(d) Числа Фибоначчи

Пример приложения теории степенных рядов, не упомянуть который нельзя, – способ нахождения явных формул для последовательностей, заданных рекуррентно. Мы проиллюстрируем его на последовательности Фибоначчи, описанной нами в примере 3.2.2.

Напомним, что числа Фибоначчи определяются рекуррентными соотношениями (3.2.38):

$$x_1 = x_2 = 1, \quad x_{n+2} = x_{n+1} + x_n, \quad n \in \mathbb{N}$$

Предложение 10.3.29. *Числа Фибоначчи описываются явно формулой*

$$x_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right] \qquad (10.3.149)$$

Доказательство. Рассмотрим производящую функцию этой последовательности:

$$F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \cdot s^n$$

(суммирование начинается с номера $n = 1$; это можно объяснить, например, так: мы будем считать, что $x_0 = 0$). Помножив $F(s)$ на многочлен $s + s^2$, мы получим цепочку:

$$(s+s^2)\cdot F(s) = (s+s^2)\cdot \sum_{n=1}^{\infty} x_n \cdot s^n =$$
$$= \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} x_n \cdot s^{n+1}}_{\text{замена: } n+1=k} + \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} x_n \cdot s^{n+2}}_{\text{замена: } n+2=k} =$$
$$= \sum_{k=2}^{\infty} x_{k-1}\cdot s^k + \sum_{k=3}^{\infty} x_{k-2}\cdot s^k =$$
$$= \underbrace{x_1}_{\substack{\parallel \\ 1}} \cdot s^2 + \sum_{k=3}^{\infty} x_{k-1}\cdot s^k + \sum_{k=3}^{\infty} x_{k-2}\cdot s^k =$$
$$= s^2 + \sum_{k=3}^{\infty} \underbrace{(x_{k-1} + x_{k-2})}_{x_k} \cdot s^k =$$
$$= -s + \underbrace{s+s^2}_{\substack{\parallel \\ x_1\cdot s^1 + x_2\cdot s^2}} + \sum_{k=3}^{\infty} x_k \cdot s^k =$$
$$= -s + \sum_{k=1}^{\infty} x_k \cdot s^k = -s + F(s)$$
$$\Downarrow$$
$$(s+s^2)\cdot F(s) = -s + F(s)$$
$$\Downarrow$$
$$s = (1-s-s^2)\cdot F(s)$$
$$\Downarrow$$
$$F(s) = \frac{s}{1-s-s^2} \qquad (10.3.150)$$

Разложим знаменатель на множители:

$$1 - s - s^2 = -(s-a)(s-b)$$

где

$$a = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}, \quad b = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$$

Заметим попутно, что

$$b - a = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} + \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \sqrt{5} \qquad (10.3.151)$$

$$\frac{1}{a} = -\frac{2}{1+\sqrt{5}} = -\frac{2\cdot(1-\sqrt{5})}{(1+\sqrt{5})\cdot(1-\sqrt{5})} = \\ = -\frac{2\cdot(1-\sqrt{5})}{1-5} = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \quad (10.3.152)$$

$$\frac{1}{b} = -\frac{2}{1-\sqrt{5}} = -\frac{2\cdot(1+\sqrt{5})}{(1-\sqrt{5})\cdot(1+\sqrt{5})} = \\ = -\frac{2\cdot(1+\sqrt{5})}{1-5} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad (10.3.153)$$

Тогда

$$F(s) = \frac{s}{1-s-s^2} = -s\cdot \underbrace{\frac{1}{(s-a)(s-b)}}_{\substack{\text{раскладываем}\\ \text{на простейшие дроби}\\ \text{по правилам на с.411}}} =$$

$$= -s\cdot\left(\frac{\frac{1}{a-b}}{s-a} + \frac{\frac{1}{b-a}}{s-b}\right) = \frac{s}{b-a}\cdot\left(\frac{1}{s-b} - \frac{1}{s-a}\right) =$$

$$= \frac{s}{b-a}\cdot\left(\frac{1}{a-s} - \frac{1}{b-s}\right) =$$

$$= \frac{s}{b-a}\cdot\left(\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{1-\frac{s}{a}} - \frac{1}{b}\cdot\frac{1}{1-\frac{s}{a}}\right) = (10.2.75) =$$

$$= \frac{s}{b-a}\cdot\left(\frac{1}{a}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{s}{a}\right)^n - \frac{1}{b}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{s}{b}\right)^n\right) =$$

$$= \frac{s}{b-a}\cdot\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{s^n}{a^{n+1}} - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{s^n}{b^{n+1}}\right) =$$

$$= \frac{1}{b-a}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{a^{n+1}} - \frac{1}{b^{n+1}}\right)\cdot s^{n+1} = |n+1=k| =$$

$$= \frac{1}{b-a}\cdot\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{a^k} - \frac{1}{b^k}\right)\cdot s^k =$$

$$= (10.3.151), (10.3.152), (10.3.153) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\sum_{k=1}^{\infty}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^k\right]\cdot s^k$$

Выделяя коэффициенты перед s^k, мы теперь получим (10.3.149). □

Глава 11

ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ РЯДЫ

- *Тригонометрическим рядом* называется функциональный ряд вида
$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left\{a_n\cdot\cos\frac{\pi nx}{T}+b_n\cdot\sin\frac{\pi nx}{T}\right\} \tag{11.0.1}$$
Число T называется *полупериодом* этого тригонометрического ряда, а числа a_n и b_n – его *коэффициентами*.

- Частным случаем тригонометрического ряда будет ряд, в котором коэффициенты a_n и b_n найдены по формулам
$$\begin{aligned} a_0&=\frac{1}{T}\int_{-T}^{T}f(x)\ \mathsf{d}\,x,\\ a_n&=\frac{1}{T}\int_{-T}^{T}f(x)\cos\frac{\pi nx}{T}\ \mathsf{d}\,x,\\ b_n&=\frac{1}{T}\int_{-T}^{T}f(x)\sin\frac{\pi nx}{T}\ \mathsf{d}\,x \end{aligned} \tag{11.0.2}$$
где f – некоторая интегрируемая на отрезке $[-T,T]$ функция. Такой тригонометрический ряд называется *рядом Фурье* функции f с полупериодом T. Его коэффициенты (11.0.2) называются *коэффициентами Фурье* функции f, а частичные суммы
$$S_N(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{N}\left\{a_n\cdot\cos\frac{\pi nx}{T}+b_n\cdot\sin\frac{\pi nx}{T}\right\} \tag{11.0.3}$$
– *многочленами Фурье* функции f.

В этой главе нас будет интересовать вопрос, какой должна быть функция f, чтобы быть суммой своего ряда Фурье:
$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left\{a_n\cdot\cos\frac{\pi nx}{T}+b_n\cdot\sin\frac{\pi nx}{T}\right\} \tag{11.0.4}$$
Понятно, что первым необходимым условием для этого должна быть интегрируемость функции f на отрезке $[-T,T]$ (потому что иначе будет непонятно, что такое ряд Фурье для нее, то есть как понимать интегралы (11.0.2)). С другой стороны, функции $x\mapsto\cos\frac{\pi nx}{T}$ и $x\mapsto\sin\frac{\pi nx}{T}$ в тригонометрическом ряде (11.0.1) имеют период $2T$:
$$\cos\frac{\pi n(x+2T)}{T}=\cos\left(\frac{\pi nx}{T}+2\pi n\right)=\cos\frac{\pi nx}{T},\qquad \sin\frac{\pi n(x+2T)}{T}=\sin\left(\frac{\pi nx}{T}+2\pi n\right)=\sin\frac{\pi nx}{T}$$
поэтому, если функция f является суммой своего ряда Фурье (11.0.4), то она тоже должна иметь период $2T$:
$$f(x+2T)=f(x)$$
Отсюда становится понятно, что предметом изучения для нас должны быть периодические функции f, интегрируемые на отрезке $[-T,T]$, где T – период. Всякая такая функция будет интегрируема не только на отрезке $[-T,T]$, но и вообще на любом отрезке $[a,b]\subset\mathbb{R}$, поэтому нам будет удобно употреблять для таких функций следующий термин:

- Функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ называется *локально интегрируемой*, если она интегрируема на каждом отрезке $[a, b] \subset \mathbb{R}$.

§ 1 Сходимость ряда Фурье в среднем квадратичном

Изучение рядов Фурье удобно проводить для случая, когда в качестве полупериода T выбрано число π, потому что тогда формулы (11.0.1) и (11.0.2) упрощаются: тригонометрический ряд (11.0.1) принимает вид

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \Big\{ a_n \cos nx + b_n \sin nx \Big\}, \tag{11.1.5}$$

коэффициенты Фурье (11.0.2) вычисляются по формулам:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \, \mathsf{d}\, x, \quad a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, \mathsf{d}\, x, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, \mathsf{d}\, x \tag{11.1.6}$$

а многочлены Фурье записываются в виде

$$S_N(x) := \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} \Big\{ a_n \cos nx + b_n \sin nx \Big\} \tag{11.1.7}$$

(здесь a_n и b_n – коэффициенты Фурье (11.1.6)).

В соответствии с этим мы будем всюду далее до теоремы 11.2.16 рассматривать локально интегрируемые 2π-периодические функции (и их ряды Фурье с полупериодом π). Множество всех таких функций удобно обозначить каким-нибудь символом:

- Символом $\mathcal{R}(\pi)$ мы обозначаем множество всех локально интегрируемых функций с полупериодом π на $\mathbb{R}$.

(a) Основная теорема

- Пусть $f \in \mathcal{R}(\pi)$, то есть f – локально интегрируемая функция с полупериодом π на $\mathbb{R}$. Поскольку f интегрируема на отрезке $[-\pi, \pi]$, по свойству 8^0 на с.435 ее квадрат $f^2 = |f|^2$ тоже интегрируем на отрезке $[-\pi, \pi]$. Значит, определено число

$$\|f\| = \sqrt{\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 \, \mathsf{d}\, x} \tag{11.1.8}$$

  Оно называется *среднеквадратичной нормой* функции f в пространстве $\mathcal{R}(\pi)$. Слово "норма" употребляется применительно к этой величине потому, что, как мы убедимся ниже на с.627, отображение $f \mapsto \|f\|$ обладает свойствами 1°-3° равномерной нормы, упоминавшимися на с 537 (правда, без условия $\|f\| = 0 \Leftrightarrow f = 0$).

Весь этот параграф посвящен доказательству следующего фундаментального факта:

Теорема 11.1.1 (о сходимости ряда Фурье в среднем квадратичном)**.** *Всякая локально интегрируемая 2π-периодическая функция f на прямой $\mathbb{R}$ единственным образом представима в виде суммы в среднем квадратичном тригонометрического ряда с полупериодом π*

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \Big\{ a_n \cos nx + b_n \sin nx \Big\}, \tag{11.1.9}$$

и таким рядом будет ряд Фурье с полупериодом π функции f.

! **11.1.1.** Эти слова следует понимать, как выполнение двух утверждений:

(i) если a_n и b_n – коэффициенты Фурье (11.1.6) функции f, а S_N – ее многочлены Фурье (11.1.7), то справедливо соотношение

$$\|f - S_N\| = \sqrt{\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - S_N(x)|^2 \, \mathsf{d}\, x} \underset{N \to \infty}{\longrightarrow} 0 \tag{11.1.10}$$

(именно так интерпретируется в теореме 11.1.1 равенство (11.1.9)), и

(ii) если a_n и b_n – две последовательности чисел, а S_N – частичные суммы соответствующего им тригонометрического ряда (11.1.5), то из соотношения (11.1.10) следует, что числа a_n и b_n являются коэффициентами Фурье (11.1.6) функции f (а S_N – ее многочленами Фурье (11.1.7)).

Неподготовленному читателю формулировка теоремы 11.1.1, несомненно, покажется обескураживающей, потому что из сказанного до сих пор должно быть решительно непонятно, отчего разложение функции f в ряд Фурье (11.1.9) следует понимать в таком экзотическом смысле (а не, например, как поточечную или равномерную сходимость, к которым мы привыкли в главе 9). Объяснение заключается в том, что теорема 11.1.1 встретилась нам сразу как готовое утверждение, при том, что в математике она появилась в результате длительного процесса осмысления и привыкания к накапливающимся фактам. Дисциплина, которая занимется этими вопросами, называется *гармонический анализ*. В ней давно было замечено, что квадратичная норма (11.1.8) чудесным образом упрощает формулировки и доказательства, и, если в этой науке и есть результат, который можно признать центральным, то им будет как раз теорема о разложении функции в ряд Фурье в смысле среднего квадратичного (а не поточечно или в каком-нибудь другом смысле). Именно поэтому мы начинаем изложение теории рядов Фурье с теоремы 11.1.1. Оставшаяся часть этого параграфа посвящена ее доказательству.

Скалярное произведение функций. Оригинальная идея, приведшая к теореме 11.1.1, заключается в том, чтобы посмотреть на функции из $\mathcal{R}(\pi)$ с несколько неожиданной точки зрения: как на векторы в пространстве со скалярным произведением.

- Пусть $f, g \in \mathcal{R}(\pi)$, то есть f и g – две локально интегрируемые 2π-периодические функции. Поскольку они интегрируемы на отрезке $[-\pi,\pi]$, их произведение $f \cdot g$ тоже будет интегрируемо на $[-\pi,\pi]$ в силу свойства 8^0 на с.435. Поэтому можно рассмотреть величину

$$\langle f, g\rangle = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cdot g(x)\ \mathsf{d}\,x \tag{11.1.11}$$

Она называется *скалярным произведением* функций f и g. Перечислим некоторые

Свойства скалярного произведения

1^0. *Положительная полуопределенность:*

$$\langle f, f\rangle \geqslant 0$$

2^0. *Симметричность:*

$$\langle f, g\rangle = \langle g, f\rangle$$

3^0. *Билинейность:*

$$\langle \alpha\cdot f + \beta\cdot g, h\rangle = \alpha\cdot\langle f, h\rangle + \beta\cdot\langle g, h\rangle$$

Доказательство. Эти свойства очевидны, например, третье следует из линейности интеграла:

$$\langle \alpha\cdot f + \beta\cdot g, h\rangle = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\Big\{\alpha\cdot f(x) + \beta\cdot g(x)\Big\}\cdot h(x)\ \mathsf{d}\,x = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\Big\{\alpha\cdot f(x)\cdot h(x) + \beta\cdot g(x)\cdot h(x)\Big\}\ \mathsf{d}\,x =$$
$$= \alpha\cdot\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cdot h(x)\ \mathsf{d}\,x + \beta\cdot\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(x)\cdot h(x)\ \mathsf{d}\,x = \alpha\cdot\langle f, h\rangle + \beta\cdot\langle g, h\rangle$$

□

Еще одно свойство скалярного произведения – формула, связывающая его со среднеквадратичной нормой (11.1.8):

$$\|f\| = \sqrt{\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|^2\ \mathsf{d}\,x} = \sqrt{\langle f, f\rangle} \tag{11.1.12}$$

Теорема 11.1.2 (неравенство Коши-Шварца для функций)**.** *Для любых функций $f, g \in \mathcal{R}(\pi)$ справедливо следующее неравенство, называемое неравенством Коши-Шварца:*

$$\big|\langle f, g\rangle\big| \leqslant \|f\| \cdot \|g\| \tag{11.1.13}$$

Доказательство. Зафиксируем f и g и рассмотрим многочлен второй степени:

$$p(t) = \langle f+tg, f+tg\rangle = \langle f, f\rangle + 2t\langle f, g\rangle + t^2\langle g, g\rangle = \|f\|^2 + 2t\langle f, g\rangle + t^2\|g\|^2$$

Поскольку $\langle f+tg, f+tg\rangle \geqslant 0$, этот многочлен должен при любом значении t быть неотрицателен:

$$p(t) = \|f\|^2 + 2t\langle f, g\rangle + t^2\|g\|^2 \geqslant 0, \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

Значит, он не может иметь двух вещественных корней, и поэтому его дискриминант должен быть неположительным:

$$D = 4\langle f, g\rangle^2 - 4\|f\|^2 \cdot \|g\|^2 \leqslant 0$$
$$\Downarrow$$
$$\langle f, g\rangle^2 \leqslant \|f\|^2 \cdot \|g\|^2$$
$$\Downarrow$$
$$\langle f, g\rangle \leqslant \Big|\langle f, g\rangle\Big| \leqslant \|f\| \cdot \|g\|$$

□

Свойства среднеквадратичной нормы:

1°. *Неотрицательность:*

$$\|f\| \geqslant 0. \tag{11.1.14}$$

2°. *Однородность:*

$$\|\lambda \cdot f\| = |\lambda| \cdot \|f\|, \qquad \lambda \in \mathbb{R} \tag{11.1.15}$$

3°. *Неравенство треугольника:*

$$\|f+g\| \leqslant \|f\| + \|g\|. \tag{11.1.16}$$

4°. *Тождество параллелограмма:*

$$\frac{\|f+g\|^2 + \|f-g\|^2}{2} = \|f\|^2 + \|g\|^2. \tag{11.1.17}$$

Доказательство. Первые два свойства очевидны, докажем неравенство треугольника (11.1.16):

$$\|f+g\| \leqslant \|f\| + \|g\| \quad \Longleftrightarrow \quad \underbrace{\|f+g\|^2}_{\substack{\| \\ \langle f+g, f+g\rangle \\ \| \\ \langle f, f\rangle + 2\langle f, g\rangle + \langle g, g\rangle}} \leqslant \underbrace{\big(\|f\| + \|g\|\big)^2}_{\substack{\| \\ \|f\|^2 + 2\cdot\|f\|\cdot\|g\| + \|g\|^2 \\ \| \\ \langle f, f\rangle + 2\cdot\|f\|\cdot\|g\| + \langle g, g\rangle}} \quad \Longleftrightarrow \quad \underbrace{\langle f, g\rangle \leqslant \|f\| \cdot \|g\|}_{\substack{\uparrow \\ \text{неравенство} \\ \text{Коши-Шварца (11.1.13)}}}$$

Тождество параллелограмма (11.1.17) доказывается прямым вычислением:

$$\frac{\|f+g\|^2 + \|f-g\|^2}{2} = \frac{\|f\|^2 + 2\langle f, g\rangle + \|g\|^2 + \|f\|^2 - 2\langle f, g\rangle + \|g\|^2}{2} = \frac{2\|f\|^2 + 2\|g\|^2}{2} = \|f\|^2 + \|g\|^2$$

□

Теорема 11.1.3 (о непрерывности скалярного произведения)**.** *Если функции $f_n \in \mathcal{R}(\pi)$ стремятся к функции $f \in \mathcal{R}(\pi)$ в смысле среднеквадратичной нормы,*

$$\|f - f_n\| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

то для любой функции $g \in \mathcal{R}(\pi)$

$$\langle f_n, g\rangle \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \langle f, g\rangle$$

Доказательство.

$$\big|\langle f, g\rangle - \langle f_n, g\rangle\big| = \big|\langle f - f_n, g\rangle\big| \leqslant (11.1.13) \leqslant \|f - f_n\| \cdot \|g\| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

□

Ортогональность тригонометрической системы и связь скалярного произведения с коэффициентами Фурье.

- Говорят, что функции f и g из $\mathcal{R}(\pi)$ *ортогональны*, если их скалярное произведение равно нулю:
$$\langle f, g\rangle = 0$$
- Последовательность функций $f_n \in \mathcal{R}(\pi)$ называется *ортогональной системой*, если в ней любые две функции ортогональны:
$$\forall i \neq j \qquad \langle f_i, f_j\rangle = 0$$
- Обозначим символами $\cos_n$ и $\sin_n$ функции
$$\cos_n(x) = \cos nx, \qquad \sin_n(x) = \sin nx \tag{11.1.18}$$
и условимся символом 1 обозначать не только число 1, но и функцию, тождественно равную единице:
$$1(x) = 1, \quad x \in \mathbb{R} \tag{11.1.19}$$
Функции 1, $\cos_n$, $\sin_n$ называются *тригонометрической системой.*

Лемма 11.1.4. *Справедливы следующие формулы, означающие, что тригонометрическая система функций ортогональна:*
$$\langle 1, 1\rangle = 2, \qquad \langle 1, \cos_n\rangle = 0, \qquad \langle 1, \sin_n\rangle = 0, \tag{11.1.20}$$
$$\langle \cos_n, \sin_m\rangle = 0, \qquad \langle \cos_n, \cos_m\rangle = \left\{\begin{matrix} 0, & n \neq m \\ 1, & n = m \end{matrix}\right\}, \qquad \langle \sin_n, \sin_m\rangle = \left\{\begin{matrix} 0, & n \neq m \\ 1, & n = m \end{matrix}\right\} \tag{11.1.21}$$

Доказательство. Это проверяется прямым вычислением с помощью тригонометрических формул, которые мы выводили в § 1 главы 4. Например, для произведения синусов при $n \neq m$ мы получим:
$$\langle \sin_n, \sin_m\rangle = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cdot \sin mx \,\mathsf{d}\, x = (4.1.83) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \{\cos(n-m)x - \cos(n+m)x\} \,\mathsf{d}\, x =$$
$$= \frac{\sin(n-m)x}{2\pi(n-m)}\Big|_{x=-\pi}^{x=\pi} - \frac{\sin(n+m)x}{2\pi(n+m)}\Big|_{x=-\pi}^{x=\pi} = 0$$
А при $n = m$ получаем
$$\langle \sin_n, \sin_n\rangle = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cdot \sin nx \,\mathsf{d}\, x = (4.1.72) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \{1 + \cos 2nx\} \,\mathsf{d}\, x = \frac{2\pi}{2\pi} = 1$$
□

Лемма 11.1.5. *Коэффициенты ряда Фурье произвольной функции $f \in \mathcal{R}(\pi)$ связаны со скалярным произведением следующими формулами:*
$$a_0 = \Big\langle f, 1\Big\rangle, \qquad a_n = \Big\langle f, \cos_n\Big\rangle, \qquad b_n = \Big\langle f, \sin_n\Big\rangle \tag{11.1.22}$$

Доказательство. Эти формулы проверяются простым вычислением. Например,
$$\langle f, \cos_n\rangle = (11.1.11) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cdot \cos_n(x) \,\mathsf{d}\, x = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cdot \cos nx \,\mathsf{d}\, x = a_n$$
□

Лемма 11.1.6. *Многочлены Фурье произвольной функции $f \in \mathcal{R}(\pi)$*
$$S_N = \frac{a_0}{2}\cdot 1 + \sum_{k=1}^{N}\Big\{a_k \cdot \cos_k + b_k \cdot \sin_k\Big\} \tag{11.1.23}$$
имеют те же коэффициенты Фурье порядка не больше N, что и функция f:
$$\begin{aligned} &\Big\langle S_N, 1\Big\rangle = a_0 = \Big\langle f, 1\Big\rangle, \\ &\Big\langle S_N, \cos_n\Big\rangle = a_n = \Big\langle f, \cos_n\Big\rangle, \qquad n \leqslant N \\ &\Big\langle S_N, \sin_n\Big\rangle = b_n = \Big\langle f, \sin_n\Big\rangle, \qquad n \leqslant N \end{aligned} \tag{11.1.24}$$

Доказательство. Действительно,

$$\langle S_N, 1\rangle = \left(\frac{a_0}{2}\cdot 1 + \sum_{k=1}^{N}\Big\{a_k\cos_k + b_k\sin_k\Big\}, 1\right) = \frac{a_0}{2}\cdot\Big\langle 1,1\Big\rangle + \sum_{k=1}^{N}\Big\{a_k\cdot\Big\langle \cos_k, 1\Big\rangle + b_k\cdot\Big\langle \sin_k, 1\Big\rangle\Big\} =$$

$$= (11.1.20) = \frac{a_0}{2}\cdot 2 + \sum_{k=1}^{N}\Big\{a_k\cdot 0 + b_k\cdot 0\Big\} = a_0$$

Аналогично, если $n \leqslant N$, то

$$\langle S_N, \cos_n\rangle = \left(\frac{a_0}{2}\cdot 1 + \sum_{k=1}^{N}\Big\{a_k\cos_k + b_k\sin_k\Big\}, \cos_n\right) =$$

$$= \frac{a_0}{2}\cdot\Big\langle 1, \cos_n\Big\rangle + \sum_{k=1}^{N}\Big\{a_k\cdot\Big\langle \cos_k, \cos_n\Big\rangle + b_k\cdot\Big\langle \sin_k, \cos_n\Big\rangle\Big\} =$$

$$= (11.1.20), (11.1.21) = \frac{a_0}{2}\cdot 0 + \sum_{k=1}^{N}\left\{a_k\cdot\left\{\begin{matrix} 0, & \text{если}\, k\ne n \\ 1, & \text{если}\, k = n\end{matrix}\right\} + b_k\cdot 0\right\} = a_n$$

Точно также доказывается последняя формула из (11.1.24). □

Минимальное свойство многочленов Фурье.

- Если $f, g \in \mathcal{R}(\pi)$, то *расстоянием* от f до g называется величина

$$\|f - g\|$$

Лемма 11.1.7. *Среди всевозможных тригонометрических многочленов P степени N самым близким к функции $f \in \mathcal{R}(\pi)$ по среднеквадратичной норме является ее многочлен Фурье S_N степени N, расстояние до которого равно $\langle f, f\rangle - \frac{a_0^2}{2} - \sum_{n=1}^{N}\Big\{a_n^2 + b_n^2\Big\}$:*

$$\min_P \|f - P\| = \|f - S_N\| = \sqrt{\langle f, f\rangle - \frac{a_0^2}{2} - \sum_{n=1}^{N}\Big\{a_n^2 + b_n^2\Big\}} \qquad (11.1.25)$$

(a_n и b_n – коэффициенты Фурье (11.1.22)).

Доказательство. Зафиксируем f и обозначим

$$P = \frac{\lambda_0}{2} + \sum_{n=1}^{N}\Big\{\lambda_n\cos_n + \mu_n\sin_n\Big\}, \qquad S_N = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N}\Big\{a_n\cos_n + b_n\sin_n\Big\}$$

– здесь числа a_n и b_n вычисляются по формулам (11.1.22), поэтому их мы считаем фиксированными, а числа λ_n и μ_n, наоборот, могут меняться. Тогда:

$$\|f - P\|^2 = \langle f - P, f - P\rangle = \left\langle f - \frac{\lambda_0}{2} - \sum_{n=1}^{N}\Big\{\lambda_n\cos_n + \mu_n\sin_n\Big\}, f - \frac{\lambda_0}{2} - \sum_{n=1}^{N}\Big\{\lambda_n\cos_n + \mu_n\sin_n\Big\}\right\rangle =$$

$$= \langle f, f\rangle + \underbrace{\left\langle \frac{\lambda_0}{2}, \frac{\lambda_0}{2}\right\rangle}_{\substack{\| \\ \frac{\lambda_0^2}{4}\cdot\langle 1,1\rangle}} + \underbrace{\left\langle \sum_{n=1}^{N}\Big\{\lambda_n\cos_n + \mu_n\sin_n\Big\}, \sum_{n=1}^{N}\Big\{\lambda_n\cos_n + \mu_n\sin_n\Big\}\right\rangle}_{\substack{\| \\ \sum_{n=1}^{N}\left\{\lambda_n^2\cdot\langle\cos_n,\cos_n\rangle + \mu_n^2\cdot\langle\sin_n,\sin_n\rangle\right\}}} -$$

$$\underbrace{- 2\cdot\left\langle f, \frac{\lambda_0}{2}\right\rangle}_{\substack{\| \\ \lambda_0\cdot\langle f, 1\rangle}} - 2\cdot\underbrace{\left\langle f, \sum_{n=1}^{N}\Big\{\lambda_n\cos_n + \mu_n\sin_n\Big\}\right\rangle}_{\substack{\| \\ \sum_{n=1}^{N}\left\{\lambda_n\cdot\langle f,\cos_n\rangle + \mu_n\cdot\langle f,\sin_n\rangle\right\}}} - 2\cdot\underbrace{\left\langle \frac{\lambda_0}{2}, \sum_{n=1}^{N}\Big\{\lambda_n\cos_n + \mu_n\sin_n\Big\}\right\rangle}_{\substack{\| \\ 0}} =$$

$$= \langle f,f\rangle + \frac{\lambda_0^2}{4}\cdot\langle 1,1\rangle + \sum_{n=1}^{N}\Big\{\lambda_n^2\cdot\langle\cos_n,\cos_n\rangle + \mu_n^2\cdot\langle\sin_n,\sin_n\rangle\Big\} - \lambda_0\cdot\underbrace{\langle f,1\rangle}_{\substack{(11.1.24)\ \| \\ a_0}} - 2\cdot\sum_{n=1}^{N}\Big\{\lambda_n\cdot\underbrace{\langle f,\cos_n\rangle}_{\substack{(11.1.24)\ \| \\ a_n}} + \mu_n\cdot\underbrace{\langle f,\sin_n\rangle}_{\substack{(11.1.24)\ \| \\ b_n}}\Big\} =$$

$$= \langle f,f\rangle + \frac{\lambda_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{N}\Big\{\lambda_n^2 + \mu_n^2\Big\} - \lambda_0\cdot a_0 - 2\cdot\sum_{n=1}^{N}\Big\{\lambda_n\cdot a_n + \mu_n\cdot b_n\Big\} =$$

$$= \langle f,f\rangle + \underbrace{\frac{\lambda_0^2}{2} - \lambda_0\cdot a_0 + \frac{a_0^2}{2}}_{\substack{\| \\ \frac{(\lambda_0-a_0)^2}{2}}} + \sum_{n=1}^{N}\underbrace{\Big(\lambda_n^2 - 2\cdot\lambda_n\cdot a_n + a_n^2\Big)}_{\substack{\| \\ (\lambda_n-a_n)^2}} + \sum_{n=1}^{N}\underbrace{\Big(\mu_n^2 - 2\cdot\mu_n\cdot b_n + b_n^2\Big)}_{\substack{\| \\ (\mu_n-b_n)^2}} - \frac{a_0^2}{2} - \sum_{n=1}^{N}\Big\{a_n^2 + b_n^2\Big\} =$$

$$= \langle f,f\rangle + \underbrace{\frac{(\lambda_0-a_0)^2}{2} + \sum_{n=1}^{N}(\lambda_n-a_n)^2 + \sum_{n=1}^{N}(\mu_n-b_n)^2}_{\substack{\text{достигает минимума при } \lambda_n=a_n,\ \mu_n=b_n \\ \text{то есть при } P=S_N}} - \frac{a_0^2}{2} - \sum_{n=1}^{N}\Big\{a_n^2 + b_n^2\Big\} \geqslant$$

$$\geqslant \|f-P\|^2\Big|_{P=S_N} = \|f-S_N\|^2 = \langle f,f\rangle - \frac{a_0^2}{2} - \sum_{n=1}^{N}\Big\{a_n^2+b_n^2\Big\}$$

□

Полнота тригонометрической системы.

Лемма 11.1.8. *Для всякой функции $f \in \mathcal{R}(\pi)$ и любого $\varepsilon > 0$ найдется тригонометрический многочлен P, расстояние от которого до f меньше ε:*

$$\|f-P\| < \varepsilon \tag{11.1.26}$$

Доказательство. Обозначим

$$M = \sup_{x\in[-\pi,\pi]} |f(x)|$$

Воспользуемся сначала теоремой 9.2.2, и подберем непрерывную функцию g на $[-\pi,\pi]$ так, чтобы выполнялись условия:

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)-g(x)|\ \mathsf{d}\,x < \frac{\pi\cdot\varepsilon^2}{8M}, \qquad \sup_{x\in[-\pi,\pi]}|g(x)| \leqslant M, \qquad g(-\pi)=g(\pi)$$

Тогда

$$\|f-g\|^2 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)-g(x)|^2\ \mathsf{d}\,x = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\underbrace{|f(x)-g(x)|}_{\substack{\wedge\!\!\| \\ |f(x)|+|g(x)| \\ \wedge\!\!\| \\ 2M}}\cdot|f(x)-g(x)|\ \mathsf{d}\,x \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2M}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)-g(x)|\ \mathsf{d}\,x < \frac{2M}{\pi}\cdot\frac{\pi\cdot\varepsilon^2}{8M} = \frac{\varepsilon^2}{4}$$

$$\Downarrow$$

$$\|f-g\| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Далее заметим, что поскольку функция g непрерывна на $[-\pi,\pi]$ и принимает одинаковые значения на концах этого отрезка, ее можно продолжить до непрерывной 2π-периодической функции на всю прямую $\mathbb{R}$. Тогда воспользовавшись теоремой 9.2.12 мы сможем подобрать тригонометрический многочлен P так, чтобы

$$\sup_{x\in[-\pi,\pi]}|g(x)-P(x)| < \frac{\varepsilon}{2\sqrt{2}}$$

Для него мы получим:

$$\|g-P\|^2 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{|g(x)-P(x)|^2}_{\substack{\wedge \\ \frac{\varepsilon^2}{8}}} \,\mathsf{d}\,x \leqslant \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\varepsilon^2}{8} \,\mathsf{d}\,x = \frac{\varepsilon^2}{4}$$

$$\Downarrow$$

$$\|g-P\| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Вместе получается:

$$\|f-P\| = \|(f-g)+(g-P)\| \leqslant (11.1.16) \leqslant \|f-g\| + \|g-P\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

□

Неравенство Бесселя.

Лемма 11.1.9. *Пусть a_n и b_n – коэффициенты Фурье* (11.1.22) *функции $f \in \mathcal{R}(\pi)$. Тогда числовой ряд*

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \Big\{ a_n^2 + b_n^2 \Big\}$$

сходится, причем его сумма не превосходит величины $\langle f, f\rangle$:

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \Big\{ a_n^2 + b_n^2 \Big\} \leqslant \langle f, f\rangle = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2 \,\mathsf{d}\,x \tag{11.1.27}$$

Доказательство. 1. Докажем следующую формулу:

$$\langle f, S_N\rangle = \langle S_N, S_N\rangle = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{N} \Big\{ a_n^2 + b_n^2 \Big\} \tag{11.1.28}$$

Действительно, с одной стороны,

$$\langle f, S_N\rangle = \left\langle f, \frac{a_0}{2}\cdot 1 + \sum_{k=1}^{N} \Big\{ a_k \cdot \cos_k + b_k \cdot \sin_k \Big\} \right\rangle =$$
$$= \frac{a_0}{2}\cdot \Big\langle f, 1 \Big\rangle + \sum_{k=1}^{N} \Big\{ a_k \cdot \Big\langle f, \cos_k \Big\rangle + b_k \cdot \Big\langle f, \sin_k \Big\rangle \Big\} = (11.1.22) = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{N} \Big\{ a_n^2 + b_n^2 \Big\}$$

А с другой,

$$\langle S_N, S_N\rangle = \left\langle S_N, \frac{a_0}{2}\cdot 1 + \sum_{k=1}^{N} \Big\{ a_k \cdot \cos_k + b_k \cdot \sin_k \Big\} \right\rangle =$$
$$= \frac{a_0}{2}\cdot \Big\langle S_N, 1 \Big\rangle + \sum_{k=1}^{N} \Big\{ a_k \cdot \Big\langle S_N, \cos_k \Big\rangle + b_k \cdot \Big\langle S_N, \sin_k \Big\rangle \Big\} = (11.1.24) = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{N} \Big\{ a_n^2 + b_n^2 \Big\}$$

2. Обозначим

$$R_N = f - S_N$$

и заметим, что S_N и R_N ортогональны:

$$\Big\langle S_N, R_N \Big\rangle = 0 \tag{11.1.29}$$

Действительно,

$$\Big\langle S_N, R_N \Big\rangle = \Big\langle S_N, f - S_N \Big\rangle = \Big\langle S_N, f \Big\rangle - \Big\langle S_N, S_N \Big\rangle = (11.1.28) = 0$$

3. Теперь докажем формулу

$$\Big\langle f,f\Big\rangle=\Big\langle S_N,S_N\Big\rangle+\Big\langle R_N,R_N\Big\rangle \tag{11.1.30}$$

Действительно,

$$\Big\langle f,f\Big\rangle=\Big\langle S_N+R_N,S_N+R_N\Big\rangle=\Big\langle S_N+R_N,S_N\Big\rangle+\Big\langle S_N+R_N,R_N\Big\rangle=$$
$$=\Big\langle S_N,S_N\Big\rangle+\underbrace{\Big\langle R_N,S_N\Big\rangle+\Big\langle S_N,R_N\Big\rangle}_{\substack{\| \\ 0 \\ \text{в силу (11.1.29)}}}+\Big\langle R_N,R_N\Big\rangle=\Big\langle S_N,S_N\Big\rangle+\Big\langle R_N,R_N\Big\rangle$$

4. Из (11.1.30) следует:

$$\Big\langle f,f\Big\rangle=(11.1.30)=\Big\langle S_N,S_N\Big\rangle+\underbrace{\Big\langle R_N,R_N\Big\rangle}_{\substack{\geqslant \ \text{свойство } 1^0 \\ 0}}\geqslant\Big\langle S_N,S_N\Big\rangle+0=(11.1.28)=\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^N\Big\{a_n^2+b_n^2\Big\}$$

то есть,

$$\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^N\Big\{a_n^2+b_n^2\Big\}\leqslant\Big\langle f,f\Big\rangle \tag{11.1.31}$$

Это верно при любом $N\in\mathbb{N}$, поэтому ряд $\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^\infty\Big\{a_n^2+b_n^2\Big\}$ сходится. При этом, автоматически выполняется (11.1.27):

$$\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^\infty\Big\{a_n^2+b_n^2\Big\}=\lim_{N\to\infty}\left(\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^N\Big\{a_n^2+b_n^2\Big\}\right)\leqslant(11.1.31)\leqslant\langle f,f\rangle=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)^2\,\mathsf{d}\,x$$

□

Равенство Парсеваля.

Лемма 11.1.10. *Для всякой функции $f\in\mathcal{R}(\pi)$ выполняется следующее равенство, называемое равенством Парсеваля:*

$$\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^\infty\Big\{a_n^2+b_n^2\Big\}=\langle f,f\rangle=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)^2\,\mathsf{d}\,x \tag{11.1.32}$$

(здесь a_n и b_n – коэффициенты Фурье (11.1.22) *функции f).*

Доказательство. По лемме 11.1.9, ряд в левой части этой формулы должен сходиться, причем его сумма, обозначим ее C, не превосходит величины $\langle f,f\rangle$:

$$\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^\infty\Big\{a_n^2+b_n^2\Big\}=C\leqslant\langle f,f\rangle$$

Наша задача – убедиться, что $C\geqslant\langle f,f\rangle$. Зафиксируем $\varepsilon>0$ и по лемме 11.1.8 подберем тригонометрический многочлен P, для которого выполняется (11.1.26):

$$\|f-P\|<\varepsilon$$

Пусть N – степень этого тригонометрического многочлена. Тогда:

$$\underbrace{\|f-P\|^2}_{\substack{\geqslant\ (11.1.25) \\ \|f-S_N\|^2 \\ \|\ (11.1.25) \\ \langle f,f\rangle-\frac{a_0^2}{2}-\sum_{n=1}^N\left\{a_n^2+b_n^2\right\}}}<\varepsilon^2$$

$$\Downarrow$$

$$\langle f,f\rangle < \frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{N}\Big\{a_n^2+b_n^2\Big\}+\varepsilon^2 \leqslant \frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\Big\{a_n^2+b_n^2\Big\}+\varepsilon^2 = C+\varepsilon^2$$

$$\Downarrow$$

$$\langle f,f\rangle < C+\varepsilon^2$$

Это верно для любого $\varepsilon>0$, значит $\langle f,f\rangle \leqslant C$. □

Доказательство основной теоремы.

Лемма 11.1.11. *Для всякой функции* $f\in\mathcal{R}(\pi)$ *выполняется соотношение* (11.1.10),

$$\|f-S_N\| \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

в котором S_N *– многочлены Фурье* (11.1.7) *функции* f.

Доказательство.

$$\|f-S_N\|^2 \overset{(11.1.25)}{=} \langle f,f\rangle - \underbrace{\left(\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{N}\Big\{a_n^2+b_n^2\Big\}\right)}_{\substack{\downarrow\ \ \overset{N}{\downarrow}\\ \quad\ \ \infty \\ \frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left\{a_n^2+b_n^2\right\} \\ \| \ (11.1.32) \\ \langle f,f\rangle}} \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

□

Лемма 11.1.12. *Пусть* a_n *и* b_n *– две последовательности чисел и*

$$S_N=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{N}\Big\{a_n\cdot\cos_n+b_n\cdot\sin_n\Big\}$$

– последовательность частичных сумм соответствующего им тригонометрического ряда с полупериодом π. *Если функции* S_N *сходятся в среднем квадратичном к некоторой локально интегрируемой* 2π*-периодической функции* f,

$$\|f-S_N\| \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

то числа a_n *и* b_n *являются коэффициентами Фурье* (11.1.6) *функции* f.

Доказательство. Для всякого $k\in\mathbb{N}$

$$\|f-S_N\| \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} 0 \quad \overset{\text{теорема 11.1.3}}{\Longrightarrow} \quad \underbrace{\langle S_N,\cos_k\rangle}_{\substack{\| \\ \left\langle \frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{N}\left\{a_n\cdot\cos_n+b_n\cdot\sin_n\right\},\cos_k\right\rangle \\ \| \\ a_k, \\ \text{при } N\geqslant k}} \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} \langle f,\cos_k\rangle \quad \Longrightarrow \quad a_k=\langle f,\cos_k\rangle$$

и точно также, заменяя $\cos_k$ на $\sin_k$ и на 1, мы получаем равенства

$$b_k=\langle f,\sin_k\rangle,\qquad a_0=\langle f,1\rangle.$$

□

§ 2 Поточечная и равномерная сходимость ряда Фурье

Теорема 11.1.1 о разложении в ряд Фурье локально интегрируемой 2π-периодической функции f ничего не говорит о том, будет ли этот ряд сходиться к функции f поточечно, то есть, можно ли утверждать, что для всякого $x \in \mathbb{R}$ выполняется соотношение

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} \Big\{ a_n \cos nx + b_n \sin nx \Big\} \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} f(x)$$

(где a_n и b_n – коэффициенты Фурье (11.1.6) функции f). Следующий элементарный пример показывает, что это не всегда верно.

◇ **11.2.1.** Рассмотрим функцию

$$f(x) = \left\{ \frac{x}{2\pi} \right\}$$

(взятие дробной части от $\frac{x}{2\pi}$). Она локально интегрируема и имеет период 2π. Вычислим ее коэффициенты Фурье:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left\{ \frac{x}{2\pi} \right\} \, \mathsf{d}\, x = \frac{1}{\pi} \int_{0}^{2\pi} \left\{ \frac{x}{2\pi} \right\} \, \mathsf{d}\, x = \frac{1}{\pi} \int_{0}^{2\pi} \frac{x}{2\pi} \, \mathsf{d}\, x = \frac{x^2}{4\pi^2} \Big|_{x=0}^{x=2\pi} = 1$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{0}^{2\pi} \left\{ \frac{x}{2\pi} \right\} \cdot \cos nx \, \mathsf{d}\, x = \frac{1}{\pi} \int_{0}^{2\pi} \frac{x}{2\pi} \cdot \cos nx \, \mathsf{d}\, x = \frac{1}{2\pi^2 n} \int_{0}^{2\pi} x \, \mathsf{d} \sin nx =$$

$$= \frac{1}{2\pi^2 n} \cdot \underbrace{x \cdot \sin nx \Big|_0^{2\pi}}_{\underset{0}{\shortparallel}} - \frac{1}{2\pi^2 n} \int_{0}^{2\pi} \sin nx \, \mathsf{d}\, x = \frac{1}{2\pi^2 n^2} \cdot \cos nx \Big|_0^{2\pi} = 0$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{0}^{2\pi} \left\{ \frac{x}{2\pi} \right\} \cdot \sin nx \, \mathsf{d}\, x = \frac{1}{\pi} \int_{0}^{2\pi} \frac{x}{2\pi} \cdot \sin nx \, \mathsf{d}\, x = -\frac{1}{2\pi^2 n} \int_{0}^{2\pi n} x \, \mathsf{d} \cos nx =$$

$$= -\frac{1}{2\pi^2 n} \cdot \underbrace{x \cdot \cos nx \Big|_0^{2\pi}}_{\underset{2\pi}{\shortparallel}} + \frac{1}{2\pi^2 n} \int_{0}^{2\pi} \cos nx \, \mathsf{d}\, x = -\frac{1}{\pi n} + \frac{1}{2\pi^2 n^2} \cdot \underbrace{\sin nx \Big|_0^{2\pi}}_{\underset{0}{\shortparallel}} = -\frac{1}{\pi n}$$

Ряд Фурье получается такой:

$$\frac{1}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\pi n} \cdot \sin nx$$

и в точке $x = 0$ он сходится не к значению $f(0)$:

$$\frac{1}{2} - \underbrace{\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{\pi n} \cdot \sin 0}_{\underset{0}{\shortparallel}} \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2} \neq 0 = f(0)$$

Уже из этого примера видно, что если мы хотим, чтобы ряд Фурье сходился к функции f поточечно, то нужно как-то сузить класс изучаемых функций, перейдя от класса $\mathcal{R}(\pi)$ (локально интегрируемых функций с полупериодом π) к каким-то его подклассам. В этом параграфе мы рассмотрим два таких подкласса, для которых поточечная сходимость ряда Фурье сохраняется, хотя и в разных смыслах: это классы кусочно-непрерывных и кусочно-гладких функций с полупериодом π. Попутно мы сформулируем для них теоремы о равномерной сходимости ряда Фурье.

(a) Кусочно-непрерывные и кусочно-гладкие функции на $\mathbb{R}$

- Функция f на прямой $\mathbb{R}$ называется
  - — *кусочно-непрерывной* (на $\mathbb{R}$), если она кусочно непрерывна на любом отрезке[1] $[a, b] \subset \mathbb{R}$; это означает выполнение двух условий:
    - (1) на любом отрезке $[a, b]$ она непрерывна во всех точках, кроме, возможно, конечного набора;

[1]Напомним, что определение кусочно-непрерывной функции на отрезке было дано выше на с. 456.

(2) в каждой точке разрыва $c \in \mathbb{R}$ функция f имеет конечные левый и правый пределы

$$f(c-0) = \lim_{x \to c-0} f(x), \quad f(c+0) = \lim_{x \to c+0} f(x) \tag{11.2.33}$$

— *кусочно-гладкой* (на $\mathbb{R}$), если она кусочно гладкая на любом отрезке[2] $[a, b] \subset \mathbb{R}$; это означает выполнение следующих условий:

(1) на любом отрезке $[a, b]$ она дифференцируема во всех точках, кроме, возможно, конечного набора;

(2) в каждой точке $c \in \mathbb{R}$, где f дифференцируема, ее производная непрерывна,

$$f'(c) = \lim_{x \to c} f'(x) \tag{11.2.34}$$

(3) в каждой точке $c \in \mathbb{R}$, где f не дифференцируема, она обладает следующими свойствами:

(i) f имеет конечные левый и правый пределы

$$f(c-0) = \lim_{x \to c-0} f(x), \quad f(c+0) = \lim_{x \to c+0} f(x) \tag{11.2.35}$$

(ii) f имеет конечные левую и правую производные

$$f'_-(c) = \lim_{x \to c-0} \frac{f(x) - f(c-0)}{x - c}, \quad f'_+(c) = \lim_{x \to c+0} \frac{f(x) - f(c+0)}{x - c} \tag{11.2.36}$$

(iii) при приближении аргумента x к c справа или слева, значение $f'(x)$ стремится соответственно к $f'_-(c)$ или $f'_+(c)$:

$$f'_-(c) = \lim_{x \to c-0} f'(x), \quad f'_+(c) = \lim_{x \to c+0} f'(x) \tag{11.2.37}$$

Из теоремы 7.3.8 следует

Теорема 11.2.1. *Любая кусочно-непрерывная функция f на $\mathbb{R}$ локально интегрируема.*

▷ **11.2.2.** Функция

$$f(x) = \operatorname{sgn} \sin x$$

имеющая график

является 2π-периодической и кусочно-гладкой.

▷ **11.2.3.** Функция

$$f(x) = \arcsin \sin x$$

с графиком

тоже 2π-периодическая и кусочно-гладкая.

◇ **11.2.4.** А функция

$$f(x) = \sqrt{|\sin x|}$$

с графиком

хотя и 2π-периодическая, но не кусочно-гладкая,

[2] Определение кусочно-гладкой функции на отрезке приводилось выше на с. 458.

потому что в точке $x \in \pi\mathbb{Z}$ не имеет односторонних производных.

- Говорят, что кусочно-непрерывная функция f на прямой $\mathbb{R}$ удовлетворяет *тождеству Лебега*, если в каждой точке $x \in \mathbb{R}$ ее значение $f(x)$ равно среднему арифметическому левого и правого пределов в этой точке:

$$f(x) = \frac{f(x-0)+f(x+0)}{2}, \qquad x \in \mathbb{R} \tag{11.2.38}$$

Очевидно, это равенство автоматически выполняется в точках непрерывности, так как в этом случае $f(x-0) = f(x) = f(x+0)$, и значит

$$\frac{f(x-0)+f(x+0)}{2} = \frac{f(x)+f(x)}{2} = f(x)$$

Поэтому тождество (11.2.38) нужно проверять только в точках разрыва функции f.

◇ **11.2.5.** Функция

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{1}{2}, & x = 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$$

с графиком

очевидно, удовлетворяет тождеству Лебега.

◇ **11.2.6.** А наоборот, функция

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x \geqslant 0 \end{cases}$$

с графиком

не удовлетворяет тождеству Лебега.

(b) Суммирование ряда Фурье обычным способом

Теорема 11.2.2 (о поточечной и равномерной сходимости ряда Фурье)**.** *Для всякой кусочно-гладкой 2π-периодической функции f на прямой $\mathbb{R}$ ее ряд Фурье с полупериодом π сходится в каждой точке $x \in \mathbb{R}$ к среднему арифметическому ее левого и правого пределов в этой точке:*

$$\frac{f(x-0)+f(x+0)}{2} = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \Big\{ a_n \cos nx + b_n \sin nx \Big\}, \qquad x \in \mathbb{R}. \tag{11.2.39}$$

В частности, если f удовлетворяет тождеству Лебега (11.2.38)*, то она является поточечной суммой своего ряда Фурье:*

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \Big\{ a_n \cos nx + b_n \sin nx \Big\}, \qquad x \in \mathbb{R}. \tag{11.2.40}$$

Кроме того,

(i) если f – непрерывная (и по-прежнему, кусочно-гладкая и 2π-периодическая) функция на $\mathbb{R}$, то ряд (11.2.40) *сходится к ней на прямой $\mathbb{R}$ равномерно:*[3]

$$\left\| f(x) - \frac{a_0}{2} - \sum_{n=1}^{N} \Big\{ a_n \cos nx + b_n \sin nx \Big\} \right\|_{x\in\mathbb{R}} \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} 0; \tag{11.2.41}$$

[3] Норма $\|\cdot\|_E$ была определена формулой (9.1.6).

(ii) *если f – бесконечно гладкая (и по-прежнему, 2π-периодическая) функция на $\mathbb{R}$, то ряд* (11.2.40) *сходится к ней на прямой $\mathbb{R}$ равномерно по производным:*[4]

$$\forall m \in \mathbb{Z}_+ \qquad \left\| f(x) - \frac{a_0}{2} - \sum_{n=1}^{N} \Big\{ a_n \cos nx + b_n \sin nx \Big\} \right\|_{x\in\mathbb{R}}^{(m)} \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} 0. \qquad (11.2.42)$$

Доказательство этого факта мы разобьем на несколько лемм, и посвятим ему оставшуюся часть этого пункта.

Лемма Римана.

Лемма 11.2.3. *Если функция W интегрируема на отрезке $[a,b]$, то*

$$\int_a^b W(x)\cdot \cos p\ x \ \mathsf{d}\, x \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} 0, \qquad \int_a^b W(x)\cdot \sin p\ x \ \mathsf{d}\, x \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \qquad (11.2.43)$$

Доказательство. Эти соотношения доказываются одинаково, поэтому мы докажем только второе (в действительности, только оно используется при доказательстве теоремы 11.2.2).

1. Прежде всего, нужно заметить, что если функция W постоянна, то утверждение будет очевидно:

$$\left| \int_a^b W(x)\cdot \sin px \ \mathsf{d}\, x \right| = \Bigg| \overbrace{\int_a^b C\cdot \sin px \ \mathsf{d}\, x}^{\substack{\frac{C}{p}\cdot\left(\cos p\ a - \cos p\ b\right) \\ \| \\ -\frac{C}{p}\cdot \cos px\Big|_{x=a}^{x=b} \\ \|}} \Bigg| = \frac{|C|}{p}\cdot \Big| \cos p\ a - \cos p\ b \Big| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{|C|}{p}\cdot \Big(|\cos p\ a| + |\cos p\ b| \Big) \leqslant \frac{|C|}{p}\cdot 2 \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

2. Из этого следует, что если функция W кусочно-постоянна,

$$W(x) = C_i, \qquad x\in (x_{i-1}, x_i)$$

то соотношение также верно:

$$\int_a^b W(x)\cdot \sin px \ \mathsf{d}\, x = \sum_{i=1}^{k} \int_{x_{i-1}}^{x_i} C_i \cdot \sin px \ \mathsf{d}\, x \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

3. Теперь если W – произвольная интегрируемая функция, то для всякого $\varepsilon > 0$ можно по теореме 9.2.1 выбрать кусочно-постоянную функцию g на $[a,b]$ так, чтобы выполнялось

$$\int_a^b |W(x) - g(x)| \ \mathsf{d}\, x < \frac{\varepsilon}{2}$$

Тогда, по уже доказанному, $\int_a^b g(x)\cdot \cos px \ \mathsf{d}\, x \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, и значит можно выбрать P так, чтобы

$$\forall p > P \qquad \left| \int_a^b g(x)\cdot \cos px \ \mathsf{d}\, x \right| < \frac{\varepsilon}{2},$$

В результате, для всякого $p > P$ мы получим:

$$\left| \int_a^b W(x)\cdot \sin px \ \mathsf{d}\, x \right| = \left| \int_a^b \Big(W(x) - g(x) \Big)\cdot \sin px \ \mathsf{d}\, x + \int_a^b g(x)\cdot \sin px \ \mathsf{d}\, x \right| \leqslant$$

[4] Норма $\|\cdot\|_E^{(m)}$ была определена формулой (9.1.47).

$$\leqslant \underbrace{\left|\int_a^b \Big(W(x)-g(x)\Big)\cdot \sin px \;\mathsf{d}\,x\right|}_{\substack{\rotatebox{90}{$\geqslant$} \\ \int_a^b |W(x)-g(x)|\cdot|\sin px| \;\mathsf{d}\,x \\ \rotatebox{90}{$\geqslant$} \\ \int_a^b |W(x)-g(x)| \;\mathsf{d}\,x \\ \rotatebox{90}{$>$} \\ \frac{\varepsilon}{2}}} + \underbrace{\left|\int_a^b g(x)\cdot \sin px \;\mathsf{d}\,x\right|}_{\substack{\rotatebox{90}{$>$} \\ \frac{\varepsilon}{2}}} < \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

Это доказывает второе соотношение в (11.2.43). □

Ядро Дирихле.

- *Ядром Дирихле* называется функция

$$D_N(t) := \frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{N}\cos nt \tag{11.2.44}$$

Свойства ядра Дирихле:

1°. *Ядро Дирихле D_N является четной непрерывной 2π-периодической функцией на $\mathbb{R}$.*

$$D_N(-t)=D_N(t), \qquad D_N(t+2\pi)=D_N(t)$$

2°. *Интеграл по периоду от ядра Дирихле равен π:*

$$\int_{-\pi}^{\pi} D_N(t)\;\mathsf{d}\,t = 2\int_0^{\pi} D_N(t)\;\mathsf{d}\,t=\pi \tag{11.2.45}$$

3°. *Ядро Дирихле удовлетворяет тождеству:*

$$D_N(t)=\begin{cases} N+\frac{1}{2}, & t\in 2\pi\mathbb{Z} \\ \frac{\sin\left(N+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}, & t\notin 2\pi\mathbb{Z}\end{cases} \tag{11.2.46}$$

Доказательство. Свойство 1° вытекает из определения D_N формулой (11.2.44), а формула (11.2.45) доказывается прямым вычислением. Тождество (11.2.46) для точек вида $t=2\pi k$ доказывается вычислением:

$$D_N(2\pi k)=\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{N}\cos(2\pi nk)=\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{N}1=\frac{1}{2}+N$$

а для точек $t\neq 2\pi k$ – умножением на $2\sin\frac{t}{2}$:

$$\left(\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{N}\cos nt\right)\cdot 2\sin\frac{t}{2}=\sin\frac{t}{2}+\sum_{n=1}^{N}2\cos nt\cdot\sin\frac{t}{2}=\sin\frac{t}{2}+\sum_{n=1}^{N}\left(-\sin\left(n-\frac{1}{2}\right)t+\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right)=$$

$$=\underbrace{\sin\frac{t}{2}}+\left(\underbrace{-\sin\frac{t}{2}}+\underbrace{\sin\frac{3t}{2}}\right)+\left(\underbrace{-\sin\frac{3t}{2}}+\underbrace{\sin\frac{5t}{2}}\right)+\ldots+\left(\underbrace{-\sin\left(N-\frac{1}{2}\right)t}+\sin\left(N+\frac{1}{2}\right)t\right)=$$

$$=\sin\left(N+\frac{1}{2}\right)t$$

□

Интегралы Дирихле.

Лемма 11.2.4. *Для всякой 2π-периодической локально интегрируемой функции f ее многочлен Фурье S_N с полупериодом π выражается через ядро Дирихле D_N формулами*

$$S_N(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\cdot D_N(t)\;\mathsf{d}\,t, \qquad x\in\mathbb{R} \tag{11.2.47}$$

$$S_N(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\Big\{f(x+t)+f(x-t)\Big\}\cdot D_N(t)\;\mathsf{d}\,t, \qquad x\in\mathbb{R} \tag{11.2.48}$$

- Интегралы в правых частях формул (11.2.47) и (11.2.48) называются *интегралами Дирихле.*

Доказательство. Сначала (11.2.47):

$$S_N(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{N} \Big\{ a_k \cos kx + b_k \sin kx \Big\} = (11.1.6) =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y)\,\mathrm{d}\,y + \sum_{k=1}^{N} \left\{ \cos kx \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) \cos ky\,\mathrm{d}\,y + \sin kx \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) \sin ky\,\mathrm{d}\,y \right\} =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) \left\{ \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{N} \cos kx \cdot \cos ky + \sin kx \cdot \sin ky \right\} \mathrm{d}\,y = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) \left\{ \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{N} \cos k(y-x) \right\} \mathrm{d}\,y =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) \cdot D(y-x)\,\mathrm{d}\,y = \left| \begin{matrix} y - x = t,\ y = x + t,\ \mathrm{d}\,y = \mathrm{d}\,t \\ y \in [-\pi,\pi] \Leftrightarrow t \in [-\pi - x, \pi - x] \end{matrix} \right| = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi-x}^{\pi-x} f(x+t) \cdot D(t)\,\mathrm{d}\,t =$$

$$= \left(\begin{matrix} \text{интеграл от периодической} \\ \text{функции по периоду равен} \\ \text{интегралу по “сдвинутому периоду”} \end{matrix} \right) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) \cdot D_N(t)\,\mathrm{d}\,t$$

После этого (11.2.47) следует (11.2.48):

$$S_N(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) \cdot D_N(t)\,\mathrm{d}\,t = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{0} f(x+t) \cdot D_N(t)\,\mathrm{d}\,t + \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\pi} f(x+t) \cdot D_N(t)\,\mathrm{d}\,t =$$

$$= \left(\begin{matrix} \text{в первом интеграле} \\ \text{делаем замену} \\ t = -s \end{matrix} \right) = -\frac{1}{\pi} \int_{\pi}^{0} f(x-s) \cdot D_N(-s)\,\mathrm{d}\,s + \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\pi} f(x+t) \cdot D_N(t)\,\mathrm{d}\,t =$$

$$= \left(\begin{matrix} \text{вспоминием, что } D_N \\ \text{– четная функция:} \\ D_N(-s) = D_N(s) \end{matrix} \right) = -\frac{1}{\pi} \int_{\pi}^{0} f(x-s) \cdot D_N(s)\,\mathrm{d}\,s + \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\pi} f(x+t) \cdot D_N(t)\,\mathrm{d}\,t =$$

$$= \left(\begin{matrix} \text{в первом интеграле} \\ \text{переворачиваем} \\ \text{пределы интегрирования} \end{matrix} \right) = \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\pi} f(x-s) \cdot D_N(s)\,\mathrm{d}\,s + \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\pi} f(x+t) \cdot D_N(t)\,\mathrm{d}\,t =$$

$$= \left(\begin{matrix} \text{в первом интеграле} \\ \text{делаем замену} \\ s = t \end{matrix} \right) = \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\pi} f(x-t) \cdot D_N(t)\,\mathrm{d}\,t + \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\pi} f(x+t) \cdot D_N(t)\,\mathrm{d}\,t =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\pi} \Big\{ f(x+t) + f(x-t) \Big\} \cdot D_N(t)\,\mathrm{d}\,t$$

□

Поточечная сходимость ряда Фурье. Мы можем теперь доказать ту часть теоремы 11.2.2, где речь идет о поточечной сходимости:

Лемма 11.2.5. *Для всякой кусочно-гладкой 2π-периодической функции f на прямой $\mathbb{R}$ ее ряд Фурье с полупериодом π сходится в каждой точке $x \in \mathbb{R}$ к среднему арифметическому ее левого и правого пределов в этой точке:*

$$\frac{f(x-0) + f(x+0)}{2} = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \Big\{ a_n \cos nx + b_n \sin nx \Big\}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Доказательство. Пусть f – кусочно-гладкая 2π-периодическая функция. Рассмотрим функции

$$A(t) = \left\{ \begin{matrix} \frac{f(x+t)-f(x+0)}{t}, & t \in (0,\pi] \\ f'_+(0), & t = 0 \end{matrix} \right\}, \quad B(t) = \left\{ \begin{matrix} \frac{f(x-t)-f(x-0)}{-t}, & t \in (0,\pi] \\ f'_-(0), & t = 0 \end{matrix} \right\}$$

Они должны быть кусочно-непрерывны на отрезке $[0,\pi]$, потому что в точке $t = 0$ они непрерывны, а при $t \in (0,\pi]$ они получаются умножением кусочно-непрерывных функций $g(t) = f(x+t) - f(x+0)$ и $h(t) = f(x-t) - f(x-0)$ на непрерывную функцию $\frac{1}{t}$.

Кроме того, если рассмотреть функцию

$$C(t) = \left\{ \begin{matrix} \frac{t}{2\sin\frac{t}{2}} & t \in (0,\pi] \\ 1, & t = 0 \end{matrix} \right\}$$

то она будет непрерывна на отрезке $[0,\pi]$.

Из этого можно сделать вывод, что функция

$$W(t)=\Big\{A(t)-B(t)\Big\}\cdot C(t)$$

кусочно-непрерывна на отрезке $[0,\pi]$.

Теперь рассмотрим разность между $\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$ и частичной суммой $S_N(x)$ ряда Фурье:

$$\begin{aligned}
S_N(x)-\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}&=\\
&=\underbrace{\frac{1}{\pi}\int_0^\pi\Big\{f(x+t)+f(x-t)\Big\}\cdot D_N(t)\ \mathsf{d}\,t}_{\substack{\parallel\ (11.2.48)\\ S_N(x)}}-\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}\cdot\underbrace{\frac{2}{\pi}\int_0^\pi D_N(t)\ \mathsf{d}\,t}_{\substack{\parallel\ (11.2.45)\\ 1}}=\\
&=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi\Big\{f(x+t)+f(x-t)\Big\}\cdot D_N(t)\ \mathsf{d}\,t-\frac{1}{\pi}\int_0^\pi\Big\{f(x+0)+f(x-0)\Big\}\cdot D_N(t)\ \mathsf{d}\,t=\\
&=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi\Big\{f(x+t)+f(x-t)-f(x+0)-f(x-0)\Big\}\cdot D_N(t)\ \mathsf{d}\,t=\\
&=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi\Big\{\Big[f(x+t)-f(x+0)\Big]+\Big[f(x-t)-f(x-0)\Big]\Big\}\cdot D_N(t)\ \mathsf{d}\,t=\\
&=(11.2.46)=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi\Big\{\Big[f(x+t)-f(x+0)\Big]+\Big[f(x-t)-f(x-0)\Big]\Big\}\cdot\frac{\sin\left(N+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}\ \mathsf{d}\,t=\\
&=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi\underbrace{\Big\{\underbrace{\frac{f(x+t)-f(x+0)}{t}}_{\substack{\parallel\\ A(t)}}-\underbrace{\frac{f(x-t)-f(x-0)}{-t}}_{\substack{\parallel\\ B(t)}}\Big\}\cdot\underbrace{\frac{t}{2\sin\frac{t}{2}}}_{\substack{\parallel\\ C(t)}}}_{\substack{\parallel\\ W(t)}}\cdot\sin\left(N+\frac{1}{2}\right)t\ \mathsf{d}\,t=\\
&=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi W(t)\cdot\sin\left(N+\frac{1}{2}\right)t\ \mathsf{d}\,t\underset{N\to\infty}{\longrightarrow}0
\end{aligned}$$

Мы получили нужное соотношение:

$$S_N(x)\underset{N\to\infty}{\longrightarrow}\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$$

□

Дифференцирование ряда Фурье. Если f – непрерывная кусочно-гладкая 2π-периодическая функция на $\mathbb{R}$, то ее производная f' может быть определена не всюду на $\mathbb{R}$ (потому что в некоторых точках на $\mathbb{R}$ функция f может быть недифференцируема). Тем не менее, как мы помним, по теореме 7.3.11, будут однозначно определены интегралы вида

$$\int_{-\pi}^{\pi}g(x)\cdot f'(x)\ \mathsf{d}\,x=\int_{-\pi}^{\pi}g(x)\ \mathsf{d}\,f(x)$$

где g – произвольная кусочно-непрерывная функция. В частности, поэтому для f' можно определить коэффициенты ряда Фурье:

$$\alpha_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f'(x)\ \mathsf{d}\,x,\qquad \alpha_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f'(x)\cdot\cos nx\ \mathsf{d}\,x,\qquad \beta_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f'(x)\cdot\sin nx\ \mathsf{d}\,x,\quad (11.2.49)$$

Таким образом, f' тоже порождает какой-то ряд Фурье (с коэффициентами α_n, β_n). Оказывается, что ряд Фурье для f' получается из ряда Фурье для f почленным дифференцированием. Вот как точно выглядит это утверждение:

Лемма 11.2.6. *Пусть f – непрерывная кусочно-гладкая 2π-периодическая функция на $\mathbb{R}$. Тогда коэффициенты Фурье* (11.2.49) *производной f' связаны с коэффициентами Фурье* (11.1.6) *функции f формулами*

$$\alpha_0=0,\qquad \alpha_n=n\cdot b_n,\qquad \beta_n=-n\cdot a_n,\qquad n\in\mathbb{N}\qquad (11.2.50)$$

! 11.2.7. Объясним, почему это интерпретируется, как возможность почленно дифференцировать ряд Фурье. Обозначим символами $S_N[f]$ и $S_N[f']$ соответственно частичные суммы рядов Фурье функций f и f'

$$S_N[f](x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} \Big\{ a_n \cos nx + b_n \sin nx \Big\}, \qquad S_N[f'](x) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} \Big\{ \alpha_n \cos nx + \beta_n \sin nx \Big\}$$

Тогда из леммы 11.2.6 следует, что $S_N[f']$ получается из $S_N[f]$ дифференцированием:

$$S_N[f'] = \Big(S_N[f] \Big)' \tag{11.2.51}$$

Действительно,

$$\Big(S_N[f] \Big)'(x) = \left(\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} \Big\{ a_n \cos nx + b_n \sin nx \Big\} \right)' = \sum_{n=1}^{N} \Big\{ -n \cdot a_n \sin nx + n \cdot b_n \cos nx \Big\} =$$

$$= (11.2.50) = \underbrace{\frac{\alpha_0}{2}}_{\substack{\parallel \\ 0}} + \sum_{n=1}^{N} \Big\{ \beta_n \sin nx + \alpha_n \cos nx \Big\} = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} \Big\{ \alpha_n \cos nx + \beta_n \sin nx \Big\} = S_N[f'](x)$$

Доказательство. Для α_0 мы используем формулу (7.3.162):

$$\alpha_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) \ \mathsf{d}\, x = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \mathsf{d}\, f(x) = (7.3.162) = \frac{1}{\pi} \cdot f(x) \Big|_{x=-\pi}^{x=\pi}$$

А для α_n и β_n это доказывается интегрированием по частям (с применением теоремы 7.3.14):

$$\alpha_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) \cdot \cos nx \ \mathsf{d}\, x = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \ \mathsf{d}\, f(x) = (7.3.163) =$$

$$= \underbrace{\frac{1}{\pi} \cdot \cos nx \cdot f(x) \Big|_{x=-\pi}^{x=\pi}}_{\substack{\parallel \\ 0, \\ \text{потому что } \cos_n \text{ и } f \text{ –} \\ 2\pi\text{-периодические} \\ \text{функции}}} - \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \ \mathsf{d} \cos nx = n \cdot \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \sin nx \ \mathsf{d}\, x = n \cdot b_n$$

и

$$\beta_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) \cdot \sin nx \ \mathsf{d}\, x = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \ \mathsf{d}\, f(x) = (7.3.163) =$$

$$= \underbrace{\frac{1}{\pi} \cdot \sin nx \cdot f(x) \Big|_{x=-\pi}^{x=\pi}}_{\substack{\parallel \\ 0, \\ \text{потому что } \sin_n \text{ и } f \text{ –} \\ 2\pi\text{-периодические} \\ \text{функции}}} - \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \ \mathsf{d} \sin nx = -n \cdot \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \cos nx \ \mathsf{d}\, x = -n \cdot a_n$$

□

Равномерная сходимость ряда Фурье непрерывной кусочно-гладкой функции. Теперь мы можем доказать часть (i) теоремы 11.2.2, то есть следующее утверждение:

Лемма 11.2.7. *Непрерывная кусочно-гладкая 2π-периодическая функция f является равномерной суммой своего ряда Фурье* (11.2.40).

Доказательство. Заметим, что, поскольку функция f' интегрируема на $[-\pi, \pi]$, по лемме 11.1.9, ряд из квадратов ее коэффициентов Фурье должен сходиться:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \Big\{ \alpha_n^2 + \beta_n^2 \Big\} < \infty$$

Отсюда следует такая цепочка:

$$\underbrace{\begin{matrix} 0 \leqslant \left(|\beta_n| - \frac{1}{n}\right)^2 = \beta_n^2 - \frac{2|\beta_n|}{n} + \frac{1}{n^2} & & 0 \leqslant \left(|\alpha_n| - \frac{1}{n}\right)^2 = \alpha_n^2 - \frac{2|\alpha_n|}{n} + \frac{1}{n^2} \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ \frac{2|\beta_n|}{n} \leqslant \beta_n^2 + \frac{1}{n^2} & & \frac{2|\alpha_n|}{n} \leqslant \alpha_n^2 + \frac{1}{n^2} \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ |a_n| = \frac{|\beta_n|}{n} \leqslant \frac{1}{2} \cdot \left\{\beta_n^2 + \frac{1}{n^2}\right\} & & |b_n| = \frac{|\alpha_n|}{n} \leqslant \frac{1}{2} \cdot \left\{\alpha_n^2 + \frac{1}{n^2}\right\} \end{matrix}}$$

$$\Downarrow$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \Big\{ |a_n| + |b_n| \Big\} \leqslant \frac{1}{2} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \Big\{ \alpha_n^2 + \beta_n^2 \Big\} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty$$

$$\Downarrow$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|a_n \cos nx + b_n \sin nx\|_{x\in\mathbb{R}} \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \Big\{ \|a_n \cos nx\|_{x\in\mathbb{R}} + \|b_n \sin nx\|_{x\in\mathbb{R}} \Big\} = \sum_{n=1}^{\infty} \Big\{ |a_n| + |b_n| \Big\} < \infty$$

$$\Downarrow \quad \text{теорема Вейерштрасса 9.1.5}$$

$$\text{ряд } \sum_{n=1}^{\infty} \Big\{ a_n \cos nx + b_n \sin nx \Big\} \text{ сходится равномерно на } \mathbb{R}$$

Мы получили, что ряд Фурье функции f сходится равномерно к некоторой функции S. Но с другой стороны, по лемме 11.2.5 этот ряд должен поточечно сходиться к функции f. Значит, $S = f$, и ряд Фурье этой функции сходится к ней равномерно. $\square$

Равномерная по производным сходимость ряда Фурье непрерывной кусочно-гладкой функции. Теперь мы можем доказать часть (ii) теоремы 11.2.2, то есть следующее утверждение:

Лемма 11.2.8. *Бесконечно гладкая 2π-периодическая функция f является равномерной по производным суммой своего ряда Фурье* (11.2.40).

Доказательство. Для всякого $k \in \mathbb{Z}_+$ рассмотрим производную $f^{(k)}$ порядка k функции f, и пусть $S_N[f^{(k)}]$ обозначает многочлен Фурье функции $f^{(k)}$:

$$S_N[f^{(k)}](x) = \frac{a_0^{(k)}}{2} + \sum_{n=1}^{N} \Big\{ a_n^{(k)} \cos nx + b_n^{(k)} \sin nx \Big\},$$

$$\alpha_0^{(k)} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^{(k)}(x) \, \mathsf{d}\, x, \qquad \alpha_n^{(k)} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^{(k)}(x) \cdot \cos nx \, \mathsf{d}\, x, \qquad \beta_n^{(k)} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^{(k)}(x) \cdot \sin nx \, \mathsf{d}\, x.$$

Формула (11.2.51), применительно к функции $f^{(k)}$, означает, что $S_N[f^{(k+1)}]$ получается из $S_N[f^{(k)}]$ дифференцированием:

$$S_N[f^{(k+1)}] = \Big(S_N[f^{(k)}] \Big)'$$

Отсюда по индукции можно заключить, что $S_N[f^{(k)}]$ есть просто производная порядка k из $S_N[f]$ (частичной суммы ряда Фурье исходной функции f):

$$S_N[f^{(k)}] = \Big(S_N[f] \Big)^{(k)} \tag{11.2.52}$$

Теперь заметим, что каждая функция $f^{(k)}$ является гладкой и 2π-периодической, поэтому по лемме 11.2.7 ее ряд Фурье должен сходиться к ней равномерно на $\mathbb{R}$, то есть

$$\Big\| f^{(k)} - S_N[f^{(k)}] \Big\|_{\mathbb{R}} \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

В силу (11.2.52) это можно интерпретировать, как равномерное стремление к нулю производной порядка k от разности $f - S_N[f]$:

$$\Big\| \Big(f - S_N[f] \Big)^{(k)} \Big\|_{\mathbb{R}} = \Big\| f^{(k)} - \Big(S_N[f] \Big)^{(k)} \Big\|_{\mathbb{R}} = (11.2.52) = \Big\| f^{(k)} - S_N[f^{(k)}] \Big\|_{\mathbb{R}} \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

Отсюда для всякого $m \in \mathbb{Z}_+$ получаем нужное нам соотношение:

$$\Big\| \ f - S_N[f] \ \Big\|_{\mathbb{R}}^{(k)} = (9.1.47) = \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!} \cdot \Big\| \Big(f - S_N[f] \Big)^{(k)} \Big\|_{\mathbb{R}} \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

$\square$

(c) Суммирование ряда Фурье методом арифметических средних

Если 2π-периодическая функция f не является кусочно-гладкой, а, скажем, только кусочно-непрерывной и удовлетворяющей тождеству Лебега (11.2.38), то из теоремы 11.2.2 не следует, что она должна быть поточечной суммой своего ряда Фурье. Это не случайно: как оказывается, существуют такие кусочно-непрерывные, и даже непрерывные, функции, у которых ряд Фурье не сходится в некоторых точках. Несмотря на это, кусочно-непрерывную 2π-периодическую функцию f, удовлетворяющую тождеству Лебега, всегда можно считать поточечной суммой своего ряда Фурье, но в несколько неожиданном смысле: для этого нужно f понимать как предел не многочленов Фурье S_N, а их арифметических средних. Это оригинальное наблюдение принадлежит венгерскому математику Липоту Фейеру, и в этом пункте мы поговорим о его результатах.

- Пусть S_N – частичные суммы ряда Фурье с полупериодом π для функции f:

$$S_N(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} \Big\{ a_n \cos nx + b_n \sin nx \Big\}$$

(коэффициенты вычисляются по формулам (11.1.6)). Арифметические средние этой последовательности, то есть функции

$$\sigma_N(x) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} S_n(x) \tag{11.2.53}$$

называются *многочленами Фейера* функции f.

Теорема 11.2.9 (Фейер). *Для всякой кусочно-непрерывной 2π-периодической функции f на прямой $\mathbb{R}$ ее многочлены Фейера σ_N сходятся в каждой точке $x \in \mathbb{R}$ к среднему арифметическому ее левого и правого пределов в этой точке:*

$$\frac{f(x-0)+f(x+0)}{2} = \lim_{N\to\infty} \sigma_N(x), \qquad x \in \mathbb{R}. \tag{11.2.54}$$

В частности, если f удовлетворяет тождеству Лебега (11.2.38), *то она является поточечным пределом своей последовательности многочленов Фейера:*

$$f(x) = \lim_{N\to\infty} \sigma_N(x), \qquad x \in \mathbb{R}. \tag{11.2.55}$$

Кроме того,

(i) если f – непрерывная (и, по-прежнему, 2π-периодическая) функция на $\mathbb{R}$, то то многочлены Фейера сходятся к ней на прямой $\mathbb{R}$ равномерно:[5]

$$\|f(x) - \sigma_N(x)\|_{x\in\mathbb{R}} \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} 0; \tag{11.2.56}$$

(ii) если f – бесконечно гладкая (и по-прежнему, 2π-периодическая) функция на $\mathbb{R}$, то многочлены Фейера сходятся к ней на прямой $\mathbb{R}$ равномерно по производным:[6]

$$\forall m \in \mathbb{Z}_+ \qquad \|f(x) - \sigma_N(x)\|^{(m)}_{x\in\mathbb{R}} \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} 0. \tag{11.2.57}$$

Как и в случае с теоремой 11.2.2, доказательство этого факта мы разобьем на несколько лемм.

Ядро Фейера.

- *Ядром Фейера* называется арифметическое среднее ядер Дирихле

$$\varPhi_N(t) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} D_n(x) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos kt \right) \tag{11.2.58}$$

Эта функция обладает свойствами, похожими на свойства ядра Дирихле, но главная разница заключается в том, что ядро Фейера оказывается неотрицательной функцией (что оказывается очень полезно для дальнейших выводов).

Свойства ядра Фейера:

[5] Норма $\|\cdot\|_E$ была определена формулой (9.1.6).
[6] Норма $\|\cdot\|^{(m)}_E$ была определена формулой (9.1.47).

1°. *Ядро Фейера $\varPhi_N$ является непрерывной, четной, 2π-периодической и неотрицательной функцией на $\mathbb{R}$:*

$$\varPhi_N(-t) = \varPhi_N(t), \qquad \varPhi_N(t+2\pi) = \varPhi_N(t), \qquad \varPhi_N(t) \geqslant 0 \qquad \Big(t \in \mathbb{R}\Big)$$

2°. *Интеграл по периоду от ядра Фейера равен π:*

$$\int_{-\pi}^{\pi} \varPhi_N(t)\, \mathsf{d}\, t = 2\int_0^{\pi} \varPhi_N(t)\, \mathsf{d}\, t = \pi \tag{11.2.59}$$

3°. *Ядро Фейера удовлетворяет тождеству:*

$$\varPhi_N(t) = \begin{cases} \frac{N}{2}, & t \in 2\pi\mathbb{Z} \\ \frac{\sin^2 \frac{N}{2}t}{2N\cdot \sin^2 \frac{t}{2}}, & t \notin 2\pi\mathbb{Z} \end{cases} \tag{11.2.60}$$

4°. *Для всякого $\delta > 0$ равномерная норма функции $\varPhi$ на отрезке $[\delta, \pi]$ стремится к нулю при $N \to \infty$:*

$$\|\varPhi_N(t)\|_{t\in[\delta,\pi]} = \max_{t\in[\delta,\pi]} \varPhi_N(t) \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} 0 \tag{11.2.61}$$

Доказательство. Свойства 1° и 2° вытекают сразу же из свойств ядра Дирихле на с.638, за исключением неотрицательности $\varPhi_N$, которая, в свою очередь, является следствием тождества (11.2.60). Поэтому для доказательства 1°, 2° и 3° достаточно проверить (11.2.60). Для точек $t = 2\pi k$ мы получаем:

$$\varPhi_N(2\pi k) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} \underbrace{D_n(2\pi k)}_{\substack{\parallel\ (11.2.46) \\ n+\frac{1}{2}}} = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\left(n+\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{N} \underbrace{\sum_{n=1}^{N-1} n}_{\substack{\parallel\ (2.2.253) \\ \frac{(N-1)\cdot N}{2}}} + \frac{N}{2N} = \frac{N-1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{N}{2}$$

А для $t \neq 2\pi k$ получаем:

$$\varPhi_N(t)\cdot 2N\sin^2\frac{t}{2} = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} \underbrace{D_n(x)}_{\substack{\parallel\ (11.2.46) \\ \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}}} \cdot 2N\sin^2\frac{t}{2} = 2\sum_{n=0}^{N-1} \underbrace{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t\cdot \sin\frac{t}{2}}_{\substack{\parallel\ (4.1.83) \\ \frac{1}{2}\left(\cos nt - \cos(n+1)t\right)}} =$$

$$= \sum_{n=0}^{N-1}\Big(\cos nt - \cos(n+1)t\Big) = \Big(\underbrace{\cos 0}_{\substack{\parallel \\ 1}} - \underbrace{\cos t}\Big) + \Big(\underbrace{\cos t} - \underbrace{\cos 2t}\Big) + \ldots + \Big(\underbrace{\cos(N-1)t} - \cos Nt\Big) =$$

$$= 1 - \cos Nt = (4.1.72) = \sin^2\frac{N+1}{2}t$$

Поделив это на $2N\sin^2\frac{t}{2}$, мы получим нижнюю строчку в (11.2.60).

После того, как (11.2.60) доказано, свойство (11.2.61) становится его следствием:

$$\|\varPhi_N(t)\|_{t\in[\delta,\pi]} = \max_{t\in[\delta,\pi]}\Big|\varPhi_N(t)\Big| = \max_{t\in[\delta,\pi]}\left|\frac{\sin^2\frac{N}{2}t}{2N\cdot\sin^2\frac{t}{2}}\right| \leqslant \frac{\max_{t\in[\delta,\pi]}\sin^2\frac{N}{2}t}{2N\cdot \min_{t\in[\delta,\pi]}\sin^2\frac{t}{2}} = \frac{1}{2N\cdot\sin^2\frac{\delta}{2}} \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

□

Интеграл Фейера.

Лемма 11.2.10. *Для всякой 2π-периодической локально интегрируемой функции f ее многочлен Фейера σ_N выражается через ядро Фейера $\varPhi_N$ формулами*

$$\sigma_N(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\cdot \varPhi_N(t)\, \mathsf{d}\, t, \qquad x\in\mathbb{R} \tag{11.2.62}$$

$$\sigma_N(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\Big\{f(x+t)+f(x-t)\Big\}\cdot\varPhi_N(t)\, \mathsf{d}\, t, \qquad x\in\mathbb{R} \tag{11.2.63}$$

- Интегралы справа в формулах (11.2.62) и (11.2.63) называются *интегралами Фейера.*

Доказательство. Это следует из формул для интеграла Дирихле (11.2.47) и (11.2.48): во-первых,

$$\sigma_N(x)=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}S_n(x)=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\overbrace{\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x+t)\cdot D_n(t)\,\mathsf{d}\,t}^{\substack{S_n(x)\\ \parallel\ (11.2.47)}}=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x+t)\cdot\underbrace{\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}D_n(t)}_{\substack{\parallel\ (11.2.58)\\ \varPhi_N(t)}}\,\mathsf{d}\,t=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x+t)\cdot\varPhi_N(t)\,\mathsf{d}\,t,$$

и, во-вторых,

$$\sigma_N(x)=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}S_n(x)=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\overbrace{\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\Big\{f(x+t)+f(x-t)\Big\}\cdot D_n(t)\,\mathsf{d}\,t}^{\substack{S_n(x)\\ \parallel\ (11.2.48)}}=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\Big\{f(x+t)+f(x-t)\Big\}\cdot\underbrace{\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}D_n(t)}_{\substack{\parallel\ (11.2.58)\\ \varPhi_N(t)}}\,\mathsf{d}\,t=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\Big\{f(x+t)+f(x-t)\Big\}\cdot\varPhi_N(t)\,\mathsf{d}\,t.$$

□

Поточечная сходимость многочленов Фейера. Мы можем теперь доказать ту часть теоремы 11.2.9, где речь идет о поточечной сходимости:

Лемма 11.2.11. *Для всякой кусочно-непрерывной 2π-периодической функции f на прямой $\mathbb{R}$ ее многочлены Фейера сходятся в каждой точке $x\in\mathbb{R}$ к среднему арифметическому ее левого и правого пределов в этой точке:*

$$\frac{f(x-0)+f(x+0)}{2}=\lim_{N\to\infty}\sigma_N(x),\qquad x\in\mathbb{R}.$$

Доказательство. Поскольку f кусочно-непрерывна и периодична, она ограничена на $\mathbb{R}$. Обозначим буквой M ограничивающую ее константу:

$$\sup_{x\in\mathbb{R}}|f(x)|=M\qquad(M\in\mathbb{R}).$$

Зафиксируем точку $x\in\mathbb{R}$. Из кусочной непрерывности f следует также, что существуют пределы

$$f(x+0)=\lim_{t\to+0}f(x+t),\qquad f(x-0)=\lim_{t\to+0}f(x-t)$$

Поэтому если зафиксировать $\varepsilon>0$, то найдется $\delta>0$ такое, что

$$\forall t\in(0,\delta)\qquad |f(x+t)-f(x+0)|<\varepsilon\quad\&\quad |f(x-t)-f(x-0)|<\varepsilon$$

Подберем такое $N_0\in\mathbb{N}$, чтобы для всех $N>N_0$ выполнялось неравенство

$$\max_{t\in[\delta,\pi]}\varPhi_N(t)<\frac{\varepsilon}{4M}\tag{11.2.64}$$

(это всегда можно сделать, в силу (11.2.61)). Тогда для всех $N>N_0$ мы получим:

$$\int_0^{\pi}\Big|f(x+t)-f(x+0)\Big|\cdot\varPhi_N(t)\,\mathsf{d}\,t=$$

$$= \int_0^\delta \underbrace{\Big| f(x+t)-f(x+0)\Big|}_{\substack{\wedge\!\!| \\ \varepsilon}} \cdot \varPhi_N(t)\,\mathrm{d}\,t + \int_\delta^\pi \underbrace{\Big| f(x+t)-f(x+0)\Big|}_{\substack{\wedge\!\!| \\ |f(x+t)|+|f(x+0)| \\ \wedge\!\!| \\ 2M}} \cdot \varPhi_N(t)\,\mathrm{d}\,t \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon \cdot \underbrace{\int_0^\delta \varPhi_N(t)\,\mathrm{d}\,t}_{\substack{\wedge\!\!| \\ \int_0^\pi \varPhi_N(t)\,\mathrm{d}\,t \\ \parallel\,(11.2.59) \\ \frac{\pi}{2}}} + 2M \cdot \underbrace{\int_\delta^\pi \varPhi_N(t)\,\mathrm{d}\,t}_{\substack{\wedge\!\!| \\ (\pi-\delta)\cdot\max_{t\in[\delta,\pi]}\varPhi_N(t) \\ \wedge\,(11.2.64) \\ (\pi-\delta)\cdot\frac{\varepsilon}{4M} \\ \wedge\!\!| \\ \frac{\pi\cdot\varepsilon}{4M}}} \leqslant \frac{\pi\cdot\varepsilon}{2} + \frac{\pi\cdot\varepsilon}{2} = \pi\cdot\varepsilon$$

Таким образом,

$$\forall N > N_0 \qquad \frac{1}{\pi}\cdot\int_0^\pi \Big| f(x+t)-f(x+0)\Big| \cdot \varPhi_N(t)\,\mathrm{d}\,t < \varepsilon \tag{11.2.65}$$

Точно так же доказывается, что

$$\forall N > N_0 \qquad \frac{1}{\pi}\cdot\int_0^\pi \Big| f(x-t)-f(x-0)\Big| \cdot \varPhi_N(t)\,\mathrm{d}\,t < \varepsilon \tag{11.2.66}$$

Теперь оценим разность между $\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$ и многочленом Фейера:

$$\left|\sigma_N(x) - \frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}\right| =$$

$$= \Bigg| \underbrace{\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \Big\{ f(x+t)+f(x-t)\Big\}\cdot\varPhi_N(t)\,\mathrm{d}\,t}_{\substack{\parallel\,(11.2.63) \\ \sigma_N(x)}} - \frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}\cdot \underbrace{\frac{2}{\pi}\int_0^\pi D_N(t)\,\mathrm{d}\,t}_{\substack{\parallel\,(11.2.59) \\ 1}} \Bigg| =$$

$$= \left| \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \Big\{ f(x+t)+f(x-t)\Big\}\cdot\varPhi_N(t)\,\mathrm{d}\,t - \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \Big\{ f(x+0)+f(x-0)\Big\}\cdot\varPhi_N(t)\,\mathrm{d}\,t \right| =$$

$$= \left| \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \Big\{ f(x+t)+f(x-t)-f(x+0)-f(x-0)\Big\}\cdot\varPhi_N(t)\,\mathrm{d}\,t \right| =$$

$$= \frac{1}{\pi}\cdot\left| \int_0^\pi \Big[f(x+t)-f(x+0)\Big]\cdot\varPhi_N(t)\,\mathrm{d}\,t + \int_0^\pi \Big[f(x-t)-f(x-0)\Big]\cdot\varPhi_N(t)\,\mathrm{d}\,t \right| \leqslant$$

$$\leqslant \underbrace{\frac{1}{\pi}\cdot\int_0^\pi \Big| f(x+t)-f(x+0)\Big|\cdot\varPhi_N(t)\,\mathrm{d}\,t}_{\substack{\wedge\,(11.2.65) \\ \varepsilon}} + \underbrace{\frac{1}{\pi}\cdot\int_0^\pi \Big| f(x-t)-f(x-0)\Big|\cdot\varPhi_N(t)\,\mathrm{d}\,t}_{\substack{\wedge\,(11.2.66) \\ \varepsilon}} < 2\varepsilon$$

Мы получили, что для произвольной точки $x \in \mathbb{R}$ и любого $\varepsilon > 0$ можно подобрать такое $N_0 \in \mathbb{N}$, что для любого $N > N_0$ выполняется соотношение:

$$\left|\sigma_N(x) - \frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}\right| < 2\varepsilon$$

Это эквивалентно тому, что нам нужно:

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad \sigma_N(x) \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} \frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$$

□

Равномерная сходимость многочленов Фейера.

Лемма 11.2.12. *Непрерывная 2π-периодическая функция f является равномерной суммой своей последовательности многочленов Фейера* (11.2.53).

Доказательство. Пусть f – непрерывная 2π-периодическая функция на $\mathbb{R}$. Поскольку f непрерывна на $[-\pi,\pi]$, должна быть конечной величина

$$M=\sup_{x\in\mathbb{R}}|f(x)|=\sup_{x\in[-\pi,\pi]}|f(x)| \tag{11.2.67}$$

Зафиксируем число $\varepsilon>0$ и выберем такое $\delta>0$, чтобы

$$\forall x\in[-\pi,\pi]\qquad \forall t\in(-\delta,\delta)\qquad \Big|f(x)-f(x+t)\Big|<\frac{\varepsilon}{3} \tag{11.2.68}$$

(поскольку f непрерывна, и значит, равномерно непрерывна на $[-\pi,\pi]$, это всегда можно сделать).

После этого найдем N_0 такое, что

$$\forall N>N_0\qquad \|\varPhi_N(t)\|_{t\in[\delta,\pi]}<\frac{\varepsilon}{6M} \tag{11.2.69}$$

Тогда для всякого $N>N_0$ мы получим:

$$\Big|f(x)-\sigma_N(x)\Big|=\Big|f(x)\cdot\underbrace{\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varPhi_N(t)\,\mathsf{d}\,t}_{\substack{\| \ (11.2.59)\\ 1}}-\underbrace{\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x+t)\cdot\varPhi_N(t)\,\mathsf{d}\,t}_{\substack{\| \ (11.2.62)\\ \sigma_N(x)}}\Big|=$$

$$=\left|\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\Big(f(x)-f(x+t)\Big)\cdot\varPhi_N(t)\,\mathsf{d}\,t\right|\leqslant\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\Big|f(x)-f(x+t)\Big|\cdot\varPhi_N(t)\,\mathsf{d}\,t=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{-\delta}\underbrace{\Big|f(x)-f(x+t)\Big|}_{\substack{\wedge\!\backslash\\ |f(x)|+|f(x+t)|\\ \wedge\!\backslash \ (11.2.67)\\ 2M}}\cdot\varPhi_N(t)\,\mathsf{d}\,t+\frac{1}{\pi}\int_{-\delta}^{\delta}\underbrace{\Big|f(x)-f(x+t)\Big|}_{\substack{\wedge \ (11.2.68)\\ \frac{\varepsilon}{3}}}\cdot\varPhi_N(t)\,\mathsf{d}\,t+$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_{\delta}^{\pi}\underbrace{\Big|f(x)-f(x+t)\Big|}_{\substack{\wedge\!\backslash\\ |f(x)|+|f(x+t)|\\ \wedge\!\backslash \ (11.2.67)\\ 2M}}\cdot\varPhi_N(t)\,\mathsf{d}\,t\leqslant$$

$$\leqslant\underbrace{\frac{2M}{\pi}\int_{-\pi}^{-\delta}\varPhi_N(t)\,\mathsf{d}\,t}+\frac{\varepsilon}{3\pi}\int_{-\delta}^{\delta}\varPhi_N(t)\,\mathsf{d}\,t+\underbrace{\frac{2M}{\pi}\int_{\delta}^{\pi}\varPhi_N(t)\,\mathsf{d}\,t}=$$

$$=\frac{\varepsilon}{3\pi}\cdot\underbrace{\int_{-\delta}^{\delta}\varPhi_N(t)\,\mathsf{d}\,t}_{\substack{\wedge\!\backslash\\ \int_{-\pi}^{\pi}\varPhi_N(t)\,\mathsf{d}\,t\\ \| \ (11.2.59)\\ \pi}}+\frac{4M}{\pi}\cdot\underbrace{\int_{\delta}^{\pi}\varPhi_N(t)\,\mathsf{d}\,t}_{\substack{\wedge\!\backslash\\ (\pi-\delta)\cdot\|\varPhi_N(t)\|_{t\in[\delta,\pi]}\\ \wedge \ (11.2.69)\\ (\pi-\delta)\cdot\frac{\varepsilon}{6M}\\ \wedge\\ \frac{\pi\varepsilon}{6M}}}<\frac{\varepsilon}{3\pi}\cdot\pi+\frac{4M}{\pi}\cdot\frac{\pi\varepsilon}{6M}=\frac{\varepsilon}{3}+\frac{2\varepsilon}{3}=\varepsilon$$

Отсюда

$$\forall N>N_0\qquad \|f(x)-\sigma_N(x)\|_{x\in\mathbb{R}}=\sup_{x\in\mathbb{R}}\Big|f(x)-\sigma_N(x)\Big|\leqslant\varepsilon$$

Это доказывает (11.2.56). □

Равномерная по производным сходимость многочленов Фейера.

Лемма 11.2.13. *Бесконечно гладкая 2π-периодическая функция f является равномерной по производным суммой своей последовательности многочленов Фейера* (11.2.53).

Доказательство. Это можно вывести как следствие пункта (ii) теоремы 11.2.2: из соотношения

$$\forall m\in\mathbb{Z}_+\qquad \|f-S_N\|^{(m)}_{\mathbb{R}}\underset{N\to\infty}{\longrightarrow}0.$$

следует, что при фиксированных $m\in\mathbb{Z}_+$ и $\varepsilon>0$ существует N_0 такое, что при $N>N_0$ выполняется

$$\|f-S_N\|^{(m)}_{\mathbb{R}}<\varepsilon$$

Отсюда следует, что при $N>N_0$ будет выполняться

$$\|f-\sigma_N\|^{(m)}_{\mathbb{R}}=\left\|f-\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}S_n\right\|^{(m)}_{\mathbb{R}}=\left\|\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}f-\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}S_n\right\|^{(m)}_{\mathbb{R}}=$$

$$=\left\|\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}(f-S_n)\right\|^{(m)}_{\mathbb{R}}\leqslant\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\|(f-S_n)\|^{(m)}_{\mathbb{R}}<\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\varepsilon=\varepsilon$$

Поскольку $m\in\mathbb{Z}_+$ и $\varepsilon>0$ выбирались произвольно, получаем

$$\forall m\in\mathbb{Z}_+\qquad \|f-\sigma_N\|^{(m)}_{\mathbb{R}}\underset{N\to\infty}{\longrightarrow}0.$$

□

(d) Примеры

В следующих примерах нас будет интересовать поточечная сходимость, поэтому они будут иллюстрациями к теореме 11.2.2.

Разложение Фурье произвольной 2π-периодической функции.

◇ **11.2.8.** Найдем разложение Фурье функции

$$f(x)=\operatorname{sgn}\sin x=\begin{cases}1, & x\in(2\pi n,\pi+2\pi n)\\ 0, & x=\pi n\\ -1, & x\in(-\pi+2\pi n,2\pi n)\end{cases}$$

Для этого нужно просто вычислить коэффициенты Фурье:

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\operatorname{sgn}\sin x\ \mathsf{d}\,x=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}(-1)\ \mathsf{d}\,x+$$
$$+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}1\ \mathsf{d}\,x=-\frac{\pi}{\pi}+\frac{\pi}{\pi}=0$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\operatorname{sgn}\sin x\cdot\cos nx\ \mathsf{d}\,x=$$
$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}(-1)\cdot\cos nx\ \mathsf{d}\,x+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}1\cdot\cos nx\ \mathsf{d}\,x=$$
$$=-\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}\cos nx\ \mathsf{d}\,x+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\cos nx\ \mathsf{d}\,x=$$
$$=-\frac{1}{\pi n}\sin nx\Big|_{x=-\pi}^{x=0}+\frac{1}{\pi n}\sin nx\Big|_{x=0}^{x=\pi}=0+0=0$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\operatorname{sgn}\sin x\cdot\sin nx\ \mathsf{d}\,x=$$
$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}(-1)\cdot\sin nx\ \mathsf{d}\,x+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}1\cdot\sin nx\ \mathsf{d}\,x=$$
$$=-\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}\sin nx\ \mathsf{d}\,x+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\sin nx\ \mathsf{d}\,x=$$
$$=\frac{1}{\pi n}\cos nx\Big|_{x=-\pi}^{x=0}-\frac{1}{\pi n}\cos nx\Big|_{x=0}^{x=\pi}=$$
$$=\frac{1}{\pi n}\{1-\cos(-\pi n)\}-\frac{1}{\pi n}\{\cos(\pi n)-1\}=$$
$$=\frac{2}{\pi n}\{1-\cos(\pi n)\}=\frac{2}{\pi n}\{1-(-1)^n\}$$

Вывод:

$$\operatorname{sgn}\sin x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{\pi n}\{1-(-1)^n\}\cdot\sin nx$$

◇ **11.2.9.** Вычислим разложение 2π-периодической функции f, удовлетворяющей тождеству Лебега и заданной на интервале $(-\pi,\pi)$ формулой

$$f(x)=\begin{cases}1, & x\in(0,\pi)\\ \frac{1}{2}, & x=0\\ 0, & x\in(-\pi,0)\end{cases}$$

Вычисляем коэффициенты Фурье:

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\ \mathsf{d}\,x=$$
$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}0\ \mathsf{d}\,x+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}1\ \mathsf{d}\,x=\frac{\pi}{\pi}=1$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cdot\cos nx \;\mathsf{d}\,x =$$
$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} 0\cdot\cos nx \;\mathsf{d}\,x + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} 1\cdot\cos nx \;\mathsf{d}\,x =$$
$$= \frac{1}{\pi n}\sin nx\Big|_{x=0}^{x=\pi} = 0$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cdot\sin nx \;\mathsf{d}\,x =$$
$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} 0\cdot\sin nx \;\mathsf{d}\,x + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} 1\cdot\sin nx \;\mathsf{d}\,x =$$
$$= -\frac{1}{\pi n}\cos nx\Big|_{x=0}^{x=\pi} = -\frac{1}{\pi n}\{\cos(\pi n) - 1\} =$$
$$= \frac{1}{\pi n}\{1 - (-1)^n\}$$

Вывод:

$$f(x) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\pi n}\{1-(-1)^n\}\cdot\sin nx$$

◇ **11.2.10.** Вычислим разложение 2π-периодической функции f, удовлетворяющей тождеству Лебега и заданной на интервале $(-\pi,\pi)$ формулой

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right) \\ \frac{1}{2}, & x\in\left\{0,\frac{\pi}{2}\right\} \\ 0, & x\in(-\pi,0)\cup\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)\end{cases}$$

Вычисляем коэффициенты Фурье:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\;\mathsf{d}\,x =$$
$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} 0\;\mathsf{d}\,x + \frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{\frac{\pi}{2}} 1\;\mathsf{d}\,x + \frac{1}{\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} 0\;\mathsf{d}\,x = \frac{\pi}{\pi} = \frac{1}{2}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cdot\cos nx \;\mathsf{d}\,x =$$
$$= \frac{1}{\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} 1\cdot\cos nx \;\mathsf{d}\,x = \frac{1}{\pi n}\sin nx\Big|_{x=\frac{\pi}{2}}^{x=\pi} = \frac{\sin\frac{\pi n}{2}}{\pi n}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cdot\sin nx \;\mathsf{d}\,x =$$
$$= \frac{1}{\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} 1\cdot\sin nx \;\mathsf{d}\,x = -\frac{1}{\pi n}\cos nx\Big|_{x=\frac{\pi}{2}}^{x=\pi} =$$
$$= -\frac{1}{\pi n}\{\cos(\pi n) - \cos\frac{\pi}{2}\} = \frac{1}{\pi n}\{\cos\frac{\pi}{2} - (-1)^n\}$$

Вывод:

$$f(x) = \frac{1}{4} + \sum_{n=1}^{\infty}\Big\{\frac{\sin\frac{\pi n}{2}}{\pi n}\cdot\cos nx +$$
$$+ \frac{1}{\pi n}\{\cos\frac{\pi}{2} - (-1)^n\}\cdot\sin nx\Big\}$$

⊳⊳ **11.2.11.** Разложите в ряд Фурье 2π-периодические функции, заданные на интервале $(-\pi,\pi)$ формулами:

1) $f(x) = e^x$

2) $f(x) = \begin{cases} x, & x\in(0,\pi) \\ 0, & x\in(-\pi,0)\end{cases}$

3) $f(x) = \begin{cases} 0, & x\in(0,\pi) \\ x, & x\in(-\pi,0)\end{cases}$

4) $f(x) = \begin{cases} x, & x\in(0,\pi) \\ \frac{\pi}{2}, & x=0 \\ \pi, & x\in(-\pi,0)\end{cases}$

Разложение Фурье четных и нечетных 2π-периодических функций.

Предложение 11.2.14. *Если 2π-периодическая функция f четна*

$$f(-x) = f(x) \qquad (11.2.70)$$

то в ее ряде Фурье отсутствуют слагаемые с синусами:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos nx \qquad (11.2.71)$$

а коэффициенты a_0, a_n можно вычислять по формулам

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\;\mathsf{d}\,x, \\ a_n &= \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\cos nx\;\mathsf{d}\,x \end{aligned} \qquad (11.2.72)$$

Доказательство. Коэффициенты b_n обнуляются:

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\;\mathsf{d}\,x =$$
$$= \underbrace{\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} f(x)\sin nx\;\mathsf{d}\,x}_{\text{замена: } x=-t} + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\sin nx\;\mathsf{d}\,x =$$
$$= \frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{0} \underbrace{f(-t)}_{\substack{\| \ (11.2.70) \\ f(t)}}\ \sin(-nt)\;\mathsf{d}(-t) + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\sin nx\;\mathsf{d}\,x =$$
$$= \underbrace{\frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{0} f(t)\sin nt\;\mathsf{d}\,t}_{\substack{\| \\ -\frac{1}{\pi}\int_0^\pi f(t)\sin nt\;\mathsf{d}\,t}} + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\sin nx\;\mathsf{d}\,x = 0$$

Докажем формулы (11.2.72): во-первых,

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\ \mathsf{d}\,x =$$
$$= \underbrace{\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} f(x)\ \mathsf{d}\,x}_{\text{замена: } x=-t} + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\ \mathsf{d}\,x =$$
$$= \frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{0} \underbrace{f(-t)}_{\substack{\parallel\ (11.2.70)\\ f(t)}}\ \mathsf{d}(-t) + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\ \mathsf{d}\,x =$$
$$= \underbrace{-\frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{0} f(t)\ \mathsf{d}\,t}_{\substack{\parallel\\ \frac{1}{\pi}\int_0^\pi f(t)\ \mathsf{d}\,t}} + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\ \mathsf{d}\,x = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\ \mathsf{d}\,x$$

и, во-вторых,

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\ \mathsf{d}\,x =$$
$$= \underbrace{\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} f(x)\cos nx\ \mathsf{d}\,x}_{\text{замена: } x=-t} + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\cos nx\ \mathsf{d}\,x =$$
$$= \frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{0} \underbrace{f(-t)}_{\substack{\parallel\ (11.2.70)\\ f(t)}}\ \cos(-nt)\ \mathsf{d}(-t) +$$
$$+ \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\cos nx\ \mathsf{d}\,x =$$
$$= \underbrace{-\frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{0} f(t)\cos nt\ \mathsf{d}\,t}_{\substack{\parallel\\ \frac{1}{\pi}\int_0^\pi f(t)\cos nt\ \mathsf{d}\,t}} + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\cos nx\ \mathsf{d}\,x =$$
$$= \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\cos nx\ \mathsf{d}\,x$$

□

Предложение 11.2.15. *Если 2π-периодическая функция f нечетна*

$$f(-x) = -f(x) \qquad (11.2.73)$$

то в ее ряде Фурье отсутствуют свободное слагаемое и слагаемые с косинусами:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx \qquad (11.2.74)$$

а коэффициенты b_n можно вычислять по формулам

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\sin nx\ \mathsf{d}\,x \qquad (11.2.75)$$

Доказательство. Для коэффициента a_0 получим:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\ \mathsf{d}\,x =$$
$$= \underbrace{\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} f(x)\ \mathsf{d}\,x}_{\text{замена: } x=-t} + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\ \mathsf{d}\,x =$$
$$= \frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{0} \underbrace{f(-t)}_{\substack{\parallel\ (11.2.73)\\ -f(t)}}\ \mathsf{d}(-t) + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\ \mathsf{d}\,x =$$
$$= \underbrace{\frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{0} f(t)\ \mathsf{d}\,t}_{\substack{\parallel\\ -\frac{1}{\pi}\int_0^\pi f(t)\ \mathsf{d}\,t}} + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\ \mathsf{d}\,x = 0$$

а для коэффициентов a_n,

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\ \mathsf{d}\,x =$$
$$= \underbrace{\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} f(x)\cos nx\ \mathsf{d}\,x}_{\text{замена: } x=-t} + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\cos nx\ \mathsf{d}\,x =$$
$$= \frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{0} \underbrace{f(-t)}_{\substack{\parallel\ (11.2.73)\\ -f(t)}}\ \cos(-nt)\ \mathsf{d}(-t) +$$
$$+ \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\cos nx\ \mathsf{d}\,x =$$
$$= \underbrace{\frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{0} f(t)\cos nt\ \mathsf{d}\,t}_{\substack{\parallel\\ -\frac{1}{\pi}\int_0^\pi f(t)\cos nt\ \mathsf{d}\,t}} + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\cos nx\ \mathsf{d}\,x = 0$$

Докажем формулу (11.2.75):

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\ \mathsf{d}\,x =$$
$$= \underbrace{\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} f(x)\sin nx\ \mathsf{d}\,x}_{\text{замена: } x=-t} + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\sin nx\ \mathsf{d}\,x =$$
$$= \frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{0} \underbrace{f(-t)}_{\substack{\parallel\ (11.2.73)\\ -f(t)}}\ \sin(-nt)\ \mathsf{d}(-t) +$$
$$+ \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\sin nx\ \mathsf{d}\,x =$$
$$= \underbrace{-\frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{0} f(t)\sin nt\ \mathsf{d}\,t}_{\substack{\parallel\\ \frac{1}{\pi}\int_0^\pi f(t)\sin nt\ \mathsf{d}\,t}} + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\sin nx\ \mathsf{d}\,x =$$
$$= \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\sin nx\ \mathsf{d}\,x$$

□

◇ **11.2.12.** Найдем разложение четной 2π-периодической функции f, удовлетворяющей тождеству Лебега и заданной на интервале $(0,\pi)$ формулой

$$f(x) = x$$

Ясно, что график имеет вид

Поскольку f четна, нужно вычислить только a_0 и a_n:

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x \,\mathsf{d}\, x = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{x^2}{2}\Big|_0^\pi = \pi$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x\cdot\cos nx \,\mathsf{d}\, x = \frac{2}{\pi n}\int_0^\pi x \,\mathsf{d}\sin nx = \\ &= \frac{2}{\pi n}\left\{ x\cdot\sin nx\Big|_0^\pi - \int_0^\pi \sin nx \,\mathsf{d}\, x\right\} = \\ &= \frac{2}{\pi n}\left\{0 + \frac{\cos nx}{n}\Big|_0^\pi\right\} = \frac{2}{\pi n^2}\{\cos\pi n - 1\} = \\ &= \frac{2}{\pi n^2}\{(-1)^n - 1\} \end{aligned}$$

Вывод:

$$f(x) = \frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^\infty \frac{2}{\pi n^2}\{(-1)^n - 1\}\cdot\cos nx$$

◇ **11.2.13.** Найдем разложение нечетной 2π-периодической функции f, удовлетворяющей тождеству Лебега и заданной на интервале $(0,\pi)$ формулой

$$f(x) = x$$

График здесь имеет вид

Поскольку f нечетна, нужно вычислить только b_n:

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x\cdot\sin nx \,\mathsf{d}\, x = -\frac{2}{\pi n}\int_0^\pi x \,\mathsf{d}\cos nx = \\ &= -\frac{2}{\pi n}\left\{ x\cdot\cos nx\Big|_0^\pi - \int_0^\pi \cos nx \,\mathsf{d}\, x\right\} = \\ &= -\frac{2}{\pi n}\left\{\pi\cdot\cos\pi n - \frac{\sin nx}{n}\Big|_0^\pi\right\} = \\ &= -\frac{2}{\pi n}\{\pi\cdot(-1^n) - 0\} = -\frac{2}{n}\cdot(-1)^n \end{aligned}$$

Вывод:

$$f(x) = -\sum_{n=1}^\infty \frac{2(-1)^n}{n}\cdot\sin nx$$

◇ **11.2.14.** Разложим в ряд Фурье четную 2π-периодическую функцию, заданную на интервале $(-\pi,\pi)$ формулой

$$f(x) = x^2$$

График имеет вид

Поскольку f четна, нужно вычислить только a_0 и a_n:

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x^2 \,\mathsf{d}\, x = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{x^3}{3}\Big|_0^\pi = \frac{2\pi^2}{3}$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x^2\cdot\cos nx \,\mathsf{d}\, x = \frac{2}{\pi n}\int_0^\pi x^2 \,\mathsf{d}\sin nx = \\ &= \frac{2}{\pi n}\cdot\Big\{\underbrace{x^2\cdot\sin nx\Big|_0^\pi}_{\substack{\parallel \\ 0}} - 2\int_0^\pi x\cdot\sin nx \,\mathsf{d}\, x\Big\} = \\ &= \frac{4}{\pi n^2}\cdot\int_0^\pi x \,\mathsf{d}\cos nx = \\ &= \frac{4}{\pi n^2}\cdot\left\{x\cdot\cos nx\Big|_0^\pi - \int_0^\pi \cos nx \,\mathsf{d}\, x\right\} = \\ &= \frac{4}{\pi n^2}\cdot\Big\{\pi\cdot(-1)^n - \underbrace{\frac{1}{n}\cdot\sin nx\Big|_0^\pi}_{\substack{\parallel \\ 0}}\Big\} = 4\cdot\frac{(-1)^n}{n^2} \end{aligned}$$

Вывод:

$$f(x) = \frac{\pi^2}{3} + 4\cdot\sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^n}{n^2}\cdot\cos nx \qquad (11.2.76)$$

! **11.2.15.** Из тождества (11.2.76), между прочим, следует формула (8.2.31), которую мы обещали доказать в параграфе о числовых рядах: если положить $x=\pi$, то мы получим равенство

$$\pi^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4\cdot\sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^n}{n^2}\cdot(-1)^n,$$

которое после упрощений как раз дает (8.2.31)

$$\frac{\pi^2}{6} = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2}.$$

$\triangleright\triangleright$ **11.2.16.** Разложите в ряд Фурье 2π-периодические функции, заданные на интервале $(0,\pi)$, рассмотрев отдельно случай когда f четна и нечетна:

1) $f(x)=\begin{cases}1, & x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\\ \frac{1}{2}, & x=\frac{\pi}{2}\\ 0 & x\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)\end{cases}$

2) $f(x)=\begin{cases}x, & x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\\ \frac{\pi}{2}, & x\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)\end{cases}$

3) $f(x)=\begin{cases}x, & x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\\ \frac{\pi}{4}, x=\frac{\pi}{2} & \\ 0, & x\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)\end{cases}$

Ряды Фурье функций с произвольным периодом.

Теорема 11.2.16. *Для всякой кусочно-гладкой функции f с полупериодом T на прямой $\mathbb{R}$, ее ряд Фурье (с коэффициентами* (11.0.2)*) сходится в каждой точке к среднему арифметическому ее левого и правого пределов*

$$\frac{f(x-0)+f(x+0)}{2}=$$
$$=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left\{a_n\cos\frac{\pi nx}{T}+b_n\sin\frac{\pi nx}{T}\right\}\qquad(11.2.77)$$

При этом

(i) если функция f четная, то

$$\frac{f(x-0)+f(x+0)}{2}=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{\pi nx}{T},$$
$$a_0=\frac{2}{T}\int_0^T f(x)\,\mathsf{d}\,x,$$
$$a_n=\frac{2}{T}\int_0^T f(x)\cos\frac{\pi nx}{T}\,\mathsf{d}\,x$$

(ii) если f нечетная, то

$$\frac{f(x-0)+f(x+0)}{2}=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\frac{\pi nx}{T},$$
$$b_n=\frac{2}{T}\int_0^T f(x)\sin\frac{\pi nx}{T}\,\mathsf{d}\,x$$

Доказательство. Заменой переменной

$$x=\frac{Ty}{\pi}$$

функция f превращается в функцию с полупериодом π. После этого применяется теорема 11.2.2 и предложения 11.2.14 и 11.2.15. $\square$

$\triangleright\triangleright$ **11.2.17.** Разложите в ряд Фурье $2T$-периодические функции, заданные на полупериоде $(0,T)$, рассмотрев отдельно случай когда $f(x)$ четна и нечетна:

1) $f(x)=x,\quad T=4$

2) $f(x)=3-x,\quad T=3$

3) $f(x)=\begin{cases}0, & x\in(0,1)\\ \frac{1}{2}, & x=1\\ 1 & x\in(1,2)\end{cases},\quad T=2$

4) $f(x)=\begin{cases}1, & x\in(0,1]\\ 2-x & x\in(1,2)\end{cases},\quad T=2$

5) $f(x)=\begin{cases}2-x, & x\in(0,1]\\ 1 & x\in(1,2)\end{cases},\quad T=2$

6) $f(x)=\begin{cases}x, & x\in(0,1]\\ 1 & x\in(1,2)\end{cases},\quad T=2$

Часть III

ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ВЕЩЕСТВЕННЫХ ПЕРЕМЕННЫХ

Глава 12

ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

В §1 главы 2 мы говорили, что вещественные числа появляются в науке как идея, упрощающая понимание алгоритмов измерения по эталону. Физические величины, для измерения которых достаточно указать эталон и алгоритм сравнения по нему, называются *скалярными*. Таковыми, например, являются длина, объем, масса, заряд и т.д. Помимо них есть и другие, для измерения которых нужно дополнительно фиксировать систему координат. Такие величины называются *векторными*.

◇ **12.0.1.** Типичный пример векторной величины – положение тела в пространстве. Если указан эталон длины и система координат в пространстве, то положение тела (точнее, материальной точки) однозначно описывается тремя координатами. Точно так же скорость тела или сила, действующая на него являются векторными величинами.

◇ **12.0.2.** Еще один пример векторной величины – напряженность электрического поля E в данной точке. По определению, это дробь

$$E = \frac{F}{q}$$

где F – сила, действующая на пробный заряд величиной q, помещенный в данную точку. Знаменитые уравнения Максвелла связывают эту величину с еще тремя векторными величинами: напряжённостью H магнитного поля, электрической индукцией B и магнитной индукцией D.

Если для данной векторной величины заданы эталон, алгоритм сравнения по нему и система координат, то результат измерения этой величины в каждой конкретной ситуации будет конечной последовательностью чисел фиксированной длины n. Напомним определение главы 2 (с.73):

- *Конечной последовательностью* элементов множества S (необязательно, числового) называется произвольное отображение $a : \{1, ..., k\} \to S$ из какого-нибудь отрезка $\{1, ..., k\}$ натурального ряда $\mathbb{N}$. Значения такого отображения часто записывают с помощью индексов
$$a_i = a(i), \qquad i \in \{1, ..., k\}.$$
а само это отображение – в виде семейства $\{a_i;\ i \in \mathbb{N}\}$ или $\{a_i\}$. Число k при этом называется *длиной* последовательности $\{a_i;\ i \in \mathbb{N}\}$.
- В частном случае, когда $S = \mathbb{R}$ – множество чисел, последовательность $\{a_i;\ i \in \mathbb{N}\}$ принято называть *(конечной) числовой последовательностью.*
- Напомним, что до сих пор мы записывали конечные числовые последовательности в виде строк
$$x = \big(x_1, x_2, ..., x_n\big).$$
Такие объекты в математике принято также называть *числовыми строками* (длины $n \in \mathbb{N}$). Множество всех числовых строк длины n называется *координатным пространством размерности n* и обозначается $\mathbb{R}_n$:
$$x \in \mathbb{R}_n \quad \Leftrightarrow \quad x = \big(x_1, x_2, ..., x_n\big), \quad x_i \in \mathbb{R}$$
Элементы этого множества, то есть строки, называются также *точками* или *векторами* пространства $\mathbb{R}_n$.

- Конечная числовая последовательность может быть также записана в виде столбца

$$x = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ ... \\ x^n \end{pmatrix}.$$

(при этом индексы у элементов последовательности мы будем писать справа вверху). Такие объекты принято называть *числовыми столбцами* (длины $n \in \mathbb{N}$).[1] Множество всех числовых столбцов длины n также называется *координатным пространством размерности* n и обозначается $\mathbb{R}^n$:

$$x \in \mathbb{R}^n \quad \Leftrightarrow \quad x = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ ... \\ x^n \end{pmatrix}, \quad x^i \in \mathbb{R}$$

Элементы этого множества, то есть столбцы, тоже называются *точками* или *векторами* пространства $\mathbb{R}^n$.

Координатные пространства $\mathbb{R}_n$ и $\mathbb{R}^n$ играют в изучении векторных величин ту же роль, что и множество $\mathbb{R}$ вещественных чисел при изучении скалярных. Однако система фактов об $\mathbb{R}_n$ и $\mathbb{R}^n$, необходимых для доказательства нужных утверждений, намного более сложна и менее очевидна, чем в случае с $\mathbb{R}$. В этой главе мы обсудим те свойства $\mathbb{R}_n$ и $\mathbb{R}^n$, которые вытекают из наличия на этих множествах естественных алгебраических операций.

§ 1 Комбинаторика

Разговор о пространствах $\mathbb{R}_n$ и $\mathbb{R}^n$ полезно начать с обсуждения свойств конечных последовательностей, причем не только числовых. Это понадобится нам в дальнейшем, например, при описании свойств определителя[2], многочленов и полилинейных форм (§ 3, (a) и § 5 этой главы[3]) а также главы 14[4]. Область математики, где рассматриваются объекты такого типа, называется *комбинаторика.* Свой предмет эта наука определяет, как изучение конечных множеств[5]. В этом параграфе мы опишем некоторые ее результаты.

Область математики, изучающая конечные множества, называется *комбинаторикой.* Результаты этого параграфа понадобятся нам ниже в главах 5 и 12.

(a) Основные понятия комбинаторики

Правило комбинаторного умножения.

Теорема 12.1.1. *Пусть $X_0, ..., X_n$ – конечная последовательность конечных множеств. Тогда*

$$\operatorname{card} \prod_{i=1}^{n} X_i = \prod_{i=1}^{n} \operatorname{card} X_i. \tag{12.1.1}$$

Доказательство. Здесь нужно провести индукцию по числу n. При $n = 1$ мы получаем

$$\operatorname{card} \prod_{i=1}^{1} X_i = \operatorname{card} X_1 = \prod_{i=1}^{1} \operatorname{card} X_i.$$

---

[1] При таком определении столбцы не отличаются от строк, потому что и то и другое – просто отображения из $\{1, ..., n\}$ в $\mathbb{R}$. Однако для удобства вычислений с матрицами, о которых пойдет речь ниже в § 3, удобно различать строки и столбцы, и на формальном языке это различие можно представлять как дополнительную метку, приписываемую данной конечной последовательности x, скажем, 0, если эту последовательность мы представляем как строку, и 1, если как столбец. Иными словами, парой $(x, 0)$ мы записываем последовательность x, представляемую как строку, а парой $(x, 1)$ ту же последовательность, представляемую как столбец. Далее в тексте мы, однако, такое представление строк и столбцов использовать не будем, просто удовлетворившись тем, что формальный способ выразить разницу между ними существует.

[2] Группа перестановок Σ_n используется в самом определении определителя матрицы на с.703.

[3] Это алгебраические результаты, но они применяются затем в анализе, например, в теореме 14.1.10 ниже.

[4] Например, понятие мультииндекса используется при определении мультистепени элементарного дифференциала на с.817.

[5] Напомним, что конечные множества мы определили на с.70.

Предположим, это верно при $n = k$:

$$\operatorname{card} \prod_{i=1}^{k} X_i = \prod_{i=1}^{k} \operatorname{card} X_i. \tag{12.1.2}$$

Тогда для $n = k+1$ мы получим

$$\left(\prod_{i=1}^{k} X_i\right) \times X_{k+1} \cong (0.3.363) \cong \prod_{i=1}^{k+1} X_i$$

и поэтому

$$\operatorname{card} \prod_{i=1}^{k+1} X_i = \operatorname{card}\left(\left(\prod_{i=1}^{k} X_i\right) \times X_{k+1}\right) = (2.1.94) = \operatorname{card}\left(\prod_{i=1}^{k} X_i\right) \cdot \operatorname{card} X_{k+1} = (12.1.2) =$$
$$= \left(\prod_{i=1}^{k} \operatorname{card} X_i\right) \cdot \operatorname{card} X_{k+1} = (2.2.241) = \prod_{i=1}^{k+1} \operatorname{card} X_i.$$

□

Теорему 12.1.1 удобно переписать для приложений в следующем виде:

Теорема 12.1.2 (правило комбинаторного умножения)**.** *Пусть у нас имеется возможность построить конечную последовательность $(x_1, ..., x_n)$ длины n, причем*

1) *элемент x_1 мы можем выбрать d_1 способами,*
2) *после того, как выбран x_1, элемент x_2 мы можем выбрать d_2 способами,*

...) ...

n) *после того, как выбраны x_1,...,x_{n-1}, элемент x_n мы можем выбрать d_n способами.*

Тогда последовательность $(x_1, ..., x_n)$ мы можем выбрать $d_1 \cdot d_2 \cdot ... \cdot d_n$ способами.

◇ **12.1.1.** Сколько слов длины 3 можно составить из алфавита, состоящего из двух букв $X = \{a, b\}$?

Решение. Первую букву в слове можно выбрать двумя способами, вторую – тоже двумя способами, третью – тоже двумя. Получается по теореме 12.1.2 все слово можно составить

$$2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$$

способами.

◇ **12.1.2.** Из пункта A в пункт C можно добраться через пункт B следующими видами транспорта:

1) сначала из A в B: автобусом, поездом или пароходом,
2) потом B в C: пароходом, или самолетом.

Сколькими способами можно выбрать маршрут из A в C?

Решение. Составить маршрут – это все равно что составить последовательность из двух элементов: на первом месте должен быть какой-то вид транспорта при путешествии от A до B, а на втором – при путешествиии от B до C. Первый вид транспорта можно выбрать тремя способами, второй – двумя. Значит маршрут можно выбрать

$$3 \cdot 2 = 6$$

способами.

◇ **12.1.3.** Сколько четырехзначных чисел можно составить из цифр $0, 1, 2, 3, 4, 5$, если

1) цифры не повторяются,
2) цифры могут повторяться,
3) цифры могут повторяться, и получающееся число должно быть нечетным.

Какова в каждом случае вероятность, что получающееся число оканчивается на 0?

Решение.

1. В первом случае (когда цифры не повторяются):

— первую цифру можно выбрать 5 способами (среди цифр $1, 2, 3, 4, 5$),
— после того, как первая цифра выбрана, вторую цифру можно выбрать снова 5 способами (среди 0 и оставшихся 4 цифр из $1, 2, 3, 4, 5$),
— после того, как первые две цифры выбраны, третью цифру можно выбрать 4 способами,

— после того, как первые три цифры выбраны, четвертую цифру можно выбрать 3 способами.

Всего по теореме 12.1.2 в этом случае получается

$$5 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 120$$

вариантов выбора. Среди этих 120 чисел имеется некоторое количество оканчивающихся на 0. Чтобы их сосчитать, снова применим теорему 12.1.2. Здесь выбрать число – это выбрать только первые три цифры, потому что последняя цифра будет 0. Получаем:

— первую цифру можно выбрать 5 способами (среди цифр $1, 2, 3, 4, 5$),
— после того, как первая цифра выбрана, вторую цифру можно выбрать 4 способами (среди оставшихся 4 цифр из $1, 2, 3, 4, 5$),
— после того, как первые две цифры выбраны, третью цифру можно выбрать 3 способами.

Всего в первом случае чисел, оканчивающихся на 0, имеется

$$5 \cdot 4 \cdot 3 = 60.$$

Вероятность, что в первом случае выбранное число оканчивается на 0, будет равна

$$P = \frac{60}{120} = \frac{1}{2}.$$

2. Во втором случае (когда цифры могут повторяться):

— первую цифру можно выбрать 5 способами (среди цифр $1, 2, 3, 4, 5$),
— после того, как первая цифра выбрана, вторую цифру можно выбрать 6 способами (среди цифр $0, 1, 2, 3, 4, 5$),
— после того, как первые две цифры выбраны, третью цифру можно выбрать 6 способами (среди цифр $0, 1, 2, 3, 4, 5$),
— после того, как первые три цифры выбраны, четвертую цифру можно выбрать 6 способами (среди цифр $0, 1, 2, 3, 4, 5$).

Всего по теореме 12.1.2 в этом случае получается

$$5 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 = 1080$$

вариантов выбора, то есть четырехзначных чисел, составленных из цифр $0, 1, 2, 3, 4, 5$. Из них оканчивающихся на 0 будет

$$5 \cdot 6 \cdot 6 = 180$$

(теперь понятно, почему). Вероятность, что в этом случае выбранное число оканчивается на 0, будет равна

$$P = \frac{180}{1080} = \frac{1}{6}.$$

3. В третьем случае (когда цифры могут повторяться и последняя лодна быть нечетной):

— первую цифру можно выбрать 5 способами (среди цифр $1, 2, 3, 4, 5$),
— после того, как первая цифра выбрана, вторую цифру можно выбрать 6 способами (среди цифр $0, 1, 2, 3, 4, 5$),
— после того, как первые две цифры выбраны, третью цифру можно выбрать 6 способами (среди цифр $0, 1, 2, 3, 4, 5$),
— после того, как первые три цифры выбраны, четвертую цифру можно выбрать 3 способами (среди цифр $1, 3, 5$).

Всего по теореме 12.1.2 в этом случае получается

$$5 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 3 = 540$$

вариантов. Из них ни одно число не оканчивается на 0. Поэтому вероятность получения такого числа нулевая:

$$P = \frac{0}{540} = 0.$$

◇ **12.1.4.** Подбрасываются две игральные кости. Найдите вероятность того, что

1) выпадут одинаковые цифры,
2) выпадут четные цифры.

Решение. Всего вариантов выпадения двух костей имеется по теореме 12.1.2

$$6 \cdot 6 = 36$$

(потому что первую цифру можно выбрать 6 способами, как и вторую). Количество вариантов, в которых цифры одинаковые, равно 6. Поэтому вероятность в первом случае равна

$$P = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}.$$

Во втором случае количество вариантов будет равно

$$3 \cdot 3 = 9$$

и вероятность этого

$$P = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}.$$

Размещения. Последовательность $\{x_i;\ i = 1, ..., k\}$ называется *размещением* (длины k), если она инъективна, то есть ее элементы не повторяются:

$$\forall i \neq j \in \{1, ..., k\} \quad x_i \neq x_j$$

Множество всех размещений длины k из элементов множества S обозначается символом A^k_S.

Теорема 12.1.3. *Мощность множества A^k_S всех размещений длины k в (конечном) множестве S, мощности n (также конечна и) равна*

$$A^k_n = \frac{n!}{(n-k)!} \tag{12.1.3}$$

Доказательство. Здесь используется правило комбинаторного умножения (теорема 12.1.2). Посчитаем, сколькими способами можно составить последовательность Длины k с неповторяющимися элементами из множества S мощности n:

— первый элемент можно выбрать n способами (им может быть любой из элементов S)

— после того, как первый элемент выбран, второй можно выбрать $n-1$ способами (им может быть любой из элементов S, кроме уже выбранного первого),

— после того, как первые два элемента выбраны, третий можно выбрать $n-2$ способами (им может быть любой из элементов S, кроме уже выбранных первых двух),

— и так далее, и когда мы дойдем до элемента с номером k, то его можно будет выбрать $n-(k-1)$ способами (им может быть любой из элементов S, кроме уже выбранных $k-1$ первых элементов).

Всего по теореме 12.1.2 в этом случае получается

$$n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot ... \cdot (n-(k-1)) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

вариантов. □

▷ **12.1.5.** Сколькими способами можно рассадить 10 человек на 25 местах?

Ответ: $A^{10}_{25} = \frac{25!}{15!}$.

▷ **12.1.6.** Сколькими способами могут разместиться 5 покупателей в очереди в кассу?

Ответ: $A^5_5 = 5!$.

◇ **12.1.7.** 8 человек рассаживаются за круглым столом. Какова вероятность, что два конкретных человека, А и Б, окажутся рядом?

Всего способов рассадить 8 человек на 8 стульев (будем считать их расставленными в круг) имеется $A^8_8 = 8!$. Из них число вариантов, когда А и Б оказываются рядом, считатеся по теореме 12.1.2:

— сначала выбираем из 8 расставленнх в круг стульев пару соседних, на которых будут сидеть А и Б; таких пар имеется 8;

— после того как пара соседних стульев выбрана, выбираем из них, на каком конкретно из них будет сидеть А, а на каком Б; таких вариатнтов имеется 2;

— после того, как выбраны места для А и Б, остается еще 6 свободных стульев и 6 человек, которые нужно на них разместить; это можно сделать $A^6_6 = 6!$ способами.

В итоге вариантов, когда А и Б оказываются рядом имеется

$$8 \cdot 2 \cdot 6!.$$

Вероятность, этого события будет

$$P = \frac{8 \cdot 2 \cdot 6!}{8!} = \frac{2}{7}.$$

Подмножества.

Теорема 12.1.4. *Если (конечное) множество S состоит из n элементов, то множество 2^S всех подмножеств в множестве S (также конечно и) состоит из 2^n элементов.*

Доказательство. Занумеруем элементы S:

$$S = \{x_1, ..., x_n\}.$$

Задать подмножество M в S – то же, что присвоить каждому элементу x_i число a_i, равное 1, если $x_i \in M$, и 0, если $x_i \notin M$. Это то же самое, что выбрать последовательность $(a_1, ..., a_n)$ из чисел 0 и 1. Таких последовательностей по теореме 12.1.2 имеется

$$\underbrace{2 \cdot 2 \cdot ... \cdot 2}_{n \text{ множителей}} = 2^n$$

(потому что первое число a_1 можно выбрать 2 способами, второе a_2 – тоже 2 способами, и так далее). $\square$

Напомним, что число сочетаний из n элементов по k было определено нами в главе 2 формулой (2.2.249):

$$C_n^k = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}, \qquad (0 \leqslant k \leqslant n) \tag{12.1.4}$$

Теорема 12.1.5. *Если (конечное) множество S состоит из n элементов, то для любого $k \leqslant n$ множество C_S^k всех подмножеств мощности k в множестве S (также конечно и) состоит из C_n^k элементов.*

Доказательство. Обозначим буквой E число всех подмножеств мощности k в S. Наша задача – показать, что $E = C_n^k$.

По теореме (12.1.3), число последовательностей длины k из неповторяющихся элементов множества S равно

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}. \tag{12.1.5}$$

То же самое число можно посчитать другим способом:

— сначала нужно выбрать какое-нибудь подмножество T мощности k в S – число таких вариантов равно E (мы еще не знаем, сколько это);

— после того, как выбрано подмножество T мощности k в S, мы нумеруем его элементы цифрами от 1 до k – это можно сделать $A_k^k = k!$ способами (по теореме (12.1.3)).

В результате по правилу комбинаторного умножения (теорема 12.1.2) получается всего

$$E \cdot k! \tag{12.1.6}$$

вариантов выбрать размещение длины k в S.

Приравнивая (12.1.6) и (12.1.5), получаем:

$$E \cdot k! = \frac{n!}{(n-k)!} \quad \Longrightarrow \quad E = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} = C_n^k.$$

$\square$

◇ **12.1.8.** Сколько экзаменационных комиссий из 7 человек можно составить из 14 преподавателей? Какова вероятность, что в выбранной комиссии окажется данный человек?

Пусть S – множество преподавателей (мощности 14), из которого выбирается комиссия. Выбрать комиссию из 7 человек – это то же самое, что выбрать подмножество в S мощности 7. Таких подмножеств по теореме 12.1.5 имеется

$$C_{14}^7 = \frac{14!}{(7!)^2}$$

– и это ответ на первый вопрос.

Далее найдем число комиссий, в которые входит данный человек. Выбрать такую комиссию – все равно, что добавить к этому человеку еще 6 из 13 оставшихся. А это то же самое, что выбрать подмножество мощности 6 из множества мощности 13. Таких подмножеств по теореме 12.1.5 имеется

$$C_{13}^6 = \frac{13!}{6! \cdot 7!}$$

Теперь вероятность, что в выбранной комиссии окажется данный человек равна

$$P = \frac{C_{13}^6}{C_{14}^7} = \frac{\frac{13!}{6! \cdot 7!}}{\frac{14!}{(7!)^2}} = \frac{7!}{6! \cdot 14} = \frac{1}{2}$$

◇ **12.1.9.** Сколько имеется четырехзначных чисел, у которых каждая следующая цифра меньше предыдущей? Какова вероятность, что выбранное наугад четырехзначное число будет таким?

Решение. Выбрать четырехзначное число, у которого каждая следующая цифра меньше предыдущей – все равно что выбрать подмножество мощности 4 в множестве $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ всех цифр (потому что когда мы такое подмножество выберем, его останется упорядочить по убыванию, и получится число с нужным свойством). Таких подмножеств имеется

$$C_{10}^4 = \frac{10!}{4! \cdot 6!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{4 \cdot 3 \cdot 2} = 10 \cdot 3 \cdot 7.$$

Всего четырехзначных чисел по правилу комбинаторного умножения (теорема 12.1.2) имеется

$$9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10.$$

Вероятность, что выбранное наугад четырехзначное число будет таким, как нам надо, равна

$$P = \frac{C_{10}^4}{9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10} = \frac{10 \cdot 3 \cdot 7}{9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10} =$$

$$= \frac{7}{3 \cdot 10 \cdot 10} = \frac{7}{300}$$

▷ **12.1.10.** В партии из 10 изделий 3 бракованы. Наудачу выбираются 3 изделия. Какова вероятность, что

1) все выбранные изделия бракованы?
2) все выбранные изделия качественные?
3) хотя бы одно из выбранных изделий браковано?
4) ровно 2 из выбранных изделий браковано?

Ответы:

1) $\frac{1}{C_{10}^3}$,
2) $\frac{C_7^3}{C_{10}^3}$,
3) $\frac{C_{10}^3 - C_7^3}{C_{10}^3}$,
4) $\frac{C_3^2 \cdot C_7^1}{C_{10}^3}$.

Разбиения. Пусть нам даны натуральное число $m \in \mathbb{N}$ и конечная последовательность натуральных чисел $(k_1, ..., k_n)$, причем

$$k_1 + k_2 + ... + k_n = m.$$

И пусть S – множество мощности m.

- *Разбиением* множества S типа $(k_1, ..., k_n)$ называется последовательность множеств $K_1, ..., K_n$ со свойствами:

$$S = \bigcup_{i=1}^{n} K_i, \qquad \forall i \neq j \quad K_i \cap K_j = \varnothing, \qquad \forall i = 1, ..., k \quad \operatorname{card} K_i = k_i.$$

  Множество всех разбиений множества S типа $(k_1, ..., k_n)$ обозначается $C_S^{k_1,...,k_n}$.

Теорема 12.1.6. *Число разбиений типа $(k_1, ..., k_n)$ конечного множества S мощности m равно*

$$C_m^{k_1,...,k_n} = \frac{m!}{k_1! \cdot ... \cdot k_n!} \tag{12.1.7}$$

Доказательство. Подсчитаем, сколькими способами можно выбрать разбиение $K_1, ..., K_n$ множества S:

— первое множество K_1 (из k_1 элементов в множестве из m элементов) можно по теореме 12.1.5 выбрать $C_m^{k_1}$ способами,

— после того, как K_1 выбрано, второе множество K_2 (из k_2 элементов в множестве из оставшихся $m - k_1$ элементов) можно по теореме 12.1.5 выбрать $C_{m-k_1}^{k_1}$ способами,

— после того, как K_1 и K_2 выбраны, третье множество K_3 (из k_3 элементов в множестве из оставшихся $m - k_1 - k_2$ элементов) можно по теореме 12.1.5 выбрать $C_{m-k_1}^{k_1}$ способами,

...

— и последнее множество, K_n уже нужно будет выбирать из множества мощности $m - k_1 - k_2 - ... - k_{n-1} = k_n$ элементов, и оно уже будет выбираться однозначно.

В результате по правилу комбинаторного умножения (теорема 12.1.2) мы получаем, что способов выбрать разбиение $K_1, ..., K_n$ множества S имеется

$$C_m^{k_1} \cdot C_{m-k_1}^{k_2} \cdot C_{m-k_1-k_2}^{k_3} \cdot ... \cdot C_{m-k_1-k_2-...-k_{m-2}}^{k_{m-1}} \cdot 1 =$$

$$= \frac{m!}{k_1!(m-k_1)!} \cdot \frac{(m-k_1)!}{k_2!(m-k_1-k_2)!} \cdot \frac{(m-k_1-k_2)!}{k_3!(m-k_1-k_2-k_3)!} \cdot ... \cdot \frac{(m-k_1-k_2-...-k_{n-1})!}{k_{n-1}!(m-k_1-k_2-k_3-...-k_{n-1})!} =$$

$$= \frac{m!}{k_1!\cdot k_2!\cdot k_3!\cdot ...\cdot k_{n-1}!(m-k_1-k_2-k_3-...-k_{n-1})!} = \frac{m!}{k_1!\cdot k_2!\cdot k_3!\cdot ...\cdot k_{n-1}!\cdot k_n!}$$

□

◇ **12.1.11.** Сколькими способами можно разделить $3m$ предметов между 3 людьми поровну?

Здесь речь идет о разбиении типа (m, m, m), поэтому по теореме 12.1.6 число разбиений равно

$$C_{3m}^{m,m,m} = \frac{(3m)!}{m!\cdot m!\cdot m!} = \frac{(3m)!}{(m!)^3}.$$

◇ **12.1.12.** 10 человек случайно размещаются в гостиннице по трем номерам:

— 2 номера 3-местных, и

— 1 номер 4-местный.

Какова вероятность, что два конкретных человека, А и Б, попадут в 4-местный номер?

Разместить 10 человек по таким номерам – все равно что выбрать разбиение 10-элементного множества (из 10 человек) типа $(3, 3, 4)$. Таких разбиений имеется

$$C_{10}^{3,3,4} = \frac{10!}{3!3!4!}.$$

Далее, разместить 10 человек так, чтобы двое попали в 4-местный номер – все равно, что разместить оставшихся 8 человек по номерам вместимостью 3, 3 и 2 (оставшиеся 2 места в 4-местном номере). Это в свою очередь эквивалентно разбиению 8-элементного множества типа $(3, 3, 2)$, и таких разбиений имеется

$$C_8^{3,3,2} = \frac{8!}{3!3!2!}.$$

Вероятность, что А и Б попадут в 4-местный номер равна отношению числа благоприятных исходов для этого события к числу всех возможных исходов:

$$P = \frac{C_8^{3,3,2}}{C_{10}^{3,3,4}} = \frac{\frac{8!}{3!3!2!}}{\frac{10!}{3!3!4!}} = \frac{8!4!}{10!2!} = \frac{4\cdot 3}{10\cdot 9} = \frac{1}{15}.$$

◇ **12.1.13.** В ящике имеется $k_1+k_2+...+k_n = m$ кубиков разных цветов:

— k_1 кубиков первого цвета,

— k_2 кубиков второго цвета,

...

— k_n кубиков n-го цвета.

Случайным образом кубики раскладываются в ряд. Какова вероятность, что первые k_1 кубиков окажутся первого цвета?

Решение. Разложить кубики в ряд – все равно, что разбить множество $\{1, 2, ..., m\}$ на подмножества $(K_1, K_2, ..., K_n)$ типа $(k_1, k_2, ..., k_n)$ (потому что каждое такое разбиение показывает, какой цвет имеет кубик с данным номером). Таких разбиений имеется

$$C_m^{k_1,...,k_n} = \frac{m!}{k_1!\cdot ...\cdot k_n!}.$$

Среди них имеются разбиения, у которых элементы первого множества K_1 находятся на первых k_1 местах. Выбрать такое разбиение – все равно что выбрать расположение остальных множеств $K_2, ..., K_n$, то есть выбрать разбиение множества $\{k_1+1, ..., m\}$ (из $m-k_1$ элементов) по типу $(k_2, ..., k_n)$. Таких разбиений имеется

$$C_{m-k_1}^{k_2,...,k_n} = \frac{(m-k_1)!}{k_2!\cdot ...\cdot k_n!}.$$

Вероятность, что попадется именно такое разбиение равна отношению числа таких разбиений к числу всех разбиений:

$$P = \frac{C_{m-k_1}^{k_2,...,k_n}}{C_m^{k_1,...,k_n}} = \frac{\frac{(m-k_1)!}{k_2!\cdot...\cdot k_n!}}{\frac{m!}{k_1!\cdot...\cdot k_n!}} = \frac{(m-k_1)!\cdot k_1!}{m!}.$$

◇ **12.1.14.** Бросается 5 игральных костей. Найти вероятности, что

1) выпадут 2 единицы, 2 тройки и 1 шестерка,
2) выпадут неповторяющиеся цифры,
3) выпадут ровно 3 одинаковые цифры.

Решение. Результат бросания 5 костей можно понимать как последовательность длинной 5 из цифр $1, 2, 3, 4, 5, 6$. Например, последовательность

$$(3, 1, 4, 2, 2)$$

означает, что первая косточка выпала цифрой 3, вторая – цифрой 1, третья – цифрой 4, четвертая и пятая – цифрой 2. Таких последовательностей имеется

$$6\cdot 6\cdot 6\cdot 6\cdot 6 = 6^5.$$

1. Заметим, что каждую последовательность, удовлетворяющую первому условию (то есть такую, в которой 2 единицы, 2 тройки и 1 шестерка) можно понимать как разбиение типа $(2, 2, 1)$ множества мест (индексов) $\{1, 2, 3, 4, 5\}$. Например, последовательность

$$(1, 1, 3, 3, 6) \qquad (12.1.8)$$

порождает такое разбиение множества мест:

$$\{1, 2\}, \quad \{3, 4\}, \quad \{5\}.$$

– здесь первое множество, $\{1, 2\}$, показывает, что на первых двух местах в (12.1.8) стоят единицы, второе множество, $\{3,4\}$ – что на третьем и четвертом месте стоят тройки, а последнее множество – что на пятом месте стоит шестерка.

Наоборот, если дано, например, разбиение

$$\{2,4\}, \quad \{1,5\}, \quad \{3\}.$$

то ему соответствует последовательность выпввших цифр

$$(3,1,6,1,3).$$

Таким образом, описать распределение выпавших костей с 2 единицами, 2 тройками и 1 шестеркой – то же самое, что задать разбиение типа $(2,2,1)$ множества мест (индексов) $\{1,2,3,4,5\}$. Получается, что между нужными распределениями выпавших костей и разбиенями имеется взаимно однозначное соответствие. А по теореме 12.1.6 таких разбиений имеется

$$C_5^{2,2,1} = \frac{5!}{2!\cdot 2!\cdot 1!} = 5\cdot 3\cdot 2 = 30.$$

Теперь вероятность выпадения нужного распределения

$$P = \frac{30}{6^5} = \frac{5}{6^4}.$$

2. Во втором вопросе благоприятным исходом является размещение длины 5 из элементов множества $\{1,2,3,4,5,6\}$. По формуле (12.1.3) таких последовательностей имеется

$$A_6^5 = \frac{6!}{(6-5)!} = 6!.$$

Вероятность, что выпадет такое распределение

$$P = \frac{6!}{6^5} = \frac{5!}{6^4}.$$

3. В третьем вопросе число благоприятных распределений выпавших костей можно посчитать с помощью правила комбинаторного умножения. Выбрать последовательность длины 5, в которой ровно 3 одинаковых цифры из множества $\{1,2,3,4,5,6\}$ можно так:

— сначала выбираются 3 места, куда лягут эти одинаковые цифры; это то же самое, что выбрать подмножество мощности 3 в множестве индексов мощности 5, поэтому таких вариантов имеется
$$C_5^3 = \frac{5!}{3!\cdot 2!};$$
— после этого выбираем цифру, которая на эти 3 места ляжет; всего вариантов имеется
$$6$$
— затем на оставшиеся 3 места выбираем цифры из оставшизся 4-х, причем с условием, чтобы они не повторялись; это то же самое, что выбрать размещение длины 2 в множестве мощности 2, и по формуле (12.1.3) таких последовательностей имеется
$$A_4^2 = \frac{4!}{(4-2)!} = 12.$$

По правилу комбинаторного умножения (теорема 12.1.2), число таких последовательностей равно

$$\frac{5!}{3!\cdot 2!}\cdot 6\cdot 12.$$

Вероятность выпадения такой комбинавции

$$P = \frac{\frac{5!}{3!\cdot 2!}\cdot 6\cdot 12}{6^5} = \frac{5!}{6^4}.$$

◇ **12.1.15.** 52 карты раздаются по 4 игрокам (каждому по 13 карт). Найти вероятность того, что

1) каждый игрок получит туза,
2) какой-то игрок получит карты только одной масти,
3) все тузы попадут к одному игроку,
4) двое определенных игроков не получат ни одного туза.

Здесь задать распределение карт – то же что задать разбиение типа $(13,13,13,13)$ множества из 52 карт. Таких разбиений всего

$$C_{52}^{13,13,13,13} = \frac{52!}{(13!)^4}.$$

1. В первом вопросе число благоприятных исходов можно посчитать так:

— сначала раздаем тузы по 4 игрокам, всего вариантов
$$A_4^4 = 4!,$$
— потом распределяем остальные 48 карт по 4 игрокам, всего вариантов
$$C_{48}^{12,12,12,12} = \frac{48!}{(12!)^4}$$

В результате благоприятных исходов

$$4!\cdot\frac{48!}{(12!)^4}.$$

Вероятность такого распределения карт

$$P = \frac{4!\cdot\frac{48!}{(12!)^4}}{\frac{52!}{(13!)^4}} = \frac{4!\cdot 48!\cdot 13^4}{52!} = \frac{2\cdot 3\cdot 4\cdot 13^4}{49\cdot 50\cdot 51\cdot 52} = \\ = \frac{2\cdot 3\cdot 13^3}{49\cdot 50\cdot 51} = \frac{13^3}{49\cdot 25\cdot 17}.$$

2. Во втором вопросе благоприятные исходы считаются так:

— сначала выбираем игрока, который получит карты одной масти, таких вариантов имеется
$$4,$$

— затем выбираем масть, которую он получит, таких вариантов имеется тоже

$$4$$

— после этого распределяем оставшиеся 39 карт по оставшимся 3 игрокам, это то же самое, что задать разбиенти типа $13, 13, 13$ множества из 39 элементов, вариантов будет

$$C_{39}^{13,13,13} = \frac{39!}{(13!)^3}.$$

По правилу комбинаторного умножения (теорема 12.1.2), всего благоприятных исходов будет

$$4 \cdot 4 \cdot \frac{39!}{(13!)^3}.$$

Вероятность такого распределения карт

$$P = \frac{4 \cdot 4 \cdot \frac{39!}{(13!)^3}}{\frac{52!}{(13!)^4}} = \frac{4^2 \cdot 39! \cdot 13}{52!}.$$

3. В третьем вопросе:

— сначала выбираем игрока, которому попадут тузы, таких вариантов имеется

$$4,$$

— после этого распределяем оставшиеся 48 карт, это то же самое, что задать разбиенти типа $9, 13, 13, 13$ множества из 48 элементов, вариантов будет

$$C_{48}^{9,13,13,13} = \frac{48!}{9! \cdot (13!)^3}.$$

По правилу комбинаторного умножения (теорема 12.1.2), всего благоприятных исходов будет

$$4 \cdot \frac{48!}{9! \cdot (13!)^3}.$$

Вероятность такого распределения карт

$$P = \frac{4 \cdot \frac{48!}{9! \cdot (13!)^3}}{\frac{52!}{(13!)^4}} = \frac{4 \cdot 13}{9 \cdot 49 \cdot 50 \cdot 51 \cdot 52} = \\ = \frac{1}{9 \cdot 49 \cdot 50 \cdot 51}.$$

4. В четвертом вопросе будем считать, что тузы должны получить только 1-й и 2-й игроки (а 3-й и 4-й их не получат). Здесь придется рассмотреть 5 случаев:

a) сначала считаем, что 1-й игрок получил все 4 туза, а 2-й (и остальные) – ни одного; тогда оставшиеся 48 карт распределятся в пропорции $(9, 13, 13, 13)$, и число таких вариантов будет

$$C_{48}^{9,13,13,13},$$

b) затем рассматриваем ситуацию, когда 1-й игрок получил 3 туза, а 2-й – 1 туз; тогда оставшиеся 48 карт распределятся в пропорции $(10, 12, 13, 13)$, и число таких вариантов будет

$$C_{48}^{10,12,13,13},$$

c) затем считаем, что 1-й игрок получил 2 туза, и 2-й – 2 туза; тогда оставшиеся 48 карт распределятся в пропорции $(11, 11, 13, 13)$, и число таких вариантов будет

$$C_{48}^{11,11,13,13},$$

d) затем рассматриваем ситуацию, когда 1-й игрок получил 1 туз, и 2-й – 3 туза; тогда оставшиеся 48 карт распределятся в пропорции $(12, 10, 13, 13)$, и число таких вариантов будет

$$C_{48}^{12,10,13,13},$$

e) наконец, остается вариант, когда 1-й игрок не получает тузов, и 2-й получает все 4 туза; тогда оставшиеся 48 карт распределятся в пропорции $(13, 9, 13, 13)$, и число таких вариантов будет

$$C_{48}^{13,9,13,13}.$$

Эти множества исходов не пересекаются (то есть не может быть, чтобы какое-то распределение карт подходило, например, под случай a и одновременно под случай b). Поэтому общее число таких исходов равно сумме чисел в каждом варианте:

$$C_{48}^{9,13,13,13} + C_{48}^{10,12,13,13} + C_{48}^{11,11,13,13} + \\ + C_{48}^{12,10,13,13} + C_{48}^{13,9,13,13}.$$

Вероятность такого распределения карт

$$P = (C_{48}^{9,13,13,13} + C_{48}^{10,12,13,13} + C_{48}^{11,11,13,13} + \\ + C_{48}^{12,10,13,13} + C_{48}^{13,9,13,13})/C_{52}^{13,13,13,13}$$

Мультииндексы $\mathsf{M}_n[m]$. *Выборкой из n элементов*, или *мультииндексом длины n*, называется произвольное отображение $k : \{1, ..., n\} \to \mathbb{Z}_+$. При этом

— число

$$|k| = \sum_{i=1}^{n} k_i \qquad (12.1.9)$$

называется *объемом* выборки (мультииндекса) k,

— число

$$k! = \sum_{i-1}^{n} k_i! \tag{12.1.10}$$

называется *факториалом* выборки (мультииндекса) k.

— число

$$\binom{|k|}{k} := \frac{|k|!}{k!} = \frac{|k|!}{k_1! \cdot ... \cdot k_n!} \tag{12.1.11}$$

называется *биномальным коэффициентом* выборки (мультииндекса) k. Часто оно обозначается символом C_m^k (где $m = |k|$).

Множество всех выборок (мультииндексов) длины n и объема m мы будем обозначать символом $\mathsf{M}_n[m]$. Множество всех мультииндексов длины n мы обозначаем M_n. Очевидно,

$$\mathsf{M}_n = \bigcup_{m\in\mathbb{Z}_+} \mathsf{M}_n[m] \tag{12.1.12}$$

Теорема 12.1.7. *Число мультииндексов длины n и объема m равно*

$$\operatorname{card} \mathsf{M}_n[m] = C_{m+n-1}^{n-1} = C_{m+n-1}^{m} = \frac{(n+m-1)!}{m! \cdot (n-1)!} \tag{12.1.13}$$

Доказательство. Обозначим символом E множество всех последовательностей длины $m+n-1$, состоящих из нулей и единиц и имеющих m единиц и $n-1$ нулей:

$$\varepsilon \in E \quad \Longleftrightarrow \quad \varepsilon = (\varepsilon_1, ..., \varepsilon_{m+n-1}), \quad \varepsilon_i \in \{0; 1\}, \quad \operatorname{card}\{i : \ \varepsilon_i = 1\} = m, \quad \operatorname{card}\{i : \ \varepsilon_i = 0\} = n-1.$$

Заметим, что каждая такая последовательность порождает некоторый мультииндекс $k : \{1, ..., n\} \to \mathbb{Z}_+$ объема m по такому правилу:

1) k_1 – число единиц в ε до первого нуля,

2) k_2 – число единиц в ε между первым и вторым нулями,

...)

i) k_i – число единиц в ε между $i-1$-м и i-м нулями,

...)

n) k_n – число единиц в ε после последнего нуля.

Более того, это правило устанавливает биекцию между мультииндексами $k : \{1, ..., n\} \to \mathbb{Z}_+$ объема m и последовательностями $\varepsilon \in E$. Поэтому количество таких мультииндексов равно чилу элементов в E. А задать последовательность в E – то же самое, что описать куда поставить $n-1$ нулей в строке из $m+n-1$ элементов. То есть выбрать подмножество мощности $n-1$ в множестве мощности $m+n-1$. По теореме 12.1.5 таких подмножеств имеется C_{m+n-1}^{n-1}. □

◇ **12.1.16.** В кондитерской 10 видов пирожных. Покупатель выбрал 8. Какова вероятность, что

1) все выбранные пирожные будут одного вида,
2) выбранные пирожные будут разных видов (то есть не все одного вида),
3) будут выбраны по 2 пирожных одного вида?

Здесь выбрать пирожные – это то же самое, что сделать выборку из 10 элементов объема 8. По формуле (12.1.13) число таких выборок будет равно $C_{8+10-1}^{10-1} = C_{17}^9$.

1. В первом случае имеется всего 10 способов выбрать пирожные (так, чтобы они были одного вида). Поэтому вероятность будет

$$P = \frac{10}{C_{17}^9}.$$

2. Во втором случае сделать выбор – значит сделть выборку, отличную от случая 1. Таких выборок понятное дело, будет $C_{17}^9 - 10$. Вероятность такого события

$$P = \frac{C_{17}^9 - 10}{C_{17}^9} = 1 - \frac{10}{C_{17}^9}.$$

3. В третьем случае сделать выбор – значит выбрать 4 вида пирожных из 10. Это то же самое, что выбрать подмножество мощности 4 в

множестве мощности 10. По теореме 12.1.5 таких вариантов имеется C_{10}^4. Получается, вероятность такого события равна

$$P = \frac{C_{10}^4}{C_{17}^9}.$$

▷ **12.1.17.** В библиотеке книги по 16 разделам. Заказано 10 книг. Какова вероятность, что

1) все заказанные книги будут из одного раздела,
2) заказанные книги будут не из одного раздела,
3) никакие две книги не будут из одного раздела?

◇ **12.1.18.** m одинаковых шаров случайно раскладываются по n урнам. Найти вероятность, что

1) все шары лягут в 1-ю урну,
2) в 1-у урну не попадет ни одного шара,
3) все шары лягут в какую-то одну урну?

Здесь разложить шары по урнам – то же самое, что задать выборку из n элементов объемом m. По формуле (12.1.13) таких выборок имеется C_{m+n-1}^{n-1}.

1. В первой ситуации благоприятный исход имеется один: $(m, 0, ..., 0)$. Поэтому вероятность этого события равна

$$P = \frac{1}{C_{m+n-1}^{n-1}}.$$

2. Во второй ситуации благоприятным исходом является любая выборка $(k_1, k_2, ..., k_n)$, у которой первый элемент нулевой, $k_1 = 0$. Задать такую выборку – то же самое, что задать оставшиеся элементы $(k_2, ..., k_n)$ (с условием, что их сумма будет равна m). Это то же самое, что задать выборку из $n-1$ элементов объемом m. По формуле (12.1.13) таких выборок имеется C_{m+n-2}^{n-2}. Вероятность такого события равна

$$P = \frac{C_{m+n-2}^{n-2}}{C_{m+n-1}^{n-1}}.$$

3. В третьей ситуации благоприятных исходов будет n, потому что выбрать благоприятный исход - то же самое, что выбрать урну, куда попадут все шары. В результате вероятность будет

$$P = \frac{n}{C_{m+n-1}^{n-1}}.$$

- *Представлением мультииндекса* $k \in \mathsf{M}_n[m]$ называется произвольная последовательность $\sigma : \{1, ..., |k|\} \to \{1, ..., n\}$ со свойством

$$\forall i \in \{1, ..., n\} \quad \operatorname{card} \sigma^{-1}(i) = k_i.$$

Множество всех представлений мультииндекса $k \in \mathsf{M}_n[m]$ обозначается $\mathsf{Rep}(k)$.

Теорема 12.1.8. *Число представлений данного мультииндекса* $k \in \mathsf{M}_n[m]$ *равно*

$$\operatorname{card} \mathsf{Rep}(k) = C_{|k|}^{k_1,...,k_n} = \binom{|k|}{k} = \frac{|k|!}{k!} = \frac{|k|!}{k_1! \cdot ... \cdot k_n!} \tag{12.1.14}$$

Доказательство. Задать представление мультииндекса $k \in \mathsf{M}_n[m]$ – то же самое, что задать разбиение типа $k_1, ..., k_n$ множества $\{1, ..., m\}$. А по теореме 12.1.6 таких разбиений имеется $C_{|k|}^{k_1,...,k_n}$. □

◇ **12.1.19.** В примере 12.1.16 предположим, что выборка пирожных была такой: $(4, 3, 1)$ (то есть 4 одного вида, 3 другого и еще 1 третьего). Сколькими способами их можно распределить между 8 людьми за столом?

Здесь распределить пирожные между людьми – то же самое, что задать разбиение людей типа $(4, 3, 1)$. Таких разбиений будет по теореме 12.1.6 (или по теореме 12.1.8) $C_8^{4,3,1} = \frac{8!}{4!\cdot 3!\cdot 1!}$.

▷ **12.1.20.** Сколько разных слов можно получить перестановками слов

1) "мама",
2) "математика",
3) "комбинаторика"?

(b) Перестановки

- *Перестановкой* длины $n \in \mathbb{N}$ называется произвольное биективное отображение начального интервала $\{1, ..., n\}$ натурального ряда в себя:

$$\sigma : \{1, ..., n\} \to \{1, ..., n\}$$

На с.73 мы определили конечные последовательности как отображения с областью определения на конечном ординале. Нам будет удобно немного видоизменить это определение: под конечной последовательностью мы будем понимать отображение с областью определения на начальном интервале $\{1,...,n\}$ натурального ряда. Поэтому перестановку σ длины n также удобно записывать в виде конечной последовательности (строки):

$$\sigma = (\sigma(1), \sigma(2), ..., \sigma(n)) \tag{12.1.15}$$

Множество всех перестановок длины n обозначается символом $\mathfrak{S}_n$.

Число перестановок.

Теорема 12.1.9. *Число всех перестановок длины n равно $n!$:*

$$\operatorname{card} \mathfrak{S}_n = n! \tag{12.1.16}$$

Доказательство. Каждую перестановку $\sigma : \{1,...,n\} \to \{1,...,n\}$ можно представлять себе как размещение длины n в множестве мощности n. По формуле (12.1.3) число таких размещений будет равно

$$A_n^n = \frac{n!}{(n-n)!} = n!.$$

$\square$

Пусть $\tau : \{1,...,m\} \to \{1,...,n\}$ – произвольное отображение. Условимся говорить, что перестановка $\sigma : \{1,...,m\} \to \{1,...,m\}$ не меняет отображение τ, если

$$\tau \circ \sigma = \tau.$$

Теорема 12.1.10. *Число перестановок $\sigma : \{1,...,m\} \to \{1,...,m\}$ не меняющих отображение $\tau : \{1,...,m\} \to \{1,...,n\}$ равно*

$$\operatorname{card}\{\sigma \in \mathfrak{S}_m : \ \tau \circ \sigma = \tau\} = \prod_{i=1}^{n} \operatorname{card} \tau^{-1}(i)!. \tag{12.1.17}$$

В частном случае, если τ является представлением мультииндекса k, то число перестановок его аргументов, не меняющих τ, равно факториалу мультииндекса k:

$$\operatorname{card}\{\sigma \in \mathfrak{S}_m : \ \tau \circ \sigma = \tau\} = k!. \tag{12.1.18}$$

Доказательство. Выбрать такую перестановку σ – все равно что сначала выбрать перестановку индексов, лежащих в множестве $\tau^{-1}(1)$ (таких перестановок имеется $\operatorname{card} \tau^{-1}(1)!$), затем выбрать перестановку индексов, лежащих в множестве $\tau^{-1}(2)$ (таких перестановок имеется $\operatorname{card} \tau^{-1}(2)!$), и так далее. Вместе по правилу комбинаторного умножения имеется $\operatorname{card} \tau^{-1}(1)! \cdot \operatorname{card} \tau^{-1}(2)! \cdot ... \cdot \operatorname{card} \tau^{-1}(n)!$ перестановок. $\square$

Группа перестановок $\mathfrak{S}_n$. Для любых двух перестановок σ и τ длины n их *композиция* $\sigma \circ \tau$ определяется как обычная композиция отображений[6] из $\{1,...,n\}$ в $\{1,...,n\}$:

$$(\sigma \circ \tau)(i) = \sigma(\tau(i)), \qquad i \in \{1,...,n\} \tag{12.1.19}$$

Множество $\mathfrak{S}_n$ всех перестановок образует *группу* относительно этой операции, Это означает, что, во-первых, выполняется тождество ассоциативности,

$$(\sigma \circ \tau) \circ \upsilon = \sigma \circ (\tau \circ \upsilon), \qquad \sigma, \tau, \upsilon \in \mathfrak{S}_n,$$

во-вторых, существует некий элемент $e \in \mathfrak{S}_n$, а именно, тождественная перестановка

$$e(i) = i, \qquad i \in \{1,...,n\}, \tag{12.1.20}$$

характеризуемый условием

$$\sigma \circ e = \sigma = e \circ \sigma, \qquad \sigma \in \mathfrak{S}_n,$$

и, в третьих, у любой перестановки $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ существует обратная перестановка $\sigma^{-1} \in \mathfrak{S}_n$ (обратное отображение[7] для биекции σ), характеризуемая условием

$$\sigma \circ \sigma^{-1} = e = \sigma^{-1} \circ \sigma.$$

[6]Напомним, что композиция отображений была определена на с.40 части I.

[7]Обратное отображение определялось на с.42.

Циклы. Говорят, что перестановка $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ *оставляет неподвижным* элемент k множества $\{1, ..., n\}$, если
$$\sigma(k) = k.$$
В противном случае, если
$$\sigma(k) \neq k,$$
говорят, что перестановка $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ *сдвигает* элемент k.

Говорят, что перестановка $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ *связывает* два элемента k и l множества $\{1, ..., n\}$, если для некоторого $m \in \mathbb{Z}$
$$\sigma^m(k) = l.$$

Циклом или *циклической перестановкой* длины $n \in \mathbb{N}$ называется всякая перестановка $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, которая связывает любые два сдвигаемых ею элемента $k, l \in \{1, ..., n\}$:
$$\Big(\sigma(k) \neq k \quad \& \quad \sigma(l) \neq l\Big) \quad \Longrightarrow \quad \exists m \in \mathbb{Z} \quad \sigma^m(k) = l.$$

Всякая последовательность попарно различных элементов $\{a_1, ..., a_r\}$ множества $\{1, ..., n\}$ определяет цикл, обозначаемый символом $(a_1\ a_2\ ...\ a_r)$, по формуле
$$(a_1\ a_2\ ...\ a_r)(k) = \begin{cases} k, & k \notin \{a_1, ..., a_r\} \\ a_{i+1}, & k = a_i,\ i < r \\ a_1, & k = a_r \end{cases}. \tag{12.1.21}$$
(отличие от записи (12.1.15) в том, что здесь элементы строки a_i разделяются пробелами, а не запятыми).

Теорема 12.1.11. *Всякая перестановка $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ представима в виде композиции некоторого числа циклов.*

Доказательство. Для любых двух элементов k и l множества $\{1, ..., n\}$ условимся писать $k \sim l$ если перестановка σ связывает эти элементы. Нетрудно видеть, что отношение $\sim$ является отношением эквивалентности на $\{1, ..., n\}$. Поэтому оно разбивает $\{1, ..., n\}$ на классы эквивалентности. Обозначим их $I_1, ..., I_p$. Для каждого $q = 1, ..., p$ положим
$$\tau_q(k) = \begin{cases} \sigma(k), & k \in I_q \\ k, & k \notin I_q \end{cases}$$
Нетрудно заметить, что каждое отображение τ_q является циклической перестановкой длины n. С другой стороны, для всякого $k \in \{1, ..., n\}$ выбрав номер q так, чтобы $k \in I_q$, мы получим
$$\begin{aligned}(\tau_1 \circ ... \circ \tau_q \circ ... \circ \tau_p)(\overset{\substack{I_p \\ \neq \\ I_q \\ \cup\!\!\!\shortmid}}{k}) &= (\tau_1 \circ ... \circ \tau_q \circ ... \circ \tau_{p-1})(\overset{\substack{I_{p-1} \\ \neq \\ I_q \\ \cup\!\!\!\shortmid}}{k}) = ... = (\tau_1 \circ ... \circ \tau_q)(k) = \\ &= (\tau_1 \circ ... \circ \tau_q \circ ... \circ \tau_{q-1})(\underset{\substack{\cap\!\!\!\shortmid \\ I_q \\ \neq \\ I_{q-1}}}{\sigma(k)}) = (\tau_1 \circ ... \circ \tau_q \circ ... \circ \tau_{q-2})(\underset{\substack{\cap\!\!\!\shortmid \\ I_q \\ \neq \\ I_{q-2}}}{\sigma(k)}) = \tau_1(\underset{\substack{\cap\!\!\!\shortmid \\ I_q \\ \neq \\ I_1}}{\sigma(k)}) = \sigma(k)\end{aligned}$$
(мы здесь для наглядности считаем, что $2 < q < p - 1$). То есть композиция циклов τ_q совпадает с σ:
$$\tau_1 \circ ... \circ \tau_p = \sigma$$
(при этом можно заметить, что последовательность перемножения циклов τ_q здесь не важна, при любой их перестановке результатом все равно будет σ). $\square$

Транспозиции.

- *Транспозицией* называется цикл, сдвигающий ровно два элемента, то есть перестановка, меняющая местами два числа $i \neq j$, а остальные оставляющая на месте:
$$(i\ j)(k) = \begin{cases} k, & k \notin \{i, j\} \\ j, & k = i \\ i, & k = j \end{cases}. \tag{12.1.22}$$

Отметим следующее тождество:

$$(a\ b)\circ(a\ c)=(a\ c)\circ(b\ c) \tag{12.1.23}$$

Его достаточно проверить на трех элементах, a, b, c:

$$\big((a\ b)\circ(a\ c)\big)(a)=(a\ b)\big((a\ c)(a)\big)=(a\ b)(c)=c=(a\ c)(a)=(a\ c)\big((b\ c)(a)\big)=\big((a\ c)\circ(b\ c)\big)(a),$$

$$\big((a\ b)\circ(a\ c)\big)(c)=(a\ b)\big((a\ c)(c)\big)=(a\ b)(a)=b=(a\ c)(b)=(a\ c)\big((b\ c)(c)\big)=\big((a\ c)\circ(b\ c)\big)(c),$$

$$\big((a\ b)\circ(a\ c)\big)(b)=(a\ b)\big((a\ c)(b)\big)=(a\ b)(b)=a=(a\ c)(c)=(a\ c)\big((b\ c)(b)\big)=\big((a\ c)\circ(b\ c)\big)(b).$$

Теорема 12.1.12. *Всякая перестановка представима в виде композиции транспозиций*

$$\pi=\tau_m\circ...\circ\tau_1 \tag{12.1.24}$$

(в частном случае, когда $\sigma=e$ это утверждение следует понимать так, что в правой части стоит пустое множество транспозиций).

Доказательство. По теореме 12.1.11 достаточно доказать это утверждение для циклов. Пусть σ – какой-нибудь цикл. Выберем какой-нибудь элемент $a_1\in\{1,...,n\}$, который σ сдвигает. Положим затем

$$a_{i+1}=\sigma(a_i),$$

для всех i, меньших общего числа r сдвигаемых элементов. Тогда

$$\sigma=(a_1a_r)\circ...\circ(a_1a_3)\circ(a_1a_2).$$

Действительно, подставляя в качестве аргумента a_1, мы получим

$$(a_1a_r)\circ...\circ(a_1a_3)\circ(a_1a_2)(a_1)=(a_1a_r)\circ...\circ(a_1a_3)(a_2)=a_2,$$

затем для a_2

$$(a_1a_r)\circ...\circ(a_1a_3)\circ(a_1a_2)(a_1)=(a_1a_r)\circ...\circ(a_1a_3)(a_1)=(a_1a_r)\circ...\circ(a_1a_4)(a_3)=a_3,$$

затем для a_3

$$(a_1a_r)\circ...\circ(a_1a_3)\circ(a_1a_2)(a_3)=(a_1a_r)\circ...\circ(a_1a_3)(a_3)=(a_1a_r)\circ...\circ(a_1a_4)(a_1)=a_4,$$

и так далее, и наконец для a_r,

$$(a_1a_r)\circ...\circ(a_1a_3)\circ(a_1a_2)(a_r)=(a_1a_r)\circ...\circ(a_1a_3)(a_r)=(a_1a_r)(a_r)=a_1.$$

Остается заметить, что все остальные элементы, то есть не лежащие в множестве $\{a_1,...,a_r\}$ являются неподвижными как для σ, так и для всех транспозиций (a_1a_i). ☐

Теорема 12.1.13. *Всякая транспозиция является композицией некоторого набора транспозиций соседних чисел, а именно*

$$(i\ i{+}k)=(i\ i{+}1)\circ(i{+}1\ i{+}2)\circ...\circ(i{+}k{-}2\ i{+}k{-}1)\circ(i{+}k{-}1\ i{+}k)\circ(i{+}k{-}1\ i{+}k{-}2)\circ...\circ(i{+}2\ i{+}1)\circ(i{+}1\ i) \tag{12.1.25}$$

Знак перестановки и четность.

Теорема 12.1.14. *В разложении любой перестановки $\pi\in\mathfrak{S}_n$ в композицию транспозиций*

$$\pi=\tau_p\circ...\circ\tau_1 \tag{12.1.26}$$

число

$$\operatorname{sgn}\pi=(-1)^p \tag{12.1.27}$$

не зависит от выбора разложения (12.1.26).

- Число $\operatorname{sgn}\pi$ в (12.1.27) называется *знаком* перестановки $\pi\in\mathfrak{S}_n$. Если $\operatorname{sgn}\pi=1$, то π называется *четной* перестановкой, а если $\operatorname{sgn}\pi=-1$, то *нечетной*.

Для доказательства нам понадобятся две леммы.

Лемма 12.1.15. *Если σ и τ – две неодинаковые транспозиции, то для всякого элемента $i \in \{1,...,n\}$, сдвигаемого транспозицией τ можно подобрать две транспозиции σ' и τ' так, чтобы*

$$\sigma \circ \tau = \sigma' \circ \tau', \qquad \sigma'(i) \neq i, \qquad \tau'(i) = i.$$

Доказательство. Пусть $\tau = (i\ j)$. Тогда возможны варианты:

— $\sigma = (k\ l)$, где $\{k,l\} \cap \{i,j\} = \varnothing$, и в этом случае

$$\sigma \circ \tau = (k\ l) \circ (i\ j) = (i\ j) \circ (k\ l),$$

— $\sigma = (i\ k)$, где $k \notin \{i,j\}$, и в этом случае

$$\sigma \circ \tau = (i\ k) \circ (i\ j) = (12.1.23) = (i\ j) \circ (j\ k),$$

— $\sigma = (j\ k)$, где $k \notin \{i,j\}$, и в этом случае

$$\sigma \circ \tau = (j\ k) \circ (i\ j) = (12.1.23) = (i\ k) \circ (j\ k).$$

□

Лемма 12.1.16. *В любом разложении тождественной перестановки в композицию транспозиций*

$$e = \tau_p \circ ... \circ \tau_1 \tag{12.1.28}$$

число сомножителей p четно.

Доказательство. Заметим сразу, что p не может быть единицей, потому что иначе мы получили бы, что тождественная перестановка сама является транспозицией:

$$e = \tau.$$

Предположим далее, что мы доказали, что p не может быть нечетным числом в интервале между 1 и некоторым P. Пусть $p = P + 2$ (то есть нечетное число, следующее за P). Если в разложении (12.1.28) какие-то две рядом стоящие транспозиции одинаковы

$$\tau_{i+1} = \tau_i,$$

то в композиции они дают e, и поэтому на них можно сократить, и мы опять получим равенство (12.1.28), в котором $p = P$, и это равенство будет невозможно по предположению индукции.

Поэтому можно считать, что никакие две рядом стоящие транспозиции в (12.1.28) неодинаковы. Выберем теперь элемент i, сдвигаемый транспозицией τ_1. По лемме 12.1.15 существуют транспозиции τ_2' и τ_1' такие, что

$$\tau_2 \circ \tau_1 = \tau_2' \circ \tau_1', \qquad \tau_2'(i) \neq i, \qquad \tau_1'(i) = i.$$

После этого опять по лемме 12.1.15 существуют транспозиции τ_3' и τ_2'' такие, что

$$\tau_3 \circ \tau_2' = \tau_3' \circ \tau_2'', \qquad \tau_3'(i) \neq i, \qquad \tau_2''(i) = i.$$

И так далее. В конце этой процедуры мы получим (вернув в обозначениях где нужно один штрих вместо двух) равенство

$$e = \tau_p' \circ ... \circ \tau_1'$$

в котором последняя перестановка τ_p' сдвигает элемент i, а первые $p - 1$ перестановок $\tau_1', ..., \tau_{p-1}'$ оставляют его на месте:

$$\tau_p'(i) \neq i, \qquad \tau_{p-1}'(i) = ... = \tau_1'(i) = i.$$

Вместе это дает противоречие:

$$i = e(i) = \tau_p' \circ ... \circ \tau_1'(i) = \tau_p'(i) \neq i.$$

□

Доказательство теоремы 12.1.14. Пусть заданы два разложения перестановки π на транспозиции:

$$\pi = \tau_p \circ ... \circ \tau_1 = \sigma_q \circ ... \circ \sigma_1$$

Тогда

$$e = \pi \circ \pi^{-1} = (\tau_p \circ ... \circ \tau_1) \circ (\sigma_q \circ ... \circ \sigma_1)^{-1} = \tau_p \circ ... \circ \tau_1 \circ \sigma_1^{-1} \circ ... \circ \sigma_q^{-1} = \tau_p \circ ... \circ \tau_1 \circ \sigma_1 \circ ... \circ \sigma_q$$

По лемме 12.1.16 число сомножителей здесь $p+q$ должно быть четно. Поэтому либо оба числа p и q четны, либо оба они нечетны. В каждом из вариантов

$$(-1)^p = (-1)^q.$$

□

Свойства перестановок:

1^0. *Тождественная перестановка четна:*

$$\operatorname{sgn} e = 1 \tag{12.1.29}$$

2^0. *Знак композиции равен произведению знаков:*

$$\operatorname{sgn}(\pi \circ \sigma) = \operatorname{sgn} \pi \cdot \operatorname{sgn} \sigma \tag{12.1.30}$$

3^0. *При переходе к обратной перестановке знак не меняется:*

$$\operatorname{sgn} \pi^{-1} = \operatorname{sgn} \pi \tag{12.1.31}$$

Доказательство. 1. Четность тождественной перестановки доказана в лемме 12.1.16.

2. Если перестановки π и σ обе четные, то есть их можно разложить в композицию трансверсий с четным числом множителей, то их произведение также будет композицией четного набора трансверсий, поэтому $\pi \circ \sigma$ тоже четное, и мы получаем

$$\operatorname{sgn}(\pi \circ \sigma) = 1 = 1 \cdot 1 = \operatorname{sgn} \pi \cdot \operatorname{sgn} \sigma.$$

Если перестановки π и σ обе нечетные, то есть их можно разложить в композицию трансверсий с нечетным числом множителей, то их произведение снова будет композицией четного набора трансверсий, поэтому $\pi \circ \sigma$ тоже четное, и мы получаем

$$\operatorname{sgn}(\pi \circ \sigma) = 1 = (-1) \cdot (-1) = \operatorname{sgn} \pi \cdot \operatorname{sgn} \sigma.$$

Если π четная, а σ нечетная, то π раскладывается в композицию четного набора трансверсий, а σ в композицию нечетного набора, и поэтому их произведение будет композицией нечетного набора трансверсий. То есть $\pi \circ \sigma$ в этом случае нечетное, и мы получаем

$$\operatorname{sgn}(\pi \circ \sigma) = -1 = 1 \cdot (-1) = \operatorname{sgn} \pi \cdot \operatorname{sgn} \sigma.$$

И точно так же если π нечетная, а σ четная.

3. Если $\pi = \tau_p \circ ... \circ \tau_1$, то $\pi^{-1} = \tau_1^{-1} \circ ... \circ \tau_p^{-1} = \tau_1 \circ ... \circ \tau_p$. То есть π и π^{-1} имеют разложения с одинаковым числом трансверсий, поэтому четность этих перестановок тоже одинакова. □

Перестановка, как смена порядка. Напомним, что в главе 2 на с.123 мы аксиоматически ввели понятие сравнения чисел. В математике сравнивать можно не только числа, но и элементы разных абстрактных множеств, например, функции, матрицы, подмножества и так далее. Точное определение понятию порядка на множестве выглядит как естественная модификация определения на с.123:

- Пусть N – некоторое множество и пусть среди всевозможных пар (a, b) его элементов $a, b \in N$ выделены такие, для которых справедливо (подходящим образом определенное) высказывание «a меньше, либо равно b», записываемое $a \preceq b$, и при этом выполняются следующие правила.

  O1. **Рефлексивность:** для любого a справедливо $a \preceq a$.

O2. **Транзитивность:** если $a \preceq b$ и $b \preceq c$, то $a \preceq c$.

O3. **Антисимметричность:** если $a \preceq b$ и $b \preceq a$, то $a = b$.

Тогда говорят, что на множестве N задан *частичный порядок* $\preceq$.

- Если дополнительно выполняется аксиома

O4. **Линейность:** для любых a и b верно одно из двух:
- либо $a \preceq b$;
- либо $b \preceq a$.

порядок $\preceq$ на множестве N называется *линейным*.

◇ **12.1.21. Индуцированный порядок на множестве чисел.** Если N – подмножество в множестве чисел $\mathbb{R}$, то на нем можно рассмотреть линейный порядок, индуцированный из $\mathbb{R}$, то есть такой, при котором неравенство $a \preceq b$ выполняется, если оно верно, как неравенство чисел (в линейно упорядочнном множестве $\mathbb{R}$):

$$a \preceq b \quad \Longleftrightarrow \quad a \leqslant b.$$

◇ **12.1.22. Порядок, заданный нумерацией.** Но порядок на числовом множестве необязательно задавать таким способом (то есть индуцируя его из $\mathbb{R}$). Например, если выбрать произвольную инъективную последовательность чисел $x_1, ..., x_k$ (то есть размещение, определенное на с.658), то в ней порядок можно определить как порядок индексов:

$$x_i \preceq x_j \quad \Longleftrightarrow \quad i \leqslant j.$$

(Понятно, что это необязательно то же самое, что $x_i \leqslant x_j$.)

Ниже из линейно упорядоченных множеств нас будут интересовать только конечные. Справедлива

Теорема 12.1.17. *Всякий линейный порядок на конечном множестве N задается некоторой нумерацией элементов этого множества: существует биективное отображение*

$$\tau_N : \{1, ..., n\} \to N$$

где $n = \operatorname{card} N$ – число элементов N, такое, что

$$\forall i, j \in \{1, ..., n\} \qquad \Big(\tau_N(i) \preceq \tau_N(j) \quad \Longleftrightarrow \quad i \leqslant j \Big). \tag{12.1.32}$$

- Отображение $\tau_N : \{1, ..., n\} \to N$ с этими свойствами называется *отображением нумерации по возрастанию* элементов линейно упорядоченного множества N.

Пусть N – линейно упорядоченное конечное множество. По теореме 12.1.17 его порядок задается некоторой нумерацией его элементов. Если мы поменяем парядок на N, то это автоматически будет означать, что нумерация его элементов тоже сменится. При этом нам будет удобно следить за тем, как по новым номерам можно восстановить старые: элементу с новым номером 1 соответствует определенный старый номер $\sigma(1)$, элементу с новым номером 2 – старый номер $\sigma(2)$, и так далее. В результате у нас получится некоторое биективное отображение $\sigma : \{1, ..., n\} \to \{1, ..., n\}$, то есть перестановка $\sigma \in \mathfrak{S}_n$.

Это полезно изобразить некоей картинкой. Условимся считать, что буква N обозначает не только множество N, но и исходный порядок на нем $\preceq$, а буква N' означает то же самое множество с новым порядком $\preceq'$. Обозначим какой-нибудь буквой, например, ι, тождественное отображение N в себя,

$$\iota(x) = x, \qquad x \in N, \tag{12.1.33}$$

то перестановка σ, о которой мы говорим, становится элементом следующей диаграммы:

$$\begin{tikzcd} N \arrow[r, "\iota"] & N' \\ \{1, ..., n\} \arrow[u, "\tau_N"] & \{1, ..., n\} \arrow[l, "\sigma"'] \arrow[u, "\tau_{N'}"'] \end{tikzcd} \tag{12.1.34}$$

(где τ_N и $\tau_{N'}$ – отображения нумерации элементов N и N').

Мы получаем следующее утверждение:

Теорема 12.1.18. *Смена линейного порядка на конечном множестве N эквивалентна перестановке индексов в его нумерации.*

! **12.1.23.** В дальнейшем нас будет интересовать почти исключительно случай, когда N с самого начала представляет собой отрезок натурального ряда $\{1,...,n\}$ с его обычным порядком $\leqslant$ (индуцированным из $\mathbb{N}$). Тогда τ_N, как и ι, будет просто тождественным отображением $\{1,...,n\}$ в себя:

$$\tau_N(i) = \iota(i) = i, \qquad i \in \{1,...,n\},$$

и поэтому диаграмма (12.1.34) превратится в диаграмму

$$\begin{tikzcd} \{1,...,n\} \arrow[r, "\iota"] & \{1,...,n\}' \\ \{1,...,n\} \arrow[u, "\iota"] & \{1,...,n\} \arrow[l, "\sigma"] \arrow[u, "\tau'"'] \end{tikzcd} \qquad (12.1.35)$$

в которой $\{1,...,n\}'$ обозначает множество $\{1,...,n\}$ с новым порядком $\leqslant'$, а τ' – нумерация его элементов по возрастанию. Здесь ι – тождественное отображение из (12.1.33), поэтому мы получаем, что в этом случае перестановка σ, соответствующая смене порядка, просто совпадает с нумерацией τ':

$$\sigma = \tau'.$$

- Если K и L – два непересекающихся линейно упорядоченных конечных множества (с порядками $\preceq_K$ и $\preceq_L$), то на их объединении $K \sqcup L$ можно задать линейный порядок $\preceq$, положив $a \preceq b$ в случае, если выполняется одно из трех:
  — либо $a, b \in K$ и $a \preceq_K b$,
  — либо $a, b \in L$ и $a \preceq_L b$,
  — либо $a \in K$ и $b \in L$.

  Множество $K \sqcup L$ с заданным таким образом линейным порядком называется *склейкой* линейнго упорядоченных множеств K и L и обозначается $K \triangleleft L$.

Понятно, что операция склеивания не коммутативна

$$K \triangleleft L \neq L \triangleleft K,$$

но ассоциативна

$$(K \triangleleft L) \triangleleft M = K \triangleleft (L \triangleleft M).$$

- Рассмотрим частную ситуацию, когда K и L образуют разбиение отрезка натурального ряда:

  $$K \sqcup L = \{1,...,n\}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

  Множества K и L мы будем считать линейно упорядоченными (с линейным порядком, индуцированным из $\mathbb{N}$). Их склейка $K \triangleleft L$ представляет собой то же самое множество $K \sqcup L = \{1,...,n\}$, только с новым линейным порядком, поэтому согласно замечанию 12.1.23, переход от $K \sqcup L = \{1,...,n\}$ к $K \triangleleft L$ можно себе представлять как перестановку σ элементов $\{1,...,n\}$, которая совпадает с отображением $\tau_{K \triangleleft L}$ нумерации по возрастанию элементов множества $\tau_{K \triangleleft L}$, потому что диаграмма (12.1.35) принимает здесь вид

  $$\begin{tikzcd} \{1,...,n\} = K \sqcup L \arrow[r, "\iota"] & K \triangleleft L \\ \{1,...,n\} = K \sqcup L \arrow[u, "\iota"] & \{1,...,n\} = K \sqcup L \arrow[l, "\sigma = \tau_{K \triangleleft L}"] \arrow[u, "\tau_{K \triangleleft L}"'] \end{tikzcd} \qquad (12.1.36)$$

  Это отображение (перестановку) $\sigma = \tau_{K \triangleleft L}$ мы будем называть в дальнейшем *отображением склейки разбиения* (K, L) *множества* $\{1,...,n\}$.

Предложение 12.1.19. *Пусть $N = K \sqcup L$, $k = \operatorname{card} K$, $l = \operatorname{card} L$. Тогда отображение склейки $\sigma = \tau_{K \triangleleft L}$ удовлетворяет условиям*

$$\sigma(1) < \sigma(2) < ... < \sigma(k), \qquad \sigma(k+1) < \sigma(k+2) < ... < \sigma(k+l) \qquad (12.1.37)$$

а множества K и L восстанавливаются по σ формулами

$$K = \{x_{\sigma(1)}, ..., x_{\sigma(k)}\}, \qquad L = \{x_{\sigma(k+1)}, ..., x_{\sigma(k+l)}\}. \tag{12.1.38}$$

Наоборот, если какая-то перестановка $\sigma \in \mathfrak{S}_{k+l}$ удовлетворяет условиям (12.1.37)*, то она является отображением склейки $\sigma = \tau_{K \triangleleft L}$ для множеств* (12.1.38).

Предложение 12.1.20. *Пусть $\{1, ..., k+l\} = K \sqcup L$, $k = \operatorname{card} K$, $l = \operatorname{card} L$ и для некоторого $i \in \{1, ..., k+l\}$ множество K содержит ровно одно из чисел i и $i+1$,*

$$\Big(i \in K \ \&\ i+1 \in L\Big) \ \vee\ \Big(i+1 \in K \ \&\ i \in L\Big).$$

Пусть множества K' и L' получаются из K и L перестановкой i и $i+1$.

$$K' = (i\ i+1)(K), \quad L' = (i\ i+1)(L).$$

Тогда транспозиция $\theta = (i\ i+1)$ превращает отображение склейки $\tau_{K \triangleleft L}$ в отображение склейки $\tau_{K' \triangleleft L'}$:

$$\theta \circ \tau_{K \triangleleft L} = \tau_{K' \triangleleft L'}. \tag{12.1.39}$$

Доказательство. Обозначим $\sigma = \tau_{K \triangleleft L}$ в $\sigma' = \tau_{K' \triangleleft L'}$. Чтобы доказать равенство

$$\theta \circ \sigma = \sigma',$$

нужно проверить две вещи:

1) $\theta \circ \sigma$ является биекцией между $\{1, ..., k\}$ и K' и между $\{k+1, ..., k+l\}$ и L', и
2) $\theta \circ \sigma$ монотонно возрастает на множествах $\{1, ..., k\}$ и $\{k+1, ..., k+l\}$.

Первое сразу следует из того, что σ является биекцией между $\{1, ..., k\}$ и K и между $\{k+1, ..., k+l\}$ и L. А второе не очевидно, и его нужно доказывать. Обозначим $i' = \sigma^{-1}(i)$ и $j' = \sigma^{-1}(i+1)$.

1) Если считать, что $i \in K$ и $i+1 \notin K$, то мы получаем, во-первых,

$$\underbrace{\sigma(1)}_{\substack{\| \\ \theta(\sigma(1))}} < ... < \underbrace{\sigma(i'-1)}_{\substack{\| \\ \theta(\sigma(i'-1))}} < \sigma(i') = i \leqslant \underbrace{i+1}_{\substack{\| \\ \theta(i) \\ \| \\ \theta(\sigma(i'))}} \overset{\substack{i+1 \notin K \\ \Downarrow}}{<} \underbrace{\sigma(i'+1)}_{\substack{\| \\ \theta(\sigma(i'+1))}} < ... < \underbrace{\sigma(k)}_{\substack{\| \\ \theta(\sigma(k))}}$$

$$\Downarrow$$

$$\theta\big(\sigma(1)\big) < ... < \theta\big(\sigma(i'-1)\big) < \theta\big(\sigma(i')\big) < \theta\big(\sigma(i'+1)\big) < ... < \theta\big(\sigma(k)\big)$$

И, во-вторых,

$$\underbrace{\sigma(k+1)}_{\substack{\| \\ \theta(\sigma(k+1))}} < ... < \underbrace{\sigma(j'-1)}_{\substack{\| \\ \theta(\sigma(j'-1))}} \overset{\substack{i \in K \\ \Downarrow}}{<} \underbrace{i}_{\substack{\| \\ \theta(i+1) \\ \| \\ \theta(\sigma(j'))}} < i+1 = \sigma(j') < \underbrace{\sigma(j'+1)}_{\substack{\| \\ \theta(\sigma(j'+1))}} < ... < \underbrace{\sigma(k+l)}_{\substack{\| \\ \theta(\sigma(k+l))}}$$

$$\Downarrow$$

$$\theta\big(\sigma(k+1)\big) < ... < \theta\big(\sigma(j'-1)\big) < \theta\big(\sigma(j')\big) < \theta\big(\sigma(j'+1)\big) < ... < \theta\big(\sigma(k+l)\big)$$

2) Если же $i \notin K$ и $i+1 \in K$, то, во-первых,

$$\underbrace{\sigma(1)}_{\substack{\| \\ \theta(\sigma(1))}} < ... < \underbrace{\sigma(i'-1)}_{\substack{\| \\ \theta(\sigma(i'-1))}} \overset{\substack{i \notin K \\ \Downarrow}}{<} \underbrace{i}_{\substack{\| \\ \theta(i+1) \\ \| \\ \theta(\sigma(i'))}} < i+1 = \sigma(i') < \underbrace{\sigma(i'+1)}_{\substack{\| \\ \theta(\sigma(i'+1))}} < ... < \underbrace{\sigma(k)}_{\substack{\| \\ \theta(\sigma(k))}}$$

$$\Downarrow$$

$$\theta\big(\sigma(1)\big)<...<\theta\big(\sigma(i'-1)\big)<\theta\big(\sigma(i')\big)<\theta\big(\sigma(i'+1)\big)<...<\theta\big(\sigma(k)\big)$$

И, во-вторых,

$$\underbrace{\sigma(k+1)}_{\substack{\| \\ \theta(\sigma(k+1))}}<...<\underbrace{\sigma(j'-1)}_{\substack{\| \\ \theta(\sigma(j'-1))}}<\sigma(j')=i\leqslant\underbrace{i+1}_{\substack{\| \\ \theta(i) \\ \| \\ \theta(\sigma(j'))}}\overset{\substack{i+1\in K \\ \Downarrow}}{<}\underbrace{\sigma(j'+1)}_{\substack{\| \\ \theta(\sigma(j'+1))}}<...<\underbrace{\sigma(k+l)}_{\substack{\| \\ \theta(\sigma(k+l))}}$$

$$\Downarrow$$

$$\theta\big(\sigma(k+1)\big)<...<\theta\big(\sigma(j'-1)\big)<\theta\big(\sigma(j')\big)<\theta\big(\sigma(j'+1)\big)<...<\theta\big(\sigma(k+l)\big)$$

□

Свойства склейки:

1^0. *Если* $\{1,...,n\}=K\sqcup L$, *то*

$$\operatorname{sgn}(\tau_{K\lhd L})=(-1)^{kl}\cdot\operatorname{sgn}(\tau_{K\lhd L})\qquad(12.1.40)$$

где $k=\operatorname{card}K$ *и* $l=\operatorname{card}L$.

2^0. *Если* $\{1,...,n\}=K\sqcup L\sqcup M$, *то*

$$\operatorname{sgn}(\tau_{K\lhd L})\cdot\operatorname{sgn}(\tau_{(K\sqcup L)\lhd M})=\operatorname{sgn}(\tau_{K\lhd L\lhd M})\qquad(12.1.41)$$

Доказательство. 1. Пусть $\{1,...,n\}=K\sqcup L$. Заметим, что отображения склейки $\tau_{K\lhd L}$ и $\tau_{L\lhd K}$ связаны между собой перестановкой υ, меняющей местами отрезки $\{1,...,k\}$ и $\{k+1,...,k+l\}$:

$$\begin{tikzcd}
L\lhd K & K\sqcup L \arrow[l, "\iota"'] \arrow[r, "\iota"] & K\lhd L \\
\{1,...,n\} \arrow[u, "\tau_{L\lhd K}"'] \arrow[r, "\tau_{L\lhd K}"] & \{1,...,n\} \arrow[u, "\iota"] & \{1,...,n\} \arrow[l, "\tau_{K\lhd L}"'] \arrow[u, "\tau_{K\lhd L}"'] \arrow[ll, bend left, "\upsilon"]
\end{tikzcd}$$

Поэтому

$$\operatorname{sgn}(\tau_{L\lhd K})^{-1}\cdot\operatorname{sgn}(\tau_{K\lhd L})=\operatorname{sgn}(\tau_{L\lhd K}^{-1}\circ\tau_{K\lhd L})=\operatorname{sgn}(\upsilon).$$

А последнюю величину легко вычислить: чтобы переставить множества $A=\{1,...,k\}$ и $B=\{k+1,...,k+l\}$, нужно сначала последовательно передвигать первый элемент $b_1=k+1$ множества B влево, так, чтобы он встал перед A, на это уйдет ровно k транспозиций соседних элементов (по числу элементов множества A), затем точно так же нужно передвинуть второй элемент $b_2=k+2$ множества B, так, чтобы он встал между b_1 и множеством A, и на это опять уйдет k транспозиций. И так далее, и в конце концов мы передвинем l элементов множества B, и на каждую операцию уйдет k транспозиций. Значит, всего понадобится kl транспозиций, и мы получаем

$$\operatorname{sgn}(\tau_{L\lhd K})^{-1}\cdot\operatorname{sgn}(\tau_{K\lhd L})=\operatorname{sgn}(\upsilon)=(-1)^{kl}.$$

2. Пусть $\{1,...,n\}=K\sqcup L\sqcup M$. Построение склейки $(K\lhd L)\lhd M$ можно представить как последовательность трех действий:

1) сначала строится склейка $(K\sqcup L)\lhd M$, это эквивалентно построению отображения $\tau_{(K\sqcup L)\lhd M}:\{1,...,n\}\to\{1,...,n\}$, которое первые $k+l$ индексов $\{1,...,k+l\}$ тратит на нумерацию элементов множества $K\sqcup L$, а оставшиеся m индексов $\{k+l+1,...,n\}$ – на нумерацию элементов M;

2) после того, как это сделано, упорядоченное множество $K\sqcup L$ оказывается занумеровано индексами $\{1,...,k+l\}$; обозначим

$$K'=\tau_{(K\sqcup L)\lhd M}^{-1}(K),\qquad L'=\tau_{(K\sqcup L)\lhd M}^{-1}(L).$$

и построим новую склейку, K" $\lhd L'$, или, иными словами, отображение $\tau_{K'\lhd L'}:\{1,...,k+l\}\to\{1,...,k+l\}$, которое первые k индексов трати на нумерацию элементов K', а оставшиеся l индексов на нумерацию L';

3) когда построено $\tau_{K'\lhd L'}$, мы полагаем

$$\sigma(i)=\begin{cases}\tau_{K'\lhd L'}(i), & i\leqslant k+l\\ i, & i>k+l\end{cases}$$

и это будет перестановка $\sigma:\{1,...,n\}\to\{1,...,n\}$, композиция которой с $\tau_{(K\sqcup L)\lhd M}$ дает $\tau_{(K\lhd L)\lhd M}$:

$$\tau_{(K\lhd L)\lhd M}=\tau_{(K\sqcup L)\lhd M}\circ\sigma. \qquad (12.1.42)$$

Наглядно это можно изобразить диаграммой

$$\begin{tikzcd}
K\sqcup L\sqcup M \arrow[rr, "\iota"] & & (K\sqcup L)\lhd M \arrow[rr, "\iota"] & & (K\lhd L)\lhd M \\
\{1,...,n\} \arrow[u, "\iota"'] & & \{1,...,n\} \arrow[ll, "\tau_{(K\sqcup L)\lhd M}"'] \arrow[u, "\tau_{(K\sqcup L)\lhd M}"] & & \{1,...,n\} \arrow[ll, "\sigma"'] \arrow[u, "\tau_{(K\lhd L)\lhd M}"'] \arrow[llll, bend left, "\tau_{(K\lhd L)\lhd M}"]
\end{tikzcd}$$

Из (12.1.42) мы получаем

$$\operatorname{sgn}\tau_{(K\lhd L)\lhd M}=\operatorname{sgn}\tau_{(K\sqcup L)\lhd M}\cdot\operatorname{sgn}\sigma=\operatorname{sgn}\tau_{(K\sqcup L)\lhd M}\cdot\operatorname{sgn}\tau_{K\lhd L},$$

□

§ 2 Векторные пространства

Важное свойство векторных величин (из которых затем, при дополнительном предположении конечномерности, формально следуют все остальные их свойства) заключается в том, что их можно складывать друг с другом и умножать на число. В математике эти свойства формализуются конструкцией векторного пространства, и в этом параграфе мы объясним, что это такое.

(a) Векторные пространства

Определение векторного пространства и примеры.

- Множество X называется *(вещественным) векторным пространством* или *(вещественным) линейным пространством*, если

  (a) любым двум элементам $x,y\in X$ поставлен в соответствие некоторый элемент $x+y\in X$ так, что выполняются следующие правила:

  V1. **Коммутативность сложения:** для любых элементов $x,y\in X$ выполняется равенство
  $$x+y=y+x \qquad (12.2.43)$$

  V2. **Ассоциативность сложения:** для любых элементов $x,y,z\in X$ выполняется равенство
  $$(x+y)+z=x+(y+z) \qquad (12.2.44)$$

  V3. **Существование нуля:** существует такой элемент $0\in X$, что
  $$x+0=x,\qquad x\in X \qquad (12.2.45)$$

  V4. **Существование противоположного элемента:** для любого элемента $a\in X$ существует такой элемент $-x\in X$ (называемый *противоположным* к элементу a) что
  $$x+(-x)=0 \qquad (12.2.46)$$

  (b) любому элементу $x\in X$ и любому числу $\lambda\in\mathbb{R}$ поставлен в соответствие некоторый элемент $\lambda\cdot x\in X$ так, что выполняются следующие правила:

V5. **Ассоциативность умножения:** для любых чисел λ и μ и любого элемента $x \in X$ выполняется равенство

$$(\lambda \cdot \mu) \cdot x = \lambda \cdot (\mu \cdot x) \tag{12.2.47}$$

V6. **Действие единицы:** умножение на единицу $1 \in \mathbb{R}$ не меняет элементы X:

$$1 \cdot x = x, \qquad x \in X \tag{12.2.48}$$

(c) между собой операции сложения векторов и умножения вектора на скаляр связаны правилом

V7. **Дистрибутивность:** для любых элементов $x, y \in X$ и любого числа $\lambda \in \mathbb{R}$ выполняется равенство

$$\lambda \cdot (x + y) = \lambda \cdot x + \lambda \cdot y \tag{12.2.49}$$

◇ **12.2.1.** Координатное пространство $\mathbb{R}_n$ является вещественным векторным пространством с операциями

$$x + y := \big(x_1 + y_1, ..., x_n + y_n\big) \tag{12.2.50}$$

$$\lambda \cdot x := \big(\lambda \cdot x_1, ..., \lambda \cdot x_n\big). \tag{12.2.51}$$

◇ **12.2.2.** Множество $\mathbb{R}^T$ всех функций, определенных на произвольном множестве T,

$$f \in \mathbb{R}^T \iff f : T \to \mathbb{R}$$

является вещественным векторным пространством относительно операций

$$(f + g)(t) := f(t) + g(t), \qquad t \in T \tag{12.2.52}$$

$$(\lambda \cdot f)(t) := \lambda \cdot f(t), \qquad t \in T. \tag{12.2.53}$$

Линейно независимые системы.

- *Линейной комбинацией* векторов $x_1, ..., x_k$ векторного пространства X называется всякий вектор вида
$$\lambda^1 \cdot x_1 + ... + \lambda^k \cdot x_k$$
где $\lambda^1, ..., \lambda^k \in \mathbb{R}$.
- *Линейной оболочкой* векторов $x_1, ..., x_k$ векторного пространства X называется множество в X, обозначаемое $\mathsf{span}\{x_1, ..., x_k\}$ и состоящее из всевозможных линейных комбинаций векторов $x_1, ..., x_k$
$$\mathsf{span}\{x_1, ..., x_k\} = \{\lambda^1 \cdot x_1 + ... + \lambda^k \cdot x_k;\ \lambda^1, ..., \lambda^k \in \mathbb{R}\}.$$
- Система векторов $x_1, ..., x_k$ векторного пространства X называется
  — *линейно зависимой*, если какой-то из этих векторов, обозначим его x_i, можно выразить как линейную комбинацию остальных:
  $$\exists \lambda^1, ..., \lambda^{i-1}, \lambda^{i+1} ..., \lambda^k \in \mathbb{R} \qquad x_i = \lambda^1 \cdot x_1 + ... + \lambda^{i-1} \cdot x_{i-1} + \lambda^{i+1} \cdot x_{i+1} + ... + \lambda^k \cdot x_k,$$
  — *линейно независимой*, если никакой x_i не является линейной комбинацией остальных:
  $$\forall \lambda^1, ..., \lambda^{i-1}, \lambda^{i+1} ..., \lambda^k \in \mathbb{R} \qquad x_i \neq \lambda^1 \cdot x_1 + ... + \lambda^{i-1} \cdot x_{i-1} + \lambda^{i+1} \cdot x_{i+1} + ... + \lambda^k \cdot x_k,$$

Свойства линейно независимых систем:

1°. *В линейно независимой системе векторов $x_1, ..., x_k$ никакой вектор не может быть нулевым:*
$$x_i \neq 0, \qquad i = 1, ..., k.$$

2°. *Всякая подсистема $x_{i_1}, ..., x_{i_l}$ линейно независимой системы $x_1, ..., x_k$ также линейно независима.*

Доказательство. 1. Если какой-то вектор в системе равен нулю, $x_i = 0$, то его можно представить как тривиальную линейную комбинацию остальных векторов

$$x_i = 0 \cdot x_1 + ... + 0 \cdot x_{i-1} + 0 \cdot x_{i+1} + ... + 0 \cdot x_k,$$

и поэтому такая система будет линейно зависимой.

2. Если $x_1, ..., x_k$ – линейно независимая система, то есть любой вектор x_i не выражается линейно через остальные векторы x_j, то тем более x_i не будет выражаться линейно через остальные векторы x_j, лежащие в какой-то подсистеме $M \subseteq \{x_1, ..., x_k\}$. Поэтому M тоже линейно независима. □

Теорема 12.2.1. *Система векторов $x_1, ..., x_k$ векторного пространства X линейно независима в том и только в том случае, если равенство*

$$\lambda^1 \cdot x_1 + ... + \lambda^k \cdot x_k = 0 \qquad (12.2.54)$$

выполняется только при нулевых коэффициентах $\lambda^1, ..., \lambda^k$:

$$\lambda^1 = ... = \lambda^k = 0$$

Доказательство. 1. Пусть равенство (12.2.54) выполняется для набора коэффициентов, среди которых есть какой-то ненулевой:

$$\lambda^i \neq 0.$$

Тогда можно выразить слагаемое $\lambda^i \cdot x_i$ через все остальные

$$\lambda^i \cdot x_i = -\lambda^1 \cdot x_1 - ... - \lambda^{i-1} \cdot x_{i-1} - \lambda^{i+1} \cdot x_{i+1} - ... - \lambda^k \cdot x_k,$$

а затем выразить сам вектор x_i:

$$x_i = -\frac{\lambda^1}{\lambda^i} \cdot x_1 - ... - \frac{\lambda^{i-1}}{\lambda^i} \cdot x_{i-1} - \frac{\lambda^{i+1}}{\lambda^i} \cdot x_{i+1} - ... - \frac{\lambda^k}{\lambda^i} \cdot x_k.$$

Мы получаем, что система $x_1, ..., x_k$ линейно зависима.

2. Наоборот, если система $x_1, ..., x_k$ линейно зависима, то есть какой-то вектор выражается через остальные,

$$x_i = \lambda^1 \cdot x_1 + ... + \lambda^{i-1} \cdot x_{i-1} + \lambda^{i+1} \cdot x_{i+1} + ... + \lambda^k \cdot x_k,$$

то перебросив все в левую часть мы получим равенство (12.2.54)

$$-\lambda^1 \cdot x_1 - ... - \lambda^{i-1} \cdot x_{i-1} + x_i - \lambda^{i+1} \cdot x_{i+1} - ... - \lambda^k \cdot x_k = 0,$$

в котором коэффициент при x_i ненулевой (а именно, равен 1). □

Базис и размерность.

- Система векторов $b_1, ..., b_n$ векторного пространства X называется (конечным) *базисом* этого пространства, если
  1) она линейно независима, и
  2) любой вектор $x \in X$ представим в виде некоторой линейной комбинации векторов $b_1, ..., b_n$:
  $$\exists \beta^1, ..., \beta^n \in \mathbb{R} \qquad x = \beta^1 \cdot b_1 + ... + \beta^n \cdot b_n, \qquad (12.2.55)$$
  (это свойство называется *линейной полнотой* системы $b_1, ..., b_n$).

◇ **12.2.3.** В координатном пространстве $\mathbb{R}^n$ система векторов

$$(e_i)^j = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases} \qquad (12.2.56)$$

образует базис. Действительно, во-первых, при $\lambda^i \in \mathbb{R}$ равенство

$$\lambda^1 \cdot e_1 + ... + \lambda^n \cdot e_n = 0$$

означает для всякого i

$$\lambda^i = (\lambda^1 \cdot e_1 + ... + \lambda^n \cdot e_n)^i = 0.$$

А, во-вторых, всякий вектор $x = (x^1, ..., x^n) \in \mathbb{R}^n$

можно представлять себе как сумму

$$x = x^1 \cdot e_1 + ... + x^n \cdot e_n,$$

то есть как сумму (12.2.55) с

$$\beta^i = x^i.$$

- Базис $\{e_1, ..., e_n\}$, определенный формулой (12.2.56), называется *стандартным базисом* в $\mathbb{R}^n$.
- Аналогичной формулой определяется *стандартный базис* $\{e^1, ..., e^n\}$ в $\mathbb{R}_n$:

$$(e^i)_j = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases}. \tag{12.2.57}$$

Теорема 12.2.2. *Коэффициенты $\beta^1, ..., \beta^n$ разложения произвольного данного вектора $x \in X$ по заданному базису $b_1, ..., b_n$ в X*

$$x = \beta^1 \cdot b_1 + ... + \beta^n \cdot b_n,$$

определяются однозначно.

Доказательство. Предположим противное, то есть что вектор x можно разложить двумя разными способами по базису $b_1, ..., b_n$:

$$x = \beta^1 \cdot b_1 + ... + \beta^n \cdot b_n = \lambda^1 \cdot b_1 + ... + \lambda^n \cdot b_n,$$

где

$$\exists k = 1, ..., n \qquad \beta^k \neq \lambda^k.$$

Тогда

$$(\beta^1 - \lambda^1) \cdot b_1 + ... + (\beta^n - \lambda^n) \cdot b_n = \big(\beta^1 \cdot b_1 + ... + \beta^n \cdot b_n\big) - \big(\lambda^1 \cdot b_1 + ... + \lambda^n \cdot b_n\big) = x - x = 0$$

причем для некоторого k

$$\beta^k - \lambda^k \neq 0.$$

Мы получаем, что нетривиальная линейная комбинация векторов $b_1, ..., b_n$ равна нулю. Значит, система $b_1, ..., b_n$ линейно зависима, а это противоречит тому, что она образует базис. □

Лемма 12.2.3. *Длина любой линейно независимой системы $a_1, ..., a_m$ в векторном пространстве X не превосходит длины базиса $b_1, ..., b_n$ этого пространства (если он существует):*

$$m \leqslant n.$$

Доказательство. Предположим наоборот, что

$$m > n.$$

Покажем, что тогда векторы $a_1, ..., a_n$ (то есть первые n векторов в последовательности $a_1, ..., a_m$) образуют базис пространства X. Это делается индукцией.

1. Заметим сначала, что, перенумеровав, если нужно, векторы $b_1, b_2, ..., b_n$, можно добиться, чтобы система $a_1, b_2, ..., b_n$ (получающаяся заменой b_1 на a_1) была базисом в X.

Поскольку $b_1, ..., b_n$ – базис, вектор a_1 выражается как линейная комбинация векторов $b_1, ..., b_n$:

$$a_1 = \lambda^1 \cdot b_1 + ... + \lambda^n \cdot b_n,$$

для некоторых $\lambda^1, ..., \lambda^n \in \mathbb{R}$. При этом по свойству 1° на с.676 вектор a_1 (будучи элементом линейно независимой системы) не может быть нулевым:

$$0 \neq a_1 = \lambda^1 \cdot b_1 + ... + \lambda^n \cdot b_n.$$

Поэтому какой-то из коэффициентов λ^i тоже должен быть ненулевым. Перенумеровав, если нужно векторы $b_1, ..., b_n$ (вместе с коэффициентами $\lambda^1, ..., \lambda^n$), мы можем считать, что ненулевым коэффициентом в этой комбинации будет λ^1:

$$\lambda^1 \neq 0$$

Тогда мы получим, что b_1 выражается через векторы $a_1, b_2, ..., b_n$:

$$a_1 = \underbrace{\lambda^1}_{\substack{\not\shortparallel \\ 0}} \cdot b_1 + \lambda^2 \cdot b_2 + ... + \lambda^n \cdot b_n, \tag{12.2.58}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{1}{\lambda^1} \cdot a_1 = b_1 + \frac{\lambda^2}{\lambda^1} \cdot b_2 + ... + \frac{\lambda^n}{\lambda^1} \cdot b_n,$$

$$\Downarrow$$

$$b_1 = \frac{1}{\lambda^1} \cdot a_1 - \frac{\lambda^2}{\lambda^1} \cdot b_2 - ... - \frac{\lambda^n}{\lambda^1} \cdot b_n,$$

Отсюда следует, что вообще любой вектор $x \in X$ выражается через векторы $a_1, b_2, ..., b_n$:

$$x = \beta^1 \cdot b_1 + \beta^2 \cdot b_2 + ... + \beta^n \cdot b_n,$$

$$\Downarrow$$

$$x = \beta^1 \cdot \left(\frac{1}{\lambda^1} \cdot a_1 - \frac{\lambda^2}{\lambda^1} \cdot b_2 - ... - \frac{\lambda^n}{\lambda^1} \cdot b_n \right) + \beta^2 \cdot b_2 + ... + \beta^n \cdot b_n =$$
$$= \frac{\beta^1}{\lambda^1} \cdot a_1 + \left(\beta^2 - \frac{\beta^1 \cdot \lambda^2}{\lambda^1} \right) \cdot b_2 + ... + \left(\beta^2 - \frac{\beta^1 \cdot \lambda^n}{\lambda^1} \right) \cdot b_n.$$

Покажем теперь, что система $a_1, b_2, ..., b_n$ должна быть линейно независима. Действительно, пусть для каких то $\gamma^1, ..., \gamma^n$ выполняется равенство

$$\gamma^1 \cdot a_1 + \gamma^2 \cdot b_2 + ... + \gamma^n \cdot b_n = 0,$$

Тогда, мы сразу получаем, что $\gamma^1 = 0$, потому что иначе возникает цепочка

$$\underbrace{\gamma^1}_{\substack{\not\Downarrow \\ 0}} \cdot a_1 + \gamma^2 \cdot b_2 + ... + \gamma^n \cdot b_n = 0,$$

$$\Downarrow$$

$$a_1 = \frac{\gamma^2}{\gamma^1} \cdot b_2 + ... + \frac{\gamma^n}{\gamma^1} \cdot b_n$$

$$\Downarrow \quad \big(\text{вычитаем из (12.2.58)}\big)$$

$$0 = \underbrace{\lambda^1}_{\substack{\not\Downarrow \\ 0}} \cdot b_1 + \left(\lambda^2 - \frac{\gamma^2}{\gamma^1} \right) \cdot b_2 + ... + \left(\lambda^n - \frac{\gamma^n}{\gamma^1} \right) \cdot b_n,$$

означающая, что система $b_1, ..., b_n$ линейно зависима (чего не может быть, поскольку $b_1, ..., b_n$ – базис).

А из $\gamma^1 = 0$ затем следует, что все остальные γ^i тоже равны нулю:

$$\underbrace{\gamma^1}_{\substack{\parallel \\ 0}} \cdot a_1 + \gamma^2 \cdot b_2 + ... + \gamma^n \cdot b_n = 0,$$

$$\Downarrow$$

$$\gamma^2 \cdot b_2 + ... + \gamma^n \cdot b_n = 0,$$

$$\Downarrow$$

$$\gamma^2 = ... = \gamma^n = 0,$$

потому что подсистема $b_2, ..., b_n$ линейно независима (по свойству 2° на с.676).

Итак, мы получили, что система $a_1, b_2, ..., b_n$ линейно независима и любой вектор $x \in X$ выражается через нее. То есть $a_1, b_2, ..., b_n$ – базис в X.

2. Переходим ко второму шагу индукции. Предположим, что для некоторого $r < n < m$ мы (после некоторой перенумерации векторов $b_1, ..., b_n$) доказали, что система

$$a_1, ..., a_r, b_{r+1}, ..., b_n$$

является базисом в X. Покажем теперь, что перенумеровав если нужно векторы $b_{r+1},...,b_n$, можно добиться, чтобы система

$$a_1,...,a_r,a_{r+1},b_{r+2},...,b_n$$

была базисом в X.

Выразим a_{r+1} через базис $a_1,...,a_r,b_{r+1},...,b_n$:

$$a_{r+1} = \lambda^1 \cdot a_1 + ... + \lambda^r \cdot a_r + \lambda^{r+1} \cdot b_{r+1} + ... + \lambda^n \cdot b_n$$

Заметим, что в этой линейной комбинации какой-то из коэффициентов $\lambda^{r+1},...,\lambda^n$ должен быть ненулевым, потому что иначе мы получили бы, что a_{r+1} выражается через $a_1,...,a_r$

$$a_{r+1} = \lambda^1 \cdot a_1 + ... + \lambda^r \cdot a_r,$$

(то есть получилось бы, что система $a_1,...,a_m$ должна быть линейно зависима, а это невозможно, потому что она – базис). Перенумеровав, если нужно векторы $b_{r+1},...,b_n$ (вместе с коэффициентами $\lambda^{r+1},...,\lambda^n$), мы можем считать, что ненулевым коэффициентом в этой комбинации будет λ^{r+1}:

$$\lambda^{r+1} \neq 0$$

Теперь теми же рассуждениями, что в пункте 1, показываем, что система $a_1,...,a_r,a_{r+1},b_{r+2},...,b_n$ – базис в X.

Описанная индукция доказывает, что подходящей перенумерацией векторов $b_1,...,b_n$, а затем последовательной заменой b_i на a_i, мы получим систему базисов пространства X, в которой последним будет базис $a_1,...,a_n$:

$$b_1,b_2,b_3,...,b_n$$

$$\downarrow$$

$$a_1,b_2,b_3,...,b_n$$

$$\downarrow$$

$$a_1,a_2,b_3,...,b_n$$

$$\downarrow$$

$$...$$

$$\downarrow$$

$$a_1,a_2,a_3,...,a_n.$$

Отсюда следует, в частности, что вектор a_m (как любой другой вектор пространства X) должен выражаться через векторы базиса $a_1,...,a_n$:

$$a_m = \lambda^1 \cdot a_1 + ... + \lambda^n \cdot a_n$$

То есть система $a_1,...,a_n,...,a_m$ должна быть линейно зависима. Это противоречие означает, что наше исходное предположение, что $m > n$ было неверно. □

Теорема 12.2.4. *Любые два базиса $a_1,...,a_m$ и $b_1,...,b_n$ векторного пространства X (если они существуют) имеют одинаковую длину:*

$$m = n.$$

Доказательство. Поскольку $a_1,...,a_m$ – линейно независимая система, а $b_1,...,b_n$ – базис в X, по лемме 12.2.3 получаем

$$m \leqslant n.$$

С другой стороны, $b_1,...,b_n$ – линейно независимая система, а $a_1,...,a_m$ – базис в X, поэтому опять по лемме 12.2.3 получаем

$$n \leqslant m.$$

Вместе это дает равенство $m = n$. □

- Векторное пространство X называется *конечномерным*, если оно обладает конечным базисом, и *бесконечномерным*, если конечного базиса в нем нет. Из теоремы 12.2.4 следует, что если в X есть конечный базис $b_1, ..., b_n$, то любой другой базис должен иметь то же самое число элементов n. Это число n называется *размерностью* векторного пространства X и обозначается $\dim X$.

Лемма 12.2.5. *Если $a_1, ..., a_k$ – линейно независимая система в векторном пространстве X, не являющаяся базисом этого пространства, то найдется вектор a_{k+1} такой, что система $a_1, ..., a_k, a_{k+1}$ также будет линейно независимой.*

Доказательство. Поскольку $a_1, ..., a_k$ – не базис в X, найдется какой-то вектор $a_{k+1} \in X$, который не выражается через вектора $a_1, ..., a_k$:

$$a_{k+1} \notin \mathsf{span}\{a_1, ..., a_k\}.$$

Система $a_1, ..., a_k, a_{k+1}$ будет линейно независимой, потому что если

$$\lambda^1 \cdot a_1 + ... + \lambda^k \cdot a_k + \lambda^{k+1} \cdot a_{k+1} = 0,$$

то, во-первых, должно быть $\lambda^{k+1} = 0$, потому что иначе мы получили бы, что a_{k+1} линейно выражается через $a_1, ..., a_k$:

$$\lambda^1 \cdot a_1 + ... + \lambda^k \cdot a_k + \underbrace{\lambda^{k+1}}_{\substack{\not\parallel \\ 0}} \cdot a_{k+1} = 0,$$

$$\Downarrow$$

$$a_{k+1} = -\frac{\lambda^1}{\lambda^{k+1}} \cdot a_1 - ... - \frac{\lambda^k}{\lambda^{k+1}} \cdot a_k.$$

А, во-вторых, из $\lambda^{k+1} = 0$ следует равенство

$$\lambda^1 \cdot a_1 + ... + \lambda^k \cdot a_k = 0,$$

которое может выполняться только если все коэффициенты $\lambda^1, ..., \lambda^k$ равны нулю (потому что система $a_1, ..., a_k$ линейно независима):

$$\lambda^1 = ... = \lambda^k = 0.$$

$\square$

Теорема 12.2.6. *В конечномерном пространстве X длина линейно независимой системы $a_1, ..., a_m$ всегда не больше размерности пространства X*

$$m \leqslant \dim X. \tag{12.2.59}$$

и эта система тогда и только тогда является базисом, когда ее длина равна размерности этого пространства:

$$m = \dim X. \tag{12.2.60}$$

Доказательство. 1. Неравенство (12.2.59) – непосредственное следствие леммы 12.2.3.

2. Если $a_1, ..., a_m$ – базис, то по определению размерности длина m последовательности векторов $a_1, ..., a_m$ должна быть равна размерности X, то есть выполняется (12.2.60).

3. Наоборот, если $a_1, ..., a_m$ – не базис, то по лемме 12.2.5 найдется элемент a_{m+1} такой, что система $a_1, ..., a_n, a_{m+1}$ снова будет линейно независимой. Но тогда по лемме 12.2.3 должно выполняться неравенство

$$m + 1 \leqslant \dim X,$$

из которого следует, что (12.2.60) неверно. $\square$

Теорема 12.2.7. *Если пространство X конечномерно, то в нем всякая линейно независимая система векторов $a_1, ..., a_m$ дополняется до некоторого базиса $a_1, ..., a_m, a_{m+1}, ..., a_n$ (где $n = \dim X$).*

Доказательство. По теореме 12.2.6, длина системы $a_1, ..., a_m$ не превышает размерности пространства X:

$$m \leqslant n.$$

Если $m = n$, то по теореме 12.2.6 $a_1, ..., a_m$ уже является базисом, и доказывать нечего. Поэтому интересен случай, когда

$$m < n.$$

Тогда по теореме 12.2.6 $a_1, ..., a_m$ – не базис, и значит по лемме 12.2.5, найдется вектор a_{m+1} такой, что система $a_1, ..., a_m, a_{m+1}$ снова является линейно независимой. Если $m + 1 < n$, то опять по по теореме 12.2.6 $a_1, ..., a_m, a_{m+1}$ – не базис, и снова по лемме 12.2.5, найдется вектор a_{m+2} такой, что система $a_1, ..., a_m, a_{m+1}, a_{m+2}$ также является линейно независимой, и так далее.

Действуя так по индукции, мы в какой-то момент получим линейно независимую систему $a_1, ..., a_m, a_{m+1}, ..., a_n$ длины $n = \dim X$, и по теореме 12.2.6 она будет базисом в X. □

Подпространства.

- Подмножество Y в векторном пространстве X называется *подпространством* в X, если оно замкнуто относительно операций взятия суммы и умножения на скаляр, то есть

$$\forall x, y \in Y \qquad x + y \in Y$$

и

$$\forall y \in Y \qquad \forall \lambda \in \mathbb{R} \qquad \lambda \cdot y \in Y$$

Свойства подпространств:

1°. *В конечномерном векторном пространстве X любое подпространство Y тоже конечномерно, причем*

$$\dim Y \leqslant \dim X, \tag{12.2.61}$$

и равенство $\dim Y = \dim X$ достигается только в случае, если $Y = X$.

2°. *Если Y и Z – два подпространства в векторном пространстве X, то*

(a) *пересечение $Y \cap Z$ подпространств Y и Z является подпространством в X,*

(b) *множество*

$$Y + Z = \{y + z; \quad y \in Y, \ z \in Z\}$$

всех векторов вида $y + z$, где $y \in Y$ и $z \in Z$ образует подпространство в X (называемое алгебраической суммой подпространств Y и Z),

(c) *если вдобавок X конечномерно, то*

$$\dim(Y \cap Z) + \dim(Y + Z) = \dim Y + \dim Z \tag{12.2.62}$$

Доказательство. 1. Сначала нужно рассмотреть тривиальный случай: если пространство Y состоит из одного нуля

$$Y = \{0\},$$

то оно считается конечномерным, потому что в нем есть базис, состоящий из пустого множества (а размерность Y в этом случае считается нулевой).

Если же Y содержит хотя бы один ненулевой элемент a_1, то зафиксировав его, мы можем применить индукцию как при доказательстве теоремы 12.2.7: если a_1 – не базис в Y, то по лемме 12.2.5, найдется вектор $a_2 \in Y$ такой, что система a_1, a_2 является линейно независимой. Если после этого a_1, a_2 все еще не базис в Y, то опять по лемме 12.2.5, найдется вектор $a_3 \in Y$ такой, что система a_1, a_2, a_3 является линейно независимой, и так далее. Это индуктивный процесс на каком-то шаге приведет к конечной последовательности $a_1, ..., a_m$, являющейся базисом в Y, потому что длина всех таких последовательностей $a_1, ..., a_m$ ограничена размерностью $\dim X$ пространства X:

$$m \leqslant \dim X$$

Из этого неравенства заодно и следует (12.2.61).

2. Утверждения 2°(a) и 2°(b) проверяются элементарно, поэтому перейдем сразу к 2°(c). Поскольку пространство $Y \cap Z$ конечномерно (как подпространство в конечномерном пространстве X), мы можем выбрать в нем базис

$$a_1, ..., a_k \in Y \cap Z.$$

Если рассмотреть эту последовательность как систему векторов в пространстве Y, то она будет линейно независима, и поэтому по теореме 12.2.7 ее можно дополнить до некоторого базиса в Y:

$$a_1, ..., a_k, y_1, ..., y_m \in Y.$$

С другой стороны, последовательность $a_1, ..., a_k$ можно считать системой векторов в Z, и там она тоже будет линейно независимой. Поэтому по теореме 12.2.7 ее можно дополнить до некоторого базиса в Z:

$$a_1, ..., a_k, z_1, ..., z_n \in Z.$$

Теперь покажем, что система векторов $a_1, ..., a_k, y_1, ..., y_m, z_1, ..., z_n$ будет базисом в $Y + Z$.

1. Сначала убедимся, что эта система линейно независима. Пусть

$$\alpha^1 \cdot a_1 + ... + \alpha^k \cdot a_k + \beta^1 \cdot y_1 + ... + \beta^m \cdot y_m + \gamma^1 \cdot z_1 + ... + \gamma^n \cdot z_n = 0 \tag{12.2.63}$$

Обозначим

$$z = \gamma^1 \cdot z_1 + ... + \gamma^n \cdot z_n.$$

Тогда с одной стороны, поскольку $z_1, ..., z_n \in Z$,

$$z \in Z.$$

А, с другой стороны,

$$z = -\alpha^1 \cdot a_1 - ... - \alpha^k \cdot a_k - \beta^1 \cdot y_1 - ... - \beta^m \cdot y_m$$

где $a_1, ..., a_k, y_1, ..., y_m \in Y$, и поэтому

$$z \in Y.$$

Как следствие,

$$z \in Y \cap Z,$$

и поскольку $a_1, ..., a_k$ – базис в $Y \cap Z$, должны существовать числа $\lambda^1, ..., \lambda^k$ такие, что

$$z = \lambda^1 \cdot a_1 + ... + \lambda^k \cdot a_k.$$

Теперь мы получаем цепочку:

$$\gamma^1 \cdot z_1 + ... + \gamma^n \cdot z_n = z = \lambda^1 \cdot a_1 + ... + \lambda^k \cdot a_k.$$

$$\Downarrow$$

$$\gamma^1 \cdot z_1 + ... + \gamma^n \cdot z_n - \lambda^1 \cdot a_1 - ... - \lambda^k \cdot a_k = 0.$$

$$\Downarrow \quad \big(a_1, ..., a_k, z_1, ..., z_n \text{ – базис в } Z\big)$$

$$\gamma^1 = ... = \gamma^n = \lambda^1 = ... = \lambda^k = 0.$$

$$\Downarrow \quad \text{подставляем } \gamma^i = 0 \text{ в (12.2.63)}$$

$$\alpha^1 \cdot a_1 + ... + \alpha^k \cdot a_k + \beta^1 \cdot y_1 + ... + \beta^m \cdot y_m + \underbrace{\gamma^1 \cdot z_1 + ... + \gamma^n \cdot z_n}_{\substack{\parallel \\ 0}} = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\alpha^1 \cdot a_1 + ... + \alpha^k \cdot a_k + \beta^1 \cdot y_1 + ... + \beta^m \cdot y_m = 0$$

$$\Downarrow \quad \big(a_1, ..., a_k, y_1, ..., y_m \text{ – базис в } Y\big)$$

$$\alpha^1 = ... = \alpha^k = \beta^1 = ... = \beta^m = 0$$

Таким образом, равенство (12.2.63) влечет равенство нулю всех коэффициентов

$$\alpha^1 = ... = \alpha^k = \beta^1 = ... = \beta^m = \gamma^1 = ... = \gamma^n = 0,$$

и значит, система $a_1, ..., a_k, y_1, ..., y_m, z_1, ..., z_n$ линейно независима.

2. Теперь покажем, что она полна в $Y + Z$. Действительно, по определению, всякий вектор $x \in Y + Z$ имеет вид

$$x = y + z,$$

где $y \in Y$ и $z \in Z$. Поскольку $a_1, ..., a_k, y_1, ..., y_m$ – базис в Y, существуют коэффициенты $\alpha^1, ..., \alpha^k, \beta^1, ..., \beta^m \in \mathbb{R}$ такие что

$$y = \alpha^1 \cdot a_1 + ... + \alpha^k \cdot a_k + \beta^1 \cdot y_1 + ... + \beta^m \cdot y_m.$$

С другой стороны, поскольку $a_1, ..., a_k, z_1, ..., z_n$ – базис в Z, существуют коэффициенты $\widetilde{\alpha}^1, ..., \widetilde{\alpha}^k, \gamma^1, ..., \gamma^n \in \mathbb{R}$ такие что

$$z = \widetilde{\alpha}^1 \cdot a_1 + ... + \widetilde{\alpha}^k \cdot a_k + \gamma^1 \cdot z_1 + ... + \gamma^n \cdot z_n.$$

Вместе это дает

$$x = y+z = \Big(\alpha^1 \cdot a_1 + ... + \alpha^k \cdot a_k + \beta^1 \cdot y_1 + ... + \beta^m \cdot y_m\Big) + \Big(\widetilde{\alpha}^1 \cdot a_1 + ... + \widetilde{\alpha}^k \cdot a_k + \gamma^1 \cdot z_1 + ... + \gamma^n \cdot z_n\Big) =$$
$$= (\alpha^1 + \widetilde{\alpha}^1) \cdot a_1 + ... + (\alpha^k + \widetilde{\alpha}^k) \cdot a_k + \beta^1 \cdot y_1 + ... + \beta^m \cdot y_m + \gamma^1 \cdot z_1 + ... + \gamma^n \cdot z_n$$

То есть x выражается через $a_1, ..., a_k, y_1, ..., y_m, z_1, ..., z_n$.

Мы поняли, что система векторов $a_1, ..., a_k, y_1, ..., y_m, z_1, ..., z_n$ является базисом в пространстве $Y + Z$. Теперь получаем:

$$\overbrace{\dim(Y \cap Z)}^{\substack{k \\ \| \\ \left(\substack{a_1,\ ...,\ a_k \\ -\text{ базис в } Y\cap Z}\right)}} + \underbrace{\dim(Y+Z)}_{\substack{\| \\ \left(\substack{a_1,\ ...,\ a_k,\ y_1,\ ...,\ y_m, \\ z_1,\ ...,\ z_n \\ -\text{ базис в } Y+Z}\right) \\ k+m+n}} = 2k+m+n = \overbrace{\dim Y}^{\substack{k+m \\ \| \\ \left(\substack{a_1,\ ...,\ a_k,\ y_1,\ ...,\ y_m \\ -\text{ базис в } Y}\right)}} + \underbrace{\dim Z}_{\substack{\| \\ \left(\substack{a_1,\ ...,\ a_k,\ z_1,\ ...,\ z_n \\ -\text{ базис в } Z}\right) \\ k+n}}$$

□

(b) Линейные функционалы и сопряженное пространство

- *Линейным функционалом* или *линейной формой* на векторном пространстве X называется всякое отображение $f : X \to \mathbb{R}$, удовлетворяющее условию линейности:

$$f(\alpha \cdot x + \beta \cdot y) = \alpha \cdot f(x) + \beta \cdot f(y), \qquad x, y \in X, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R} \tag{12.2.64}$$

Линейные функционалы на $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{R}_n$.

◇ **12.2.4.** Всякая числовая строка $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n) \in \mathbb{R}_n$ $(\alpha_i \in \mathbb{R})$ определяет некоторый линейный функционал $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ по формуле:

$$f(x) = \alpha \cdot x = (\alpha_1, ..., \alpha_n) \cdot \begin{pmatrix} x^1 \\ ... \\ x^n \end{pmatrix} =$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot x^i, \quad x \in \mathbb{R}^n \tag{12.2.65}$$

И наоборот, всякий линейный функционал $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ определяет некую числовую строку $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n) \in \mathbb{R}_n$ $(\alpha_i \in \mathbb{R})$ по формуле

$$\alpha_i = f(e_i) \tag{12.2.66}$$

где $e = (e_1, ..., e_n)$ – стандартный базис в $\mathbb{R}^n$.

Теорема 12.2.8. *Формулы* (12.2.65) *и* (12.2.66) *устанавливают взаимно однозначное соответствие между числовыми строками $\alpha \in \mathbb{R}_n$ и линейными функционалами $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.*

Доказательство. Действительно, если $\alpha \in \mathbb{R}_n$, то из (12.2.65)

$$f(x) = \alpha \cdot x$$

следует (12.2.66):

$$\forall j \quad f(e_j) = \alpha \cdot e_j = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot \underbrace{e_j^i}_{\substack{\| \\ \begin{cases} 0, & i \ne j \\ 1, & i = j \end{cases}}} = a_j$$

И наоборот, если $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ – линейный функционал, то из (12.2.66)

$$\alpha_i = f(e_i)$$

следует (12.2.65):

$$f(x) = f\left(\sum_{i=1}^{n} x^i \cdot e_i\right) = \sum_{i=1}^{n} x^i \cdot f(e_i) =$$
$$= \sum_{i=1}^{n} x^i \cdot \alpha_i = \alpha \cdot x$$

□

◇ **12.2.5.** Для пространства строк $\mathbb{R}_n$, естественно, картина будет симметричной: всякий числовой столбец $\alpha = \begin{pmatrix} \alpha^1 \\ ... \\ \alpha^n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ $(\alpha^i \in \mathbb{R})$ определяет некоторый линейный функционал $f : \mathbb{R}_n \to \mathbb{R}$ по формуле:

$$f(x) = x \cdot \alpha = (x_1, ..., x_n) \cdot \begin{pmatrix} \alpha^1 \\ ... \\ \alpha^n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \alpha^i, \quad x \in \mathbb{R}_n \qquad (12.2.67)$$

И наоборот, всякий линейный функционал $f : \mathbb{R}_n \to \mathbb{R}$ определяет некий числовой столбец $\alpha = \begin{pmatrix} \alpha^1 \\ ... \\ \alpha^n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ по формуле

$$\alpha^i = f(e^i) \qquad (12.2.68)$$

где $e = \begin{pmatrix} e^1 \\ ... \\ e^n \end{pmatrix}$ – стандартный базис в $\mathbb{R}_n$.

Теорема 12.2.9. *Формулы* (12.2.67) *и* (12.2.68) *устанавливают взаимно однозначное соответствие между числовыми столбцами $\alpha \in \mathbb{R}^n$ и линейными функционалами $f : \mathbb{R}_n \to \mathbb{R}$.*

Столбец коэффициентов.

- Пусть X – векторное пространство и $(b_1, ..., b_n)$ – его базис. Коэффициенты β^i в разложении (12.2.55) вектора x по заданному базису $(b_1, ..., b_n)$ мы условимся обозначать специальным символом $\left[\frac{x}{b_1,...,b_n}\right]^i$ или $\left[\frac{x}{b}\right]^i$:

$$x = \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{x}{b}\right]^i \cdot b_i = \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{x}{b_1, ..., b_n}\right]^i \cdot b_i \qquad (12.2.69)$$

По теореме 12.2.2 числа $\left[\frac{x}{b}\right]^i = \left[\frac{x}{b_1,...,b_n}\right]^i$ определяются однозначно. Их удобно представлять как столбец (соответствующий произвольному вектору x при фиксированном базисе $b = (b_1, ..., b_n)$):

$$\left[\frac{x}{b}\right] = \begin{pmatrix} \left[\frac{x}{b}\right]^1 \\ \left[\frac{x}{b}\right]^2 \\ ... \\ \left[\frac{x}{b}\right]^n \end{pmatrix}.$$

Свойства столбца коэффициентов:

1°. *Однородность:*

$$\left[\frac{\lambda \cdot x}{b}\right] = \lambda \cdot \left[\frac{x}{b}\right] \qquad (12.2.70)$$

2°. *Аддитивность:*

$$\left[\frac{x+y}{b}\right] = \left[\frac{x}{b}\right] + \left[\frac{y}{b}\right] \qquad (12.2.71)$$

! **12.2.6.** Справедливо также следующее тождество *обратной однородности*, служащее определенным оправданием самому обозначению $\left[\frac{x}{b}\right]$:

$$\left[\frac{x}{\lambda \cdot b}\right] = \frac{1}{\lambda} \cdot \left[\frac{x}{b}\right], \qquad \lambda \neq 0 \qquad (12.2.72)$$

(здесь $\lambda \cdot b = (\lambda \cdot b_1, ..., \lambda \cdot b_n)$ – базис, получающийся умножением каждого вектора на число λ). Доказывается это теми же приемами.

Доказательство. 1. Подставив в (12.2.69) вместо x вектор $\lambda \cdot x$, мы получим равенство

$$\lambda \cdot x = \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{\lambda \cdot x}{b}\right]^i \cdot b_i$$

С другой стороны, умножив (12.2.69) на λ, мы получим равенство

$$\lambda \cdot x = \sum_{i=1}^{n} \lambda \cdot \left[\frac{x}{b}\right]^i \cdot b_i$$

Мы получаем, что один и тот же вектор $\lambda \cdot x$ двумя способами разложен по базису $b_1, ..., b_n$:

$$\sum_{i=1}^{n} \left[\frac{\lambda \cdot x}{b}\right]^i \cdot b_i = \lambda \cdot x = \sum_{i=1}^{n} \lambda \cdot \left[\frac{x}{b}\right]^i \cdot b_i$$

По теореме 12.2.2 коэффициенты этих разложений должны совпадать:

$$\left[\frac{\lambda \cdot x}{b}\right]^i = \lambda \cdot \left[\frac{x}{b}\right]^i, \qquad i = 1, ..., n$$

Это и есть (12.2.70):

$$\left[\frac{\lambda \cdot x}{b}\right] \begin{pmatrix} \left[\frac{\lambda \cdot x}{b}\right]^1 \\ \left[\frac{\lambda \cdot x}{b}\right]^2 \\ ... \\ \left[\frac{\lambda \cdot x}{b}\right]^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \cdot \left[\frac{x}{b}\right]^1 \\ \lambda \cdot \left[\frac{x}{b}\right]^2 \\ ... \\ \lambda \cdot \left[\frac{x}{b}\right]^n \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} \left[\frac{x}{b}\right]^1 \\ \left[\frac{x}{b}\right]^2 \\ ... \\ \left[\frac{x}{b}\right]^n \end{pmatrix} = \lambda \cdot \left[\frac{x}{b}\right].$$

2. Равенство (12.2.71) доказывается так же: сначала подставив в (12.2.69) вместо x вектор $x + y$, мы получим

$$x + y = \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{x+y}{b}\right]^i \cdot b_i$$

Затем, сложив (12.2.69) с тем же равенством, только выписанном для вектора y, мы получим

$$x + y = \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \left[\frac{x}{b}\right]^i \cdot b_i}_{x} + \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \left[\frac{y}{b}\right]^i \cdot b_i}_{y} = \sum_{i=1}^{n} \left(\left[\frac{x}{b}\right]^i + \left[\frac{y}{b}\right]^i\right) \cdot b_i = \sum_{i=1}^{n} \left(\left[\frac{x}{b}\right] + \left[\frac{y}{b}\right]\right)^i \cdot b_i$$

В результате один и тот же вектор $x + y$ оказывается двумя способами разложен по базису $b_1, ..., b_n$:

$$\sum_{i=1}^{n} \left[\frac{x+y}{b}\right]^i \cdot b_i = x + y = \sum_{i=1}^{n} \left(\left[\frac{x}{b}\right] + \left[\frac{y}{b}\right]\right)^i \cdot b_i$$

и по теореме 12.2.2 коэффициенты этих разложений должны совпадать:

$$\left[\frac{x+y}{b}\right]^i = \left(\left[\frac{x}{b}\right] + \left[\frac{y}{b}\right]\right)^i$$

Это и есть (12.2.71):

$$\left[\frac{x+y}{b}\right] = \begin{pmatrix} \left[\frac{x+y}{b}\right]^1 \\ \left[\frac{x+y}{b}\right]^2 \\ ... \\ \left[\frac{x+y}{b}\right]^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left[\frac{x}{b}\right]^1 + \left[\frac{y}{b}\right]^1 \\ \left[\frac{x}{b}\right]^2 + \left[\frac{y}{b}\right]^2 \\ ... \\ \left[\frac{x}{b}\right]^n + \left[\frac{y}{b}\right]^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left[\frac{x}{b}\right]^1 \\ \left[\frac{x}{b}\right]^2 \\ ... \\ \left[\frac{x}{b}\right]^n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \left[\frac{y}{b}\right]^1 \\ \left[\frac{y}{b}\right]^2 \\ ... \\ \left[\frac{y}{b}\right]^n \end{pmatrix} = \left[\frac{x}{b}\right] + \left[\frac{y}{b}\right].$$

$\square$

Линейные операции над функционалами и сопряженное пространство X^*.

- Если $f : X \to \mathbb{R}$ и $g : X \to \mathbb{R}$ – два линейных функционала на X, то их *суммой* называется отображение

$$(f + g)(x) := f(x) + g(x), \quad x \in X \tag{12.2.73}$$

Нетрудно заметить, что оно также будет линейным функционалом на X.

- *Произведением* линейного функционала $f : X \to \mathbb{R}$ на число $\lambda \in \mathbb{R}$ называется отображение
$$(\lambda \cdot f)(x) := \lambda \cdot f(x), \quad x \in X \tag{12.2.74}$$
и оно тоже является линейным функционалом на X.
- Множество всех линейных функционалов на векторном пространстве X обозначается символом X^* и называется *сопряженным пространством* к пространству X. Оно будет векторным пространством относительно операций суммы функционалов и умножения функционала на число, определенных формулами (12.2.73) и (12.2.74).

Теорема 12.2.10. *Если $a = (a_1, ..., a_n)$ – базис в векторном пространстве X, то линейные функционалы $\left[\frac{1}{a}\right]^i : X \to \mathbb{R}$ определенные формулой*
$$\left[\frac{1}{a}\right]^i (x) := \left[\frac{x}{a}\right]^i, \qquad x \in X, \quad i = 1, ..., n. \tag{12.2.75}$$
образуют базис сопряженного пространства X^*. Разложение всякого линейного функционала $f \in X^*$ по этому базису имеет вид
$$f = \sum_{i=1}^{n} f(a_i) \cdot \left[\frac{1}{a}\right]^i \tag{12.2.76}$$

Следствие 12.2.11. *Если векторное пространство X конечномерно, то его сопряженное пространство X^* тоже конечномерно, и их размерности совпадают:*
$$\dim X = \dim X^* \tag{12.2.77}$$

(c) Линейные операторы

- Пусть X и Y – векторные пространства. Отображение $A : X \to Y$ называется *линейным оператором* из X в Y, если оно удовлетворяет следующему тождеству, называемому *свойством линейности*:
$$A(\lambda \cdot p + \mu \cdot q) = \lambda \cdot A(p) + \mu \cdot A(q) \qquad p, q \in X,\ \lambda, \mu \in \mathbb{R} \tag{12.2.78}$$

Ядро и образ оператора.

- Пусть X и Y – векторные пространства и $A : X \to Y$ – линейный оператор. Тогда
  - ядром оператора A называется множество $\operatorname{Ker} A$ векторов $x \in X$, которые A переводит в нуль:
$$\operatorname{Ker} A = \{x \in X : \ Ax = 0\} \tag{12.2.79}$$
  - образом оператора A называется множество $\mathsf{Im}\, A$ векторов $y \in X$, которые являются значениями оператора A на каких-то векторах $x \in X$:
$$\mathsf{Im}\, A = \{y \in Y : \ \exists x \in X \ Ax = y\} \tag{12.2.80}$$

! **12.2.7.** Понятно, что *оператор $A : X \to Y$ тогда и только тогда будет сюръективным, когда его образ совпадает с Y:*
$$\mathsf{Im}\, A = Y$$
Несколько менее очевидно, что *оператор $A : X \to Y$ тогда и только тогда будет инъективным, когда его ядро состоит из одного нуля:*
$$\operatorname{Ker} A = \{0\}.$$

Теорема 12.2.12. *Ядро $\operatorname{Ker} A$ и образ $\mathsf{Im}\, A$ оператора $A : X \to Y$ являются подпространствами в X и Y соответственно, причем если пространство X конечномерно, то $\operatorname{Ker} A$ и образ $\mathsf{Im}\, A$ тоже конечномерны, и выполняется равенство*
$$\dim \operatorname{Ker} A + \dim \mathsf{Im}\, A = \dim X \tag{12.2.81}$$

Следствие 12.2.13. *Если векторные пространства X и Y имеют одинаковую (и конечную) размерность*

$$\dim X = \dim Y,$$

то для любого оператора $A : X \to Y$ следующие условия эквивалентны:

(i) *A сюръективен;*

(ii) *A инъективен;*

(iii) *A биективен (то есть обратим).*

Доказательство. Здесь достаточно доказать эквивалентность условий (i) и (ii). Это делается следующей цепочкой:

$$\begin{array}{c} A \text{ сюръективен} \\ \Updownarrow \\ \mathsf{Im}\, A = Y \\ \Updownarrow \quad \text{свойство } 1^\circ \text{ на с.682} \\ \dim \mathsf{Im}\, A = \dim Y = \dim X \\ \Updownarrow \quad (12.2.81) \\ \dim \operatorname{Ker} A = 0 \\ \Updownarrow \\ \operatorname{Ker} A = \{0\} \\ \Updownarrow \\ A \text{ инъективен} \end{array}$$

□

Линейные операции над операторами.

- Если $A : X \to Y$ и $B : X \to Y$ – два линейных оператора, то их *суммой* называется отображение
$$(A + B)(x) := A(x) + B(x), \quad x \in X \tag{12.2.82}$$
Нетрудно заметить, что оно также будет линейным оператором из X в Y.
- *Произведением* линейного оператора $A : X \to Y$ на число $\lambda \in \mathbb{R}$ называется отображение
$$(\lambda \cdot A)(x) := \lambda \cdot A(x), \quad x \in X \tag{12.2.83}$$
и оно тоже является линейным оператором из X в Y.
- Множество всех линейных операторов $A : X \to Y$ обозначается $\operatorname{Hom}(X, Y)$. Оно будет векторным пространством относительно операций суммы операторов и умножения оператора на число, определенных формулами (12.2.82) и (12.2.83). В частном случае, когда $X = Y$, обозначение сокращается:
$$\operatorname{End}(X) = \operatorname{Hom}(X, X) \tag{12.2.84}$$

Теорема 12.2.14. *Если X и Y – конечномерные векторные пространства, то пространство операторов* $\operatorname{Hom}(X, Y)$ *также конечномерно, и*

$$\dim \operatorname{Hom}(X, Y) = \dim X \cdot \dim Y. \tag{12.2.85}$$

В частности,

$$\dim \operatorname{End}(X) = (\dim X)^2 \tag{12.2.86}$$

Произведение операторов и обратимые операторы.

- *Единичным оператором* в векторном пространстве X называется линейный оператор $I_X : X \to X$, действующий по формуле
$$I_X(x) := x, \quad x \in X \tag{12.2.87}$$

- Если $A : X \to Y$ и $B : Y \to Z$ – два линейных оператора, то их *произведением* называется композиция отображений A и B, то есть отображение
$$(BA)(x) := B(A(x)), \quad x \in X \tag{12.2.88}$$
Нетрудно заметить, что оно будет линейным оператором из X в Z.

Свойства операции умножения операторов:

(i) *Справедливы тождества дистрибутивности:*
$$(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C, \qquad A, B \in \mathrm{Hom}(Y, Z),\ C \in \mathrm{Hom}(X, Y) \tag{12.2.89}$$
$$A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C, \qquad A \in \mathrm{Hom}(Y, Z),\ B, C \in \mathrm{Hom}(X, Y) \tag{12.2.90}$$

(ii) *Умножение на единичный оператор не меняет оператора:*
$$A \cdot I = A, \qquad A \in \mathrm{Hom}(X, Y),\ I \in \mathrm{Hom}(X, X) \tag{12.2.91}$$
$$I \cdot A = A, \qquad A \in \mathrm{Hom}(X, Y),\ I \in \mathrm{Hom}(Y, Y) \tag{12.2.92}$$

- Два линейных оператора $A : X \to Y$ и $B : Y \to X$ называются *обратными друг другу* (а каждый из них называется *обратным* по отношению к другому), если их произведения дают единичные операторы:
$$B \cdot A = I_X, \qquad A \cdot B = I_Y.$$
В этом случае пишут
$$A = B^{-1}, \qquad B = A^{-1}.$$

- Линейный оператор $A : X \to Y$ называется *обратимым*, или *изоморфизмом* (векторных пространств), если у него существует обратный линейный оператор A^{-1}.

Теорема 12.2.15. *Для линейного оператора $A : X \to Y$ следующие условия эквивалентны:*

(i) *A обратим,*

(ii) *A является биективным отображением*[8].

(iii) *A переводит некоторый базис $e_1, ..., e_k$ пространства X в базис $Ae_1, ..., Ae_k$ пространства Y.*

- Для всякого векторного пространства X его *вторым сопряженным пространством* X^{**} называется пространство сопряженное к пространству X^*:
$$X^{**} := (X^*)^*$$
Естественным отображением из X в X^{**} называется отображение $\iota_X : X \to X^{**}$, действующее по формуле
$$\iota_X(x)(f) := f(x), \qquad x \in X, \quad f \in X^*. \tag{12.2.93}$$

Заметим, что для всякого базиса $a = (a_1, ..., a_n)$ в векторном пространстве X базис $\frac{1}{\frac{1}{a}}$, сопряженный к сопряженному базису $\frac{1}{a}$ к a представляет собой просто образ базиса a под действием отображения ι_X:
$$\left[\frac{1}{\frac{1}{a}}\right]^i := \iota_X(a_i), \qquad i = 1, ..., n. \tag{12.2.94}$$

Теорема 12.2.16. *Для всякого конечномерного векторного пространства X естественное отображение $\iota_X : X \to X^{**}$ является изоморфизмом.*

[8] Биективные отображения были определены на с.42.

Сопряженные операторы. Для всякого оператора $A : X \to Y$ формула

$$A^*(f) = f \circ A, \qquad f \in Y^*, \tag{12.2.95}$$

определяет некое отображение

$$A^* : Y^* \to X^*,$$

которое, как нетрудно убедиться, является линейным оператором. Он называется *сопряженным оператором* к оператору A.

Алгебраические дополнения и проекторы.

- Говорят, что векторное пространство X *разложено в прямую сумму своих подпространств* Y *и* Z, и записывают это формулой

$$X = Y \oplus Z,$$

если выполняются следующие два условия:

(a) пересечение Y и Z состоит из нулевого вектора:

$$Y \cap Z = \{0\}$$

(b) алгебраическая сумма Y и Z совпадает со всем X

$$X = Y + Z$$

(то есть любой вектор $x \in X$ представим в виде суммы $y + z$, где $y \in Y$ и $z \in Z$).

Эти условия вместе эквивалентны следующему одному условию:

(c) любой вектор $x \in X$ единственным образом представим в виде суммы $y + z$, где $y \in Y$ и $z \in Z$:

$$\forall x \in X \qquad \exists! y \in Y \ \exists! z \in Z \qquad x = y + z$$

При этом подпространство Z называется *алгебраическим дополнением* к подпространству Y в пространстве X (и наоборот, Y – алгебраическим дополнением к Z). Из формулы (12.2.62) следует импликация:

$$X = Y \oplus Z \quad \Rightarrow \quad \dim X = \dim Y + \dim Z. \tag{12.2.96}$$

Теорема 12.2.17. *Всякое подпространство Y в (конечномерном[9]) векторном пространстве X имеет алгебраическое дополнение (неединственное, если $\{0\} \neq Y \neq X$).*

Доказательство. По свойству 1° на с.682 пространство Y конечномерно, значит в нем есть конечный базис $a_1, ..., a_m$. Эта система векторов линейно независима в Y и значит в X. Поэтому по теореме 12.2.7 она дополняется до некоторого базиса $a_1, ..., a_m, a_{m+1}, ..., a_n$ в X. Линейная оболочка новых присоединенных векторов

$$Z = \mathsf{span}\{a_{m+1}, ..., a_n\}$$

будет, как легко понять, алгебраическим дополнением для Y. □

- *Проектором* в векторном пространстве X называется любой линейный оператор $P : X \to X$ со свойством

$$P^2 = P.$$

Свойства проекторов:

1°. *Если P – проектор в X, то $I - P$ – тоже проектор в X, причем*

$$\operatorname{Ker}(I - P) = \mathsf{Im}\, P, \qquad \mathsf{Im}(I - P) = \operatorname{Ker} P. \tag{12.2.97}$$

[9]Теорема 12.2.17 верна не только для конечномерных пространств, но и для бесконечномерных также, однако мы ограничиваемся конечномерным случаем.

2°. *Если P – проектор в X, то его ядро* $\operatorname{Ker} P$ *и образ* $\operatorname{Im} P$ *алгебраически дополняют друг друга в X:*

$$X = \operatorname{Ker} P \oplus \operatorname{Im} P.$$

3°. *Если X разложено в прямую сумму своих подпространств Y и Z,*

$$X = Y \oplus Z,$$

то существует единственный проектор P в X, для которого Y является ядром, а Z – образом:

$$\operatorname{Ker} P = Y, \qquad \operatorname{Im} P = Z.$$

- Фраза *“P является проектором на подпространство Z”* означает, что P – проектор, и $Z = \operatorname{Im} P$, а фраза *“P является проектором вдоль подпространства Y”* означает, что P – проектор, и $Y = \operatorname{Ker} P$.

Доказательство. 1. Если P – проектор в X, то есть $P^2 = P$, то

$$(I-P)^2 = (I-P)\cdot(I-P) = \underbrace{I^2}_{\substack{\parallel\\ I}} - \underbrace{P\cdot I}_{\substack{\parallel\\ P}} - \underbrace{I\cdot P}_{\substack{\parallel\\ P}} + \underbrace{P^2}_{\substack{\parallel\\ P}} = I - P - P + P = I - P.$$

Для доказательства (12.2.97) заметим две цепочки: во-первых,

$$x \in \operatorname{Ker}(I-P) \quad \Rightarrow \quad x - P(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = P(x) \quad \Rightarrow \quad x \in \operatorname{Im} P$$

а, во-вторых,

$$x \in \operatorname{Im} P \quad \Rightarrow \quad \exists y \in X \quad x = P(y) \quad \Rightarrow \quad \exists y \in X \quad P(x) = P(P(y)) = P(y) = x \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad P(x) = x \quad \Rightarrow \quad x - P(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad x \in \operatorname{Ker}(I-P).$$

Вместе они дают равенство $\operatorname{Ker}(I-P) = \operatorname{Im} P$ (верное для любого проектора P). Если в нем заменить проектор P на проектор $I - Q$, мы получим равенство $\operatorname{Ker} Q = \operatorname{Im}(I-Q)$ (верное для любого проектора Q), то есть второе равенство в (12.2.97).

2. Пусть P – проектор в X. Тогда, во-первых,

$$y \in \operatorname{Ker} P \ \cap\ \operatorname{Im} P \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} P(y) = 0 \\ \exists x \in X: \ y = P(x) \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad 0 = P(y) = P(P(x)) = P(x) = y,$$

то есть $\operatorname{Ker} P \cap \operatorname{Im} P = 0$. И, во-вторых, для любого $x \in X$ векторы $z = P(x)$ и $y = x - z$ обладают свойствами:

$$\begin{cases} z \in \operatorname{Im} P, \\ P(y) = P(x-z) = P(x) - P(z) = P(x) - P(P(x)) = P(x) - P(x) = 0 \quad \Longrightarrow \quad y \in \operatorname{Ker} P, \\ x = y + z. \end{cases}$$

То есть $X = \operatorname{Ker} P + \operatorname{Im} P$, и вместе это означает, что $X = Y \oplus Z$.

3. Пусть X разложено в прямую сумму своих подпространств,

$$X = Y \oplus Z.$$

Это означает, что всякий вектор $x \in X$ единственным образом раскладывается в сумму

$$x = y + z$$

где $y \in Y$ и $z \in Z$. Это в свою очередь можно переформулировать так: *для любого вектора $x \in X$ существует единственный вектор $z \in Z$ такой, что $x - z \in Y$*. То есть, правило

$$x - \underset{\substack{\Cap\\ Z}}{z} \in Y \quad \Longleftrightarrow \quad P(x) = z \tag{12.2.98}$$

корректно определяет некое отображение $P : X \to Z$, и поскольку $Z \subseteq X$, его можно считать отображением из X в X:

$$P : X \to X$$

Покажем, что P линейно. Для всякого $\lambda \in \mathbb{R}$ мы получим:

$$x - \underbrace{P(x)}_{\substack{\Cap \\ Z}} \in Y \implies \lambda \cdot x - \underbrace{\lambda \cdot P(x)}_{\substack{\Cap \\ Z}} \in Y \overset{(12.2.98)}{\implies} P(\lambda \cdot x) = \lambda \cdot P(x).$$

А для любых $x, x' \in X$

$$x - \underbrace{P(x)}_{\substack{\Cap \\ Z}} \in Y \quad \& \quad x' - \underbrace{P(x')}_{\substack{\Cap \\ Z}} \in Y \implies x + x' - \Big(\underbrace{P(x) + P(x')}_{\substack{\Cap \\ Z}}\Big) \in Y \overset{(12.2.98)}{\implies}$$

$$\implies P(x + x') = P(x) + P(x').$$

Заметим далее следующую цепочку, из которой следует, что P является проектором:

$$x - P(x) - \underset{\substack{\Cap \\ Z}}{0} \in Y \overset{(12.2.98)}{\implies} P(x - P(x)) = 0 \implies P(x) - P(P(x)) = 0 \implies P(P(x)) = P(x).$$

Далее убедимся, что $\operatorname{Ker} P = Y$:

$$x \in \operatorname{Ker} P \iff P(x) = 0 \overset{(12.2.98)}{\iff} x - \underset{\substack{\Cap \\ Z}}{0} \in Y \iff x \in Y.$$

И, наконец, что $\mathsf{Im}\, P = Z$:

$$z \in \mathsf{Im}\, P \iff \exists x \in X \quad P(x) = z \overset{(12.2.98)}{\iff} \exists x \in X \quad x - \underset{\substack{\Cap \\ Z}}{z} \in Y \iff z \in Z.$$

$\square$

(d) Полилинейные отображения, полилинейные формы и тензоры

- Пусть $X_1, ..., X_k, Y$ – векторные пространства. Отображение

$$\varphi : X_1 \times \cdots \times X_k \to Y$$

называется *полилинейным*, если оно линейно по каждому аргументу, то есть для любого $i = 1, ..., k$ и любых фиксированных векторов $a_1 \in X_1, ..., a_{i-1} \in X_{i-1}, a_{i+1} \in X_{i+1}, ..., a_k \in X_k$ отображение

$$x \in X_i \mapsto \varphi(a_1, ..., a_{i-1}, x, a_{i+1}, ..., a_n) \in Y$$

является линейным оператором:

$$\varphi(a_1, ..., a_{i-1}, \lambda \cdot p + \mu \cdot q, a_{i+1}, ..., a_n) =$$
$$= \lambda \cdot \varphi(a_1, ..., a_{i-1}, p, a_{i+1}, ..., a_n) + \mu \cdot \varphi(a_1, ..., a_{i-1}, q, a_{i+1}, ..., a_n)$$

Полилинейные формы.

- В частном случае, когда $Y = \mathbb{R}$, полилинейное отображение

$$\varphi : X_1 \times \cdots \times X_k \to \mathbb{R}$$

называется *полилинейной формой* на последовательности пространств $X_1, ..., X_k$ (при $k = 2$ – *билинейной формой* на паре пространств (X_1, X_2)). Множество всех полилинейных форм на последовательности векторных пространств $X_1, ..., X_k$ обозначается символом $L(X_1, ..., X_k)$. В частном случае, когда пространства $X_1, ..., X_k$ совпадают, мы будем использовать обозначение

$$L_k(X) = L(\underbrace{X, ..., X}_{k \text{ аргументов}}). \tag{12.2.99}$$

◇ **12.2.8.** Всякая последовательность функционалов $\xi_1 \in X_1^*, ..., \xi_k \in X_k^*$ определяет некую полилинейную форму

$$\xi_1 \boxtimes ... \boxtimes \xi_k \in L(X_1, \dots, X_k),$$

действующую по правилу

$$(\xi_1 \boxtimes ... \boxtimes \xi_k)(x_1, ..., x_k) = \xi_1(x_1) \cdot ... \cdot \xi_k(x_k), \quad x_1 \in X_1, \dots, x_k \in X_k \qquad (12.2.100)$$

Наоборот, для последовательности векторов $x_1 \in X_1, ..., x_k \in X_k$ символ $x_1 \boxtimes ... \boxtimes x_k$ обозначает полилинейную форму на $X_1^*, ..., X_k^*$,

$$x_1 \boxtimes ... \boxtimes x_k \in L(X_1^*, \dots, X_k^*),$$

действующую по правилу

$$(x_1 \boxtimes ... \boxtimes x_k)(\xi_1, ..., \xi_k) = \xi_1(x_1) \cdot ... \cdot \xi_k(x_k), \quad \xi_1 \in X_1^*, \dots, \xi_k \in X_k^*. \qquad (12.2.101)$$

◇ **12.2.9.** Не всякая полилинейная форма на X имеет вид (12.2.100). Например, формы $\alpha : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$\alpha(x; y) = x^1 \cdot y^1 + x^2 \cdot y^2$$

и

$$\alpha(x; y) = x^1 \cdot y^2 - x^2 \cdot y^1$$

нельзя представить в таком виде.

Теорема 12.2.18. *Пусть $a = (a_1, ..., a_k)$ – базис в X, а $b = (b_1, ..., b_l)$ – базис в Y, и в соответствии с* (12.2.75) $\left[\frac{1}{a}\right]^i$ *и* $\left[\frac{1}{b}\right]^j$ *– сопряженные базисы в X^* и Y^*. Тогда билинейные формы*

$$\left[\frac{1}{a}\right]^i \boxtimes \left[\frac{1}{b}\right]^j; \ i = 1, ..., k, \ j = 1, ..., l$$

образуют базис в пространстве $L(X, Y)$ билинейных форм на $X \times Y$. Разложение всякой билинейной формы $\varphi : X \times Y \to \mathbb{R}$ по этому базису имеет вид

$$\varphi = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^l \varphi(a_i, b_j) \cdot \left[\frac{1}{a}\right]^i \boxtimes \left[\frac{1}{b}\right]^j \qquad (12.2.102)$$

! **12.2.10.** Этот результат очевидным образом обобщается на случай пространства $L(X_1, ..., X_k)$ с произвольной последовательностью аргументов $(X_1, ..., X_k)$.

Доказательство. Сначала убедимся, что эта система линейно независима. Пусть для некоторых скаляров $\lambda_{i,j}$ выполняется равенство

$$\sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^l \lambda_{i,j} \cdot \left[\frac{1}{a}\right]^i \boxtimes \left[\frac{1}{b}\right]^j = 0.$$

Тогда для всякой пары индексов (p, q) мы получим:

$$\left[\frac{1}{a}\right]^i \boxtimes \left[\frac{1}{b}\right]^j (a_p, b_q) = \left[\frac{1}{a}\right]^i (a_p) \cdot \left[\frac{1}{b}\right]^j (b_q) = \begin{cases} 0, & (i,j) \neq (p,q) \\ 1, & (i,j) = (p,q) \end{cases},$$

и поэтому

$$0 = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^l \lambda_{i,j} \cdot \left[\frac{1}{a}\right]^i \boxtimes \left[\frac{1}{b}\right]^j (a_p, b_q) = \lambda_{p,q}.$$

Это верно для любых p и q, поэтому система $\left[\frac{1}{a}\right]^i \boxtimes \left[\frac{1}{b}\right]^j$ действительно линейно независима.

Теперь покажем, что она линейно полна. Пусть $\varphi : X \times Y \to \mathbb{R}$ – билинейная форма. Тогда для любых $x \in X$ и $y \in Y$

$$\varphi(x, y) = \varphi\left(\sum_{i=1}^k \left[\frac{x}{a}\right]^i \cdot a_i, \sum_{j=1}^l \left[\frac{y}{b}\right]^i \cdot b_j\right) = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^l \left[\frac{x}{a}\right]^i \cdot \left[\frac{y}{b}\right]^j \cdot \varphi(a_i, b_j) = (12.2.100) =$$

$$= \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^l \varphi(a_i, b_j) \cdot \left(\left[\frac{1}{a}\right]^i \boxtimes \left[\frac{1}{b}\right]^j\right)(x, y)$$

Отбрасывая аргумент (x, y), мы получаем (12.2.102). □

$\diamond$ **12.2.11.** Для любого числового семейства $\{\alpha_{i,j};\ i,j\in\{1,...,n\}\}\subseteq\mathbb{R}$ формула

$$\alpha(x,y)=\sum_{i,j=1}^{n}\alpha_{i,j}\cdot x^i\cdot y^j,\qquad x,y\in\mathbb{R}^n,\tag{12.2.103}$$

очевидно, определяет билинейную форму $\alpha:\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$. Наоборот, из теоремы 12.2.18 следует, что всякая билинейная форма $\alpha:\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ имеет вид (12.2.103), где семейство чисел $\alpha_{i,j}$ определяется формулой

$$\alpha_{i,j}=\alpha(e^i,e^j),\tag{12.2.104}$$

в которой e^i – стандартный базис в $\mathbb{R}^n$, определенный в (12.2.56).

Предложение 12.2.19. *Для всякой последовательности конечномерных векторных пространств $X_1,...,X_k$ размерность пространства $L(X_1,\dots,X_k)$ полилинейных форм на ней равна произведению размерностей пространств $X_1,...,X_k$:*

$$\dim L(X_1,\dots,X_k)=\dim X_1\cdot...\cdot\dim X_k.\tag{12.2.105}$$

Доказательство. В частном случае, когда множителей в тензорном произведении два, X и Y, это равенство следует из теоремы 12.2.18

$$\dim L(X,Y)=\dim X\cdot\dim Y,$$

потому что если $a=(a_1,...,a_k)$ – базис в X, а $b=(b_1,...,b_l)$ – базис в Y, то в $L(X,Y)$ число элементов в базисе

$$\left[\frac{1}{a}\right]^i\boxtimes\left[\frac{1}{b}\right]^j;\ i=1,...,k,\ j=1,...,l$$

равно $k\cdot l$. В общем случае те же рассуждения опираются на замечание 12.2.10. $\square$

Тензоры.

- *Тензором* в последовательности конечномерных векторных пространств $X_1,...,X_k$ называется всякий линейный функционал

  $$T:L(X_1,...,X_k)\to\mathbb{R}$$

  на пространстве $L(X_1,...,X_k)$ полилинейных форм на $X_1,...,X_k$. Множество всех тензоров на $X_1,...,X_k$ обозначается символом $X_1\otimes...\otimes X_k$ и называется *тензорным произведением* последовательности пространств $X_1,...,X_k$. По определению,

  $$X_1\otimes...\otimes X_k:=L(X_1,...,X_k)^*\tag{12.2.106}$$

$\diamond$ **12.2.12.** Всякая последовательность $x_1\in X_1$, ..., $x_k\in X_k$ определяет некий тензор (функционал)

$$x_1\otimes...\otimes x_k\in X_1\otimes...\otimes X_k=L(X_1,\dots,X_k)^*,$$

действующий по правилу

$$(x_1\otimes\dots\otimes x_k)(\alpha):=\alpha(x_1,\dots,x_k),\qquad \alpha\in L(X_1,\dots,X_k)\tag{12.2.107}$$

Точно так же, для последовательности функционалов $\xi_1\in X_1^*,...,\xi_k\in X_k^*$ символ $\xi_1\otimes...\otimes\xi_k$ обозначает тензор (функционал)

$$\xi_1\boxtimes...\boxtimes\xi_k\in X_1^*\otimes...\otimes X_k^*=L(X_1^*,\dots,X_k^*)^*,$$

действующий по правилу

$$(\xi_1\otimes\dots\otimes\xi_k)(f)=\alpha(\xi_1,\dots,\xi_k),\qquad f\in L(X_1^*,\dots,X_k^*).\tag{12.2.108}$$

Теорема 12.2.20. *Пусть $a=(a_1,...,a_k)$ – базис в X, а $b=(b_1,...,b_l)$ – базис в Y. Тогда тензоры*

$$a_i\otimes b_j;\quad i=1,...,k,\ j=1,...,l$$

образуют базис в тензорном произведении $X\otimes Y=L(X,Y)^*$.

! **12.2.13.** Этот результат очевидным образом обобщается на случай пространства $X_1 \otimes ... \otimes X_k$ с произвольной последовательностью аргументов $(X_1, ..., X_k)$.

Доказательство. Опять начнем с того, что убедимся, что эта система линейно независима. Пусть для некоторых скаляров $\lambda^{i,j}$ выполняется равенство

$$\sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{l} \lambda^{i,j} \cdot a_i \otimes b_j = 0.$$

Пусть в соответствии с (12.2.75) $\left[\frac{1}{a}\right]^i$ и $\left[\frac{1}{b}\right]^j$ – сопряженные базисы в X^* и Y^*. Для всякой пары индексов (p, q) мы получим

$$a_i \otimes b_j \left(\left[\frac{1}{a}\right]^p \boxtimes \left[\frac{1}{b}\right]^q \right) = \left[\frac{1}{a}\right]^p \boxtimes \left[\frac{1}{b}\right]^q (a_i, b_j) = \left[\frac{1}{a}\right]^p (a_i) \cdot \left[\frac{1}{b}\right]^q (b_j) = \begin{cases} 0, & (i,j) \neq (p,q) \\ 1, & (i,j) = (p,q) \end{cases},$$

поэтому

$$0 = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{l} \lambda^{i,j} \cdot a_i \otimes b_j \left(\left[\frac{1}{a}\right]^p \boxtimes \left[\frac{1}{b}\right]^q \right) = \lambda^{p,q}.$$

Это верно для любых p и q, поэтому система $a_i \otimes b_j$ действительно линейно независима.

Теперь покажем, что она линейно полна. Пусть $T \in X \otimes Y = L(X, Y)^*$ – произвольный тензор. Тогда для любой билинейной формы $\varphi \in L(X, Y)$

$$T(\varphi) = (12.2.102) = T\left(\sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{l} \varphi(a_i, b_j) \cdot \left[\frac{1}{a}\right]^i \boxtimes \left[\frac{1}{b}\right]^j \right) = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{l} \varphi(a_i, b_j) \cdot T\left(\left[\frac{1}{a}\right]^i \boxtimes \left[\frac{1}{b}\right]^j \right) =$$
$$= \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{l} a_i \otimes b_j(\varphi) \cdot T\left(\left[\frac{1}{a}\right]^i \boxtimes \left[\frac{1}{b}\right]^j \right)$$

Выбрасывая аргумент φ мы получаем, что T является линейной комбинацией билинейных форм $a_i \otimes b_j$:

$$T = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{l} T\left(\left[\frac{1}{a}\right]^i \boxtimes \left[\frac{1}{b}\right]^j \right) \cdot a_i \otimes b_j.$$

□

Из этой леммы, или напрямую из предложения 12.2.19 следует

Предложение 12.2.21. *Для всякой последовательности конечномерных векторных пространств $X_1, ..., X_k$ размерность тензорного произведения $X_1 \otimes \dots \otimes X_k$ равна произведению размерностей пространств $X_1, ..., X_k$:*

$$\dim(X_1 \otimes \dots \otimes X_k) = \dim X_1 \cdot ... \cdot \dim X_k. \tag{12.2.109}$$

Изоморфизм $X_1 \otimes ... \otimes X_k \cong L\big(X_1^*, ..., X_k^*\big)$.

Теорема 12.2.22. *Для любых конечномерных векторных пространств $X_1, ..., X_k$ отображение*

$$@ : \underbrace{L(X_1, \dots, X_k)^*}_{\substack{\| \\ X_1 \otimes ... \otimes X_k}} \to L\big(X_1^*, \dots, X_k^*\big) \quad \Bigg| \quad @T(\xi_1, ..., \xi_k) = T(\xi_1 \boxtimes ... \boxtimes \xi_k), \quad T \in L(X_1, \dots, X_k)^*, \quad \xi_i \in X_i^*,$$

является изоморфизмом векторных пространств, переводящим произвольный функционал $x_1 \otimes ... \otimes x_k$ в полилинейную форму $\iota_{X_1}(x_1) \boxtimes ... \boxtimes \iota_{X_k}(x_k)$:[10]

$$x_1 \otimes ... \otimes x_k \mapsto \iota_{X_1}(x_1) \boxtimes ... \boxtimes \iota_{X_k}(x_k). \tag{12.2.110}$$

Всякое вообще линейное отображение $L(X_1, \dots, X_k)^* \to L\big(X_1^*, \dots, X_k^*\big)$, удовлетворяющее условию (12.2.110), *совпадает с* @.

[10]Отображения вида $\iota_X \to X^{**}$ были определены формулой (12.2.93).

Доказательство. Ограничимся случаем двух пространств X и Y и соответственно отображения

$$@ : L(X,Y)^* \to L\big(X^*,Y^*\big) \quad \Big| \quad @T(\xi,\upsilon) = T(\xi \boxtimes \upsilon), \quad T \in L(X,Y)^*, \quad \xi \in X^*, \quad \upsilon \in Y^*$$

(общий случай рассматривается по аналогии).

1. Прежде всего нужно убедиться, что это отображение линейно. Для любых $S, T \in L(X,Y)^*$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\xi \in X^*$, $\upsilon \in Y^*$ мы получим:

$$@(\alpha \cdot S + \beta \cdot T)(\xi,\upsilon) = (\alpha \cdot S + \beta \cdot T)(\xi \boxtimes \upsilon) = \alpha \cdot S(\xi \boxtimes \upsilon) + \beta \cdot T(\xi \boxtimes \upsilon) = \alpha \cdot @(S)(\xi,\upsilon) + \beta \cdot @(T)(\xi,\upsilon).$$

Теперь отбрасывая ξ и υ, имеем:

$$@(\alpha \cdot S + \beta \cdot T) = \alpha \cdot @(S) + \beta \cdot @(T).$$

2. После этого проверим условие (12.2.110):

$$\begin{aligned} @(x \otimes y)(\xi,\upsilon) = (x \otimes y)(\xi \boxtimes \upsilon) = (12.2.107) = (\xi \boxtimes \upsilon)(x,y) = \\ = \xi(x) \cdot \upsilon(y) = (12.2.93) = \iota_X(x)(\xi) \cdot \iota_Y(y)(\upsilon) = (\iota_X(x) \boxtimes \iota_Y(y))(\xi,\upsilon) \end{aligned}$$

3. Зафиксируем теперь какие-нибудь базисы $a_1,...,a_k$ и $b_1,...,b_l$ в X и Y соответственно. По теореме 12.2.20 тензоры вида

$$a_i \otimes b_j, \qquad i = 1,...,k,\ j = 1,...,l$$

образуют базис в пространстве $X \otimes Y = L(X,Y)^*$. А по теореме 12.2.18 билинейные формы

$$\left[\frac{1}{\frac{1}{a}}\right]^i \boxtimes \left[\frac{1}{\frac{1}{b}}\right]^j = (12.2.94) = \iota_X(a_i) \boxtimes \iota_Y(b_j);\ i = 1,...,k,\ j = 1,...,l$$

образуют базис в пространстве $L(X^*,Y^*)$. При этом по уже доказанной формуле (12.2.110), при отображении @ первый базис превращается во второй:

$$@(a_i \otimes b_j) = \iota_X(a_i) \boxtimes \iota_Y(b_j).$$

Мы получили, что линейное отображение $@ : L(X,Y)^* \to L\big(X^*,Y^*\big)$ переводит базис в базис. По теореме 12.2.15 это означает, что оно является изоморфизмом векторных пространств. $\square$

Универсальность пространства тензоров. Для всякой последовательности векторных пространств $X_1,...,X_k$ рассмотрим отображение

$$\otimes : X_1 \times ... \times X_k \to X_1 \otimes ... \otimes X_k \quad \Big| \quad \otimes(x_1,...,x_k) = x_1 \otimes ... \otimes x_k, \qquad x_i \in X_i.$$

и заметим, что оно полилинейно.

Теорема 12.2.23. *Для всякого набора конечномерных векторных пространств $X_1,...,X_k,Y$ и всякого полилинейного отображения $\varphi : X_1 \times ... \times X_k \to Y$ найдется единственный линейный оператор $\varphi^{\otimes} : X_1 \otimes ... \otimes X_k \to Y$, замыкающий диаграмму*

$$\begin{tikzcd} & X_1 \times ... \times X_k \arrow[dl, "\otimes"'] \arrow[dr, "\varphi"] & \\ X_1 \otimes ... \otimes X_k \arrow[rr, dashed, "\varphi^{\otimes}"'] & & Y \end{tikzcd}.$$

Доказательство. Каждому функционалу $f \in Y^*$ поставим в соответствие полилинейную форму на $X_1,...,X_k$ по формуле

$$\psi(f) = f \circ \varphi.$$

У нас получился линейный оператор

$$\psi : Y^* \to L(X_1,...,X_k).$$

Рассмотрим отображение $\iota_Y : Y \to Y^{**}$, определенное формулой (12.2.93). По теореме 12.2.16 оно является изоморфизмом, поэтому определено обратное отображение $\iota_Y^{-1} : Y^{**} \to Y$. Положим

$$\varphi^{\otimes} = \iota_Y^{-1} \circ \psi^* : L(X_1, ..., X_k)^* \to Y$$

Тогда возникает цепочка (в которой $x_i \in X_i$, $f \in Y^*$):

$$\iota_Y(\varphi^{\otimes}(\otimes(x_1, ..., x_k)))(f) = \psi^*(\otimes(x_1, ..., x_k))(f) = \psi^*(x_1 \otimes ... \otimes x_k)(f) = (12.2.95) = (x_1 \otimes ... \otimes x_k)(\psi(f)) =$$
$$= (x_1 \otimes ... \otimes x_k)(f \circ \varphi) = (12.2.107) = (f \circ \varphi)(x_1, ..., x_k) = f(\varphi(x_1, ..., x_k)) = (12.2.93) = \iota_Y(\varphi(x_1, ..., x_k))(f)$$

$$\Downarrow$$

$$\iota_Y(\varphi^{\otimes}(\otimes(x_1, ..., x_k))) = \iota_Y(\varphi(x_1, ..., x_k))$$

$$\Downarrow$$

$$\varphi^{\otimes}(\otimes(x_1, ..., x_k)) = \varphi(x_1, ..., x_k)$$

$$\Downarrow$$

$$\varphi^{\otimes} \circ \otimes = \varphi.$$

□

§ 3 Матрицы и определители

(a) Матрицы

Напомним, что *начальным интервалом* натурального ряда $\mathbb{N}$ мы условились называть (см. определение на с.154) произвольное множество вида

$$\{1, ..., n\} = \{k \in \mathbb{N} : \ k \leqslant n\}$$

- *Матрицей* размера $m \times n$, где $m, n \in \mathbb{N}$, называется произвольная вещественнозначная функция на декартовом произведении $\{1, ..., m\} \times \{1, ..., n\}$ начальных интервалов $\{1, ..., m\}$ и $\{1, ..., n\}$, то есть отображение вида

  $$M : \{1, ..., m\} \times \{1, ..., n\} \to \mathbb{R}$$

  Значение такой функции в точке $(i, j) \in \{1, ..., m\} \times \{1, ..., n\}$ удобно обозначать с помощью индексов:

  $$M_i^j := M(i, j)$$

  а всю матрицу удобно изображать в виде таблицы, в которой нижний индекс обозначает номер столбца, а верхний – номер строки:

  $$M = \begin{pmatrix} M_1^1 & M_2^1 & ... & M_m^1 \\ M_1^2 & M_2^2 & ... & M_m^2 \\ ... & ... & ... & ... \\ M_1^n & M_2^n & ... & M_m^n \end{pmatrix}$$

  Числа M_i^j в этой таблице (то есть значения функции M в точках (i, j)) называются *элементами матрицы* M, число m называется ее *длиной*, а число n – ее *высотой*.
- Множество всех матриц размера $m \times n$ (то есть длиной m и высотой n) мы будем обозначать $\mathbb{R}_m^n$.
- Матрицы, у которых длина равна высоте, называются *квадратными матрицами*.
- Матрицы, у которых высота равна 1, можно отождествить со *строками*, которые мы определили на с.654.
- Двойственным образом, матрицы, у которых длина равна 1 отождествляются со *столбцами*, определенными на с.655.

Алгебраические операции над матрицами.

- Всякую матрицу M можно умножать поэлементно на произвольное число $\lambda \in \mathbb{R}$ – получающаяся при этом матрица обозначается $\lambda \cdot M$ и называется *произведением матрицы M на число λ*:
$$(\lambda \cdot M)_i^j := \lambda \cdot M_i^j$$
- Если M и N – матрицы одинакового размера $m \times n$, то их можно складывать поэлементно, и получающаяся матрица (того же размера $m \times n$) называется *суммой матриц M и N* и обозначается $M + N$:
$$(M+N)_i^j := M_i^j + N_i^j \qquad (M, N \in \mathbb{R}_m^n)$$
- Кроме того, если M – матрица размера $m \times n$, а N – матрица размера $l \times m$, то формула
$$(M \cdot N)_i^j := \sum_{k=1}^{m} M_k^j \cdot N_i^k \qquad (M \in \mathbb{R}_m^n,\ N \in \mathbb{R}_l^m) \tag{12.3.111}$$
определяет матрицу $M \cdot N$ размера $l \times n$, называемую *произведением матриц M и N*.
- Для всякой матрицы M размера $m \times n$ ее *транспонированной матрицей* называется матрица размера $n \times m$, обозначаемая символом $M^\top$ и определяемая формулой
$$(M^\top)_i^j := M_j^i$$

Действие матрицы на строку векторов и разложение по базису.

- Пусть $M \in \mathbb{R}_m^n$ – матрица длины m и высоты n. Тогда для любого векторного пространства X и любой строки $(x_1, ..., x_n)$ длины n векторов из X строка длины m
$$(x_1, ..., x_n) \cdot M := \big(x_1 \cdot M_1^1 + ... + x_n \cdot M_1^n, ..., x_1 \cdot M_m^1 + ... + x_n \cdot M_m^n\big) \tag{12.3.112}$$
или, что эквивалентно, строка $(y_1, ..., y_m)$, элементы которой определяются формулой
$$y_i = \sum_{j=1}^{n} x_j \cdot M_i^j,$$
называется *внешним действием матрицы M на строку* $(x_1, ..., x_n)$.
- Если $(b_1, ..., b_n)$ – базис в векторном пространстве X, а $(x_1, ..., x_m)$ – произвольная последовательность элементов X, то мы можем разложить каждый элемент x_i по базису $(b_1, ..., b_n)$,
$$x_i = \sum_{j=1}^{n} \left[\frac{x_i}{b}\right]^j \cdot b_j,$$
выписать столбцы коэффициентов
$$\left[\frac{x_i}{b}\right] = \left[\frac{x_i}{b_1, ..., b_n}\right] = \begin{pmatrix} \left[\frac{x_i}{b}\right]^1 \\ \left[\frac{x_i}{b}\right]^2 \\ ... \\ \left[\frac{x_i}{b}\right]^n \end{pmatrix}.$$
и рассмотреть матрицу, составленную из этих столбцов:
$$\left[\frac{x}{b}\right] = \left[\frac{x_1, ..., x_m}{b_1, ..., b_n}\right] := \begin{pmatrix} \left[\frac{x_1}{b}\right]^1 & \left[\frac{x_2}{b}\right]^1 & ... & \left[\frac{x_m}{b}\right]^1 \\ \left[\frac{x_1}{b}\right]^2 & \left[\frac{x_2}{b}\right]^2 & ... & \left[\frac{x_m}{b}\right]^2 \\ ... & ... & ... & ... \\ \left[\frac{x_1}{b}\right]^n & \left[\frac{x_2}{b}\right]^n & ... & \left[\frac{x_m}{b}\right]^n \end{pmatrix} \tag{12.3.113}$$
Эта матрица называется *матрицей коэффициентов последовательности векторов $x = (x_1, ..., x_m)$ в разложении по базису* $b = (b_1, ..., b_n)$. Коротко она определяется равенством
$$\left[\frac{x}{b}\right]_i^j := \left[\frac{x_i}{b}\right]^j, \qquad i = 1, ..., m, \quad j = 1, ..., n \tag{12.3.114}$$

Теорема 12.3.1. *Строка векторов пространства X восстанавливается по матрице коэффициентов их разложения по базису с помощью следующей формулы:*

$$(x_1, ..., x_m) = (b_1, ..., b_n) \cdot \left[\frac{x}{b}\right] \tag{12.3.115}$$

Доказательство.

$$(b_1, ..., b_n) \cdot \left[\frac{x}{b}\right] = (12.3.112) = \left(b_1 \cdot \left[\frac{x}{b}\right]^1_1 + ... + b_n \cdot \left[\frac{x}{b}\right]^n_1, \dots, b_1 \cdot \left[\frac{x}{b}\right]^1_m + ... + b_n \cdot \left[\frac{x}{b}\right]^n_m\right) =$$
$$= \Bigg(\underbrace{b_1 \cdot \left[\frac{x_1}{b}\right]^1 + ... + b_n \cdot \left[\frac{x_1}{b}\right]^n}_{\substack{\parallel\ (12.2.69) \\ x_1}}, \dots, \underbrace{b_1 \cdot \left[\frac{x_m}{b}\right]^1 + ... + b_n \cdot \left[\frac{x_m}{b}\right]^n}_{\substack{\parallel\ (12.2.69) \\ x_m}}\Bigg) = (x_1, ..., x_m)$$

$\square$

Действие матрицы на столбец векторов и разложение по базису.

- Пусть $M \in \mathbb{R}^n_m$ – матрица длины m и высоты n. Тогда для любого векторного пространства X и любого столбца $\begin{pmatrix} x^1 \\ ... \\ x^m \end{pmatrix}$ высоты m векторов из X столбец высоты n
$$M \cdot \begin{pmatrix} x^1 \\ ... \\ x^m \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} M^1_1 \cdot x^1 + ... + M^1_m \cdot x^m \\ ... \\ M^n_1 \cdot x^1 + ... + M^n_m \cdot x^m \end{pmatrix} \tag{12.3.116}$$
называется *внешним действием матрицы M на столбец* $\begin{pmatrix} x^1 \\ ... \\ x^m \end{pmatrix}$.

Матрица перехода к новому базису.

- В частном случае, если $(a_1, ..., a_n)$ и $(b_1, ..., b_n)$ – два базиса в векторном пространстве X, то (квадратная) матрица коэффициентов последовательности векторов $(a_1, ..., a_n)$ в разложении по базису $(b_1, ..., b_n)$
$$\left[\frac{a}{b}\right] := \begin{pmatrix} \left[\frac{a_1}{b}\right]^1 & \left[\frac{a_2}{b}\right]^1 & ... & \left[\frac{a_n}{b}\right]^1 \\ \left[\frac{a_1}{b}\right]^2 & \left[\frac{a_2}{b}\right]^2 & ... & \left[\frac{a_n}{b}\right]^2 \\ ... & ... & ... & ... \\ \left[\frac{a_1}{b}\right]^n & \left[\frac{a_2}{b}\right]^n & ... & \left[\frac{a_n}{b}\right]^n \end{pmatrix} \tag{12.3.117}$$
называется *матрицей перехода от базиса $(a_1, ..., a_n)$ к базису $(b_1, ..., b_n)$*. Коротко ее определение записывается формулой
$$\left[\frac{a}{b}\right]^j_i := \left[\frac{a_i}{b}\right]^j, \qquad i, j = 1, ..., n \tag{12.3.118}$$

Из теоремы 12.3.1 следует

Теорема 12.3.2. *Базисы $(a_1, ..., a_n)$ и $(b_1, ..., b_n)$ в векторном пространстве X связаны между собой через матрицу перехода по следующей формуле:*

$$(a_1, ..., a_n) = (b_1, ..., b_n) \cdot \left[\frac{a}{b}\right] \tag{12.3.119}$$

Теорема 12.3.3. *Если $(a_1, ..., a_n)$ и $(b_1, ..., b_n)$ – два базиса в векторном пространстве X, то*

$$\left[\frac{a}{b}\right] \cdot \left[\frac{x}{a}\right] = \left[\frac{x}{b}\right], \qquad x \in X \tag{12.3.120}$$
$$\left[\frac{a}{b}\right] \cdot \left[\frac{b}{a}\right] = I = \left[\frac{b}{a}\right] \cdot \left[\frac{a}{b}\right] \tag{12.3.121}$$
$$\left[\frac{a}{b}\right]^{-1} = \left[\frac{b}{a}\right] \tag{12.3.122}$$

(где I – единичная матрица размера $n \times n$).

Доказательство. 1. Равенство (12.3.120) выводится из цепочки

$$\sum_{j=1}^{n}\left(\left[\frac{a}{b}\right]\cdot\left[\frac{x}{a}\right]\right)^{j}\cdot b_j=\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{a}{b}\right]_i^j\cdot\left[\frac{x}{a}\right]^i\right)\cdot b_j=\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{x}{a}\right]^i\cdot\left(\sum_{j=1}^{n}\left[\frac{a}{b}\right]_i^j\cdot b_j\right)=$$
$$=\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{x}{a}\right]^i\cdot\left(\sum_{j=1}^{n}\left[\frac{a_i}{b}\right]^j\cdot b_j\right)=\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{x}{a}\right]^i\cdot a_i=x=\sum_{j=1}^{n}\left[\frac{x}{b}\right]^j\cdot b_j$$

2. В (12.3.121) первое равенство выводится прямым вычислением:

$$\sum_{j=1}^{n}\left(\left[\frac{a}{b}\right]\cdot\left[\frac{b}{a}\right]\right)_i^{j}\cdot b_j=\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{a}{b}\right]_k^j\cdot\left[\frac{b}{a}\right]_i^k\right)\cdot b_j=\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{a_k}{b}\right]^j\cdot\left[\frac{b_i}{a}\right]^k\right)\cdot b_j=$$
$$=\sum_{j=1}^{n}\left[\frac{\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{b_i}{a}\right]^k\cdot a_k}{b}\right]^j\cdot b_j=\sum_{j=1}^{n}\left[\frac{b_i}{b}\right]^j\cdot b_j=b_i=\sum_{j=1}^{n}I_i^j\cdot b_j$$
$$\Downarrow$$
$$\left(\left[\frac{a}{b}\right]\cdot\left[\frac{b}{a}\right]\right)_i^{j}=I_i^j$$
$$\Downarrow$$
$$\left[\frac{a}{b}\right]\cdot\left[\frac{b}{a}\right]=I$$

А после этого второе равенство в (12.3.121) тоже можно считать доказанным, потому что оно получается из первого перестановкой букв a и b.

3. Равенство (12.3.122) теперь – следствие (12.3.121). □

Матрица линейного оператора.

- Пусть $a_1,...,a_m$ – базис в X, а $b_1,...,b_n$ – базис в Y. Тогда матрицей линейного оператора $A:X\to Y$ относительно этих базисов называется матрица, у которой в i-м столбце и j-й строке стоит j-й коэффициент разложения вектора Aa_i по базису $b_1,...,b_n$:

$$\left[\frac{Aa}{b}\right]_i^j:=\left[\frac{Aa_i}{b}\right]^j \qquad (12.3.123)$$

Иными словами, характеристическим свойством этой матрицы является тождество

$$Aa_i=\sum_{j=1}^{n}\left[\frac{Aa}{b}\right]_i^j\cdot b_j=\sum_{j=1}^{n}\left[\frac{Aa_i}{b}\right]^j\cdot b_j \qquad (12.3.124)$$

Теорема 12.3.4. *Если $a_1,...,a_m$ – базис в X, а $b_1,...,b_n$ – базис в Y, то справедливы тождества:*

$$\left[\frac{Ax}{b}\right]=\left[\frac{Aa}{b}\right]\cdot\left[\frac{x}{b}\right] \qquad (12.3.125)$$

$$Ax=(b_1,...,b_n)\cdot\left[\frac{Aa}{b}\right]\cdot\left[\frac{x}{a}\right],\qquad x\in X \qquad (12.3.126)$$

Доказательство. Равенство (12.3.126) доказывается цепочкой

$$Ax=A\left(\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{x}{a}\right]^i\cdot a_i\right)=\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{x}{b}\right]^i\cdot Aa_i=(12.3.124)=\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{x}{b}\right]^i\cdot\sum_{j=1}^{n}\left[\frac{Aa}{b}\right]_i^j\cdot b_j=$$
$$=\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{Aa}{b}\right]_i^j\cdot\left[\frac{x}{b}\right]^i\right)\cdot b_j=(12.3.111)=\sum_{j=1}^{n}\left(\left[\frac{Aa}{b}\right]\cdot\left[\frac{x}{b}\right]\right)^j\cdot b_j=(12.3.112)=(b_1,...,b_n)\cdot\left[\frac{Aa}{b}\right]\cdot\left[\frac{x}{a}\right]$$

После этого (12.3.125) становится следствием равенства

$$\sum_{j=1}^{n}\left[\frac{Ax}{b}\right]^{j}\cdot b_j=Ax=\sum_{j=1}^{n}\left(\left[\frac{Aa}{b}\right]\cdot\left[\frac{x}{b}\right]\right)^{j}\cdot b_j$$

□

Следствие 12.3.5. *Если $a_1,...,a_m$ – базис в X, а $b_1,...,b_n$ – базис в Y, то тождества*

$$Ax=(b_1,...,b_n)\cdot M\cdot\left[\frac{x}{a}\right],\qquad x\in X \tag{12.3.127}$$

$$M=\left[\frac{Aa}{b}\right] \tag{12.3.128}$$

устанавливают взаимно однозначное соответствие между матрицами M длины m и высоты n и линейными операторами $A:X\to Y$.

Теорема 12.3.6. *Если $a_1,...,a_n$ и $b_1,...,b_n$ – два базиса в векторном пространстве X, то для всякого оператора $A:X\to X$ справедливы тождества:*

$$\left[\frac{a}{b}\right]\cdot\left[\frac{Aa}{a}\right]=\left[\frac{Ab}{b}\right]\cdot\left[\frac{a}{b}\right] \tag{12.3.129}$$

$$\left[\frac{a}{b}\right]\cdot\left[\frac{Aa}{a}\right]\cdot\left[\frac{a}{b}\right]^{-1}=\left[\frac{Ab}{b}\right]=\left[\frac{a}{b}\right]\cdot\left[\frac{Aa}{a}\right]\cdot\left[\frac{b}{a}\right] \tag{12.3.130}$$

Доказательство. Заметим, что левое равенство в (12.3.130) получается из (12.3.129) умножением справа на матрицу $\left[\frac{a}{b}\right]^{-1}$:

$$\left[\frac{a}{b}\right]\cdot\left[\frac{Aa}{a}\right]=\left[\frac{Ab}{b}\right]\cdot\left[\frac{a}{b}\right]$$
$$\Downarrow$$
$$\left[\frac{a}{b}\right]\cdot\left[\frac{Aa}{a}\right]\cdot\left[\frac{a}{b}\right]^{-1}=\left[\frac{Ab}{b}\right]\cdot\underbrace{\left[\frac{a}{b}\right]\cdot\left[\frac{a}{b}\right]^{-1}}_{I}=\left[\frac{Ab}{b}\right]\cdot I=\left[\frac{Ab}{b}\right]$$

После этого правое равенство в (12.3.130) получается из левого заменой $\left[\frac{a}{b}\right]^{-1}$ на $\left[\frac{b}{a}\right]$ по формуле (12.3.122).

Поэтому нам нужно только доказать (12.3.129). Для всякого индекса i справедлива следующая цепочка:

$$\sum_{j=1}^{n}\left(\left[\frac{a}{b}\right]\cdot\left[\frac{Aa}{a}\right]\right)_i^{j}\cdot b_j=\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{a}{b}\right]_k^{j}\cdot\left[\frac{Aa}{a}\right]_i^{k}\right)\cdot b_j=\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{Aa}{a}\right]_i^{k}\cdot\left(\sum_{j=1}^{n}\left[\frac{a}{b}\right]_k^{j}\cdot b_j\right)=$$
$$=\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{Aa}{a}\right]_i^{k}\cdot\left(\sum_{j=1}^{n}\left[\frac{a_k}{b}\right]^{j}\cdot b_j\right)=\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{Aa}{a}\right]_i^{k}\cdot a_k=\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{(Aa)_i}{a}\right]^{k}\cdot a_k=(Aa)_i=A(a_i)=$$
$$=A\left(\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{a_i}{b}\right]^{k}\cdot b_k\right)=\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{a_i}{b}\right]^{k}\cdot A(b_k)=\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{a}{b}\right]_i^{k}\cdot(Ab)_k=\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{a}{b}\right]_i^{k}\cdot\left(\sum_{j=1}^{n}\left[\frac{(Ab)_k}{b}\right]^{j}\cdot b_j\right)=$$
$$=\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{a}{b}\right]_i^{k}\cdot\left(\sum_{j=1}^{n}\left[\frac{Ab}{b}\right]_k^{j}\cdot b_j\right)=\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{Ab}{b}\right]_k^{j}\cdot\left[\frac{a}{b}\right]_i^{k}\right)\cdot b_j=\sum_{j=1}^{n}\left(\left[\frac{Ab}{b}\right]\cdot\left[\frac{a}{b}\right]\right)_i^{j}\cdot b_j$$

Отсюда мы получаем

$$\left(\left[\frac{a}{b}\right]\cdot\left[\frac{Aa}{a}\right]\right)_i^{j}=\left(\left[\frac{Ab}{b}\right]\cdot\left[\frac{a}{b}\right]\right)_i^{j},\qquad i,j=1,...,n$$

а это и есть (12.3.129). □

Матрица билинейной формы

- *Билинейной формой* на векторном пространстве X называется всякая полилинейная форма на последовательности пространств (X,X), то есть всякое отображение $\alpha : X\times X \to \mathbb{R}$, линейное по каждому аргументу:
$$\alpha(\lambda_1\cdot x_1+\lambda_2\cdot x_2, y)=\lambda_1\cdot\alpha(x_1,y)+\lambda_2\cdot\alpha(x_2,y),\qquad x_1,x_2,y\in X,\quad \lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{R},$$
и
$$\alpha(x,\lambda_1\cdot y_1+\lambda_2\cdot y_2)=\lambda_1\cdot\alpha(x,y_1)+\lambda_2\cdot\alpha(x,y_2),\qquad x,y_1,y_2\in X,\quad \lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{R}.$$
- Если $\alpha : X\times X\to\mathbb{R}$ – билинейная форма на векторном пространстве X и $a=(a_1,...,a_n)$ – какой-нибудь базис в X, то *матрицей билинейной формы* α в базисе $a=(a_1,...,a_n)$ называется матрица, определяемая формулой
$$\alpha[a;a]^i_j=\alpha(a_i;a_j). \tag{12.3.131}$$

Теорема 12.3.7. *Справедлива формула*
$$\alpha(x;y)=\sum_{i,j=1}^n \alpha(a_i;a_j)\cdot\left[\frac{x}{a}\right]^i\cdot\left[\frac{y}{a}\right]^j=\left[\frac{x}{a}\right]^\top\cdot\alpha[a;a]\cdot\left[\frac{y}{a}\right] \tag{12.3.132}$$

Доказательство. Здесь используется билинейность α: для любых $x,y\in X$ мы получим
$$\alpha(x;y)=\alpha\left(\sum_{i=1}^n\left[\frac{x}{a}\right]^i\cdot a_i;\sum_{j=1}^n\left[\frac{y}{a}\right]^j\cdot a_j\right)=\sum_{i=1}^n\left[\frac{x}{a}\right]^i\cdot\alpha\left(a_i;\sum_{j=1}^n\left[\frac{y}{a}\right]^j\cdot a_j\right)=$$
$$=\sum_{i=1}^n\left[\frac{x}{a}\right]^i\cdot\sum_{j=1}^n\left[\frac{y}{a}\right]^j\cdot\alpha\left(a_i;a_j\right)=\sum_{i,j=1}^n\alpha(a_i;a_j)\cdot\left[\frac{x}{a}\right]^i\cdot\left[\frac{y}{a}\right]^j$$

Это первое равенство в (12.3.132). Второе также проверяется вычислением:
$$\left[\frac{x}{a}\right]^\top\cdot\alpha[a;a]\cdot\left[\frac{y}{a}\right]=\sum_{i=1}^n\left(\left[\frac{x}{a}\right]^\top\right)_i\cdot\left(\alpha[a;a]\cdot\left[\frac{y}{a}\right]\right)^i=\sum_{i=1}^n\left[\frac{x}{a}\right]^i\cdot\left(\sum_{j=1}^n\alpha[a;a]^i_j\cdot\left[\frac{y}{a}\right]^j\right)=$$
$$=\sum_{i,j=1}^n\alpha(a_i;a_j)\cdot\left[\frac{x}{a}\right]^i\cdot\left[\frac{y}{a}\right]^j$$
□

Следствие 12.3.8. *Для всякого фиксированного базиса $a=(a_1,...,a_n)$ в векторном пространстве X тождества*
$$\alpha(x;y)=\left[\frac{x}{a}\right]^\top\cdot M\cdot\left[\frac{y}{a}\right],\qquad x,y\in X \tag{12.3.133}$$
$$M=\alpha[a;a] \tag{12.3.134}$$
устанавливают взаимно однозначное соответствие между матрицами M размера $n\times n$ и билинейными формами α на X.

Теорема 12.3.9. *Если $a_1,...,a_n$ и $b_1,...,b_n$ – два базиса в векторном пространстве X, то для всякой билинейной формы α на X справедливо равенство*
$$\alpha[b,b]=\left[\frac{b}{a}\right]^\top\cdot\alpha[a,a]\cdot\left[\frac{b}{a}\right] \tag{12.3.135}$$

Доказательство. Здесь нужно просто вычислить матричный элемент матрицы справа:
$$\left(\left[\frac{b}{a}\right]^\top\cdot\alpha[a;a]\cdot\left[\frac{b}{a}\right]\right)^k_l=\sum_{i=1}^n\left(\left[\frac{b}{a}\right]^\top\right)^k_i\cdot\left(\alpha[a;a]\cdot\left[\frac{b}{a}\right]\right)^i_l=\sum_{i=1}^n\left[\frac{b}{a}\right]^i_k\cdot\left(\sum_{j=1}^n\alpha[a;a]^i_j\cdot\left[\frac{b}{a}\right]^j_l\right)=$$
$$=\sum_{i,j=1}^n\alpha[a;a]^i_j\cdot\left[\frac{b}{a}\right]^i_k\cdot\left[\frac{b}{a}\right]^j_l=\sum_{i,j=1}^n\alpha(a_i;a_j)\cdot\left[\frac{b_k}{a}\right]^i\cdot\left[\frac{b_l}{a}\right]^j=(12.3.132)=\alpha(b_k;b_l)=(12.3.131)=\alpha[b;b]^k_l$$
□

- Пусть $A : X \to X$ – произвольный линейный оператор. Для любой билинейной формы α на X можно рассмотреть билинейную форму

$$(x, y) \mapsto \alpha(Ax, Ay)$$

называемую *действием оператора A на форму α.*

Теорема 12.3.10. *Справедливо тождество:*

$$\alpha[Ab, Ab] = \left[\frac{Ab}{b}\right]^{\top} \cdot \alpha[b, b] \cdot \left[\frac{Ab}{b}\right] \tag{12.3.136}$$

Доказательство.

$$\left(\left[\frac{Ab}{b}\right]^{\top} \cdot \alpha[b;b] \cdot \left[\frac{Ab}{b}\right]\right)_l^k = \sum_{i=1}^n \left(\left[\frac{Ab}{b}\right]^{\top}\right)_i^k \cdot \left(\alpha[b;b] \cdot \left[\frac{Ab}{b}\right]\right)_l^i = \sum_{i=1}^n \left[\frac{Ab}{b}\right]_k^i \cdot \left(\sum_{j=1}^n \alpha[b;b]_j^i \cdot \left[\frac{Ab}{b}\right]_l^j\right) =$$

$$= \sum_{i,j=1}^n \alpha[b;b]_j^i \cdot \left[\frac{Ab}{b}\right]_k^i \cdot \left[\frac{Ab}{b}\right]_l^j = \sum_{i,j=1}^n \alpha[b_i;b_j] \cdot \left[\frac{(Ab)_k}{b}\right]^i \cdot \left[\frac{(Ab)_l}{b}\right]^j = (12.3.132) =$$

$$= \alpha((Ab)_k;(Ab)_l) = (12.3.131) = \alpha[Ab;Ab]_l^k$$

□

Если $a = (a_1, ..., a_n)$ – строка элементов векторного пространства X и $M \in \mathbb{R}_m^n$ – матрица, то, напомним, формулой (12.3.112) мы определили внешнее действие матрицы M на строку векторов $a = (a_1, ..., a_n)$:

$$a \cdot M = (a_1, ..., a_n) \cdot M := \left(a_1 \cdot M_1^1 + ... + a_n \cdot M_1^n, ..., a_1 \cdot M_m^1 + ... + a_n \cdot M_m^n\right)$$

Теорема 12.3.11. *Если $a = (a_1, ..., a_n)$ – базис векторного пространства X и $M \in \mathbb{R}_n^n$ – обратимая матрица, то матрица билинейной формы α в преобразованном базисе $a \cdot M = (a_1, ..., a_n) \cdot M$ имеет вид:*

$$\alpha[a \cdot M, a \cdot M] = M^{\top} \cdot \alpha[a, a] \cdot M \tag{12.3.137}$$

Доказательство.

$$\alpha[a \cdot M, a \cdot M]_j^i = \alpha\Big((a \cdot M)_i, (a \cdot M)_j\Big) = (12.3.112) = \alpha\Big(\sum_{k=1}^m a_k \cdot M_i^k, \sum_{l=1}^m a_l \cdot M_j^l\Big) =$$

$$= \sum_{k=1}^m M_i^k \cdot \sum_{l=1}^m \alpha(a_k, a_l) \cdot M_j^l = \sum_{k=1}^m M_i^k \cdot \left(\sum_{l=1}^m \alpha[a;a]_l^k \cdot M_j^l\right) = \sum_{k=1}^m \left(M^{\top}\right)_k^i \cdot \Big(\alpha[a,a] \cdot M\Big)_j^k =$$

$$= \Big(M^{\top} \cdot \alpha[a,a] \cdot M\Big)_j^i$$

□

(b) Определитель

Определитель матрицы, как полилинейная кососимметрическая форма.

- *Определителем* квадратной матрицы A порядка n называется число

$$\det A = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \operatorname{sgn} \sigma \cdot A_1^{\sigma(1)} \cdot ... \cdot A_n^{\sigma(n)} \tag{12.3.138}$$

где $\mathfrak{S}_n$ — множество перестановок длины n, определенное выше на с.666.

- Если $(x_1, ..., x_m)$ – последовательность длины m элементов пространства $\mathbb{R}^n$, то есть столбцов высоты n,

$$x_1 = \begin{pmatrix} x_1^1 \\ ... \\ x_1^n \end{pmatrix}, ..., x_m = \begin{pmatrix} x_m^1 \\ ... \\ x_m^n \end{pmatrix},$$

то условимся символом $[x_1, ..., x_m]$ обозначать матрицу, составленную из этих столбцов:

$$[x_1, ..., x_m] = \begin{pmatrix} x_1^1 & ... & x_m^1 \\ ... & & \\ x_1^n & ... & x_m^n \end{pmatrix}$$

Понятно, что любую матрицу $N \in \mathbb{R}_m^n$ можно представить как строку из таких столбцов

$$N = [x_1, ..., x_m], \qquad x_i \in \mathbb{R}^n,$$

Для любой матрицы M размером $k \times m$ справедливо равенство

$$\underbrace{M \cdot [x_1, ..., x_m]}_{\substack{\text{произведение} \\ \text{матриц}}} = [\ \overbrace{M \cdot x_1}^{\substack{\text{произведение} \\ \text{матрицы} \\ \text{на столбец}}}, ..., \overbrace{M \cdot x_m}^{\substack{\text{произведение} \\ \text{матрицы} \\ \text{на столбец}}}\ ] \tag{12.3.139}$$

С другой стороны, для любого столбца $y \in \mathbb{R}^m$ выполняется

$$[x_1, ..., x_m] \cdot y = y^1 \cdot x_1 + ... + y^m \cdot x_m \tag{12.3.140}$$

Рассмотрим теперь определитель det как функцию от этих столбцов матрицы,

$$(x_1, ..., x_n) \mapsto \det[x_1, ..., x_n]$$

то есть как функцию на декартовом произведении

$$\det : \underbrace{\mathbb{R}^n \times ... \times \mathbb{R}^n}_{n \text{ множителей}} \to \mathbb{R}$$

Теорема 12.3.12. *Определитель, как функция от столбцов матрицы,*

$$f(x_1, ..., x_n) = \det[x_1, ..., x_n]$$

обладает следующими свойствами:

(i) полилинейность: f *линейна по каждому аргументу, то есть для всякого индекса* $i \in \mathbb{N}$ *и фиксированных* x_j, $j \neq i$, *отображение*

$$x \to f(x_1, ..., \underset{\substack{\uparrow \\ i\text{-е место}}}{x}, ..., x_n)$$

является линейным отображением: для любых $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $y, z \in \mathbb{R}^n$

$$f(x_1, ..., \underset{\substack{\uparrow \\ i\text{-е место}}}{\underbrace{\lambda \cdot y + \mu \cdot z}}, ..., x_n) = \lambda \cdot f(x_1, ..., \underset{\substack{\uparrow \\ i\text{-е место}}}{y}, ..., x_n) + \mu \cdot f(x_1, ..., \underset{\substack{\uparrow \\ i\text{-е место}}}{z}, ..., x_n) \tag{12.3.141}$$

(ii) кососимметричность: f *меняет знак при транспозиции аргументов:*

$$f(x_1, ..., \underset{\substack{\uparrow \\ i\text{-е место}}}{x_i}, ..., \overset{\substack{j\text{-е место} \\ \downarrow}}{x_j}, ..., x_n) = -f(x_1, ..., \overset{\substack{i\text{-е место} \\ \downarrow}}{x_j}, ..., \underset{\substack{\uparrow \\ j\text{-е место}}}{x_i}, ..., x_n) \tag{12.3.142}$$

И наоборот, если $f : \underbrace{\mathbb{R}^n \times ... \times \mathbb{R}^n}_{n \text{ множителей}} \to \mathbb{R}$ *– какая-то функция, обладающая этими свойствами, то она имеет вид*

$$f(x_1, ..., x_n) = \lambda \cdot \det[x_1, ..., x_n] \tag{12.3.143}$$

где

$$\lambda = f(e_1, ..., e_n) \tag{12.3.144}$$

Лемма 12.3.13. *Если $x_1, ..., x_n$ – последовательность векторов из X, в которой какой-то вектор x_i равен нулю*

$$x_i = 0,$$

то значение любой полилинейной формы $f : \underbrace{X \times ... \times X}_{n \text{ множителей}} \to \mathbb{R}$ на этой последовательности равно нулю:

$$f(x_1, ..., x_n) = 0$$

Доказательство. Обозначим $\lambda = f(x_1, ..., x_i, ..., x_n)$. Тогда

$$\lambda = f(x_1, ..., x_i, ..., x_n) = f(x_1, ..., 0, ..., x_n) = f(x_1, ..., 2 \cdot 0, ..., x_n) = \\ = 2 \cdot f(x_1, ..., 0, ..., x_n) = 2 \cdot f(x_1, ..., x_i, ..., x_n) = 2 \cdot \lambda$$

$$\Downarrow$$

$$\lambda = 0$$

□

Лемма 12.3.14. *Если $x_1, ..., x_n$ – последовательность векторов из X, в которой какие-то два вектора совпадают*

$$x_i = x_j, \quad i \neq j,$$

то значение любой кососимметрической полилинейной формы $f : \underbrace{X \times ... \times X}_{n \text{ множителей}} \to \mathbb{R}$ на этой последовательности равно нулю:

$$f(x_1, ..., x_n) = 0$$

Доказательство. Обозначим $y = x_i = x_j \in X$ и $\lambda = f(x_1, ..., x_n)$. Тогда

$$\lambda = f(x_1, ..., \underset{\underset{y}{\parallel}}{x_i}, ..., \overset{\overset{y}{\parallel}}{x_j}, ..., x_n) = (12.3.142) = -f(x_1, ..., \overset{\overset{y}{\parallel}}{x_j}, ..., \underset{\underset{y}{\parallel}}{x_i}, ..., x_n) = -\lambda$$

$$\Downarrow$$

$$2\lambda = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\lambda = 0$$

□

Лемма 12.3.15. *При перестановке аргументов кососимметрическая форма меняет знак в соответствии с четностью этой перестановки:*

$$f(x_{\sigma(1)}, ..., x_{\sigma(n)}) = \operatorname{sgn} \sigma \cdot f(x_1, ..., x_n), \qquad \sigma \in \mathfrak{S}_n \tag{12.3.145}$$

Доказательство. Это следует из теоремы 12.1.12: для транспозиций эта формула представляет собой просто определение кососимметрической формы. А затем применяется индукция: если формула (12.3.145) доказана для перестановок σ, которые можно разложить в композицию k транспозиций, то добавляя еще одну транспозицию τ, мы получим:

$$f(x_{\sigma(\tau(1))}, ..., x_{\sigma(\tau(n))}) = \operatorname{sgn} \sigma \cdot f(x_{\tau(1)}, ..., x_{\tau(n)}) = \operatorname{sgn} \sigma \cdot \operatorname{sgn} \tau \cdot f(x_1, ..., x_n) = \\ = (12.1.30) = \operatorname{sgn}(\sigma \circ \tau) \cdot f(x_1, ..., x_n)$$

□

Доказательство теоремы 12.3.12. 1. Сначала докажем первую часть теоремы. Полилинейность отображения $f(x_1,...,x_n)=\det[x_1,...,x_n]$ проверяется прямым вычислением, например, если вместо x_1 подставить $\lambda\cdot y+\mu\cdot z$, $y,z\in\mathbb{R}^n$, то мы получим:

$$f(\lambda\cdot y+\mu\cdot z,x_2,...,x_n)=\det[\lambda\cdot y+\mu\cdot z,x_2,...,x_n]=\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}\operatorname{sgn}\sigma\cdot(\lambda\cdot y+\mu\cdot z)^{\sigma(1)}\cdot x_2^{\sigma(2)}\cdot...\cdot x_n^{\sigma(n)}=$$
$$=\lambda\cdot\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}\operatorname{sgn}\sigma\cdot y^{\sigma(1)}\cdot x_2^{\sigma(2)}\cdot...\cdot x_n^{\sigma(n)}+\mu\cdot\operatorname{sgn}\sigma\cdot z^{\sigma(1)}\cdot x_2^{\sigma(2)}\cdot...\cdot x_n^{\sigma(n)}=$$
$$=\lambda\cdot\det[y,x_2,...,x_n]+\mu\cdot\det[z,x_2,...,x_n]=\lambda\cdot f(y,x_2,...,x_n)+\mu\cdot f(z,x_2,...,x_n)$$

Теперь кососимметричность: пусть τ – какая-нибудь транспозиция (12.1.22), тогда

$$f(x_{\tau(1)},...,x_{\tau(n)})=\det[x_{\tau(1)},...,x_{\tau(n)}]=\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}\operatorname{sgn}\sigma\cdot x_{\tau(1)}^{\sigma(1)}\cdot...\cdot x_{\tau(n)}^{\sigma(n)}=$$
$$=\sum_{\sigma\circ\tau\in\mathfrak{S}_n}\operatorname{sgn}(\sigma\circ\tau)\cdot x_{\tau(1)}^{\sigma(\tau(1))}\cdot...\cdot x_{\tau(n)}^{\sigma(\tau(n))}=\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}\operatorname{sgn}(\sigma\circ\tau)\cdot x_1^{\sigma(1)}\cdot...\cdot x_n^{\sigma(n)}=-\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}\operatorname{sgn}(\sigma)\cdot x_1^{\sigma(1)}\cdot...\cdot x_n^{\sigma(n)}=$$
$$=-\det[x_1,...,x_n]=-f(x_1,...,x_n)$$

2. Теперь наоборот, пусть f – произвольное отображение со свойствами (i) и (ii). Тогда

$$f(x_1,...,x_n)=f\left(\sum_{\sigma_1=1}^n x_1^{\sigma_1}\cdot e_{\sigma_1},...,\sum_{\sigma_n=1}^n x_n^{\sigma_n}\cdot e_{\sigma_n}\right)=\sum_{\sigma_1,...,\sigma_n\in\{1,...,n\}}x_1^{\sigma_1}\cdot...\cdot x_n^{\sigma_n}\cdot f(e_{\sigma_1},...,e_{\sigma_n})=$$
$$=\underbrace{\sum_{\substack{\sigma_1,...,\sigma_n\in\{1,...,n\}\\ \forall s\ne t:\ \sigma_s\ne\sigma_t}}}_{\substack{\uparrow\\ \text{сумма по всем}\\ \text{инъективным}\\ \text{последовательностям}\\ (\sigma_1,...,\sigma_n)\\ \text{где } \sigma_k\in\{1,...,n\},\\ \text{то есть по всем}\\ \text{перестановкам } \sigma\in\mathfrak{S}_n}}x_1^{\sigma_1}\cdot...\cdot x_n^{\sigma_n}\cdot f(e_{\sigma_1},...,e_{\sigma_n})+\sum_{\substack{\sigma_1,...,\sigma_n\in\{1,...,n\}\\ \exists s\ne t:\ \sigma_s=\sigma_t}}x_1^{\sigma_1}\cdot...\cdot x_n^{\sigma_n}\cdot\underbrace{f(e_{\sigma_1},...,e_{\sigma_n})}_{\substack{\parallel\\ 0,\\ \text{по лемме 12.3.14}}}=$$
$$=\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}x_1^{\sigma_1}\cdot...\cdot x_n^{\sigma_n}\cdot f(e_{\sigma_1},...,e_{\sigma_n})=(12.3.145)=\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}x_1^{\sigma_1}\cdot...\cdot x_n^{\sigma_n}\cdot\operatorname{sgn}\sigma\cdot\underbrace{f(e_1,...,e_n)}_{\lambda}=$$
$$=\lambda\cdot\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}\operatorname{sgn}\sigma\cdot x_1^{\sigma_1}\cdot...\cdot x_n^{\sigma_n}=\lambda\cdot\det[x_1,...,x_n]$$

□

Правило Крамера.

Теорема 12.3.16. *Для последовательности $(a_1,...,a_n)\subset\mathbb{R}^n$ числовых столбцов высотой n следующие условия эквивалентны:*

(i) *уравнение*
$$[a_1,...,a_n]\cdot x=b \tag{12.3.146}$$
разрешимо в $\mathbb{R}^n$ при любой правой части $b\in\mathbb{R}^n$;

(ii) *уравнение*
$$[a_1,...,a_n]\cdot x=0 \tag{12.3.147}$$
имеет только одно решение $x=0\in\mathbb{R}^n$;

(iii) *столбцы $a_1,...,a_n$ линейно независимы (то есть образуют базис) в векторном пространстве $\mathbb{R}^n$;*

(iv) *определитель матрицы $[a_1,...,a_n]$ отличен от нуля:*
$$\det[a_1,...,a_n]\ne 0 \tag{12.3.148}$$

При этом решение уравнения (12.3.146) *описывается формулой*

$$x^i = \frac{1}{\det[a_1,...,a_n]} \cdot \det[a_1,...,\underset{\substack{\uparrow\\ \text{этот столбец}\\ \text{подставлен в}\\ [a_1,...,a_n]\ \text{вместо}\\ \text{столбца } a_i}}{b},...,a_n] \qquad (12.3.149)$$

Лемма 12.3.17. *Пусть* $a_1,...,a_n,x,b \in \mathbb{R}^n$ *– числовые столбцы высотой* n. *Тогда если выполняется равенство* (12.3.146), *то для всякого* $i = 1,...,n$ *справедливо равенство*

$$x^i \cdot \det[a_1,...,a_n] = \det[a_1,...,\underset{\substack{\uparrow\\ \text{этот столбец}\\ \text{подставлен вместо}\\ \text{столбца } a_i}}{b},...,a_n] \qquad (12.3.150)$$

Доказательство. Перепишем равенство (12.3.146), расписав левую часть по формуле (12.3.140):

$$x^1 \cdot a_1 + ... + x^n \cdot a_n = b$$

Теперь вычислим определитель в правой части (12.3.150) (здесь неявно предполагается, что $1 \neq i \neq n$, но нетрудно переписать выкладки для $i = 1$ и $i = n$):

$$\det[a_1,...,\underset{\substack{\uparrow\\ \text{этот столбец}\\ \text{подставлен вместо}\\ \text{столбца } a_i}}{b},...,a_n] = \det[a_1,...,\underbrace{x^1 \cdot a_1 + ... + x^i \cdot a_i + ... + x^n \cdot a_n}_{\substack{\uparrow\\ \text{этот столбец}\\ \text{подставлен вместо}\\ \text{столбца } a_i}},...,a_n] =$$

$$= x^1 \cdot \underbrace{\det[a_1,..., \overset{\substack{i\text{-й столбец}\\ \downarrow}}{a_1},...,a_n]}_{\substack{\parallel\\ 0,\\ \text{по лемме 12.3.14,}\\ \text{поскольку}\\ a_1 \text{ повторяется}\\ \text{в аргументе дважды}}} + ... + x^i \cdot \underbrace{\det[a_1,..., \overset{\substack{i\text{-й столбец}\\ \downarrow}}{a_i},...,a_n]}_{\substack{\parallel\\ \det[a_1,...,a_n]}} + ... + x^n \cdot \underbrace{\det[a_1,..., \overset{\substack{i\text{-й столбец}\\ \downarrow}}{a_n},...,a_n]}_{\substack{\parallel\\ 0,\\ \text{по лемме 12.3.14,}\\ \text{поскольку}\\ a_n \text{ повторяется}\\ \text{в аргументе дважды}}} =$$

$$= x^i \cdot \det[a_1,...,a_n]$$

□

Доказательство теоремы 12.3.16. Заметим сразу, что здесь нужно только доказать эквивалентность условий (i)-(iv), потому что из (iv) и формулы (12.3.150) сразу же следует формула (12.3.149).

(i)⇔(ii). Рассмотрим оператор $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, действующий по формуле

$$Ax = [a_1,...,a_n] \cdot x, \qquad x \in \mathbb{R}^n.$$

Условие (i) применительно к A означает, что отображение $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ должно быть сюръективно, а условие (ii) – что A инъективно. По следствию 12.2.13 эти условия эквивалентны.

(ii)⇔(iii). Условие (ii) означает, что если для какого-то числового столбца $x \in \mathbb{R}^n$ справедливо равенство

$$0 = [a_1,...,a_n] \cdot x = x^1 \cdot a_1 + ... + x^n \cdot a_n,$$

то из этого автоматически следует, что $x = 0$, то есть что

$$x^1 = ... = x^n = 0.$$

Но это (в силу теоремы 12.2.1) как раз и есть условие линейной независимости векторов $a_1,...,a_n$.

(iii)⇔(iv). 1. Пусть сначала столбцы $a_1,...,a_n$ линейно зависимы, то есть

$$0 = [a_1,...,a_n] \cdot x = x^1 \cdot a_1 + ... + x^n \cdot a_n,$$

для некоторого $x \neq 0 \in \mathbb{R}^n$. Тогда по лемме 12.3.17 для любого $i = 1,...,n$ выполняется равенство

$$x^i \cdot \det[a_1,...,a_n] = \det[a_1,...,\underset{\substack{\uparrow\\ \text{этот столбец}\\ \text{подставлен вместо}\\ \text{столбца } a_i}}{0},...,a_n] = (\text{лемма 12.3.13}) = 0 \qquad (12.3.151)$$

Поскольку $x \neq 0$, найдется индекс i такой, что $x^i \neq 0$. Для него тоже верно (12.3.151). Значит,

$$\det[a_1, ..., a_n] = 0.$$

2. Пусть наоборот столбцы $a_1, ..., a_n$ линейно независимы (то есть образуют базис) в $\mathbb{R}^n$. Тогда каждый базисный вектор e_i представим в виде линейной комбинации векторов $a_1, ..., a_n$:

$$e_i = \left[\frac{e_i}{a}\right]^1 \cdot a_1 + ... + \left[\frac{e_i}{a}\right]^n \cdot a_n$$

(напомним, что обозначения $\left[\frac{x}{a}\right]^j$ вводились выше формулой (12.2.69)). Отсюда мы получаем такую цепочку:

$$1 = \det[e_1, ..., e_n] = \det\left[\sum_{\sigma_1=1}^{n}\left[\frac{e_1}{a}\right]^{\sigma_1} \cdot a_{\sigma_1}, ..., \sum_{\sigma_n=1}^{n}\left[\frac{e_n}{a}\right]^{\sigma_n} \cdot a_{\sigma_n}\right] = (12.3.141) =$$

$$= \sum_{\sigma_1,...,\sigma_n=1}^{n}\left[\frac{e_1}{a}\right]^{\sigma_1} \cdot ... \cdot \left[\frac{e_n}{a}\right]^{\sigma_n} \cdot \det[a_{\sigma_1}, ..., a_{\sigma_n}] =$$

$$= \underbrace{\sum_{\substack{\sigma_1, ..., \sigma_n \in \{1, ..., n\} \\ \forall s \neq t:\ \sigma_s \neq \sigma_t}}}_{\substack{\uparrow \\ \text{сумма по всем} \\ \text{инъективным} \\ \text{последовательностям} \\ (\sigma_1, ..., \sigma_n) \\ \text{где } \sigma_k \in \{1, ..., n\}, \\ \text{то есть по всем} \\ \text{перестановкам } \sigma \in \mathfrak{S}_n}} \left[\frac{e_1}{a}\right]^{\sigma_1} \cdot ... \cdot \left[\frac{e_n}{a}\right]^{\sigma_n} \cdot \det[a_{\sigma_1}, ..., a_{\sigma_n}] + \sum_{\substack{\sigma_1, ..., \sigma_n \in \{1, ..., n\} \\ \exists s \neq t:\ \sigma_s = \sigma_t}} \left[\frac{e_1}{a}\right]^{\sigma_1} \cdot ... \cdot \left[\frac{e_n}{a}\right]^{\sigma_n} \cdot \underbrace{\det[a_{\sigma_1}, ..., a_{\sigma_n}]}_{\substack{\parallel \\ 0, \\ \text{по лемме 12.3.14}}} =$$

$$= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n}\left[\frac{e_1}{a}\right]^{\sigma_1} \cdot ... \cdot \left[\frac{e_n}{a}\right]^{\sigma_n} \cdot \det[a_{\sigma_1}, ..., a_{\sigma_n}] = (12.3.145) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n}\left[\frac{e_1}{a}\right]^{\sigma_1} \cdot ... \cdot \left[\frac{e_n}{a}\right]^{\sigma_n} \cdot \operatorname{sgn}\sigma \cdot \det[a_1, ..., a_n] =$$

$$= \det[a_1, ..., a_n] \cdot \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \operatorname{sgn}\sigma \cdot \left[\frac{e_1}{a}\right]^{\sigma_1} \cdot ... \cdot \left[\frac{e_n}{a}\right]^{\sigma_n} = \det[a_1, ..., a_n] \cdot \det\left[\frac{e}{a}\right]$$

$$\Downarrow$$

$$1 = \det[a_1, ..., a_n] \cdot \det\left[\frac{e}{a}\right]$$

$$\Downarrow$$

$$\det[a_1, ..., a_n] \neq 0.$$

□

Свойства определителей матриц. Докажем следующее.

1°. *Определитель треугольной матрицы равен произведению ее диагональных элементов:*

$$\Big(\forall i < j \quad A_i^j = 0\Big) \quad \Longrightarrow \quad \det A = A_1^1 \cdot A_2^2 \cdot ... \cdot A_n^n \tag{12.3.152}$$

2°. *Определитель не меняется при транспонировании матрицы:*

$$\det A^\top = \det A \tag{12.3.153}$$

3°. *Определитель произведения равен произведению определителей:*

$$\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B \tag{12.3.154}$$

4°. *Матрица M тогда и только тогда обратима, когда ее определитель ненулевой*

$$\exists M^{-1} \quad \Longleftrightarrow \quad \det M \neq 0$$

При этом определитель обратной матрицы равен обратному числу:

$$\det(M^{-1}) = (\det M)^{-1} \tag{12.3.155}$$

Доказательство. 1. Пусть матрица A треугольна, то есть $A_i^j \neq 0$ только если $i \geqslant j$. Тогда можно показать, что в сумме (12.3.138) ненулевым будет только одно слагаемое, а именно, то, которое соответствует тривиальной перестановке:

$$A_1^{\sigma(1)} \cdot A_2^{\sigma(2)} \cdot \ldots \cdot A_n^{\sigma(n)} \neq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} A_1^{\sigma(1)} \neq 0 \\ A_2^{\sigma(2)} \neq 0 \\ \ldots \\ A_n^{\sigma(n)} \neq 0 \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} \sigma(1) \leqslant 1 \\ \sigma(2) \leqslant 2 \\ \ldots \\ \sigma(n) \leqslant n \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} \sigma(1) = 1 \\ \sigma(2) = 2 \\ \ldots \\ \sigma(n) = n \end{cases} \tag{12.3.156}$$

В этой цепочке лишь последняя эквивалентность требует некоторых объяснений. Она доказывается последовательной расшифровкой условий $\sigma(i) \leqslant i$:

1) первое неравенство $\sigma(1) \leqslant 1$, вместе с условием $\sigma(1) \in \mathbb{N}$ сразу же дает $\sigma(1) = 1$;

2) после того, как мы это поняли, второе неравенство $\sigma(2) \leqslant 2$ будет означать $\sigma(2) = 2$, поскольку $\sigma(2) \in \mathbb{N}$ и $\sigma(2) \neq \sigma(1) = 1$;

...

n) так по индукции мы к n-му шагу доказываем равенство $\sigma(i) = i$ для любых $i < n$, и тогда на n-м шаге неравенство $\sigma(n) \leqslant n$ будет означать, что $\sigma(n) = n$, поскольку, $\sigma(n) \in \mathbb{N}$ и $\sigma(n) \neq \sigma(i) = i$ при $i = 1, ..., n-1$.

Из (12.3.156) следует, что в формуле (12.3.138) для матрицы A только одно слагаемое может быть отлично от нуля – то, которое соответствует тождественной подстановке:

$$\det A = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \operatorname{sgn} \sigma \cdot A_1^{\sigma(1)} \cdot \ldots \cdot A_n^{\sigma(n)} = \underbrace{\operatorname{sgn}(1, 2, ..., n)}_{\substack{\| \\ 1}} \cdot A_1^1 \cdot A_2^2 \cdot \ldots \cdot A_n^n = A_1^1 \cdot A_2^2 \cdot \ldots \cdot A_n^n$$

2. Для транспонированной матрицы получаем:

$$\det A^\top = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \operatorname{sgn} \sigma \cdot \left(A^\top\right)_1^{\sigma(1)} \cdot \ldots \cdot \left(A^\top\right)_n^{\sigma(n)} = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \overbrace{\operatorname{sgn} \sigma}^{\substack{\operatorname{sgn} \sigma^{-1} \\ \| \\ (12.1.31) \\ \|}} \cdot \overbrace{A_{\sigma(1)}^1 \cdot \ldots \cdot A_{\sigma(n)}^n}^{\substack{\text{если упорядочить множители} \\ \text{по нижнему индексу} \\ \text{то получится} \\ A_1^{\sigma^{-1}(1)} \cdot \ldots \cdot A_n^{\sigma^{-1}(n)} \\ \downarrow}} =$$

$$= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \operatorname{sgn} \sigma^{-1} \cdot A_1^{\sigma^{-1}(1)} \cdot \ldots \cdot A_n^{\sigma^{-1}(n)} = \sum_{\tau \in \mathfrak{S}_n} \operatorname{sgn} \tau \cdot A_1^{\tau(1)} \cdot \ldots \cdot A_n^{\tau(n)} = \det A$$

3. Пусть $e_1, ..., e_n$ – стандартный базис в $\mathbb{R}^n$. Зафиксируем матрицу A и рассмотрим функцию

$$f(x_1, ..., x_n) = \det \Big(A \cdot [x_1, ..., x_n]\Big) = \det[A \cdot x_1, ..., A \cdot x_n], \qquad x_i \in \mathbb{R}^n$$

Она будет полилинейной формой, потому что

$$f(x_1, ..., \lambda \cdot y + \mu \cdot z, ..., x_n) = \det[A \cdot x_1, ..., A \cdot (\lambda \cdot y + \mu \cdot z), ..., A \cdot x_n] =$$
$$= \det[A \cdot x_1, ..., \lambda \cdot A \cdot y + \mu \cdot A \cdot z, ..., A \cdot x_n] = \lambda \cdot \det[A \cdot x_1, ..., A \cdot y, ..., A \cdot x_n] + \mu \cdot \det[A \cdot x_1, ..., A \cdot z, ..., A \cdot x_n] =$$
$$= \lambda \cdot f(x_1, ..., y, ..., x_n) + \mu \cdot f(x_1, ..., z, ..., x_n)$$

Эта форма будет кососимметрична, потому что

$$f(x_1, ..., \overset{\substack{i\text{-е место} \\ \downarrow}}{x_i}, ..., \overset{\substack{j\text{-е место} \\ \downarrow}}{x_j}, ..., x_n) = \det[A \cdot x_1, ..., \overset{\substack{i\text{-е место} \\ \downarrow}}{A \cdot x_i}, ..., \overset{\substack{j\text{-е место} \\ \downarrow}}{A \cdot x_j}, ..., A \cdot x_n] =$$
$$= -\det[A \cdot x_1, ..., \underset{\substack{\uparrow \\ i\text{-е место}}}{A \cdot x_j}, ..., \underset{\substack{\uparrow \\ j\text{-е место}}}{A \cdot x_i}, ..., A \cdot x_n] = -f(x_1, ..., \underset{\substack{\uparrow \\ i\text{-е место}}}{x_j}, ..., \underset{\substack{\uparrow \\ j\text{-е место}}}{x_i}, ..., x_n)$$

Значит, по теореме 12.3.12, эта форма должна иметь вид:

$$f(x_1, ..., x_n) = \lambda \cdot \det[x_1, ..., x_n], \tag{12.3.157}$$

где

$$\lambda = f(e_1, ..., e_n) = \det[A \cdot e_1, ..., A \cdot e_n] = \det\Big(A \cdot \underbrace{[e_1, ..., e_n]}_{\substack{\uparrow \\ \text{единичная} \\ \text{матрица } I}}\Big) = \det(A \cdot I) = \det A \qquad (12.3.158)$$

Поэтому

$$\det(A{\cdot}B) = \det\Big(A{\cdot}(B_1, ..., B_n)\Big) = f(B_1, ..., B_n) = (12.3.157) = \lambda{\cdot}\det(B_1, ..., B_n) = (12.3.158) = \det A{\cdot}\det B.$$

4. Представим матрицу M как строку из столбцов:

$$M = [a_1, ..., a_n]$$

Ее обратимость означает, что уравнение

$$M \cdot x = b$$

однозначно разрешимо в $\mathbb{R}^n$ при любой правой части $b \in \mathbb{R}^n$. По теореме 12.3.16 это эквивалентно тому, что определитель M отличен от нуля:

$$\det M \neq 0.$$

Далее из равенства

$$I = M \cdot M^{-1}$$

мы по уже доказанному свойству 3° получаем:

$$1 = \det I = \det\left(M \cdot M^{-1}\right) = \det M \cdot \det M^{-1}$$

$$\Downarrow$$

$$\det M^{-1} = \frac{1}{\det M} = (\det M)^{-1}$$

□

Определитель оператора.

- Пусть X – конечномерное векторное пространство, $(a_1, ..., a_n)$ – произвольный базис в X, и $A : X \to X$ – произвольный оператор. Число

$$\det A = \det\left[\frac{Aa}{a}\right] \qquad (12.3.159)$$

  не зависит от выбора базиса $(a_1, ..., a_n)$ и называется *определителем оператора* A.

Доказательство. Пусть $(b_1, ..., b_n)$ – какой-нибудь другой базис в X. Тогда

$$\det\left[\frac{Ab}{b}\right] = (12.3.130) = \det\left(\left[\frac{a}{b}\right] \cdot \left[\frac{Aa}{a}\right] \cdot \left[\frac{a}{b}\right]^{-1}\right) = (12.3.154) =$$

$$= \det\left[\frac{a}{b}\right] \cdot \det\left[\frac{Aa}{a}\right] \cdot \det\left(\left[\frac{a}{b}\right]^{-1}\right) = (12.3.155) = \det\left[\frac{a}{b}\right] \cdot \det\left[\frac{Aa}{a}\right] \cdot \left(\det\left[\frac{a}{b}\right]\right)^{-1} = \det\left[\frac{Aa}{a}\right]$$

□

Из свойств определителей матриц на с.708 следуют

Свойства определителей операторов

1°. *Определитель единичного оператора равен единице:*

$$\det I = 1 \qquad (12.3.160)$$

2°. *Определитель произведения равен произведению определителей:*

$$\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B \qquad (12.3.161)$$

3°. *Оператор A тогда и только тогда обратим, когда его определитель ненулевой*

$$\exists A^{-1} \quad \Longleftrightarrow \quad \det A \neq 0,$$

при этом определитель обратной матрицы равен обратному числу:

$$\det(A^{-1}) = (\det A)^{-1} \qquad (12.3.162)$$

§ 4 Симметрические формы и однородные многочлены

(a) Общие симметрические формы и однородные многочлены

Симметрические формы $\Sigma_m(X)$.

- Полилинейная форма ω на векторном пространстве X

$$\omega : \underbrace{X \times ... \times X}_{k \text{ множителей}} \to \mathbb{R}$$

называется *симметрической* формой степени k на X, если она инвариантна относительно транспозиций:

$$\omega(x_1, ..., x_i, ..., x_j, ..., x_k) = \omega(x_1, ..., x_j, ..., x_i, ..., x_k), \qquad x_1, ..., x_k \in X. \tag{12.4.163}$$

Поскольку по теореме (12.1.14) любая вообще перестановка является композицией транспозиций, это эквивалентно инвариантности относительно всех перестановок:

$$\omega(x_{\sigma(1)}, ..., x_{\sigma(k)}) = \omega(x_1, ..., x_k), \qquad \sigma \in \mathfrak{S}_k, \qquad x_1, ..., x_k \in X. \tag{12.4.164}$$

Множество всех симметрических форм степени k на X обозначается $\Sigma_k(X)$. Ясно, что это будет векторное пространство относительно поточечных алгебраических операций.

Симметрическое произведение функционалов. Если $\eta^1, ..., \eta^m$ – произвольная последовательность длины m линейных функционалов на X, то формула

$$(\eta^1 \sqcap ... \sqcap \eta^m)(x_1, ..., x_m) := \frac{1}{m!} \cdot \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_m} \eta^{\sigma(1)}(x_1) \cdot ... \cdot \eta^{\sigma(m)}(x_m) \tag{12.4.165}$$

или, эквивалентно, формула

$$\eta^1 \sqcap ... \sqcap \eta^m := \frac{1}{m!} \cdot \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_m} \eta^{\sigma(1)} \boxtimes ... \boxtimes \eta^{\sigma(m)} \tag{12.4.166}$$

определяет симметрическую форму степени k на X, называемую *симметрическим произведением функционалов* $\eta^1, \dots, \eta^k$.

Мы считаем очевидными следующие

Свойства симметрического произведения функционалов:

1°. *При перестановке элементов последовательности $\eta^1, ..., \eta^k$ симметрическое произведение не меняется:*

$$\eta^{\sigma(1)} \sqcap ... \sqcap \eta^{\sigma(k)} = \eta^1 \sqcap ... \sqcap \eta^k, \qquad \sigma \in \mathfrak{S}_k. \tag{12.4.167}$$

2°. *При умножении какого-нибудь функционала η^i на скаляр λ симметрическое произведение умножается на скаляр:*

$$\eta^1 \sqcap ... \sqcap \lambda \cdot \eta^i \sqcap ... \sqcap \eta^k = \lambda \cdot \eta^1 \sqcap ... \sqcap \eta^i \sqcap ... \sqcap \eta^k. \tag{12.4.168}$$

3°. *При замене какого-нибудь функционала η^i на сумму функционалов $\alpha + \beta$ симметрическое произведение заменяется на сумму конкатенаций с подставленными α и β вместо η^i:*

$$\eta^1 \sqcap ... \sqcap (\alpha + \beta) \sqcap ... \sqcap \eta^k = \eta^1 \sqcap ... \sqcap \alpha \sqcap ... \sqcap \eta^k + \eta^1 \sqcap ... \sqcap \beta \sqcap ... \sqcap \eta^k \tag{12.4.169}$$

Симметризация. Для всякой полилинейной формы $\omega : X^m \to \mathbb{R}$ ее *симметризацией* называется полилинейная форма

$$\mathsf{Sym}\,\omega(x_1, ..., x_m) = \frac{1}{m!} \cdot \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_m} \omega(x_{\sigma(1)}, ..., x_{\sigma(m)}) \tag{12.4.170}$$

Отображение, которое каждой форме ω ставит в соответствие ее симметризацию

$$\omega \mapsto \mathsf{Sym}\,\omega$$

называется *симметрированием.*

Свойства симметрирования:

1° *Линейность:*

$$\mathsf{Sym}(\lambda\cdot\omega+\mu\cdot\pi)=\lambda\cdot\mathsf{Sym}\,\omega+\mu\cdot\mathsf{Sym}\,\pi,\qquad \omega\in L_m(X),$$

2° *Инвариантность при перестановке:*

$$\mathsf{Sym}\,\omega(x_{\sigma(1)},...,x_{\sigma(m)})=\mathsf{Sym}\,\omega(x_1,...,x_m),\quad \omega\in L_m(X),\quad \sigma\in\mathfrak{S}_m,\quad x_1,...,x_m\in X. \tag{12.4.171}$$

3° *Всякую полилинейную форму операция симметрирования превращает в симметрическую,*

$$\forall\omega\in L_m(X)\qquad \mathsf{Sym}\,\omega\in\mathfrak{S}_m(X), \tag{12.4.172}$$

и при этом всякую симметрическую форму она не меняет:

$$\forall\omega\in\mathfrak{S}_m(X)\qquad \mathsf{Sym}\,\omega=\omega. \tag{12.4.173}$$

4° *Идемпотентность: при вторичном применении симметрирование не меняет результат*

$$\mathsf{Sym}(\mathsf{Sym}\,\omega)=\mathsf{Sym}\,\omega,\quad \omega\in L_m(X). \tag{12.4.174}$$

◇ **12.4.1.** Из формулы (12.4.166) видно, что если $\eta^1,\dots,\eta^m$ – произвольная последовательность длины m линейных функционалов на X, то симметризацией формы $\eta^1\boxtimes\dots\boxtimes\eta^m$ является форма $\eta^1\sqcap\dots\sqcap\eta^m$:

$$\mathsf{Sym}(\eta^1\boxtimes\dots\boxtimes\eta^m)=\eta^1\sqcap\dots\sqcap\eta^m \tag{12.4.175}$$

Базис в пространстве симметрических форм $\Sigma_m(X)$.

- Пусть X – векторное пространство и $\omega\in\Sigma_m(X)$ – симметрическая форма на нем. Пусть кроме того $x=(x_1,...,x_n)$ – строка элементов X (длина которой n необязательно совпадает со степенью m формы ω), и $k:|1,...,n|\to\mathbb{Z}_+$ – мультииндекс объема m. Для произвольного представления $\sigma\in\mathsf{Rep}(k)$ мультииндекса k рассмотрим величину

$$\omega(x_{\sigma(1)},...,x_{\sigma(m)}).$$

Поскольку ω – симметрическая форма, эта величниа не зависит от выбора представления σ, а только от самого мультииндекса k. Поэтому определена величина

$$\omega(x_k)=\omega(x_{\sigma(1)},...,x_{\sigma(m)}),\qquad \sigma\in\mathsf{Rep}(k), \tag{12.4.176}$$

называемая *действием формы ω на мультистепень k строки $x=(x_1,...,x_n)$*.

- Пусть X – векторное пространство и пусть $\eta^1,...,\eta^n$ – некая фиксированная последовательность линейных функционалов на X. Если $k:|1,...,n|\to\mathbb{Z}_+$ – мультииндекс, то для любого его представления $\sigma\in\mathsf{Rep}(k)$ симметрическая форма

$$\eta^{\sigma(1)}\sqcap...\sqcap\eta^{\sigma(m)}$$

не зависит от выбора этого представления σ. Поэтому определена симметрическая форма

$$\eta^{\sqcap k}=\eta^{\sigma(1)}\sqcap...\sqcap\eta^{\sigma(m)}\in\Sigma_m(X). \tag{12.4.177}$$

называемая *мультистепенью строки функционалов $\eta^1,...,\eta^n$*.

Лемма 12.4.1. *Пусть $a=(a_1,...,a_n)$ – базис в X, и $\frac{1}{a}=\left(\left[\frac{1}{a}\right]^1,...,\left[\frac{1}{a}\right]^n\right)$ – сопряженный ему базис в X^*. Тогда для любых двух мультииндексов $k,l:\{1,...,n\}\to\mathbb{Z}_+$ одинакового объема,*

$$|k|=m=|l|,$$

справедливо равенство

$$\left[\frac{1}{a}\right]^{\sqcap k}(a_l)=\begin{cases}\frac{k!}{m!}, & k=l\\ 0, & k\ne l\end{cases}. \tag{12.4.178}$$

Доказательство. Выберем какие-нибудь представления $\sigma \in \mathsf{Rep}(k)$ и $\tau \in \mathsf{Rep}(l)$. Тогда

$$\left[\frac{1}{a}\right]^{\sqcap k}(a_l) = \left(\left[\frac{1}{a}\right]^{\sigma(1)} \sqcap ... \sqcap \left[\frac{1}{a}\right]^{\sigma(m)}\right)(a_{\tau(1)}, ..., a_{\tau(m)}) = (12.4.165) =$$

$$= \frac{1}{m!} \cdot \sum_{\rho \in \mathfrak{S}_m} \left[\frac{1}{a}\right]^{\sigma(1)}(a_{\tau(\rho(1))}) \cdot ... \cdot \left[\frac{1}{a}\right]^{\sigma(m)}(a_{\tau(\rho(m))}) \quad (12.4.179)$$

Пусть теперь $k \neq l$. Тогда $k_i \neq l_i$ для некоторого $i \in \{1, ..., n\}$, и поэтому при любом $\rho \in \mathfrak{S}_m$

$$\operatorname{card} \sigma^{-1}(i) = k_i \neq l_i = \operatorname{card} \tau^{-1}(i) = \operatorname{card}(\tau \circ \rho)^{-1}(i).$$

Это означает, что в последовательностях $\left[\frac{1}{a}\right]^{\sigma(j)}$ и $a_{\tau(\rho(j))}$ число элементов с индексами, равными i неодинаково. Как следствие, найдется такой индекс $j \in \{1, ..., m\}$, что $\sigma(j) = i \neq \tau(\rho(j))$, либо $\sigma(j) \neq i = \tau(\rho(j))$. Для такого j мы получим

$$\left[\frac{1}{a}\right]^{\sigma(j)}(a_{\tau(\rho(j))}) = 0,$$

и поэтому

$$\left[\frac{1}{a}\right]^{\sigma(1)}(a_{\tau(\rho(1))}) \cdot ... \cdot \left[\frac{1}{a}\right]^{\sigma(m)}(a_{\tau(\rho(m))}) = 0$$

Это верно для любого $\rho \in \mathfrak{S}_m$, и мы получаем, что вся сумма в конце (12.4.179) нулевая.

Наоборот, пусть $k = l$. Тогда в цепочке (12.4.179) с самого начала можно считать, что $\sigma = \tau$. Для того, чтобы слагаемое в конце (12.4.179) было ненулевым, должны выполняться равенства

$$\tau(j) = \tau(\rho(j)), \qquad j \in \{1, ..., m\},$$

(то есть чтобы перестановка ρ не меняла отображение τ) и в этом случае все произведение будет равно единице:

$$\left[\frac{1}{a}\right]^{\sigma(1)}(a_{\tau(\rho(1))}) \cdot ... \cdot \left[\frac{1}{a}\right]^{\sigma(m)}(a_{\tau(\rho(m))}) = 1.$$

Таких перестановок ρ, которые не меняют τ по теореме 12.1.10 имеется ровно $k!$. Поэтому вся сумма в конце (12.4.179) будет равна $k!$. $\square$

Теорема 12.4.2 (о базисе в $\Sigma_k(X)$)**.** *Пусть $\eta^1, ..., \eta^n$ – базис в сопряженном пространстве X^*. Тогда для всякого числа $m \in \mathbb{Z}_+$ симметрические формы $\{\eta^{\sqcap k};\ |k| = m\}$ определенные формулой* (12.4.177) *(где k пробегает всевозможные мультииндексы длины n и объема m), образуют базис в пространстве $\Sigma_m(X)$. В частном случае когда $\eta^1 = \left[\frac{1}{a}\right]^1, ..., \eta^n = \left[\frac{1}{a}\right]^n$ – сопряженный базис к некоторому базису $a = (a_1, ..., a_n)$ в X, разложение всякой симметрической формы по базису* (12.4.177) *имеет вид*

$$\omega = \sum_{\substack{k\,:\,\{1,\dots,n\}\to\mathbb{Z}_+\,:\\ |k| = m}} \frac{m!}{k!} \cdot \omega(a_k) \cdot \left[\frac{1}{a}\right]^{\sqcap k} \quad (12.4.180)$$

(суммирование ведется по всевозможным мультииндексам k объема m).

Доказательство. 1. Докажем сначала линейную независимость. Пусть для некоторых λ_k выполняется равенство

$$0 = \sum_{|k|=m} \lambda_k \cdot \eta^{\sqcap k} = \sum_{|k|=m} \lambda_k \cdot \eta^{\tau_k(1)} \sqcap ... \sqcap \eta^{\tau_k(m)} = (12.4.165) = \sum_{|k|=m} \lambda_k \cdot \frac{1}{m!} \cdot \sum_{\rho \in \mathfrak{S}_m} \eta^{\tau_k\left(\rho(1)\right)} \boxtimes ... \boxtimes \eta^{\tau_k\left(\rho(m)\right)} \quad (12.4.181)$$

где τ_k – какое-нибудь фиксированное представление мультииндекса k. Заметим, что при любом выборе мультииндексов k, l и перестановок $\rho, \pi \in \mathfrak{S}_m$ равенство

$$\eta^{\tau_k\left(\rho(1)\right)} \boxtimes ... \boxtimes \eta^{\tau_k\left(\rho(m)\right)} = \eta^{\tau_l(\pi(1))} \boxtimes ... \boxtimes \eta^{\tau_l(\pi(m))} \quad (12.4.182)$$

может выполняться только если $k = l$ и $\tau_k \circ \rho = \tau_k \circ \pi$.

Действительно, если $k \neq l$, то найдется какой-то индекс $i \in \{1, ..., n\}$ такой, что $k_i \neq l_i$. Как следствие,

$$\operatorname{card}(\tau_k \circ \rho)^{-1}(i) = \operatorname{card} \tau_k^{-1}(i) = k_i \neq l_i = \operatorname{card} \tau_l^{-1}(i) = \operatorname{card}(\tau_l \circ \pi)^{-1}(i).$$

Это означает, что в последовательностях $\eta^{\tau_k\left(\rho(1)\right)}, ..., \eta^{\tau_k\left(\rho(m)\right)}$ и $\eta^{\tau_l(\pi(1))}, ..., \eta^{\tau_l(\pi(m))}$ имеется неодинаковое количество векторов η^i. Уже по этой причине формы $\eta^{\tau_k\left(\rho(1)\right)} \boxtimes ... \boxtimes \eta^{\tau_k\left(\rho(m)\right)}$ и $\eta^{\tau_l(\pi(1))} \boxtimes ... \boxtimes \eta^{\tau_l(\pi(m))}$ не могут совпадать.

Наоборот, если $k = l$, то (12.4.182) эквивалентно равенству

$$\eta^{\tau_k\left(\rho(1)\right)} \boxtimes ... \boxtimes \eta^{\tau_k\left(\rho(m)\right)} = \eta^{\tau_k(\pi(1))} \boxtimes ... \boxtimes \eta^{\tau_k(\pi(m))}$$

а это эквивалентно системе

$$\tau_k(\rho(i)) = \tau_k(\pi(i)), \qquad 1 \leqslant i \leqslant m,$$

то есть $\tau_k \circ \rho = \tau_k \circ \pi$.

Разобьем теперь последнее выражение в (12.4.181) на подсуммы, в которых слагаемые одинаковы. В силу сказанного, это то же самое, что разбить последнюю сумму на подсуммы, в которых перестановки ρ имеют одну и ту же композицию с τ_k. А это то же самое, что разбить эту сумму на подклассы, соответствующие представлениям мультииндекса k:

$$0 = \sum_{|k|=m} \lambda_k \cdot \frac{1}{m!} \cdot \sum_{\rho \in \mathfrak{S}_m} \eta^{\tau_k\left(\rho(1)\right)} \boxtimes ... \boxtimes \eta^{\tau_k\left(\rho(m)\right)} = \sum_{|k|=m} \frac{\lambda_k}{m!} \cdot \sum_{\tau \in \mathsf{Rep}(k)} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_m:\ \tau\circ\sigma=\tau} \eta^{\tau(1)} \boxtimes ... \boxtimes \eta^{\tau(m)} =$$

$$= \sum_{|k|=m} \frac{\lambda_k}{m!} \cdot \sum_{\tau \in \mathsf{Rep}(k)} \underbrace{\operatorname{card}\{\sigma \in \mathfrak{S}_m :\ \tau \circ \sigma = \tau\}}_{\substack{\| \ (12.1.18) \\ k!}} \cdot \eta^{\tau(1)} \boxtimes ... \boxtimes \eta^{\tau(m)} =$$

$$= \sum_{|k|=m} \frac{\lambda_k}{m!} \cdot k! \cdot \sum_{\tau \in \mathsf{Rep}(k)} \eta^{\tau(1)} \boxtimes ... \boxtimes \eta^{\tau(m)}$$

Теперь мы получаем, что в последнем выражении векторы $\eta^{\tau(1)} \boxtimes ... \boxtimes \eta^{\tau(m)}$ не повторяются (при изменении k и $\tau \in \mathsf{Rep}(k)$). А по замечанию 12.2.10 векторы вида $\eta^{i_1} \boxtimes ... \boxtimes \eta^{i_m}$ $(i_s \in \{1, ..., n\})$ образуют базис в пространстве $L(X, ..., X)$ всех полилинейных форм степени m на X. Значит, векторы $\eta^{\tau(1)} \boxtimes ... \boxtimes \eta^{\tau(m)}$ должны быть линейно независимы (при изменении k и $\tau \in \mathsf{Rep}(k)$). Значит, равенство нулю суммы означает равенство нулю клоэффициентов:

$$\forall k \qquad \frac{\lambda_k}{m!} \cdot k! = 0.$$

или

$$\forall k \qquad \lambda_k = 0.$$

2. Теперь докажем полноту. Если ω – какая-нибудь симметрическая форма, то, поскольку в силу замечания 12.2.10 формы вида $\eta^{i_1} \boxtimes ... \boxtimes \eta^{i_k}$ $(i_s \in \{1, ..., n\})$ образуют базис в $L(X, ..., X)$, ω представима как их линейная комбинация:

$$\omega = \sum_{i_s \in \{1,...,n\}} \lambda_{i_1,...,i_m} \cdot \eta^{i_1} \boxtimes ... \boxtimes \eta^{i_m}$$

Под действием симметрирования это равенство превращается в цепочку

$$\omega = (12.4.173) = \mathsf{Sym}\,\omega = \sum_{i_s \in \{1,...,n\}} \lambda_{i_1,...,i_m} \cdot \mathsf{Sym}(\eta^{i_1} \boxtimes ... \boxtimes \eta^{i_m}) =$$

$$= (12.4.175) = \sum_{i_s \in \{1,...,n\}} \lambda_{i_1,...,i_k} \cdot \eta^{i_1} \sqcap ... \sqcap \eta^{i_m}$$

То есть ω представима как линейная комбинация форм вида $\eta^{i_1} \sqcap ... \sqcap \eta^{i_m}$.

3. Мы убедились, что формы (12.4.177) образуют базис в $\Sigma_m(X)$. Остается доказать формулу (12.4.180). Пусть $a = (a_1, ..., a_n)$ – базис в X. Разложим произвольную форму ω по базису $\left[\frac{1}{a}\right]^{\sqcap k}$:

$$\omega = \sum_{\substack{k\,:\,\{1,\,...,\,n\} \to \mathbb{Z}_+\,: \\ |k|\,=\,m}} \lambda_k \cdot \left[\frac{1}{a}\right]^{\sqcap k}.$$

Рассмотрим произвольный мультииндекс $l : \{1, ..., n\} \to \mathbb{Z}_+$ объема m и подставим в качестве аргумента строчку a_l:

$$\omega(a_l) = \sum_{\substack{k : \{1,...,n\} \to \mathbb{Z}_+ : \\ |k| = m}} \lambda_k \cdot \underbrace{\left[\frac{1}{a}\right]^{\sqcap k}(a_l)}_{\substack{\| \ (12.4.178) \\ \begin{cases} \frac{l!}{m!}, & k = l \\ 0, & k \neq l \end{cases},}} = \frac{l!}{m!} \cdot \lambda_l.$$

То есть

$$\lambda_l = \frac{m!}{l!} \cdot \omega(a_l).$$

□

(b) Однородные многочлены $\mathcal{P}_m(X)$

- *Многочленами* на конечномерном векторном пространстве X называются функции $f : X \to \mathbb{R}$, определенные следующими индуктивными правилами:
  0) всякая постоянная функция $f : X \to \mathbb{R}$,
  $$f(x) = \lambda, \quad x \in X$$
  является многочленом на X;
  1) всякий линейный функционал $f : X \to \mathbb{R}$ является многочленом на X;
  2) если $f : X \to \mathbb{R}$ и $g : X \to \mathbb{R}$ – многочлены на X, то их произведение $f \cdot g : X \to \mathbb{R}$ тоже является многочленом на X;
  3) если $f : X \to \mathbb{R}$ и $g : X \to \mathbb{R}$ – многочлены на X, то их сумма $f + g : X \to \mathbb{R}$ тоже является многочленом на X.
- Многочлен $f : X \to \mathbb{R}$ называется *однородным степени* m, если выполняется тождество
  $$f(\lambda \cdot x) = \lambda^m \cdot f(x), \qquad x \in X, \ \lambda \in \mathbb{R}. \qquad (12.4.183)$$
  Множество всех однородных многочленов степени m на X мы будем обозначать $\mathcal{P}_m(X)$.

Базис в пространстве однородных многочленов. Пусть X – векторное пространство размерности $n \in \mathbb{N}$ и $\eta^1, ..., \eta^n$ – последовательность линейных функционалов на X. Каждому мультииндексу[11] $k : \{1, ..., n\} \to \mathbb{Z}_+$ поставим в соответствие функцию

$$\eta^k(x) = \prod_{i=1}^{n} \eta^i(x)^{k_i}, \qquad x \in X. \qquad (12.4.184)$$

называемую *k-мономом последовательности* $\eta^1, ..., \eta^n$. Понятно, что всякая такая функция является однородным многочленом на X степени $m = |k|$ (равной объему мультииндекса k).

Теорема 12.4.3. *При фиксиорованном базисе $\eta_1, ..., \eta_n$ – в сопряженном пространства X^* мономы $\{\eta^k; \ |k| = m\}$ (где k пробегает множество мультииндексов длины n и объема m) образуют базис в пространстве $\mathcal{P}_m(X)$ всех однородных многочленов на X степени m: всякий многочлен $f \in \mathcal{P}_m(X)$ однозначно раскладывается в сумму*

$$f = \sum_{|k|=m} \lambda_k \cdot \eta^k \qquad (12.4.185)$$

(где $\lambda_k \in \mathbb{R}$, а суммирование ведется по всевозможным мультииндексам длины n и объема m).

[11] Понятие мультииндекса было определено на с.663.

Изоморфизм $\mathcal{P}_m(X^*) \cong \Sigma_m(X)^*$. Пусть $a = (a_1, ..., a_n)$ – базис в векторном пространстве X. Каждый вектор a_i можно считать функционалом на сопряженном пространстве X^*, потому что ему соответствует функционал $\iota_X(a_i) \in (X^*)^*$, определенный формулой (12.2.93):

$$\iota_X(a_i)(f) = f(a_i), \qquad f \in X^*.$$

Более того, поскольку по теореме 12.2.16 отображение $\iota_X : X \to (X^*)^*$ является изоморфизмом векторных пространств, функционалы $a_1, ..., a_n$ образуют базис пространства $(X^*)^*$.

Поэтому каждому мультииндексу $k : \{1, ..., n\} \to \mathbb{Z}_+$ будет соответствовать некий k-моном базиса $a_1, ..., a_n$ в $(X^*)^*$.

$$a_k(f) = \prod_{i=1}^n a_i(f)^{k_i} = \prod_{i=1}^n \iota_X(a_i)(f)^{k_i} = \prod_{i=1}^n f(a_i)^{k_i}, \qquad f \in X^*.$$

Каждому моному $a_k \in \mathcal{P}_m(X^*)$ можно приписать действие на симметрические формы $\omega \in \Sigma_m(X)$ по формуле

$$@a_k(\omega) = \omega(a_{\sigma(1)}, ..., a_{\sigma(|k|)}) \tag{12.4.186}$$

где $\sigma : \{1, ..., |k|\} \to \{1, ..., n\}$ – произвольное представление[12] мультииндекса k (поскольку форма ω симметрична, правая часть (12.4.186) не зависит от выбора представления σ). По теореме 12.4.3 мономы a_k образуют базис в пространстве многочленов $\mathcal{P}_m(X^*)$. Значит, каждый многочлен $f \in \mathcal{P}_m(X^*)$ однозначно раскладывается по этому базису по формуле

$$f = \sum_{|k|=m} \lambda^k \cdot a_k, \qquad \lambda^k \in \mathbb{R}. \tag{12.4.187}$$

Для любой формы $\omega \in \Sigma_m(X)$ положим

$$@f(\omega) = \sum_{|k|=m} \lambda^k \cdot \omega(a_k). \tag{12.4.188}$$

Это число мы называем *действием многочлена $f \in \mathcal{P}_m(X^*)$ на форму $\omega \in \Sigma_m(X)$*. При фиксированном $f \in \mathcal{P}_m(X^*)$ эта формула определает линейный функционал $@f : \Sigma_m(X) \to \mathbb{R}$, а если считать, что f может меняться, то мы получаем отображение

$$@ : \mathcal{P}_m(X^*) \to \Sigma_m(X)^*.$$

Теорема 12.4.4. *Действие* (12.4.188) *многочлена $f \in \mathcal{P}_m(X^*)$ на симметрическую форму $\omega \in \Sigma_m(X)$ обладает следующими свойствами:*

- *(i) определение $@f(\omega)$ не зависит от выбора базиса $a = (a_1, ..., a_n)$ в X;*
- *(ii) если $\omega \neq 0$, то существует f такой, что $@f(\omega) \neq 0$;*
- *(iii) если $f \neq 0$, то существует ω такая, что $@f(\omega) \neq 0$;*
- *(iv) отображение $@ : \mathcal{P}_m(X^*) \to \Sigma_m(X)^*$ является изморфизмом векторных пространств.*

Доказательство. 1. Пусть $b = (b_1, ..., b_n)$ – другой базис в X. Для любых мультииндексов $k, l : \{1, ..., n\} \to \mathbb{Z}_+$ объема $|k| = |l| = m$, и любого представления $\sigma \in \mathsf{Rep}(k)$ обозначим

$$\left[\frac{a_k}{b}\right]^l = \sum_{\tau \in \mathsf{Rep}(l)} \left[\frac{a_{\sigma(1)}}{b}\right]^{\tau(1)} \cdot ... \cdot \left[\frac{a_{\sigma(m)}}{b}\right]^{\tau(m)} \tag{12.4.189}$$

и заметим, что это число не зависит от выбора $\sigma \in \mathsf{Rep}(k)$. Действительно, если σ' – какое-то другое представление мультииндекса k, то от σ оно отличается некоторой перестановкой аргументов

$$\sigma' = \sigma \circ \upsilon, \qquad \upsilon \in \mathfrak{S}_m.$$

Поэтому

$$\sum_{\tau \in \mathsf{Rep}(l)} \left[\frac{a_{\sigma'(1)}}{b}\right]^{\tau(1)} \cdot ... \cdot \left[\frac{a_{\sigma'(m)}}{b}\right]^{\tau(m)} = \underbrace{\sum_{\tau \in \mathsf{Rep}(l)} \left[\frac{a_{\sigma\left(\upsilon(1)\right)}}{b}\right]^{\tau(1)} \cdot ... \cdot \left[\frac{a_{\sigma\left(\upsilon(m)\right)}}{b}\right]^{\tau(m)}}_{\text{если заменить } \tau \text{ на } \tau \circ \upsilon \text{, то сумма не изменится}} =$$

[12] Представление мультииндекса было определено на с.665.

$$= \sum_{\tau\in\mathsf{Rep}(l)} \underbrace{\left[\frac{a_{\sigma\left(\upsilon(1)\right)}}{b}\right]^{\tau\left(\upsilon(1)\right)} \cdot \ldots \cdot \left[\frac{a_{\sigma\left(\upsilon(m)\right)}}{b}\right]^{\tau\left(\upsilon(m)\right)}}_{\substack{\| \\ \left[\frac{a_{\sigma(1)}}{b}\right]^{\tau(1)} \cdot \ldots \cdot \left[\frac{a_{\sigma(m)}}{b}\right]^{\tau(m)}}} = \sum_{\tau\in\mathsf{Rep}(l)} \left[\frac{a_{\sigma(1)}}{b}\right]^{\tau(1)} \cdot \ldots \cdot \left[\frac{a_{\sigma(m)}}{b}\right]^{\tau(m)}$$

Определение (12.4.189) позволяет выразить a_k через b_l: для произвольного $\sigma \in \mathsf{Rep}(k)$

$$a_k = a_{\sigma(1)} \cdot \ldots \cdot a_{\sigma(m)} = (12.2.69) = \left(\sum_{j_1=1}^{n} \left[\frac{a_{\sigma(1)}}{b}\right]^{j_1} \cdot b_{j_1}\right) \cdot \ldots \cdot \left(\sum_{j_1=n}^{n} \left[\frac{a_{\sigma(1)}}{b}\right]^{j_n} \cdot b_{j_n}\right) =$$

$$= \sum_{j_1,\ldots,j_n=1}^{n} \left[\frac{a_{\sigma(1)}}{b}\right]^{j_1} \cdot \ldots \cdot \left[\frac{a_{\sigma(1)}}{b}\right]^{j_n} \cdot b_{j_1} \cdot \ldots \cdot b_{j_n} =$$

$$= \sum_{|l|=m} \sum_{\tau\in\mathsf{Rep}(l)} \left[\frac{a_{\sigma(1)}}{b}\right]^{\tau(1)} \cdot \ldots \cdot \left[\frac{a_{\sigma(1)}}{b}\right]^{\tau(n)} \cdot b_{\tau(1)}, \ldots, b_{\tau(m)} = \sum_{|l|=m} \left[\frac{a_k}{b}\right]^{l} \cdot b_l$$

Отсюда следует, что если многочлен f раскладывается по базису a формулой (12.4.187), то в разложении по базису b он принимает вид

$$f = \sum_{|k|=m} \lambda^k \cdot a_k = \sum_{|k|=m} \lambda^k \cdot \sum_{|l|=m} \left[\frac{a_k}{b}\right]^{l} \cdot b_l = \sum_{|l|=m} \sum_{|k|=m} \lambda^k \cdot \left[\frac{a_k}{b}\right]^{l} \cdot b_l = \sum_{|l|=m} \mu^l \cdot b_l$$

где

$$\mu^l = \sum_{|k|=m} \lambda^k \cdot \left[\frac{a_k}{b}\right]^{l}.$$

Если теперь обозначить символами $@_a f(\omega)$ и $@_b f(\omega)$ действия многочлена f на форму ω определенные правилом (12.4.188) примененном к базисам a и b соответственно,

$$@_a f(\omega) = \sum_{|k|=m} \lambda^k \cdot \omega(a_k), \qquad @_b f(\omega) = \sum_{|l|=m} \lambda^l \cdot \omega(b_l).$$

то мы получим, что эти действия совпадают:

$$@_a f(\omega) = \sum_{|k|=m} \lambda^k \cdot \omega(a_k) = \sum_{|k|=m} \lambda^k \cdot \omega(a_{\sigma(1)} \cdot \ldots \cdot a_{\sigma(m)}) = (12.2.69) =$$

$$= \sum_{|k|=m} \lambda^k \cdot \omega\left(\sum_{j_1=1}^{n} \left[\frac{a_{\sigma(1)}}{b}\right]^{j_1} \cdot b_{j_1}, \ldots, \sum_{j_1=n}^{n} \left[\frac{a_{\sigma(1)}}{b}\right]^{j_n} \cdot b_{j_n}\right) =$$

$$= \sum_{|k|=m} \lambda^k \cdot \sum_{j_1,\ldots,j_n=1}^{n} \left[\frac{a_{\sigma(1)}}{b}\right]^{j_1} \cdot \ldots \cdot \left[\frac{a_{\sigma(1)}}{b}\right]^{j_n} \cdot \omega(b_{j_1}, \ldots, b_{j_n}) =$$

$$= \sum_{|k|=m} \lambda^k \cdot \sum_{|l|=m} \sum_{\tau\in\mathsf{Rep}(l)} \left[\frac{a_{\sigma(1)}}{b}\right]^{\tau(1)} \cdot \ldots \cdot \left[\frac{a_{\sigma(1)}}{b}\right]^{\tau(n)} \cdot \omega(b_{\tau(1)}, \ldots, b_{\tau(m)}) =$$

$$= \sum_{|l|=m} \sum_{|k|=m} \lambda^k \cdot \left[\frac{a_k}{b}\right]^{l} \cdot \omega(b_l) = \sum_{|l|=m} \mu^l \cdot \omega(b_l) = @_b f(\omega).$$

2. Пусть $\omega \neq 0$. Тогда эта форма отлична от нуля на какой-то последовательности $a_{\sigma(1)}, \ldots, a_{\sigma(m)}$ базисных векторов:

$$\omega(a_{\sigma(1)}, \ldots, a_{\sigma(m)}) \neq 0.$$

Последовательность $\sigma(1), \ldots, \sigma(m)$ является представлением некоторого мультииндекса k, и поэтому мы получаем

$$\omega(a_k) \neq 0.$$

То есть $@f(\omega) \neq 0$ при $f = a_k$.

3. Наоборот, пусть $f \neq 0$. По тореме 12.4.3 многочлен f раскладывается по базису a_k:

$$f = \sum_{|k|=m} \lambda_k \cdot a_k.$$

Поскольку $f \neq 0$, какой-то коэффициент в этом разложении должен быть ненудевым: $\lambda_l \neq 0$. Если взять симметричевую форму $\omega = \left[\frac{1}{a}\right]^l$, то мы получим

$$@f(\omega) = \sum_{|k|=m} \lambda_k \cdot \omega(a_k) = \sum_{|k|=m} \lambda_k \cdot \left[\frac{1}{a}\right]^l (a_k) = (12.4.178) = \lambda_l \cdot \left[\frac{1}{a}\right]^l (a_l) = \lambda_l \cdot l! \neq 0.$$

4. Докажем (iv). Понятно, что отображение $@ : \mathcal{P}_m(X^*) \to \varSigma_m(X)^*$ лмнейно. Оно инъективно, потому что если $f \neq 0$, то по свойству (iii) найдется ω такая, что $@f(\omega) \neq 0$, и значит $@f \neq 0$. Покажем, что оно сюръективно. Пусть $F \in \varSigma_m(X)^*$ – какой-нибудь функционал. Положим

$$f = \sum_{|k|=m} \frac{1}{k!} \cdot F\left(\left[\frac{1}{a}\right]^k \right) \cdot a_k.$$

Тогда для любой формы $\omega \in \varSigma_m(X)$ мы получим

$$@f(\omega) = \sum_{|k|=m} \frac{1}{k!} \cdot F\left(\left[\frac{1}{a}\right]^k \right) \cdot \omega(a_k) = F\left(\sum_{|k|=m} \frac{1}{k!} \cdot \left[\frac{1}{a}\right]^k \cdot \omega(a_k) \right) = (12.4.180) = F(\omega).$$

Это значит, что $@f = F$. □

Симметрическая поляризация $\mathcal{P}_m(X) \cong \varSigma_m(X)$. Пусть X – векторное пространство размерности n, $\eta^1, ..., \eta^n$ – базис его сопряженного пространства X^* и $m \in \mathbb{N}$. По теореме (12.4.3) всякий однородный многочлен $f \in \mathcal{P}_m(X)$ однозначно раскладывается по базису мономов $\{\eta^k\}$ степени m,

$$f = \sum_{|k|=m} \lambda_k \cdot \eta^k, \tag{12.4.190}$$

а по теореме 12.4.2 всякая симметрическая форма $\omega \in \varSigma_m(X)$ однозначно раскладывается по базису элементарных форм $\{\eta^{\sqcap k}\}$ степени m,

$$\omega = \sum_{|k|=m} \lambda_k \cdot \eta^{\sqcap k}.$$

- Отображение
$$\varPi : f = \sum_{|k|=m} \lambda_k \cdot \eta^k \quad \mapsto \quad \omega = \sum_{|k|=m} \lambda_k \cdot \eta^{\sqcap k} \tag{12.4.191}$$
(которое каждому многочлену $f \in \mathcal{P}_m(X)$ ставит в соответствие симметрическую форму $\omega \in \varSigma_m(X)$ с теми же коэффициенами в разложении по базису $\{\eta^{\sqcap k}\}$, что и у f в разложении по базису $\{\eta^k\}$) называется *симметрической поляризацией*. Это отображение однозначно определяется тем, что оно линейно и переводит базис $\{\eta^k\}$ в базис $\{\eta^{\sqcap k}\}$:
$$\varPi(\eta^k) = \eta^{\sqcap k}.$$

Теорема 12.4.5. *Отображение симметрической поляризации $\varPi : \mathcal{P}_m(X) \to \varSigma_m(X)$ линейно, биективно, не зависит от выбора базиса $\eta^1, ..., \eta^n$ в X^*, а обратное ему отображение $\varPi^{-1} : \varSigma_m(X) \to \mathcal{P}_m(X)$ совпадает с отображением ограничения на диагональ:*

$$\varPi^{-1}(\omega)(x) = \omega(x, ..., x), \qquad x \in X. \tag{12.4.192}$$

! **12.4.2.** Ниже мы покажем, что поляризацию $\varPi$ можно задать формулой

$$\varPi(f)(x_1, ..., x_m) = \frac{1}{m!} \cdot \frac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}\, t_1} ... \frac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}\, t_m} f(t_1 \cdot x_1 + ... + t_m \cdot x_m)\Big|_{t_1 = ... = t_m = 0}, \qquad x_i \in X, \tag{12.4.193}$$

Доказательство. 1. Линейность и биективность этого отображения очевидны. Покажем, что оно не зависит от базиса. Здесь повторяются рассуждения теоремы 12.4.4. Фиксируется какой-нибудь другой базис $\theta^1,...,\theta^n$ в X^*. Затем определяется система чисел, аналогичная (12.4.189):

$$\left[\frac{\eta^k}{\theta}\right]_l=\sum_{\tau\in\mathsf{Rep}(l)}\left[\frac{\eta^{\sigma(1)}}{\theta}\right]_{\tau(1)}\cdot\ldots\cdot\left[\frac{\eta^{\sigma(m)}}{\theta}\right]_{\tau(m)},$$

и отмечается, что они не зависят от выбора представления $\sigma\in\mathsf{Rep}(k)$. Отсюда следует, что если многочлен f раскладывается по базису η^k формулой (12.4.190), то в разложении по базису θ^l он принимает вид

$$f=\sum_{|k|=m}\lambda_k\cdot\eta^k=\sum_{|l|=m}\mu_l\cdot\theta^l \tag{12.4.194}$$

где

$$\mu_l=\sum_{|k|=m}\lambda_k\cdot\left[\frac{\eta^k}{\theta}\right]_l.$$

Если теперь для многочлена (12.4.194) обозначить символом $\varPi_\eta(f)$ форму, определенную правилом (12.4.191), а символом $\varPi_\theta(f)$ форму, определенную тем же правилом (12.4.191), но а заменой η на θ,

$$\varPi_\eta(f)=\sum_{|k|=m}\lambda_k\cdot\eta^{\sqcap k},\qquad \varPi_\theta(f)=\sum_{|l|=m}\mu_l\cdot\theta^{\sqcap l},$$

то мы получим, что эти формы совпадают:

$$\begin{aligned}\varPi_\eta(f)&=\sum_{|k|=m}\lambda_k\cdot\eta^{\sqcap k}=\sum_{|k|=m}\lambda_k\cdot\eta^{\sigma(1)}\sqcap\ldots\sqcap\eta^{\sigma(m)})=(12.2.69)=\\&=\sum_{|k|=m}\lambda_k\cdot\left(\sum_{j_1=1}^n\left[\frac{\eta^{\sigma(1)}}{\theta}\right]_{j_1}\cdot\theta^{j_1}\right)\sqcap\ldots\sqcap\left(\sum_{j_1=n}^n\left[\frac{\eta^{\sigma(1)}}{\theta}\right]_{j_n}\cdot\theta^{j_n}\right)=\\&=\sum_{|k|=m}\lambda_k\cdot\sum_{j_1,\ldots,j_n=1}^n\left[\frac{\eta^{\sigma(1)}}{\theta}\right]_{j_1}\cdot\ldots\cdot\left[\frac{\eta^{\sigma(1)}}{\theta}\right]_{j_n}\cdot\theta^{j_1}\sqcap\ldots\sqcap\theta^{j_n}=\\&=\sum_{|k|=m}\lambda_k\cdot\sum_{|l|=m}\sum_{\tau\in\mathsf{Rep}(l)}\left[\frac{\eta^{\sigma(1)}}{\theta}\right]_{\tau(1)}\cdot\ldots\cdot\left[\frac{\eta^{\sigma(1)}}{\theta}\right]_{\tau(n)}\cdot\theta^{\tau(1)}\sqcap\ldots\sqcap\theta^{\tau(m)}=\\&=\sum_{|l|=m}\sum_{|k|=m}\lambda_k\cdot\left[\frac{\eta^k}{\theta}\right]^l\cdot\theta^l=\sum_{|l|=m}\mu_l\cdot\theta^l=\varPi_\theta(f).\end{aligned}$$

2. Тождество (12.4.192) достаточно проверить на базисных векторах. Для $\omega=\eta^{\sqcap k}$ мы получим:

$$\begin{aligned}\omega(x,...,x)&=\eta^{\sqcap k}(x,...,x)=(12.4.177)=(\eta^{\sigma(1)}\sqcap\ldots\sqcap\eta^{\sigma(m)})(x,...,x)=(12.4.165)=\\&=\frac{1}{m!}\cdot\sum_{\tau\in\mathfrak{S}_m}\underbrace{\eta^{\sigma(\tau(1))}(x)\cdot\ldots\cdot\eta^{\sigma(\tau(m))}(x)}_{\substack{\parallel\\ \eta^{\sigma(1)}(x)\cdot\ldots\cdot\eta^{\sigma(m)}(x)\\ \parallel\\ \eta^k(x)}}=\eta^k(x)=\varPi^{-1}(\eta^{\sqcap k})(x)=\varPi^{-1}(\omega)(x)\end{aligned}$$

□

Универсальность пространства однородных многочленов. Пусть X – конечномерное вещественное векторное пространство. Каждому числу $k\in\mathbb{N}$ и каждой последовательность $(x_1,...,x_k)$ векторов из X поставим в соответствие однородный многочлен $x_1\sqcup\ldots\sqcup x_m$ степени m на сопряженном пространстве X^* по формуле

$$(x_1\sqcup\ldots\sqcup x_m)(f)=f(x_1)\cdot\ldots\cdot f(x_m),\qquad f\in X^*. \tag{12.4.195}$$

Заметим, что отображение

$$\sqcup_k:(x_1,...,x_m)\mapsto x_1\sqcup\ldots\sqcup x_m \tag{12.4.196}$$

является кососимметрическим полилинейным отображением $\sqcup_m : X \times ... \times X \to \mathcal{P}_m(X^*)$. Кроме того справедливо тождество

$$@(x_1 \sqcup ... \sqcup x_m)(\omega) = \omega(x_1, ..., x_m), \qquad x_1, ..., x_m \in X. \tag{12.4.197}$$

Действительно, если $a = (a_1, ..., a_n)$ – базис в X, то

$$@(x_1 \sqcup ... \sqcup x_m)(\omega) = @\Bigg(\Big(\sum_{j_1} \left[\frac{x_1}{a}\right]^{j_1} \cdot a_{j_1}\Big) \sqcup ... \sqcup \Big(\sum_{j_m} \left[\frac{x_m}{a}\right]^{j_m} \cdot a_{j_m}\Big)\Bigg)(\omega) =$$

$$= @\Bigg(\Big(\sum_{j_1} \left[\frac{x_1}{a}\right]^{j_1} \cdot a_{j_1}\Big) \sqcup ... \sqcup \Big(\sum_{j_m} \left[\frac{x_m}{a}\right]^{j_m} \cdot a_{j_m}\Big)\Bigg)(\omega) = @\Bigg(\sum_{j_1}\sum_{j_m} \left[\frac{x_1}{a}\right]^{j_1} \cdot ... \cdot \left[\frac{x_m}{a}\right]^{j_m} \cdot a_{j_1} \sqcup ... \sqcup a_{j_m}\Bigg)(\omega) =$$

$$= \sum_{j_1}\sum_{j_m} \left[\frac{x_1}{a}\right]^{j_1} \cdot ... \cdot \left[\frac{x_m}{a}\right]^{j_m} \cdot \omega(a_{j_1} \sqcup ... \sqcup a_{j_m}) = \sum_{j_1}\sum_{j_m} \left[\frac{x_1}{a}\right]^{j_1} \cdot ... \cdot \left[\frac{x_m}{a}\right]^{j_m} \cdot \omega(a_{j_1}, ..., a_{j_m}) =$$

$$= \omega\Bigg(\Big(\sum_{j_1} \left[\frac{x_1}{a}\right]^{j_1} \cdot a_{j_1}\Big), ..., \Big(\sum_{j_m} \left[\frac{x_m}{a}\right]^{j_m} \cdot a_{j_m}\Big)\Bigg) = \omega(x_1, ..., x_m).$$

Теорема 12.4.6 (универсальность пространства однородных многочленов)**.** *Для любого симметрического полининейного отображения* $\varphi : \underbrace{X \times ... \times X}_{m\ \text{множителей}} \to Y$ *найдется единственное линейное отображение* $\varphi^\vee : \mathcal{P}_m(X^*) \to Y$, *замыкающее диаграмму*

$$\begin{tikzcd}
 & X \times ... \times X \arrow[dl, "\sqcup_m"'] \arrow[dr, "\varphi"] & \\
\mathcal{P}_m(X^*) \arrow[rr, dashed, "\varphi^\sqcup"'] & & Y
\end{tikzcd} .$$

Доказательство. Каждому функционалу $f \in Y^*$ поставим в соответствие симметрическую форму $\psi(f)$ степени m на X по формуле

$$\psi(f) = f \circ \varphi.$$

У нас получится линейный оператор

$$\psi : Y^* \to \Sigma_m(X).$$

Ему соответствует сопряженное отображение

$$\psi^* : \Sigma_m(X)^* \to Y^{**}.$$

Рассмотрим отображение $\iota_Y : Y \to Y^{**}$, определенное формулой (12.2.93). По теореме 12.2.16 оно является изоморфизмом векторных пространств, поэтому определено обратное отображение $\iota_Y^{-1} : Y^{**} \to Y$. Положим

$$\varphi^\sqcup = \iota_Y^{-1} \circ \psi^* \circ @ : \mathcal{P}_m(X) \to Y$$

$$\begin{tikzcd}
\Sigma_m(X)^* \arrow[r, "\psi^*"] & Y^{**} \arrow[d, "\iota^{=1}"] \\
\mathcal{P}_m(X) \arrow[u, "@"] \arrow[r, "\varphi^\sqcup"'] & Y
\end{tikzcd}$$

Тогда возникает цепочка (в которой $x_i \in X$, $f \in Y^*$):

$$f\Big(\varphi^\sqcup\big(\sqcup_m (x_1, ..., x_m)\big)\Big) = f\big(\varphi^\sqcup(x_1 \sqcup ... \sqcup x_m)\big) = f\big((\iota_Y^{-1} \circ \psi^* \circ @)(x_1 \sqcup ... \sqcup x_m)\big) =$$

$$= f\Bigg(\iota_Y^{-1}\Big(\psi^*\big(@(x_1 \sqcup ... \sqcup x_m)\big)\Big)\Bigg) = \Big(\psi^*\big(@(x_1 \sqcup ... \sqcup x_m)\big)\Big)(f) = @(x_1 \sqcup ... \sqcup x_m)\big)\big(\psi(f)\big) =$$

$$= @(x_1 \sqcup ... \sqcup x_m)\big)(f \circ \varphi) = (12.4.197) = (f \circ \varphi)(x_1, ..., x_m) = f\big(\varphi(x_1, ..., x_m)\big)$$

$$\Downarrow$$

$$\varphi^{\sqcup}\big(\sqcup_m(x_1,...,x_m)\big)=\varphi(x_1,...,x_m)$$

$$\Downarrow$$

$$\varphi^{\sqcup}\circ\sqcup_m=\varphi.$$

□

(c) Симметрические билинейные формы и критерий Сильвестра

Симметрические билинейные формы. Билинейная форма α на векторном пространстве X называется *симметрической*, если она удовлетворяет тождеству

$$\alpha(x,y)=\alpha(y,x),\qquad x,y\in X \tag{12.4.198}$$

Теорема 12.4.7. *Для билинейной формы α на векторном пространстве X следующие условия эквивалентны:*

(i) *α является симметрической;*

(ii) *матрица A билинейной формы α в каком-нибудь базисе $b_1,...,b_n$ является симметрической:*

$$A^{\top}=A \tag{12.4.199}$$

(iii) *матрица A билинейной формы α в любом базисе $b_1,...,b_n$ является симметрической.*

Доказательство.

$$\alpha(x,y)=\alpha(y,x)$$

$$\Updownarrow$$

$$\forall i,j\qquad \alpha(b_j,b_i)=\alpha(b_i,b_j)$$

$$\Updownarrow$$

$$\forall i,j\qquad A_{j,i}=A_{i,j}$$

$$\Updownarrow$$

$$A^T=A$$

□

Квадратичные формы.

- Многочлен $q:X\to\mathbb{R}$ на векторном пространстве X называется *квадратичной формой* на X, если он удовлетворяет следующему так называемому *тождеству параллелограмма*:

$$\frac{q(x+y)+q(x-y)}{2}=q(x)+q(y),\qquad x,y\in\mathbb{R}^n \tag{12.4.200}$$

◇ **12.4.3.** На пространстве $\mathbb{R}_2$ квадратичными формами будут, например, функции

$$p(x)=\big(x_1\big)^2+\big(x_2\big)^2$$

$$q(x)=\big(x_1\big)^2-\big(x_2\big)^2$$

$$r(x)=x_1\cdot x_2$$

◇ **12.4.4.** Если $f:X\to\mathbb{R}$ и $g:X\to\mathbb{R}$ – два линейных функционала на X, то их произведение

$$q(x)=f(x)\cdot g(x)$$

как легко проверить, будет квадратичной формой на X. В частности, произведение f на себя будет квадратичной формой:

$$q(x)=f(x)^2$$

◇ **12.4.5.** Если $q(x)$ и $r(x)$ – квадратичные формы, то любая их линейная комбинация

$$p(x)=\alpha\cdot q(x)+\beta\cdot r(x),\qquad \alpha,\beta\in\mathbb{R}$$

тоже будет квадратичной формой.

Теорема 12.4.8. *Формулы*

$$q(x) = \alpha(x, x) \tag{12.4.201}$$

$$\alpha(x, y) = \frac{q(x+y) - q(x) - q(y)}{2} \tag{12.4.202}$$

устанавливают взаимно однозначное соответствие между квадратичными формами q и симметрическими билинейными формами α на X.

Вместе с теоремой 12.4.5 это дает

Следствие 12.4.9. *Для многочлена q на векторном пространстве X следующие условия эквивалентны:*

(i) q является квадратичной формой,

(i) q является однородным степени 2, и поэтому удовлетворяет условиям:

$$q(0) = 0 \tag{12.4.203}$$

$$q(\lambda \cdot x) = \lambda^2 \cdot q(x) = q(-\lambda \cdot x) \tag{12.4.204}$$

С другой стороны, из теоремы 12.2.18 мы получаем

Следствие 12.4.10. *Для любого базиса b в X всякая квадратичная форма $q(x)$ на X имеет вид*

$$q(x) = \left[\frac{x}{b}\right]^{\top} \cdot M \cdot \left[\frac{x}{b}\right] = \sum_{i,j=1}^{n} M^i_j \cdot \left[\frac{x}{b}\right]^i \cdot \left[\frac{x}{b}\right]^j, \qquad x \in \mathbb{R}^n \tag{12.4.205}$$

где M – некоторая симметрическая матрица, коэффициенты которой M^i_j можно вычислить по формуле

$$M^i_j = \frac{q(b_i + b_j) - q(b_i) - q(b_j)}{2} \tag{12.4.206}$$

Для доказательства теоремы 12.4.8 нам понадобится следующая

Лемма 12.4.11. *Для всякой квадратичной формы q справедливо тождество*

$$q(x+y+z) = q(x+y) + q(y+z) + q(x+z) - q(x) - q(y) - q(z) \tag{12.4.207}$$

Доказательство.

$$\begin{aligned}
&q(x+y) + q(y+z) + q(x+z) = \big[q(x+y) + q(y+z)\big] + q(x+z) = (12.4.200) = \\
&= \frac{q\big((x+y)+(y+z)\big) + q\big((x+y)-(y+z)\big)}{2} + q(x+z) = \frac{q\big(x+2y+z\big) + q\big(x-z\big)}{2} + q(x+z) = \\
&= \frac{q\big(x+2y+z\big) + q(x+z) + q\big(x-z\big) + q(x+z)}{2} = \\
&= \frac{q\big((x+y+z)+y\big) + q\big((x+y+z)-y\big) + q\big(x-z\big) + q\big(x+z\big)}{2} = \\
&= \frac{2q\big(x+y+z\big) + 2q\big(y\big) + q\big(x-z\big) + q\big(x+z\big)}{2} = q\big(x+y+z\big) + q\big(y\big) + \frac{q\big(x-z\big) + q\big(x+z\big)}{2} = \\
&= q\big(x+y+z\big) + q(y) + q(x) + q(z)
\end{aligned}$$

□

Доказательство теоремы 12.4.8. 1. Пусть $\alpha(x, y)$ – симметрическая билинейная форма на $\mathbb{R}^n$. Покажем, что функция $q(x)$, определенная формулой (12.4.202), является квадратичной формой на $\mathbb{R}^n$.

Во-первых, надо проверить непрерывность $q(x)$. Она следует из непрерывности $\alpha(x, y)$ (следствие 2.3).

Во-вторых, проверим тождество параллелограмма (12.4.199):

$$q(x+y)+q(x-y) = \alpha(x+y, x+y)+\alpha(x-y, x-y) = \alpha(x+y, x)+\alpha(x+y, y)+\alpha(x-y, x)-\alpha(x-y, y) =$$

$$= \alpha(x,x) + \cancel{\alpha(y,x)} + \cancel{\alpha(x,y)} + \alpha(y,y) + \alpha(x,x) - \cancel{\alpha(y,x)} - \cancel{\alpha(x,y)} + \alpha(y,y) = 2\alpha(x,x) + 2\alpha(y,y) = \\ = 2q(x) + 2q(y)$$

Это и есть тождество (12.4.199), только помноженное на двойку.

2. Наоборот, пусть q – квадратичная форма на $\mathbb{R}^n$. Покажем, что функция α, определенная формулой (12.4.202) является симметрической билинейной формой на $\mathbb{R}^n$.

Докажем сначала аддитивность по первой переменной:

$$\alpha(x+y,z) = \alpha(x,z) + \alpha(y,z)$$

$$\Updownarrow \quad \text{(12.4.202)}$$

$$\frac{q(x+y+z) - q(x+y) - q(z)}{2} = \frac{q(x+z) - q(x) - q(z)}{2} + \frac{q(y+z) - q(y) - q(z)}{2}$$

$$\Updownarrow$$

$$q(x+y+z) - q(x+y) - q(z) = q(x+z) - q(x) - q(z) + q(y+z) - q(y) - q(z)$$

$$\Updownarrow$$

$$q(x+y+z) = q(x+y) + q(x+z) + q(y+z) - q(x) - q(y) - q(z)$$

Последнее тождество – то самое, которое мы доказывали в лемме 12.4.11.

Далее нужно заметить, что форма α непрерывна: это следует из непрерывности q (и формулы (12.4.202)). Вместе непрерывность и аддитивность дают линейность по первой переменной. Аналогично доказывается линейность по второй переменной.

Остается проверить, что α – симметрическая форма, то есть, что она удовлетворяет (12.4.198). Это делается непосредственно:

$$\alpha(x,y) = \frac{q(x+y) - q(x) - q(y)}{2} = \begin{pmatrix}\text{перегруппируем}\\ \text{слагаемые}\end{pmatrix} = \frac{q(y+x) - q(y) - q(x)}{2} = \alpha(y,x)$$

□

! 12.4.6. Квадратичные формы, являющиеся одновременно билинейными. Функция от двух вещественных переменных

$$f(x,y) = x \cdot y$$

если на нее глядеть как на функцию от вектора $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, является квадратичной формой. С другой стороны, к ней можно относиться, как к функции от пары векторов x и y, и тогда она становится билинейной формой.

Квадратичная форма $q : X \times X \to \mathbb{R}$ тогда и только тогда будет билинейной формой от пары переменных $x, y \in X$, когда выполняется тождество

$$q(x,0) = 0 = q(0,x), \qquad x \in X.$$

Ортогональное дополнение и невырожденные формы. Пусть α – симметрическая билинейная форма на пространстве X.

- Говорят, что два векторы x и y из X *ортогональны* (относительно формы α), и обозначается это записью $x \perp y$, если форма α обращается в нуль на паре (x,y):

$$x \perp y \quad \iff \quad \alpha(x,y) = 0.$$

- Для любого подпространства $Y \subseteq X$ его *ортогональным дополнением* (относительно формы α) называется множество $Y^\perp$, состоящее из векторов, ортогональных всем векторам из Y:

$$Y^\perp = \{x \in X : \ \forall y \in Y \quad x \perp y\} = \{x \in X : \ \forall y \in Y \quad \alpha(x,y) = 0\}.$$

Нетрудно заметить, что $Y^\perp$ тоже является подпространством в X.

! 12.4.7. Очевидно, всегда выполняется включение

$$Y \subseteq (Y^{\perp})^{\perp},$$

но обратное включение не всегда верно. Например, на плоскости $\mathbb{R}^2$ для формы

$$\alpha(x,y) = x^1 \cdot y^1$$

и подпространства

$$Y = \{(a,0);\ a \in \mathbb{R}\}$$

мы получим:

$$Y^{\perp} = \{(0,b);\ b \in \mathbb{R}\}$$

и

$$(Y^{\perp})^{\perp} = \mathbb{R}^2 \nsubseteq Y.$$

Лемма 12.4.12. *Для любой билинейной формы α на X и любого подпространства Y в X справедливо неравенство*

$$\dim Y + \dim Y^{\perp} \geqslant \dim X \tag{12.4.208}$$

Доказательство. Выберем базис $e_1,...,e_k$ в Y. Тогда

$$Y^{\perp} = \{x \in X : \quad \forall i = 1,...,k \quad \alpha(x,e_i) = 0\}$$

То есть $Y^{\perp}$ есть общее ядро функционалов $f_i(x) = \alpha(x,e_i)$:

$$Y^{\perp} = \bigcap_{i=1}^{k} \operatorname{Ker} f_i$$

Отсюда можно вывести нижнюю оценку для размерности $Y^{\perp}$:

$$\dim Y^{\perp} \geqslant \dim X - k = \dim X - \dim Y$$

Это эквивалентно неравенству (12.4.208). □

- *Ядром* $\operatorname{Ker}\alpha$ симметрической билинейной формы α на пространстве X называется ортогональное дополнение ко всему пространству X:

$$\operatorname{Ker}\alpha := X^{\perp} = \{x \in X :\ \forall y \in X \quad x \perp y\}.$$

- Говорят, что симметрическая билинейная форма α *невырождена* на X, если выполняются следующие эквивалентные условия:
  (a) для любого ненулевого вектора $x \in X$ найдется вектор $y \in X$, неортогональный x:
  $$\alpha(x,y) \neq 0$$
  (b) ядро формы α состоит из единственного вектора – нуля:
  $$\operatorname{Ker}\alpha = X^{\perp} = \{0\}$$

Теорема 12.4.13. *Для симметрической билинейной формы α на X и подпространства $Y \subseteq X$ следующие условия эквивалентны:*

(i) $X = Y \oplus Y^{\perp}$*;*

(ii) $Y \cap Y^{\perp} = \{0\}$*;*

(iii) ограничение $\alpha|_Y$ формы α на подпространство Y является невырожденной формой на Y.

! 12.4.8. Можно заметить, что эти условия не зависят (ни в прямую, ни в обратную сторону) от равенства

$$Y = (Y^{\perp})^{\perp} \tag{12.4.209}$$

Что, скажем, из (ii) не следует (12.4.209) доказывается примером, построенным в замечании 12.4.7:

$$X = \mathbb{R}^2, \quad \alpha(a,b) = a^1 \cdot b^1, \quad Y = \{(a,0);\ a \in \mathbb{R}\}$$

Здесь

$$\underbrace{Y}_{\substack{\| \\ \{(t,0);\ t\in\mathbb{R}\}}} \quad\cap\quad \underbrace{Y^\perp}_{\substack{\| \\ \{(0,t);\ t\in\mathbb{R}\}}} = \{0\},$$

однако

$$\underbrace{Y}_{\substack{\| \\ \{(t,0);\ t\in\mathbb{R}\}}} \ne \underbrace{(Y^\perp)^\perp}_{\substack{\| \\ \mathbb{R}^2}}.$$

А невозможность обратной импликации доказывается примером

$$X=\mathbb{R}^2, \quad \alpha(x,y)=x^1\cdot y^1-x^2\cdot y^2,$$
$$Y=\{y\in\mathbb{R}^2:\ y^1=y^2\}.$$

В нем

$$x\in Y^\perp \quad\Leftrightarrow\quad \forall t\in\mathbb{R}\quad x^1\cdot t-x^2\cdot t=0 \quad\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\quad x^1=x^2 \quad\Leftrightarrow\quad x\in Y$$

то есть

$$Y^\perp=Y.$$

Поэтому

$$Y^{\perp\perp}=Y,$$

но при этом

$$Y\cap Y^\perp=Y\ne\{0\}.$$

Этот пример показывает также, что *ограничение невырожденной формы не обязано быть невырожденной формой.* Действительно, здесь форма α невырождена, потому что если $x\ne 0$, то либо $x^1\ne 0$, и тогда для $y=(1;0)$ мы получим

$$\alpha(x,y)=x^1\cdot 1-x^2\cdot 0=x^1\ne 0,$$

либо $x^2\ne 0$, и тогда для $y=(0;1)$ мы получим

$$\alpha(x,y)=x^1\cdot 0-x^2\cdot 1=x^2\ne 0.$$

Но на подпространстве

$$Y=\{x\in\mathbb{R}^2:\ x^1=x^2\}$$

эта форма становится нулевой:

$$\alpha(x,y)=x^1\cdot y^1-\underbrace{x^2}_{\substack{\| \\ x^1}}\cdot\underbrace{y^2}_{\substack{\| \\ y^1}}=0, \qquad x,y\in Y.$$

Доказательство теоремы 12.4.13. Пусть $\alpha|_Y$ – ограничение формы α на подпространство Y. Заметим сразу цепочку

$$\operatorname{Ker}(\alpha|_Y)=\{x\in Y:\ \forall y\in Y\quad \alpha(x,y)=0\}=Y\cap\{x\in X:\ \forall y\in Y\quad \alpha(x,y)=0\}=Y\cap Y^\perp$$

из которой следует, что если $Y\cap Y^\perp=0$, то $\operatorname{Ker}(\alpha|_Y)=0$ и наоборот. Это в точности равносильность (ii) и (iii).

Нам остается доказать равносильность (i) и (ii). Импликация (i)$\Rightarrow$(ii) есть просто следствие определения разложения на подпространства на с.690. А обратная импликация доказывается так:

$$Y\cap Y^\perp=\{0\}$$
$$\Downarrow$$
$$\dim(Y+Y^\perp)=\underbrace{\dim(Y\cap Y^\perp)}_{\substack{\| \\ 0}}+\dim(Y+Y^\perp)=(12.2.62)=\dim Y+\dim Y^\perp\geqslant(12.4.208)\geqslant\dim X$$
$$\Downarrow$$
$$Y+Y^\perp\supseteq X$$
$$\Downarrow$$
$$Y+Y^\perp=X \qquad \leftarrow \substack{\text{вдобавок к этому, по-прежнему,} \\ Y\cap Y^\perp=\{0\}}$$
$$\Downarrow$$
$$X=Y\oplus Y^\perp$$

$\square$

- Проектор $P:X\to X$ называется *ортогональным*, если его ядро и образ являются ортогональными дополнениями друг для друга:

$$\operatorname{Ker}P^\perp=\operatorname{Im}P \quad\&\quad \operatorname{Ker}P=\operatorname{Im}P^\perp.$$

Теорема 12.4.14. *Для симметрической билинейной формы α на X и подпространства $Y \subseteq X$ следующие условия эквивалентны:*

(i) $Y^{\perp} \cap Y^{\perp\perp} = 0$,

(ii) *форма α невырождена на $Y^{\perp}$,*

(iii) *форма α невырождена на $Y^{\perp}$ и на Y,*

(iv) $X = Y \oplus Y^{\perp}$ *и* $Y = Y^{\perp\perp}$,

(v) *существует ортогональный проектор вдоль Y,*

(vi) *существует ортогональный проектор на Y.*

Доказательство. 1. Цепочка (i)$\Leftrightarrow$(ii)$\Leftrightarrow$(iii) следует из картинки:

$$\begin{array}{ccc}
Y^{\perp} \cap \overbrace{Y^{\perp\perp}}^{\substack{Y \\ \text{\rotatebox{90}{$\subseteq$}}}} = 0 & \Longrightarrow & Y^{\perp} \cap Y = 0 \\
\text{(теорема 12.4.13)}\ \Updownarrow & & \Updownarrow\ \text{(теорема 12.4.13)} \\
\alpha \text{ невырождена на } Y^{\perp} & & \alpha \text{ невырождена на } Y
\end{array}$$

2. (iii)$\Leftrightarrow$(iv). Пусть выполняется (iii). Тогда α невырождена на Y, и по теореме 12.4.13 мы сразу получаем равенство $X = Y \oplus Y^{\perp}$. Из него следует, в частности, что для любого вектора $x \in Y^{\perp\perp}$ существуют $y \in Y$ и $z \in Y^{\perp}$ такие, что $x = y + z$. Поэтому если справедливо (i), то

$$\underset{Y^{\perp\perp}}{\underset{\Cap}{x}} - \underset{\substack{\Cap \\ Y \\ \cap| \\ Y^{\perp\perp}}}{y} = \underset{Y^{\perp}}{\underset{\Cap}{z}} \in Y^{\perp\perp} \cap Y^{\perp} \overset{\text{(i)}}{=} 0 \quad \Longrightarrow \quad x = y \in Y.$$

Это доказывает включение $Y^{\perp\perp} \subseteq Y$, а значит, и равенство $Y^{\perp\perp} = Y$. Мы доказали импликацию (iii)$\Rightarrow$(iv).

Наоборот, если выполнено (iv), то из равенства $X = Y \oplus Y^{\perp}$ по теореме 12.4.13 сразу следует, что форма α невырождена на Y. С другой стороны, подстановкой $Y = Y^{\perp\perp}$ мы получаем равенство $X = Y^{\perp\perp} \oplus Y^{\perp}$, которое по той же теореме 12.4.13 означает, что форма α невырождена на $Y^{\perp}$ тоже. То есть доказана импликация (iii)$\Leftarrow$(iv).

3. (iv)$\Leftrightarrow$(v). Если выполняется (iv), то по свойству 3° на с.691, из $X = Y \oplus Y^{\perp}$ следует, что можно выбрать проектор P с ядром Y и образом $Y^{\perp}$:

$$\operatorname{Ker} P = Y, \qquad \operatorname{Im} P = Y^{\perp}.$$

При этом сразу получится, что $\operatorname{Ker} P^{\perp} = Y^{\perp} = \operatorname{Im} P$, а из $Y = Y^{\perp\perp}$ (второго условия в (iv)) мы получим $\operatorname{Im} P^{\perp\perp} = Y^{\perp\perp} = Y = \operatorname{Ker} P$. Таким образом, P является ортогональным проектором вдоль Y, и это доказывает импликацию (iv)$\Rightarrow$(v).

Наоборот, если P – какой-то ортогональный проектор вдоль Y, то это означает, что

$$Y = \operatorname{Ker} P, \qquad X = \operatorname{Ker} P \oplus \operatorname{Im} P, \qquad \operatorname{Ker} P^{\perp} = \operatorname{Im} P, \qquad \operatorname{Ker} P = \operatorname{Im} P^{\perp}.$$

Отсюда

$$X = \operatorname{Ker} P \oplus \operatorname{Im} P = Y \oplus Y^{\perp}, \qquad Y^{\perp\perp} = \operatorname{Ker} P^{\perp\perp} = \operatorname{Im} P^{\perp} = \operatorname{Ker} P = Y,$$

и это доказывает импликацию (iv)$\Leftarrow$(v).

4. По аналогии доказывается равносильность (iv)$\Leftrightarrow$(vi) (или здесь можно сослаться на очевидную эквивалентность (v) и (vi)). $\square$

Ортогональный базис.

- Базис $\mathbf{e} = (e_1, ..., e_n)$ пространства X называется *ортогональным* для симметрической билинейной формы α на X, если его элементы ортогональны друг другу относительно α:

$$\forall i \neq j \qquad e_i \perp e_j$$

Это означает, что в матрице $\alpha(\mathbf{e}, \mathbf{e})$ все элементы, лежащие вне диагонали, равны нулю, поэтому формула (12.3.132) в таком базисе принимает специальный вид:

– разложение билинейной формы α по ортогональному базису имеет вид

$$\alpha(x,y)=\sum_{i=1}^{n}\alpha(e_i,e_i)\cdot\left[\frac{x}{\mathbf{e}}\right]^i\cdot\left[\frac{y}{\mathbf{e}}\right]^i \qquad (12.4.210)$$

– и поэтому разложение соответствующей квадратичной формы q имеет вид

$$q(x)=\sum_{i=1}^{n}q(e_i)\cdot\left(\left[\frac{x}{\mathbf{e}}\right]^i\right)^2 \qquad (12.4.211)$$

Ортогональный базис $\mathbf{e}=(e_1,...,e_n)$ называется *нормированным* (часто говорят *ортонормированный базис* вместо “ортогональный нормированный базис”), если числа $\alpha(e_i,e_i)=q(e_i)$ принимают значения $\{-1;0;+1\}$.

Теорема 12.4.15. *Для любой симметрической билинейной формы α на произвольном конечномерном пространстве X существует ортогональный (если нужно, нормированный) базис.*

Доказательство. Проведем индукцию по n. При $n=1$ утверждение очевидно. Предполагаем, что оно доказано для всех пространств с размерностями до $n-1$ включительно, и рассмотрим случай размерности n. Если форма α тождественно нулевая, то доказывать опять нечего, поэтому будем считать, что она ненулевая. Из (12.4.202) следует, что тогда соответствующая квадратичная форма q тоже не может быть нулевой, то есть существует какой-то вектор $e_1\in X$, для которого

$$\alpha(e_1,e_1)=q(e_1)\neq 0$$

На линейной оболочке $\mathsf{span}\, e_1$ форма α невырождена, значит, по теореме 12.4.13, пространство X раскладывается в прямую сумму $\mathsf{span}\, e_1$ и $(\mathsf{span}\, e_1)^\perp$:

$$X=\mathsf{span}\, e_1\oplus(\mathsf{span}\, e_1)^\perp$$

Подпространство $(\mathsf{span}\, e_1)^\perp$ имеет размерность $n-1$, и по предположению индукции, в нем должен существовать ортогональный базис $e_2,...,e_n$ для формы α. Добавляя к нему вектор e_1, мы получим ортогональный базис для α на X.

Построенный ортогональный базис $\mathbf{e}$ можно сделать нормированным, если положить

$$e'_k=\begin{cases}\frac{1}{\sqrt{|q(e_k)|}}\cdot e_k, & q(e_k)\neq 0\\ e_k, & q(e_k)=0\end{cases}$$

– тогда мы получим

$$q(e'_k)=\begin{cases}\frac{1}{|q(e_k)|}\cdot q(e_k)\in\{-1;+1\}, & q(e_k)\neq 0\\ 0, & q(e_k)=0\end{cases}$$

то есть $\mathbf{e}'$ – нормированный базис. □

Теорема 12.4.16. *Для симметрической билинейной формы α на конечномерном векторном пространстве X следующие условия эквивалентны:*

(i) *форма α невырождена;*

(ii) *для какого-нибудь (и тогда для любого) ее ортогонального базиса $\mathbf{e}=(e_1,...,e_n)$ все числа $\alpha(e_i,e_i)=q(e_i)$ ненулевые:*

$$\alpha(e_i,e_i)=q(e_i)\neq 0,\qquad i=1,...,n; \qquad (12.4.212)$$

(iii) *для какого-нибудь (и тогда для любого) базиса $\mathbf{b}=(b_1,...,b_n)$ в X матрица $\alpha(b,b)$ разложения формы α невырождена:*

$$\det\alpha[b,b]=\det\begin{pmatrix}\alpha(b_1,b_1)&\dots&\alpha(b_1,b_n)\\ \dots&\dots&\dots\\ \alpha(b_n,b_1)&\dots&\alpha(b_n,b_n)\end{pmatrix}\neq 0 \qquad (12.4.213)$$

Доказательство. (i)$\Leftrightarrow$(ii). Пусть $\mathbf{e}=(e_1,...,e_n)$ – какой-нибудь ортогональный базис для α. Покажем, что условие (12.4.212) эквивалентно невырожденности формы α.

Предположим сначала, что $\alpha(e_j,e_j)=0$ для некоторого j. Тогда для любого $y\in X$ мы получаем

$$\alpha(e_j,y)=(12.4.210)=\sum_{i=1}^{n}\underbrace{\alpha(e_i,e_i)}_{\substack{\parallel\\ 0,\\ \text{при } i=j}}\cdot\underbrace{\left[\frac{e_1}{\mathbf{e}}\right]^i}_{\substack{\parallel\\ 0,\\ \text{при } i\neq j}}\cdot\left[\frac{y}{\mathbf{e}}\right]^i=0.$$

То есть $e_j\in\operatorname{Ker}\alpha$, и значит, α – вырожденная форма.

Наоборот, пусть все числа $\alpha(e_i,e_i)=q(e_i)$ ненулевые. Для произвольного ненулевого вектора $x\in X$ выберем индекс j такой, что

$$\left[\frac{x}{\mathbf{e}}\right]^j\neq 0.$$

Тогда, положив $y=e_j$, мы получим:

$$\alpha(x,y)=\alpha(x,e_j)=(12.4.210)=\sum_{i=1}^{n}\alpha(e_i,e_i)\cdot\left[\frac{x}{\mathbf{e}}\right]^i\cdot\underbrace{\left[\frac{e_j}{\mathbf{e}}\right]^i}_{\substack{\neq\\ 0,\\ \text{только если } i=j}}=\underbrace{\alpha(e_j,e_j)}_{\substack{\neq\\ 0}}\cdot\underbrace{\left[\frac{x}{\mathbf{e}}\right]^j}_{\substack{\neq\\ 0}}\cdot\underbrace{\left[\frac{e_j}{\mathbf{e}}\right]^j}_{\substack{\parallel\\ 1}}\neq 0.$$

Это верно для любого $x\neq 0$, значит форма α невырождена.

(ii)$\Leftrightarrow$(iii). Пусть далее $\mathbf{e}=(e_1,...,e_n)$ – какой-нибудь ортогональный базис для α, а $\mathbf{b}=(b_1,...,b_n)$ – произвольный базис пространства X. Определитель матрицы $\alpha(e,e)$ равен с точностью до знака произведению чисел $\alpha(e_i,e_i)=q(e_i)$,

$$\det\alpha[e,e]=\pm q(e_1)\cdot...\cdot q(e_n),$$

поэтому условие (12.4.212) эквивалентно условию

$$\det\alpha[e,e]\neq 0,$$

а оно в свою очередь эквивалентно условию

$$\det\alpha[b,b]=(12.3.135)=\det\left(\left[\frac{b}{e}\right]^{\top}\cdot\alpha[e,e]\cdot\left[\frac{b}{e}\right]\right)=\det\left[\frac{b}{e}\right]^{\top}\cdot\det\alpha[e,e]\cdot\det\left[\frac{b}{e}\right]\neq 0,$$

– здесь $\det\left[\frac{b}{e}\right]^{\top}=(12.3.155)=\det\left[\frac{b}{e}\right]\neq 0$, поскольку матрица $\left[\frac{b}{e}\right]$ перехода от одного базиса к другому всегда невырождена (см., например, (12.3.122)). $\square$

Теорема 12.4.17. *Если* $\mathbf{e}=(e_1,...,e_n)$ *– ортогональный базис для невырожденной симметрической билинейной формы* α*, то справедливы тождества:*

$$\left[\frac{x}{\mathbf{e}}\right]^i=\frac{\alpha(x,e_i)}{\alpha(e_i,e_i)},\qquad i=1,...,n; \tag{12.4.214}$$

$$x=\sum_{i=1}^{n}\frac{\alpha(x,e_i)}{\alpha(e_i,e_i)}\cdot e_i,\qquad x\in X; \tag{12.4.215}$$

$$\alpha(x,y)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\alpha(x,e_i)\cdot\alpha(y,e_i)}{\alpha(e_i,e_i)},\qquad x,y\in X. \tag{12.4.216}$$

Доказательство. Для произвольного вектора $x\in X$ получаем цепочку

$$x=(12.2.69)=\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{x}{\mathbf{e}}\right]^i\cdot e_i\quad\Longrightarrow\quad\alpha(x,e_j)=\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{x}{\mathbf{e}}\right]^i\cdot\underbrace{\alpha(e_i,e_j)}_{\substack{\neq\\ 0,\\ \text{только если } i=j}}=\left[\frac{x}{\mathbf{e}}\right]^j\cdot\alpha(e_j,e_j)\quad\Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow\quad\left[\frac{x}{\mathbf{e}}\right]^j=\frac{\alpha(x,e_j)}{\alpha(e_j,e_j)}.$$

Это доказывает (12.4.214), затем подстановкой получается (12.4.215)

$$x = (12.2.69) = \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{x}{\mathbf{e}}\right]^i \cdot e_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{\alpha(x,e_i)}{\alpha(e_i,e_i)} \cdot e_i$$

и (12.4.216):

$$\alpha(x,y) = (12.4.210) = \sum_{i=1}^{n} \alpha(e_i,e_i) \cdot \left[\frac{x}{\mathbf{e}}\right]^i \cdot \left[\frac{y}{\mathbf{e}}\right]^i = \sum_{i=1}^{n} \frac{\alpha(x,e_i)\cdot\alpha(y,e_i)}{\alpha(e_i,e_i)}$$

□

Ортогонализация Грама-Шмидта.

Теорема 12.4.18 (Грам, Шмидт). *Пусть α – симметрическая билинейная форма на векторном пространстве X и пусть $b = (b_1, ..., b_n)$ – базис в X, для которого все угловые миноры матрицы $\alpha(b,b)$ отличны от нуля:*

$$\forall k = 1, ..., n \qquad \det \begin{pmatrix} \alpha(b_1,b_1) & \dots & \alpha(b_1,b_k) \\ \dots & \dots & \dots \\ \alpha(b_k,b_1) & \dots & \alpha(b_k,b_k) \end{pmatrix} \neq 0 \qquad (12.4.217)$$

Тогда найдется (единственный) ортогональный для α базис $\mathbf{e} = (e_1, ..., e_n)$ в X такой, что всякий вектор e_k выражается через векторы $b_1, ..., b_k$, причем коэффициент при b_k равен 1:

$$e_k = \sum_{i=1}^{k-1} \lambda_k^i \cdot b_i + b_k \qquad (12.4.218)$$

Как следствие,

(i) матрица $\left[\frac{\mathbf{e}}{b}\right]$ перехода от базиса b к базису $\mathbf{e}$ является нижнетреугольной с единицами на диагонали,

$$\left[\frac{\mathbf{e}}{b}\right] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \lambda_1^1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \lambda_2^1 & \lambda_2^2 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_n^1 & \lambda_n^2 & \lambda_n^3 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

(ii) для всякого $k = 1, ..., n$ выполняется равенство определителей:

$$\det \begin{pmatrix} \alpha(b_1,b_1) & \alpha(b_1,b_2) & \dots & \alpha(b_1,b_k) \\ \alpha(b_2,b_1) & \alpha(b_2,b_2) & \dots & \alpha(b_2,b_k) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha(b_k,b_1) & \alpha(b_k,b_2) & \dots & \alpha(b_k,b_k) \end{pmatrix} =$$

$$= \det \begin{pmatrix} \alpha(e_1,e_1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha(e_2,e_2) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \alpha(e_k,e_k) \end{pmatrix} = q(e_1) \cdot ... \cdot q(e_k) \qquad (12.4.219)$$

Этот базис $\mathbf{e} = (e_1, ..., e_n)$ можно определить индуктивными соотношениями

$$e_1 = b_1, \qquad e_k = b_k - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\alpha(b_k,e_i)}{q(e_i)} \cdot e_i. \qquad (12.4.220)$$

! **12.4.9.** Условие (12.4.217) в теореме 12.4.18 нельзя заменить более простым условием невырожденности формы α. В этом нас убеждает следующий пример (рассматривавшийся выше в замечании 12.4.8). Пусть $X = \mathbb{R}^2$ и

$$\alpha(x,y) = x^1 \cdot y^1 - x^2 \cdot y^2.$$

На с.724 мы показали, что форма α невырождена. На базисе $b_1 = (1;1)$, $b_2 = (1;-1)$ ее матрица имеет вид

$$\alpha[b,b] = \begin{pmatrix} \alpha(b_1,b_1) & \alpha(b_1,b_k) \\ \alpha(b_k,b_1) & \alpha(b_k,b_k) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Определитель этой матрицы отличен от нуля, но первый угловой минор нулевой.

Доказательство. Покажем сначала, что из формулы (13.1.26) следуют условия (i) и (ii). Первое из них – просто переформулировка (13.1.26). Второе же следует из равенства (12.3.135). Поскольку, помимо прочего из (13.1.26) следует, что при любом $k = 1, ..., n$ линейные оболочки векторов $(e_1, ..., e_k)$ и $(b_1, ..., b_k)$ совпадают, $(e_1, ..., e_k)$ и $(b_1, ..., b_k)$ можно рассматривать как два базиса в подпространстве $\mathsf{span}(e_1, ..., e_k) = \mathsf{span}(b_1, ..., b_k) \subseteq X$, поэтому для них можно записать равенство (12.3.135):

$$\underbrace{\alpha((e_1,...,e_k),(e_1,...,e_k))}_{\substack{\text{диагональная матрица} \\ \text{с элементами } q(e_1),...,q(e_k) \\ \text{на диагонали}}} = \underbrace{\left[\frac{(e_1,...,e_k)}{(b_1,...,b_k)}\right]^{\perp}}_{\substack{\text{треугольная матрица} \\ \text{с единицами на диагонали}}} \cdot \alpha((b_1,...,b_k),(b_1,...,b_k)) \cdot \underbrace{\left[\frac{(e_1,...,e_k)}{(b_1,...,b_k)}\right]}_{\substack{\text{треугольная матрица} \\ \text{с единицами на диагонали}}}$$

Отсюда

$$\underbrace{\det \alpha((e_1,...,e_k),(e_1,...,e_k))}_{\substack{\| \\ q(e_1)\cdot ... \cdot q(e_n)}} = \underbrace{\det \left[\frac{(e_1,...,e_k)}{(b_1,...,b_k)}\right]^{\perp}}_{\substack{\| \\ 1}} \cdot \det \alpha((b_1,...,b_k),(b_1,...,b_k)) \cdot \underbrace{\det \left[\frac{(e_1,...,e_k)}{(b_1,...,b_k)}\right]}_{\substack{\| \\ 1}}$$

(определитель треугольной матрицы с единицами на диагонали всегда равен 1).

Остается проверить, что такой базис $\mathbf{e} = (e_1, ..., e_n)$ действительно существует и его можно определить индуктивными соотношениями (12.4.220). Поскольку в формулах (12.4.220) приходится делить на число $q(e_i)$ (и значит, нужно доказывать, что эти числа автоматически получаются ненулевыми), мы не можем сразу объявить формулы (12.4.220) определением базиса $\mathbf{e} = (e_1, ..., e_n)$, и приходится проводить индукцию по размерности n пространства X.

При $n = 1$ формулы (12.4.220) тривиально определяют базис $\mathbf{e}$ (из одного элемента), удовлетворяющий условию (13.1.26):

$$e_1 = b_1$$

Предположим далее, что для всех пространств размерности $n-1$ формулы (12.4.220) определяют ортогональный базис со свойством (13.1.26). Тогда, в частности, для подпространства $Y = \mathsf{span}\{b_1, ..., b_{n-1}\}$ нашего исходного пространства X они тоже определяют ортогональный базис $(e_1, ..., e_{n-1})$ в Y со свойством (13.1.26). Поскольку, как мы уже доказали, из (13.1.26) следует (12.4.219), все числа $q(e_i)$ должны быть ненулевыми:

$$0 \overset{\substack{(12.4.217) \\ \downarrow}}{\neq} \det \begin{pmatrix} \alpha(b_1,b_1) & \dots & \alpha(b_1,b_{n-1}) \\ \dots & \dots & \dots \\ \alpha(b_{n-1},b_1) & \dots & \alpha(b_{n-1},b_{n-1}) \end{pmatrix} = q(e_1)\cdot ... \cdot q(e_{n-1})$$

$$\Downarrow$$

$$\forall i = 1, ..., k \qquad q(e_i) \neq 0$$

Теперь уже вектор $e_n \in X$ можно определить формулой (12.4.220):

$$e_n = b_n - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\alpha(b_n, e_i)}{q(e_i)} \cdot e_i$$

Поскольку $e_n \in X \setminus Y$, система $(e_1, ..., e_{n-1}, e_n)$ будет базисом в X. Этот базис будет ортогональным, потому что e_n ортогонален всем остальным векторам $e_1, ..., e_{n-1}$: для любого $k = 1, ..., n-1$ имеем

$$\alpha(e_n, e_k) = \alpha\left(b_n - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\alpha(b_n, e_i)}{q(e_i)} \cdot e_i, e_k\right) = \alpha(b_n, e_k) - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\alpha(b_n, e_i)}{q(e_i)} \cdot \overbrace{\alpha(e_i, e_k)}^{\substack{\text{при } i \neq k \\ 0 \\ \|}} =$$

$$= \alpha(b_n, e_k) - \frac{\alpha(b_n, e_k)}{q(e_k)} \cdot \underbrace{\alpha(e_k, e_k)}_{\substack{\| \\ q(e_k)}} = 0$$

$\square$

Знакоопределенные квадратичные формы и критерий Сильвестра.

- Квадратичная форма q называется
  - *неотрицательной* , если она неотрицательна при любых значениях аргумента:
  $$q(x) \geqslant 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n$$
  - *неположительная* , если она неположительна при любых значениях аргумента:
  $$q(x) \leqslant 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n$$
  - *положительной* (или положительно определенной) , если она положительна при любых ненулевых значениях аргумента:
  $$q(x) > 0 \qquad \forall x \neq 0$$
  - *отрицательной* (или отрицательно определенной) , если она отрицательна при любых ненулевых значениях аргумента,
  $$q(x) < 0 \qquad \forall x \neq 0$$
  - *знакоопределенной*, если $q(x)$ либо положительная, либо отрицательная;
  - *формой неопределенного знака*, если $q(x)$ не является ни положительной, ни отрицательной.

$\diamond$ **12.4.10.** Квадратичная форма на $\mathbb{R}_2$

$$p(x, y) = x^2 + y^2$$

является, очевидно, положительно определенной. Та же функция, но взятая с противоположным знаком

$$-p(x, y) = -x^2 - y^2$$

будет отрицательно определенной квадратичной формой. А формы

$$q(x, y) = x^2 - y^2,$$

$$r(x, y) = x \cdot y,$$

имеют неопределенный знак (потому что в некоторых точках принимают положительные значения, а в других – отрицательные).

Теорема 12.4.19 (критерий Сильвестра). *Пусть q – квадратичная форма на X и $Q = (Q_{i,j})$ – ее матрица в каком-нибудь базисе $(b_1, ..., b_n)$*

$$Q_{i,j} = \frac{q(b_i + b_j) - q(b_i) - q(b_j)}{2}$$

Тогда

(i) q положительно определена тогда и только тогда, когда все главные миноры матрицы Q положительны:

$$Q_{1,1} > 0, \quad \begin{vmatrix} Q_{1,1} & Q_{1,2} \\ Q_{2,1} & Q_{2,2} \end{vmatrix} > 0, \quad \begin{vmatrix} Q_{1,1} & Q_{1,2} & Q_{1,3} \\ Q_{2,1} & Q_{2,2} & Q_{2,3} \\ Q_{3,1} & Q_{3,2} & Q_{3,3} \end{vmatrix} > 0, \quad ..., \quad \begin{vmatrix} Q_{1,1} & ... & Q_{1,n} \\ ... & ... & ... \\ Q_{n,1} & ... & Q_{n,n} \end{vmatrix} > 0 \tag{12.4.221}$$

(ii) *q отрицательно определена тогда и только тогда, когда знаки главных миноров матрицы Q чередуются начиная с минуса:*

$$Q_{1,1} < 0, \quad \begin{vmatrix} Q_{1,1} & Q_{1,2} \\ Q_{2,1} & Q_{2,2} \end{vmatrix} > 0, \quad \begin{vmatrix} Q_{1,1} & Q_{1,2} & Q_{1,3} \\ Q_{2,1} & Q_{2,2} & Q_{2,3} \\ Q_{3,1} & Q_{3,2} & Q_{3,3} \end{vmatrix} < 0, \quad ..., \quad (-1)^n \begin{vmatrix} Q_{1,1} & ... & Q_{1,n} \\ ... & ... & ... \\ Q_{n,1} & ... & Q_{n,n} \end{vmatrix} > 0 \tag{12.4.222}$$

Доказательство. Обозначим через α билинейную форму, соответствующую q. Тогда $Q = \alpha[b, b]$ – матрица формы α в базисе b.

1. Докажем сначала (i). Если все главные миноры матрицы $Q = \alpha(b, b)$ положительны, то они ненулевые, и значит по теореме 12.4.18 существует ортогонализация $\mathbf{e} = (e_1, ..., e_n)$ Грама-Шмидта базиса $b = (b_1, ..., b_n)$. Формулы (12.4.219) и (12.4.221) при этом вместе дадут условие:

$$\forall k = 1, ..., n \qquad \det \begin{pmatrix} \alpha(b_1, b_1) & \alpha(b_1, b_2) & \dots & \alpha(b_1, b_k) \\ \alpha(b_2, b_1) & \alpha(b_2, b_2) & \dots & \alpha(b_2, b_k) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha(b_k, b_1) & \alpha(b_k, b_2) & \dots & \alpha(b_k, b_k) \end{pmatrix} = q(e_1) \cdot ... \cdot q(e_k) > 0. \tag{12.4.223}$$

Отсюда следует, что все числа $q(e_1), ..., q(e_n)$ положительны, и, по формуле (12.4.211), при любом $x \neq 0$ получаем:

$$q(x) = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{q(e_i)}_{\substack{\text{здесь все числа} \\ \text{положительны}}} \cdot \underbrace{\left(\left[\frac{x}{\mathbf{e}} \right]^i \right)^2}_{\substack{\text{все эти числа} \\ \text{неотрицательны,} \\ \text{и хотя бы одно} \\ \text{из них ненулевое}}} > 0$$

Наоборот, если квадратичная форма q положительно определена на X, то на любом подпространстве вида $\mathsf{span}(b_1, ..., b_k)$ она тоже положительно определена, и значит, невырождена. Значит, билинейная форма α тоже невырождена на $\mathsf{span}(b_1, ..., b_k)$, и по формуле (12.4.213), мы получаем

$$\det \alpha((b_1, ..., b_k), (b_1, ..., b_k)) \neq 0$$

То есть, главные миноры матрицы $Q = \alpha(b, b)$ ненулевые, и снова можно применить ортогонализацию Грама-Шмидта. В новом ортогональном базисе $\mathbf{e} = (e_1, ..., e_n)$ квадратичная форма q примет вид (12.4.211),

$$q(x) = \sum_{i=1}^{n} q(e_i) \cdot \left(\left[\frac{x}{\mathbf{e}} \right]^i \right)^2,$$

и, поскольку она положительно определена, все числа $q(e_i)$ должны быть положительны. Из этого следуют неравенства (12.4.223), и вместе с ними, неравенства (12.4.221).

2. Теперь (ii) становится следствием (i). Отрицательная определенность формы q эквивалентна положительной определенности формы $-q$, и в силу (i), это эквивалентно тому, что главные миноры матрицы $-\alpha(b, b)$ положительны:

$$\forall k = 1, ..., n \qquad \underbrace{\det \Big(-\alpha\big((b_1, ..., b_k), (b_1, ..., b_k)\big) \Big)}_{\substack{\| \\ (-1)^k \cdot \det \alpha\big((b_1, ..., b_k), (b_1, ..., b_k)\big)}} > 0$$

Но это как раз условие чередования знаков (12.4.222). □

§ 5 Кососимметрические (внешние) формы и поливекторы

(a) Внешние формы $\Lambda_m(X)$

Теорема 12.5.1. *Для полилинейной формы $\omega : X^m \to \mathbb{R}$ следующие условия эквивалентны:*

(i) *при любой перестановке аргументов знак формы меняется на знак этой перестановки:*

$$\omega(x_{\sigma(1)}, ..., x_{\sigma(m)}) = \mathrm{sgn}(\sigma) \cdot \omega(x_1, ..., x_m), \qquad \sigma \in \mathfrak{S}_m, \qquad x_1, ..., x_m \in X. \tag{12.5.224}$$

(ii) *при любой транспозиции аргументов знак формы меняется на противоположный:*

$$\omega(x_1,...,x_i,...,x_j,...,x_m)=-\omega(x_1,...,x_j,...,x_i,...,x_m),\qquad x_1,...,x_m\in X. \tag{12.5.225}$$

(iii) *при любой транспозиции соседних аргументов знак формы меняется на противоположный:*

$$\omega(x_1,...,x_i,x_{i+1},...,x_m)=-\omega(x_1,...,x_{i+1},x_i,...,x_m),\qquad x_1,...,x_m\in X. \tag{12.5.226}$$

(iv) *форма ω обнуляется на последовательностях, в которых какие-то два аргумента повторяются:*

$$\big(\exists i\ne j\quad x_i=x_j\big)\quad\Longrightarrow\quad \omega(x_1,...,x_i,...,x_j,...,x_m)=0 \tag{12.5.227}$$

(v) *форма ω обнуляется на последовательностях, в которых какие-то два соседних аргумента повторяются:*

$$\big(\exists i\quad x_i=x_{i+1}\big)\quad\Longrightarrow\quad \omega(x_1,...,x_m)=0 \tag{12.5.228}$$

- Полилинейная форма ω на векторном пространстве X

$$\omega:\underbrace{X\times...\times X}_{m\text{ множителей}}\to\mathbb{R}$$

называется *кососимметрической*, или *внешней* формой степени m, если она удовлетворяет условиям (i)-(iv) теоремы 12.5.1. Множество всех внешних форм степени m на X обозначается $\Lambda_m(X)$. Ясно, что это будет векторное пространство относительно поточечных алгебраических операций.

Доказательство. 1. (i)$\Leftrightarrow$(ii). Импликация (i)$\Rightarrow$(ii) очевидна, а обратная импликация (i)$\Leftarrow$(ii) следует из теоремы 12.1.12 (о разложении любой перестановки в комбинацию транспозиций).

2. (ii)$\Leftrightarrow$(iii). Импликация (ii)$\Rightarrow$(iii) очевидна, а обратная импликация (ii)$\Leftarrow$(iii) следует из теоремы 12.1.13 (о разлодении любой транспозиции в композицию транспозиций соседних элементов).

3. (ii)$\Leftrightarrow$(iv). Докажем сначала (ii)$\Rightarrow$(iv). Пусть выполнено (ii). Рассмотрим последовательность аргументов $x_1,...,x_m$, в которой $x_i=x_j$ для некоторых $i\ne j$. Тогда

$$\omega(x_1,...,x_i,...,x_i,...,x_m)=\omega(x_1,...,x_i,...,x_j,...,x_m)=\\=-\omega(x_1,...,x_j,...,x_i,...,x_m)=-\omega(x_1,...,x_i,...,x_i,...,x_m).$$

(во втором равенстве мы применяем транспозицию, меняющую местами аргументы с номерами i и j). Это возможно только если $\omega(x_1,...,x_i,...,x_i,...,x_m)=0$.

Обратная импликация (iv)$\Rightarrow$(ii) доказывается так. Пусть выполнено (iv). В последовательности аргументов $x_1,...,x_m$ зафиксируем все векторы, кроме x_i и x_j, и рассмотрим вспомогательную форму

$$\psi(x_i,x_j)=\omega(x_1,...,x_i,...,x_j,...,x_m).$$

Это будет билинейная форма, причем из (12.5.228) будет следовать тождество

$$\psi(y,y)=0,\qquad y\in X.$$

Из него будет следовать такая цепочка:

$$0=\psi(x_i+x_j,x_i+x_j)=\underbrace{\psi(x_i,x_i)}_{\substack{\|\\0}}+\psi(x_j,x_i)+\psi(x_i,x_j)+\underbrace{\psi(x_j,x_j)}_{\substack{\|\\0}}=\\=\psi(x_j,x_i)+\psi(x_i,x_j)$$

$$\Downarrow$$

$$\psi(x_i,x_j)=-\psi(x_j,x_i).$$

$$\Downarrow$$

$$\omega(x_1,...,x_i,...,x_j,...,x_m)=-\omega(x_1,...,x_j,...,x_i,...,x_m).$$

4. Точно так же доказывается эквивалентность (iii)$\Leftrightarrow$(v). $\square$

Конкатенация функционалов. Рабочим примером внешней формы является следующая конструкция.

- Пусть $\eta^1, ..., \eta^m$ – последовательность линейных функционалов на вектороном пространстве X. Их *конкатенацией* называется полилинейная форма $\eta^1 \wedge ... \wedge \eta^m : X^m \to \mathbb{R}$, определенная формулой

$$(\eta^1 \wedge \dots \wedge \eta^m)(x_1, \dots, x_m) = \det \begin{pmatrix} \eta^1(x_1) & \dots & \eta^1(x_m) \\ \dots & \dots & \dots \\ \eta^m(x_1) & \dots & \eta^m(x_m) \end{pmatrix}, \qquad \eta^i \in X^*. \qquad (12.5.229)$$

В этой форме транспозиция аргументов соответствует транспозиции столбцов матрицы, и при такой операции определитель, а вместе с ним и форма, меняют знак. Поэтому такая форма является внешей формой степени m на X:

$$\eta^1 \wedge \dots \wedge \eta^m \in \Lambda_m(X).$$

Свойства конкатенации функционалов:

1°. *При перестановке элементов последовательности $\eta^1, ..., \eta^m$ знак конкатенации меняется на знак перестановки:*

$$\eta^{\sigma(1)} \wedge ... \wedge \eta^{\sigma(m)} = \operatorname{sgn}(\sigma) \cdot \eta^1 \wedge ... \wedge \eta^m, \qquad \sigma \in \mathfrak{S}_m. \qquad (12.5.230)$$

2°. *Если в последовательности $\eta^1, ..., \eta^m$ какой-то элемент η^i встречается дважды, то конкатенация этих функционалов равна нулю:*

$$\eta^1 \wedge ... \wedge \eta^i \wedge ... \wedge \eta^i \wedge ... \wedge \eta^m = 0. \qquad (12.5.231)$$

3°. *При умножении какого-нибудь функционала η^i на скаляр λ конактенация умножается на скаляр:*

$$\eta^1 \wedge ... \wedge \lambda \cdot \eta^i \wedge ... \wedge \eta^m = \lambda \cdot \eta^1 \wedge ... \wedge \eta^i \wedge ... \wedge \eta^m. \qquad (12.5.232)$$

4°. *При замене какого-нибудь функционала η^i на сумму функционалов $\alpha + \beta$ конактенация заменяется на сумму конкатенаций с подставленными α и β вместо η^i:*

$$\eta^1 \wedge ... \wedge (\alpha + \beta) \wedge ... \wedge \eta^m = \eta^1 \wedge ... \wedge \alpha \wedge ... \wedge \eta^m + \eta^1 \wedge ... \wedge \beta \wedge ... \wedge \eta^m \qquad (12.5.233)$$

5°. *Конкатенация $\eta^1 \wedge \dots \wedge \eta^m$ тогда и только тогда не равна нулю, когда функционалы $\eta^1, \dots, \eta^m$ линейно независимы.*

6°. *Если $n = \dim X$ и $\eta^1, \dots, \eta^n$ – линейно независимая последовательность функционалов на X, то конкатенация $\eta^1 \wedge \dots \wedge \eta^n$ обращается в нуль только на линейно зависимых последовательностях векторов $x_1, \dots, x_n$.*

Доказательство. 1. Первое утверждение следует их свойства кососимметричности определителя (12.3.142) (при перестановек строк определитель меняет знак).

2. Если в последовательности $\eta^1, ..., \eta^m$ имеется два одинаковых элемента $\eta^i = \eta^j$, то при их перестановке форма $\eta^1 \wedge ... \wedge \eta^m$, понятное дело, не может измениться. Но с другой стороны, по доказанному свойству (12.5.230) она должна поменять знак:

$$\eta^1 \wedge ... \wedge \eta^i \wedge ... \wedge \eta^i \wedge \eta^m = -\eta^1 \wedge ... \wedge \eta^i \wedge ... \wedge \eta^i \wedge \eta^m.$$

Такое возможно только если она нулевая:

$$\eta^1 \wedge ... \wedge \eta^i \wedge ... \wedge \eta^i \wedge \eta^m = 0$$

3 и 4. Утверждения 3° и 4° следуют из соответствующего свойства определителя (12.3.142).

5. Если функционалы $\eta^1, \dots, \eta^m$ линейно независимы, то их можно дополнить до базиса $\eta^1, \dots, \eta^m, ..., \eta^n$ в пространстве X. Тогда можно взять сопряженный базис в X,

$$x_i = \left[\frac{1}{\eta}\right]_i,$$

для которого

$$\eta^j(x_i) = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases},$$

и поэтому

$$(\eta^1 \wedge \dots \wedge \eta^m)(x_1, \dots, x_m) = \det \begin{pmatrix} \eta^1(x_1) & \dots & \eta^1(x_m) \\ \dots & \dots & \dots \\ \eta^m(x_1) & \dots & \eta^m(x_m) \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} = 1.$$

Наоборот, пусть функционалы $\eta^1, \dots, \eta^m$ линейно зависимы, то есть какой-то из них выражается как линейная комбинация остальных:

$$\eta^j = \sum_{i \neq j} \lambda_i \cdot \eta^i.$$

Тогда

$$\eta^1 \wedge \dots \wedge \eta^m = \eta^1 \wedge ... \wedge \eta^j \wedge ... \wedge \eta^m = \eta^1 \wedge ... \wedge \left(\sum_{i \neq j} \lambda_i \cdot \eta^i \right) \wedge ... \wedge \eta^m =$$

$$= \sum_{i \neq j} \lambda_i \cdot \underbrace{\eta^1 \wedge ... \wedge \eta^i \wedge ... \wedge \eta^m}_{\substack{\text{здесь элемент } \eta^i \\ \text{встречается дважды}}} = (12.5.231) = 0.$$

6. Пусть $m = n = \dim X$, $\eta^1, ..., \eta^n$ – линейно независимая система функционалов на X, и $x_1, ..., x_n \in X$. Тогда равенство нулю формы $\eta^1 \wedge ... \wedge \eta^n$ на последовательности векторов $x_1, ..., x_n$,

$$(\eta^1 \wedge \dots \wedge \eta^n)(x_1, \dots, x_n) = \det \begin{pmatrix} \eta^1(x_1) & \dots & \eta^1(x_n) \\ \dots & \dots & \dots \\ \eta^n(x_1) & \dots & \eta^n(x_n) \end{pmatrix} = 0$$

по правилу Крамера (теорема 12.3.16) эквивалентно линейной зависимости столбцов матрицы в определителе

$$\lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} \eta^1(x_1) \\ \dots \\ \eta^n(x_1) \end{pmatrix} + \dots + \lambda_n \cdot \begin{pmatrix} \eta^1(x_n) \\ \dots \\ \eta^n(x_n) \end{pmatrix} = 0$$

(для некоторой последовательности коэффициентов λ_i, из которых не все равны нулю). Это в свобю очередь эквивалентно системе

$$\begin{cases} \lambda_1 \cdot \eta^1(x_1) + ... + \lambda_n \cdot \eta^1(x_n) = 0 \\ \dots \\ \lambda_1 \cdot \eta^n(x_1) + ... + \lambda_n \cdot \eta^n(x_n) = 0 \end{cases}$$

и системе

$$\begin{cases} \eta^1\Big(\lambda_1 \cdot x_1 + ... + \lambda_n \cdot x_n\Big) = 0 \\ \dots \\ \eta^n\Big(\lambda_1 \cdot x_1 + ... + \lambda_n \cdot x_n\Big) = 0 \end{cases}$$

Здесь в скобках стоит один и тот же вектор, а функционалы $\eta^1, ..., \eta^n$ образуют базис в X^*. Отсюда следует, что вектор в их аргументах равен нулю

$$\lambda_1 \cdot x_1 + ... + \lambda_n \cdot x_n = 0$$

То есть векторы $x_1, ..., x_n$ линейно зависимы. $\square$

Альтернация. Для всякой полилинейной формы $\omega : X^n \to \mathbb{R}$ ее *альтернацией* называется полилинейная форма

$$\mathsf{Alt}\, \omega(x_1, ..., x_m) = \frac{1}{m!} \cdot \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_m} \operatorname{sgn}(\sigma) \cdot \omega(x_{\sigma(1)}, ..., x_{\sigma(m)}) \tag{12.5.234}$$

Отображение, которое каждой форме ω ставит в соответствие ее альтернацию

$$\omega \mapsto \mathsf{Alt}\,\omega$$

называется *альтернированием.*

Свойства альтернирования:

1° *Линейность:*
$$\mathsf{Alt}(\lambda\cdot\omega+\mu\cdot\pi)=\lambda\cdot\mathsf{Alt}\,\omega+\mu\cdot\mathsf{Alt}\,\pi,\qquad \omega\in L_m(X),$$

2° *Сохранение знака перестановки:*

$$\mathsf{Alt}\,\omega(x_{\sigma(1)},...,x_{\sigma(m)})=\operatorname{sgn}(\sigma)\cdot\mathsf{Alt}\,\omega(x_1,...,x_m),\quad \omega\in L_m(X),\quad \sigma\in\mathfrak{S}_m,\quad x_1,...,x_m\in X. \tag{12.5.235}$$

3° *Всякую полилинейную форму операция альтернирования превращает во внешнюю,*

$$\forall\omega\in L_m(X)\qquad \mathsf{Alt}\,\omega\in\varLambda_m(X), \tag{12.5.236}$$

и при этом всякую внешнюю форму она не меняет:

$$\forall\omega\in\varLambda_m(X)\qquad \mathsf{Alt}\,\omega=\omega. \tag{12.5.237}$$

4° *Идемпотентность: при вторичном применении альтернирование не меняет результат*

$$\mathsf{Alt}(\mathsf{Alt}\,\omega)=\mathsf{Alt}\,\omega,\quad \omega\in L_m(X). \tag{12.5.238}$$

Доказательство. 1. Линейность очевидна.

2. Для всякой полилинейной формы ω и любой перестановки $\sigma\in\mathfrak{S}_m$ мы получим:

$$\mathsf{Alt}\,\omega(x_{\sigma(1)},...,x_{\sigma(m)})=\frac{1}{m!}\sum_{\pi\in\mathfrak{S}_m}\operatorname{sgn}(\pi)\cdot\omega(x_{\pi(\sigma(1))},...,x_{\pi(\sigma(m))})=\left|\begin{matrix}\sigma\circ\pi=\tau\\ \pi=\sigma^{-1}\circ\tau\end{matrix}\right|=$$
$$=\frac{1}{m!}\sum_{\tau\in\mathfrak{S}_m}\operatorname{sgn}(\sigma^{-1}\circ\tau)\cdot\omega(x_{\tau(1)},...,x_{\tau(m)})=(12.1.30),(12.1.31)=$$
$$=\frac{\operatorname{sgn}(\sigma)}{m!}\sum_{\tau\in\mathfrak{S}_m}\operatorname{sgn}(\tau)\cdot\omega(x_{\tau(1)},...,x_{\tau(m)})=\operatorname{sgn}(\sigma)\cdot\mathsf{Alt}\,\omega(x_1,...,x_m).$$

3. Если $\omega\in L_m(X)$, то равенство (12.5.235) означает, что форма $\mathsf{Alt}\,\omega$ является внешней. Если же $\omega\in\varLambda_m(X)$, то

$$\mathsf{Alt}\,\omega(x_1,...,x_m)=\frac{1}{m!}\sum_{\pi\in\mathfrak{S}_m}\operatorname{sgn}(\pi)\cdot\omega(x_{\pi(1)},...,x_{\pi(m)})=$$
$$=\frac{1}{m!}\sum_{\pi\in\mathfrak{S}_m}\underbrace{\operatorname{sgn}(\pi)\cdot\operatorname{sgn}(\pi)}_{\substack{\parallel\\ 1}}\cdot\omega(x_1,...,x_m)=\frac{1}{m!}\sum_{\pi\in\mathfrak{S}_m}\omega(x_1,...,x_m)=\omega(x_1,...,x_m).$$

4. Тождество (12.5.238) следует из (12.5.236) и (12.5.237):

$$\omega\in L_m(X)\quad\overset{(12.5.236)}{\Longrightarrow}\quad\mathsf{Alt}\,\omega\in\varLambda_m(X)\quad\overset{(12.5.237)}{\Longrightarrow}\quad\mathsf{Alt}(\mathsf{Alt}\,\omega)=\mathsf{Alt}\,\omega.$$

□

◇ **12.5.1.** Если $\eta^1,\dots,\eta^m$ – произвольная последовательность длины m линейных функционалов на X, то альтернацией формы $\eta^1\boxtimes\dots\boxtimes\eta^m$ является форма $\frac{1}{m!}\cdot\eta^1\wedge\dots\wedge\eta^m$:

$$\mathsf{Alt}(\eta^1\boxtimes\dots\boxtimes\eta^m)=\frac{1}{m!}\cdot\eta^1\wedge\dots\wedge\eta^m \tag{12.5.239}$$

Доказательство.

$$\mathsf{Alt}(\eta^1\boxtimes...\boxtimes\eta^m)(x_1,...,x_m)= \\ =\frac{1}{m!}\cdot\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_m}\operatorname{sgn}(\sigma)\cdot\eta^1\boxtimes...\boxtimes\eta^m(x_{\sigma(1)},...,x_{\sigma(m)})= \\ =(12.2.100)= \\ =\frac{1}{m!}\cdot\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_m}\operatorname{sgn}(\sigma)\cdot\eta^1(x_{\sigma(1)})\cdot...\cdot\eta^m(x_{\sigma(m)})= \\ =(12.3.138)= \\ =\frac{1}{m!}\cdot\det\begin{pmatrix}\eta^1(x_1) & \dots & \eta^1(x_m)\\ \dots & \dots & \dots \\ \eta^m(x_1) & \dots & \eta^m(x_m)\end{pmatrix}= \\ =(12.5.229)=\frac{1}{m!}\cdot(\eta^1\wedge\dots\wedge\eta^m)(x_1,\dots,x_m)$$

□

Базис в пространстве внешних форм $\Lambda_m(X)$. Напомним, что на с.671 мы определили отображение $\tau_X:\{1,...,n\}\to X$ нумерации элементов линейно упорядоченного конечного множества.

- Пусть X – векторное пространство, и пусть $x=(x_1,...,x_n)$ – строка длины $n\in\mathbb{N}$ из элементов X. Каждому подмножеству $M\subseteq\{1,...,n\}$ поставим в соответствие числовую строку, называемую *ограничением строки* $x=(x_1,...,x_n)$ на множество M,

$$x_M=(x_{\tau_M(1)},...,x_{\tau_M(m)}), \tag{12.5.240}$$

где m – число элементов в M, а $\tau_M:\{1,...,m\}\to M$ возрастаяющая нумерация элементов M. Если теперь $\varphi\in\Lambda_m(X)$ – внешняя форма степени m на X, то для заданной строки $x=(x_1,...,x_n)$ (длина которой n необязательно совпадает с m, и может быть больше) и для всякого подмножества $M\subseteq\{1,...,n\}$ мощности m можно найти значение формы φ на строке x_M:

$$\varphi(x_M)=\varphi(x_{\tau_M(1)},...,x_{\tau_M(m)}), \tag{12.5.241}$$

- Пусть X – векторное пространство и пусть $\eta^1,...,\eta^n$ – некая фиксированная последовательность линейных функционалов на X. Каждому подмножеству $M\subseteq\{1,...,n\}$ поставим в соответствие внешнюю форму на X

$$\eta^M=\eta^{\tau_M(1)}\wedge...\wedge\eta^{\tau_M(m)} \tag{12.5.242}$$

где m – число элементов в M, а $\tau_M:\{1,...,m\}\to M$ возрастающая нумерация элементов M (определенная на с.671). Очевидно,

$$\eta^M\in\Lambda_m(X).$$

- Если $A:X\to Y$ – линейный оператор, то символ A^m пусть обозначает оператор

$$A^m:X^m\to Y^m,\qquad A^m(x_1,...,x_m)=(Ax_1,...,Ax_m),\quad x_i\in X$$

и для него мы будем использовать обозначение

$$A^m(x_M)=(Ax)_M,\qquad M\subseteq\{1,...,m\}. \tag{12.5.243}$$

Лемма 12.5.2. *Пусть $a=(a_1,...,a_n)$ – базис в X, и $\frac{1}{a}=\left(\left[\frac{1}{a}\right]^1,...,\left[\frac{1}{a}\right]^n\right)$ – сопряженный ему базис в X^*. Тогда для любых двух подмножеств $M\subseteq\{1,...,n\}$ и $L\subseteq\{1,...,n\}$, одинаковой мощности,*

$$\operatorname{card}M=m=\operatorname{card}L,$$

справедливо равенство

$$\left[\frac{1}{a}\right]^M(a_L)=\begin{cases}1, & L=M\\ 0, & L\neq M\end{cases}. \tag{12.5.244}$$

Доказательство. Прежде всего,

$$\left[\frac{1}{a}\right]^M(a_L)=\left[\frac{1}{a}\right]^{\tau_M(1)}\wedge...\wedge\left[\frac{1}{a}\right]^{\tau_M(m)}(a_{\tau_L(1)},...,a_{\tau_L(m)})=(12.5.229)= \\ =\det\begin{pmatrix}\left[\frac{1}{a}\right]^{\tau_M(1)}(a_{\tau_L(1)}) & \dots & \left[\frac{1}{a}\right]^{\tau_M(1)}(a_{\tau_L(m)})\\ \dots & \dots & \dots\\ \left[\frac{1}{a}\right]^{\tau_M(m)}(a_{\tau_L(1)}) & \dots & \left[\frac{1}{a}\right]^{\tau_M(m)}(a_{\tau_L(m)})\end{pmatrix}.$$

Теперь предположим, что $L = M$. Тогда последовательности τ_M и τ_L совпадают

$$\tau_M(s) = \tau_L(s), \qquad s = 1, ..., m,$$

и, по определению сопряженного базиса,

$$\left[\frac{1}{a}\right]^{\tau_M(i)}(a_{\tau_M(j)}) = \left[\frac{1}{a}\right]^{\tau_M(i)}(a_{\tau_M(j)}) = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases},$$

Поэтому матрица под знаком определителя становится единичной:

$$\det \begin{pmatrix} \left[\frac{1}{a}\right]^{\tau_M(1)}(a_{\tau_M(1)}) & \dots & \left[\frac{1}{a}\right]^{\tau_M(1)}(a_{\tau_M(m)}) \\ \dots & \dots & \dots \\ \left[\frac{1}{a}\right]^{\tau_M(m)}(a_{\tau_M(1)}) & \dots & \left[\frac{1}{a}\right]^{\tau_M(m)}(a_{\tau_M(m)}) \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} = 1$$

Наоборот, если $L \neq M$, то найдется какой-то элемент $\tau_M(i) \in M$, которого нет среди элементов $\tau_L(1), ..., \tau_L(m) \in L$. Это означает, что в матрице под определителем целая строка с индексом $\tau_M(i)$ должна быть нулевой, и значит определитель тоже будет нулевым. □

Теорема 12.5.3 (о базисе в $\Lambda_m(X)$)**.** *Пусть $\eta^1, ..., \eta^n$ – базис в сопряженном пространстве X^*. Тогда для всякого числа $m \leqslant n$ внешние формы* (12.5.242)

$$\eta^M = \eta^{\tau_M(1)} \wedge \eta^{\tau_M(2)} \wedge ... \wedge \eta^{\tau_M(m)} \tag{12.5.245}$$

где M пробегает всевозможные подмножества в $\{1, ..., n\}$ мощности m, образуют базис в пространстве $\Lambda_m(X)$. В частном случае когда $\eta^1 = \left[\frac{1}{a}\right]^1, ..., \eta^n = \left[\frac{1}{a}\right]^n$ – сопряженный базис к некоторому базису $a = (a_1, ..., a_n)$ в X, разложение всякой внешней формы по базису (12.5.245) *имеет вид*[13]

$$\omega = \sum_{\substack{M \subseteq \{1,...,n\}: \\ \operatorname{card} M = m}} \omega(a_M) \cdot \left[\frac{1}{a}\right]^M \tag{12.5.246}$$

(суммирование ведется по всевозможным подмножествам $M \subseteq \{1, ..., n\}$ мощности m).

Доказательство. 1. Докажем сначала линейную независимость. Пусть для некоторых λ_M выполняется равенство

$$0 = \sum_{M \subseteq \{1,...,n\}} \lambda_M \cdot \eta^M = \sum_{M \subseteq \{1,...,n\}} \lambda_M \cdot \eta^{\tau_M(1)} \wedge ... \wedge \eta^{\tau_M(m)} = (12.5.239) =$$

$$= \sum_{M \subseteq \{1,...,n\}} \lambda_M \cdot m! \cdot \mathsf{Alt}(\eta^{\tau_M(1)} \boxtimes ... \boxtimes \eta^{\tau_M(m)}) = \sum_{M \subseteq \{1,...,n\}} \lambda_M \cdot \sum_{\rho \in \mathfrak{S}_m} \operatorname{sgn}(\rho) \cdot \eta^{\tau_M\left(\rho(1)\right)} \boxtimes ... \boxtimes \eta^{\tau_M\left(\rho(m)\right)} =$$

$$= \sum_{M \subseteq \{1,...,n\}} \sum_{\rho \in \mathfrak{S}_m} \operatorname{sgn}(\rho) \cdot \lambda_M \cdot \eta^{\tau_M\left(\rho(1)\right)} \boxtimes ... \boxtimes \eta^{\tau_M\left(\rho(m)\right)} \tag{12.5.247}$$

Заметим, что при любом выборе множеств $M \subseteq \{1, ..., n\}$ и $L \subseteq \{1, ..., n\}$ и перестановок $\rho, \pi \in \mathfrak{S}_m$ равенство

$$\eta^{\tau_M\left(\rho(1)\right)} \boxtimes ... \boxtimes \eta^{\tau_M\left(\rho(m)\right)} = \eta^{\tau_L(\pi(1))} \boxtimes ... \boxtimes \eta^{\tau_L(\pi(m))} \tag{12.5.248}$$

может выполняться только если $M = L$ и $\rho = \pi$.

Действительно, если $M \neq L$, то найдется какой-то индекс $\tau_M(s) \in M$, которого нет среди индексов $\tau_L(1), ..., \tau_L(m) \in L$. Это уже означает, что равенство (12.5.248) не может выполняться. Если же $M = L$, то (12.5.248) эквивалентно равенству

$$\eta^{\tau_M\left(\rho(1)\right)} \boxtimes ... \boxtimes \eta^{\tau_M\left(\rho(m)\right)} = \eta^{\tau_M(\pi(1))} \boxtimes ... \boxtimes \eta^{\tau_M(\pi(m))}$$

а это эквивалентно системе

$$\tau_M(\rho(s)) = \tau_M(\pi(s)), \qquad 1 \leqslant s \leqslant m.$$

[13]В формуле (12.5.246) обозначение a_M описано в (12.5.240), а $\left[\frac{1}{a}\right]^M$ – в (12.5.242).

то есть, поскольку отображение τ_M инъективно, системе

$$\rho(s) = \pi(s), \qquad 1 \leqslant s \leqslant m.$$

Итак, мы поняли, что в последнем выражении в цепочке (12.5.247) элементы $\eta^{\tau_M(\rho(1))} \boxtimes ... \boxtimes \eta^{\tau_M(\rho(m))}$ строго различны при различных вариантах значений $\tau_M(1), ..., \tau_M(m)$ и ρ. Поскольку в силу замечания 12.2.10 формы вида $\eta^{p_1} \boxtimes ... \boxtimes \eta^{p_m}$ ($p_s \in \{1, ..., n\}$) образуют базис в $L(X, ..., X)$, и значит, линейно независимы, числовые коэффициенты в (12.5.247) должны быть нулевыми:

$$\operatorname{sgn}(\rho) \cdot \lambda_M = 0, \qquad M \subseteq \{1, ..., n\}, \quad \rho \in \mathfrak{S}_m.$$

То есть

$$\lambda_M = 0, \qquad M \subseteq \{1, ..., n\}, \quad \rho \in \mathfrak{S}_m.$$

2. Теперь докажем полноту. Если ω – какая-нибудь внешняя форма, то, поскольку в силу замечания 12.2.10 формы вида $\eta^{i_1} \boxtimes ... \boxtimes \eta^{i_m}$ ($i_s \in \{1, ..., n\}$) образуют базис в $L(X, ..., X)$, ω представима как их линейная комбинация:

$$\omega = \sum_{i_s \in \{1,...,n\}} \lambda_{i_1,...,i_m} \cdot \eta^{i_1} \boxtimes ... \boxtimes \eta^{i_m}$$

Под действием альтернирования это равенство превращается в цепочку

$$\omega = (12.5.237) = \mathsf{Alt}\,\omega = \sum_{i_s \in \{1,...,n\}} \lambda_{i_1,...,i_m} \cdot \mathsf{Alt}(\eta^{i_1} \boxtimes ... \boxtimes \eta^{i_m}) =$$
$$= (12.5.239) = \sum_{i_s \in \{1,...,n\}} \lambda_{i_1,...,i_m} \cdot \frac{1}{m!} \cdot \eta^{i_1} \wedge ... \wedge \eta^{i_m}$$

То есть ω представима как линейная комбинация форм $\eta^{i_1} \wedge ... \wedge \eta^{i_m}$. При этом если в последовательности $i_1, ..., i_m$ какие-то индексы повторяются, то, в силу (12.5.231), форма $\eta^{i_1} \wedge ... \wedge \eta^{i_m}$ автоматически обнуляется. Значит, можно считать, что ω есть линейная комбинация форм $\eta^{i_1} \wedge ... \wedge \eta^{i_m}$ с неповторяющимися индексами. Если кроме того переставить эти индексы так, чтобы они возрастали, то при такой перестановке перед каждым выражением $\eta^{i_1} \wedge ... \wedge \eta^{i_m}$ просто добавится скалярный множитель в виде знака перестановки. И мы можем сделать вывод, что ω есть линейная комбинация форм $\eta^{i_1} \wedge ... \wedge \eta^{i_m}$ со строго возрастающими индексами.

3. Мы убедились, что формы (12.5.245) образуют базис в $\Lambda_m(X)$. Остается доказать формулу (12.5.246). Пусть $a = (a_1, ..., a_n)$ – базис в X. Разложим произвольную форму ω по базису $\left[\frac{1}{a}\right]^M$:

$$\omega = \sum_{\substack{M \subseteq \{1, ..., n\}: \\ \operatorname{card} M = m}} \lambda_M \cdot \left[\frac{1}{a}\right]^M.$$

Рассмотрим произвольное множество $L \subseteq \{1, ..., n\}$ мощности m и подставим в качестве аргумента строчку a_L:

$$\omega(a_L) = \sum_{\substack{M \subseteq \{1, ..., n\}: \\ \operatorname{card} M = m}} \lambda_M \cdot \underbrace{\left[\frac{1}{a}\right]^M (a_L)}_{\substack{\| \ (12.5.244) \\ \begin{cases} 1, & M = L \\ 0, & M \neq L \end{cases},}} = \lambda_L.$$

$\square$

Теорема 12.5.4. *Если n – размерность пространства X, то размерность пространства $\Lambda_m(X)$ равна C_n^m:*

$$\dim \Lambda_m(X) = C_n^m \tag{12.5.249}$$

Доказательство. Пусть $\eta^1, ..., \eta^n$ – базис в сопряженном пространстве X^*. По теореме 12.5.3 формы η^M, $M \subseteq \{1, ..., n\}$, $\operatorname{card} M = m$, образуют базис в пространстве $\Lambda_m(X)$. Таких форм ровно столько сколько подмножеств $M \subseteq \{1, ..., n\}$ мощности $\operatorname{card} M = m$. А число таких подмножеств по теореме 12.1.5 равно C_n^m. $\square$

Внешние формы максимальной степени. Пусть $\eta^1, ..., \eta^n$ – последовательность линейно независимых функционалов на векторном пространстве X размерности n (то есть базис сопряженного пространства X^*). Их конкатенация

$$(\eta^1 \wedge \dots \wedge \eta^n)(x_1, \dots, x_n) = \\ = \det \begin{pmatrix} \eta^1(x_1) & \dots & \eta^1(x_n) \\ \dots & \dots & \dots \\ \eta^n(x_1) & \dots & \eta^n(x_n) \end{pmatrix}.$$

является внешней формой степени n на X.

По свойству 6° на с.734, эта форма обращается в нуль в точности на линейно зависимых последовательностях векторов $x_1, ..., x_n$. С другой стороны, по теореме 12.5.4 пространство $\Lambda_n(X)$ внешних форм степени n на X одномерно:

$$\dim \Lambda_n(X) = C_n^n = 1,$$

поэтому форма $\eta^1 \wedge \dots \wedge \eta^n$ (поскольку она ненулевая) представляет собой базис в $\Lambda_n(X)$. Это значит, что любая другая форма $\omega \in \Lambda_n(X)$ имеет вид

$$\omega = \lambda \cdot \eta^1 \wedge \dots \wedge \eta^n,$$

где λ – некоторое число. Если $\omega \neq 0$, то $\lambda \neq 0$, и в этом случае ω обращается в нуль там же где $\eta^1 \wedge \dots \wedge \eta^n$, то есть на линейно зависимых последовательностях векторов.

Это доказывает

Предложение 12.5.5. *Всякая ненулевая внешняя форма ω максимальной степени $n = \dim X$ на векторном пространстве X обращается в нуль в точности на последовательностях $x_1, ..., x_n$ линейно зависимых векторов.*

Конкатенация внешних форм. Операцию конкатенации линейных функционалов, введенную выше формулой (12.5.229), как оказывается, можно продолжить до более широкой операции, действующей на всех внешних формах. Этот факт описывается в следующей теореме.

Теорема 12.5.6. *Для всякого конечномерного вещественного векторного пространства X существет единственная операция, которая любым двум внешним формам $\psi \in \Lambda_k(X)$ и $\omega \in \Lambda_l(X)$ ставит в соответствие внешнюю форму $\psi \wedge \omega \in \Lambda_{k+l}(X)$ так, что при этом выполняются следующие условия.*

(i) *Конкатенация с формой степени 0 совпадает с умножением на константу:*

$$\lambda \wedge \omega = \lambda \cdot \omega, \qquad \lambda \in \Lambda_0(X) = \mathbb{R},\ \omega \in \Lambda_l(X). \tag{12.5.250}$$

(ii) *Билинейность:*

$$\lambda \cdot (\psi \wedge \omega) = (\lambda \cdot \psi) \wedge \omega = \psi \wedge (\lambda \cdot \omega), \qquad \lambda \in \mathbb{R},\ \psi \in \Lambda_k(X),\ \omega \in \Lambda_l(X). \tag{12.5.251}$$

(iii) *Антикоммутативность:*

$$\psi \wedge \omega = (-1)^{\deg \psi \cdot \deg \omega} \omega \wedge \psi, \qquad \psi \in \Lambda_k(X),\ \omega \in \Lambda_l(X). \tag{12.5.252}$$

В частности, для линейных функционалов

$$\eta \wedge \theta = -\theta \wedge \eta, \qquad \eta, \theta \in X^*. \tag{12.5.253}$$

(iv) *Ассоциативность:*

$$(\varphi \wedge \psi) \wedge \omega = \varphi \wedge (\psi \wedge \omega), \qquad \varphi \in \Lambda_k(X),\ \psi \in \Lambda_l(X),\ \omega \in \Lambda_m(X). \tag{12.5.254}$$

(v) *Конкатенация функционалов: На произвольной последовательности $\eta^1, \dots, \eta^m$ линейных функционалов на X эта операция совпадает с введенной ранее формулой* (12.5.229) *конкатенацией линейных функционалов:*

$$(\eta^1 \wedge \dots \wedge \eta^m)(x_1, \dots, x_m) = \det \begin{pmatrix} \eta^1(x_1) & \dots & \eta^1(x_m) \\ \dots & \dots & \dots \\ \eta^m(x_1) & \dots & \eta^m(x_m) \end{pmatrix}, \qquad \eta^i \in X^*.$$

Эта операция называется конкатенацией *внешних форм $\psi \in \Lambda_k(X)$ и $\omega \in \Lambda_l(X)$ и определяется формулой*

$$(\psi \wedge \omega)(x_1, ..., x_{k+l}) = \sum_{(K,L) \in C^{k,l}_{\{1,\dots,k+l\}}} \operatorname{sgn}(\tau_{K \triangleleft L}) \cdot \psi(x_K) \cdot \omega(x_L), \qquad x_i \in X \tag{12.5.255}$$

(в которой множества K, L образуют разбиение типа (k, l) множества $\{1, ..., k+l\}$, и суммирование ведется по всем таким разбиениям).

Доказательство. 1. Сначала убедимся, что полилинейная форма $\psi \wedge \omega$, определенная формулой (12.5.255), действительно является внешней формой: $\psi \wedge \omega \in \Lambda_{k+l}(X)$. Здесь нужно проверить, что она кососимметрична. Для этого мы воспользуемся теоремой 12.5.1(v). Пусть в последовательности $x_1, ...x_{k+l}$ два элемента с соседними индексами одинаковы:

$$\exists i \quad x_i = x_{i+1}.$$

Зафиксируем этот i и после этого разделим слагаемые в правой части (12.5.255) на три группы:

1) в первую группу пусть входят слагаемые, соответствующие разбиениям $\{1, ..., k+l\} = K \sqcup L$, в которых оба индекса i и $i+1$ лежат в K,

2) во вторую группу пусть входят слагаемые,соответствующие разбиениям $\{1, ..., k+l\} = K \sqcup L$, в которых оба индекса i и $i+1$ лежат в L,

3) в третью группу пусть входят остальные слагаемые, то есть те, которые соответствуют разбиениям $\{1, ..., k+l\} = K \sqcup L$, в которых K содержит ровно один из индексов i и $i+1$.

Тогда

$$(\psi \wedge \omega)(x_1, ..., x_k, x_{k+1}, ..., x_{k+l}) = \sum_{\{i,i+1\}\subseteq K} \operatorname{sgn}(\tau_{K\triangleleft L}) \cdot \psi(x_K) \cdot \omega(x_L) +$$
$$+ \sum_{\{i,i+1\}\subseteq L} \operatorname{sgn}(\tau_{K\triangleleft L}) \cdot \psi(x_K) \cdot \omega(x_L) + \sum_{(i\in K \ \& \ i+1\in L) \ \vee \ (i+1\in K \ \& \ i\in L)} \operatorname{sgn}(\tau_{K\triangleleft L}) \cdot \psi(x_K) \cdot \omega(x_L). \tag{12.5.256}$$

Заметим теперь, что в первой сумме в каждом слагаемом (то есть при любом выборе рабинения (K, L)) у формы ψ среди аргументов $x_K = (x_j)$, $j \in K$, имеются два одинаковых с разными индексами: $x_i = x_{i+1}$. Поэтому здесь $\psi(x_K) = 0$, и вообще вся первая сумма равна нулю:

$$\sum_{\{i,i+1\}\subseteq K} \operatorname{sgn}(\tau_{K\triangleleft L}) \cdot \psi(x_K) \cdot \omega(x_L) = 0.$$

Точно так же, во второй сумме в (12.5.256) в каждом слагаемом (то есть при любом выборе рабинения (K, L)) у формы ω среди аргументов $x_L = (x_j)$, $j \in L$, имеются два одинаковых с разными индексами: $x_i = x_{i+1}$. Поэтому здесь $\omega(x_K) = 0$, и вообще вся вторая сумма равна нулю:

$$\sum_{\{i,i+1\}\subseteq L} \operatorname{sgn}(\tau_{K\triangleleft L}) \cdot \psi(x_K) \cdot \omega(x_L) = 0.$$

Наконец, чтобы понять, что происходит в третьей сумме в (12.5.256), рассмотрим транспозицию[14], меняющую местами i и $i+1$:

$$\tau(s) = (i \ i+1)(s) = \begin{cases} s, & s \notin \{i, i+1\} \\ i+1, & s = i \\ i, & s = i+1 \end{cases}.$$

Пусть в разбиении (K, L) множества K и L содержат по одному из чисел i и $i+1$. Положим $K' = \tau(K)$ и $L' = \tau(L)$. Тогда из равенства (12.1.39)

$$K' \triangleleft L' = \tau \circ (K \triangleleft L).$$

мы получим следствие

$$\operatorname{sgn}(\tau_{K'\triangleleft L'}) = \operatorname{sgn}(\tau \circ (K \triangleleft L)) = \operatorname{sgn}(\tau) \cdot \operatorname{sgn}(\tau_{K\triangleleft L}) = -\operatorname{sgn}(\tau_{K\triangleleft L}). \tag{12.5.257}$$

С другой стороны, поскольку (K', L') получено из (K, L) перестановкой индексов i и $i+1$, у которых значения аргументов постоянны, $x_i = x_{i+1}$, мы получаем, что

$$\psi(x_{K'}) = \psi(x_K), \qquad \omega(x_{L'}) = \omega(x_L).$$

Вместе с (12.5.257) это дает

$$\operatorname{sgn}(\tau_{K'\triangleleft L'}) \cdot \psi(x_{K'}) \cdot \omega(x_{L'}) = -\operatorname{sgn}(\tau_{K\triangleleft L}) \cdot \psi(x_K) \cdot \omega(x_L).$$

[14]Понятие транспозиции было определено на с.667.

Это можно интерпретировать так, что у каждого слагаемого в третьей сумме в (12.5.256), соответствующего какому-то разбиению (K, L) (где K и L содержат ровно по одному из чисел i и $i+1$) найдется парное слагаемое, соответствующее разбиению (K', L') (получающемуся перестановкой i и $i+1$), такое, что эти слагаемые компенсируют друг друга:

$$\operatorname{sgn}(\tau_{K \triangleleft L}) \cdot \psi(x_K) \cdot \omega(x_L) + \operatorname{sgn}(\tau_{K' \triangleleft L'}) \cdot \psi(x_{K'}) \cdot \omega(x_{L'}) = 0.$$

Разбив третью сумму на такие пары, мы получим, что она вся равна нулю.

2. Для форм $\lambda \in \Lambda_0(X)$ и $\omega \in \Lambda_k(X)$ в определении конкатенации формулой (12.5.255) множество K должно быть пустым, поэтому в сумме имеется только одно слагаемое:

$$(\lambda \wedge \omega)(x_1, ..., x_l) = \operatorname{sgn}(\tau_{\varnothing \triangleleft L})\lambda \cdot \omega(x_L) = \lambda \cdot \omega(x_L)$$

3. Умножение формулы (12.5.255) на константу $\lambda \in \mathbb{R}$ эквивалентно умножению какого-то множителя ψ или ω на λ.

4. Пусть $\psi \in \Lambda_k(X)$, $\omega \in \Lambda_l(X)$, тогда

$$\begin{aligned}(\psi \wedge \omega)(x_1, ..., x_{k+l}) &= \sum_{(K,L) \in C^{k,l}_{\{1,\dots,k+l\}}} \operatorname{sgn}(\tau_{K \triangleleft L}) \cdot \psi(x_K) \cdot \omega(x_L) = (12.1.40) = \\ &= \sum_{(K,L) \in C^{k,l}_{\{1,\dots,k+l\}}} (-1)^{kl} \cdot \operatorname{sgn}(\tau_{L \triangleleft K}) \cdot \omega(x_L) \cdot \psi(x_K) = \\ &= (-1)^{kl} \cdot \sum_{(K,L) \in C^{k,l}_{\{1,\dots,k+l\}}} \operatorname{sgn}(\tau_{L \triangleleft K}) \cdot \omega(x_L) \cdot \psi(x_K) = (-1)^{kl} \cdot (\omega \wedge \psi)(x_1, ..., x_{k+l})\end{aligned}$$

5. Пусть $\varphi \in \Lambda_k(X)$, $\chi \in \Lambda_l(X)$, $\psi \in \Lambda_m(X)$, тогда, с одной стороны,

$$\begin{aligned}((\varphi \wedge \chi) \wedge \psi)(x_1, ..., x_{k+l+m}) &= \sum_{(M',M) \in C^{k+l,m}_{\{1,\dots,k+l+m\}}} \operatorname{sgn}(\tau_{M' \triangleleft M}) \cdot (\varphi \wedge \chi)(x_{M'}) \cdot \psi(x_M) = \\ &= \sum_{(M',M) \in C^{k+l,m}_{\{1,\dots,k+l+m\}}} \operatorname{sgn}(\tau_{M' \triangleleft M}) \cdot \Big(\sum_{(K,L) \in C^{k,l}_{\{1,\dots,k+l\}}} \operatorname{sgn}(\tau_{K \triangleleft L}) \cdot \varphi(x_K) \cdot \chi(x_L) \Big) \cdot \psi(x_M) = \\ &= \sum_{(K,L,M) \in C^{k,l,m}_{\{1,\dots,k+l+m\}}} \operatorname{sgn}\left(\tau_{(K \sqcup L) \triangleleft M}\right) \cdot \operatorname{sgn}(\tau_{K \triangleleft L}) \cdot \varphi(x_K) \cdot \chi(x_L) \cdot \psi(x_M) = (12.1.41) = \\ &= \sum_{(K,L,M) \in C^{k,l,m}_{\{1,\dots,k+l+m\}}} \operatorname{sgn}(\tau_{K \triangleleft L \triangleleft M}) \cdot \varphi(x_K) \cdot \chi(x_L) \cdot \psi(x_M).\end{aligned}$$

А с другой –

$$\begin{aligned}(\varphi \wedge (\chi \wedge \psi))(x_1, ..., x_{k+l+m}) &= \sum_{(K,K') \in C^{k,l+m}_{\{1,\dots,k+l+m\}}} \operatorname{sgn}(\tau_{K \triangleleft K'}) \cdot \varphi(x_k) \cdot (\chi \wedge \psi)(x_{K'}) = \\ &= \sum_{(K,K') \in C^{k,l+m}_{\{1,\dots,k+l+m\}}} \operatorname{sgn}(\tau_{K \triangleleft K'}) \cdot \varphi(x_k) \cdot \sum_{(L,M) \in C^{l,m}_{\{1,\dots,l+m\}}} \operatorname{sgn}(\tau_{L \triangleleft M}) \cdot \chi(x_L) \cdot \psi(x_M) = \\ &= \sum_{(K,L,M) \in C^{k,l,m}_{\{1,\dots,k+l+m\}}} \operatorname{sgn}(\tau_{K \triangleleft K'}) \cdot \operatorname{sgn}(\tau_{L \triangleleft M}) \cdot \varphi(x_k) \cdot \chi(x_L) \cdot \psi(x_M) = (12.1.41) = \\ &= \sum_{(K,L,M) \in C^{k,l,m}_{\{1,\dots,k+l+m\}}} \operatorname{sgn}(\tau_{K \triangleleft L \triangleleft M}) \cdot \varphi(x_K) \cdot \chi(x_L) \cdot \psi(x_M).\end{aligned}$$

6. Если $\eta^1, \dots, \eta^k$ – последовательность линейных функционалов на X, то точно так же как в предыдущем свойстве, последовательно измельчая разбиение множества $\{1, ..., k\}$, мы получим цепочку:

$$(\eta^1 \wedge \dots \wedge \eta^k)(x_1, ..., x_k) = \sum_{(M'_k, M_k) \in C^{k-1,1}_{\{1,\dots,k\}}} \operatorname{sgn}(\tau_{M'_k \triangleleft M_k}) \cdot (\eta^1, \dots, \eta^{k-1})(x_{M'_k}) \cdot \eta^k(x_{M_k}) =$$

$$= \sum_{(M'_{k-1},M_{k-1},M_k)\in C^{k-2,1,1}_{\{1,\dots,k\}}} \operatorname{sgn}(\tau_{M'_{k-1}\triangleleft M_{k-1}\triangleleft M_k}) \cdot (\eta^1,\dots,\eta^{k-2})(x_{M'_{k-1}}) \cdot \eta^{k-1}(x_{M_{k-1}}) \cdot \eta^k(x_{M_k}) = \ldots =$$

$$= \sum_{(M_1,\dots,M_k)\in C^{1,\dots,1}_{\{1,\dots,k\}}} \operatorname{sgn}(\tau_{M_1\triangleleft\dots\triangleleft M_k}) \cdot \eta^1(x_{M_1}) \cdot \ldots \cdot \eta^k(x_{M_k}) =$$

$$= \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_k} \operatorname{sgn}(\sigma) \cdot \eta^1(x_{\sigma(1)}) \cdot \ldots \cdot \eta^k(x_{\sigma(k)}) = \det\begin{pmatrix} \eta^1(x_1) & \dots & \eta^1(x_k) \\ \dots & \dots & \dots \\ \eta^k(x_1) & \dots & \eta^k(x_k) \end{pmatrix}.$$

7. Остается доказать, что операция $(\psi,\omega)\mapsto\psi\wedge\omega$ с такими свойствами единственна. Это следует из теоремы 12.5.3: формы ψ и ω являются линейными комбинациями форм вида (12.5.229), а на них операция $(\psi,\omega)\mapsto\psi\wedge\omega$ определена однозначно, потому что она совпадает с конкатенацией, определенной формулой (12.5.229). $\square$

(b) Поливекторы $V_m(X)$

- *Поливектором степени* m в векторном пространстве X называется произвольный линейный функционал
$$p : \varLambda_m(X)\to\mathbb{R}$$
на пространстве $\varLambda_m(X)$ внешних форм степени m на X. Множество всех поливекторов степени m в X обозначается $V_m(X)$. По определению,
$$V_m(X) := \Big(\varLambda_m(X)\Big)^*$$
В случае $m=2$ поливекторы называются *бивекторами.*

Конкатенация векторов. Как и в случае с внешними формами, для поливекторов имеется стандартная конструкция, служащая типичным примером.

Пусть $x_1,\dots,x_m$ – произвольная последовательность длины m векторов пространства X. Всякой внешней форме $\alpha\in\varLambda_m(X)$ можно поставить в соответствие число

$$(x_1\vee\ldots\vee x_m)(\alpha) := \alpha(x_1,\dots,x_m) \tag{12.5.258}$$

В результате мы получаем отображение

$$x_1\vee\cdots\vee x_m : \varLambda_m(X)\to\mathbb{R},$$

являющееся линейным функционалом, потому что

$$(x_1\vee\cdots\vee x_m)(\alpha+\beta) := (\alpha+\beta)(x_1,\dots,x_m) = \alpha(x_1,\dots,x_m)+\beta(x_1,\dots,x_m) =$$
$$= (x_1\vee\cdots\vee x_m)(\alpha) + (x_1\vee\cdots\vee x_m)(\beta)$$

и

$$(x_1\vee\cdots\vee x_m)(\lambda\cdot\alpha) := (\lambda\cdot\alpha)(x_1,\dots,x_m) = \lambda\cdot\alpha(x_1,\dots,x_m) = \lambda\cdot\big((x_1\vee\cdots\vee x_m)(\alpha)\big)$$

Это значит, что $x_1\vee\cdots\vee x_m$ представляет собой поливектор степени m в X.

- Поливектор $x_1\vee\ldots\vee x_m\in V_m(X)$ называется *конкатенацией векторов* $x_1,\dots,x_m\in X$.

Свойства конкатенации векторов:

1° *При перестановке элементов последовательности* $x_1,\dots,x_m$ *знак конкатенации меняется в зависимости от знака перестановки:*

$$x_{\sigma(1)}\vee\ldots\vee x_{\sigma(m)} = \operatorname{sgn}(\sigma)\cdot x_1\vee\ldots\vee x_m,\qquad \sigma\in\mathfrak{S}_m. \tag{12.5.259}$$

2° *Если в последовательности* $x_1,\dots,x_m$ *какой-то элемент* x_i *встречается дважды, то конкатенация этих векторов равна нулю:*

$$x_1\vee\ldots\vee x_i\vee\ldots\vee x_i\vee\ldots\vee x_m = 0. \tag{12.5.260}$$

3° *При умножении какого-нибудь вектора x_i на скаляр λ конактенация умножается на скаляр:*

$$x_1 \vee ... \vee \lambda \cdot x_i \vee ... \vee x_m = \lambda \cdot x_1 \vee ... \vee x_i \vee ... \vee x_m. \qquad (12.5.261)$$

4° *При замене какого-нибудь вектора x_i на сумму векторов $a+b$ конактенация заменяется на сумму конкатенаций с подставленными a и b вместо x_i:*

$$x_1 \vee ... \vee (a+b) \vee ... \vee x_m = x_1 \vee ... \vee a \vee ... \vee x_m + x_1 \vee ... \vee b \vee ... \vee x_m \qquad (12.5.262)$$

5° *Конкатенация $x_1 \vee ... \vee x_m$ тогда и только тогда не равна нулю, когда векторы $x_1, ..., x_m$ линейно независимы.*

Доказательство. 1. Для $\sigma \in \mathfrak{S}_m$ мы получаем:

$$(x_{\sigma(1)} \vee ... \vee x_{\sigma(m)})(\alpha) = (12.5.258) = \alpha(x_{\sigma(1)}, ..., x_{\sigma(m)}) = (12.5.224) = \\ = \operatorname{sgn}(\sigma) \cdot \alpha(x_1, ..., x_m) = (12.5.258) = \operatorname{sgn}(\sigma) \cdot (x_1 \vee ... \vee x_m)(\alpha)$$

2. Пусть в последовательности $x_1, ..., x_m$ какой-то элемент x_i встречается дважды. Тогда для всякой формы $\alpha \in \Lambda_m(X)$

$$(x_1 \vee ... \vee x_m)(\alpha) = (12.5.258) = \alpha(x_1, ..., x_i, ..., x_i, ..., x_m) = (\text{меняем местями агрументы с } x_i) = \\ = -\alpha(x_1, ..., x_i, ..., x_i, ..., x_m) = -(x_1 \vee ... \vee x_m)(\alpha)$$

Такое возможно только если $(x_1 \vee ... \vee x_m)(\alpha) = 0$.

3. Для $\lambda \in \mathbb{R}$

$$(x_1 \vee ... \vee \lambda \cdot x_i \vee ... \vee x_m)(\alpha) = (12.5.258) = \alpha(x_1, ..., \lambda \cdot x_i, ..., x_m) = \lambda \cdot \alpha(x_1, ..., x_i, ..., x_m) = \\ = (12.5.258) = \lambda \cdot (x_1 \vee ... \vee x_m)(\alpha)$$

4. Если заменить x_i на $a+b$, то

$$(x_1 \vee ... \vee (a+b) \vee ... \vee x_m)(\alpha) = (12.5.258) = \alpha(x_1, ..., a+b, ..., x_m) = \alpha(x_1, ..., a, ..., x_m) + \alpha(x_1, ..., b, ..., x_m) = \\ = (12.5.258) = (x_1 \vee ... \vee a \vee ... \vee x_m)(\alpha) + (x_1 \vee ... \vee b \vee ... \vee x_m)(\alpha) = (x_1 \vee ... \vee a \vee ... \vee x_m + x_1 \vee ... \vee b \vee ... \vee x_m)(\alpha).$$

5. Если векторы $x_1, ..., x_m$ линейно независимы, то их можно дополнить до базиса $x_1, ..., x_m, ..., x_n$ в пространстве X. Тогда можно взять сопряженный базис в X^*,

$$\eta^i = \left[\frac{1}{x}\right]^i,$$

для которого

$$\eta^j(x_i) = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases},$$

и поэтому

$$(x_1 \vee ... \vee x_m)(\eta^1 \wedge \cdots \wedge \eta^m) = (12.5.258) = (\eta^1 \wedge \cdots \wedge \eta^m)(x_1, ..., x_m) = \\ = \det \begin{pmatrix} \eta^1(x_1) & \dots & \eta^1(x_m) \\ \dots & \dots & \dots \\ \eta^m(x_1) & \dots & \eta^m(x_m) \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} = 1 \neq 0.$$

Наоборот, пусть векторы $x_1, ..., x_m$ линейно зависимы, то есть какой-то из них выражается как линейная комбинация остальных:

$$x_j = \sum_{i \neq j} \lambda_i \cdot x_i.$$

Тогда

$$x_1 \vee \cdots \vee x_m = x_1 \vee ... \vee x_j \vee ... \vee x_m = x_1 \vee ... \vee \left(\sum_{i \neq j} \lambda_i \cdot x_i \right) \vee ... \vee x_m = \\ = \sum_{i \neq j} \lambda_i \cdot \underbrace{x_1 \vee ... \vee x_i \vee ... \vee x_m}_{\substack{\text{здесь элемент } x_i \\ \text{встречается дважды}}} = (12.5.260) = 0.$$

□

Базис в пространстве поливекторов. Пусть $x = (x_1, ..., x_n)$ – последовательность векторов векторного пространства X и $M \subseteq \{1, ..., n\}$ – произвольное множество индексов и $\tau_M : \{1, ..., m\} \to M$ – возрастающая нумерация его элементов (см. определение на с.671). Обозначим

$$x_{\vee M} = x_{\tau_M(1)} \vee ... \vee x_{\tau_M(m)} \in V_m(X). \qquad (12.5.263)$$

Из определения конкатенации векторов (12.5.258) следует, что на всякую внешнюю форму $\omega \in \Lambda_m(X)$ конкатенация $x_{\vee M}$ действует так же, как форма ω действует на последовательность векторов x_M:

$$x_{\vee M}(\omega) = \omega(x_M), \qquad \omega \in \Lambda_m(X). \qquad (12.5.264)$$

Напомним, что для всякой последовательности $\eta = (\eta^1, ..., \eta^m)$ линейных функционалов на X формулой (12.5.242) мы определили внешнюю форму степени $m = \operatorname{card} M$ на X:

$$\eta^M = \eta^{\tau_M(1)} \wedge ... \wedge \eta^{\tau_M(m)} \in \Lambda_m(X).$$

Эти обозначения полезны в следующей теореме:

Теорема 12.5.7. *Пусть $a_1, ..., a_n$ – базис в пространстве X и $0 \leqslant m \leqslant n$. Тогда поливекторы вида*

$$a_{\vee M} = a_{\tau_M(1)} \vee ... \vee a_{\tau_M(m)}, \qquad M \subseteq \{1, ..., n\}, \quad \operatorname{card} M = m,$$

образуют базис в пространстве $V_m(X)$ поливекторов степени m в X, а разложение всякого поливектора $p \in V_m(X)$ по этому базису имеет вид

$$p = \sum_{\substack{M \subseteq \{1,...,n\}: \\ \operatorname{card} M = m}} p\left(\left[\frac{1}{a}\right]^M\right) \cdot a_{\vee M}. \qquad (12.5.265)$$

Доказательство. Опять начнем с того, что убедимся, что эта система линейно независима. Пусть для некоторых скаляров λ^M выполняется равенство

$$\sum_{\substack{M \subseteq \{1,...,n\}: \\ \operatorname{card} M = m}} \lambda^M \cdot a_{\vee M} = 0.$$

Пусть в соответствии с (12.2.75) $\left[\frac{1}{a}\right]^i$ – сопряженный базис в X^*. Для всякого множества $L \subseteq \{1, ..., n\}$, $\operatorname{card} L = m$, мы получим

$$a_{\vee M}\left(\left[\frac{1}{a}\right]^L\right) = (12.5.264) = \left[\frac{1}{a}\right]^L (a_M) = (12.5.244) = \begin{cases} 0, & L \neq M \\ 1, & L = M \end{cases},$$

поэтому

$$0 = \sum_{\substack{M \subseteq \{1,...,n\}: \\ \operatorname{card} M = m}} \lambda^M \cdot a_{\vee M}\left(\left[\frac{1}{a}\right]^L\right) = \lambda^L.$$

Это верно для любого множества $L \subseteq \{1, ..., n\}$, $\operatorname{card} L = m$, поэтому система a_M действительно линейно независима.

Теперь покажем, что она линейно полна. Пусть $p \in V_m(X) = \Lambda_m(X)^*$ – произвольный поливектор. Тогда для любой внешней формы $\omega \in \Lambda_m(X)$

$$p(\omega) = (12.5.246) = p\left(\sum_{\substack{M \subseteq \{1,...,n\}: \\ \operatorname{card} M = m}} \omega(a_M) \cdot \left[\frac{1}{a}\right]^M\right) = \sum_{\substack{M \subseteq \{1,...,n\}: \\ \operatorname{card} M = m}} \omega(a_M) \cdot p\left(\left[\frac{1}{a}\right]^M\right) = (12.5.264) =$$

$$= \sum_{\substack{M \subseteq \{1,...,n\}: \\ \operatorname{card} M = m}} a_{\vee M}(\omega) \cdot p\left(\left[\frac{1}{a}\right]^M\right)$$

Выбрасывая аргумент ω мы получаем равенство (12.5.265). □

Из теоремы 12.5.4 следует

Теорема 12.5.8. *Если n – размерность пространства X, то размерность пространства $V_m(X)$ равна C_n^m:*

$$\dim V_m(X) = C_n^m \tag{12.5.266}$$

Поливекторы максимальной степени.

◇ **12.5.2.** Поливекторы степени $m = n$ (равной размерности пространства X) описываются довольно просто. Если зафиксировать базис $a_1, ..., a_n$ в X, то по теореме 12.5.7 поливектор

$$a_1 \vee ... \vee a_n$$

представляет собой базис (состоящий из одного элемента) в пространстве поливекторов $V_n(X)$ (которое поэтому будет одномерно). Это значит, что любой поливектор $p \in \bigvee_n(X)$ представим в виде

$$p = \lambda \cdot a_1 \vee ... \vee a_n,$$

где $\lambda \in \mathbb{R}$ – некоторое число. Как следствие, пространство $V_n(X)$ поливекторов максимальной степени всегда одномерно:

$$\dim V_n(X) = 1, \qquad n = \dim X. \tag{12.5.267}$$

В частности, любой элементарный поливектор $x_1 \vee ... \vee x_n \in V_n(X)$ записывается в виде

$$x_1 \vee ... \vee x_n = \det \left[\frac{x}{a}\right] \cdot a_1 \vee ... \vee a_n =$$

$$= \det \begin{pmatrix} \left[\frac{x_1}{a}\right]^1 & ... & \left[\frac{x_n}{a}\right]^1 \\ ... & ... & ... \\ \left[\frac{x_1}{a}\right]^n & ... & \left[\frac{x_n}{a}\right]^n \end{pmatrix} \cdot a_1 \vee ... \vee a_n \tag{12.5.268}$$

(в определителе матрица коэффициентов разложения элементов x_i по базису a_j).

Доказательство. Коэффициент перед $a_1 \vee ... \vee a_n$ в (12.5.268) вычисляется по формуле (12.5.265):

$$x_1 \vee ... \vee x_n \left(\left[\frac{1}{a}\right]^1 \wedge ... \wedge \left[\frac{1}{a}\right]^n \right) = (12.5.258) =$$

$$= \left[\frac{1}{a}\right]^1 \wedge ... \wedge \left[\frac{1}{a}\right]^n (x_1, ..., x_n) = (12.5.229) =$$

$$= \det \begin{pmatrix} \left[\frac{1}{a}\right]^1 (x_1) & ... & \left[\frac{1}{a}\right]^1 (x_n) \\ ... & ... & ... \\ \left[\frac{1}{a}\right]^n (x_1) & ... & \left[\frac{1}{a}\right]^n (x_n) \end{pmatrix} =$$

$$= \det \begin{pmatrix} \left[\frac{x_1}{a}\right]^1 & ... & \left[\frac{x_n}{a}\right]^1 \\ ... & ... & ... \\ \left[\frac{x_1}{a}\right]^n & ... & \left[\frac{x_n}{a}\right]^n \end{pmatrix}$$

□

Кососимметрическая поляризация $V_m(X) \cong \Lambda_m(X^*)$. Следующую теорему можно рассматривать как аналог теоремы 12.2.22:

Теорема 12.5.9. *Отображение*

$$\Pi : V_m(X) \to \Lambda_m(X^*) \quad \Big| \quad \Pi p(\xi_1, ..., \xi_m) = p(\xi_1 \wedge ... \wedge \xi_m), \qquad p \in V_m(X), \quad \xi_1, ..., \xi_m \in X^*,$$

является изоморфизмом векторных пространств, переводящим произвольный поливектор $x_1 \vee ... \vee x_m$ в пространстве X во внешнюю форму $\iota_X x_1 \wedge ... \wedge \iota_X x_m$ на пространстве X^*:

$$x_1 \vee ... \vee x_m \mapsto \iota_X x_1 \wedge ... \wedge \iota_X x_m. \tag{12.5.269}$$

Всякое вообще линейное отображение $V_m(X) \to \Lambda_m(X^*)$, удовлетворяющее условию (12.5.269)*, совпадает с Π.*

Доказательство. 1. Прежде всего нужно убедиться, что это отображение линейно. Для любых $p, q \in L(X, Y)^*$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\xi_i \in X^*$, $\upsilon \in Y^*$ мы получим:

$$\Pi(\alpha \cdot p + \beta \cdot q)(\xi_1, ..., \xi_m) = (\alpha \cdot p + \beta \cdot q)(\xi_1 \wedge ... \wedge \xi_m) =$$
$$= \alpha \cdot p(\xi_1 \wedge ... \wedge \xi_m) + \beta \cdot q(\xi_1 \wedge ... \wedge \xi_m) = \alpha \cdot \Pi(p)(\xi_1, ..., \xi_m) + \beta \cdot \Pi(q)(\xi_1, ..., \xi_m).$$

Теперь отбрасывая ξ_i, имеем:

$$\Pi(\alpha \cdot p + \beta \cdot q) = \alpha \cdot \Pi(p) + \beta \cdot \Pi(q).$$

2. После этого проверим условие (12.5.269):

$$\varPi(x_1 \vee ... \vee x_m)(\xi_1, ..., \xi_m) = (x_1 \vee ... \vee x_m)(\xi_1 \wedge ... \wedge \xi_m) = (12.5.258) = (\xi_1 \wedge ... \wedge \xi_m)(x_1, ..., x_m) =$$
$$= (12.5.229) = \det \begin{pmatrix} \xi_1(x_1) & \dots & \xi_1(x_m) \\ \dots & \dots & \dots \\ \xi_m(x_1) & \dots & \xi_m(x_m) \end{pmatrix} = (12.2.93) = \det \begin{pmatrix} \iota_X(x_1)(\xi_1) & \dots & \iota_X(x_m)(\xi_1) \\ \dots & \dots & \dots \\ \iota_X(x_1)(\xi_m) & \dots & \iota_X(x_m)(\xi_m) \end{pmatrix} =$$
$$= (12.5.229) = (\iota_X(x_1) \wedge ... \wedge \iota_X(x_m))(\xi_1, ..., \xi_m)$$

3. Зафиксируем теперь какой-нибудь базис $a_1, ..., a_n$ в X. По теореме 12.5.7 поливекторы

$$a_{i_1} \vee ... \vee a_{i_m}, \qquad i_1 < ... < i_m$$

образуют базис в пространстве $V_m(X)$. А по теореме 12.5.3 внешние формы

$$\left[\frac{1}{\frac{1}{a}}\right]^{i_1} \wedge ... \wedge \left[\frac{1}{\frac{1}{a}}\right]^{i_m} = (12.2.94) = \iota_X(a_{i_1}) \wedge ... \wedge \iota_Y(a_{i_m}); \qquad i_1 < ... < i_m$$

образуют базис в пространстве $\varLambda_m(X^*)$. При этом по уже доказанной формуле (12.5.269), при отображении $\varPi$ первый базис превращается во второй:

$$\varPi(a_{i_1} \vee ... \vee a_{i_m}) = \iota_X(a_{i_1}) \wedge ... \wedge \iota_Y(a_{i_m}).$$

Мы получили, что линейное отображение $\varPi : V_m(X) \to \varLambda_m(X^*)$ переводит базис в базис. По теореме 12.2.15 это означает, что оно является изоморфизмом векторных пространств. □

Конкатенация поливекторов. Из теорем 12.5.9 и 12.5.6 следует

Теорема 12.5.10. *Для всякого конечномерного вещественного векторного пространства X существует единственная операция, которая любым двум поливекторам $p \in V_k(X)$ и $q \in V_l(X)$ ставит в соответствие поливектор $p \vee q \in V_{k+l}(X)$ так, что при этом выполняются следующие условия.*

(i) *Конкатенация с поливектором степени 0 совпадает с умножением на константу:*

$$\lambda \vee q = \lambda \cdot q, \qquad \lambda \in V_0(X) = \mathbb{R}, \; q \in V_l(X). \tag{12.5.270}$$

(ii) *Билинейность:*

$$\lambda \cdot (p \vee q) = (\lambda \cdot p) \vee q = p \vee (\lambda \cdot q), \qquad \lambda \in \mathbb{R}, \; p \in V_k(X), \; q \in V_l(X). \tag{12.5.271}$$

(iii) *Антикоммутативность:*

$$p \vee q = (-1)^{\deg p \cdot \deg q} \cdot q \vee p, \qquad p \in V_k(X), \; q \in V_l(X). \tag{12.5.272}$$

В частности, для линейных функционалов

$$x \vee y = -y \vee x, \qquad x, y \in X. \tag{12.5.273}$$

(iv) *Ассоциативность:*

$$(\varphi \vee p) \vee q = \varphi \vee (p \vee q), \qquad \varphi \in V_k(X), \; p \in V_l(X), \; \vee \in V_m(X). \tag{12.5.274}$$

(v) *Конкатенация векторов: на произвольной последовательности $x_1, \dots, x_k$ векторов в X эта операция совпадает с введенной ранее формулой* (12.5.258) *конкатенацией векторов:*

$$(x_1 \vee ... \vee x_k)(\omega) := \omega(x_1, ..., x_k), \qquad x_i \in X, \; \omega \in \varLambda_k(X).$$

Доказательство. Рассмотрим изоморфизмы, строящиеся в теореме 12.5.9:

$$\varPi_k : V_k(X) \to \varLambda_k(X^*), \qquad \varPi_l : V_l(X) \to \varLambda_l(X^*), \qquad \varPi_{k+l} : V_{k+l}(X) \to \varLambda_{k+l}(X^*),$$

и положим

$$p \vee q = \varPi_{k+l}^{-1}\big(\varPi_k(p) \wedge \varPi_l(q)\big),$$

где символ $\wedge$ обозначает конкатенацию внешних форм, существование которой устанавливается в теореме 12.5.6. Свойства (i)-(v) следуют сразу из аналогичных утверждений теоремы 12.5.6. □

Универсальность пространства поливекторов. Заметим, что отображение

$$\vee_k : (x_1, ..., x_k) \mapsto x_1 \vee ... \vee x_k \tag{12.5.275}$$

является кососимметрическим полилинейным отображением $\vee_k : X \times ... \times X \to V_k(X)$

Теорема 12.5.11 (универсальность пространства поливекторов)**.** *Для любого кососимметрического полининейного отображения* $\varphi : \underbrace{X \times ... \times X}_{k \text{ множителей}} \to Y$ *найдется единственное линейное отображение* $\varphi^\vee : V_k(X) \to Y$*, замыкающее диаграмму*

$$\begin{tikzcd} & X \times ... \times X \arrow[dl, "\vee_k"'] \arrow[dr, "\varphi"] & \\ V_k(X) \arrow[rr, dashed, "\varphi^\vee"'] & & Y \end{tikzcd}.$$

Доказательство. Каждому функционалу $f \in Y^*$ поставим в соответствие внешнюю форму $\psi(f)$ степени k на X по формуле

$$\psi(f) = f \circ \varphi.$$

У нас получился линейный оператор

$$\psi : Y^* \to \Lambda_k(X).$$

Ему соответствует сопряженное отображение

$$\psi^* : \Lambda_k(X)^* \to Y^{**}.$$

Рассмотрим отображение $\iota_Y : Y \to Y^{**}$, определенное формулой (12.2.93). По теореме 12.2.16 оно является изоморфизмом, поэтому определено обратное отображение $\iota_Y^{-1} : Y^{**} \to Y$. Положим

$$\varphi^\vee = \iota_Y^{-1} \circ \psi^* : V_k(X) = \Lambda_k(X)^* \to Y$$

Тогда возникает цепочка (в которой $x_i \in X$, $f \in Y^*$):

$$\iota_Y(\varphi^\vee(\vee_k(x_1, ..., x_k)))(f) = \psi^*(\vee_k(x_1, ..., x_k))(f) = \psi^*(x_1 \vee ... \vee x_k)(f) = (12.2.95) = (x_1 \vee ... \vee x_k)(\psi(f)) =$$
$$= (x_1 \vee ... \vee x_k)(f \circ \varphi) = (12.5.258) = (f \circ \varphi)(x_1, ..., x_k) = f(\varphi(x_1, ..., x_k)) = (12.2.93) = \iota_Y(\varphi(x_1, ..., x_k))(f)$$

$$\Downarrow$$

$$\iota_Y(\varphi^\vee(\vee_k(x_1, ..., x_k))) = \iota_Y(\varphi(x_1, ..., x_k))$$

$$\Downarrow$$

$$\varphi^\vee(\vee_k(x_1, ..., x_k)) = \varphi(x_1, ..., x_k)$$

$$\Downarrow$$

$$\varphi^\vee \circ \vee_k = \varphi.$$

□

(c) Действие матрицы и оператора на внешнюю форму и поливектор

Действие оператора на внешнюю форму и поливектор. Пусть $A : X \to Y$ – линейный оператор между (конечномерными) векторными пространствами. Всякой внешней форме $\omega \in \Lambda_k(Y)$ степени k на Y можно поставить в соответствие внешнюю форму $\omega \cdot A \in \Lambda_k(X)$ по формуле

$$(\omega \cdot A)(x_1, ..., x_k) = \omega(Ax_1, ..., Ax_k), \qquad x_i \in X \tag{12.5.276}$$

Наоборот, если $p : \Lambda_k(X) \to \mathbb{R}$ – поливектор степени k в X, то ему соответствует поливектор $A^k p : \Lambda_k(Y) \to \mathbb{R}$, определяемый формулой

$$\vee_k A p(\omega) = p(\omega \cdot A), \qquad \omega \in \Lambda_k(Y). \tag{12.5.277}$$

Получающееся отображение пространств поливекторов $\vee_k A : V_k(X) \to V_k(Y)$, очевидно, линейно и называется *внешней степенью k оператора A*.

◇ **12.5.3.** Действие оператора $A : X \to Y$ на каждую элементарную внешнюю форму описывается формулой

$$(\eta^1 \wedge \dots \wedge \eta^k) \cdot A = (\eta^1 \cdot A) \wedge \dots \wedge (\eta^k \cdot A) \qquad (12.5.278)$$

(здесь $\eta^1, \dots, \eta^k$ – линейные функционалы на Y).

◇ **12.5.4.** Похожим образом, на каждый элементарный поливектор оператор $A : X \to Y$ действует по формуле

$$\vee_k\, A(x_1 \vee \dots \vee x_k) = (Ax_1) \vee \dots \vee (Ax_k) \qquad (12.5.279)$$

(здесь $x_1, \dots, x_k$ – векторы из X).

◇ **12.5.5.** Если $n = \dim X$, то действие оператора $A : X \to X$ на поливекторы степени n в X совпадает с умножением на определитель A:

$$\vee_n Ap = \det A \cdot p, \qquad p \in V_n(X) \qquad (12.5.280)$$

Доказательство. Это достаточно доказать для элементарных поливекторов. Выберем какой-нибудь базис $a_1, ..., a_n$ в X. Для любой последовательности векторов $x_1, ..., x_n \in X$ мы получим

$$\vee_n A(x_1 \vee ... \vee x_n) = (12.5.279) = Ax_1 \vee ... \vee Ax_n =$$
$$= (12.5.268) = \det \left[\frac{Ax}{a}\right] \cdot a_1 \vee ... \vee a_n =$$
$$= (12.3.125) = \det \left(\left[\frac{Aa}{a}\right] \cdot \left[\frac{x}{a}\right] \right) \cdot a_1 \vee ... \vee a_n =$$
$$= (12.3.154) = \underbrace{\det \left[\frac{Aa}{a}\right]}_{\substack{\| \ (12.3.159) \\ \det A}} \cdot \underbrace{\det \left[\frac{x}{a}\right] \cdot a_1 \vee ... \vee a_n}_{\substack{\| \ (12.5.268) \\ x_1 \vee ... \vee x_n}} =$$
$$= \det A \cdot x_1 \vee ... \vee x_n.$$

□

Действие матрицы на форму и на поливектор. Напомним, что формулой (12.3.112)

$$\big(a \cdot M\big)_i = \sum_{k=1}^{m} a_k \cdot M_i^k$$

мы определили действие матрицы

$$M = \begin{pmatrix} M_1^1 & ... & M_m^1 \\ ... & ... & ... \\ M_1^m & ... & M_m^m \end{pmatrix}$$

на произвольную строку векторов $(a_1, \dots, a_m)$ векторного пространства X. В соответствии с этим,

— *действие матрицы M на внешнюю форму* $\omega \in \Lambda_m(X)$ определяется формулой

$$(M \cdot \omega)(a_1, \dots, a_m) := \omega\big((a_1, \dots, a_m) \cdot M\big)$$

— *действие матрицы M на поливектор* $p \in V_m(X)$ определяется формулой

$$(p \cdot M)(\omega) := p(M \cdot \omega)$$

Отметим следующее тождество:

$$\vee_m\big((a_1, ..., a_m) \cdot M\big) = \big(\vee_m\, (a_1, ..., a_m)\big) \cdot M \qquad (12.5.281)$$

Здесь $\vee_m$ – отображение, определенное формулой (12.5.275). Действительно, для всякой внешней формы ω мы получаем:

$$\vee_m\, \big((a_1, ..., a_m) \cdot M\big)(\omega) = (12.3.112) = \vee_m \left(\sum_{k=1}^m a_k \cdot M_1^k, ..., \sum_{k=1}^m a_k \cdot M_m^k \right)(\omega) =$$
$$= \left(\sum_{k=1}^m a_k \cdot M_1^k \vee ... \vee \sum_{k=1}^m a_k \cdot M_m^k \right)(\omega) = \omega \left(\sum_{k=1}^m a_k \cdot M_1^k, ..., \sum_{k=1}^m a_k \cdot M_m^k \right) = \omega\big((a_1, ..., a_m) \cdot M\big) =$$
$$= (M \cdot \omega)(a_1, ..., a_m) = (a_1 \vee ... \vee a_m)(M \cdot \omega) = \vee_m(a_1, ..., a_m)(M \cdot \omega) = \big(\vee_m\, (a_1, ..., a_m) \cdot M\big)(\omega)$$

и теперь опуская аргумент ω мы получаем (12.5.281).

Теорема 12.5.12. *Действие матрицы $M \in \mathbb{R}_m^m$ на произвольную форму $\omega \in \Lambda_m(X)$ и на произвольный поливектор $p \in V_m(X)$ совпадает с умножением ω и p на определитель M:*

$$M \cdot \omega = \det M \cdot \omega \qquad p \cdot M = \det M \cdot p \tag{12.5.282}$$

В частности, действие M на элементарный поливектор $x_1 \vee \dots \vee x_m$ описывается формулой

$$(a_1 \vee \dots \vee a_m) \cdot M = \det M \cdot (a_1 \vee \dots \vee a_m) \tag{12.5.283}$$

Доказательство. Здесь нужно сразу заметить, что достаточно доказать формулу (12.5.283). Идею доказательства удобно описать случаем $m = 2$: если

$$x, y \in X, \qquad M = \begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{pmatrix}$$

то

$$(x \vee y) \cdot M = (\alpha x + \beta y) \vee (\gamma x + \delta y) = \alpha\gamma \cdot \underbrace{x \vee x}_{\substack{\parallel \\ 0}} + \beta\gamma \cdot \underbrace{y \vee x}_{\substack{\parallel \\ -x \vee y}} + \alpha\delta \cdot x \vee y + \beta\delta \cdot \underbrace{y \vee y}_{\substack{\parallel \\ 0}} =$$
$$= -\beta\gamma \cdot x \vee y + \alpha\delta \cdot x \vee y = (\alpha\delta - \beta\gamma) \cdot x \vee y = \det M \cdot (x \vee y)$$

В общем же случае

$$\begin{aligned}(a_1 \vee ... \vee a_m) \cdot M = \big(\vee_m (a_1, ..., a_m)\big) \cdot M = (12.5.281) = \vee_m \big((a_1, ..., a_m) \cdot M\big) = (12.3.112) = \\ = \vee_m \left(\big(a_1 \cdot M_1^1 + ... + a_m \cdot M_1^m\big), ..., \big(a_1 \cdot M_1^m + ... + a_m \cdot M_m^m\big)\right) = \\ = \big(a_1 \cdot M_1^1 + ... + a_m \cdot M_1^m\big) \vee ... \vee \big(a_1 \cdot M_1^m + ... + a_m \cdot M_m^m\big) = \\ = \sum_{\sigma \in \Sigma(m)} (-1)^{\operatorname{sgn} \sigma} \cdot M_1^{\sigma(1)} \cdot ... \cdot M_m^{\sigma(m)} \cdot a_1 \vee ... \vee a_m = \det M \cdot a_1 \vee ... \vee a_m\end{aligned}$$

□

Следствие 12.5.13. *Если $A : X \to Y$ – линейный оператор, и $M \in \mathbb{R}_m^m$ – матрица, то*

$$\vee_m A\big((a_1 \vee ... \vee a_m) \cdot M\big) = \det M \cdot \vee_m A(a_1 \vee ... \vee a_m) \tag{12.5.284}$$

Доказательство.

$$\vee_m A\big((a_1 \vee ... \vee a_m) \cdot M\big) = \vee_m A\big(\det M \cdot (a_1 \vee ... \vee a_m)\big) = \det M \cdot \vee_m A(a_1 \vee ... \vee a_m)$$

□

(d) Ориентация

Линейный векторный порядок. Напомним, что на с.671 мы определили понятие частичного порядка на произвольном множестве X. Предположим теперь, что X – вещественное векторное пространство, и на нем задан неколторый частичный порядок $\preceq$.

- Частичный порядок $\preceq$ на вещественном векторном пространстве X называется *векторным порядком*, если (помимо аксиом O1-O3 на с.671) он удовлетворяет следующим двум дополнительным аксиомам:

  O5. **Трансляционность:** если $a \preceq b$, то для любого $x \in X$ выполняется $a + x \preceq b + x$.

  O6. **Однородность:** если $a \preceq b$, то для любого $\lambda \geqslant 0$ выполняется $\lambda \cdot a \preceq \lambda \cdot b$.

◇ **12.5.6.** На прямой $\mathbb{R}$, рассматриваемой как (одномерное) вещественное векторное пространство обычное сравнение чисел $a \leqslant b$ является векторным порядком, потому что удовлетворяет аксиомам O5 и O6. Но это не единственный возможный векторный порядок, потому что можно положить

$$a \preceq b \iff b \leqslant a,$$

и это тоже будет векторный порядок на $\mathbb{R}$.

◇ **12.5.7.** На плоскости $\mathbb{R}^2$ векторный порядок тоже можно задавать разными способами, например, можно положить

$$(a_1, a_2) \preceq (b_1, b_2) \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} a_1 \leqslant b_1 \\ a_1 \leqslant b_2 \end{cases}.$$

С векторным порядком на векторном пространстве тесно связано следующее важное понятие.

- *Конусом* в вещественном векторном пространстве X называется произвольное множество $C \subseteq X$, удовлетворяющее следующим условиям:

  C1. **Замкнутость относительно сложения**:

  $$\forall x, y \in C \qquad x + y \in C \tag{12.5.285}$$

  C2. **Замкнутость относительно умножения на неотрицательный скаляр**:

  $$\forall \lambda \geqslant 0 \qquad \forall x \in C \qquad \lambda \cdot x \in C \tag{12.5.286}$$

  C3. Множество C содержит только один элемент, именно, 0, остающийся в C при умножении на -1:

  $$\Big(x \in C \quad \& \quad -x \in C \Big) \quad \Longrightarrow \quad x = 0 \tag{12.5.287}$$

Теорема 12.5.14. *Пусть X – вещественное векторное пространство. Тогда*

(a) *Для всякого векторного порядка $\preceq$ на X формула*

$$C = \{x \in X : \ 0 \preceq x\} \tag{12.5.288}$$

определяет конус в X.

(b) *Всякий конус C в X определяет векторный порядок $\preceq$ на X правилом*

$$x \preceq y \quad \Longleftrightarrow \quad y - x \in C, \tag{12.5.289}$$

(c) *Если C – конус в X, определяемый некотороым векторным порядком $\preceq$ на X по правилу* (12.5.288)*, то $\preceq$ восстанавливается по C правилом* (12.5.289)*. И наоборот, если $\preceq$ – векторный порядок на X, определяемый некоторым конусом C в X по правилу* (12.5.289)*, то C восстанавливается по $\preceq$ правилом* (12.5.288).

◇ **12.5.8.** Из теоремы 12.5.14 следует, что на прямой $\mathbb{R}$ существует только два векторных порядка, потому что в $\mathbb{R}$ имеется только два множества, удовлетворяющие условиям $1^\circ - 3^\circ$, а именно

$$C = \{x \in \mathbb{R} : \ x \geqslant 0\}$$

и

$$C = \{x \in \mathbb{R} : \ x \leqslant 0\}.$$

Первое из них является конусом обычного векторного порядка $\leqslant$, определенного на с.123. А второе – конусом противоположного порядка:

$$a \preceq b \quad \Longleftrightarrow \quad b \leqslant a.$$

◇ **12.5.9.** Наоборот, применительно к плоскости $\mathbb{R}^2$ теорема 12.5.14 означает, что здесь существует бесконечно много векторных порядков, потому что конусов в $\mathbb{R}^2$ бесконечно много: помимо конуса

$$C = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : \ x_1 \geqslant 0 \ \& \ x_2 \geqslant 0\}$$

существуют разные другие конусы, получающиеся из этого множества поворотами на разные углы относительно точки 0.

Из примера 12.5.8 сразу следует

Теорема 12.5.15. *Если X – одномерное вещественное векторное пространство*

$$\dim X = 1,$$

то

(i) *на X существует только два векторных паорядка, и*

(ii) *каждый такой порядок линеен (то есть удовлетворяет аксиоме линейности O4 на с.671),*

(iii) *выбрать такой порядок – то же самое, что выбрать какой-нибудь ненулевой элемент $a \in X$ и объявить, что он удовлетворяет неравенству*

$$0 \preceq a.$$

Доказательство. Здесь $X \cong \mathbb{R}$, поэтому в X, как и в $\mathbb{R}$ имеется ровно два конуса, и значит, ровно два векторных порядка. На $\mathbb{R}$ каждый такой порядок линеен, поэтому то же справедливо и для X. Наконец, чтобы выбрать один из этих двух конусов в X достаточно просто указать какой-нибудь вектор $a \in X$ и объявить, что он лежит в этом конусе, то есть удовлетворяет неравенству $0 \preceq a$. □

Ориентация, как порядок на пространстве поливекторов $V_n(X)$. Пусть X – векторное пространство размерности n. Напомним, что по формуле (12.5.267) пространство $V_n(X)$ поливекторов максимальной степени в X одномерно:

$$\dim V_n(X) = 1.$$

По теореме 12.5.15 это означает, что на $V_n(X)$ существуют только два векторных порядка.

- *Ориентацией* на конечномерном вещественном векторном пространстве X называется произвольный (из двух возможных) векторный порядок $\preceq$ на пространстве $V_n(X)$ поливекторов максимальной степени ($n = \dim X$) в X.
- При заданной ориентации $\preceq$ на X ненулевые поливекторы $p \in V_n(X)$, удовлетворяющие условию
$$0 \preceq p, \tag{12.5.290}$$
называются *положительно ориентированными* (относительно ориентации $\preceq$), и для записи этого будет использоваться более привычный символ $<$:
$$p > 0.$$
А ненулевые поливекторы, удовлетворяющие противоположному условию
$$p \preceq 0, \tag{12.5.291}$$
называются *отрицательно ориентированными* (относительно этой ориентации), и записываться это будет так:
$$p < 0.$$
- В частном случае, когда p – элементарный поливектор степени n, то есть конкатенация n векторов $a_1, ..., a_n \in X$,
$$p = a_1 \vee ... \vee a_n,$$
то, в силу свойства 5° на с.744, он будет ненулевым только если векторы $a_1, ..., a_n$ линейно независимы, то есть образуют базис пространства X. Поэтому условие
$$a_1 \vee ... \vee a_n > 0$$
означает, помимо того, что $a_1 \vee ... \vee a_n$ больше нуля в выбранной ориентации $\preceq$, еще что векторы $a_1, ..., a_n$ образуют базис в X. В этом случае мы будем говорить, что $a_1, ..., a_n$ – *положительно ориентированный базис* в X (относительно выбранной ориентации X).
В противоположноий ситуации, когда
$$a_1 \vee ... \vee a_n < 0,$$
векторы $a_1, ..., a_n$ также образуют базис в X, и мы говорим, что $a_1, ..., a_n$ – *отрицательно ориентированный базис* в X (относительно выбранной ориентации X).

По определению, выбрать ориентацию на X – значит выбрать векторный порядок на $V_n(X)$, а это то же самое, что выбрать конус C (из двух возможных) в $V_n(X)$, то есть описать положительно ориентированные поливекторы $p \in V_n(X)$

$$p > 0.$$

А по теореме 12.5.15, чтобы описать все такие поливекторы *достаточно выбрать какой-нибудь один (произвольный) ненулевой поливектор $p \in V_n(X)$, и объявить его положительно ориентированным.*

Теорема 12.5.16. *Пусть $a_1, ..., a_n$ – базис в X, определяющий ориентацию этого пространства:*

$$a_1 \vee .. \vee a_n > 0.$$

Тогда для любой последовательсноти $x_1, ..., x_n \in X$

— *поливектор $x_1 \vee ... \vee x_n$ положительно ориентирован в X, если матрица элементов $x_1, ..., x_n$ в базисе $a_1, ..., a_n$ имеет положительный определитель:*

$$x_1 \vee ... \vee x_n > 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \det \left[\frac{x}{a}\right] > 0;$$

— *поливектор $x_1 \vee ... \vee x_n$ отрицательно ориентирован в X, если матрица элементов $x_1, ..., x_n$ в базисе $a_1, ..., a_n$ имеет отрицательный определитель:*

$$x_1 \vee ... \vee x_n > 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \det \left[\frac{x}{a}\right] < 0.$$

Доказательство. Это следует из формулы (12.5.268):

$$x_1 \vee ... \vee x_n = \det \left[\frac{x}{a}\right] \cdot a_1 \vee ... \vee a_n.$$

Если $a_1 \vee .. \vee a_n > 0$, то $x_1 \vee .. \vee x_n > 0$ эквивалентно $\det \left[\frac{x}{a}\right] > 0$. А $x_1 \vee .. \vee x_n < 0$ эквивалентно $\det \left[\frac{x}{a}\right] < 0$. □

◇ **12.5.10.** В пространстве $\mathbb{R}^n$ условие

$$e_1 \vee ... \vee e_n > 0,$$

в котором e_i – стандартный базис

$$e_1 = (1, 0, ..., 0, 0), ..., e_n = (0, 0, ..., 0, 1)$$

задает ориентацию, которую мы будем также называть *стандартной.* Базисы $b_1, ..., b_n$, ориентированные положительно относительно такой ориентации, мы будем назвать *стандартно ориентированными.* По теореме 12.5.16 это в точности базисы, у которых матрица перехода к стандартному базису e_i имеет положительный определитель:

$$\det \left[\frac{b}{e}\right] > 0.$$

Заметим еще вот что. Всякая ориентация на векторном пространстве X, то есть векторный порядок на пространстве $V_n(X)$ поливекторов максимальной степени, $n = \dim X$, автоматически порождает некоторый векторный порядок на пространстве $\Lambda_n(X)$ внешних форм этой степени на X: если C – конус в пространстве $V_n(X)$, то в пространстве $\Lambda_n(X)$ он порождает множество, состоящее из форм, на которых все поливекторы $p \in C$ неотрицательны

$$\varGamma = \{\omega \in \Lambda_n(X) : \ \forall p \in C \quad p(\omega) \geqslant 0\},$$

и легко проверить, что это множество будет конусом в $\Lambda_n(X)$. Как следствие, оно порождает векторный порядок на $\Lambda_n(X)$.

И наоборот, если нам дан какой-то векторный порядок на $\Lambda_n(X)$, то мы можем рассмотреть его конус $\varGamma$, и тогда множество поливекторов, неотрицательных на $\varGamma$,

$$C = \{p \in V_n(X) : \ \forall \omega \in \varGamma \quad p(\omega) \geqslant 0\},$$

будет, как легко понять, конусом в $V_n(X)$.

Вывод из всего этого, можно сформулировать так.

Теорема 12.5.17. *Следующие действия эквивалентны:*

(i) *задать ориентацию на пространстве X размерности $n = \dim X$;*

(ii) *задать векторный порядок на пространстве поливекторов $V_n(X)$;*

(iii) *задать конус C на пространстве поливекторов $V_n(X)$;*

(iv) *задать векторный порядок на пространстве внешних форм $\Lambda_n(X)$;*

(v) *задать конус $\varGamma$ на пространстве внешних форм $\Lambda_n(X)$.*

Сторона ориентированной гиперплоскости в ориентированном пространстве. Рассмотрим такую ситуацию. Пусть X – конечномерное вещественное векторное пространство размерности n, и пусть Y – подпространство в нем размерности $n-1$. Такое подпространство Y называется *гиперплоскостью* в X.

Пусть далее в X и в Y выбрана ориентация. Зафиксируем какую-нибудь положительную форму на X,

$$\omega \in \Lambda_n(X), \qquad \omega > 0,$$

и какой-нибудь положительно ориентированный базис $a_1, ..., a_{n-1}$ в Y,

$$a_1 \vee ... \vee a_{n-1} \in V_{n-1}(Y), \qquad a_1 \vee ... \vee a_{n-1} > 0.$$

Рассмотрим отображение $f : X \to \mathbb{R}$, определенное правилом

$$f(x) = \omega(a_1 \vee ... \vee a_{n-1} \vee x), \qquad x \in X.$$

Очевидно, это будет линейный функционал на X. Заметим, что его ядром является пространство Y:

$$Y = \{x \in X : \ f(x) = 0\}.$$

Действительно, равенство

$$f(x) = \omega(p \vee x) = \omega(a_1 \vee ... \vee a_{n-1} \vee x) = 0$$

означает по предложению 12.5.5, что векторы $a_1, ..., a_{n-1}, x$ должны быть линейно зависимы. Поскольку при этом $a_1, ..., a_{n-1}$ – линейно независимы, это значит, что x должен выражаться как линейная комбинация $a_1, ..., a_{n-1}$:

$$x = \lambda_1 \cdot a_1 + ... + \lambda_{n-1} \cdot a_{n-1}.$$

То есть $x \in Y$.

Теперь разобьем пространство X на три части: ту, где функция f положительна, где f равна нулю, и где f отрицательна:

$$X_+ = \{x \in X : \ f(x) > 0\}, \quad Y = \{x \in X : \ f(x) = 0\}, \quad X_- = \{x \in X : \ f(x) < 0\}.$$

Гиперплоскость Y лежит между двумя полупространствами X_+ и X_-.

- Мы будем говорить, что полупространство X_+ *примыкает к положительной стороне* ориентированной гиперплоскости Y в ориентированном пространстве X, а полупространство X_- – к ее *отрицательной стороне.*

Глава 13

ЕВКЛИДОВЫ ПРОСТРАНСТВА

§ 1 Евклидовы пространства

Напомним, что невырожденные билинейные формы были определены нами на с.724, а положительные (положительно определенные) на с.731.

- *Евклидовым пространством* называется произвольное конечномерное векторное пространство X с заданной на нем невырожденной положительно определенной симметрической билинейной формой $(x, y) \mapsto \langle x, y\rangle$, то есть удовлетворяющей условиям:
  - **положительная определенность:**
$$\forall x \in X \qquad \big\langle x, x\big\rangle \geqslant 0,$$
  - **невырожденность:**
$$\big\langle x, x\big\rangle = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0 \tag{13.1.1}$$
  - **симметричность:**
$$\big\langle x, y\big\rangle = \big\langle y, x\big\rangle$$
  - **билинейность:**
$$\big\langle \alpha \cdot x + \beta \cdot y, z\big\rangle = \alpha \cdot \big\langle x, z\big\rangle + \beta \cdot \big\langle y, z\big\rangle$$
- Билинейная форма $(x, y) \mapsto \langle x, y\rangle$ называется *скалярным произведением* евклидова пространства X.

! **13.1.1.** Из условия (13.1.1) следует, что скалярное произведение является невырожденной билинейной формой в смысле определения на с. 724, потому что если $x \neq 0$, то взяв $y = x$ мы получим
$$\langle x, y\rangle = \langle x, x\rangle \neq 0.$$

(a) Модуль вектора

- *Модулем вектора* x в евклидовом пространстве X называется число
$$\big|x\big| = \sqrt{\big\langle x, x\big\rangle}.$$
- *Расстоянием* между двумя векторами x и y в евклидовом пространстве X называется число
$$\big|x - y\big| = \sqrt{\big\langle x - y, x - y\big\rangle}.$$

Теорема 13.1.1. *Скалярное произведение выражается через модуль формулой*

$$\langle x, y\rangle = \frac{|x|^2 + |y|^2 - |x - y|^2}{2}, \tag{13.1.2}$$

Доказательство. Это проверяемой прямым вычислением:

$$\frac{|x|^2+|y|^2-|x-y|^2}{2}=\frac{\langle x,x\rangle+\langle y,y\rangle-\langle x-y,x-y\rangle}{2}=$$
$$=\frac{\langle x,x\rangle+\langle y,y\rangle-\big(\langle x,x\rangle-2\langle x,y\rangle+\langle y,y\rangle\big)}{2}=\frac{2\langle x,y\rangle}{2}=\langle x,y\rangle$$

□

Следующее утверждение обобщает теорему 11.1.2 тома 1 и доказывается так же.

Теорема 13.1.2 (неравенство Коши-Шварца)**.** *Если X – векторное пространство со скалярным произведением $\langle\cdot,\cdot\rangle$, то для любых $x,y\in X$ справедливо неравенство Коши-Шварца:*

$$\big\langle x,y\big\rangle\leqslant|x|\cdot\big|y\big|, \tag{13.1.3}$$

Если кроме того $x\neq 0, y\neq 0$, то это неравенство превращается в равенство в том и только в том случае, когда векторы x и y сонаправлены:

$$\big\langle x,y\big\rangle=|x|\cdot\big|y\big|\quad\Leftrightarrow\quad x=\lambda\cdot y,\quad \textit{где}\quad \lambda>0 \tag{13.1.4}$$

Доказательство. 1. Для доказательства (13.1.3) зафиксируем два вектора $x,y\in\mathbb{R}^n$ и рассмотрим многочлен второй степени:

$$f(t)=\langle x+ty,x+ty\rangle=\langle x,x\rangle+2t\langle x,y\rangle+t^2\langle y,y\rangle=|x|^2+2t\langle x,y\rangle+t^2|y|^2$$

Поскольку $\langle x+ty,a+ty\rangle\geqslant 0$, этот многочлен должен при любом значении t быть неотрицателен:

$$f(t)=|x|^2+2t\langle x,y\rangle+t^2|y|^2\geqslant 0,\quad \forall t\in\mathbb{R}$$

Значит, он не может иметь двух вещественных корней, и поэтому его дискриминант должен быть неположительным:

$$D=4\langle x,y\rangle^2-4\cdot|x|^2\cdot|y|^2\leqslant 0$$
$$\Downarrow$$
$$\langle x,y\rangle^2\leqslant|x|^2\cdot|y|^2$$
$$\Downarrow$$
$$\langle x,y\rangle\leqslant\big|\langle x,y\rangle\big|\leqslant|x|\cdot|y|$$

2. Теперь докажем (13.1.4). Если $\langle x,y\rangle=|x|\cdot|y|$, то положив $\lambda=\frac{|x|}{|y|}$, получим

$$|x-\lambda y|^2=\langle x-\lambda y,x-\lambda y\rangle=\langle x,x\rangle-2\lambda\underbrace{\langle x,y\rangle}_{\substack{\parallel\\ |x||y|}}+\lambda^2\langle y,y\rangle=|x|^2-2\lambda|x||y|+\lambda^2|y|^2=\big(|x|-\underset{\substack{\parallel\\ \frac{|x|}{|y|}}}{\lambda}|y|\big)^2=0$$

То есть, $x=\lambda y$. □

Свойства модуля

1°. **Неотрицательность:**

$$|x|\geqslant 0,\quad x\in\mathbb{R}^n \tag{13.1.5}$$

2°. **Однородность:**

$$\big|\lambda\cdot x\big|=|\lambda|\cdot|x|\,,\quad x\in\mathbb{R}^n,\lambda\in\mathbb{R} \tag{13.1.6}$$

3°. **Неравенство треугольника:**

$$|x+y|\leqslant|x|+|y|\,,\quad x,y\in\mathbb{R}^n \tag{13.1.7}$$

4°. **Обратное неравенство треугольника:**

$$|x-y|\geqslant|x|-|y|\,,\quad x,y\in\mathbb{R}^n \tag{13.1.8}$$

5°. **Тождество параллелограмма:**

$$\frac{|x+y|^2+|x-y|^2}{2}=|x|^2+|y|^2,\quad x,y\in\mathbb{R}^n \tag{13.1.9}$$

Доказательство. Первые два свойства очевидны, докажем неравенство треугольника (13.1.7):

$$|x+y|\leqslant|x|+|y| \iff \underbrace{|x+y|^2}_{\substack{\| \\ \langle x+y,x+y\rangle \\ \| \\ \langle x,x\rangle+2\langle x,y\rangle+\langle y,y\rangle}} \leqslant \underbrace{\big(|x|+|y|\big)^2}_{\substack{\| \\ |x|^2+2\cdot|x|\cdot|y|+|y|^2 \\ \| \\ \langle x,x\rangle+2\cdot|x|\cdot|y|+\langle y,y\rangle}} \iff \underbrace{\langle x,y\rangle\leqslant|x|\cdot|y|}_{\substack{\uparrow \\ \text{неравенство} \\ \text{Коши-Шварца (13.1.3)}}}$$

Обратное неравенство треугольника (13.1.8) теперь следует из (13.1.7): если обозначить $a=x+y$ и $b=y$, то мы получим

$$|x+y|\leqslant|x|+|y| \iff |a|\leqslant|a-b|+|b| \iff |a|-|b|\leqslant|a-b|$$

– это и есть (13.1.8), только с заменой $x=a$ и $y=b$.

Тождество параллелограмма доказывается прямым вычислением:

$$\frac{|x+y|^2+|x-y|^2}{2}=\frac{|x|^2+2\langle x,y\rangle+|y|^2+|x|^2-2\langle x,y\rangle+|y|^2}{2}=\frac{2|x|^2+2|y|^2}{2}=|x|^2+|y|^2$$

□

◇ **13.1.2. Координатное пространство** $\mathbb{R}_n$ (числовых строк длины $n\in\mathbb{N}$) является евклидовым пространством со скалярным произведением

$$\langle x,y\rangle=x_1\cdot y_1+...+x_n\cdot y_n \tag{13.1.10}$$

и модулем

$$|x|=\sqrt{\langle x,x\rangle}=\sqrt{(x_1)^2+...+(x_n)^2}. \tag{13.1.11}$$

Расстоянием между точками $x,y\in\mathbb{R}^n$ будет число

$$|x-y|=\sqrt{\big(x_1-y_1\big)^2+...+\big(x_n-y_n\big)^2}.$$

Неравенство Коши-Шварца (13.1.3) в этом пространстве принимает вид

$$\sum_{i=1}^n x_i\cdot y_i\leqslant\sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}\cdot\sqrt{\sum_{i=1}^n y_i^2}. \tag{13.1.12}$$

Этот пример евклидова пространства можно считать руководящим, потому что в силу теоремы о классификации 13.1.15, которую мы докажем ниже, все евклидовы пространства имеют в некотором смысле (с точки зрения этой науки) вид $\mathbb{R}^n$.

◇ **13.1.3.** Ниже на с.761 мы увидим, что пространство линейных функционалов X^* на данном евклидовом пространстве X также является евклидловым.

◇ **13.1.4.** Точно так же на с.(13.1.34) мы увидим, что пространство операторов $\mathcal{L}(X,Y)$ между евклидовыми пространствами X и Y допускает структуру евклидова пространства.

◇ **13.1.5.** На с.770 мы увидим, что пространство $V_m(X)$ поливекторов степени m на евклидовом пространстве X также является евклидовым.

Теорема 13.1.3. *Для всякого вектора $x\in\mathbb{R}^n$ справедлива формула:*

$$|x|=\sup_{|y|=1}\big\langle x,y\big\rangle \tag{13.1.13}$$

Доказательство. Во-первых,

$$\sup_{|y|=1}\big\langle x,y\big\rangle\leqslant(13.1.3)\leqslant\sup_{|y|=1}|x|\cdot\big|y\big|=\sup_{|y|=1}|x|\cdot1=|x|$$

и, во-вторых,

$$\sup_{|y|=1}\big\langle x,y\big\rangle\geqslant\left(\begin{array}{c}\text{верхняя грань функции на множестве}\\ \text{не меньше, чем значение на конкретном}\\ \text{элементе, в частности на элементе}\\ y=\frac{x}{|x|}\end{array}\right)\geqslant\left\langle x,\frac{x}{|x|}\right\rangle=\frac{1}{|x|}\cdot\big\langle x,x\big\rangle=\frac{1}{|x|}\cdot|x|^2=|x|$$

□

(b) Ортогональность

Ортогональные векторы.

- В соответствии с определением на с.723, два вектора x и y в евклидовом пространстве X называются *ортогональными*, если их скалярное произведение нулевое:

$$x \perp y \quad \Longleftrightarrow \quad \langle x, y\rangle = 0,$$

Предложение 13.1.4. *Если $x \perp y$, то*

$$|x+y|^2 = |x-y|^2 = |x|^2 + |y|^2. \tag{13.1.14}$$

Доказательство. Прежде всего,

$$|x+y|^2 = |x|^2 + \underbrace{2\langle x, y\rangle}_{\substack{\parallel \\ 0}} + |y|^2 = |x|^2 - \underbrace{2\langle x, y\rangle}_{\substack{\parallel \\ 0}} + |y|^2 = |x-y|^2$$

Отсюда уже следует, что тождество параллелограмма в этой ситуации можно переписать так:

$$|x|^2 + |y|^2 = \frac{|x+y|^2 + \overbrace{|x-y|^2}^{\substack{|x+y|^2 \\ \parallel}}}{2} = |x+y|^2 .$$

□

Ортонормированный базис. В соответствии с определением на с.727, *ортонормированным базисом* в евклидовом пространстве X называется всякая последовательность векторов $\mathbf{e} = (e_1, ..., e_n)$ этого пространства (длины n, равной размерности X), удовлетворяющая условию

$$\langle e_i, e_j\rangle = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases} \tag{13.1.15}$$

Из теоремы 12.4.15 следует

Теорема 13.1.5. *В евклидовом пространстве X всегда существует ортогональный нормированный базис.*

С другой стороны, из теоремы 12.4.17 следует

Теорема 13.1.6. *Если $\mathbf{e} = (e_1, ..., e_n)$ – ортонормированный базис в евклидовом пространстве X, то справедливы тождества:*

$$\left[\frac{x}{\mathbf{e}}\right]^i = \langle x, e_i\rangle, \qquad i = 1, ..., n; \tag{13.1.16}$$

$$x = \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i\rangle \cdot e_i, \qquad x \in X; \tag{13.1.17}$$

$$\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i\rangle \cdot \langle y, e_i\rangle, \qquad x, y \in X. \tag{13.1.18}$$

$$|x| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i\rangle^2}, \qquad x \in X. \tag{13.1.19}$$

Ортогональное проектирование. В соответствии с определениями на с.723 и 725,

— *ортогональным дополнением* к подпространству Y в евклидовом пространстве X называется подпространство

$$Y^{\perp} = \{x \in X : \quad \forall y \in Y \quad \langle x, y\rangle = 0\}, \tag{13.1.20}$$

— *ортогональным проектором* в евклидовом пространстве X называется проектор P (то есть оператор, удовлетворяющий равенству $P^2 = P$), ядро и образ которого являются ортогональными дополнениями друг для друга:

$$\operatorname{Ker} P^{\perp} = \mathsf{Im}\, P, \qquad \operatorname{Ker} P = \mathsf{Im}\, P^{\perp}. \tag{13.1.21}$$

Теорема 13.1.7. *Для всякого подпространства Y в евклидовом пространстве X выполняется следующее:*

(i) $Y \cap Y^{\perp} = 0$,

(ii) $Y = Y^{\perp\perp}$,

(iii) $X = Y \oplus Y^{\perp}$.

(iv) *существует ортогональный проектор вдоль Y,*

(v) *существует ортогональный проектор на Y.*

Доказательство. Здесь можно сослаться на теорему 12.4.14: ограничение скалярного произведения с X на любое подпространство, в частности, на $Y^{\perp}$, является невырожденной формой из-за условия $\langle x, x\rangle > 0$ при $x \neq 0$. Это означает, что справедливо утверждение (ii) теоремы 12.4.14, а значит и все остальные утверждения этой теоремы. □

Свойства ортогональных проекторов:

1°. *Если P – ортогональный проектор на Y, то $I - P$ – ортогональный проектор на $Y^{\perp}$.*

2°. *Для любого подпространства Y евклидова пространства X ортогональный проектор на Y можно определить формулой*

$$P(x) = \sum_{i=1}^{m} \langle x, e_i\rangle \cdot e_i, \qquad x \in X, \tag{13.1.22}$$

где $(e_1, ..., e_m)$ – произвольный ортонормированный базис в Y (и такое определение не зависит от выбора $(e_1, ..., e_m)$).

3°. *Всякий ортогональный проектор P в евклидовом пространстве удовлетворяет неравенству*

$$|P(x)| \leqslant |x|, \qquad x \in X, \tag{13.1.23}$$

причем равенство достигается только в случае $P(x) = x$:

$$|P(x)| = |x| \qquad \Longleftrightarrow \qquad P(x) = x \tag{13.1.24}$$

Доказательство. 1. Пусть P – ортогональный проектор на Y, то есть $P^2 = P$, $\mathsf{Im}\, P = Y$ и $\operatorname{Ker} P = Y^{\perp}$. Тогда оператор $I - P$ тоже будет проектором в силу свойства 1° на с.690. А равенства

$$\mathsf{Im}(I - P) = (12.2.97) = \operatorname{Ker} P = Y^{\perp}, \quad \operatorname{Ker}(I - P) = (12.2.97) = \mathsf{Im}\, P = Y,$$

означают, что $I - P$ – ортогональный проектор на $Y^{\perp}$.

2. Пусть оператор P определен равенством (13.1.22). Чтобы убедиться, что он является ортогональным проектором на Y, нам достаточно просто проверить равенства

$$\operatorname{Ker} P = Y^{\perp}, \qquad \mathsf{Im}\, P = Y,$$

потому что по свойству 3° на с.691, они однозначно определяют проектор на Y вдоль $Y^{\perp}$.

Действительно, во-первых,

$$x \in \operatorname{Ker} P \quad \Leftrightarrow \quad P(x) = \sum_{i=1}^{m} \langle x, e_i\rangle \cdot e_i = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \forall i = 1, ..., m \quad \langle x, e_i\rangle = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \forall y \in Y = \mathsf{span}\{e_1, ..., e_m\} \quad \langle x, \underset{\sum_{i=1}^{m} \lambda^i \cdot e_i}{\underset{\shortparallel}{y}} \rangle = \sum_{i=1}^{m} \lambda^i \cdot \langle x, e_i\rangle = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \in Y^{\perp}.$$

И, во-вторых,

$$y \in \operatorname{Im} P \quad \Leftrightarrow \quad \exists x \in X \quad y = P(x) = \sum_{i=1}^{m} \langle x, e_i \rangle \cdot e_i \quad \Leftrightarrow \quad y \in \operatorname{span}\{e_1, ..., e_m\} = Y.$$

3. Пусть P – ортогональный проектор на Y, а $Q = I - P$ – ортогональный проектор на $Y^\perp$. Тогда всякий вектор $x \in X$ разложим в сумму

$$x = P(x) + Q(x), \qquad P(x) \perp Q(x),$$

поэтому

$$|x|^2 = (13.1.14) = |P(x)|^2 + \underbrace{|Q(x)|^2}_{\substack{\geqslant \\ 0}} \geqslant |P(x)|^2\,,$$

и это доказывает (13.1.23). Более того, из этой цепочки видно, что равенство $|x|^2 = |P(x)|^2$ возможно только если $Q(x) = 0$, а это эквивалентно равенству $x = P(x)$. □

Ортогонализация Грама-Шмидта в евклидовом пространстве. *Матрицей Грама* последовательности $a_1, ..., a_k$ векторов евклидова пространства X называется матрица билинейной формы $\langle \cdot, \cdot \rangle$ на этих векторах:

$$\Big\langle (a_1, ..., a_k), (a_1, ..., a_k) \Big\rangle = \begin{pmatrix} \langle a_1, a_1 \rangle & \langle a_1, a_2 \rangle & ... & \langle a_1, a_k \rangle \\ \langle a_2, a_1 \rangle & \langle a_2, a_2 \rangle & ... & \langle a_2, a_k \rangle \\ ... & ... & ... & ... \\ \langle a_k, a_1 \rangle & \langle a_k, a_2 \rangle & ... & \langle a_k, a_k \rangle \end{pmatrix}$$

Предложение 13.1.8. *У матрицы Грама произвольного базиса $\mathbf{b} = (b_1, ..., b_n)$ в евклидовом пространстве X все главные миноры отличны от нуля*[1]*:*

$$\forall k = 1, ..., n \qquad \det \begin{pmatrix} \langle b_1, b_1 \rangle & \dots & \langle b_1, b_k \rangle \\ \dots & \dots & \dots \\ \langle b_k, b_1 \rangle & \dots & \langle b_k, b_k \rangle \end{pmatrix} \neq 0 \tag{13.1.25}$$

Доказательство. Скалярное произведение $\langle \cdot, \cdot \rangle$ невырождено на любом подпространстве Y в X, в частности, на линейной оболочке $Y = \operatorname{span}\{b_1, ..., b_k\}$ первых k векторов базиса $\mathbf{b}$. Поэтому по теореме 12.4.16 матрица формы $\langle \cdot, \cdot \rangle$ на базисе $(b_1, ..., b_k)$ пространства $Y = \operatorname{span}\{b_1, ..., b_k\}$ должна быть невырождена. □

Это наблюдение позволяет следующим образом упростить теорему Грама-Шмидта 12.4.18 для случая евклидова пространства:

Теорема 13.1.9 (Грам, Шмидт)**.** *Для всякого базиса $b = (b_1, ..., b_n)$ (необязательно ортогонального) в евклидовом пространстве X найдется (единственный) ортогональный базис $\mathbf{e} = (e_1, ..., e_n)$ в X такой, что всякий вектор e_k выражается через векторы $b_1, ..., b_k$, причем коэффициент при b_k равен 1:*

$$e_k = \sum_{i=1}^{k-1} \lambda_k^i \cdot b_i + b_k \tag{13.1.26}$$

Как следствие,

(i) матрица $\left[\frac{\mathbf{e}}{b}\right]$ перехода от базиса b к базису $\mathbf{e}$ является нижнетреугольной с единицами на диагонали,

$$\left[\frac{\mathbf{e}}{b}\right] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \lambda_1^1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \lambda_2^1 & \lambda_2^2 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_n^1 & \lambda_n^2 & \lambda_n^3 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

[1] Из свойства 1° ниже на с.766 будет следовать, что главные миноры матрицы Грама на любом базисе $\mathbf{b} = (b_1, ..., b_n)$ не просто отличны от нуля, но всегда положительны.

(ii) *для всякого $k = 1, ..., n$ выполняется равенство определителей:*

$$\det\begin{pmatrix} \langle b_1, b_1\rangle & \langle b_1, b_2\rangle & \dots & \langle b_1, b_k\rangle \\ \langle b_2, b_1\rangle & \langle b_2, b_2\rangle & \dots & \langle b_2, b_k\rangle \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \langle b_k, b_1\rangle & \langle b_k, b_2\rangle & \dots & \langle b_k, b_k\rangle \end{pmatrix} =$$

$$= \det\begin{pmatrix} \langle e_1, e_1\rangle & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \langle e_2, e_2\rangle & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \langle e_k, e_k\rangle \end{pmatrix} = |e_1|^2 \cdot ... \cdot |e_k|^2 \qquad (13.1.27)$$

Этот базис $\mathbf{e} = (e_1, ..., e_n)$ *можно определить индуктивными соотношениями*

$$e_1 = b_1, \qquad e_k = b_k - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\langle b_k, e_i\rangle}{|e_i|^2} \cdot e_i. \qquad (13.1.28)$$

и он называется ортогонализацией Грама-Шмидта *базиса* $\mathbf{b}$.

(c) Евклидова структура на пространстве функционалов X^*

Если X – евклидово пространство, то его пространство линейных функционалов X^* обладает естественным скалярным произведением, о котором мы поговорим здесь.

Скалярное произведение в X^*. Пусть X – евклидово пространство и $e = (e_1, ..., e_n)$ – его ортонормированный базис. Для любых двух линейных функционалов $f, g \in X^*$ их *скалярным произведением* называется число

$$\langle f, g\rangle = \sum_{i=1}^{n} f(e_i) \cdot g(e_i) \qquad (13.1.29)$$

Свойства скалярного произведения в X^*:

1^0. *Для любых двух линейных функционалов $f, g \in X^*$ их скалярное произведение $\langle f, g\rangle$ не зависит от выбора ортонормированного базиса e в X.*

2^0. *Операция $(f, g) \mapsto \langle f, g\rangle$ обладает свойствами абстрактного скалярного произведения, определенного на с.755, и поэтому превращает сопряженное пространство X^* в евклидово пространство.*

3^0. *Если $e = (e_1, ..., e_n)$ – ортонормированный базис в X, то соряженный ему базис*

$$\left[\frac{1}{e}\right] = \left(\left[\frac{1}{e}\right]^1, ..., \left[\frac{1}{e}\right]^n\right)$$

будет ортонормированным в X^*.

Доказательство. 1. Пусть $b = (b_1, ..., b_n)$ – какой-нибудь другой ортонормированный базис в X. Тогда

$$\langle f, g\rangle = (13.1.29) = \sum_{i=1}^{n} f(e_i) \cdot g(e_i) = (12.2.69) = \sum_{i=1}^{n} f\Big(\sum_{j=1}^{n} \left[\frac{e_i}{b}\right]^j \cdot b_j\Big) \cdot g\Big(\sum_{k=1}^{n} \left[\frac{e_i}{b}\right]^k \cdot b_k\Big) =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} f(b_j) \cdot \sum_{k=1}^{n} \Big(\sum_{i=1}^{n} \left[\frac{e_i}{b}\right]^j \cdot \left[\frac{e_i}{b}\right]^k\Big) \cdot g(b_k) = (13.1.16) = \sum_{j=1}^{n} f(b_j) \cdot \sum_{k=1}^{n} \Big(\sum_{i=1}^{n} \langle e_i, b_j\rangle \cdot \langle e_i, b_k\rangle\Big) \cdot g(b_k) =$$

$$= (13.1.18) = \sum_{j=1}^{n} f(b_j) \cdot \sum_{k=1}^{n} \langle b_j, b_k\rangle \cdot g(b_k) = (13.1.15) = \sum_{j=1}^{n} f(b_j) \cdot g(b_j).$$

То есть $\langle f, g\rangle$ выражается через b_j по той же формуле (13.1.29), только с подставленным вместо базиса e базисом b. Это и нужно было доказать в 1°.

2. Во втором утверждении нужно проверить свойства положительной определенности, симметричности, билинейности и невырожденности операции $(f,g)\mapsto\langle f,g\rangle$. Это можно считать очевидным.

3. Если $e=(e_1,...,e_n)$ – ортонормированный базис в X, то для $i\ne j$ мы получаем

$$\left\langle\left[\frac{1}{e}\right]^i,\left[\frac{1}{e}\right]^j\right\rangle=(13.1.29)=\sum_{k=1}^n\underbrace{\left[\frac{1}{e}\right]^i(e_k)}_{\substack{\parallel\\ 0\\ \text{при } k\ne i}}\cdot\underbrace{\left[\frac{1}{e}\right]^j(e_k)}_{\substack{\parallel\\ 0\\ \text{при } k\ne j}}=0,$$

а с другой стороны,

$$\left\langle\left[\frac{1}{e}\right]^i,\left[\frac{1}{e}\right]^i\right\rangle=(13.1.29)=\sum_{k=1}^n\underbrace{\left[\frac{1}{e}\right]^i(e_k)}_{\substack{\parallel\\ 0\\ \text{при } k\ne i}}\cdot\underbrace{\left[\frac{1}{e}\right]^i(e_k)}_{\substack{\parallel\\ 0\\ \text{при } k\ne i}}=\underbrace{\left[\frac{1}{e}\right]^i(e_i)}_{\substack{\parallel\\ 1}}\cdot\underbrace{\left[\frac{1}{e}\right]^i(e_i)}_{\substack{\parallel\\ 1}}=1.$$

$\square$

Градиент линейного функционала. Пусть X – евклидово пространство и $e=(e_1,...,e_n)$ – его ортонормированный базис. Для любого линефного функционала $f:X\to\mathbb{R}$ его *градиентом* называется вектор

$$\nabla f=\sum_{i=1}^n f(e_i)\cdot e_i. \tag{13.1.30}$$

Свойства градиента линейного функционала:

1^0. *Градиент ∇f линейного функционала $f:X\to\mathbb{R}$ не зависит от выбора ортонормированного базиса $e=(e_1,...,e_n)$ в X.*

2^0. *Для всякого ортонормированного базиса $e=(e_1,...,e_n)$ в X справедливы равенства*

$$\nabla\left[\frac{1}{e}\right]^j=e_i,\qquad i=1,...,n. \tag{13.1.31}$$

3^0. *Операция взятия градиента $f\mapsto\nabla f$ является биекцией векторных пространств X^* и X:*

$$X^*\cong X \tag{13.1.32}$$

и удовлетворяет тождеству

$$\langle\nabla f,\nabla g\rangle=\langle f,g\rangle,\qquad f,g\in X^*. \tag{13.1.33}$$

Доказательство. 1. Пусть $b=(b_1,...,b_n)$ – какой-нибудь другой ортонормированный базис в X. Тогда

$$\nabla f=(13.1.30)=\sum_{i=1}^n f(e_i)\cdot e_i=(12.2.69)=\sum_{i=1}^n f\Big(\sum_{j=1}^n\left[\frac{e_i}{b}\right]^j\cdot b_j\Big)\cdot\Big(\sum_{k=1}^n\left[\frac{e_i}{b}\right]^k\cdot b_k\Big)=$$
$$=\sum_{j=1}^n f(b_j)\cdot\sum_{k=1}^n\Big(\sum_{i=1}^n\left[\frac{e_i}{b}\right]^j\cdot\left[\frac{e_i}{b}\right]^k\Big)\cdot b_k=(13.1.16)=\sum_{j=1}^n f(b_j)\cdot\sum_{k=1}^n\Big(\sum_{i=1}^n\langle e_i,b_j\rangle\cdot\langle e_i,b_k\rangle\Big)\cdot b_k=$$
$$=(13.1.18)=\sum_{j=1}^n f(b_j)\cdot\sum_{k=1}^n\langle b_j,b_k\rangle\cdot b_k=(13.1.17)=\sum_{j=1}^n f(b_j)\cdot b_j.$$

То есть ∇f выражается через b_j по той же формуле (13.1.30), только с подставленным вместо базиса e базисом b. Это и нужно было доказать в 1°.

2. Равенство (13.1.31) проверяется вычислением:

$$\nabla \left[\frac{1}{e}\right]^j = \sum_{i=1}^n \underbrace{\left[\frac{1}{e}\right]^j (e_i)}_{\substack{\| \\ 0 \\ \text{при } i\ne j}} \cdot e_i = \left[\frac{1}{e}\right]^i (e_i)\cdot e_i = e_i.$$

3. Отображение $f \mapsto \nabla f$, очевидно, линейно. При этом, в силу (13.1.31), ∇ отображает базис в X^* в базис в X. Это означает, что ∇ – биективное отображение. Чтобы доказать (13.1.33), выберем $f, g \in X^*$, тогда

$$\langle \nabla f, \nabla g\rangle = (13.1.30) = \left\langle \sum_{i=1}^n f(e_i)\cdot e_i, \sum_{j=1}^n g(e_j)\cdot e_j \right\rangle =$$

$$= \sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n f(e_i)\cdot g(e_j)\cdot \langle e_i e_j\rangle = \sum_{i=1}^n f(e_i)\cdot g(e_i) = (13.1.29) = \langle f, g\rangle.$$

□

(d) Евклидова структура на пространстве операторов $\mathcal{L}(X,Y)$

Если X и Y – евклидовы пространства, то пространство линейных операторов $\mathcal{L}(X,Y)$ обладает естественным скалярным произведением. Здесь мы опишем эту конструкцию.

Скалярное произведение в $\mathcal{L}(X,Y)$. Пусть X и Y – евклидовы пространства, и $e = (e_1, ..., e_n)$ – ортонормированный базис в X. Для любых двух линейных операторов $A, B \in \mathcal{L}(X,Y)$ их *скалярным произведением* называется число

$$\langle A, B\rangle = \sum_{i=1}^n \langle A(e_i), B(e_i)\rangle \tag{13.1.34}$$

Свойства скалярного произведения в $\mathcal{L}(X,Y)$:

1^0. *Для любых двух операторов $A, B \in \mathcal{L}(X,Y)$ их скалярное произведение $\langle A, B\rangle$ не зависит от выбора ортонормированного базиса e в X.*

2^0. *Операция $(A,B) \mapsto \langle A, B\rangle$ обладает свойствами абстрактного скалярного произведения, определенного на с.755, и поэтому превращает пространство операторов $\mathcal{L}(X,Y)$ в евклидово пространство.*

3^0. *Если $e = (e_1, ..., e_n)$ – ортонормированный базис в X, а $f = (f_1, ..., f_n)$ – ортонормированный базис в Y, то система операторов*

$$\left[\frac{1}{e}\right]^i \odot f_j$$

действующих по формуле

$$\left[\frac{1}{e}\right]^i \odot f_j(x) = \left[\frac{x}{e}\right]^i \cdot f_j, \qquad x \in X,$$

будет ортонормированным базисом в $\mathcal{L}(X,Y)$.

Доказательство. 1. Пусть $b = (b_1, ..., b_n)$ – какой-нибудь другой ортонормированный базис в X. Тогда

$$\langle A, B\rangle = (13.1.29) = \sum_{i=1}^n \langle A(e_i), B(e_i)\rangle = (12.2.69) = \sum_{i=1}^n \left\langle A\Big(\sum_{j=1}^n \left[\frac{e_i}{b}\right]^j\cdot b_j\Big), B\Big(\sum_{k=1}^n \left[\frac{e_i}{b}\right]^k \cdot b_k\Big)\right\rangle =$$

$$= \sum_{j=1}^n \left\langle A(b_j), \sum_{k=1}^n \Big(\sum_{i=1}^n \left[\frac{e_i}{b}\right]^j \cdot \left[\frac{e_i}{b}\right]^k\Big)\cdot B(b_k)\right\rangle = (13.1.16) =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \left\langle A(b_j), \sum_{k=1}^{n} \Big(\sum_{i=1}^{n} \langle e_i, b_j\rangle \cdot \langle e_i, b_k\rangle \Big) \cdot B(b_k) \right\rangle = (13.1.18) = \sum_{j=1}^{n} \left\langle A(b_j), \sum_{k=1}^{n} \langle b_j, b_k\rangle \cdot B(b_k) \right\rangle =$$
$$= (13.1.15) = \sum_{j=1}^{n} \langle A(b_j), B(b_j)\rangle .$$

То есть $\langle A, B\rangle$ выражается через b_j по той же формуле (13.1.34), только с подставленным вместо базиса e базисом b. Это и нужно было доказать в 1°.

2. Во втором утверждении нужно проверить свойства положительной определенности, симметричности, билинейности и невырожденности операции $(A, B) \mapsto \langle A, B\rangle$. Это можно считать очевидным.

3. Если $e = (e_1, ..., e_n)$ – ортонормированный базис в X, а $f = (f_1, ..., f_n)$ – ортонормированный базис в Y, то для $i \neq i'$ и любых j и j' мы получаем

$$\left\langle \left[\frac{1}{e}\right]^i \odot f_j, \left[\frac{1}{e}\right]^{i'} \odot f_{j'} \right\rangle = (13.1.34) = \sum_{k=1}^{n} \Big\langle \underbrace{\left[\frac{1}{e}\right]^i (e_k)}_{\substack{\parallel \\ 0 \\ \text{при } k\neq i}} \cdot f_j, \underbrace{\left[\frac{1}{e}\right]^{i'} (e_k)}_{\substack{\parallel \\ 0 \\ \text{при } k\neq i'}} \cdot f_{j'} \Big\rangle = 0.$$

Для случая $i = i'$ и $j \neq j'$

$$\left\langle \left[\frac{1}{e}\right]^i \odot f_j, \left[\frac{1}{e}\right]^{i'} \odot f_{j'} \right\rangle = (13.1.34) = \sum_{k=1}^{n} \Big\langle \underbrace{\left[\frac{1}{e}\right]^i (e_k)}_{\substack{\parallel \\ 0 \\ \text{при } k\neq i}} \cdot f_j, \underbrace{\left[\frac{1}{e}\right]^{i} (e_k)}_{\substack{\parallel \\ 0 \\ \text{при } k\neq i}} \cdot f_{j'} \Big\rangle =$$
$$= \Big\langle \underbrace{\left[\frac{1}{e}\right]^i (e_i)}_{\substack{\parallel \\ 1}} \cdot f_j, \underbrace{\left[\frac{1}{e}\right]^{i} (e_i)}_{\substack{\parallel \\ 1}} \cdot f_{j'} \Big\rangle = \langle f_j, f_{j'}\rangle = 0.$$

Наконец, для случая $i = i'$ и $j = j'$ мы получим

$$\left\langle \left[\frac{1}{e}\right]^i \odot f_j, \left[\frac{1}{e}\right]^{i} \odot f_{j} \right\rangle = (13.1.34) = \sum_{k=1}^{n} \Big\langle \underbrace{\left[\frac{1}{e}\right]^i (e_k)}_{\substack{\parallel \\ 0 \\ \text{при } k\neq i}} \cdot f_j, \underbrace{\left[\frac{1}{e}\right]^{i} (e_k)}_{\substack{\parallel \\ 0 \\ \text{при } k\neq i}} \cdot f_{j} \Big\rangle =$$
$$= \Big\langle \underbrace{\left[\frac{1}{e}\right]^i (e_i)}_{\substack{\parallel \\ 1}} \cdot f_j, \underbrace{\left[\frac{1}{e}\right]^{i} (e_i)}_{\substack{\parallel \\ 1}} \cdot f_{j} \Big\rangle = \langle f_j, f_{j}\rangle = 1.$$

□

Модуль и норма оператора. Если $A : X \to Y$ – линейный оператор между евклидовыми пространствами, то его *модулем* называется его модуль как вектора в евклидовом пространстве $\mathcal{L}(X, Y)$:

$$|A| = \sqrt{\langle A, A\rangle} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \langle Ae_i, Ae_i\rangle} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |Ae_i|^2} \tag{13.1.35}$$

($e = (e_1, ..., e_n)$ – произвольный ортонормированный базис в X, и правая часть не зависит от выбора e в силу свойства 1° на с.763).

Единичным шаром евклидова пространства X называется множество

$$B = \{x \in X : \ |x| \leqslant 1\}.$$

Лемма 13.1.10. *У всякого линейного оператора $A : X \to Y$ между двумя евклидовыми пространствами X и Y множество значений на единичном шаре в X ограничено модулем оператора A:*

$$\sup_{|x|\leqslant 1} |A(x)| \leqslant |A|\,. \tag{13.1.36}$$

Доказательство. При $|x| \leqslant 1$ имеем:

$$|A(x)| = (13.1.17) = \left| A\left(\sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i\rangle \cdot e_i\right)\right| = \left|\sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i\rangle \cdot A(e_i)\right| \leqslant (13.1.7) \leqslant \sum_{i=1}^{n} |\langle x, e_i\rangle \cdot A(e_i)| =$$

$$= (13.1.6) = \sum_{i=1}^{n} |\langle x, e_i\rangle| \cdot |A(e_i)| \leqslant (13.1.12) \leqslant \underbrace{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} |\langle x, e_i\rangle|^2}}_{\substack{\| \,(13.1.19)\\ |x|\\ \wedge\!\backslash\\ 1}} \cdot \underbrace{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} |A(e_i)^2|}}_{\substack{\|\\ |A|}} \leqslant |A|\,.$$

□

- *Нормой* линейного оператора $A : X \to Y$ на евклидовых пространствах называется число

$$\|A\| = \sup_{|x|\leqslant 1} \big|A(x)\big| \tag{13.1.37}$$

(в силу (13.1.36), величина справа конечна).

Свойства нормы в $\mathcal{L}(X, Y)$:

1^0. *Для всякого линейного оператора $A : X \to Y$ и любого вектора $x \in X$*

$$|A(x)| \leqslant \|A\| \cdot |x|, \qquad x \in X \tag{13.1.38}$$

2^0. *Норма оператора удволетворяет двойному неравенству*

$$\frac{1}{\sqrt{\dim X}} \cdot |A| \leqslant \|A\| \leqslant |A| \tag{13.1.39}$$

Доказательство. 1. Из (13.1.37) следует, что для всякого вектора p со свойством $|p| \leqslant 1$ выполняется неравенство

$$|A(p)| \leqslant \|A\|\,.$$

Поэтому для любого $x \neq 0$, из очевидного равенства $\left|\frac{x}{|x|}\right| = 1$ должно следовать

$$\left|A\left(\frac{x}{|x|}\right)\right| \leqslant \|A\|$$

Отсюда уже получаем

$$|A(x)| = \left|A\left(|x| \cdot \frac{x}{|x|}\right)\right| = \left||x| \cdot A\left(\frac{x}{|x|}\right)\right| = |x| \cdot \left|A\left(\frac{x}{|x|}\right)\right| \leqslant |x| \cdot \|A\|$$

Это доказывает (13.1.38) для ненулевых векторов $x \in X$. А для нулевого это неравенство очевидно.

2. В (13.1.39) второе неравенство есть переформулировка (13.1.36). А первое доказывается цепочкой

$$|A| = (13.1.35) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |Ae_i|^2} \leqslant (13.1.38) \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \|A\|^2 \cdot |e_i|^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \|A\|^2} = n \cdot \|A\|\,.$$

□

(e) Евклидова структура на пространстве поливекторов $V_k(X)$

Если X – евклидово пространство, то для всякого $k \geqslant 0$ пространство поливекторов $V_k(X)$ также является евклидовым пространством.

Определитель Грама. *Определителем Грама* последовательности $a_1, ..., a_k$ векторов евклидова пространства X называется определитель матрицы билинейной формы $\langle \cdot, \cdot \rangle$ на этих векторах:

$$\mathsf{Gram}(a_1, ..., a_k) = \det \big\langle (a_1, ..., a_k), (a_1, ..., a_k) \big\rangle = \det \begin{pmatrix} \langle a_1, a_1 \rangle & \langle a_1, a_2 \rangle & ... & \langle a_1, a_k \rangle \\ \langle a_2, a_1 \rangle & \langle a_2, a_2 \rangle & ... & \langle a_2, a_k \rangle \\ ... & ... & ... & ... \\ \langle a_k, a_1 \rangle & \langle a_k, a_2 \rangle & ... & \langle a_k, a_k \rangle \end{pmatrix}$$

Свойства определителя Грама:

1^0. **Двусторонняя оценка:** *для любых векторов* $(a_1, ..., a_k)$

$$0 \leqslant \mathsf{Gram}(a_1, ..., a_k) \leqslant |a_1|^2 \cdot ... \cdot |a_k|^2 \tag{13.1.40}$$

причем нижняя граница достигается только если система векторов $a_1, ..., a_k$ *линейно зависима,*

$$0 = \mathsf{Gram}(a_1, ..., a_k) \quad \Longleftrightarrow \quad \exists i \qquad a_i \in \mathsf{span}\{a_j;\ j \neq i\} \tag{13.1.41}$$

а верхняя (при ненулевых a_i*) – только если любые два вектора* a_i *и* a_j *ортогональны,*

$$\mathsf{Gram}(a_1, ..., a_k) = |a_1|^2 \cdot ... \cdot |a_k|^2 \quad \Longleftrightarrow \quad \forall i \neq j \quad a_i \perp a_j \tag{13.1.42}$$

2^0. **Индуктивное равенство:** *пусть* $\mathsf{pr}_{\{a_1,...,a_{k-1}\}^\perp}(a_k)$ *– ортогональная проекция вектора* a_k *на ортогональное дополнение* $\{a_1, ..., a_{k-1}\}^\perp$ *к векторам* $a_1, ..., a_{k-1}$*, тогда*

$$\mathsf{Gram}(a_1, ..., a_{k-1}, a_k) = \mathsf{Gram}(a_1, ..., a_{k-1}) \cdot \Big| \mathsf{pr}_{\{a_1,...,a_{k-1}\}^\perp}(a_k) \Big|^2, \tag{13.1.43}$$

3^0. **Неравенство Адамара:** *для любых векторов* $(a_1, ..., a_k, b_1, ..., b_l)$

$$\mathsf{Gram}(a_1, ..., a_k, b_1, ..., b_l) \leqslant \mathsf{Gram}(a_1, ..., a_k) \cdot \mathsf{Gram}(b_1, ..., b_l) \tag{13.1.44}$$

4^0. **Линейное искажение:** *для любых векторов* $(a_1, ..., a_k)$ *и любой матрицы* $M \in \mathbb{R}^k_k$

$$\mathsf{Gram}((a_1, ..., a_k) \cdot M) = \mathsf{Gram}(a_1, ..., a_k) \cdot (\det M)^2, \tag{13.1.45}$$

в частности, при перестановке векторов определитель Грама не меняется:

$$\forall i, j \qquad \mathsf{Gram}(a_1, ..., a_i, ..., a_j, ..., a_k) = \mathsf{Gram}(a_1, ..., a_j, ..., a_i, ..., a_k) \tag{13.1.46}$$

5^0. **Координатное представление:** *если число векторов* $a_1, ..., a_n$ *совпадает с размерностью пространства* X*, то*

$$\mathsf{Gram}(a_1, ..., a_n) = \left[\det \begin{pmatrix} \langle a_1, e_1 \rangle & ... & \langle a_1, e_n \rangle \\ .... & ... & ... \\ \langle a_n, e_1 \rangle & ... & \langle a_n, e_n \rangle \end{pmatrix} \right]^2, \tag{13.1.47}$$

где $e_1, ..., e_n$ *– ортогональный нормированный базис в* X.

6^0. **Выражение через ортогонализацию Грама-Шмидта:** *для любых векторов* $a_1, ..., a_k \in \mathbb{R}^n$

$$\mathsf{Gram}(a_1, ..., a_n) = |e_1|^2 \cdot ... \cdot |e_k|^2. \tag{13.1.48}$$

где e_i *– ортогонализация Грама-Шмидта системы* a_i *(определенная формулой* (13.1.28)*).*

Доказательство. 1. Пусть сначала векторы $a_1, ..., a_k$ линейно зависимы. Тогда найдутся числа $\lambda^1, ..., \lambda^k$, не все равные нулю, такие, что

$$\lambda^1 \cdot a_1 + ... + \lambda^k \cdot a_k = 0$$

Скалярно умножая это равенство слева на векторы a_i, мы получим линейную систему

$$\begin{cases} \lambda^1 \cdot \langle a_1, a_1 \rangle + ... + \lambda^k \cdot \langle a_1, a_k \rangle = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \lambda^1 \cdot \langle a_k, a_1 \rangle + ... + \lambda^k \cdot \langle a_k, a_k \rangle = 0 \end{cases}$$

Левую часть можно представить как произведение матрицы Грама на вектор $\lambda = \begin{pmatrix} \lambda^1 \\ ... \\ \lambda^n \end{pmatrix}$:

$$\begin{pmatrix} \langle a_1, a_1 \rangle & ... & \langle a_1, a_k \rangle \\ ... & ... & ... \\ \langle a_k, a_1 \rangle & ... & \langle a_k, a_k \rangle \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda^1 \\ ... \\ \lambda^n \end{pmatrix} = 0$$

Поскольку $\lambda = \begin{pmatrix} \lambda^1 \\ ... \\ \lambda^n \end{pmatrix}$ – ненулевой столбец, матрица $\langle a_i, a_j \rangle$ вырождена, и значит ее определитель равен нулю:

$$\mathsf{Gram}(a_1, ..., a_k) = \det \begin{pmatrix} \langle a_1, a_1 \rangle & ... & \langle a_1, a_k \rangle \\ ... & ... & ... \\ \langle a_k, a_1 \rangle & ... & \langle a_k, a_k \rangle \end{pmatrix} = 0$$

Пусть теперь наоборот, система векторов $a_1, ..., a_k$ линейно независима. Рассмотрим ее линейную оболочку $Y = \mathsf{span}\{a_1, ..., a_k\}$. Всякий вектор $y \in Y$ раскладывается по базису $a = (a_1, ..., a_k)$:

$$y = \sum_{i=1}^{k} \left[\frac{y}{a}\right]^i \cdot a_i$$

Рассмотрим на Y квадратичную форму

$$q(y) = \langle y, y \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{k} \left[\frac{y}{a}\right]^i \cdot a_i, \ \sum_{j=1}^{k} \left[\frac{y}{a}\right]^j \cdot a_j \right\rangle = \sum_{i=1}^{k} \langle a_i, a_j \rangle \cdot \left[\frac{y}{a}\right]^i \cdot \left[\frac{y}{a}\right]^j$$

Поскольку q положительно определена на всем пространстве X, она и на подпространстве Y тоже положительно определена:

$$\forall y \in Y \qquad y \neq 0 \qquad \Longrightarrow \qquad q(y) > 0$$

Поэтому по критерию Сильвестра (теорема 12.4.19), определитель ее матрицы в (произвольном базисе, в частности в) базисе $a = (a_1, ..., a_k)$ должен быть положительным:

$$\mathsf{Gram}(a_1, ..., a_k) = \det \begin{pmatrix} \langle a_1, a_1 \rangle & ... & \langle a_1, a_k \rangle \\ ... & ... & ... \\ \langle a_k, a_1 \rangle & ... & \langle a_k, a_k \rangle \end{pmatrix} > 0$$

Мы доказали первое неравенство в цепочке (13.1.40) и условие (13.1.41). Теперь докажем второе неравенство и условие (13.1.42). Если система векторов $(a_1, ..., a_k)$ линейно зависима, то, как мы уже показали, ее определитель Грама $\mathsf{Gram}(a_1, ..., a_k)$ равен нулю, и тогда неравенство

$$\mathsf{Gram}(a_1, ..., a_k) \leqslant |a_1|^2 \cdot ... \cdot |a_k|^2$$

выполняется автоматически. Поэтому для нас важен случай, когда система $(a_1, ..., a_k)$ линейно независима. Тогда любая ее подсистема $(a_1, ..., a_i)$, $1 \leqslant i \leqslant k$, также будет линейно независима, и мы уже показали, что определитель Грама такой системы должен быть положительным:

$$\mathsf{Gram}(a_1, ..., a_i) = \det \begin{pmatrix} \langle a_1, a_1 \rangle & ... & \langle a_1, a_i \rangle \\ ... & ... & ... \\ \langle a_i, a_1 \rangle & ... & \langle a_i, a_i \rangle \end{pmatrix} > 0, \qquad \forall i \leqslant k \tag{13.1.49}$$

Значит, по теореме 12.4.18 мы можем провести ортогонализацию Грама-Шмидта, которая базис $a = (a_1, ..., a_k)$ пространства $\mathsf{span}\{a_1, ..., a_k\}$ превратит в ортогональный базис $\mathbf{e} = (e_1, ..., e_k)$ со свойством (12.4.219):

$$\forall i \leqslant k \qquad \mathsf{Gram}(a_1, ..., a_i) = \det \begin{pmatrix} \langle a_1, a_1 \rangle & ... & \langle a_1, a_i \rangle \\ ... & ... & ... \\ \langle a_i, a_1 \rangle & ... & \langle a_i, a_i \rangle \end{pmatrix} = |e_1|^2 \cdot ... \cdot |e_i|^2$$

Каждый вектор e_i представляет собой ортогональную проекцию вектора a_i на ортогональное дополнение $\{e_1,...,e_{i-1}\}^\perp$ к векторам $\{e_1,...,e_{i-1}\}$:

$$e_i = \mathsf{pr}_{\{e_1,...,e_{i-1}\}^\perp}(a_i)$$

Поскольку ортогональная проекция не увеличивает модуль, справедливо неравенство:

$$|e_i| = \left|\mathsf{pr}_{\{e_1,...,e_{i-1}\}^\perp}(a_i)\right| \leqslant (13.1.23) \leqslant |a_i|.$$

Вдобавок, никакой вектор e_i не может быть нулевым (поскольку $(e_1,...,e_k)$ образуют базис), и значит $|e_i| > 0$. В результате мы получаем систему

$$\begin{cases} \mathsf{Gram}(a_1,...,a_k) = |e_1|^2 \cdot ... \cdot |e_k|^2 \leqslant |a_1|^2 \cdot ... \cdot |a_k|^2 \\ 0 < |e_i| \leqslant |a_i| \end{cases},$$

из которой следует, во-первых, второе неравенство в цепочке (13.1.40), а, во-вторых, что равенство

$$\mathsf{Gram}(a_1,...,a_k) = |e_1|^2 \cdot ... \cdot |e_k|^2 = |a_1|^2 \cdot ... \cdot |a_k|^2$$

возможно только при $|e_i| = \left|\mathsf{pr}_{\{e_1,...,e_{i-1}\}^\perp}(a_i)\right| = |a_i|$ для любого $i = 1,...,k$, то есть, в силу (13.1.24), при $e_i = a_i$ для всех $i = 1,...,k$ (такое возможно только если векторы a_i изначально были ортогональны друг другу).

2. Докажем индуктивное равенство (13.1.43). Если векторы $(a_1,...,a_{k-1},a_k)$ линейно зависимы, то либо подсистема $(a_1,...,a_{k-1})$ тоже линейно зависима, и тогда $\mathsf{Gram}(a_1,...,a_{k-1},a_k) = 0 = \mathsf{Gram}(a_1,...,a_{k-1})$, и обе части в (13.1.43) получаются нулевыми, либо подсистема $(a_1,...,a_{k-1})$ линейно независима, но тогда $a_k \in \mathsf{span}\{a_1,...,a_{k-1}\}$, поэтому $d = \mathsf{pr}_{\{a_1,...,a_{k-1}\}^\perp}(a_k) = 0$, и опять получается, что обе части в (13.1.43) нулевые.

Таким образом, нам нужно рассмотреть случай, когда векторы $(a_1,...,a_{k-1},a_k)$ линейно независимы. Тогда получается ситуация, которую мы уже рассматривали: из-за линейной независимости всякой подсистемы вида $(a_1,...,a_i)$, $i \leqslant k$, определители Грама всех этих систем будут ненулевыми (неравенства (13.1.49)), поэтому можно применить ортогонализацию Грама-Шмидта, которая даст ортогональный базис $(e_1,...,e_k)$ со свойствами:

$$\forall i \leqslant k \qquad \mathsf{Gram}(a_1,...,a_i) = \det\begin{pmatrix} \langle a_1,a_1\rangle & ... & \langle a_1,a_i\rangle \\ ... & ... & ... \\ \langle a_i,a_1\rangle & ... & \langle a_i,a_i\rangle \end{pmatrix} = |e_1|^2 \cdot ... \cdot |e_i|^2,$$

$$e_i = \mathsf{pr}_{\{e_1,...,e_{i-1}\}^\perp}(a_i) = \mathsf{pr}_{\{a_1,...,a_{i-1}\}^\perp}(a_i)$$

Из этих равенств мы получаем:

$$\mathsf{Gram}(a_1,...,a_k) = \underbrace{|e_1|^2 \cdot ... \cdot |e_{k-1}|^2}_{\substack{\| \\ \mathsf{Gram}(a_1,...,a_{k-1})}} \cdot \; |\underbrace{e_k}_{\substack{\| \\ \mathsf{pr}_{\{a_1,...,a_{k-1}\}^\perp}(a_k)}}|^2 = \mathsf{Gram}(a_1,...,a_{k-1}) \cdot \left|\mathsf{pr}_{\{a_1,...,a_{k-1}\}^\perp}(a_k)\right|^2$$

3. Докажем неравенство Адамара (13.1.44). Если векторы $(a_1,...,a_k,b_1,...,b_l)$ линейно зависимы, то это неравенство выполняется автоматически, потому что слева стоит нуль, а справа – неотрицательные числа:

$$0 \leqslant \mathsf{Gram}(a_1,...,a_k) \cdot \mathsf{Gram}(b_1,...,b_l)$$

Поэтому нам нужно рассмотреть случай, когда $(a_1,...,a_k,b_1,...,b_l)$ – линейно независимая система.

Здесь мы организуем индукцию по числу $l \in \mathbb{N}$. Прежде всего, при $l = 1$ мы получаем:

$$\mathsf{Gram}(a_1,...,a_k,b_1) = (13.1.43) = \mathsf{Gram}(a_1,...,a_k) \cdot \left|\mathsf{pr}_{\{a_1,...,a_k\}^\perp}(b_1)\right|^2 \leqslant$$
$$\leqslant \mathsf{Gram}(a_1,...,a_k) \cdot |b_1|^2 = \mathsf{Gram}(a_1,...,a_k) \cdot \mathsf{Gram}(b_1)$$

Далее мы предполагаем, что неравенство (13.1.44) верно при некотором l. Тогда для $l+1$ мы получаем:

$$\mathsf{Gram}(a_1,...,a_k,b_1,...,b_l,b_{l+1}) = (13.1.43) = \overbrace{\mathsf{Gram}(a_1,...,a_k,b_1,...,b_l)}^{\substack{\mathsf{Gram}(a_1,...,a_k)\cdot\mathsf{Gram}(b_1,...,b_l) \\ \text{предположение индукции } \geqslant}} \cdot \overbrace{\Big|\mathsf{pr}_{\{a_1,...,a_k,b_1,...,b_l\}^\perp}(b_{l+1})\Big|^2}^{\substack{\{a_1,...,a_k,b_1,...,b_l\}^\perp \subseteq \{b_1,...,b_l\}^\perp \\ \Downarrow \\ \left|\mathsf{pr}_{\{b_1,...,b_l\}^\perp}(b_{l+1})\right|^2 \\ \geqslant}} \leqslant$$

$$\leqslant \mathsf{Gram}(a_1,...,a_k)\cdot \underbrace{\mathsf{Gram}(b_1,...,b_l)\cdot\Big|\mathsf{pr}_{\{b_1,...,b_l\}^\perp}(b_{l+1})\Big|^2}_{\substack{\| \\ \mathsf{Gram}(b_1,...,b_l,b_{l+1}), \\ \text{в силу (13.1.43)}}} \leqslant \mathsf{Gram}(a_1,...,a_k)\cdot\mathsf{Gram}(b_1,...,b_l,b_{l+1})$$

4. Формула линейного искажения (13.1.45) следует из формулы (12.3.137):

$$\mathsf{Gram}(a\cdot M) = \det\big\langle a\cdot M, a\cdot M\big\rangle = (12.3.137) = \det\big(M^\top\cdot\big\langle a,a\big\rangle\cdot M\big) =$$
$$= \det M^\top\cdot\det\big\langle a,a\big\rangle\cdot\det M = \mathsf{Gram}(a)\cdot(\det M)^2$$

5. Для любых векторов a_i, a_j получаем

$$\langle a_i,a_j\rangle = \sum_{k=1}^n \langle a_i,e_k\rangle\cdot\langle e_k,a_j\rangle$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{pmatrix} \langle a_1,a_1\rangle & \langle a_1,a_2\rangle & ... & \langle a_1,a_n\rangle \\ \langle a_2,a_1\rangle & \langle a_2,a_2\rangle & ... & \langle a_2,a_n\rangle \\ ... & ... & ... & ... \\ \langle a_n,a_1\rangle & \langle a_n,a_2\rangle & ... & \langle a_n,a_n\rangle \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} \langle a_1,e_1\rangle & \langle a_1,e_2\rangle & ... & \langle a_1,e_n\rangle \\ \langle a_2,e_1\rangle & \langle a_2,e_2\rangle & ... & \langle a_2,e_n\rangle \\ ... & ... & ... & ... \\ \langle a_n,e_1\rangle & \langle a_n,e_2\rangle & ... & \langle a_n,e_n\rangle \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} \langle e_1,a_1\rangle & \langle e_1,a_2\rangle & ... & \langle e_1,a_n\rangle \\ \langle e_2,a_1\rangle & \langle e_2,a_2\rangle & ... & \langle e_2,a_n\rangle \\ ... & ... & ... & ... \\ \langle e_n,a_1\rangle & \langle e_n,a_2\rangle & ... & \langle e_n,a_n\rangle \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} \langle a_1,e_1\rangle & \langle a_1,e_2\rangle & ... & \langle a_1,e_n\rangle \\ \langle a_2,e_1\rangle & \langle a_2,e_2\rangle & ... & \langle a_2,e_n\rangle \\ ... & ... & ... & ... \\ \langle a_n,e_1\rangle & \langle a_n,e_2\rangle & ... & \langle a_n,e_n\rangle \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} \langle a_1,e_1\rangle & \langle a_1,e_2\rangle & ... & \langle a_1,e_n\rangle \\ \langle a_2,e_1\rangle & \langle a_2,e_2\rangle & ... & \langle a_2,e_n\rangle \\ ... & ... & ... & ... \\ \langle a_n,e_1\rangle & \langle a_n,e_2\rangle & ... & \langle a_n,e_n\rangle \end{pmatrix}^\top$$

$$\Downarrow$$

$$\det\begin{pmatrix} \langle a_1,a_1\rangle & \langle a_1,a_2\rangle & ... & \langle a_1,a_n\rangle \\ \langle a_2,a_1\rangle & \langle a_2,a_2\rangle & ... & \langle a_2,a_n\rangle \\ ... & ... & ... & ... \\ \langle a_n,a_1\rangle & \langle a_n,a_2\rangle & ... & \langle a_n,a_n\rangle \end{pmatrix} =$$
$$= \det\begin{pmatrix} \langle a_1,e_1\rangle & \langle a_1,e_2\rangle & ... & \langle a_1,e_n\rangle \\ \langle a_2,e_1\rangle & \langle a_2,e_2\rangle & ... & \langle a_2,e_n\rangle \\ ... & ... & ... & ... \\ \langle a_n,e_1\rangle & \langle a_n,e_2\rangle & ... & \langle a_n,e_n\rangle \end{pmatrix}\cdot\det\begin{pmatrix} \langle a_1,e_1\rangle & \langle a_1,e_2\rangle & ... & \langle a_1,e_n\rangle \\ \langle a_2,e_1\rangle & \langle a_2,e_2\rangle & ... & \langle a_2,e_n\rangle \\ ... & ... & ... & ... \\ \langle a_n,e_1\rangle & \langle a_n,e_2\rangle & ... & \langle a_n,e_n\rangle \end{pmatrix}^\top =$$
$$= (12.3.153) = \left[\det\begin{pmatrix} \langle a_1,e_1\rangle & \langle a_1,e_2\rangle & ... & \langle a_1,e_n\rangle \\ \langle a_2,e_1\rangle & \langle a_2,e_2\rangle & ... & \langle a_2,e_n\rangle \\ ... & ... & ... & ... \\ \langle a_n,e_1\rangle & \langle a_n,e_2\rangle & ... & \langle a_n,e_n\rangle \end{pmatrix}\right]^2$$

6. Если векторы a_i линейно независимы, то формула (13.1.48) сразу следует из (13.1.27). Если же они линейно зависимы, то в (13.1.48) левая часть будет нулевой в силу уже доказанного свойства (13.1.41), а правая – потому что какой-то вектор e_i окажется нулевым. □

Скалярное произведение поливекторов. Пусть X – евклидово пространство со скалярным произведением $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Рассмотрим полилинейную форму на $X^m \times X^m$:

$$\Big\langle x_1,...,x_m \mid y_1,...,y_m\Big\rangle = \det\begin{pmatrix} \langle x_1,y_1\rangle & ... & \langle x_1,y_m\rangle \\ ... & ... & ... \\ \langle x_m,y_1\rangle & ... & \langle x_m,y_m\rangle \end{pmatrix} \tag{13.1.50}$$

и заметим, что для всякого ортонормированного базиса $a_1,...,a_n$ в X справедлива формула[2]

$$\Big\langle a_L \mid a_M\Big\rangle = \begin{cases} 0, & L\ne M \\ 1, & L=M. \end{cases}, \qquad \operatorname{card} L = \operatorname{card} M = m. \tag{13.1.51}$$

Доказательство. Пусть $L \ne M$. Тогда найдется индекс $i\in L\setminus M$. Для него

$$\forall j\in M \quad \langle a_i,a_j\rangle = 0,$$

и[3]

$$\Big\langle a_L \mid a_M\Big\rangle = \Big\langle a_{\tau_L(1)},...,a_{\tau_L(m)} \mid a_{\tau_M(1)},...,a_{\tau_M(m)}\Big\rangle = \det\begin{pmatrix} \langle a_{\tau_L(1)},a_{\tau_M(1)}\rangle & ... & \langle a_{\tau_L(1)},a_{\tau_M(m)}\rangle \\ ... & ... & ... \\ \langle a_{\tau_L(m)},a_{\tau_M(1)}\rangle & ... & \langle a_{\tau_L(m)},a_{\tau_M(m)}\rangle \end{pmatrix} = 0$$

потому что в этом определителе строчка с индексом $\tau_L(s)=i$ полностью нулевая.

Наоборот, если $L=M$, то под определителем будет стоять единичная матрица, и поэтому он будет сам единичным:

$$\Big\langle a_{\tau_L(1)},...,a_{\tau_L(m)} \mid a_{\tau_L(1)},...,a_{\tau_L(m)}\Big\rangle = \det\begin{pmatrix} \langle a_{\tau_L(1)},a_{\tau_L(1)}\rangle & ... & \langle a_{\tau_L(1)},a_{\tau_L(m)}\rangle \\ ... & ... & ... \\ \langle a_{\tau_L(m)},a_{\tau_L(1)}\rangle & ... & \langle a_{\tau_L(m)},a_{\tau_L(m)}\rangle \end{pmatrix} =$$

$$= \det\begin{pmatrix} \langle a_{\tau_L(1)},a_{\tau_L(1)}\rangle & ... & 0 \\ ... & ... & ... \\ 0 & ... & \langle a_{\tau_L(m)},a_{\tau_L(m)}\rangle \end{pmatrix} = 1.$$

□

Теорема 13.1.11. *Полилинейная форма* (13.1.50) *единственным образом продолжается до скалярного произведения на пространстве $V_m(X)$ поливекторов степени m, удовлетворяющего тождеству*

$$\Big\langle x_1\vee...\vee x_m \mid y_1\vee...\vee y_m\Big\rangle = \det\begin{pmatrix} \langle x_1,y_1\rangle & \dots & \langle x_1,y_m\rangle \\ \dots & \dots & \dots \\ \langle x_m,y_1\rangle & \dots & \langle x_m,y_m\rangle \end{pmatrix} \tag{13.1.52}$$

Модуль поливектора $x_1\vee\dots\vee x_m$ относительно такого скалярного произведения равен корню из определителя Грама этих векторов:

$$\Big|x_1\vee\dots\vee x_m\Big| = \sqrt{\det\begin{pmatrix} \langle x_1,x_1\rangle & \dots & \langle x_1,x_m\rangle \\ \dots & \dots & \dots \\ \langle x_m,x_1\rangle & \dots & \langle x_m,x_m\rangle \end{pmatrix}} = \sqrt{\mathsf{Gram}(x_1,\dots,x_m)} \tag{13.1.53}$$

Как следствие, справедливо неравенство:

$$\Big|\Big\langle x_1\vee\dots\vee x_m \mid y_1\vee\dots\vee y_m\Big\rangle\Big| \leqslant \sqrt{\mathsf{Gram}(x_1,\dots,x_m)}\cdot\sqrt{\mathsf{Gram}(y_1,\dots,y_m)} \tag{13.1.54}$$

Доказательство. 1. Зафиксируем ортонормированный базис $a_1,...,a_n$ в X. Пусть $p,q\in V_m(X)$ – произвольные поливекторы. Разложим их по базису $a_1,...,a_n$ как в формуле (12.5.265):

$$p = \sum_{\operatorname{card} L=m} p^L\cdot a_{\vee L}, \qquad q = \sum_{\operatorname{card} M=m} q^M\cdot a_{\vee M},$$

[2]Обозначение a_M было определено формулой (12.5.240).

[3]Обозначение τ_L определено правилом (12.1.32).

и положим

$$\big\langle p \mid q \big\rangle := \sum_{\operatorname{card} L=m} \sum_{\operatorname{card} M=m} p^L \cdot q^M \cdot \underbrace{\big\langle a_L \mid a_M \big\rangle}_{\substack{\| \ (13.1.51) \\ \begin{cases} 0, & L\neq M \\ 1, & L=M \end{cases}}} = \sum_{\operatorname{card} M=m} p^M \cdot q^M \tag{13.1.55}$$

Поскольку отображения $p \mapsto p^L$ и $q \mapsto q^L$ являются линейными функционалами (как коэффициенты разложения вектора по базису), полученное отображение

$$(p,q) \mapsto \big\langle p \mid q \big\rangle$$

является билинейной формой на X. Она, очевидно, симметрическая, и положительно определенная, потому что если $p \neq 0$, то какой-то коэффициент p^L должен быть отличен от нуля, и поэтому

$$\big\langle p \mid p \big\rangle := \sum_{\operatorname{card} L=m} \Big(p^L\Big)^2 > 0.$$

2. Покажем, что это скалярное произведение действительно продолжает полилинейную форму (13.1.50). Если обозначить $\alpha(x_1,...,x_m,y_1,...,y_m) = \langle x_1,...,x_m \mid y_1,...,y_m\rangle$ и $\beta(p,q) = \langle p|q\rangle$, то мы получаем диаграмму

$$\begin{tikzcd} X^m \times X^m \arrow[rr, "\vee_m \times \vee_m"] \arrow[dr, "\alpha"'] & & V_m(X) \times V_m(X) \arrow[dl, "\beta"] \\ & \mathbb{R} & \end{tikzcd}$$

и нам остается доказать ее коммутативность, то есть что композиция отображений $\beta \circ \vee_m \times \vee_m$ совпадает с α:

$$\beta(\vee_m(x_1,...,x_m), \vee_m(y_1,...,y_m)) = \big\langle x_1 \vee ... \vee x_m \mid y_1 \vee ... \vee y_m \big\rangle \overset{?}{=} \big\langle x_1,...,x_m \mid y_1,...,y_m \big\rangle = \\ = \alpha(x_1,...,x_m,y_1,...,y_m).$$

Поскольку эти отображения полилинейны по аргументам $x_1,...,x_m,y_1,...,y_m$, это равенство достаточно доказать, подставляя вместо x_k и y_l элементы базиса $a_1,...,a_n$:

$$\big\langle a_{k_1} \vee ... \vee a_{k_m} \mid a_{l_1} \vee ... \vee a_{l_m} \big\rangle \overset{?}{=} \big\langle a_{k_1},...,a_{k_m} \mid a_{l_1},...,a_{l_m} \big\rangle \tag{13.1.56}$$

Заметим, что если в последовательности $k_1,...,k_m$ или в последовательности $l_1,...,l_m$ есть повторяющиеся индексы, то обе части равенства будут равны нулю, и оно выполняется автоматически:

$$\big\langle a_{k_1} \vee ... \vee a_{k_m} \mid a_{l_1} \vee ... \vee a_{l_m} \big\rangle = 0 = \big\langle a_{k_1},...,a_{k_m} \mid a_{l_1},...,a_{l_m} \big\rangle.$$

Поэтому важно проверить равенство в случае, когда в $k_1,...,k_m$ и $l_1,...,l_m$ нет повторяющихся индексов. Это, в свою очередь, сводится к случаю, когда последовательности $k_1,...,k_m$ и $l_1,...,l_m$ строго возрастают. Действительно, выбрав перестановки $\sigma,\tau \in \varSigma_m$ так, чтобы

$$k_{\sigma(1)} < ... < k_{\sigma(m)}, \qquad l_{\tau(1)} < ... < l_{\tau(m)},$$

мы получим, что равенство (13.1.56) превращается в равенство

$$\operatorname{sgn}\sigma \cdot \operatorname{sgn}\tau \cdot \big\langle a_{k_{\sigma(1)}} \vee ... \vee a_{k_{\sigma(m)}} \mid a_{l_{\tau(1)}} \vee ... \vee a_{l_{\tau(m)}} \big\rangle \overset{?}{=} \operatorname{sgn}\sigma \cdot \operatorname{sgn}\tau \cdot \big\langle a_{k_{\sigma(1)}},...,a_{k_{\sigma(m)}} \mid a_{l_{\tau(1)}},...,a_{l_{\tau(m)}} \big\rangle$$

и после сокращений, в равенство

$$\big\langle a_{k_{\sigma(1)}} \vee ... \vee a_{k_{\sigma(m)}} \mid a_{l_{\tau(1)}} \vee ... \vee a_{l_{\tau(m)}} \big\rangle \overset{?}{=} \big\langle a_{k_{\sigma(1)}},...,a_{k_{\sigma(m)}} \mid a_{l_{\tau(1)}},...,a_{l_{\tau(m)}} \big\rangle$$

Итак, можно считать, что последовательности индексов $k_1,...,k_m$ и $l_1,...,l_m$ строго возрастают. Тогда они представляют собой отображения нумерации[4] τ_K и τ_L неких множеств $K,L \subseteq \{1,...,n\}$. Тогда при $K \neq L$ мы получаем:

[4]Отображение нумерации τ_N определено на с.671.

$$\big\langle a_{k_1}\vee\ldots\vee a_{k_m}\mid a_{l_1}\vee\ldots\vee a_{l_m}\big\rangle=\big\langle a_{\vee K}\mid a_{\vee L}\big\rangle=(13.1.55)=$$
$$=\underbrace{\sum_{\operatorname{card}M=m}\underbrace{(a_{\vee K})^M}_{\substack{\| \\ a_{\vee K}\left(\left[\frac{1}{a}\right]^M\right)\\ \| \\ \begin{cases}0, & K\ne M\\ 1, & K=M\end{cases}}}\cdot\underbrace{(a_{\vee L})^M}_{\substack{\| \\ a_{\vee L}\left(\left[\frac{1}{a}\right]^M\right)\\ \| \\ \begin{cases}0, & L\ne M\\ 1, & L=M\end{cases}}}}_{\substack{\| \\ 0}}=0=(13.1.51)=\big\langle a_K\mid a_L\big\rangle=\big\langle a_{k_1},\ldots,a_{k_m}\mid a_{l_1},\ldots,a_{l_m}\big\rangle,$$

а при $K=L$

$$\big\langle a_{k_1}\vee\ldots\vee a_{k_m}\mid a_{l_1}\vee\ldots\vee a_{l_m}\big\rangle=\big\langle a_{\vee K}\mid a_{\vee K}\big\rangle=(13.1.55)=$$
$$=\sum_{\operatorname{card}M=m}\Bigg(\underbrace{(a_{\vee K})^M}_{\substack{\| \\ a_{\vee K}\left(\left[\frac{1}{a}\right]^M\right)\\ \| \\ \begin{cases}0, & K\ne M\\ 1, & K=M\end{cases}}}\Bigg)^2=1=(13.1.51)=\big\langle a_K\mid a_K\big\rangle=\big\langle a_{k_1},\ldots,a_{k_m}\mid a_{l_1},\ldots,a_{l_m}\big\rangle,$$

3. Покажем теперь, что скалярное произведение $(p,q)\mapsto\langle p\mid q\rangle$, удовлетворяющее тождеству (13.1.52), единственно. Если $(p,q)\mapsto\beta(p,q)$ – какое-то другое скалярное произведение с тем же свойством, то эти скалярные произведения должны совпадать на элементах нашего фиксированного ранее базиса $a_1,\ldots,a_m$:

$$\beta\big(a_{k_1}\vee\ldots\vee a_{k_m}\mid a_{l_1}\vee\ldots\vee a_{l_m}\big)=(13.1.52)=\big\langle a_{k_1},\ldots,a_{k_m}\mid a_{l_1},\ldots,a_{l_m}\big\rangle=$$
$$=(13.1.52)=\big\langle a_{k_1}\vee\ldots\vee a_{k_m}\mid a_{l_1}\vee\ldots\vee a_{l_m}\big\rangle$$

Поскольку билинейные формы однозначно определяются своими значениями на базисе (формула (12.3.132)), мы получаем, что эти формы совпадают всюду: $\beta(p,q)=\langle p\mid q\rangle$.

4. Формулы (13.1.53) и (13.1.54) теперь следуют из общих свойств скалярного произведния. □

Следствие 13.1.12. *Справедливо неравенство*

$$|x\vee y|\leqslant|x|\cdot|y| \tag{13.1.57}$$

Доказательство.
$$|x\vee y|=(13.1.53)=\sqrt{\mathsf{Gram}(x,y)}\leqslant(13.1.40)\leqslant|x|\cdot|y|$$

□

(f) Изометрии и движения

Изометрии и теорема о представлении.

Теорема 13.1.13. *Для отображения евклидовых пространств $\varphi: X\to Y$ следующие условия эквивалентны:*

(i) *φ линейно и сохраняет скалярное произведение:*

$$\langle\varphi(x),\varphi(y)\rangle=\langle x,y\rangle,\qquad x,y\in X. \tag{13.1.58}$$

(ii) *φ сохраняет нуль*

$$\varphi(0)=0 \tag{13.1.59}$$

и модуль

$$|\varphi(x)|=|x|. \tag{13.1.60}$$

Доказательство. 1. (i)⇒(ii). Если $\varphi: X\to X$ удовлетворяет условию (i), то оно сохраняет нулевой вектор, как любой линейный оператор. С другой стороны,

$$|\varphi(x)|^2=\langle\varphi(x),\varphi(x)\rangle=(13.1.58)=\langle x,x\rangle=|x|^2,$$

и это равносильно тождеству (13.1.60).

2. (i)⇐(ii). Наоборот, пусть $\varphi : X \to X$ удовлетворяет (ii). Тогда сразу видно, что φ удовлетворяет также тождеству (13.1.58), потому что

$$\big\langle \varphi(x), \varphi(y)\big\rangle = (13.1.2) = \frac{|\varphi(x)|^2 + |\varphi(y)|^2 - |\varphi(x) - \varphi(y)|^2}{2} = \frac{|\varphi(x)|^2 + |\varphi(y)|^2 - |\varphi(x-y)|^2}{2} =$$
$$= (13.1.60) = \frac{|x|^2 + |y|^2 - |x-y|^2}{2} = (13.1.2) = \langle x, y\rangle.$$

Нужно только еще проверить, что φ – линейный оператор. Для этого зафиксируем какой-нибудь ортогональный нормированный базис $\mathbf{e}$ (существование которого гарантируется теоремой 13.1.5). Из уже доказанного свойства (13.1.58) следуют равенства

$$\big\langle \varphi(e_i), \varphi(e_j)\big\rangle = \langle e_i, e_j\rangle = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \ne j \end{cases}$$

означающие, что векторы $\varphi(e_1), ..., \varphi(e_n)$ тоже образуют ортогональный нормированный базис в X. Теперь для всякого вектора $x \in X$ мы получаем

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^{n} \langle \varphi(x), \varphi(e_i)\rangle \cdot \varphi(e_i) = (13.1.58) = \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i\rangle \cdot \varphi(e_i)$$

Отсюда мы получаем:

$$\varphi(\alpha\cdot x + \beta\cdot y) = \sum_{i=1}^{n} \langle \alpha\cdot x + \beta\cdot y, e_i\rangle \cdot \varphi(e_i) = \sum_{i=1}^{n} \big(\alpha\cdot\langle x, e_i\rangle + \beta\cdot\langle y, e_i\rangle\big)\cdot\varphi(e_i) =$$
$$= \alpha\cdot\sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i\rangle \cdot \varphi(e_i) + \beta\cdot\sum_{i=1}^{n} \langle y, e_i\rangle\cdot\varphi(e_i) = \alpha\cdot\varphi(x) + \beta\cdot\varphi(y)$$

то есть φ – линейное отображение. □

- Отображение евклидовых пространств $\varphi : X \to Y$ называется *изометрией*, или *ортогональным отображением*, если оно удовлетворяет условиям (i) и (ii) теоремы 13.1.13.
- Если дополнительно $\varphi : X \to Y$ биективно, то оно называется *изоморфизмом* (евклидовых пространств).
- Говорят, что два евклидовых пространства X и Y *изоморфны*, если существует изоморфизм (евклидовых пространств) $\varphi : X \to Y$.

Теорема 13.1.14. *Пусть $\varphi : X \to Y$ – изометрия евклидовых пространств. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(a) пространства X и Y имеют одинаковую размерность

$$\dim X = \dim Y,$$

(b) $\varphi : X \to Y$ является биекцией (и значит, изоморфизмом).

Доказательство. 1. Заметим, что всякая изометрия φ инъективна, потому что

$$x \ne 0 \quad\Longrightarrow\quad 0 \ne |x| = |\varphi(x)| \quad\Longrightarrow\quad \varphi(x) \ne 0.$$

Отсюда следует, что если X и Y имеют одинаковую размерность, то по следствию 12.2.13, φ является биекцией.

2. Наоборот, если φ – биекция, то всякий базис $a = (a_1, ..., a_n)$ в X она превращает в базис $(\varphi(a_1), ..., \varphi(a_n))$ в Y, поэтому размерность у Y будет та же, что у X. □

Классификация евклидовых пространств. Вспомним пример 13.1.2, в котором объяснялось, что координатное пространство $\mathbb{R}^n$ является евклидовым. Следующая теорема очень важна, потому что показывает, что с точки зрения этой науки, структурно, то есть на уровне эффектов, которые можно различить с помощью описанных в определении структур – суммы, умножения на скаляр, размерности и скалярного произведения – никаких других евклидовых пространств не существует.

Теорема 13.1.15 (о классификации евклидовых пространств). *Всякое евклидово пространство X изоморфно некоторому координатному пространству $\mathbb{R}^n$.*

Доказательство. Выберем в X какой-нибудь ортогональный нормированный базис $e = (e_1, ..., e_n)$ и рассмотрим отображение $\varphi : X \to \mathbb{R}^n$, которое всякому вектору $x \in X$ ставит в соответствие столбец его коэффициентов в разложении по базису $e = (e_1, ..., e_n)$:

$$\varphi(x) = \begin{pmatrix} \langle x, e_1 \rangle \\ ... \\ \langle x, e_n \rangle \end{pmatrix}.$$

Оно, понятное дело, сохраняет нуль, $\varphi(0) = 0$. С другой стороны, оно сохраняет модуль:

$$|\varphi(x)| = \left| \begin{pmatrix} \langle x, e_1 \rangle \\ ... \\ \langle x, e_n \rangle \end{pmatrix} \right| = (13.1.11) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle^2} = (13.1.19) = |x|\,.$$

Значит, оно является изометрией. Вдобавок, поскольку размерность $\mathbb{R}^n$ такая же как у X, по теореме 13.1.14, φ является биекцией, и значит, изоморфизмом евклидовых пространств (впрочем, биективность φ видна из его определения). □

Движения в евклидовом пространстве. Отображение $\Phi : X \to X$ евклидова пространства X в себя называется *движением* в X, если оно сохраняет расстояние, то есть если для любых $x, y \in X$ выполняется равенство

$$|\Phi(x) - \Phi(y)| = |x - y|\,. \tag{13.1.61}$$

◇ **13.1.6. Сдвиг.** Простейшим примером движения является *сдвиг на вектор*, то есть отображение вида

$$\Psi(x) = x + a, \qquad x \in X,$$

где a – некоторый фиксированный вектор в X.

◇ **13.1.7. Изометрии.** Всякая изометрия $\varphi : X \to X$ является движением, потому что

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| = |\varphi(x - y)| = |x - y|\,.$$

Теорема 13.1.16. *Всякое движение Φ в евклидовом пространстве представимо в виде композиции сдвига и изометрии:*

$$\Phi(x) = \varphi(x) + a, \qquad x \in X. \tag{13.1.62}$$

Доказательство. Обозначим $a = \Phi(0)$ и рассмотрим отображение $\varphi : X \to X$, действующее по формуле

$$\varphi(x) = \Phi(x) - a, \qquad x \in X.$$

Оно сохраняет нуль (то есть удовлетворяет условию (13.1.59)), потому что

$$\varphi(0) = \Phi(0) - a = 0.$$

С другой стороны, но является движением, будучи композицией двух движений: Φ и сдвига на вектор $-a$. Отсюда следует, что оно сохраняет модуль:

$$|\varphi(x)| = |\varphi(x) - 0| = (13.1.59)) = |\varphi(x) - \varphi(0)| = |x - 0| = |x|\,.$$

То есть φ удовлетворяет также условию (13.1.60). Поэтому по теореме 13.1.13, φ является изометрией. □

Следствие 13.1.17. *Всякое движение $\Phi : X \to X$ в евклидовом пространстве X является биекцией.*

Доказательство. Разложим Φ в композицию изометрии и сдвига, по теореме 13.1.16:

$$\Phi(x) = \varphi(x) + a, \qquad x \in X.$$

По теореме 13.1.14 изометрия φ является биекцией. С другой стороны, отображение сдвига $y \mapsto y+a$ тоже является биекцией. Значит, Φ является биекцией (как композиция двух биекций). □

§ 2 Топология евклидова пространства

Пусть X – евклидово пространство.

- *Открытой окрестностью* точки $x \in X$ радиуса $r > 0$ (или просто *окрестностью*, или *открытым шаром* с центром $x \in X$ радиуса $r > 0$) называется множество точек y из X, расстояние от которых до x меньше r:

$$U_r(x) = \Big\{ y \in \mathbb{R}^n : |y - x| < r \Big\}$$

- *Выколотой открытой окрестностью* точки $x \in X$ радиуса $r > 0$ называется множество точек $y \neq x$ из X, расстояние от которых до x меньше r:

$$\dot{U}_r(x) = \Big\{ y \in X : y \neq x \quad \& \quad |y - x| < r \Big\}$$

- *Замкнутой окрестностью* точки $x \in X$ радиуса $r > 0$ (или *замкнутым шаром* с центром в точке $x \in X$ радиуса $r > 0$) называется множество точек y из X, расстояние от которых до x не превосходит r:

$$B_r(x) = \Big\{ y \in X : |y - x| \leqslant r \Big\}$$

$\diamond\diamond$ **13.2.1.** В случае $n = 1$ окрестность $U_r(x)$ будет интервалом на прямой $\mathbb{R}$ с центром в x (и именно так мы ее определили на с.207):

$$U_r(x) = (x - \varepsilon, x + \varepsilon)$$

А в случае $n = 2$ окрестность $U_r(x)$ будет кругом (без границы) на плоскости $\mathbb{R}^n$ с центром в x:

Наконец, в случае $n = 3$ окрестность $U_r(x)$ будет шаром (без границы) в трехмерном пространстве $\mathbb{R}^3$ с центром в x:

(a) Сходимость последовательности в евклидовом пространстве

- Пусть X – евклидово пространство и пусть каждому натуральному числу $m \in \mathbb{N}$ по какому-нибудь правилу поставлена в соответствие точка $x_m \in X$. Тогда говорят, что задана последовательность точек $\{x_m\}$ из X.
- Последовательность точек $\{x_m\}$ из X называется *сходящейся к точке* $x \in X$,

$$x_m \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} x$$

если расстояние между x_m и x стремится к нулю:

$$|x_m - x| \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} 0 \tag{13.2.63}$$

Предложение 13.2.1. *В пространстве $\mathbb{R}^n$ последовательность x_m стремится к x, если она стремится к x по каждой координате:*

$$\forall \quad i = 1, ..., n \quad x_m^i \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} x^i \tag{13.2.64}$$

Доказательство.

$$|x_m - x| \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

$$\Updownarrow$$

$$\sqrt{\Big(x_m^1 - x^1\Big)^2 + ... + \Big(x_m^n - x^n\Big)^2} \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

$$\Updownarrow$$

$$\forall \quad i=1,...,n \quad 0 \leqslant \left|x_m^i - x^i\right| \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

$$\Updownarrow$$

$$\forall \quad i=1,...,n \quad \left|x_m^i - x^i\right| \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

$$\Updownarrow$$

$$\forall \quad i=1,...,n \quad x_m^i \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} x^i$$

□

◇ **13.2.2.** Покажем, что последовательность на плоскости $A_m = \left(\frac{1}{m}\cos\frac{\pi m}{2}; \frac{1}{m}\sin\frac{\pi m}{2}\right)$ стремится к точке $0 = (0;0)$.

$$A_m = \left(\frac{1}{m}\cos\frac{\pi m}{2}; \frac{1}{m}\sin\frac{\pi m}{2}\right) \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} (0,0) = 0$$

Это можно сделать двумя способами. Первый способ – это проверить, что расстояние между A_m и 0 стремится к нулю:

$$|A_m| =$$

$$= \sqrt{\left(\frac{1}{m}\cos\frac{\pi m}{2} - 0\right)^2 + \left(\frac{1}{m}\sin\frac{\pi m}{2} - 0\right)^2} =$$

$$= \frac{1}{m}\sqrt{\cos^2\frac{\pi m}{2} + \sin^2\frac{\pi m}{2}} = \frac{1}{m} \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

Второй способ – проверить, что каждая координата точки A_m стремится к соотвествующей координате точки 0:

$$\frac{1}{m}\cos\frac{\pi m}{2} \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} 0, \qquad \frac{1}{m}\sin\frac{\pi m}{2} \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

Это можно считать очевидным.

◇ **13.2.3.** Наоборот, покажем, что последовательность на плоскости $A_m = \left(\cos\frac{\pi m}{2}; \sin\frac{\pi m}{2}\right)$ не стремится к точке $0 = (0;0)$:

$$A_m = \left(\cos\frac{\pi m}{2}; \sin\frac{\pi m}{2}\right) \underset{m\to\infty}{\not\longrightarrow} (0,0) = 0$$

Это тоже можно сделать двумя способами: либо показать, что расстояние между A_m и 0 не стремится к нулю,

$$|A_m| = \sqrt{\left(\cos\frac{\pi m}{2} - 0\right)^2 + \left(\sin\frac{\pi m}{2} - 0\right)^2} =$$

$$= \sqrt{\cos^2\frac{\pi m}{2} + \sin^2\frac{\pi m}{2}} = 1 \underset{m\to\infty}{\not\longrightarrow} 0$$

либо убедиться, что какая-нибудь из координат точки A_m не стремится к соответствующей координате точки 0. В данном случае обе координаты не будут стремиться куда надо:

$$\cos\frac{\pi m}{2} \underset{m\to\infty}{\not\longrightarrow} 0 \qquad \sin\frac{\pi m}{2} \underset{m\to\infty}{\not\longrightarrow} 0$$

▷▷ **13.2.4.** Проверьте справедливость следующих соотношений.

1) $\left(e^{\frac{1}{m}}; \frac{2m+1}{m+2}\right) \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} (1;2)$

2) $\left(\frac{\ln m+1}{\ln m+2}, \ln\frac{m+1}{m+2}\right) \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} (1;2)$.

Теорема 13.2.2. *Для последовательности $\{x_m\}$ в евклидовом пространстве X следующие условия эквивалентны:*

(i) *x_m стремится к x в X,*

$$x_m \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} x;$$

(ii) *для любого базиса $e = (e_1, ..., e_m)$ в X последовательность x_m стремится к x покоординатно*

$$\left[\frac{1}{e}\right]^i (x_m) \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} \left[\frac{1}{e}\right]^i (x);$$

(ii) *для какого-то базиса $e = (e_1, ..., e_m)$ в X последовательность x_m стремится к x покоординатно*

$$\left[\frac{1}{e}\right]^i (x_m) \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} \left[\frac{1}{e}\right]^i (x).$$

(b) Внутренность и открытые множества в евклидовом пространстве

Внутренние точки. Пусть E – какое-нибудь множество в евклидовом пространстве X. Точка $x \in E$ называется *внутренней точкой* множества E, если некоторая окрестность $U_\varepsilon(x)$ точки x содержится в множестве E.

$$\exists \varepsilon > 0 \quad U_\varepsilon(x) \subseteq E$$

◇ **13.2.5.** Рассмотрим на плоскости $\mathbb{R}^2$ множество точек с неотрицательной ординатой:

$$E = \Big\{ (x; y) : y \geqslant 0 \Big\}$$

Точка $A(0; 1)$, например, является внутренней для E, потому что ее окрестность $U_{\frac{1}{2}}(A)$ (с радиусом $\varepsilon = \frac{1}{2}$) содержится в множестве E. Более того, любая точка $B(x; y)$ с ординатой $y > 0$ тоже будет внутренней для E (потому что в этом случае можно взять $\varepsilon = \frac{y}{2}$).

Наоборот, точка $C(0; 0)$ не будет внутренней для E потому что никакая ее окрестность не будет содержаться в E.

Теорема 13.2.3 (о секвенциальной характеризации внутренних точек)**.** *Пусть даны множество E и точка x в евклидовом пространстве X. Тогда следующие условия эквивалентны:*

- *(i)* *x есть внутренняя точка для множества E;*
- *(ii)* *если какая-нибудь последовательность $\{x_m\}$ сходится к x в X, то почти все ее элементы x_m лежат в E:*

$$x_m \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} x \quad \Longrightarrow \quad \exists N \quad \forall m > N \quad x_m \in E$$

Доказательство. 1. $(i) \Rightarrow (ii)$ Пусть x – внутренняя точка для множества E, то есть

$$\exists \varepsilon > 0 \quad U_\varepsilon(x) \subseteq E$$

Зафиксируем это число ε. Пусть x_m – произвольная последовательность, стремящаяся к x, то есть

$$|x_m - x| \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

Тогда для почти всех индексов $m \in \mathbb{N}$ должно выполняться условие

$$|x_m - x| < \varepsilon$$

то есть, условие

$$x_m \in U_\varepsilon(x)$$

Отсюда получаем, что

$$x_m \in U_\varepsilon(x) \subseteq E$$

для почти всех индексов $m \in \mathbb{N}$. Мы доказали, что из (i) следует (ii).

2. $(\cancel{i}) \Rightarrow (\cancel{ii})$

Предположим, что наоборот, x не является внутренней точкой множества E, то есть никакая ее окрестность не содержится в E:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad U_\varepsilon(x) \not\subseteq E$$

В частности, окрестности вида $U_{\frac{1}{m}}(x)$ тоже не должны содержаться в E.

$$\forall m \in N \quad U_{\frac{1}{m}}(x) \not\subseteq E$$

Это значит, что для всякого m можно выбрать точку x_m так чтобы

$$x_m \in U_{\frac{1}{m}}(x) \quad \& \quad x_m \notin E$$

Теперь получаем логическую цепочку:

$$\begin{gathered} x_m \in U_{\frac{1}{m}}(x) \\ \Downarrow \\ 0 \leqslant |x_m - x| < \frac{1}{m} \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} 0 \\ \Downarrow \\ |x_m - x| \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} 0 \\ \Downarrow \\ x_m \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} x \end{gathered}$$

Таким образом, имеется последовательность $\{x_m\}$ которая стремится к точке $x \in E$, и при этом, ни один ее элемент не заходит в множество E:

$$x_m \notin E$$

Значит, (ii) не выполняется. Мы получили, что если (i) не выполняется, то (ii) тоже не выполняется. $\square$

Внутренность множества. *Внутренностью* $\mathsf{Int}(E)$ множества E в евклидовом пространстве X называется множество всех внутренних точек множества E:

$$\mathsf{Int}(E) = \Big\{x \in X : \quad x \text{ – внутренняя точка для } E\Big\} = \Big\{x \in X : \quad \exists \varepsilon > 0 \quad U_\varepsilon(x) \subseteq E\Big\}$$

$\triangleright\triangleright$ **13.2.6.** Найдите внутренность следующих множеств:

1) $E = \Big\{(x;y) : \ 0 \leqslant x \leqslant 1 \ \& \ 0 \leqslant y \leqslant 1\Big\}$;

2) $E = \Big\{(x;y) : \ 0 < x < 1 \ \& \ 0 < y < 1\Big\}$;

3) $E = \Big\{(x;y) : \ x = 0 \ \& \ 0 < y < 1\Big\}$;

4) $E = \Big\{(x;y) : \ 0 \leqslant x \leqslant 1 \ \& \ 0 \leqslant y \leqslant x\Big\}$;

5) $E = \Big\{(x;y) : \ 0 \leqslant x \leqslant 1 \ \& \ x \leqslant y \leqslant 2x\Big\}$;

6) $E = \Big\{ \left(0; \frac{1}{m}\right) ; \ m \in \mathbb{N}\Big\}$.

Теорема 13.2.4. *Операция перехода к внутренности $E \mapsto \mathsf{Int}(E)$ в евклидовом пространстве X обладает следующими свойствами:*

(i) $\mathsf{Int}(X) = X$;

(ii) $\mathsf{Int}(E) \subseteq E$;

(iii) $\mathsf{Int}(D \cap E) = \mathsf{Int}(D) \cap \mathsf{Int}(E)$;

(iv) $\mathsf{Int}\Big(\mathsf{Int}(E)\Big) = \mathsf{Int}(E)$.

Открытые множества. Множество E в евклидовом пространстве X называтся *открытым*, если любая его точка $x \in E$ является внутренней для E:

$$\forall x \in E \quad \exists \varepsilon > 0 \quad U_\varepsilon(x) \subseteq E$$

Теорема 13.2.5. *Множество $E \subseteq X$ открыто тогда и только тогда, когда оно совпадает со своей внутренностью:*

$$E \text{ – открыто} \quad \Longleftrightarrow \quad \mathsf{Int}(E) = E$$

Теорема 13.2.6. *Внутренность $\mathsf{Int}(E)$ произвольного множества $E \subseteq X$ есть наибольшее открытое множество, содержащееся в E.*

◇ **13.2.7.** Покажем, что любой интервал (a, b) на прямой $\mathbb{R}$ является открытым множеством. Возьмем какую-нибудь точку $x \in (a, b)$, и положим $\varepsilon = \min\Big\{|x-a|, |b-x|\Big\}$.

Тогда окрестность $U_\varepsilon(x) = (x-\varepsilon, x+\varepsilon)$ будет лежать в (a, b):

$$U_\varepsilon(x) = (x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subseteq (a, b)$$

то есть x – внутренняя точка для (a, b). Таким образом, любая точка $x \in (a, b)$ автоматически является внутренней точкой для (a, b), значит (a, b) действительно является открытым множеством.

Предложение 13.2.7. *На прямой $\mathbb{R}$ всякое открытое множество U представляет собой объединение некоторой последовательности (возможно, конечной) интервалов:*

$$U = \bigcup_{i=1}^{\infty} (a_i, b_i)$$

▷ **13.2.8.** Проверьте, что из множеств на плоскости

$$E = \Big\{(x; y) : \quad y \geqslant 0\Big\}, \qquad N = \Big\{(x; y) : \quad y > 0\Big\}$$

второе открыто, а первое – нет.

Из теоремы 3.2 следует, что открытые множества характеризуются тем свойством, что последовательность, стремящаяся к какой-нибудь точке такого множества, обязательно заходит в это множество:

Теорема 13.2.8 (о секвенциальной характеризации открытых множеств)**.** *Для множества E в евклидовом пространстве X следующие условия эквивалентны.*

(i) *множество E открыто;*

(ii) *если какая-нибудь последовательность $\{x_m\}$ сходится в X, и ее предел x лежит в E, то почти все ее элементы x_m лежат в E:*

$$x_m \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} x \in E \quad \Longrightarrow \quad \exists N \quad \forall m > N \quad x_m \in E$$

Доказательство. 1. $(i) \Rightarrow (ii)$ Пусть x_m – какая-нибудь последовательность, стремящаяся к какой-нибудь точке $x \in E$. Если E открыто, то x будет внутренней точкой для E (как любая другая точка из E), поэтому по теореме 3.2, почти все x_m должны лежать в E.

2. $(ii) \Rightarrow (ii)$ Пусть выполняется (ii), и пусть x – какая-нибудь точка из E. Если x_m – какая-нибудь последовательность, стремящаяся к x, то по условию (ii), почти все ее элементы должны лежать в E. Значит, по теореме 3.2, x – внутренняя точка для E. Мы получили, что любая точка $x \in E$ является внутренней точкой для E. Значит, E – открытое множество. □

▷ **13.2.9.** Определите, какие из множеств упражнения 13.2.6 будут открытыми.

Свойства открытых множеств

1°. *Объединение любого семейства открытых множеств снова является открытым множеством:*

$$\Big\{U_i, \quad i \in I\Big\} - \text{открытые множества} \quad \Longrightarrow \quad \bigcup_{i\in I} U_i - \text{тоже открытое множество}$$

2°. *Пересечение любых двух открытых множеств тоже является открытым множеством*

$$U, V - \text{открытые множества} \quad \Longrightarrow \quad U \cap V - \text{тоже открытое множество}$$

(c) Замыкание и замкнутые множества

Точки прикосновения. Пусть E – какое-нибудь множество в евклидовом пространстве X. Точка $x \in X$ называется *точкой прикосновения* множества E, если всякая окрестность $U_\varepsilon(x)$ точки x содержит какую-нибудь точку множества E:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists y \in E \cap U_\varepsilon(x)$$

Это условие можно переписать по-другому:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad E \cap U_\varepsilon(x) \neq \varnothing$$

(то есть требуется, чтобы пересечение $E \cap U_\varepsilon(x)$ множества E с любой окрестностью $U_\varepsilon(x)$ было непусто).

◇ **13.2.10.** Рассмотрим на плоскости $\mathbb{R}^2$ множество точек с неотрицательной ординатой:

$$E = \Big\{ (x; y) : \quad y \geqslant 0 \Big\}$$

Точка $C(0,0)$ является точкой прикосновения для E, потому что любая ее окрестность $U_\varepsilon(C)$ содержит точки множества E (например, точку $\big(0; \frac{\varepsilon}{2}\big)$, или саму точку $C(0,0)$). Более того, любая точка $B(x; y)$ с ординатой $y \geqslant 0$ будет точкой прикосновения для E (потому что в этом случае $B \in E \cap U_\varepsilon(B)$).

Наоборот, точка $D(0; -1)$ не будет точкой прикосновения для E, потому что, например, ее окрестность $U_{\frac{1}{2}}(D)$ (с радиусом $\varepsilon = \frac{1}{2}$) не будет пересекаться с E.

Теорема 13.2.9 (о секвенциальной характеризации точек прикосновения). *Пусть даны множество E и точка x в евклидовом пространстве X. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(*i*) *x – точка прикосновения для множества E;*

(*ii*) *существует последовательность $\{x_m\}$ элементов из E, стремящаяся к x:*

$$x \underset{\infty \leftarrow m}{\longleftarrow} \underbrace{x_m \in E}_{\substack{\text{выполняется} \\ \text{для всех } m}}$$

(*iii*) *существует последовательность $\{x_m\}$ стремящаяся к x, у которой почти все элементы лежат в E:*

$$x \underset{\infty \leftarrow m}{\longleftarrow} \underbrace{x_m \in E}_{\substack{\text{выполняется} \\ \text{для почти всех } m}}$$

Доказательство. 1. $(i) \Rightarrow (ii)$ Пусть x – точка прикосновения для E, то есть такая точка, у которой всякая окрестность $U_\varepsilon(x)$ пересекается с E.

$$\forall \varepsilon > 0 \quad E \cap U_\varepsilon(x) \neq \varnothing$$

В частности, это должно выполняться для окрестностей вида $U_{\frac{1}{m}}(x)$.

$$\forall m \in \mathbb{N} \quad E \cap U_{\frac{1}{m}}(x) \neq \varnothing$$

Значит, можно выбрать точки x_m:

$$x_m \in E \cap U_{\frac{1}{m}}(x)$$

Мы получим некоторую последовательность $\{x_m\}$. Покажем, что она стремится к x. Для этого выпишем логическую цепочку:

$$x_m \in U_{\frac{1}{m}}(x)$$
$$\Downarrow$$
$$0 \leqslant |x_m - x| < \frac{1}{m} \underset{m \to \infty}{\longrightarrow} 0$$
$$\Downarrow$$

$$|x_m - x| \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} 0$$
$$\Downarrow$$
$$x_m \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} x$$

2. Импликация $(ii) \Rightarrow (iii)$ очевидна.

3. $(iii) \Rightarrow (i)$ Пусть наоборот, имеется последовательность $\{x_m\}$ стремящаяся к x, у которой почти все элементы лежат в E.

$$x_m \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} x, \quad \& \quad \exists N \quad \forall m > N \quad x_m \in E \tag{13.2.65}$$

Тогда мы получим цепочку:

$$x_m \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} x$$
$$\Downarrow$$
$$|x_m - x| \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} 0$$
$$\Downarrow$$
$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists K \quad \forall m > K \quad |x_m - x| < \varepsilon$$
$$\Downarrow$$
$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists K \quad \forall m > K \quad x_m \in U_\varepsilon(x)$$
$$\Downarrow$$
$$\Big(\text{вспоминаем про } N \text{ из условия (13.2.65)}\Big)$$
$$\Downarrow$$
$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists K \quad \forall m > \max\{K, N\} \quad x_m \in U_\varepsilon(x)$$
$$\Downarrow$$
$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists m \quad x_m \in U_\varepsilon(x)$$

Мы получили, что в любой окрестности $U_\varepsilon(x)$ точки x найдется некоторая точка x_m $(m > N)$ из множества E. Значит, x – точка прикосновения для E. □

Замыкание множества. *Замыканием* $\overline{E}$ множества E в евклидовом пространстве X называется множество всех точек прикосновения множества E:

$$\overline{E} = \Big\{x \in \mathbb{R}^n : \quad x \text{ – точка прикосновения для } E\Big\} = \Big\{x \in \mathbb{R}^n : \quad \forall \varepsilon > 0 \quad U_\varepsilon(x) \cap E \neq \varnothing\Big\}$$

▷ **13.2.11.** Найдите замыкания множеств из упражнения 13.2.6.

Теорема 13.2.10. *Операция перехода к замыканию* $E \mapsto \overline{E}$ *обладает следующими свойствами:*

(i) $\overline{\varnothing} = \varnothing$

(ii) $E \subseteq \overline{E}$

(iii) $\overline{D \cup E} = \overline{D} \cup \overline{E}$

(iv) $\overline{\overline{E}} = \overline{E}$

Замкнутые множества. Множество E в евклидовом пространстве X называется *замкнутым*, если любая его точка прикосновения $x \in X$ обязательно лежит в E:

$$\forall x \in \mathbb{R}^n \quad \Big(\forall \varepsilon > 0 \quad E \cap U_\varepsilon(x) \neq \varnothing\Big) \quad \Longrightarrow \quad x \in E$$

Теорема 13.2.11. *Множество* $E \subseteq X$ *замкнуто тогда и только тогда, когда оно совпадает со своим замыканием:*

$$E \text{ – замкнуто} \quad \Longleftrightarrow \quad \overline{E} = E$$

Теорема 13.2.12. *Замыкание* $\overline{E}$ *произвольного множества* $E \subseteq X$ *есть наименьшее замкнутое множество, содержащее* E.

◇ **13.2.12.** Покажем, что любой отрезок $[a,b]$ на прямой $\mathbb{R}$ является замкнутым множеством. Возьмем какую-нибудь точку прикосновения x для $[a,b]$. По теореме 13.2.9, найдется последовательность точек $x_m \in [a,b]$ сходящаяся к x:

$$x_m \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} x$$

Поскольку $x_m \in [a,b]$, должны выполняться неравенства

$$a \leqslant x_m \leqslant b$$

Поэтому, по теореме о переходе к пределу в неравенстве

$$a \leqslant x \leqslant b$$

то есть $x \in [a,b]$.

Мы получили, что любая точка прикосновения x для $[a,b]$ автоматически принадлежит $[a,b]$, то есть $[a,b]$ действительно является замкнутым множеством.

▷ **13.2.13.** Проверьте, что из множеств на плоскости

$$E = \Big\{(x;y): \quad y \geqslant 0\Big\}, \quad N = \Big\{(x;y): \quad y > 0\Big\},$$

первое замкнуто, а второе – нет.

Замкнутые множества, как и открытые, имеют характеризацию с помощью сходящихся последовательностей. Именно, множество E замкнуто, если предел любой сходящейся последовательности, лежащей в E тоже лежит в E:

Теорема 13.2.13 (о секвенциальной характеризации замкнутых множеств)**.** *Для множества E в евклидовом пространстве X следующие условия эквивалентны:*

(i) *множество E замкнуто;*

(ii) *если какая-нибудь последовательность $\{x_m\}$ сходится в X, и все ее элементы лежат в E, то предел этой последовательности лежит в E:*

$$x \underset{\infty\leftarrow m}{\longleftarrow} \underbrace{x_m \in E}_{\substack{\text{выполняется}\\ \text{для всех } m}} \quad \Longrightarrow \quad x \in E$$

(iii) *если какая-нибудь последовательность $\{x_m\}$ сходится в X, и почти все ее элементы лежат в E, то предел этой последовательности x лежит в E:*

$$x \underset{\infty\leftarrow m}{\longleftarrow} \underbrace{x_m \in E}_{\substack{\text{выполняется}\\ \text{для почти всех } m}} \quad \Longrightarrow \quad x \in E$$

Доказательство. 1. $(i) \Rightarrow (ii)$ Пусть множество E замкнуто, покажем что тогда выполняется (ii). Возьмем сходящуюся последовательность $x_m \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} x$, почти все элементы которой лежат в E:

$$\exists N \quad \forall m > N \quad x_m \in E$$

Тогда по теореме 13.2.9, x должна быть точкой прикосновения для E, значит, поскольку E замкнуто, $x \in E$.

2. Импликация $(ii) \Rightarrow (iii)$ очевидна.

3. $(iii) \Rightarrow (i)$ Наоборот, пусть выполняется (ii), покажем что тогда множество E замкнуто. Возьмем какую-нибудь точку прикосновения x для E. По теореме 13.2.9, найдется последовательность $\{x_m\}$ стремящаяся к x

$$x_m \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} x$$

у которой почти все элементы лежат в E.

$$\exists N \quad \forall m > N \quad x_m \in E$$

По свойству (ii) это означает, что $x \in E$. Мы получили, что всякая точка прикосновения x для E обязательно должна лежать в E. Значит E – замкнутое множество. □

▷ **13.2.14.** Определите, какие из множеств упражнения 13.2.6 будут замкнутыми.

Свойства замкнутых множеств

1°. *Пересечение любого семейства замкнутых множеств снова является замкнутым множеством:*

$$\Big\{C_i, \quad i\in I\Big\} - \textit{замкнутые множества} \quad\Longrightarrow\quad \bigcap_{i\in I} C_i - \textit{тоже замкнутое множество}$$

2°. *Объединение любых двух замкнутых множеств тоже является замкнутым множеством*

$$C, D - \textit{замкнутые множества} \quad\Longrightarrow\quad C\cup D - \textit{тоже замкнутое множество}$$

(d) Двойственность между открытыми и замкнутыми множествами

Дополнения открытых и замкнутых множеств. *Дополнением* множества E в евклидовом пространстве X называется разность множеств[5] X и E, то есть множество всех точек $x\in X$, не принадлежащих E:

$$X\setminus E = \Big\{x\in X:\ x\notin E\Big\}$$

▷ **13.2.15.** Найдите дополнения к множествами из упражнения 13.2.6.

Теорема 13.2.14. *Пусть E – множество в евклидовом пространстве X. Тогда*

- *если E открыто в X, то его дополнение $X\setminus E$ замкнуто в $\mathbb{R}^n$;*
- *если E замкнуто в X, то его дополнение $X\setminus E$ открыто в $\mathbb{R}^n$.*

Доказательство. Обозначим буквой L дополнение к множеству E:

$$L = \mathbb{R}^n \setminus E.$$

1. Пусть E открыто, то есть любая его точка – внутренняя. Отсюда следует, что если x – не внутренняя точка для E, то x не принадлежит E:

$$x - \text{не внутренняя точка для } E \quad\Longrightarrow\quad x\notin E \tag{13.2.66}$$

Запомним это, и покажем, что тогда L должно быть замкнуто.

Для произвольной точки прикосновения x множества L получается следующая логическая цепочка:

$$\begin{gathered}
x - \text{точка прикосновения для } L\\
\Downarrow\\
\forall\varepsilon>0\quad \exists y\in L\cap U_\varepsilon(x)\\
\Downarrow\\
\forall\varepsilon>0\quad \exists y:\quad y\in L \quad \&\quad y\in U_\varepsilon(x)\\
\Downarrow\\
\forall\varepsilon>0\quad \exists y:\quad y\notin E \quad \&\quad y\in U_\varepsilon(x)\\
\Downarrow\\
\forall\varepsilon>0\quad U_\varepsilon(x)\not\subseteq E\\
\Downarrow \quad {\scriptstyle (13.2.66)}
\end{gathered}$$

[5] Разность множеств была определена формулой (0.3.171).

$$x \notin E$$
$$\Downarrow$$
$$x \in L$$

Мы получили, что любая точка прикосновения x для множества L автоматически принадлежит L. Это означает, что L – замкнутое множество.

2. Предположим, что наоборот, E замкнуто, то есть любая точка прикосновения x для E автоматически лежит в E. Отсюда следует, что если x не лежит в E, то x не является точкой прикосновения для E:

$$x \notin E \quad \Longrightarrow \quad x \text{ – не точка прикосновения для } E \tag{13.2.67}$$

Запомним это, и покажем, что тогда L открыто.

Возьмем любую точку x из L. Получаем следующую логическую цепочку:

$$x \in L$$
$$\Downarrow$$
$$x \notin E$$
$$\Downarrow \quad \text{\scriptsize (13.2.67)}$$
$$x \text{ – не точка прикосновения для } E$$
$$\Downarrow$$
$$\exists \varepsilon > 0 \quad E \cap U_\varepsilon(x) = \varnothing$$
$$\Downarrow$$
$$\exists \varepsilon > 0 \quad U_\varepsilon(x) \subseteq \mathbb{R}^n \setminus E$$
$$\Downarrow$$
$$\exists \varepsilon > 0 \quad U_\varepsilon(x) \subseteq L$$
$$\Downarrow$$
$$x \text{ – внутренняя точка для } L$$

Мы получили, что любая точка $x \in L$ автоматически является внутренней для L. Это означает, что L – открытое множество. □

Разность открытых и замкнутых множеств. *Разностью множеств* D и E в евклидовом пространстве X называется множество $D \setminus E$, состоящее из тех точек D, которые не попадают в E:

$$D \setminus E = \{x \in D : \ x \notin E\}$$

Очевидно, разность связана с дополнением формулой

$$D \setminus E = D \cap \Big(\mathbb{R}^n \setminus E\Big)$$

Вместе с теоремой 13.2.14 эта формула делает очевидным следующее свойство разности множеств:

Теорема 13.2.15. *Пусть U – открытое, а M – замкнутое множества в евклидовом пространстве X. Тогда*

- *разность $U \setminus M$ – открытое множество в X;*
- *разность $M \setminus U$ – замкнутое множество в X.*

Двойственность между замыканием и внутренностью.

Теорема 13.2.16. *Для всякого множества M в евклидовом пространстве X справедливы формулы*

$$\overline{\mathbb{R}^n \setminus M} = \mathbb{R}^n \setminus \operatorname{Int}(M) \tag{13.2.68}$$
$$\operatorname{Int}(\mathbb{R}^n \setminus M) = \mathbb{R}^n \setminus \overline{M} \tag{13.2.69}$$

(e) Некоторые дополнительные понятия из топологии

Граница множества. Точка x в евклидовом пространстве X называется *граничной точкой* для множества $E \subseteq X$, если любая ее окрестность $U_\varepsilon(x)$ содержит точки лежащие в E и точки не лежащие в E:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad U_\varepsilon(x) \cap E \neq \varnothing \quad \& \quad U_\varepsilon(x) \setminus E \neq \varnothing$$

Лемма 13.2.17 (о секвенциальной характеризации граничных точек)**.** *Точка $x \in \mathbb{R}^n$ тогда и только тогда будет граничной точкой для множества $E \subseteq \mathbb{R}^n$, когда существуют последовательности*

$$x_m \in E, \quad \widetilde{x_m} \notin E$$

такие, что

$$x_m \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} x \underset{\infty\leftarrow m}{\longleftarrow} \widetilde{x_m}$$

- *Границей* $\mathsf{Fr}(E)$ множества E в евклидовом пространстве X называется множество всех граничных точек множества E:

$$\mathsf{Fr}(E) = \Big\{ x \in X : \quad x \text{ -- граничная точка для } E \Big\} =$$
$$= \Big\{ x \in X : \quad \forall \varepsilon > 0 \quad U_\varepsilon(x) \cap E \neq \varnothing \quad \& \quad U_\varepsilon(x) \setminus E \neq \varnothing \Big\}$$

Теорема 13.2.18. *Граница $\mathsf{Fr}(E)$ произвольного множества $E \subseteq X$ есть разность между замыканием и внутренностью множества E:*

$$\mathsf{Fr}(E) = \overline{E} \setminus \mathsf{Int}(E)$$

Теорема 13.2.19. *Для любых множеств $A, B \subseteq X$ справедливы формулы:*

$$\mathsf{Fr}(A \cup B) \subseteq \mathsf{Fr}(A) \cup \mathsf{Fr}(B), \qquad \mathsf{Fr}(A \cap B) \subseteq \mathsf{Fr}(A) \cup \mathsf{Fr}(B), \qquad \mathsf{Fr}(A \setminus B) \subseteq \mathsf{Fr}(A) \cup \mathsf{Fr}(B) \qquad (13.2.70)$$

Ядро и нарост.

- Для всякого замкнутого множества E в евклидовом пространстве X
  - его *ядром* называется замыкание его внутренности:
  $$\mathsf{Nuc}(E) = \overline{\mathsf{Int}(E)} \qquad (13.2.71)$$
  - его *наростом* называется оставшаяся часть:
  $$\mathsf{Rem}(E) = E \setminus \mathsf{Nuc}(E) = E \setminus \overline{\mathsf{Int}(E)} \qquad (13.2.72)$$
- Множество D в евклидовом пространстве X называется *(замкнутой) областью* в X, если оно совпадает со своим ядром:
$$D = \mathsf{Nuc}(D) = \overline{\mathsf{Int}(D)}$$

Всюду плотные множества.

- Множество $M \subseteq X$ называется *всюду плотным в* X, если каждый открытый шар $U_r(x)$ содержит какую-нибудь точку этого множества. Это эквивалентно тому, что всякое открытое множество $U \subseteq X$ содержит какую-нибудь точку множества M.

◇ **13.2.16.** Множество $\mathbb{Q}$ рациональных чисел всюду плотно в $\mathbb{R}$, потому что по теореме 2.2.32 всякий интервал (a, b) (и поэтому всякий интервал $U_r(x) = (x-r, x+r)$) содержит какую-нибудь точку из $\mathbb{Q}$. Отсюда следует, что множество $\mathbb{Q}^n$ точек из $\mathbb{R}^n$ с рациональными координатами

$$x \in \mathbb{Q}^n \quad \Longleftrightarrow \quad x = \Big(x^1, x^2, ..., x^n\Big) \quad \& \quad \forall i = 1, ..., n \quad x^i \in \mathbb{Q}$$

всюду плотно в $\mathbb{R}^n$.

◇ **13.2.17.** В противоположность этому, никакой отрезок $[\alpha, \beta]$ (и никакой конечный интервал (α, β)) не будет всюду плотен в $\mathbb{R}$, потому что если взять, например, интервал $(\beta, \beta+1)$, то в нем не будет содержаться элементов множества $[\alpha, \beta]$ (и множества (α, β)). По тем же причинам, никакой шар не будет всюду плотен в $\mathbb{R}^n$.

Теорема 13.2.20. *Для множества M в евклидовом пространстве X следующие условия эквивалентны:*

(i) *M всюду плотно в X,*

(ii) *замыкание M совпадает с X:*

$$\overline{M} = X$$

(iii) *дополнение к M в X имеет пустую внутренность:*

$$\mathsf{Int}(X \setminus M) = \varnothing.$$

Доказательство. Эквивалентность (i)$\Leftrightarrow$(ii) очевидна, а (ii)$\Leftrightarrow$(iii) следует из (13.2.69). □

Связные множества.

- Множество M в евклидовом пространстве X называется
  - *несвязным*, если в X найдутся два непересекающихся открытых множества U и V, объединие которых содержит M:
$$M \subseteq U \cup V \quad \& \quad U \cap V = \varnothing,$$
  - *связным*, если таких множеств нет, то есть если любые два открытые множества U и V в X, объединие которых содержит M, обязательно пересекаются:
$$M \subseteq U \cup V \quad \Longrightarrow \quad U \cap V \neq \varnothing.$$
- *Компонентой связности* множества M в X называется всякое связное подмножество A в M, которое не содержится ни в каком другом связном подмножестве B из M.

§ 3 Компактность и паракомпактность

(a) Ограниченные множества

- Множество E в евклидовом пространстве X называется *ограниченным*, если оно содержится в некотором шаре $B_r(0)$:
$$\exists r \geqslant 0 \quad E \subseteq B_r(0)$$
Это равносильно условию
$$\sup_{x \in E} |x| < \infty$$
или условию конечности следующей величины, называемой *диаметром* множества E:
$$\mathsf{diam}\, E = \sup_{x,y \in E} |x - y|$$

Ограниченные последовательности и теорема Больцано-Вейерштрасса. Последовательность $\{x_m\}$ в евклидовом пространстве X называется *ограниченной*, если

$$\sup_{m \in \mathbb{N}} |x_m| < \infty$$

Как и в случае $\mathbb{R}$, в произвольном евклидовом пространстве X бывает полезно вместе с последовательностями рассматривать также их подпоследовательности. Напомним, как они определяются.

- Пусть нам дана какая-то последовательность точек в евклидовом пространстве X

$$x_m$$

и пусть кроме того дана бесконечно большая последовательность натуральных чисел:

$$m_k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$$

Тогда можно рассмотреть последовательность $y_k = x_{m_k}$ (зависящую от индекса k). Она называется *подпоследовательностью* последовательности x_m.

Свойства подпоследовательностей

1°. Если последовательность $\{x_m\}$ стремится к точке $a \in X$, то любая ее подпоследовательность $\{x_{m_k}\}$ тоже стремится к a:

$$x_m \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} a \quad \Longrightarrow \quad x_{m_k} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} a$$

2°. Если последовательность $\{x_m\}$ не стремится к точке $a \in X$, то найдется такая подпоследовательность $\{x_{m_k}\}$ и такое число $\varepsilon > 0$, что расстояние от x_{m_k} до a больше ε:

$$x_m \underset{m\to\infty}{\not\longrightarrow} a \quad \Longrightarrow \quad \exists \varepsilon > 0 \quad \forall k \qquad |x_{m_k} - a| > \varepsilon$$

3°. Если последовательность $\{x_m\}$ неограничена, то она содержит некоторую бесконечно большую подпоследовательность:

$$\sup_{m\in\mathbb{N}} |x_m| = +\infty \Longrightarrow \quad \exists x_{m_k} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \infty$$

Теорема 13.3.1 (Больцано-Вейерштрасса). *Всякая ограниченная последовательность $\{x_m\}$ в евклидовом пространстве X имеет сходящуюся подпоследовательность $\{x_{m_k}\}$.*

Для доказательства нам понадобится следующие определение и лемма после него.

- *Клеткой* в пространстве $\mathbb{R}^n$ называется множество вида

$$[a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times ... \times [a_n, b_n] = \{x \in \mathbb{R}^n : \ \forall i = 1, ...n \quad x^{(i)} \in [a_i, b_i]\}$$

где $[a_1, b_1]$,...,$[a_n, b_n]$ – отрезки в $\mathbb{R}$, называемые *ребрами* этой клетки.

Лемма 13.3.2. *Всякое ограниченное множество E в $\mathbb{R}^n$ содержится в некоторой клетке K с ребрами, не превосходящими по длине диаметра E.*

Доказательство. Поскольку B ограничено, каждая его проекция на координатную ось

$$B^i = \{x^i; \ x \in B\}, \quad i = 1, ..., n$$

является ограниченным множеством в $\mathbb{R}$. Обозначим через a_i и b_i нижнюю и верхнюю грани этого множества:

$$a_i = \inf B^i, \qquad b_i = \sup B^i$$

и положим:

$$K = \{x \in \mathbb{R}^n : \ x^i \in [a_i, b_i]\}$$

Тогда, во-первых,

$$\forall i = 1, ..., n \qquad \forall x, y \in B \qquad |y^i - x^i| \leqslant \sqrt{\sum_{j=1}^{n} |y^j - x^j|^2} = |y - x| \leqslant \operatorname{diam} B$$

$$\Downarrow$$

$$\forall i = 1, ..., n \qquad b_i - a_i = \sup_{y\in B} y^i - \inf_{x\in B} x^i = \sup_{x,y\in B} |y^i - x^i| \leqslant \operatorname{diam} B$$

И, во-вторых,

$$\forall i = 1, ..., n \qquad B^i \subseteq [a_i, b_i]$$

$$\Downarrow$$

$$B \subseteq \{x \in \mathbb{R}^n : \ x^i \in [a_i, b_i]\}$$

□

Доказательство теоремы 13.3.1. По теореме о представлении 13.1.15, X изоморфно некоторому пространству $\mathbb{R}^n$. Поэтому можно считать, что $X = \mathbb{R}^n$. Пусть $\{x_m\}$ – ограниченная последовательность в $\mathbb{R}^n$. По лемме 13.3.2, $\{x_m\}$ содержится в некоторой клетке $[a_1, b_1] \times ... \times [a_n, b_n]$. Рассмотрим первые координаты $\{x_m^1\}$ векторов $\{x_m\}$. Они содержатся в отрезке $[a_1, b_1]$:

$$x_m^1 \subseteq [a_1, b_1].$$

По теореме 3.2.13 Больцано-Вейерштрасса для $\mathbb{R}$, последовательность $\{x_m^1\}$ содержит сходящуюся подпоследовательность $x_{m_k}^1$. Если перейти от исходной последовательности $\{x_m\}$ к подпоследовательности $\{x_{m_k}\}$, то в ней уже первая координата $x_{m_k}^1$ будет сходиться. Поэтому можно считать, что нам с самого начала была дана последовательность $\{x_m\}$, у которой первая координата $\{x_m^1\}$ сходится. Тогда точно так же мы рассматриваем вторую координату $\{x_m^2\}$, и, поскольку она лежит в отрезке $[a_2, b_2]$, она по теореме 3.2.13 Больцано-Вейерштрасса для $\mathbb{R}$, имеет сходящуюся подпоследовательность $x_{m_k}^2$. Опять переходя от $\{x_m\}$ к $\{x_{m_k}\}$, мы получаем последовательность, у которой уже первые две координаты $x_{m_k}^1$ и $x_{m_k}^2$ сдодятся, и это означает, что мы с самого начала могли считать, что у исходной последовательности $\{x_m\}$ первые две координаты сходились. И так далее. Применяя этот прием, мы получим подпоследовательность $\{x_{m_k}\}$, у которой все координаты сходятся, и по предложению 13.2.1, это означает, что последовательность $\{x_{m_k}\}$ сходится. $\square$

Теорема 13.3.3 (секвенциальная характеризация ограниченных множеств)**.** *Для множества E в евклидовом пространстве X следующие условия эквивалентны:*

(i) множество E ограничено;

(ii) всякая последовательность $\{x_m\}$ элементов множества E ограничена.

(b) Компактные множества

Определение компакта и примеры Множество K в евклидовом пространстве X называется *компактным множеством* (или *компактом*) если всякая последовательность его точек

$$x_m \in K$$

имеет сходящуюся подпоследовательность

$$x_{m_k} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} x$$

причем ее предел x принадлежит K:

$$x \in K$$

◇ **13.3.1.** Полуинтервал на прямой $[0, +\infty)$ не будет компактом, например, потому что он содержит последовательность точек $x_m = m$, у которой нет сходящихся подпоследовательностей.

◇ **13.3.2.** Интервал $(0, 1)$ на прямой $\mathbb{R}$ не будет компактом, например, потому что он содержит последовательность точек $x_m = \frac{1}{2m}$, у которой любая подпоследовательность сходится к точке 0, которая не принадлежит множеству $(0, 1)$. Таким же образом доказывается, что *любой интервал (a, b) не является компактом.*

◇ **13.3.3.** *Любой отрезок $[a, b]$ на прямой $\mathbb{R}$ будет компактом*, потому что если взять последовательность точек $x_m \in [a, b]$, то по теореме Больцано-Вейерштрасса 3.2.13, она должна иметь сходящуюся подпоследовательность $\{x_{m_k}\}$:

$$x_{m_k} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} x$$

При этом, поскольку $[a, b]$ – замкнутое множество в $\mathbb{R}$ (в силу примера 13.2.12), предел любой последовательности его элементов должен лежать в $[a, b]$. В частности предел x последовательности $x_{m_k} \in [a, b]$ тоже лежит в $[a, b]$:

$$x \in [a, b]$$

Мы получили, что любая последовательность $x_m \in [a, b]$ имеет сходящуюся подпоследовательность x_{m_k}, предел которой тоже лежит в $[a, b]$. Значит $[a, b]$ – действительно компакт.

Критерий компактности

Теорема 13.3.4 (критерий компактности). *Множество K в евклидовом пространстве X тогда и только тогда компактно, когда оно*

(a) *замкнуто и*

(b) *ограничено.*

Доказательство. 1. Пусть K компактно, покажем что тогда оно замкнуто и ограничено.

a) Пусть x – точка прикосновения множества K. По теореме 13.2.9, должна существовать последовательность $x_m \in K$, сходящаяся к x:

$$x_m \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} x$$

Поскольку K компактно, найдется подпоследовательность x_{m_k}, сходящаяся к некоторому элементу $y \in K$:

$$x_{m_k} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} y \in K$$

С другой стороны, любая подпоследовательность x_{m_k} сходящейся последовательности x_m будет иметь тот же предел, что и x_m:

$$x_{m_k} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} x$$

Значит, $x = y$, и поэтому $x \in K$. Таким образом, мы получили, что любая точка прикосновения x множества K обязательно принадлежит K. Это значит, что K – замкнутое множество.

b) Предположим, что K не ограничено, то есть K не содержится ни в одном шаре с центром в нуле 0:

$$\forall r > 0 \quad K \not\subseteq U_r(0)$$

Тогда, в частности, K не будет содержаться ни в одном шаре вида $U_m(0)$, $m \in \mathbb{N}$:

$$\forall m \in \mathbb{N} \quad K \not\subseteq U_m(0)$$

Это значит, что для всякого $m \in \mathbb{N}$ можно выбрать точку $x_m \in K$ которая не будет лежать в $U_m(0)$:

$$\forall m \in \mathbb{N} \quad x_m \in K \quad \& \quad x_m \notin U_m(0)$$

Рассмотрим последовательность x_m. Условие $x_m \notin U_m(0)$ означает, что

$$|x_m| \geqslant m$$

и поэтому $\{x_m\}$ стремится к бесконечности:

$$|x_m| \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$$

Ясно, что тогда любая подпоследовательность $\{x_{m_k}\}$ тоже будет стремиться к бесконечности:

$$|x_{m_k}| \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$$

и поэтому $\{x_{m_k}\}$ не может сходиться ни к какому x:

$$|x_{m_k}| \leqslant |x_{m_k} - x| + |x|$$

$$\Downarrow$$

$$|x_{m_k} - x| \geqslant |x_{m_k}| - |x| \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} +\infty - |x| = +\infty$$

$$\Downarrow$$

$$|x_{m_k} - x| \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$$

Мы получили, что имеется последовательность точек $x_m \in K$, у которой никакая подпоследовательность $\{x_{m_k}\}$ не сходится. Значит, K не может быть компактом.

Таким образом, если предположить, что K не ограничено, то получится, что K – не компакт. Значит K ограничено.

2. Пусть наоборот, K замкнуто и ограничено, покажем, что тогда K должно быть компактом. Пусть $\{x_m\}$ – какая-нибудь последовательность точек из K. Поскольку K ограничено, последовательность $\{x_m\}$ тоже должна быть ограничена. Значит, по теореме Больцано-Вейерштрасса 13.3.1, $\{x_m\}$ содержит некоторую сходящуюся подпоследовательность $\{x_{m_k}\}$:

$$x_{m_k} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} x$$

При этом, поскольку $x_{m_k} \in K$, а K – замкнутое множество, по теореме 13.2.13 получаем что $x \in K$.

Мы доказали, что всякая последовательность $\{x_m\}$ точек из K содержит подпоследовательность $\{x_{m_k}\}$, сходящуюся к точке из K. Это значит, что K – компактное множество. □

Следствие 13.3.5. *Замкнутое подмножество в компакте само является компактом.*

Доказательство. Если A – компакт в $\mathbb{R}^n$ и B – замкнутое подмножество в A, то B замкнуто и ограничено в $\mathbb{R}^n$, и значит, по критерию компактности 13.3.4 B тоже является компактом. □

◇ **13.3.4** (сходящиеся последовательности как компакты). Из теоремы 13.3.4 следует, что если $\{x_k\}$ – сходящаяся последовательность в $\mathbb{R}^n$, и x – ее предел,

$$x_k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} x,$$

то множество

$$M = \{x\} \cup \{x_k;\ k \in \mathbb{N}\}$$

является компактом в $\mathbb{R}^n$ (потому что оно замкнуто и ограничено).

Сходящиеся последовательности могут считаться примерами “сложно устроенных” компактов, потому что, если x_k попарно не совпадают, то M состоит из бесконечного набора *компонент связности*[6] – отдельно стоящих точек x_k (и x, если она не совпадает ни с какой x_k).

Отделимость компакта.

Теорема 13.3.6 (об отделимости компакта)**.** *Пусть E и K – непересекающиеся множества в евклидовом пространстве X*

$$K \cap E = \varnothing \tag{13.3.73}$$

причем K – компакт, а E – замкнуто в X. Тогда найдется такое число $\varepsilon > 0$ что расстояние между любыми точками из K и E не меньше ε:

$$\exists \varepsilon > 0 \quad \forall x \in K \quad \forall y \in E \qquad |x - y| > \varepsilon \tag{13.3.74}$$

Доказательство. Предположим, что это не так, то есть

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists x \in K \quad \exists y \in E \qquad |x - y| \leqslant \varepsilon \tag{13.3.75}$$

Тогда, в частности, для $\varepsilon = \frac{1}{m}$ получим:

$$\forall \varepsilon = \frac{1}{m} \quad \exists x_m \in K \quad \exists y_m \in E \qquad |x_m - y_m| \leqslant \frac{1}{m}$$

Поскольку K – компакт, из последовательности $x_m \in K$ можно выбрать сходящуюся подпоследовательность:

$$x_{m_k} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} a \in K$$

Тогда получится, что y_m тоже стремится к x, потому что

$$|y_{m_k} - a| = |y_{m_k} - x_{m_k} + x_{m_k} - a| \leqslant |y_{m_k} - x_{m_k}| + |x_{m_k} - a| \leqslant \underbrace{\frac{1}{m_k}}_{\substack{\downarrow \\ 0}} + \underbrace{|x_{m_k} - a|}_{\substack{\downarrow \\ 0}} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0 \quad \Longrightarrow \quad y_{m_k} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} a$$

Поскольку E замкнуто, и $y_{m_k} \in E$, это означает, что $a \in E$. Таким образом, точка a лежит в обоих множествах K и E:

$$a \in K \cap E,$$

что противоречит условию (13.3.73). Это противоречие означает, что наше предположение (13.3.75) неверно. Значит, должно быть верно (13.3.74). □

[6] Компоненты связности были определены на с.786.

- Для всякого множества $A \subseteq \mathbb{R}^n$ и любого числа $\varepsilon > 0$ множество точек, отстоящих от A не более чем на ε
$$B_\varepsilon(A) = \Big\{ y \in \mathbb{R}^n : \quad \forall x \in A \quad |y - x| \leqslant \varepsilon \Big\} \tag{13.3.76}$$
называется *замкнутой ε-окрестностью множества* A, а множество точек, отстоящих от A строго меньше, чем на ε
$$U_\varepsilon(A) = \Big\{ y \in \mathbb{R}^n : \quad \forall x \in A \quad |y - x| < \varepsilon \Big\} \tag{13.3.77}$$
называется *открытой ε-окрестностью множества* A.

- Просто *окрестностью множества* A (без упоминания ε) называется любое открытое множество U, содержащее замыкание A:
$$\overline{A} \subseteq U$$
В частности, если A компактно, то его окрестностью считается любое открытое множество U, содержащее A:
$$A \subseteq U$$

Следствие 13.3.7. [7] *Всякая окрестность U произвольного компакта K в евклидовом пространстве X содержит некоторую замкнутую ε-окрестность компакта K:*
$$B_\varepsilon(K) \subseteq U \tag{13.3.78}$$

Доказательство. Положим $E = \mathbb{R}^n \setminus U$, тогда E будет замкнутым множеством (по теореме 13.2.14), не пересекающимся с K, потому что
$$K \subseteq U \quad \Longrightarrow \quad E = \mathbb{R}^n \setminus U \quad \text{не содержит точек множества } K \quad \Longrightarrow \quad K \cap E = \varnothing$$
Значит, по теореме 13.3.6, можно выбрать $\varepsilon > 0$ так, чтобы
$$\forall x \in K \quad \forall y \in E \qquad |x - y| > \varepsilon$$
Для этого ε получим:
$$y \in B_\varepsilon(K) \quad \Longrightarrow \quad \exists x \in K \quad |y - x| \leqslant \varepsilon \quad \Longrightarrow \quad y \notin E = \mathbb{R}^n \setminus U \quad \Longrightarrow \quad y \in U$$
□

Стягивание к компакту.

- Последовательность компактов K_i называется *сужающейся*, если в ней каждый следующий компакт содержится в предыдущем:
$$K_1 \supseteq K_2 \supseteq ... \supseteq K_i \supseteq K_{i+1} \supseteq ...$$

Теорема 13.3.8. *Любая сужающаяся последовательность компактов K_i имеет непустое (и необходимо компактное) пересечение $\bigcap_{i=1}^{\infty} K_i$.*

Доказательство. Для каждого i выберем произвольную точку $x_i \in K_i$. Поскольку все K_i содержатся в K_1, последовательность x_i будет лежать в компакте K_1, и значит, из нее можно выделить сходящуюся подпоследовательность
$$x_{i_s} \underset{s\to\infty}{\longrightarrow} x$$
С другой стороны, для всякого t
$$x_{i_t} \in K_{i_t}, \quad x_{i_{t+1}} \in K_{i_{t+1}} \subseteq K_{i_t}, \quad x_{i_{t+2}} \in K_{i_{t+2}} \subseteq K_{i_{t+1}} \subseteq K_{i_t}, ...$$
то есть, начиная с номера $s = t$, все элементы последовательности $\{x_{i_s};\ s \in \mathbb{N}\}$ лежат в компакте K_{i_t}:
$$x_{i_t}, x_{i_{t+1}}, x_{i_{t+2}}, ... \in K_{i_t}$$

[7] Этот результат используется при доказательстве леммы 15.3.2 и теоремы 14.1.13

Отсюда следует, что предел x этой последовательности тоже лежит в K_{i_t}:

$$\lim_{s\to\infty} x_{i_s} = x \in K_{i_t}$$

Это верно для любого $t \in \mathbb{N}$. То есть точка x принадлежит каждому компакту вида K_{i_t}. Отсюда следует, что x принадлежит каждому компакту вида K_i, потому что выбрав для данного i номер t так, чтобы $i_t \geqslant i$, мы получим:

$$x \in K_{i_t} \subseteq K_i$$

То есть x принадлежит пересечению компактов K_i,

$$x \in \bigcap_{i=1}^{\infty} K_i$$

Следовательно, это пересечение непусто. □

◇ **13.3.5** (ковер Серпинского)**.** Приведем теперь пример замкнутого множества на плоскости с “бесконечно большим количеством дыр”, уж если мы заговорили на эту тему. Такое множество строится необычно. Рассмотрим снова квадрат со стороной 1.

Разделим его на 9 равных квадратов со сторонами $\frac{1}{3}$ и выбросим внутренность среднего. У нас получится фигура склеенная из 8 (замкнутых) квадратов со стороной $\frac{1}{3}$:

Проделаем то же самое с каждым из этих 8 квадратов. Получится фигура, склеенная из 64 (замкнутых) квадратов со стороной $\frac{1}{9}$:

Затем мы проделываем то же самое с этими 64 квадратами, и так далее бесконечное количество раз.

В результате мы получим сужающуюся последовательность компактов, которая по теореме 13.3.8 должна иметь непустое компактное пересечение. Интуитивно это означает, что после того как мы “выбросим из исходного квадрата все ненужные маленькие квадраты”, на плоскости все равно останется некоторое непустое компактное множество S (оно содержит стороны исходного компакта, поэтому будет бесконечно). Это множество называется *ковром Серпинского*, по имени математика, впервые его обнаружившего. Оно обладает множеством замечательных свойств, и в частности, будет связно[8], то есть, пользуясь терминологией примера 13.3.4, состоит “из одного куска” (хотя по построению имеет бесконечно много “дырок”).

- Говорят, что последовательность компактов K_i *стягивается* к компакту K, если она сужается и ее пересечение совпадает с K:

$$K = \bigcap_{i=1}^{\infty} K_i$$

Теорема 13.3.9. *Если последовательность компактов K_i стягивается к компакту K, то для любой окрестности U компакта K*

$$K \subseteq U$$

почти все компакты K_i содержатся в U:

$$\exists i_0 \in \mathbb{N} \qquad \forall i \geqslant i_0 \qquad K_i \subset U$$

[8]Связные множества были определены на с.786.

Доказательство. Предположим, что это не так, то есть что существует последовательность индексов $i_s \underset{s\to\infty}{\longrightarrow} \infty$ такая, что

$$K_{i_s} \nsubseteq U$$

Для каждого s выберем точку

$$x_s \in K_{i_s} \setminus U \tag{13.3.79}$$

Поскольку все компакты K_{i_s} содержатся в компакте K_1, последовательность x_s тоже лежит в K_1, и значит из нее можно выбрать сходящуюся подпоследовательность

$$x_{s_j} \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} x$$

Точно так же, как при доказательстве теоремы 13.3.8 можно убедиться, что $x \in K = \bigcap_{i=1}^{\infty} K_i$. Поскольку $K \subseteq U$, мы получаем, что

$$x \in U$$

При этом U – открытое множество, значит x – внутренняя точка для U. Следовательно, по теореме 13.2.3, почти все элементы последовательности x_{s_j} должны лежать в U:

$$\exists j_0 \qquad \forall j \geqslant j_0 \qquad x_{s_j} \in U$$

Но это противоречит условию (13.3.79), согласно которому все x_s должны лежать вне U. □

Исчерпывание компактами. Последовательность компактов K_i называется расширяющейся, если в ней каждый следующий компакт содержит в предыдущий:

$$K_1 \subseteq K_2 \subseteq ... \subseteq K_i \subseteq K_{i+1} \subseteq ...$$

Говорят, что расширяющаяся последовательность $\{K_i\}$ исчерпывает множество M, если

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} K_i = M$$

Теорема 13.3.10. *Всякое открытое множество U в евклидовом пространстве X исчерпывается некоторой последовательностью компактов K_i:*

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} K_i = U \tag{13.3.80}$$

Доказательство. Это можно доказывать по-разному, например, можно в качестве K_i взять множества

$$K_i = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \quad |x| \leqslant i \quad \& \quad \inf_{y \notin U} |x-y| \geqslant \frac{1}{i} \right\}$$

Всякое такое K_i замкнуто и ограничено, значит компактно. Покажем, что K_i исчерпывают U. Пусть $x \in U$, тогда найдется $\varepsilon > 0$ такое, что

$$U_\varepsilon(x) \subseteq U,$$

поэтому

$$\inf_{y \notin U} |x-y| \geqslant \varepsilon > 0$$

и значит, найдется $l \in \mathbb{N}$ такое, что

$$\inf_{y \notin U} |x-y| \geqslant \frac{1}{l}$$

С другой стороны, для данного x всегда найдется $m \in \mathbb{N}$ такое, что

$$|x| \leqslant m$$

Взяв

$$i = \max\{l, m\}$$

мы получим:

$$|x| \leqslant m \leqslant i \quad \& \quad \inf_{y \notin U} |x-y| \geqslant \frac{1}{l} \geqslant \frac{1}{i},$$

то есть

$$x \in K_i.$$

Таким образом, для каждого $x \in U$ найдется $i \in \mathbb{N}$ такое, что $x \in K_i$, и это означает, что справедливо (13.3.80). □

(c) Открытые покрытия

- Семейство $\{M_i;\ i \in I\}$ множеств в евклидовом пространстве X называется *покрытием* множества K, если K содержится в объединении M_i:

$$K \subseteq \bigcup_{i\in I} M_i$$

- Покрытие $\{M_i;\ i \in I\}$ множества K называется
  — *открытым*, если все множества $\{M_i;\ i \in I\}$ открыты,
  — *замкнутым*, если все множества $\{M_i;\ i \in I\}$ замкнуты.

- Подсемейство $\{M_{i_s};\ s \in S\}$ называется *подпокрытием* покрытия $\{M_i;\ i \in I\}$ множества K, если оно также является покрытием для K:

$$K \subseteq \bigcup_{s\in S} M_{i_s}$$

Открытые покрытия компакта.

Теорема 13.3.11 (о покрытиях компакта)**.** *Множество $K \subseteq \mathbb{R}^n$ компактно в том и только в том случае, если всякое его открытое покрытие $\{U_i;\ i \in I\}$*

$$K \subseteq \bigcup_{i\in I} U_i$$

содержит его конечное подпокрытие, то есть существует конечная последовательность индексов $\{i_1, ..., i_k\}$ такая, что

$$K \subseteq \bigcup_{s=1}^{k} U_{i_s}$$

Доказательство. 1. Пусть K – компакт и $\{U_i;\ i \in I\}$ – его открытое покрытие. Покажем, что из $\{U_i;\ i \in I\}$ можно выделить конечное подпокрытие. Предположим, что это не так, то есть что конечное подпокрытие для K выделить из $\{U_i;\ i \in I\}$ невозможно. Добавим, если это нужно, к системе $\{U_i;\ i \in I\}$ еще множество $\mathbb{R}^n \setminus K$ – тогда эта система станет открытым покрытием всего пространства $\mathbb{R}^n$.

Поскольку K компактно, по теореме 13.3.4 оно ограничено, значит можно подобрать клетку $Q_1 = [a_1, b_1] \times ... \times [a_n, b_n]$, содержащую K:

$$K \subseteq Q_1$$

Система $\{U_i;\ i \in I\}$ является покрытием всего $\mathbb{R}^n$, значит, в частности, она покрывает и Q_1. При этом, из нее невозможно выделить конечное подпокрытие для Q_1, потому что оно было бы конечным подпокрытием для K.

Теперь разделим каждый отрезок $[a_i, b_i]$ пополам. Тогда клетка Q_1 разделится на 2^n клеток $P_1, ..., P_{2^n}$:

$$Q_1 = P_1 \cup ... \cup P_{2^n}$$

Среди этих маленьких клеток $P_1, ..., P_{2^n}$ найдется хотя бы одна P_j, для которой покрытие $\{U_i;\ i \in I\}$ не содержит конечного подпокрытия (потому что иначе получилось бы, что у объединения этих клеток $P_1 \cup ... \cup P_{2^n} = Q_1$ тоже есть конечное подпокрытие). Обозначим эту клетку P_j символом Q_2:

$$Q_2 = P_j$$

Затем повторим эту процедуру: поделим каждое ребро клетки Q_2 пополам, тогда Q_2 разделится на 2^n клеток $P_1, ..., P_{2^n}$,

$$Q_2 = P_1 \cup ... \cup P_{2^n},$$

и опять среди этих маленьких клеток $P_1, ..., P_{2^n}$ найдется хотя бы одна P_j, для которой покрытие $\{U_i;\ i \in I\}$ не содержит конечного подпокрытия (потому что иначе получилось бы, что для Q_2 тоже есть конечное подпокрытие). Мы обозначаем эту клетку P_j символом Q_3:

$$Q_3 = P_j$$

Организовав индукцию таким образом, мы получим сужающуюся последовательность клеток со стремящимся к нулю диаметром

$$Q_1 \supseteq Q_2 \supseteq ... \supseteq Q_k \supseteq ..., \qquad \operatorname{diam} Q_k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

для каждой из которых покрытие $\{U_i;\ i \in I\}$ не допускает конечного подпокрытия. По теореме 13.3.8, эта последовательность имеет непустое пересечение. Пусть

$$x \in \bigcap_{k=1}^{\infty} Q_k$$

Поскольку множества $\{U_i;\ i \in I\}$ покрывают все пространство $\mathbb{R}^n$, какое-то из них U_i должно содержать точку x:

$$x \in U_i$$

Множество U_i открыто, значит вместе с точкой x оно содержит некоторую ее окрестность $U_\varepsilon(x)$:

$$x \in U_\varepsilon(x) \subseteq U_i$$

Поскольку $\operatorname{diam} Q_k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$, найдется k такое, что

$$\operatorname{diam} Q_k < \varepsilon$$

Для этого индекса k множество Q_k должно содержаться в $U_\varepsilon(x)$, потому что если $y \in Q_k$, то $|y - x| \leqslant \operatorname{diam} Q_k < \varepsilon$. Значит

$$Q_k \subseteq U_\varepsilon(x) \subseteq U_i$$

Мы получаем, что множество U_i уже образует покрытие клетки Q_k. Это противоречит выбору клеток Q_k, по которому система $\{U_i;\ i \in I\}$ не допускает конечного подпокрытия для Q_k.

2. Предположим теперь, что K – не компакт, то есть что существует последовательность $\{x_k\} \subseteq K$, такая, что никакая ее подпоследовательность не сходится к точке из K. Это значит, в частности, что точки $\{x_k\}$ не могут бесконечно повторяться, то есть равенство вида

$$x_k = x$$

не может выполняться для бесконечного набора индексов k (потому что тогда точка x была бы пределом некоторой подпоследовательности x_{k_i}). Отсюда, в свою очередь, следует, что можно выбросить из $\{x_k\}$ повторяющиеся точки, если такие найдутся, и добиться, чтобы точки не повторялись.

Далее, пусть $x \in K$. Тогда найдется выколотая окрестность $\dot{U}_\varepsilon(x)$, не содержащая точек $\{x_k\}$ (если бы это было не так, то есть если бы любая выколотая окрестность $\dot{U}_\varepsilon(x)$ содержала точку из $\{x_k\}$, то x была бы пределом некоторой подпоследовательности $\{x_{k_i}\}$). Итак, выберем для каждой точки $x \in K$ число ε_x так, чтобы выколотая окрестность $\dot{U}_{\varepsilon_x}(x)$ не содержала бы точек $\{x_k\}$. Тогда обычная, невыколотая окрестность $U_{\varepsilon_x}(x)$ будет содержать точку x, и

— если $x \notin \{x_k\}$, то $U_{\varepsilon_x}(x) \cap \{x_k;\ k \in \mathbb{N}\} = \varnothing$,

— если $x \in \{x_k\}$, то $U_{\varepsilon_x}(x) \cap \{x_k;\ k \in \mathbb{N}\} = \{x\}$,

Поглядим теперь на полученные множества $U_{\varepsilon_x}(x)$, $x \in K$. Это будет система открытых множеств, покрывающая K:

$$K \subseteq \bigcup_{x\in K} U_{\varepsilon_x}(x)$$

(потому что $\forall x \in K\ x \in U_{\varepsilon_x}(x)$). Но из этого покрытия невозможно выделить конечное подпокрытие, потому что всякая конечная подсистема $\{U_{\varepsilon_{x_i}}(x_i);\ i = 1, ..., m\}$ будет содержать не больше m точек последовательности $\{x_k\}$ (из-за того, что каждое $U_{\varepsilon_{x_i}}(x_i)$ содержит не больше одной такой точки). □

Теорема 13.3.12 (свойство равномерности открытого покрытия компакта)**.** *Если $U_1, ..., U_k$ – открытое покрытие компакта K в евклидовом пространстве X, то найдется число $\delta > 0$ такое, что всякое множество A в $\mathbb{R}^n$, пересекающееся с K и имеющее диаметр, меньший δ, обязательно содержится в некотором U_s:*

$$\Big(A \cap K \neq \varnothing, \qquad \operatorname{diam} A < \delta\Big) \quad \Longrightarrow \quad \exists s \in \{1, ..., k\} \quad A \subseteq U_s. \tag{13.3.81}$$

Доказательство. Предположим, что это неверно. Тогда существует последовательность множеств A_l со следующими свойствами:

$$A_l \cap K \neq \varnothing, \qquad \operatorname{diam} A_l < \frac{1}{l}, \qquad \forall s \in \{1, ..., k\} \quad A_l \not\subseteq U_s.$$

Для всякого $l \in \mathbb{N}$ выберем какую-нибудь точку $a_l \in A_l \cap K \neq \varnothing$. Поскольку последовательность $\{a_l\}$ содержится в компакте K, она содержит подпоследовательность, сходящуюся к некоторой точке $x \in K$:

$$a_{l_i} \underset{i\to\infty}{\longrightarrow} x \in K.$$

Поскольку $x \in K \subseteq U_1 \cup ... \cup U_l$, найдется индекс $s \in \{1, ..., k\}$ такой, что $x \in U_s$. При этом множество U_s открыто, поэтому x содержится в U_s вместе с некоторой своей окрестностью $U_\varepsilon(x)$:

$$U_\varepsilon(x) \subseteq U_s, \qquad \varepsilon > 0$$

Выберем теперь l такое, что

$$|a_l - x| < \frac{\varepsilon}{2}, \qquad \operatorname{diam} A_l < \frac{\varepsilon}{2}$$

(первое можно обеспечить, поскольку $a_{l_i} \underset{i\to\infty}{\longrightarrow} x$, а второе – поскольку $\operatorname{diam} A_l < \frac{1}{l}$). Тогда мы получим:

$$\forall b \in A_l \qquad |b - x| \leqslant |b - a_l| + |a_l - x| \leqslant \operatorname{diam} A_l + |a_l - x| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

поэтому

$$\forall b \in A_l \qquad b \in U_\varepsilon(x) \subseteq U_s,$$

то есть $A_l \subseteq U_s$, что противоречит выбору последовательности $\{A_l\}$. □

Счетные подпокрытия.

Теорема 13.3.13. *Всякое открытое покрытие $\{U_i;\ i \in I\}$ открытого множества U в евклидовом пространстве X содержит счетное подпокрытие $\{U_{i_k};\ k \in \mathbb{N}\}$.*

Доказательство. Построим с помощью теоремы 13.3.10 последовательность компактов K_m, исчерпывающую U:

$$\bigcup_{m=1}^{\infty} K_m = U.$$

Возьмем теперь первый компакт K_1. Поскольку множества $\{U_i;\ i \in I\}$ покрывают его, среди них найдется конечное подпокрытие $U_{i_1}, ..., U_{i_{l_1}}$:

$$K_1 \subseteq U_{i_1} \cup ... \cup U_{i_{l_1}}$$

Рассмотрим далее второй компакт K_2. Опять поскольку множества $\{U_i;\ i \in I\}$ покрывают его, среди них найдется конечное подпокрытие, обозначим его $U_{i_{l_1+1}}, ..., U_{i_{l_1+l_2}}$:

$$K_2 \subseteq U_{i_{l_1+1}} \cup ... \cup U_{i_{l_1+l_2}}$$

Организовав такую индукцию по компактам K_m, мы получим последовательность U_{i_s} такую, что каждый компакт K_m содержится в объединении некоторого набора ее элементов, и значит

$$K_m \subseteq \bigcup_{s=1}^{\infty} U_{i_s}$$

Отсюда получаем:

$$U = \bigcup_{m=1}^{\infty} K_m \subseteq \bigcup_{s=1}^{\infty} U_{i_s}$$

□

Локально конечные семейства множеств.

- Семейство множеств $\{A_i;\ i \in I\}$ в евклидовом пространстве X называется *локально-конечным*, если для любой точки $x \in \mathbb{R}^n$ существует окрестность $U_\varepsilon(x)$, пересекающаяся лишь с конечным набором множеств $\{A_i;\ i \in I\}$.

Свойства локально конечных семейств множеств

1°. *Если $\{A_i;\ i \in I\}$ – локально конечное семейство множеств, то любое его подсемейство $\{A_{i_j};\ j \in J\}$ тоже будет локально конечным.*

2°. *Семейство множеств $\{A_i;\ i \in I\}$ локально конечно тогда и только тогда, когда семейство его замыканий $\{\overline{A_i};\ i \in I\}$ локально конечно.*

3°. *Для каждого локально конечного семейства множеств $\{A_i;\ i \in I\}$ в евклидовом пространстве X справедливо равенство*

$$\overline{\bigcup_{i\in I} A_i} = \bigcup_{i\in I} \overline{A_i} \tag{13.3.82}$$

4°. *Объединение $\bigcup_{i\in I} A_i$ локально конечного семейства $\{A_i;\ i \in I\}$ замкнутых множеств в евклидовом пространстве X тоже будет замкнутым множеством в $\mathbb{R}^n$.*

Вписанные покрытия и паракомпактность.

- Пусть $\{U_i;\ i \in I\}$ и $\{V_j;\ j \in J\}$ – два покрытия множества M. Говорят, что
  - покрытие $\{V_j;\ j \in J\}$ *вписано* в покрытие $\{U_i;\ i \in I\}$, если для каждого $j \in J$ существует $i \in I$ такое, что
  $$\overline{V_j} \subseteq U_i$$
  - покрытие $\{W_j;\ j \in J\}$ *комбинаторно вписано* в покрытие $\{U_i;\ i \in I\}$, если их множества индексов совпадают
  $$I = J,$$
  и для всякого $i \in I$
  $$\overline{W_i} \subseteq U_i$$

Теорема 13.3.14. *В любое открытое покрытие $\{U_i;\ i \in I\}$ открытого множества U в евклидовом пространстве X можно вписать локально конечное открытое покрытие $\{V_j;\ j \in J\}$ множества U, состоящее из ограниченных множеств.*

Доказательство. Каждая точка $x \in U$ содержится в некотором $U_{i(x)}$. Поскольку $U_{i(x)}$ – открытое множество, найдется некоторая открытая окрестность $U_{\varepsilon(x)}(x)$, содержащаяся в $U_{i(x)}$.

$$U_{\varepsilon(x)}(x) \subseteq U_{i(x)}$$

Для каждой точки $x \in U$ выберем такое $\varepsilon(x) > 0$ и рассмотрим семейство множеств $\{U_{\frac{\varepsilon(x)}{3}}(x);\ x \in U\}$. Поскольку каждое $x \in U$ лежит в своей окрестности $U_{\frac{\varepsilon(x)}{3}}(x)$, мы получаем, что семейство $\{U_{\frac{\varepsilon(x)}{3}}(x);\ x \in U\}$ есть покрытие множества U.

$$U = \bigcup_{x\in U} U_{\frac{\varepsilon(x)}{3}}(x)$$

Применим к этому покрытию теорему 13.3.13 и выделим из него некоторое счетное подпокрытие:

$$U = \bigcup_{j=1}^{\infty} U_{\frac{\varepsilon(x_j)}{3}}(x_j)$$

Теперь рассмотрим множества

$$V_j = U_{\frac{2\varepsilon(x_j)}{3}}(x_j) \setminus \left(B_{\frac{\varepsilon(x_1)}{3}}(x_1) \cup B_{\frac{\varepsilon(x_2)}{3}}(x_2) \cup ... \cup B_{\frac{\varepsilon(x_{j-1})}{3}}(x_{j-1}) \right)$$

Поскольку каждое V_j содержится в шаре $U_{\frac{2\varepsilon(x_j)}{3}}(x_j)$, оно ограничено.

Покажем, что V_j покрывают U. Пусть $x \in U$. Тогда x принадлежит некоторому $U_{\frac{\varepsilon(x_j)}{3}}(x_j)$ и значит, некоторому $U_{\frac{2\varepsilon(x_j)}{3}}(x_j)$. Отсюда следует, что множество индексов

$$J(x) = \{j \in \mathbb{N} : \quad x \in U_{\frac{2\varepsilon(x_j)}{3}}(x_j)\}$$

непусто. Значит, у этого множества есть минимальный элемент

$$j(x) = \min J(x) = \min\{j \in \mathbb{N} : \quad x \in U_{\frac{2\varepsilon(x_j)}{3}}(x_j)\}$$

Для этого индекса $j(x)$ справедливо вот что:

$$\forall k < j(x) \quad x \notin U_{\frac{2\varepsilon(x_k)}{3}}(x_k)$$

$$\Downarrow$$

$$\forall k < j(x) \quad x \notin B_{\frac{\varepsilon(x_k)}{3}}(x_k)$$

$$\Downarrow$$

$$x \in U_{\frac{\varepsilon(x_{j(x)})}{3}}(x_{j(x)}) \quad \& \quad \forall k < j(x) \quad x \notin B_{\frac{\varepsilon(x_k)}{3}}(x_k)$$

$$\Downarrow$$

$$x \in U_{\varepsilon(x_{j(x)})}(x_{j(x)}) \setminus \left(B_{\frac{\varepsilon(x_1)}{3}}(x_1) \cup B_{\frac{\varepsilon(x_2)}{3}}(x_2) \cup ... \cup B_{\frac{\varepsilon(x_{j(x)-1})}{3}}(x_{j(x)-1}) \right) = V_{j(x)}$$

С другой стороны, покрытие V_j строго вписано в покрытие U_i, потому что

$$V_j \subseteq U_{\frac{2\varepsilon(x_j)}{3}}(x_j) \subseteq B_{\frac{2\varepsilon(x_j)}{3}}(x_j) \subseteq U_{i(x_j)}$$

Наконец, покажем, что $\{V_j\}$ локально конечно. Пусть $x \in U$. Выберем k так, чтобы

$$x \in U_{\frac{\varepsilon(x_k)}{3}}(x_k)$$

Поскольку $U_{\frac{\varepsilon(x_k)}{3}}(x_k)$ – открытое множество, найдется $\delta > 0$ такое, что

$$x \in U_\delta(x) \subseteq U_{\frac{\varepsilon(x_k)}{3}}(x_k)$$

С другой стороны, для любого $j > k$ мы получим

$$U_{\frac{\varepsilon(x_k)}{3}}(x_k) \cap V_j = \varnothing$$

$$\Downarrow$$

$$U_\delta(x) \cap V_j = \varnothing$$

То есть, окрестность $U_\delta(x)$ точки x может пересекаться только с конечным набором множеств V_j, а именно с теми, у которых номер не больше k. □

Теорема 13.3.15. *В любое открытое покрытие $\{U_i;\ i \in I\}$ открытого множества U в евклидовом пространстве X можно комбинаторно вписать локально конечное открытое покрытие $\{W_i;\ i \in I\}$ множества U.*

Доказательство. По теореме 13.3.14 в $\{U_i;\ i \in I\}$ можно вписать локально конечное открытое покрытие $\{V_j;\ j \in J\}$:

$$\forall j \in J \quad \exists i \in I \quad \overline{V_j} \subseteq U_i$$

Зафиксируем для каждого индекса $j \in J$ какой-нибудь индекс $f(j) \in I$ такой, что

$$\overline{V_j} \subseteq U_{f(j)}$$

У нас получится некое отображение $f : J \to I$. Положим

$$W_i = \bigcup_{\substack{j \in J : \\ f(j) = i}} V_j$$

(объединяются все множества V_j, у которых индекс j обладает свойством $f(j) = i$). Тогда

1) множества W_i будут открытыми, как объединения открытых множеств,

2) получающееся семейство $\{W_i;\ i \in I\}$ будет покрытием для U, потому что

$$\bigcup_{i\in I} W_i \supseteq \bigcup_{k\in J} W_{f(k)} = \bigcup_{k\in J} \bigcup_{\substack{j\,\in\, J\,:\\ f(j)=f(k)}} V_j = \bigcup_{j\in J} V_j = U$$

3) семейство $\{W_i;\ i \in I\}$ будет комбинаторно вписано в семейство $\{U_i;\ i \in I\}$, потому что

$$\forall j \in J \qquad \overline{V_j} \subseteq U_{f(j)}$$

$$\Downarrow$$

$$\forall j \in J \qquad \Big(f(j) = i \quad \Longrightarrow \quad \overline{V_j} \subseteq U_i \Big)$$

$$\Downarrow$$

$$\overline{W_i} = \overline{\bigcup_{\substack{j\,\in\, J\,:\\ f(j)=i}} V_j} = (13.3.82) = \bigcup_{\substack{j\,\in\, J\,:\\ f(j)=i}} \overline{V_j} \subseteq U_i$$

4) остается показать, что семейство $\{W_i;\ i \in I\}$ будет локально конечно; пусть $x \in U$; поскольку семейство $\{V_j;\ j \in J\}$ локально конечно, по свойству 2° на с.797 семейство $\{\overline{V_j};\ j \in J\}$ тоже локально конечно; значит, найдется $\varepsilon > 0$ такое, что множество

$$J_x = \{j \in J : \quad \overline{V_j} \cap U_\varepsilon(x) \neq \varnothing\}$$

будет конечно; отсюда следует, что множество

$$I_x = \{i \in I : \quad \overline{W_i} \cap U_\varepsilon(x) \neq \varnothing\}$$

тоже будет конечно, потому что оно является образом конечного множества J_x при отображении $f : J \to I$:

$$I_x = f(J_x)$$

это доказывается следующей цепочкой:

$$i \in I_x$$

$$\Updownarrow$$

$$\bigcup_{\substack{j\,\in\, J\,:\\ f(j)=i}} \Big(\overline{V_j} \cap U_\varepsilon(x)\Big) = \Big(\bigcup_{\substack{j\,\in\, J\,:\\ f(j)=i}} \overline{V_j} \Big) \cap U_\varepsilon(x) = (13.3.82) = \Big(\overline{\bigcup_{\substack{j\,\in\, J\,:\\ f(j)=i}} V_j} \Big) \cap U_\varepsilon(x) = \overline{W_i} \cap U_\varepsilon(x) \neq \varnothing$$

$$\Updownarrow$$

$$\exists j \in J \qquad f(j) = i \quad \& \quad \overline{V_j} \cap U_\varepsilon(x) \neq \varnothing$$

$$\Updownarrow$$

$$\exists j \in J \qquad f(j) = i \quad \& \quad j \in J_x$$

$$\Updownarrow$$

$$\exists j \in J_x \qquad f(j) = i$$

$$\Updownarrow$$

$$f(J_x) \ni i.$$

$\square$

Глава 14

ГЛАДКАЯ СТРУКТУРА НА ЕВКЛИДОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

§ 1 Гладкие функции на евклидовых пространствах

Как, может быть, помнит читатель, в § 1 главы 3 мы выводили происхождение понятия функции из идеи взаимной зависимости физических величин: при фиксированных правилах измерений разные величины оказываются связанными между собой жесткими соотношениями, которые избавляют нас от необходимости измерять некоторые величины, если известны значения (возможно, приближенные) других величин. К примерам на с.188 можно добавить следующие.

◇ **14.1.1.** Мощность P электрического тока определяется через силу тока I и падение напряжения U на данном участке цепи через формулу

$$P = I \cdot U$$

Из этой формулы следует, что если мы знаем значения I и U, то измерять величину P не нужно, ее можно просто вычислить.

◇ **14.1.2.** Материальные частицы массами m_1 и m_2 притягиваются по направлению друг к другу с силой F, прямо пропорциональной произведению масс и обратно пропорциональной квадрату расстояния между ними:

$$F = G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2} \qquad (14.1.1)$$

Здесь $G \approx 6,674 \cdot 10^{-11}$ Н $\cdot$ м$^2 \cdot$ кг$^{-2}$ – гравитационная постоянная.

Эти примеры иллюстрируют часто встречающуюся в природе ситуацию, когда одна физическая величина выражается сразу через несколько других. Необходимость изучать такого рода зависимости как раз и привела к понятию функции многих переменных. Формально под этим понимается обобщение понятия числовой функции (определенной на с.188), в котором область определения считается подмножеством (не на прямой $\mathbb{R}$, а) в каком-нибудь координатном пространстве $\mathbb{R}_n$ (или $\mathbb{R}^n$). Чтобы не отвлекать внимание на несущественные детали, мы будем заменять $\mathbb{R}_n$ более абстрактным объектом, произвольным евклидовым пространством X.

- *Числовой функцией на евклидовом пространстве* X называется произвольное отображение $f : \mathsf{D}(f) \to \mathbb{R}$, у которого область определения $\mathsf{D}(f)$ содержится в X. В дальнейшем мы будем использовать в таких случаях запись

$$f : X \hookrightarrow \mathbb{R}$$

(которая будет означать, что f является функцией с областью определения $\mathsf{D}(f) \subseteq X$).

◇ **14.1.3.** Самыми простыми примерами функций на евклидовых пространствах являются операции суммирования, вычитания, умножения, деления и возведения в степень:

$$f(x, y) = x + y$$
$$f(x, y) = x - y$$

$$f(x,y) = x \cdot y$$
$$f(x,y) = \frac{x}{y}$$
$$f(x,y) = x^y$$

Их области определения соответственно устроены так:

$\mathsf{D}(f) = \mathbb{R}_2$
$\mathsf{D}(f) = \mathbb{R}_2$
$\mathsf{D}(f) = \mathbb{R}_2$
$\mathsf{D}(f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}_2 : \quad y \neq 0\}$

$$\mathsf{D}(f) = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}_2 : \ x > 0 \ \vee \ (x = 0 \ \& \ y \geqslant 0) \ \vee \right.$$
$$\left. \vee \ \left(x < 0 \ \& \ y \in \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{N}-1}\right)\right\}$$

$\diamond$ **14.1.4.** Вспомним, что в главе 4 на с.306 мы определили *стандартную функцию* многих переменных равенством

$$u(x_1, ..., x_n) = \mathcal{U} \qquad (14.1.2)$$

в котором $\mathcal{U}$ представляет собой числовое выражение над упорядоченным набором переменных $(x_1, ..., x_n)$. Там же в § 2 главы 4 давалось индуктивное определение области $\mathsf{D}(u)$ определения такой функции. Такие функции, конечно, образуют очень широкий подкласс в классе функций многих переменных в смысле определения на с.800, однако не исчерпывают его, как мы увидим в следующем примере.

$\diamond$ **14.1.5.** Функция Дирихле от двух переменных[1], определенная правилом

$$D(x,y) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \ \& \ y \in \mathbb{Q} \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

не является стандартной.

(a) Непрерывность, предел и асимптотические формулы

Непрерывные функции на еквлидовом пространстве. Прежде чем находить экстремумы функций многих переменных, полезно понять в каких случаях эти экстремумы существуют. На этот вопрос отвечает теорема Вейерштрасса об экстремумах, которая верна не только для случая непрерывной функции на отрезке (теорема 3.3.8), но и, как мы увидим в этом параграфе, обобщается на случай многих переменных.

- Пусть X – евклидово пространство. Функция $f : X \hookrightarrow \mathbb{R}$ называется *непрерывной на множестве* $E \subseteq X$, если она определена всюду на E, то есть $E \subseteq \mathsf{D}(f)$, и для любой точки $a \in E$ и любой последовательности $\{x_m\} \subset E$, сходящейся к точке a,

  $$x_m \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} a \qquad (x_m \in E)$$

  соответствующая (числовая) последовательность $\{f(x_m)\}$ значений функции f стремится к $f(a)$:

  $$f(x_m) \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} f(a)$$

Теорема 14.1.1 (Вейерштрасса для функций многих переменных). *Если функция $f : X \hookrightarrow \mathbb{R}$ на евклидовом пространстве X, непрерывна на каком-нибудь компакте $E \subseteq \mathbb{R}^n$, то она ограничена на нем*

$$-\infty < \inf_{x\in E} f(x) \leqslant \sup_{x\in E} f(x) < +\infty$$

и достигает свой нижней и верхней грани:

$$\exists\, x_{\min}, x_{\max} \in E \qquad f(x_{\min}) = \inf_{x\in E} f(x) \quad f(x_{\max}) = \sup_{x\in E} f(x)$$

Доказательство. Это утверждение доказывается так же, как теоремы Вейерштрасса 3.3.7 и 3.3.8 для одномерного случая.

1. Сначала доказывается, что f ограничена на E. Предположим обратное, то есть что f не ограничена на E. Значит f не ограничена сверху или снизу. Пусть для определенности f не ограничена сверху:

$$\forall B \in \mathbb{R} \quad \exists x \in E \quad f(x) > B$$

Тогда для всякого $m \in \mathbb{N}$ можно подобрать точку $x_m \in E$ такую, что

$$f(x_m) > m \qquad (14.1.3)$$

[1] Функция Дирихле от одной переменной была описана на с.189.

Последовательность точек $\{x_m\}$ принадлежит E и значит ограничена. Следовательно, по теореме Больцано-Вейерштрасса 2.4 этой главы, $\{x_m\}$ содержит сходящуюся подпоследовательность $\{x_{m_k}\}$:

$$x_{m_k} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} c \in E \tag{14.1.4}$$

Из формулы (2.1) получаем

$$f(x_{m_k}) > m_k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$$

поэтому

$$f(x_{m_k}) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} +\infty \tag{14.1.5}$$

Но с другой стороны, функция f непрерывна в любой точке E, и в частности в точке $c \in E$, значит из (14.1.4) следует

$$f(x_{m_k}) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} f(c) \neq +\infty \tag{14.1.6}$$

Мы получили противоречие между (14.1.5) и (14.1.6), которое означает, что наше исходное предположение было неверно. Значит, функция f все-таки ограничена.

2. Затем доказывается, что f достигает нижней и верхней грани на E. Например, докажем существование максимума. Поскольку, как мы уже убедились, функция f ограничена сверху на E

$$\exists C \quad \forall x \in E \quad f(x) \leqslant C,$$

по теореме 2.1.23 о точной границе, мы получаем, что у функции f существует точная верхняя грань на этом множестве:

$$\exists \sup_{x\in E} f(x) = H$$

Это значит, что во-первых, все значения функции f на E не превосходят H

$$\forall x \in E \quad f(x) \leqslant H \tag{14.1.7}$$

и во-вторых если взять любое число $\alpha < H$, то обязательно оно окажется меньше, чем какое-то значение f на E

$$\forall \alpha < H \quad \exists x \in E \quad \alpha < f(x)$$

Возьмем в качестве α числа вида $H - \frac{1}{m}$. Тогда у нас получится целая последовательность $\{x_m\}$:

$$\forall m \in \mathbb{N} \quad \exists x_m \in E \quad H - \frac{1}{m} < f(x_m) \tag{14.1.8}$$

Поскольку последовательность $\{x_m\}$ лежит в E, она ограничена. Значит по теореме Больцано-Вейерштрасса 3.2.13, из нее можно выбрать сходящуюся подпоследовательность:

$$x_{m_k} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} c \qquad (c \in E)$$

Поскольку f непрерывна в любой точке E и, в частности, в точке $c \in E$, мы получаем

$$f(x_{m_k}) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} f(c)$$

С другой стороны, из 14.1.7 и 14.1.8 следует

$$H - \frac{1}{m_k} < f(x_{m_k}) \leqslant H$$

откуда

$$H = \lim_{k\to\infty}\left(H - \frac{1}{m_k}\right) \leqslant \lim_{k\to\infty} f(x_{m_k}) = f(c) \leqslant H$$

то есть

$$f(c) = H$$

Еще раз вспомнив 14.1.7, получим

$$\forall x \in E \quad f(x) \leqslant H = f(c)$$

Это означает, что $c \in E$ является точкой максимума функции f на множестве E. $\square$

Теорема 14.1.2 (Кантора для функций многих переменных)**.** *Если функция $f : X \hookrightarrow \mathbb{R}$ на евклидовом пространстве X определена и непрерывна на компакте $K \subseteq \mathbb{R}^n$, то она равномерно непрерывна на этом компакте: для любых двух последовательностей аргументов $\alpha_k \in K$ и $\beta_k \in K$ стремящихся друг к другу, соответствующие последовательности значений $\{f(\alpha_k)\}$ и $\{f(\beta_k)\}$ тоже стремятся друг к другу:*

$$\forall \alpha_k, \beta_k \in E \quad \alpha_k - \beta_k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0 \quad \Longrightarrow \quad f(\alpha_k) - f(\beta_k) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

Доказательство. Это доказывается так же как теорема Кантора в одномерном случае (часть I с.253). □

Теорема 14.1.3 (Коши о промежуточном значении для функций многих переменных)**.** *Пусть M – связное множество в евклидовом пространстве X и $f : M \to \mathbb{R}$ – непрерывная функция. Для любых двух точек $a, b \in M$, таких, что $f(a) \neq f(b)$, и любого числа C, лежащего между $f(a)$ и $f(b)$,*

$$f(a) < C < f(b) \qquad \Big(\text{или } f(a) > C > f(b)\Big)$$

найдется точка $c \in M$ такая, что

$$f(c) = C$$

◇ **14.1.6.** Рассмотрим какую-нибудь простенькую функцию от двух переменных:

$$f(x, y) = \sin(x \cdot y), \qquad x, y \in \mathbb{R}.$$

Ее непрерывность (всюду на $\mathbb{R}^2$) следует из теорем о непрерывности элементарных функций части I: если

$$x_m \overset{\mathbb{R}}{\underset{m\to\infty}{\longrightarrow}} a, \qquad y_m \overset{\mathbb{R}}{\underset{m\to\infty}{\longrightarrow}} b,$$

то

$$f(x_m, y_m) = \sin(x_m \cdot y_m) \overset{\mathbb{R}}{\underset{m\to\infty}{\longrightarrow}} \sin(a \cdot b) = f(a, b).$$

◇ **14.1.7. Непрерывность линейных функционалов.** *Всякий линейный функционал*[2] $f : X \to \mathbb{R}$ *на евклидовом пространстве X является непрерывной функцией на X.*

Доказательство. По теореме 13.1.15 о представлении евклидова пространства X изоморфно некоторому $\mathbb{R}^n$, поэтому достаточно рассмотреть случай $X = \mathbb{R}^n$. В примере 12.2.4 мы показали, что всякий линейный функционал $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ имеет вид

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot x^i, \quad x \in \mathbb{R}^n \tag{14.1.9}$$

где $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n) \in \mathbb{R}_n$ – некоторая числовая строка. Отсюда следует, что Действительно, если

$$x_m \overset{\mathbb{R}^n}{\underset{m\to\infty}{\longrightarrow}} a,$$

то это означает, что по всякой координате i выполняется соотношение

$$x_m^i \overset{\mathbb{R}^n}{\underset{m\to\infty}{\longrightarrow}} a^i,$$

и поэтому

$$f(x_m) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot x_m^i \overset{\mathbb{R}}{\underset{m\to\infty}{\longrightarrow}} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot a^i = f(a)$$

□

◇ **14.1.8. Непрерывность билинейных форм.** *Всякая билинейная форма*[3] $\alpha : X \times X \to \mathbb{R}$ *на евклидовом пространстве X является непрерывной функцией на $X \times X$.*

Доказательство. Здесь снова нужно воспользоваться теоремой 13.1.15: X изоморфно некоторому $\mathbb{R}^n$, поэтому достаточно рассмотреть случай $X = \mathbb{R}^n$. В примере 12.2.11 мы показали, что всякая билинейная форма $\alpha : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ имеет вид

$$\alpha(x, y) = \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{i,j} \cdot x^i \cdot y^j, \qquad x, y \in \mathbb{R}^n, \tag{14.1.10}$$

где $\alpha_{i,j} \in \mathbb{R}_n$ – некоторое семейство чисел.

Теперь если

$$x_m \overset{\mathbb{R}^n}{\underset{m\to\infty}{\longrightarrow}} a, \qquad y_m \overset{\mathbb{R}^n}{\underset{m\to\infty}{\longrightarrow}} b,$$

то по всякой координате i выполняются соотношения

$$x_m^i \overset{\mathbb{R}^n}{\underset{m\to\infty}{\longrightarrow}} a^i, \qquad y_m^i \overset{\mathbb{R}^n}{\underset{m\to\infty}{\longrightarrow}} b^i,$$

и поэтому

$$\alpha(x_m, y_m) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{i,j} \cdot x_m^i \cdot y_m^j \overset{\mathbb{R}}{\underset{m\to\infty}{\longrightarrow}}$$

$$\overset{\mathbb{R}}{\underset{m\to\infty}{\longrightarrow}} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot a^i \cdot b^j = \alpha(a, b)$$

□

[2] Линейные функционалы на векторном пространстве были определены на с.684.

[3] Билинейные формы были определены на с.692.

Предел функции на евклидовом пространстве. Говорят, что функция $f : X \hookrightarrow \mathbb{R}$ *имеет предел в точке* a на евклидовом пространстве X, равный A, если

1) f определена в некоторой выколотой окрестности точки a (то есть на некотором множестве вида
$$\Big\{x \in X : 0 \neq |x - a| < \varepsilon\Big\}$$
и

2) для любой последовательности $\{x_m\}$, сходящейся к a,
$$x_m \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} a$$
и не попадающей в a
$$\forall m \in \mathbb{N} \quad x_m \neq a$$
соответствующая последовательность $\{f(x_m)\}$ значений функции f стремится к A:
$$f(x_m) \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} A$$

В таком случае пишут
$$f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} A$$
или
$$\lim_{x\to a} f(x) = A$$

Теорема 14.1.4 (о единственности предела)**.** *Всякая функция $f : X \hookrightarrow \mathbb{R}$ в произвольной данной точке $a \in X$ может иметь не более одного предела.*

Доказательство. Если $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} A$ и $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} B$, то выбрав какую-нибудь последовательность
$$x_m \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} a, \quad \forall m \in \mathbb{N} \quad x_m \neq a$$
мы получим, что с одной стороны,
$$f(x_m) \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} A$$
а с другой –
$$f(x_m) \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} B,$$
и по теореме 3.2.3 о единственности предела числовой последовательности, получаем $A = B$. □

◇ **14.1.9.** Выясним, будет ли справедливо соотношение
$$\frac{x^2 \cdot y}{x^2 + y^2} \underset{(x,y)\to(0,0)}{\longrightarrow} 0$$

Для этого возьмем произвольную последовательность (x_m, y_m) на плоскости $\mathbb{R}^2$, сходящуюся к точке $(0,0)$, но не попадающую в $(0,0)$
$$(x_m, y_m) \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} (0,0), \quad (x_m, y_m) \neq (0,0)$$

Это означает, что последовательности $\{x_m\}$ и $\{y_m\}$ должны обладать следующими свойствами:
$$\left\{\begin{array}{c} x_m \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} 0, \\ y_m \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} 0, \\ (x_m)^2 + (y_m)^2 \neq 0 \end{array}\right\}$$

Нам нужно убедиться, что
$$\frac{x_m^2 \cdot y_m}{(x_m)^2 + (y_m)^2} \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} 0 \tag{14.1.11}$$

Для этого оценим нашу дробь по модулю:
$$0 \leqslant \left|\frac{x_m^2 \cdot y_m}{(x_m)^2 + (y_m)^2}\right| = \frac{x_m^2 \cdot |y_m|}{(x_m)^2 + (y_m)^2} \leqslant$$
$$\leqslant (2.1.207), (2.1.209) \leqslant$$
$$\leqslant \frac{\big(\max\{|x_m|, |y_m|\}\big)^3}{\big(\max\{|x_m|, |y_m|\}\big)^2} = \max\{|x_m|, |y_m|\} \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

По теореме о двух милиционерах, это означает, что
$$\left|\frac{x_m^2 \cdot y_m}{(x_m)^2 + (y_m)^2}\right| \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

а отсюда уже получается (14.1.11).

Вывод: $\frac{x^2\cdot y}{x^2+y^2} \underset{(x,y)\to(0,0)}{\longrightarrow} 0$.

◇ **14.1.10.** Выясним, будет ли справедливо соотношение

$$\frac{x\cdot y}{x^2+y^2} \underset{(x,y)\to(0,0)}{\longrightarrow} 0$$

Можно убедиться, что в этом случае рассуждения предыдущего примера не проходят: если взять $\{x_m\}$ и $\{y_m\}$ так чтобы

$$\left\{\begin{array}{c} x_m \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} 0, \\ y_m \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} 0, \\ (x_m)^2+(y_m)^2 \ne 0 \end{array}\right\}$$

то нужная величина не оценивается так, как хотелось бы:

$$0 \leqslant \left|\frac{x_m\cdot y_m}{(x_m)^2+(y_m)^2}\right| = \frac{|x_m|\cdot|y_m|}{(x_m)^2+(y_m)^2} \leqslant$$

$$\leqslant (2.1.209) \leqslant \frac{\big(\max\{|x_m|,|y_m|\}\big)^2}{\big(\max\{|x_m|,|y_m|\}\big)^2} = 1 \underset{m\to\infty}{\not\longrightarrow} 0$$

Это следует понимать как намек на то, что наш предел не равен тому, что нам нужно: $\frac{x\cdot y}{x^2+y^2} \underset{(x,y)\to(0,0)}{\not\longrightarrow} 0$.

Чтобы это доказать, нужно найти какую-нибудь конкретную последовательность (x_m, y_m) на плоскости $\mathbb{R}^2$, сходящуюся к точке $(0,0)$, но не попадающую в $(0,0)$ такую, что $\frac{x_m\cdot y_m}{(x_m)^2+(y_m)^2} \underset{m\to\infty}{\not\longrightarrow} 0$.

Это обычно бывает нетрудно сделать. Возьмем, скажем, следующую последовательность:

$$\left\{\begin{array}{c} x_m = \frac{1}{m} \\ y_m = \frac{1}{m} \end{array}\right\}$$

Ясно, что

$$x_m = \frac{1}{m} \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} 0, \quad y_m = \frac{1}{m} \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

$$(x_m)^2+(y_m)^2 = \frac{1}{m^2} \ne 0$$

но при этом

$$\frac{x_m\cdot y_m}{(x_m)^2+(y_m)^2} = \frac{\frac{1}{m}\cdot\frac{1}{m}}{\frac{1}{m^2}+\frac{1}{m^2}} = \frac{\frac{1}{m^2}}{\frac{2}{m^2}} = \frac{1}{2} \underset{m\to\infty}{\not\longrightarrow} 0$$

Вывод: $\frac{x\cdot y}{x^2+y^2} \underset{(x,y)\to(0,0)}{\not\longrightarrow} 0$.

◇ **14.1.11.** Проверим соотношение

$$\frac{\sin\Big(x\cdot y\Big)}{\max\{|x|,|y|\}} \underset{(x,y)\to(0,0)}{\longrightarrow} 0$$

Берем последовательности $\{x_m\}$ и $\{y_m\}$ такие что

$$\left\{\begin{array}{c} x_m \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} 0, \\ y_m \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} 0, \\ (x_m)^2+(y_m)^2 \ne 0 \end{array}\right\}$$

Нужно убедиться, что

$$\frac{\sin\Big(x_m\cdot y_n\Big)}{\max\{|x_m|,|y_m|\}} \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

Оцениваем нашу дробь по модулю:

$$0 \leqslant \left|\frac{\sin\Big(x_m\cdot y_m\Big)}{\max\{|x_m|,|y_m|\}}\right| = \frac{\left|\sin\Big(x_m\cdot y_m\Big)\right|}{\max\{|x_m|,|y_m|\}} \underset{m\to\infty}{\sim}$$

$$\underset{m\to\infty}{\sim} \left(\begin{array}{c}\text{применяем формулу} \\ \sin x \underset{x\to 0}{\sim} x\end{array}\right) \underset{m\to\infty}{\sim}$$

$$\underset{m\to\infty}{\sim} \frac{|x_m\cdot y_m|}{\max\{|x_m|,|y_m|\}} \leqslant$$

$$\leqslant (2.1.207) \leqslant \frac{\Big(\max\{|x_m|,|y_m|\}\Big)^2}{\max\{|x_m|,|y_m|\}} \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

Отсюда

$$\left|\frac{\sin\Big(x_m\cdot y_m\Big)}{\max\{|x_m|,|y_m|\}}\right| \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

и значит, справедливо (3.2).

Вывод: $\frac{\sin(x\cdot y)}{\max\{|x|,|y|\}} \underset{(x,y)\to(0,0)}{\longrightarrow} 0$.

▷▷ **14.1.12.** Проверьте соотношения:

1) $\frac{\sqrt{1+x\cdot y^2}-1}{x^2+y^2} \underset{(x,y)\to(0,0)}{\overset{?}{\longrightarrow}} 0$;

2) $\frac{\cos\big(x\cdot y\big)-1}{x^4+y^4} \underset{(x,y)\to(0,0)}{\overset{?}{\longrightarrow}} 0$;

3) $\frac{\cos\big(x\cdot y\big)-1}{x^2+y^2} \underset{(x,y)\to(0,0)}{\overset{?}{\longrightarrow}} 0$;

4) $\frac{\ln\big(1+x\cdot y\big)}{|x|+|y|} \underset{(x,y)\to(0,0)}{\overset{?}{\longrightarrow}} 0$;

5) $\frac{\ln\big(1+x+y\big)}{\max\{|x|,|y|\}} \underset{(x,y)\to(0,0)}{\overset{?}{\longrightarrow}} 0$;

6) $\frac{e^{x+y}-1}{x^2+|y|} \underset{(x,y)\to(0,0)}{\overset{?}{\longrightarrow}} 0$.

7) $\frac{e^{x\cdot y}-1}{x^2+|y|} \underset{(x,y)\to(0,0)}{\overset{?}{\longrightarrow}} 0$.

◇ **14.1.13.** Выясните, существует ли предел у функции

$$f(x,y) = \frac{x^2-y^2}{|x|+|y|}$$

в точке $(0,0)$ и, если да, найдите его.

Для решения, посмотрим сначала, к чему стремится наша функция на нескольких пробных последовательностях. Возьмем, например, последовательность

$$\left\{\begin{array}{c} x_m = \frac{1}{m} \\ y_m = 0 \end{array}\right\}$$

Тогда

$$f(x_m,y_m)=\frac{x_m^2-y_m^2}{|x_m|+|y_m|}=\frac{\frac{1}{m^2}-0}{\frac{1}{m}+0}=\frac{1}{m}\underset{m\to\infty}{\longrightarrow}0.$$

Если взять другую последовательность

$$\left\{\begin{array}{c} x_m=0 \\ y_m=\frac{1}{m}\end{array}\right\}$$

то

$$f(x_m,y_m)=\frac{x_m^2-y_m^2}{|x_m|+|y_m|}=\frac{0-\frac{1}{m^2}}{0+\frac{1}{m}}=-\frac{1}{m}\underset{m\to\infty}{\longrightarrow}0.$$

Эти два примера рождают подозрение, что $f(x,y)$ стремится к нулю при $(x,y)\to(0,0)$. Попробуем доказать это:

$$f(x,y)=\frac{x^2-y^2}{|x|+|y|}\underset{(x,y)\to(0,0)}{\overset{?}{\longrightarrow}}0$$

Берем последовательности $\{x_m\}$ и $\{y_m\}$ такие что

$$\left\{\begin{array}{c} x_m\underset{m\to\infty}{\longrightarrow}0, \\ y_m\underset{m\to\infty}{\longrightarrow}0, \\ (x_m)^2+(y_m)^2\ne 0\end{array}\right\}$$

Нужно убедиться, что

$$\frac{x_m^2-y_m^2}{|x_m|+|y_m|}\underset{m\to\infty}{\longrightarrow}0 \qquad (14.1.12)$$

Оцениваем нашу дробь по модулю:

$$0\leqslant\left|\frac{x_m^2-y_m^2}{|x_m|+|y_m|}\right|\leqslant\frac{x_m^2+y_m^2}{|x_m|+|y_m|}\leqslant$$
$$\leqslant (2.1.208),(2.1.209)\leqslant\frac{2\Big(\max\{|x_m|,|y_m|\}\Big)^2}{\max\{|x_m|,|y_m|\}}=$$
$$=2\max\{|x_m|,|y_m|\}\underset{m\to\infty}{\longrightarrow}0$$

По теореме о двух милиционерах, это означает, что

$$\left|\frac{x_m^2-y_m^2}{|x_m|+|y_m|}\right|\underset{m\to\infty}{\longrightarrow}0,$$

откуда и получаем (3.3).

Вывод: $\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2-y^2}{|x|+|y|}=0$.

$\diamond$ **14.1.14.** Выясните, существует ли предел у функции

$$f(x,y)=\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$$

в точке $(0,0)$ и, если да, найдите его.

Возьмем последовательность

$$\left\{\begin{array}{c} x_m=\frac{1}{m} \\ y_m=0\end{array}\right\}$$

Тогда

$$f(x_m,y_m)=\frac{x_m^2-y_m^2}{x_m^2+y_m^2}=\frac{\frac{1}{m^2}-0}{\frac{1}{m^2}+0}=1\underset{m\to\infty}{\longrightarrow}1$$

Возьмем после этого другую последовательность

$$\left\{\begin{array}{c} x_m=0 \\ y_m=\frac{1}{m}\end{array}\right\}$$

Тогда

$$f(x_m,y_m)=\frac{x_m^2-y_m^2}{x_m^2+y_m^2}=\frac{0-\frac{1}{m^2}}{0+\frac{1}{m^2}}=-1\underset{m\to\infty}{\longrightarrow}-1$$

Мы получили, что на двух различных последовательностях $(x_m,y_m)\to(0,0)$ значение функции $f(x,y)$ стремится к различным числам: 1 и -1. По теореме 3.1 это означает, что предела в точке быть не может.

Вывод: $\nexists\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$.

$\triangleright\triangleright$ **14.1.15.** Проверьте, существуют ли пределы, и если да, то найдите их:

1) $\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\sqrt{1+x\cdot y}-1}{x^2+y^2}$;
2) $\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\cos(x^2\cdot y)-1}{x^4+y^4}$;
3) $\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\cos(x^2\cdot y)-1}{x^2+y^2}$;
4) $\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\ln(1+x\cdot y)}{|x|+y^2}$;
5) $\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\ln(1+x^2+y^2)}{\max\{|x|,|y|\}}$;
6) $\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{e^{x+y^2}-1}{x^2+|y|}$.
7) $\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{e^{x^2\cdot y}-1}{x^2+y^2}$.

Асимптотические формулы на евклидовых пространствах. Пусть $f:X\hookrightarrow\mathbb{R}$ и $g:X\hookrightarrow\mathbb{R}$ – две функции на евклидовом пространстве X, определенные в окрестности точки $a\in X$, и

$$\frac{f(x)}{g(x)}\underset{x\to a}{\longrightarrow}0. \qquad (14.1.13)$$

Тогда говорят, что *функция f бесконечно мала по сравнению с функцией g при $x\to a$* и записывают это так

$$f(x)\underset{x\to a}{\ll}g(x)$$

или так

$$f(x)=\underset{x\to a}{\mathbf{o}}(g(x)) \qquad (14.1.14)$$

◇ **14.1.16.** Проверим, что

$$x^2+y^2 = \underset{(x,y)\to(0,0)}{\mathbf{o}}(|x|+|y|) \qquad (14.1.15)$$

Доказательство. Действительно,

$$0 \leqslant \frac{x^2+y^2}{|x|+|y|} \leqslant (2.1.208),(2.1.209) \leqslant$$
$$\leqslant \frac{2\max^2\{|x|,|y|\}}{\max\{|x|,|y|\}} = 2\max\{|x|,|y|\} \underset{(x,y)\to(0,0)}{\longrightarrow} 0.$$

Последнее соотношение следует понимать так, что если $x_m \to 0$, $y_m \to 0$, $x_m^2+y_m^2 \neq 0$, то $2\max\{|x_m|,|y_m|\} \to 0$. Отсюда следует, что $\frac{x_m^2+y_m^2}{|x_m|+|y_m|} \to 0$, поэтому

$$\frac{x^2+y^2}{|x|+|y|} \underset{(x,y)\to(0,0)}{\longrightarrow} 0$$

То есть мы доказали (14.1.15). □

◇ **14.1.17.** Проверим, выполняется ли

$$\sqrt[3]{x\cdot y^2} = \underset{(x,y)\to(0,0)}{\mathbf{o}}\Big(\sqrt{x^2+y^2}\Big) \qquad (14.1.16)$$

Доказательство. Это равносильно условию

$$\frac{\sqrt[3]{x\cdot y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}} \underset{(x,y)\to(0,0)}{\longrightarrow} 0.$$

Чтобы его проверить, подставим $x_m = \frac{1}{m}$, $y_m = \frac{1}{m}$ $\Big(x_m^2+y_m^2 = \frac{2}{m^2} \neq 0\Big)$:

$$\frac{\sqrt[3]{x_m\cdot y_m^2}}{\sqrt{x_m^2+y_m^2}} = \frac{\sqrt[3]{\frac{1}{m}\cdot\frac{1}{m^2}}}{\sqrt{\frac{1}{m^2}+\frac{1}{m^2}}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \underset{m\to\infty}{\not\longrightarrow} 0$$

То есть (14.1.16) не выполняется. □

Помимо соотношений вида (14.1.14) используются более сложные асимптотические формулы с функциями многих переменных. Как и в случае с одной переменной, для их понимания достаточно знать, что если в какой-то формуле встречается символ $\underset{x\to a}{\mathbf{o}}\Big(f(x)\Big)$, то это означает, что на этом месте стоит некоторая (неизвестная) функция $\alpha(x)$, для которой справедливо соотношение $\alpha(x) = \underset{x\to a}{\mathbf{o}}\Big(f(x)\Big)$.

◇ **14.1.18.** Проверим, что

$$x^2+y^2 = 2x-1+\underset{(x,y)\to(1,0)}{\mathbf{o}}\Big(\sqrt{(x-1)^2+y^2}\Big)$$

Доказательство. Это условие равносильно соотношению

$$x^2+y^2-2x+1 = \underset{(x,y)\to(1,0)}{\mathbf{o}}\Big(\sqrt{(x-1)^2+y^2}\Big)$$

то есть соотношению

$$\frac{x^2+y^2-2x+1}{\sqrt{(x-1)^2+y^2}} \underset{(x,y)\to(1,0)}{\longrightarrow} 0$$

Докажем его:

$$\frac{x^2+y^2-2x+1}{\sqrt{(x-1)^2+y^2}} = \frac{(x-1)^2+y^2}{\sqrt{(x-1)^2+y^2}} =$$
$$= \sqrt{(x-1)^2+y^2} \underset{(x,y)\to(1,0)}{\longrightarrow} 0$$

□

◇ **14.1.19.** Проверим, что

$$\cos(x+y) = 1+\underset{(x,y)\to(0,0)}{\mathbf{o}}\Big(\max\{|x|,|y|\}\Big)$$

Доказательство. Это условие равносильно соотношению

$$\cos(x+y)-1 = \underset{(x,y)\to(0,0)}{\mathbf{o}}\Big(\max\{|x|,|y|\}\Big)$$

то есть соотношению

$$\frac{\cos(x+y)-1}{\max\{|x|,|y|\}} \underset{(x,y)\to(0,0)}{\longrightarrow} 0$$

Докажем его:

$$0 \leqslant \left|\frac{\cos(x+y)-1}{\max\{|x|,|y|\}}\right| = \frac{|\cos(x+y)-1|}{\max\{|x|,|y|\}} \underset{(x,y)\to(0,0)}{\sim}$$
$$\underset{(x,y)\to(0,0)}{\sim} \frac{\left|\frac{(x+y)^2}{2}\right|}{\max\{|x|,|y|\}} = \frac{|x+y|^2}{2\max\{|x|,|y|\}} \leqslant$$
$$\leqslant \frac{x^2+y^2+2|xy|}{2\max\{|x|,|y|\}} \leqslant (2.1.207),(2.1.209) \leqslant$$
$$\leqslant \frac{4\max^2\{|x|,|y|\}}{2\max\{|x|,|y|\}} = 2\max\{|x|,|y|\} \underset{(x,y)\to(0,0)}{\longrightarrow} 0$$

□

(b) Непрерывно дифференцируемые функции

Дифференциал и непрерывно дифференцируемые функции порядка 1. Пусть X – евклидово пространство.

- *Производной функции* $f : X \hookrightarrow \mathbb{R}$ *в точке* $a \in \mathsf{D}(f)$ *по направлению вектора* $p \in X$ называется число
$$\partial_p f(a) = \lim_{t\to 0} \frac{f(a+tp) - f(a)}{t} \tag{14.1.17}$$

- *Дифференциалом (1-го порядка)* функции $f : X \hookrightarrow \mathbb{R}$ в точке $a \in \mathsf{D}(f)$ называется функция $\mathsf{d}\, f(a) : X \hookrightarrow \mathbb{R}$, которая каждому вектору $p \in X$ ставит в соответствие производную отображения φ в точке a по направлению p:
$$\mathsf{d}\, f(a)[p] = \partial_p f(a) = \lim_{t\to 0} \frac{f(a+tp) - f(a)}{t} \tag{14.1.18}$$

- *Частными производными* функции $f : X \hookrightarrow \mathbb{R}$ в точке $a \in \mathsf{D}(f)$ относительно базиса $e = (e_1, ..., e_n)$ в X называются числа
$$\nabla_i f(x) = \mathsf{d}\, f(a)[e_i] = \partial_{e_i} f(a), \qquad i = 1, ..., n. \tag{14.1.19}$$

Теорема 14.1.5. *Для функции* $f : X \hookrightarrow \mathbb{R}$ *на евклидовом пространстве* X *с открытой областью определения* $\mathsf{D}(f)$ *следующие условия эквивалентны:*

(i) *в каждой точке* $a \in \mathsf{D}(f)$ *области определения функции* f *существует дифференциал* $\mathsf{d}\, f(a)$*, являющийся непрерывным отображением* $\mathsf{d}\, f : \mathsf{D}(f) \to X^*$ *и удовлетворяющий асимптотическому соотношению*
$$f(x) = f(a) + \mathsf{d}\, f(a)(x-a) + \underset{x\to a}{\mathbf{o}}\Big(|x-a|\Big); \tag{14.1.20}$$

(ii) *для всякого вектора* $p \in X$ *функция* f *имеет производную* $\partial_p f(a)$ *по направлению* p *в каждой точке* $a \in \mathsf{D}(f)$*, причем функция* $\partial_p f : \mathsf{D}(f) \to \mathbb{R}$ *непрерывна;*

(iii) *для всякого базиса* $e = (e_1, ..., e_n)$ *в* X *функция* f *имеет частные производные* $\nabla_1 f(a), ..., \nabla_n f(a)$ *относительно этого базиса в каждой точке* $a \in \mathsf{D}(f)$*, причем функции* $\nabla_i f : \mathsf{D}(f) \to \mathbb{R}$ *непрерывны;*

(iv) *существует базис* $e = (e_1, ..., e_n)$ *в* X*, относительно которого функция* f *имеет частные производные* $\nabla_1 f(a), ..., \nabla_n f(a)$ *в каждой точке* $a \in \mathsf{D}(f)$*, причем функции* $\nabla_i f : \mathsf{D}(f) \to \mathbb{R}$ *непрерывны.*

Если эти условия выполнены, то дифференциал $\mathsf{d}\, f$ *функции* f *выражается через ее частные производные по произвольному базису* $e = (e_1, ..., e_n)$ *по формуле*
$$\mathsf{d}\, f(a) = \sum_{i=1}^{n} \mathsf{d}\, f(a)[e_i] \cdot \left[\frac{1}{e}\right]^i = \sum_{i=1}^{n} \nabla_i f(a) \cdot \left[\frac{1}{e}\right]^i, \qquad a \in \mathsf{D}(f). \tag{14.1.21}$$

или, что эквивалентно, справедливо тождество
$$\mathsf{d}\, f(a)[p] = \partial_p f(a) = \nabla_1 f(a) \cdot \left[\frac{p}{e}\right]^1 + ... + \nabla_n f(a) \cdot \left[\frac{p}{e}\right]^n, \qquad a \in \mathsf{D}(f),\ p \in \mathbb{R}^n. \tag{14.1.22}$$

Как следствие, дифференциал $\mathsf{d}\, f(a) : X \to \mathbb{R}$ *всякой такой функции* $f : X \hookrightarrow \mathbb{R}$ *в каждой точке* $a \in \mathsf{D}(f)$ *является линейным функционалом на* X.

- Функция $f : X \hookrightarrow \mathbb{R}$, удовлетворяющая условиям (i)-(iv) этой теоремы, называется *непрерывно дифференцируемой* (порядка 1).

! **14.1.20.** Из соотношения (14.1.20) следует, что *непрерывно дифференцируемая функция всегда непрерывна.*

Доказательство теоремы 14.1.5. Здесь импликации (i)⇒(ii)⇒(iii)⇒(iv) очевидны, и нужно только доказать замыкающую этот круг импликацию (iv)⇒(i). Пусть выполняется (iv). В силу теоремы о представлении евклидова пространства 13.1.15, мы можем считать, что $X = \mathbb{R}^n$. Для доказательства достаточно рассмотреть случай двух переменных, потому что на произвольное n обобщение очевидно. Одновременно под $e_1 = (1, 0)$, $e_1 = (0, 1)$ мы будем подразумевать стандартный базис в

$\mathbb{R}^2$. Пусть функция $f : \mathbb{R}^2 \hookrightarrow \mathbb{R}$ определена на открытом множестве $\mathsf{D}(f)$ и имеет частные производные $\nabla_1 f$, $\nabla_2 f$ (относительно стандартного базиса $e_1 = (1,0)$, $e_1 = (0,1)$) непрерывные на $\mathsf{D}(f)$, и пусть $(a,b) \in \mathsf{D}(f)$ – какая-нибудь точка. Тогда, обозначив

$$A = \nabla_1 f(a,b), \qquad B = \nabla_2 f(a,b),$$

получим

$$f(x,y)-f(a,b)-A\cdot(x-a)-B\cdot(y-b) = \underbrace{f(x,y)-f(a,y)}_{\substack{\text{теорема Лагранжа 5.1.7}\ \| \\ \nabla_1 f(u,y)\cdot(x-a) \\ \text{для некоторого} \\ u\in[a,x]}} + \underbrace{f(a,y)-f(a,b)}_{\substack{\|\ \text{теорема Лагранжа 5.1.7} \\ \nabla_2 f(a,v)\cdot(y-b) \\ \text{для некоторого} \\ v\in[b,y]}} -A\cdot(x-a)-B\cdot(y-b) =$$

$$= \nabla_1 f(u,y)\cdot(x-a) + \nabla_2 f(a,v)\cdot(y-b) - A(x-a) - B(y-b) =$$
$$= \big(\nabla_1 f(u,y) - A\big)\cdot(x-a) + \big(\nabla_2 f(a,v) - B\big)\cdot(y-b)$$

Отсюда

$$\frac{f(x,y)-f(a,b)-A\cdot(x-a)-B\cdot(y-b)}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}} =$$
$$= \underbrace{\big(\nabla_1 f(u,y)-A\big)}_{\substack{\downarrow \\ 0}} \cdot \underbrace{\frac{x-a}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}}}_{\substack{\wedge\!\!\backslash \\ 1}} + \underbrace{\big(\nabla_2 f(a,v)-B\big)}_{\substack{\downarrow \\ 0}} \cdot \underbrace{\frac{y-b}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}}}_{\substack{\wedge\!\!\backslash \\ 1}} \underset{(x,y)\to(a,b)}{\longrightarrow} 0.$$

То есть,

$$f(x,y) = f(a,b) + A\cdot(x-a) + B\cdot(y-b) + \underset{(x,y)\to(a,b)}{\mathbf{o}}\Big(\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}\Big),$$

и f дифференцируема в точке (a,b). Теперь для всякого вектора $(p,q) \in \mathbb{R}^2$ мы получим

$$\lim_{t\to 0} \frac{f\big((a,b)+t\cdot(p,q)\big)-f(a,b)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{f(a+t\cdot p, b+t\cdot q)-f(a,b)}{t} =$$
$$= \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\cdot\left(A\cdot t\cdot p + B\cdot t\cdot q + \underset{t\to 0}{\mathbf{o}}\Big(\sqrt{(tp)^2+(tq)^2}\Big)\right) =$$
$$= \lim_{t\to 0}\left(A\cdot p + B\cdot q + \frac{|t|}{t}\cdot \underset{t\to 0}{\mathbf{o}}\Big(\sqrt{p^2+q^2}\Big)\right) = A\cdot p + B\cdot q.$$

Это означает, что у функции f имеется дифференциал в каждой точке $(a,b) \in \mathsf{D}(f)$, и он имеет вид

$$\mathsf{d}\, f(a,b)[p,q] = A\cdot p + B\cdot q = \nabla_1 f(a,b)\cdot p + \nabla_2 f(a,b)\cdot q. \tag{14.1.23}$$

Поскольку по условию (iv), функции $\nabla_1 f$ и $\nabla_2 f$ непрерывны, отображение $\mathsf{d}\, f : \mathsf{D}(f) \to (\mathbb{R}^2)^*$ тоже непрерывно.

Остается доказать формулу (14.2.126). Для этого нужно заметить, что из (14.1.23) следует, что отображение $\mathsf{d}\, f(a) : X \to \mathbb{R}$ является линейным функционалом. Как следствие, для любого базиса $e = (e_1, ..., e_n)$

$$\mathsf{d}\, f(a) = (12.2.76) = \sum_{i=1}^n \mathsf{d}\, f(a)[e_i]\cdot\left[\frac{1}{e}\right]^i = (14.1.19) = \sum_{i=1}^n \nabla_i f(a)\cdot\left[\frac{1}{e}\right]^i$$

□

Теорема 14.1.6. *Если $f : X \hookrightarrow \mathbb{R}$ и $g : X \hookrightarrow \mathbb{R}$ – непрерывно дифференцируемые функции на евклидовом пространстве X, то на их общей области определения $\mathsf{D}(f)\cap\mathsf{D}(g)$ их произведение $f\cdot g$ также непрерывно дифференцируемо, и его дифференциал вычисляется по формуле*

$$\mathsf{d}(f\cdot g)(a) = \mathsf{d}\, f(a)\cdot g(a) + f(a)\cdot \mathsf{d}\, g(a), \qquad p\in\mathbb{R}^n. \tag{14.1.24}$$

Непрерывно дифференцируемые функции порядка 1 на $\mathbb{R}^n$. В случае $X = \mathbb{R}^n$ под частными производными и градиентом понимают обычно соответствующие конструкции со стандартным базисом (12.2.57):

$$(e^i)_j = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases}.$$

В этом случае частные производные вычисляются по формуле

$$\nabla_i f(a) = \lim_{t\to 0} \frac{f(a + t\cdot e_i) - f(a)}{t} =$$
$$= \lim_{t\to 0} \frac{f\big(a_1, ..., a_i + t, ..., a_n\big) - f\big(a_1, ..., a_i, ..., a_n\big)}{t}.$$

Частные производные стандартных функций. Напомним, что числовые выражения были определены на с.302 части I. На с. 810 части I было затем определено понятие *производного выражения* $\frac{\partial}{\partial x}(\mathcal{P})$, или $\frac{\partial(\mathcal{P})}{\partial x}$, числового выражения $\mathcal{P}$ по переменной x. Там же приводились правила вычисления производного выражения.

Теорема 14.1.7. *Если стандартная функция f над упорядоченным набором переменных $(x_1, ..., x_n)$, определяется числовым выражением $\mathcal{U}$,*

$$f(x_1, ..., x_n) = \mathcal{U},$$

производная которого $\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial x_i}$ по какой-нибудь переменной x_i определена в точке $(a_1, ..., a_n)$, то частная производная функции f по переменной x_i существует в точке $(a_1, ..., a_n)$ и совпадает со значением в этой точке функции, определяемой выражением $\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial x_i}$:

$$\nabla_i f(a_1, ..., a_n) = \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial x_i}\Big|_{(x_1,...,x_n)=(a_1,...,a_n)}.$$

◇ **14.1.21.** Например, для функции

$$f(x, y) = x^2 - 3x\cdot y$$

частная производная $\nabla_1 f$ вычисляется как результат формальной операции дифференцирования по переменной x:

$$\nabla_1 f(x, y) = \frac{\partial}{\partial x}\Big(x^2 - 3x\cdot y\Big) = 2x - 3y$$

И точно так же, частную производную $\nabla_1 f$ можно найти как результат формального дифференцирования по переменной y:

$$\nabla_2 f(x, y) = \frac{\partial}{\partial y}\Big(x^2 - 3x\cdot y\Big) = 0 - 3x = -3x$$

В частности, в точке $(-1, 2)$, получаются числа

$$\nabla_1 f(-1, 2) = -8, \quad \nabla_2 f(-1, 2) = 3$$

▷▷ **14.1.22.** Найдите частные производные функций:

1) $f(x, y) = x^2 - xy^2 + y^3$;
2) $f(x, y) = \operatorname{arctg} \frac{x}{y}$;
3) $f(x, y) = x \sin y^2$;
4) $f(x, y) = x \ln(x + 2y)$;
5) $f(x, y) = x^y$;
6) $f(x, y) = e^{xy^2}$.

Градиент функции. По теореме 14.1.5, дифференциал $\mathsf{d}\, f(a) : X \to \mathbb{R}$ всякой непрерывно дифференцируемой функции $f : X \hookrightarrow \mathbb{R}$ в каждой точке $a \in \mathsf{D}(f)$ является линейным функционалом на X. Отсюда следует, что имеет смысл следующее определение.

- *Градиентом* $\nabla f(a)$ непрерывно дифференцируемой функции $f : X \hookrightarrow \mathbb{R}$ в точке $a \in \mathsf{D}(f)$ называется градиент линейного функционала[4] $\mathsf{d}\, f(a) : X \to \mathbb{R}$, то есть вектор

$$\nabla f(a) = \nabla\, \mathsf{d}\, f(a) = \sum_{i=1}^{n} \mathsf{d}\, f(a)[e_i]\cdot e_i = \sum_{i=1}^{n} \partial_{e_i} f(a)\cdot e_i \qquad (14.1.25)$$

где $e = (e_1, ..., e_n)$ – произвольный ортонормированный базис в X (по свойству 1° на с.762, вектор $\nabla f(a)$ не зависит от выбора ортонормированного базиса $e = (e_1, ..., e_n)$ в X).

Свойства градиента функции:

1^0. *Дифференциал выражается через градиент тождеством*

$$\mathsf{d}\, f(a)[p] = \langle \nabla f(a), p\rangle\,, \qquad a \in \mathsf{D}(f),\ p \in X. \qquad (14.1.26)$$

[4]Градиент линейного функционала был определен выше формулой (13.1.30).

2^0. *В произвольной точке $a \in \mathsf{D}(f)$ производная f вдоль любого единичного вектора p (то есть вектора единичной длины) не превосходит модуля градиента этой функции в точке a*

$$\partial_p f(a) \leqslant |\nabla f(a)|, \qquad |p| = 1, \tag{14.1.27}$$

и если $\nabla f(a) \neq 0$, равна ему только если $\left[\frac{p}{e}\right]$ сонаправлен с $\nabla f(a)$:

$$\partial_p f(a) = |\nabla f(a)| \quad \Leftrightarrow \quad p = \frac{\nabla f(a)}{|\nabla f(a)|}.$$

3^0. *Градиент функции f в точке a показывает направление ее наибольшего возрастания: если продифференцировать f вдоль единичного вектора p, сонаправленого с градиентом $\nabla f(a)$, то получится максимальная производная вдоль единичного вектора в данной точке a.*

Доказательство. 1. Формула (14.1.26) доказывается цепочкой

$$\mathsf{d}\, f(a)[p] = (14.2.126) = \sum_{i=1}^{n} \mathsf{d}\, f(a)[e_i] \cdot \left[\frac{1}{e}\right]^i [p] = \sum_{i=1}^{n} \mathsf{d}\, f(a)[e_i] \cdot \left[\frac{p}{e}\right]^i = \\ = (13.1.16) = \sum_{i=1}^{n} \mathsf{d}\, f(a)[e_i] \cdot \langle e_i, p\rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{n} \mathsf{d}\, f(a)[e_i] \cdot e_i, p \right\rangle = (14.1.25) = \langle \nabla f(a), p\rangle$$

2. После этого неравенство (14.1.27) становится следствеим неравенства Коши-Шварца:

$$\partial_p f(a) = (14.1.22) = \langle \nabla f(a), p\rangle \leqslant (13.1.3) \leqslant |\nabla f(a)| \cdot |p| = |\nabla f(a)| \cdot 1 = |\nabla f(a)|,$$

а равенство достигается только если p сонаправлен с $\nabla f(a)$, то есть $p = \lambda \cdot \nabla f(a)$, $\lambda > 0$. Поскольку $|p| = 1$, получаем $\lambda \cdot |\nabla f(a)| = 1$ откуда $\lambda = \frac{1}{|\nabla f(a)|}$. То есть $p = \frac{\nabla f(a)}{|\nabla f(a)|}$.

3. Свойство 3° есть переформулировка 2°. □

◇ **14.1.23.** Проиллюстрируем это понятие на примере функции

$$f(x, y) = x^2 + y^2$$

Поскольку

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = 2x, \qquad \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = 2y$$

получаем

$$\nabla f(x, y) = (2x, 2y)$$

Поэтому для нескольких наугад взятых точек получаются векторы:

$$\nabla f(0,0) = (0,0), \quad \nabla f(0,1) = (0,2), \\ f(1,0) = (2,0), \quad \nabla f(1,1) = (2,2), \\ \nabla f(0,-1) = (0,-2), \quad \nabla f(-1,0) = (0,-2), \\ \nabla f(-1,-1) = (-2,-2)$$

Для всякой точки a градиент $\nabla f(a)$ принято воображать как вектор, выходящий из точки a. Поэтому, если изобразить на плоскости наши векторы, получится картинка:

Если ее наложить на рисунок из §1, где изображались линии уровня функции $f(x, y) = x^2 + y^2$, то получится интригующая картинка

в которой векторы градиента подозрительно перпендикулярны линиям уровня. Это – не случайное совпадение. Оказывается, действительно градиент всякой функции $f(x, y)$ в произвольной точке (a, b) перпендикулярен линии уровня, проходящей через эту точку. И более того, градиент $\nabla f(x, y)$ указывает направление, вдоль которого функция $f(x,y)$ возрастает с наибольшей скоростью. Чтобы понять, почему это так, нам придется ввести понятие производной по направлению и производной вдоль кривой.

! **14.1.24.** В частности, для функции двух переменных

$$\mathsf{d}\, f(x,y)[p,q] = \nabla_1 f(x,y)\cdot p + \nabla_2 f(x,y)\cdot q \tag{14.1.28}$$

Аналогично, для трех переменных:

$$\mathsf{d}\, f(x,y,z)[p,q,r] = \nabla_1 f(x,y,z)\cdot p + \\ + \nabla_2 f(x,y,z)\cdot q + \nabla_3 f(x,y,z)\cdot r \tag{14.1.29}$$

◇ **14.1.25.** Пусть $f(x,y) = x^2\cdot y$. Тогда

$$\mathsf{d}\, f(x,y)(p,q) = \mathsf{d}\Big(x^2\cdot y\Big)(p,q) = 2x\cdot y\cdot p + x^2\cdot q$$

Непрерывная дифференцируемость порядка 2 и теорема Шварца. Для данной функции многих переменных $f:\mathbb{R}^n \hookrightarrow \mathbb{R}$ ее частные производные $\nabla_i f$ тоже являются функциями многих переменных, поэтому у $\nabla_i f$ тоже можно вычислять частные производные:

$$\nabla_j\nabla_i f$$

У этих функций в свою очередь тоже можно вычислять частные производные, и так далее.

◇ **14.1.26.** Пусть

$$f(x,y) = x^2 + x\cdot y^2 + y^3$$

тогда

$$\nabla_1 f(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\Big(x^2 + x\cdot y^2 + y^3\Big) = 2x + y^2,$$

$$\nabla_2 f = \frac{\partial}{\partial y}\Big(x^2 + x\cdot y^2 + y^3\Big) = 2x\cdot y + 3y^2$$

и

$$\nabla_1\nabla_1 f(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\Big(2x + y^2\Big) = 2,$$

$$\nabla_2\nabla_1 f(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\Big(2x + y^2\Big) = 2y$$

$$\nabla_1\nabla_2 f(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\Big(2x\cdot y + 3y^2\Big) = 2y,$$

$$\nabla_2\nabla_2 f(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\Big(2x\cdot y + 3y^2\Big) = 6y$$

Можно заметить, что

$$\nabla_2\nabla_1 f(x,y) = \nabla_1\nabla_2 f(x,y).$$

Оказывается, это не случайное совпадение, это тождество выполняется для любой "достаточно гладкой" функции.

- Функция $f: X \hookrightarrow \mathbb{R}$ на евклидовом пространстве X называется *непрерывно дифференцируемой порядка 2*, если она непрерывно дифференцируема порядка 1, и все ее частные производные $\nabla_1 f$,...,$\nabla_n f$ относительно какого-нибудь базиса $e = (e_1,...,e_n)$ являются непрерывно дифференцируемыми функциями порядка 1.

Теорема 14.1.8 (Шварца). *Пусть функция $f: X \hookrightarrow \mathbb{R}$ на евклидовом пространстве X непрерывно дифференцируема порядка 2, тогда ее смешанные производные совпадают:*

$$\nabla_j\nabla_i f(x) = \nabla_i\nabla_j f(x), \qquad x\in U. \tag{14.1.30}$$

Доказательство. По теореме о представлении 13.1.15 мы можем считать, что $X = \mathbb{R}^n$.

1. Рассмотрим сначала случай двух переменных: $n = 2$. Зафиксируем $(a,b)\in \mathsf{D}(f)$ и обозначим

$$\varPhi(x,y) = f(x,y) - f(a,y) - f(x,b) + f(a,b).$$

Если при фиксированном y обозначить $\varphi(x) = f(x,y) - f(x,b)$, то мы получим

$$\varPhi(x,y) = \Big\{f(x,y) - f(x,b)\Big\} - \Big\{f(a,y) - f(a,b)\Big\} = \\ = \underbrace{\varphi(x) - \varphi(a)}_{\substack{\| \text{ теорема Лагранжа 5.1.7} \\ \varphi'(u)\cdot(x-a) \\ \text{для некоторого} \\ u\in[a,x]}} = \nabla_1\varphi(u)\cdot(x-a) = \underbrace{\Big(\nabla_1 f(u,y) - \nabla_1 f(u,b)\Big)}_{\substack{\| \text{ теорема Лагранжа 5.1.7} \\ \nabla_2\nabla_1 f(u,v)\cdot(y-b) \\ \text{для некоторого} \\ v\in[b,y]}}\cdot(x-a) =$$

$$= \nabla_2\nabla_1 f(u,v)\cdot(y-b)\cdot(x-a).$$

С другой стороны, если при фиксированном x обозначить $\psi(y) = f(x,y) - f(a,y)$, то

$$\varPhi(x,y) = \Big\{f(x,y) - f(a,y)\Big\} - \Big\{f(x,b) - f(a,b)\Big\} =$$
$$= \underbrace{\psi(y) - \psi(b)}_{\substack{\| \text{ теорема Лагранжа 5.1.7} \\ \psi'(\tilde{v})\cdot(y-b) \\ \text{для некоторого} \\ \tilde{v}\in[b,y]}} = \nabla_2\psi(\tilde{v})\cdot(y-b) = \underbrace{\big(\nabla_2 f(x,\tilde{v}) - \nabla_2 f(a,\tilde{v})\big)}_{\substack{\| \text{ теорема Лагранжа 5.1.7} \\ \nabla_1\nabla_2 f(\tilde{u},\tilde{v})\cdot(x-a) \\ \text{для некоторого} \\ \tilde{u}\in[a,x]}} \cdot(y-b) =$$
$$= \nabla_1\nabla_2 f(\tilde{u},\tilde{v})\cdot(x-a)\cdot(y-b).$$

Теперь, раморозив x и y, мы получим цепочку:

$$\nabla_2\nabla_1 f(u,v)\cdot(y-b)\cdot(x-a) = \varPhi(x,y) = \nabla_1\nabla_2 f(\tilde{u},\tilde{v})\cdot(x-a)\cdot(y-b),$$
$$\Downarrow \quad \text{сокращаем на } (x-a)\cdot(y-b)$$
$$\nabla_2\nabla_1 f(a,b) \underset{(x,y)\to(a,b)}{\longleftarrow} \nabla_2\nabla_1 f(u,v) = \nabla_1\nabla_2 f(\tilde{u},\tilde{v}) \underset{(x,y)\to(a,b)}{\longrightarrow} \nabla_1\nabla_2 f(a,b)$$
$$\Downarrow$$
$$\nabla_2\nabla_1 f(a,b) = \nabla_1\nabla_2 f(a,b).$$

2. Рассмотрим теперь случай произвольного $n \in \mathbb{N}$. Зафиксируем точку $a \in \mathsf{D}(f)$, индексы $i \neq j \in \{1,...,n\}$, и положим

$$\varphi(x,y) = f(a + x\cdot e_i + y\cdot e_j), \qquad x,y\in\mathbb{R}.$$

Тогда, по уже доказанному,

$$\nabla_j\nabla_i f(a) = \nabla_2\nabla_1\varphi(0,0) = \nabla_1\nabla_2\varphi(0,0) = \nabla_i\nabla_j f(a).$$

$\square$

Непрерывная дифференцируемость порядка m и производная по мультииндексу. Напомним (см. определение на с.663), что *мультииндексом* длины n и объема m называется произвольное отображение $k : \{1,...,n\} \to \mathbb{Z}_+$, то есть числовая последовательность $k = (k_1,...,k_n)$, состоящая из неотрицательных целых чисел: $k_i \in \mathbb{Z}_+$, удовлетворяющая равенству

$$|k| = k_1 + ... + k_n = m.$$

Множество всех мультииндексов длины n и объема m обозначается $\mathsf{M}_n[m]$. *Представлением* мультииндекса $k \in \mathbb{Z}_+^n$ называется произвольная последовательность $\sigma : \{1,...,|k|\} \to \{1,...,n\}$ такая, что каждое число $i \in \{1,...,n\}$ присутствует в ней с кратностью k_i:

$$\forall i \in \{1,...,n\} \qquad \operatorname{card}\sigma^{-1}(i) = \operatorname{card}\{s\in\{1,...,|k|\}:\ \sigma_s = i\} = k_i$$

- Функция $f : X \hookrightarrow \mathbb{R}$ на евклидовом пространстве X называется *непрерывно дифференцируемой порядка* m, если она непрерывно дифференцируема порядка 1, и все ее частные производные $\nabla_1 f$,...,$\nabla_n f$ относительно какого-нибудь базиса $e = (e_1,...,e_n)$ в X являются непрерывно дифференцируемыми функциями порядка $m-1$.

Из теоремы Шварца 14.1.8 следует

Теорема 14.1.9. *Для любой функции $f : X \hookrightarrow \mathbb{R}$ на евклидовом пространстве X, непрерывно дифференцируемой порядка $|k|$, любого базиса $e = (e_1,...,e_n)$ в X, любой точки $a \in \mathsf{D}(f)$, любого мультииндекса $k \in \mathbb{Z}_+^n$ и любого представления $\sigma : \{1,...,|k|\} \to \{1,...,n\}$ мультииндекса k число*

$$\nabla^k f(a) = \nabla_{\sigma_1}...\nabla_{\sigma_{|k|}} f(a) \tag{14.1.31}$$

не зависит от представления σ мультииндекса k.

- Число $\nabla^k f(a)$ называется *производной функции f в точке a по мультииндексу k.*

Дифференциалы высших порядков Пусть $f : X \hookrightarrow \mathbb{R}$ – нерерывно дифференцируемая порядка m функция на евклидовом пространстве X. Зафиксируем вектор $p \in \mathbb{R}^n$. Производная $\partial_p f$ функции f по направлению p будет непрерывно дифференцируемой функцией порядка $m-1$ на U:

$$\partial_p f : \mathbb{R}^n \hookrightarrow \mathbb{R} \quad \Big| \quad x \in U \mapsto \partial_p f(x) \in \mathbb{R}.$$

От этой функции также можно брать производную по направлению p, и мы получим непрерывно дифференцируемую функцию порядка $m-2$ на U:

$$\partial_p^2 f : \mathbb{R}^n \hookrightarrow \mathbb{R} \quad \Big| \quad x \in U \mapsto (\partial_p^2 f)(x) = \partial_p(\partial_p f)(x) \in \mathbb{R}.$$

И так далее. Общая формула

$$\partial_p^m f = \partial_p(\partial_p^{m-1} f), \qquad m \in \mathbb{N} \tag{14.1.32}$$

определяет по индукции производную по направлению p порядка m от функции f:

$$\partial_p^m f : X \hookrightarrow \mathbb{R} \quad \Big| \quad x \in U \mapsto (\partial_p^m f)(x) = \partial_p(\partial_p^{m-1} f)(x) \in \mathbb{R}.$$

- *Дифференциалом (порядка m)* функции f в точке a называется функция $\mathsf{d}^m f(a) : X \to \mathbb{R}$, которая каждому вектору $p \in X$ ставит в соответствие производную порядка m функции f в точке a по направлению p:

  $$\mathsf{d}^m f(a)[p] = \partial_p^m f(a) \tag{14.1.33}$$

  Эту величину можно определить по индукции правилом

  $$\mathsf{d}^m f(a)[p] = \lim_{t \to 0} \frac{\mathsf{d}^{m-1} f(a+tp)[p] - \mathsf{d}^{m-1} f(a)[p]}{t}, \tag{14.1.34}$$

  где дифференциал нулевого порядка определяется формулой

  $$\mathsf{d}^0 f(a)[p] = f(a) \tag{14.1.35}$$

! 14.1.27. Если зафиксировать a и p и рассмотреть ограничение функции f на одномерное аффинное подпространство $\{a + tp;\ t \in \mathbb{R}\}$,

$$h(t) = f(a+tp), \qquad t \in \mathbb{R},$$

то производная порядка m этой функции будет совпадать с дифференциалом порядка m от f в точке $a + tp$ по направлению p:

$$h^{(m)}(t) = \mathsf{d}^m f(a+tp)[p], \qquad t \in \mathbb{R}. \tag{14.1.36}$$

Теорема 14.1.10. *Дифференциал $\mathsf{d}^m f(a)$ порядка m функции $f : X \hookrightarrow \mathbb{R}$ выражается через ее частные производные относительно базиса $e = (e_1, ..., e_n)$ формулой*[5]

$$\mathsf{d}^m f(a)[p] = \sum_{i_1,\dots,i_m=1}^{n} \nabla_{i_1} ... \nabla_{i_m} f(a) \cdot \left[\frac{p}{e}\right]^{i_1} \cdot ... \cdot \left[\frac{p}{e}\right]^{i_m} = \sum_{|k|=m} \binom{m}{k} \cdot \nabla^k f(a) \cdot \left[\frac{p}{e}\right]^k \tag{14.1.37}$$

где

$$\binom{m}{k} = \frac{m!}{k_1! \cdot ... \cdot k_n!}$$

— биномиальный коэффициент мультииндекса k, определенный формулой (12.1.11) *(а суммирование ведется по всевозможным мультииндексам k объема m).*

Доказательство. 1. Сначала докажем первое равенство в (14.1.37). Для $m = 1$ это верно в силу формулы (14.1.22):

$$\partial_p f(a) = \lim_{t \to 0} \frac{f(a+tp) - f(a)}{t} = (14.1.22) = \sum_{i_1=1}^{n} \nabla_{i_1} f(a) \cdot \left[\frac{p}{e}\right]^{i_1}$$

[5] Здесь k-моном $\left[\frac{p}{e}\right]^k$ последовательности функционалов $\left[\frac{p}{e}\right]^1, ..., \left[\frac{p}{e}\right]^n$ определяется формулой (12.4.184), а сами функционалы $\left[\frac{p}{e}\right]^i$ определяются формулой (12.2.69).

Предположим, мы доказали это для $m-1$:

$$\partial_p^{m-1} f(a) = \sum_{i_1,...,i_{m-1}=1}^{n} \nabla_{i_{m-1}}...\nabla_{i_1} f(a) \cdot \left[\frac{p}{e}\right]^{i_{m-1}} \cdot ... \cdot \left[\frac{p}{e}\right]^{i_1} \tag{14.1.38}$$

Тогда

$$\partial_p^m f(a) = \lim_{t\to 0} \frac{\partial_p^{m-1} f(a+tp) - \partial_p^{m-1} f(a)}{t} = (14.1.38) =$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{1}{t} \cdot \Bigg(\sum_{i_1,...,i_{m-1}=1}^{n} \nabla_{i_{m-1}}...\nabla_{i_1} f(a+tp) \cdot \left[\frac{p}{e}\right]^{i_{m-1}} \cdot ... \cdot \left[\frac{p}{e}\right]^{i_1} -$$

$$- \sum_{i_1,...,i_{m-1}=1}^{n} \nabla_{i_{m-1}}...\nabla_{i_1} f(a) \cdot \left[\frac{p}{e}\right]^{i_{m-1}} \cdot ... \cdot \left[\frac{p}{e}\right]^{i_1} \Bigg) =$$

$$= \sum_{i_1,...,i_{m-1}=1}^{n} \lim_{t\to 0} \frac{\nabla_{i_{m-1}}...\nabla_{i_1} f(a+tp) - \nabla_{i_{m-1}}...\nabla_{i_1} f(a)}{t} \cdot \left[\frac{p}{e}\right]^{i_{m-1}} \cdot ... \cdot \left[\frac{p}{e}\right]^{i_1} = (14.1.22) =$$

$$= \sum_{i_1,...,i_{m-1}=1}^{n} \left(\sum_{i_m=1}^{n} \nabla_{i_m}...\nabla_{i_1} f(a) \cdot \left[\frac{p}{e}\right]^{i_m} \right) \cdot \left[\frac{p}{e}\right]^{i_{m-1}} \cdot ... \cdot \left[\frac{p}{e}\right]^{i_1} = \sum_{i_1,...,i_m=1}^{n} \nabla_{i_m}...\nabla_{i_1} f(a) \cdot \left[\frac{p}{e}\right]^{i_m} \cdot ... \cdot \left[\frac{p}{e}\right]^{i_1}$$

2. После того, как первое равенство в (14.1.37) доказано, сгруппируем слагаемые в этой сумме так, чтобы последовательности $i_1, ..., i_m$ были представлениями одного мультииндекса и применим формулу (12.1.14):

$$\mathsf{d}^m f(a)[p] = \sum_{\sigma_1,...,\sigma_m=1}^{n} \nabla_{\sigma_1}...\nabla_{\sigma_m} f(a) \cdot \left[\frac{p}{e}\right]^{\sigma_1} \cdot ... \cdot \left[\frac{p}{e}\right]^{\sigma_m} =$$

$$= \sum_{|k|=m} \sum_{\sigma\in \mathsf{Rep}(k)} \nabla_{\sigma_1}...\nabla_{\sigma_m} f(a) \cdot \left[\frac{p}{e}\right]^{\sigma_1} \cdot ... \cdot \left[\frac{p}{e}\right]^{\sigma_m} = \sum_{|k|=m} \frac{m!}{k_1! \cdot ... \cdot k_n!} \cdot \nabla^k f(a) \cdot \left[\frac{p}{e}\right]^k$$

□

Следствие 14.1.11. *Дифференциал второго порядка $\mathsf{d}^2 f(a)$ всякой функции $f : X \hookrightarrow \mathbb{R}$ в произвольной точке $a \in \mathsf{D}(f)$ является квадратичной формой на X.*

Формула Тейлора.

Теорема 14.1.12. (Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа) *Пусть X – евклидово пространство, функция $f : X \hookrightarrow \mathbb{R}$ непрерывно дифференцируема порядка $m+1$ и определена в некоторой окрестности $U_\varepsilon(a)$ точки $a \in X$. Тогда для любой точки $p \in U_\varepsilon(0)$ найдется число $\xi \in [0,1]$ такое что*

$$f(a+p) = f(a) + \frac{1}{1!}\,\mathsf{d} f(a)[p] + \frac{1}{2!}\,\mathsf{d}^2 f(a)[p] + ... + \frac{1}{m!}\,\mathsf{d}^m f(a)[p] + \\ + \frac{1}{(m+1)!}\,\mathsf{d}^{m+1} f(a+\xi p)[p] \tag{14.1.39}$$

- Формула (14.1.39) называется *формулой Тейлора для функции многих переменных с остаточным членом в форме Лагранжа.*

Доказательство. Зафиксируем точку $p \in U_\varepsilon(0)$ и рассмотрим одномерное ограничение функции f в точке a по направлению p:

$$h(t) = f(a+tp), \qquad t \in [0,1]$$

Поскольку все производные по направлению функции f до порядка $m+1$ включительно непрерывны, функция h должна быть непрерывно дифференцируема до порядка $m+1$. Значит, по теореме Тейлора 10.2.2,

$$\underbrace{h(1)}_{\substack{\| \\ f(a+p)}} = \underbrace{h(0)}_{\substack{\| \\ f(a)}} + \frac{1}{1!} \cdot \underbrace{h'(0)}_{\substack{\| \\ \mathsf{d} f(a)[p]}} \cdot t + \frac{1}{2!} \cdot \underbrace{h''(0)}_{\substack{\| \\ \mathsf{d}^2 f(a)[p]}} \cdot t^2 + ... + \frac{1}{m!} \cdot \underbrace{h^{(m)}(0)}_{\substack{\| \\ \mathsf{d}^m f(a)[p]}} \cdot t^m + \frac{1}{m!} \cdot \underbrace{h^{(m+1)}(\xi)}_{\substack{\| \\ \mathsf{d}^{m+1} f(a+\xi\cdot p)[p]}} \cdot t^{m+1}$$

где $\xi \in (0,1)$ – некоторая точка. □

! **14.1.28.** Для случая двух переменных формула (14.1.39) принимает вид

$$f(a+p,b+q) = f(a,b) + \frac{1}{1!}\,\mathsf{d}\,f(a,b)(p,q)+ \\ + \frac{1}{2!}\,\mathsf{d}^2\,f(a,b)(p,q) + ... + \frac{1}{m!}\,\mathsf{d}^m\,f(a,b)(p,q)+ \\ + \frac{1}{(m+1)!}\,\mathsf{d}^{m+1}\,f(a+\xi p,b+\xi q)(p,q) \qquad (14.1.40)$$

где $\xi \in [0,1]$.

А для случая трех переменных – вид

$$f(a+p,b+q,c+r) = f(a,b,c)+\frac{1}{1!}\,\mathsf{d}\,f(a,b,c)(p,q,r)+ \\ +\frac{1}{2!}\,\mathsf{d}^2\,f(a,b,c)(p,q,r)+...+\frac{1}{m!}\,\mathsf{d}^m\,f(a,b,c)(p,q,r)+ \\ + \frac{1}{(m+1)!}\,\mathsf{d}^{m+1}\,f(a+\xi p,b+\xi q,c+\xi r)(p,q,r) \qquad (14.1.41)$$

где $\xi \in [0,1]$.

Теорема 14.1.13. (Тейлора с равномерной оценкой остатка) *Пусть X – евклидово пространство и $f : X \hookrightarrow \mathbb{R}$ – функция, непрерывно дифференцируемая порядка $m+1$. Тогда для всякого компакта $K \subset \mathsf{D}(f)$ найдутся два числа $\varepsilon > 0$ и $M > 0$ такие что справедлива формула*

$$f(x+p) = f(x)+\frac{1}{1!}\,\mathsf{d}\,f(x)[p]+\frac{1}{2!}\,\mathsf{d}^2\,f(x)[p]+...+\frac{1}{m!}\,\mathsf{d}^m\,f(x)[p]+R_m(x,p), \qquad x\in K,\ |p|\leqslant\varepsilon \quad (14.1.42)$$

где функция $R_m(x,p)$, называемая остатком формулы Тейлора порядка *m для f, удовлетворяет следующей оценке:*

$$|R_m(x,p)| \leqslant M\cdot|p|^{m+1}, \qquad x\in K,\ |p|\leqslant\varepsilon$$

- Формула (14.1.42) называется *формулой Тейлора для функции многих переменных с равномерной оценкой остатка.*

Доказательство. Напомним, что по определению на с.808, область определения $\mathsf{D}(f)$ функции f должна быть открытым множеством в X. Воспользуемся следствием 13.3.7, и выберем $\varepsilon > 0$ так, чтобы замкнутая ε-окрестность $B_\varepsilon(K)$ множества K лежала в $\mathsf{D}(f)$:

$$B_\varepsilon(K) \subseteq \mathsf{D}(f)$$

Положим

$$M = \sum_{|k|=m+1}\frac{(m+1)!}{k_1!\cdot...\cdot k_n!}\cdot\max_{y\in B_\varepsilon(K)}|\nabla^k f(y)|$$

Тогда если $x\in K$ и $|p|\leqslant\varepsilon$, то точка $x+\xi p$ ($\xi\in[0,1]$) всегда принадлежит множеству $B_\varepsilon(K)$, поэтому

$$|R_m(x,p)| = (14.1.39) = \left|\frac{1}{(m+1)!}\,\mathsf{d}^{m+1}\,f(x+\xi p)[p]\right| = (14.1.37) =$$

$$= \left|\sum_{|k|=m+1}\frac{(m+1)!}{k_1!\cdot...\cdot k_n!}\cdot\nabla^k f(x+\xi p)\cdot p^k\right| \leqslant \sum_{|k|=m+1}\frac{(m+1)!}{k_1!\cdot...\cdot k_n!}\cdot\underbrace{|\nabla^k f(x+\xi p)|}_{\substack{\wedge\!\!\backslash \\ \max_{y\in B_\varepsilon(K)}|\nabla^k f(y)|}}\cdot\underbrace{|p^k|}_{\substack{\| \\ \left|p_1^{k_1}\cdot...\cdot p_n^{k_n}\right| \\ \| \\ \left|p_1^{k_1}\right|\cdot...\cdot\left|p_n^{k_n}\right| \\ \wedge\!\!\backslash \\ |p|^{k_1}\cdot...\cdot|p|^{k_n} \\ \| \\ |p|^{m+1}}} \leqslant$$

$$\leqslant \underbrace{\sum_{|k|=m+1}\frac{(m+1)!}{k_1!\cdot...\cdot k_n!}\cdot\max_{y\in B_\varepsilon(K)}|\nabla^k f(y)|}_{\substack{\| \\ M}}\cdot|p|^{m+1} = M\cdot|p|^{m+1}$$

$\square$

Теорема 14.1.14. (Тейлора с остаточным членом в форме Пеано) *Пусть X – евклидово пространство и $f : X \hookrightarrow \mathbb{R}$ – функция, дифференцируемая порядка $m+1$. Тогда для всякой точки $a \in \mathsf{D}(f)$*

$$f(a+p) = f(a) + \frac{1}{1!}\,\mathsf{d}\,f(a)[p] + \frac{1}{2!}\,\mathsf{d}^2\,f(a)[p] + \ldots + \frac{1}{m!}\,\mathsf{d}^m\,f(a)[p] + \underset{x\to a}{\mathbf{o}}(|p|^m) \qquad (14.1.43)$$

- Формула (14.1.43) называется *формулой Тейлора для функции многих переменных с остаточным членом в форме Пеано.*

Доказательство. Здесь надо просто проверить, что остаток $R_m(x,p)$ в формуле Тейлора (14.1.42) является бесконечно малой функцией порядка $|p|^m$ при $p \to 0$:

$$R_m(x,p) = \underset{x\to a}{\mathbf{o}}(|p|^m)\,.$$

Действительно,

$$\left|\frac{R_m(x,p)}{|p|^m}\right| \leqslant \frac{M\cdot|p|^{m+1}}{|p|^m} = M\cdot|p| \underset{p\to 0}{\longrightarrow} 0.$$

□

(c) Дифференциальные выражения и формальный дифференциал

- *Дифференциальными выражениями* называются конечные последовательности символов, составленные из приведенных[6] числовых выражений и специального символа d, называемого *формальным дифференциалом*, по следующим индуктивным правилам:

  (0) всякое приведенное числовое выражение $\mathcal{F}$ считается дифференциальным выражением;

  (1) для любого дифференциального выражения $\mathcal{U}$ запись
  $$\mathsf{d}(\mathcal{U})$$
  считается дифференциальным выражением;

  (2) если $\mathcal{U}$ и $\mathcal{V}$ — дифференциальные выражения, то записи
  $$(\mathcal{U})+(\mathcal{V}), \quad (\mathcal{U})-(\mathcal{V}), \quad (\mathcal{U})\cdot(\mathcal{V})$$
  также считаются дифференциальными выражениями.

- Пусть x – переменная. Запись $\mathsf{d}\,x$ является дифференциальным выражением, и мы называем его *элементарным дифференциалом.*

- Пусть x – переменная. Для всякого числа $k \in \mathbb{Z}_+$ введем обозначение
  $$\mathsf{d}\,x^k = (\mathsf{d}\,x)^k = \underbrace{(\mathsf{d}\,x)\cdot\ldots\cdot(\mathsf{d}\,x)}_{k\text{ множителей}}. \qquad (14.1.44)$$
  Это будет тоже дифференциальное выражение, и мы называем его *степенью элементарного дифференциала.*

- Пусть $x_1,\ldots,x_n$ – переменные. Для всякого мультииндекса[7] $k \in \mathsf{M}_n$ введем обозначение
  $$\mathsf{d}\,x^k == \underbrace{(\mathsf{d}\,x_1)^{k_1}\cdot\ldots\cdot(\mathsf{d}\,x_n)^{k_n}}_{n\text{ множителей}}. \qquad (14.1.45)$$
  И это будет дифференциальное выражение, и мы называем его *мультистепенью элементарных дифференциалов.*

Тождественное равенство дифференциальных выражений. Напомним, что понятие мультииндекса мы определили на с.663.

- Два дифференциальных выражения $\mathcal{U}$ и $\mathcal{V}$ называются *тождественно равными*, и изображается это формулой
  $$\mathcal{U} \equiv \mathcal{V},$$
  если их можно отождествить с помощью следующих индуктивных правил (здесь $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$ – числовые выражения, а $\mathcal{U}$, $\mathcal{V}$, $\mathcal{W}$ – дифференциальные):

  (a) числовые выражения $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$ тождественно равны как дифференциальные выражения тогда и только тогда, когда они тождественно равны как числовые выражения (то есть определяют одну и ту же стандартную функцию),

  (b) тождества эквивалентности:
  $$\mathcal{U} \equiv \mathcal{U} \qquad (14.1.46)$$

---

[6]Приведенные числовые выражения были определены нами на с.308.

[7]Понятие мультииндекса было определено на с.663.

$$\mathcal{U} \equiv \mathcal{V} \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{V} \equiv \mathcal{U} \tag{14.1.47}$$

$$\mathcal{U} \equiv \mathcal{V} \ \& \ \mathcal{V} \equiv \mathcal{W} \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{U} \equiv \mathcal{W} \tag{14.1.48}$$

(c) алгебраические тождества:

$$\mathcal{U} + \mathcal{V} \equiv \mathcal{V} + \mathcal{U} \tag{14.1.49}$$

$$(\mathcal{U} + \mathcal{V}) + \mathcal{W} \equiv \mathcal{U} + (\mathcal{V} + \mathcal{W}) \tag{14.1.50}$$

$$0 + \mathcal{V} \equiv \mathcal{V} \equiv \mathcal{V} + 0 \tag{14.1.51}$$

$$\mathcal{U} \cdot \mathcal{V} \equiv \mathcal{V} \cdot \mathcal{U} \tag{14.1.52}$$

$$\mathcal{U} \cdot \Big(\mathcal{V} \cdot \mathcal{W} \Big) \equiv \Big(\mathcal{U} \cdot \mathcal{V} \Big) \cdot \mathcal{W} \tag{14.1.53}$$

$$1 \cdot \mathcal{V} \equiv \mathcal{V} \equiv \mathcal{V} \cdot 1 \tag{14.1.54}$$

$$\Big(\mathcal{U} + \mathcal{V} \Big) \cdot \mathcal{W} \equiv \mathcal{U} \cdot \mathcal{W} + \mathcal{V} \cdot \mathcal{W} \tag{14.1.55}$$

(d) тождества подстановки: если $\mathcal{U}_1 \equiv \mathcal{U}_2$ и $\mathcal{V}_1 \equiv \mathcal{V}_2$, то

$$\mathsf{d}\,\mathcal{U}_1 \equiv \mathsf{d}\,\mathcal{U}_2 \tag{14.1.56}$$

$$\mathcal{U}_1 + \mathcal{V}_1 \equiv \mathcal{U}_2 + \mathcal{V}_2 \tag{14.1.57}$$

$$\mathcal{U}_1 - \mathcal{V}_1 \equiv \mathcal{U}_2 - \mathcal{V}_2 \tag{14.1.58}$$

$$\mathcal{U}_1 \cdot \mathcal{V}_1 \equiv \mathcal{U}_2 \cdot \mathcal{V}_2 \tag{14.1.59}$$

(e) правила вычисления дифференциалов:

— дифференциал $\mathsf{d}\,a$ от любого параметра a всегда нулевой:

$$\mathsf{d}\,a \equiv 0, \tag{14.1.60}$$

— дифференциал $\mathsf{d}\,x$ от всякой свободной переменной x называется *элементарным дифференциалом*; отдельно постулируется, что дифференциал от всякого элементарного дифференциала всегда нулевой:

$$\mathsf{d}(\mathsf{d}\,x) \equiv 0, \tag{14.1.61}$$

— дифференциал от суммы, разности и произведения дифференциальных выражений подчиняется правилам:

$$\mathsf{d}\Big(\mathcal{U} \pm \mathcal{V} \Big) \equiv \mathsf{d}\,\mathcal{U} \pm \mathsf{d}\,\mathcal{V} \tag{14.1.62}$$

$$\mathsf{d}\Big(\mathcal{U} \cdot \mathcal{V} \Big) \equiv \Big(\mathsf{d}\,\mathcal{U} \Big) \cdot \mathcal{V} + \mathcal{U} \cdot \Big(\mathsf{d}\,\mathcal{V} \Big) \tag{14.1.63}$$

— дифференциалы от элементарных композиций вычисляются по следующим правилам:

Таблица дифференциалов:
здесь α и a – параметры

$$\mathsf{d}\Big(\mathcal{F}^{\alpha} \Big) \equiv \alpha \cdot \mathcal{F}^{\alpha-1} \cdot \mathsf{d}\,\mathcal{F} \tag{14.1.64}$$

$$\mathsf{d}\Big(a^{\mathcal{F}} \Big) \equiv \ln a \cdot a^{\mathcal{F}} \cdot \mathsf{d}\,\mathcal{F} \tag{14.1.65}$$

$$\mathsf{d}\Big(e^{\mathcal{F}} \Big) \equiv e^{\mathcal{F}} \cdot \mathsf{d}\,\mathcal{F} \tag{14.1.66}$$

$$\mathsf{d}\Big(\log_a \mathcal{F} \Big) \equiv \frac{1}{\mathcal{F} \cdot \ln a} \cdot \mathsf{d}\,\mathcal{F} \tag{14.1.67}$$

$$\mathsf{d}\Big(\ln \mathcal{F} \Big) \equiv \frac{1}{\mathcal{F}} \cdot \mathsf{d}\,\mathcal{F} \tag{14.1.68}$$

$$\mathsf{d}\Big(\sin \mathcal{F} \Big) \equiv \cos \mathcal{F} \cdot \mathsf{d}\,\mathcal{F} \tag{14.1.69}$$

$$\mathsf{d}\Big(\cos \mathcal{F} \Big) \equiv -\sin \mathcal{F} \cdot \mathsf{d}\,\mathcal{F} \tag{14.1.70}$$

$$\mathsf{d}\Big(\operatorname{tg} \mathcal{F} \Big) \equiv \frac{1}{\cos^2 \mathcal{F}} \cdot \mathsf{d}\,\mathcal{F} \tag{14.1.71}$$

$$\mathsf{d}\Big(\operatorname{ctg} \mathcal{F} \Big) \equiv -\frac{1}{\sin^2 \mathcal{F}} \cdot \mathsf{d}\,\mathcal{F} \tag{14.1.72}$$

$$\mathsf{d}\Big(\arcsin \mathcal{F} \Big) \equiv \frac{1}{\sqrt{1-\mathcal{F}^2}} \cdot \mathsf{d}\,\mathcal{F} \tag{14.1.73}$$

$$\mathsf{d}\Big(\arccos \mathcal{F} \Big) \equiv -\frac{1}{\sqrt{1-\mathcal{F}^2}} \cdot \mathsf{d}\,\mathcal{F} \tag{14.1.74}$$

$$\mathsf{d}\Big(\operatorname{arctg} \mathcal{F} \Big) \equiv \frac{1}{1+\mathcal{F}^2} \cdot \mathsf{d}\,\mathcal{F} \tag{14.1.75}$$

$$\mathsf{d}\Big(\operatorname{arcctg} \mathcal{F} \Big) \equiv -\frac{1}{1+\mathcal{F}^2} \cdot \mathsf{d}\,\mathcal{F} \tag{14.1.76}$$

f) линейная независимость мультистепеней переменных: для любых переменных $x_1, ..., x_n$ и любых двух конечных семейств числовых выражений $\mathcal{F}_k$ и $\mathcal{G}_k$, индексированных мультииндексами $k \in \mathsf{M}_n$,

$$\sum_k \mathcal{F}_k \,\mathsf{d}\,x^k \equiv \sum_k \mathcal{G}_k \,\mathsf{d}\,x^k \quad \Longleftrightarrow \quad \forall k \quad \mathcal{F}_k \equiv \mathcal{G}_k \tag{14.1.77}$$

$\diamond$ **14.1.29.** Из (14.1.61) и (14.1.63) следует, что дифференциал от любой мультистепени элементарных дифференциалов равен нулю:

$$\mathsf{d}\Big(\mathsf{d}\,x^k \Big) = 0.$$

Отсюда, в свою очередь, для всякого дифференциального выражения $\mathcal{U}$ мы получаем формулу:

$$\mathsf{d}\Big(\mathcal{U} \cdot \mathsf{d}\,x^k \Big) = \Big(\mathsf{d}\,\mathcal{U} \Big) \cdot \mathsf{d}\,x^k \tag{14.1.78}$$

$\diamond$ **14.1.30.** Всякий параметр a можно выносить за знак дифференциала:

$$\mathsf{d}\big(a \cdot \mathcal{V} \big) \equiv a \cdot \mathsf{d}\,\mathcal{V} \tag{14.1.79}$$

Доказательство.

$$\mathsf{d}\big(a \cdot \mathcal{V} \big) \equiv (14.1.63) \equiv \overbrace{\mathsf{d}\,a}^{\substack{0 \\ \parallel\ (14.1.60)}} \cdot \mathcal{V} + a \cdot \mathsf{d}\,\mathcal{V} =$$
$$= 0 \cdot \mathcal{V} + a \cdot \mathsf{d}\,\mathcal{V} = 0 + a \cdot \mathsf{d}\,\mathcal{V} = (14.1.51) = a \cdot \mathsf{d}\,\mathcal{V}$$

$\Box$

◇ **14.1.31.** Для числового выражения $\mathcal{F}$ и дифференциального выражения $\mathcal{U}$ справедливо равенство

$$\mathsf{d}\left(\frac{\mathcal{U}}{\mathcal{F}}\right) \equiv \frac{\left(\mathsf{d}\,\mathcal{U}\right)\cdot\mathcal{F}-\mathcal{U}\cdot\left(\mathsf{d}\,\mathcal{F}\right)}{\mathcal{F}^2} \qquad (14.1.80)$$

Дифференциалы числового выражения. Правила (14.1.60)–(14.1.76) определяют дифференциал $\mathsf{d}\,\mathcal{F}$ первого порядка и дифференциалы $\mathsf{d}^m\,\mathcal{F}$ произвольного порядка m для произвольных числовых выражений $\mathcal{F}$. Для этих конструкций справедливы следующие утверждения.

Следующее утверждение аналогично теореме (14.1.5):

Теорема 14.1.15. *Дифференциал всякого приведенного числового выражения $\mathcal{F}$ над переменными $x_1, ..., x_n$ раскладывается по элементарным дифференциалам по формуле*

$$\mathsf{d}\,\mathcal{F} \equiv \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial\mathcal{F}}{\partial x_i}\cdot\mathsf{d}\,x_i. \qquad (14.1.81)$$

Доказательство. Это доказывается индукцией по построению $\mathcal{F}$.

1. Если $\mathcal{F}$ представляет собой десятичную запись числа или параметр или переменную, то это очевидно верно.

2. Если это верно для какого-то выражения $\mathcal{F}$, то для выражений $\mathcal{F}^\alpha$, $a^{\mathcal{F}}$, $\mathcal{F}$ и остальных в списке (14.1.64)–(14.1.76) это будет верно в силу этих самых формул (14.1.64)–(14.1.76).

3. Если это верно для каких-то двух числовых выражений $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$, то для их суммы, разности, и произведения это будет верно в силу правил (14.1.62) и (14.1.63). Для отношения $\frac{\mathcal{G}}{\mathcal{F}}$ это тоже будет верно, поскольку его можно представить в виде произведения $\mathcal{G}\cdot\mathcal{F}^{-1}$, а затем применить правило для $\mathcal{F}^\alpha$ с $\alpha = -1$ и для произведения.

Мы перебрали все правила, по которым строятся приведенные числовые выражения. □

Следствие 14.1.16. *Для всякого числового выражения $\mathcal{F}$ над переменной x справедливо равенство*

$$\mathsf{d}\,\mathcal{F} \equiv \frac{\partial\mathcal{F}}{\partial x}\cdot\mathsf{d}\,x \qquad (14.1.82)$$

Пусть $\mathcal{F}$ — числовое выражение над переменными $x_1, ..., x_n$. Для всякого мультииндекса $k \in \mathsf{M}_n$ определим частую производную $\frac{\partial^k\mathcal{F}}{(\partial x)^k}$ формулой

$$\frac{\partial^k\mathcal{F}}{\partial x^k} = \frac{\partial^{|k|}\mathcal{F}}{\partial x_n^{k_n}...\partial x_1^{k_1}} \qquad (14.1.83)$$

Следующее утверждение аналогично теореме 14.1.10:

Теорема 14.1.17. *Дифференциал $\mathsf{d}^m\,\mathcal{F}$ порядка m всякого приведенного числового выражения $\mathcal{F}$ над переменными $x_1, ..., x_n$ раскладывается по элементарным дифференциалам по формуле*

$$\mathsf{d}^m\,\mathcal{F} \equiv \sum_{|k|=m} \binom{m}{k}\cdot\frac{\partial^k\mathcal{F}}{\partial x^k}\cdot(\mathsf{d}\,x)^k, \qquad (14.1.84)$$

где

$$\binom{m}{k} = \frac{m!}{k_1!\cdot\ldots\cdot k_n!}$$

— биномиальный коэффициент мультииндекса k, определенный формулой (12.1.11) *(а суммирование ведется по всевозможным мультииндексам k объема m)*

Теорема 14.1.18. *Если $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$ — числовые выражения, причем $\mathcal{G}$ — одноместное над переменной y, то*

$$\mathsf{d}\left(\mathcal{G}\Big|_{y=\mathcal{F}}\right) \equiv \left(\frac{\partial}{\partial y}\mathcal{G}\right)\Big|_{y=\mathcal{F}}\cdot\mathsf{d}\,\mathcal{F} \qquad (14.1.85)$$

Разложение по мультистепеням элементарных дифференциалов.

Теорема 14.1.19. *Всякое дифференциальное выражение $\mathcal{U}$ над переменными $x_1, ..., x_n$ единственным образом раскладывается по мультистепеням элементарных дифференциалов*

$$\mathcal{U} \equiv \sum_{k\in\mathsf{M}_n} \mathcal{F}_k\cdot\mathsf{d}\,x^k, \qquad (14.1.86)$$

где коэффициенты $\mathcal{F}_k$ — числовые выражения над переменными $x_1, ..., x_n$.

Доказательство. Единственность этого разложения следует из условия (14.1.77), поэтому нужно доказать только существование. Это делается индукцией по построению $\mathcal{U}$.

1. Если $\mathcal{U}$ – числовое выражение, то это очевидно.

2. Если это верно для каких-то дифференциальных выражений $\mathcal{U}$ и $\mathcal{V}$, то для $\mathcal{U}+\mathcal{V}, \mathcal{U}-\mathcal{V}, \mathcal{U}\cdot\mathcal{V}$ это тоже верно в силу формул (14.1.49)-(14.1.55), позволяющих перегруппировывать слагаемые и множители.

3. Если это верно для какого-то дифференциального выражения $\mathcal{U}$, то для его дифференциала мы получаем:

$$\begin{aligned}
\mathsf{d}\,\mathcal{U} \equiv (14.1.56) \equiv \mathsf{d}\sum_{k\in\mathsf{M}_n}\mathcal{F}_k\cdot\mathsf{d}\,x^k \equiv \\
\equiv (14.1.62) \equiv \sum_{k\in\mathsf{M}_n}\mathsf{d}\left(\mathcal{F}_k\cdot\mathsf{d}\,x^k\right) \equiv \\
\equiv (14.1.78) \equiv \sum_{k\in\mathsf{M}_n}\mathsf{d}\left(\mathcal{F}_k\right)\cdot\mathsf{d}\,x^k \equiv \\
\equiv (14.1.86) \equiv \sum_{k\in\mathsf{M}_n}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\mathcal{F}_k}{\partial x_i}\cdot\mathsf{d}\,x_i\cdot\mathsf{d}\,x^k,
\end{aligned}$$

и это эквивалентно записи (14.1.86). Мы перебрали все шаги индуктивного определения дифференциального выражения. □

Однородные дифференциальные выражения.

- *Степенью* $\deg\mathcal{U}$ *дифференциального выражения* $\mathcal{U}$ называется максимальный объем мультииндекса k в разложении (14.1.86) с ненулевым коэффициентом $\mathcal{F}_k$.
- Дифференциальное выражение $\mathcal{U}$ от переменной x называется *однородным*, если в разложении (14.1.86) слагаемые со степенями, меньшими $\deg\mathcal{U}$, равны нулю:

$$k < \deg\mathcal{U} \quad\Longrightarrow\quad \mathcal{F}_k = 0.$$

Или, иными словами, если разложение (14.1.86) принимает вид

$$\mathcal{U} \equiv \sum_{|k|=n} \mathcal{F}_k \cdot \mathsf{d}\,x^k, \qquad (14.1.87)$$

где n – степень выражения $\mathcal{U}$.

Понятно, что дифференциальное выражение $\mathcal{U}$ степени n от переменной x однородно тогда и только тогда, когда оно представимо в виде

$$\mathcal{U} \equiv \mathcal{P}\,\mathsf{d}\,x^n \qquad (14.1.88)$$

где $\mathcal{P}$ — некоторое числовое выражение от переменной x.

Область допустимых значений переменной в дифференциальном выражении.

- *Областью допустимых значений переменных* $\mathsf{D}(\mathcal{U})$ в дифференциальном выражении $\mathcal{U}$ над переменными $x_1,...,x_n$ называется пересечение областей допустимых значений переменных в числовых выражениях $\mathcal{F}_k$, участвующих в разложении (14.1.86):

$$\mathsf{D}(\mathcal{U}) = \bigcap_k \mathsf{D}(\mathcal{F}_k) \qquad (14.1.89)$$

Связь с дифференциалом функции от одной переменной. Дифференциал выражения связан с дифференциалом функции от одной переменной, определенным формулой (10.2.64), следующей теоремой.

Теорема 14.1.20. *Пусть стандартная функция f определяется числовым выражением $\mathcal{F}$ от переменной x (с заданным фиксированным набором значений параметров $q_1,...,q_s$),*

$$f(x) = \mathcal{F},$$

и при этом $\mathcal{F}$ не содержит переменной p и (при заданных значениях параметров $q_1,...,q_s$) его дифференциал порядка $k \in \mathbb{Z}_+$ определен на интервале (a,b):

$$(a,b) \subseteq \mathsf{D}(\mathsf{d}^k\,\mathcal{F}). \qquad (14.1.90)$$

Тогда дифференциал функции f порядка k определен на интервале (a,b), и получается из дифференциала выражения $\mathcal{F}$ заменой $\mathsf{d}\,x$ на p:

$$\mathsf{d}^k\,f(x)[p] = \mathsf{d}^k\,\mathcal{F}\Big|_{\mathsf{d}\,x=p}, \qquad x \in (a,b),\ p \in \mathbb{R}. \qquad (14.1.91)$$

◇ **14.1.32.** Найдем дифференциалы до 3 поряка включительно от функции

$$f(x) = \sin x$$

Первый дифференциал определяющего эту функцию выражения выписывается из таблицы дифференциалов:

$$\mathsf{d}\sin x = \cos x \cdot \mathsf{d}\,x$$

Второй получается применением правил вычисления:

$$\mathsf{d}^2\sin x = \mathsf{d}\,(\cos x\cdot\mathsf{d}\,x) = (14.1.78) = \\ = \mathsf{d}\,(\cos x)\cdot\mathsf{d}\,x = -\sin x\cdot\mathsf{d}\,x\cdot\mathsf{d}\,x = -\sin x\cdot(\mathsf{d}\,x)^2$$

Третий:

$$\mathsf{d}^3\sin x = \mathsf{d}\left(-\sin x\cdot(\mathsf{d}\,x)^2\right) = (14.1.78) = \\ = -\,\mathsf{d}\,(\sin x)\cdot(\mathsf{d}\,x)^2 = -\cos x\cdot\mathsf{d}\,x\cdot(\mathsf{d}\,x)^2 = \\ = -\cos x\cdot(\mathsf{d}\,x)^3$$

Теперь можно выписать дифференциалы функции f:

$$\begin{aligned}
\mathsf{d}^0\,f(x)[p] &= f(x) = \sin x \\
\mathsf{d}^1\,f(x)[p] &= \cos x\cdot\mathsf{d}\,x\Big|_{\mathsf{d}\,x=p} = \\
&= \cos x\cdot p \\
\mathsf{d}^2\,f(x)[p] &= -\sin x\cdot(\mathsf{d}\,x)^2\Big|_{\mathsf{d}\,x=p} = \\
&= -\sin x\cdot p^2 \\
\mathsf{d}^3\,f(x)[p] &= -\cos x\cdot(\mathsf{d}\,x)^3\Big|_{\mathsf{d}\,x=p} = \\
&= -\cos x\cdot p^3
\end{aligned}$$

Эти формулы позволяют выписать формулу Тейлора-Лагранжа порядка 2 для этой функции:

$$\sin(x+p) = \sin x + \cos x\cdot p - \frac{1}{2}\sin x\cdot p^2 - \\ -\frac{1}{6}\cos(x+\theta p)\cdot p^3, \quad \theta\in[0,1]$$

В частности, в точке $x = \frac{\pi}{4}$ получаем:

$$\sin\left(\frac{\pi}{4}+p\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot p - \frac{\sqrt{2}}{4}\cdot p^2 - \\ -\frac{1}{6}\cos\left(\frac{\pi}{4}+\theta p\right)\cdot p^3, \quad \theta\in[0,1]$$

◇ **14.1.33.** Найдем дифференциалы до 3 порядка включительно от функции

$$f(x) = \operatorname{arctg} x$$

Первый дифференциал определяющего ее выражения выписывается из таблицы дифференциалов:

$$\mathsf{d} \operatorname{arctg} x = \frac{1}{1+x^2} \cdot \mathsf{d}\, x$$

Второй получается применением правил вычисления:

$$\mathsf{d}^2 \operatorname{arctg} x = \mathsf{d}\left(\frac{1}{1+x^2} \cdot \mathsf{d}\, x\right) = \\ = \mathsf{d}\left(\frac{1}{1+x^2}\right) \cdot \mathsf{d}\, x = -\frac{2x}{(1+x^2)^2} \cdot \mathsf{d}\, x \cdot \mathsf{d}\, x = \\ = -\frac{2x}{(1+x^2)^2} \cdot (\mathsf{d}\, x)^2$$

Третий:

$$\mathsf{d}^3 \operatorname{arctg} x = \mathsf{d}\left(-\frac{2x}{(1+x^2)^2} \cdot (\mathsf{d}\, x)^2\right) = \\ = \mathsf{d}\left(-\frac{2x}{(1+x^2)^2}\right) \cdot (\mathsf{d}\, x)^2 = \\ = \frac{-2(1+x^2)^2 + 2x \cdot 2(1+x^2) \cdot 2x}{(1+x^2)^4} \cdot \mathsf{d}\, x \cdot (\mathsf{d}\, x)^2 = \\ = \frac{-2(1+x^2) + 2x \cdot 2 \cdot 2x}{(1+x^2)^3} \cdot (\mathsf{d}\, x)^3 = \\ = \frac{-2 - 2x^2 + 8x^2}{(1+x^2)^3} \cdot (\mathsf{d}\, x)^3 = \\ = 2 \cdot \frac{3x^2 - 1}{(1+x^2)^3} \cdot (\mathsf{d}\, x)^3$$

Теперь можно выписать дифференциалы функции f:

$$\mathsf{d}^0 f(x)[p] = f(x) = \operatorname{arctg} x$$

$$\mathsf{d}^1 f(x)[p] = \frac{1}{1+x^2} \cdot \mathsf{d}\, x\Big|_{\mathsf{d}\, x = p} = \\ = \frac{1}{1+x^2} \cdot p$$

$$\mathsf{d}^2 f(x)[p] = -\frac{2x}{(1+x^2)^2} \cdot (\mathsf{d}\, x)^2\Big|_{\mathsf{d}\, x = p} = \\ = -\frac{2x}{(1+x^2)^2} \cdot p^2$$

$$\mathsf{d}^3 f(x)[p] = 2 \cdot \frac{3x^2-1}{(1+x^2)^3} \cdot (\mathsf{d}\, x)^3\Big|_{\mathsf{d}\, x = p} = \\ = 2 \cdot \frac{3x^2-1}{(1+x^2)^3} \cdot p^3$$

Формула Тейлора-Лагранжа порядка 2 для этой функции имеет поэтому вид:

$$\operatorname{arctg}(x+p) = \operatorname{arctg} x + \frac{1}{1+x^2} \cdot p - \frac{1}{2} \cdot \frac{2x}{(1+x^2)^2} \cdot p^2 + \\ + \frac{1}{3} \cdot \frac{3(x+\theta p)^2 - 1}{(1+(x+\theta p)^2)^3} \cdot p^3$$

Можно выписать ее в конкретной точке, например, в $x = 1$:

$$\operatorname{arctg}(1+p) = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \cdot p - \frac{1}{4} \cdot p^2 + \\ + \frac{1}{3} \cdot \frac{3(1+\theta p)^2 - 1}{(1+(1+\theta p)^2)^3} \cdot p^3$$

Связь с дифференциалом функции многих переменных. Аналог теоремы 14.1.21 для многих переменных выглядит так:

Теорема 14.1.21. *Пусть стандартная функция f определяется числовым выражением $\mathcal{F}$ от переменных $(x_1, ..., x_n)$ (с заданным фиксированным набором значений параметров $q_1, ..., q_s$),*

$$f(x) = \mathcal{F},$$

и при этом $\mathcal{F}$ не содержит переменных $(p_1, ..., p_n)$ и (при заданных значениях параметров $q_1, ..., q_s$) его дифференциал порядка $k \in \mathbb{Z}_+$ определен на открытом множестве $U \subseteq \mathbb{R}^n$:

$$U \subseteq \mathsf{D}(\mathsf{d}^k \mathcal{F}). \tag{14.1.92}$$

Тогда дифференциал функции f порядка k определен на множестве U, и получается из дифференциала выражения $\mathcal{F}$ заменой $\mathsf{d}\, x_i$ на p_i:

$$\mathsf{d}^k f(x_1, ..., x_n)[p_1, ..., p_n] = \mathsf{d}^k \mathcal{F}\Big|_{\mathsf{d}\, x_i = p_i}, \\ x \in U, \ p \in \mathbb{R}^n. \tag{14.1.93}$$

⊳⊳ **14.1.34.** Найдите дифференциалы 1-го, 2-го и 3-го порядка для функций:

1) $f(x,y) = x^2 + y^3 + x \cdot y^2$;
2) $f(x,y,z) = xy^2z^3$;
3) $f(x,y,z) = x + y^2 + z^3$;
4) $f(x,y) = x \cdot \sin y$;
5) $f(x,y) = \frac{x}{y}$;
6) $f(x,y) = x + \cos y$;
7) $f(x,y) = x^y$;
8) $f(x,y,z) = \frac{xy}{z}$.

(d) Локальный экстремум на евклидовом пространстве

- Пусть X – евклидово пространства и функция $f : X \hookrightarrow \mathbb{R}$ определена в некоторой окрестности точки $a \in X$. Точка a называется
  — *точкой локального минимума функции* f если для некоторой окрестности $U_\varepsilon(a)$ выполняется неравенство
  $$f(a) \leqslant f(x), \quad x \in U_\varepsilon(a)$$
  — *точкой локального максимума функции* f если для некоторой окрестности $U_\varepsilon(a)$ выполняется неравенство
  $$f(a) \geqslant f(x), \quad x \in U_\varepsilon(a)$$
  — *точкой локального экстремума функции* f если она является точкой локально минимума или локального максимума функции f.

Условия локального экстремума в терминах свойств дифференциалов.

Теорема 14.1.22 (необходимое условие локального экстремума)**.** *Пусть функция f дифференцируема в точке $a \in \mathbb{R}^n$. Тогда если a – точка локального экстремума функции f, то первый дифференциал функции f в точке a равен нулю:*

$$\mathsf{d}\, f(a) = 0 \tag{14.1.94}$$

Иными словами, производная по всякому направлению $p \in \mathbb{R}^n$ функции f в точке a должна быть равна нулю:

$$\forall p \in \mathbb{R}^n \qquad \mathsf{d}\, f(a)[p] = \partial_p f(a) = 0 \tag{14.1.95}$$

Доказательство. Если $p = 0$, то производная по такому направлению будет нулем, потому что дифференцировать приходится константу:

$$\mathsf{d}\, f(a)[0] = \partial_0 f(a) = \lim_{t\to 0} \frac{f(a+tp) - f(a)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{f(a) - f(a)}{t} = 0$$

Поэтому важно рассмотреть случай, когда $p \neq 0$. Пусть f имеет, например, локальный минимум в точке a:

$$f(a) \leqslant f(x), \quad x \in U_\varepsilon(a)$$

Тогда для произвольного $p \neq 0$ функция

$$h(t) = f(a + tp)$$

будет иметь локальный минимум в точке $t = 0$:

$$h(0) = f(a) \leqslant f(a+tp) = h(t), \quad t \in U_{\frac{\varepsilon}{|p|}}(0)$$

Значит, по теореме Ферма 5.1.5, h должна иметь нулевую производную в точке $t = 0$:

$$h'(0) = 0$$

Это и означает выполнение (14.1.95). □

Теорема 14.1.23 (достаточное условие локального экстремума)**.** *Пусть функция f – непрерывно дифференцируемая порядка 2 в некоторой окрестности точки $a \in \mathbb{R}^n$ и ее первый дифференциал в точке a равен нулю:*

$$\mathsf{d}\, f(a) = 0$$

Тогда

(i) если второй дифференциал $\mathsf{d}^2 f(a)$ функции f в точке a представляет собой положительно определенную квадратичную форму,

$$\forall p \neq 0 \qquad \mathsf{d}^2 f(a)[p] = \partial_p^2 f(a) > 0, \tag{14.1.96}$$

то a – точка локального минимума функции f;

(ii) *если второй дифференциал* $\mathsf{d}^2 f(a)$ *функции* f *в точке* a *представляет собой отрицательно определенную квадратичную форму,*

$$\forall p \neq 0 \qquad \mathsf{d}^2 f(a)[p] = \partial_p^2 f(a) < 0, \tag{14.1.97}$$

то a *– точка локального максимума функции* f*;*

(iii) *если второй дифференциал* $\mathsf{d}^2 f(a)$ *функции* f *в точке* a *по некоторым направлениям* p *положителен, а по другим отрицателен,*

$$\exists p, q \in \mathbb{R}^n \qquad \mathsf{d}^2 f(a)[p] = \partial_p^2 f(a) > 0 \quad \& \quad \mathsf{d}^2 f(a)[p] = \partial_p^2 f(a) < 0, \tag{14.1.98}$$

то в точке a *нет локального экстремума функции* f*.*

! **14.1.35.** Теорема 14.1.23 ничего не говорит про условия

$$\forall p \neq 0 \qquad \mathsf{d}^2 f(a)[p] \leqslant 0,$$

и

$$\forall p \neq 0 \qquad \mathsf{d}^2 f(a)[p] \geqslant 0.$$

Это неспроста: несмотря на интуитивно ожидаемую в этих случаях картину нестрогих локальных экстремумов, эти условия ее не гарантируют. Мы обсуждаем это ниже в примерах 14.1.37 и 14.1.38.

Для доказательства нам понадобится следующая

Лемма 14.1.24. *Пусть функция* $h : \mathbb{R} \hookrightarrow \mathbb{R}$ *– непрерывно дифференцируемая порядка 2 на отрезке* $[0, \delta]$*, и*

1) $h'(0) = 0$*,*

2) $\exists t \in [0, \delta] \quad h(0) > h(t)$*,*

Тогда

3) $\exists t \in [0, \delta] \quad h''(t) < 0$*.*

Доказательство. Предположим, что условие 3 не выполняется, то есть, что

$$h''(t) \geqslant 0, \qquad t \in [0, \delta]$$

Тогда

$$h'(t) - h'(0) = \big(\text{теорема Лагранжа 5.1.7}\big) = h''(\xi) \cdot (t - 0) \geqslant 0, \qquad t \in [0, \delta]$$

$$\Downarrow$$

$$h'(t) \geqslant h'(0) = 0, \qquad t \in [0, \delta]$$

$$\Downarrow$$

$$h(t) - h(0) = \big(\text{теорема Лагранжа 5.1.7}\big) = h'(\xi) \cdot (t - 0) \geqslant 0, \qquad t \in [0, \delta]$$

$$\Downarrow$$

$$h(t) \geqslant h(0), \qquad t \in [0, \delta]$$

Последнее противоречит условию 2. □

Доказательство теоремы 14.1.23. Рассмотрим какой-нибудь замкнутый шар $\overline{U}_\varepsilon(a)$ с центром в a, на котором функция f определена:

$$\overline{U}_\varepsilon(a) = \{x \in \mathbb{R}^n : \quad |x - a| \leqslant \varepsilon\}$$

Пусть S_ε обозначает его границу:

$$S_\varepsilon = \{x \in \mathbb{R}^n : \quad |x - a| = \varepsilon\}$$

Рассмотрим функцию

$$h_p(t) = f(a + tp), \qquad p \in S_\varepsilon, t \in [0, 1]$$

Из (14.1.36) получаем

$$h_p'(t) = \sum_{i=1}^{n} \nabla_i f(a+tp) \cdot p^i, \qquad h_p''(t) = \sum_{i,j=1}^{n} \nabla_j \nabla_i f(a+tp) \cdot p^j \cdot p^i$$

Из последней формулы следует, между прочим, что h_p'' – непрерывная функция от переменных $(p,t) \in S_\varepsilon \times [0,1]$.

1. Предположим теперь, что выполняется условие (i), но при этом a – не точка локального минимума для f. Тогда

$$\forall \delta > 0 \quad \exists x \in U_\delta(a) \quad f(x) < f(a)$$

$$\Downarrow$$

$$\forall \delta > 0 \quad \exists p \in S_\varepsilon \quad \exists t \in [0,\delta] \quad h_p(t) = f(a+tp) < f(a) = h_p(0)$$

$$\Downarrow \quad \text{применяем лемму 14.1.24}$$

$$\forall \delta > 0 \quad \exists p \in S_\varepsilon \quad \exists t \in [0,\delta] \quad h_p''(t) < 0$$

$$\Downarrow$$

$$\forall m \in \mathbb{N} \quad \exists p_m \in S_\varepsilon \quad \exists t_m \in \left[0, \frac{1}{m}\right] \quad h_{p_m}''(t_m) < 0$$

Вспомним теперь, что S_ε– компакт. Поэтому из последовательности $p_m \in S_\varepsilon$ можно выбрать сходящуюся подпоследовательность p_{m_i}:

$$p_{m_i} \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} p \in S_\varepsilon$$

При этом, поскольку $t_{m_i} \in \left[0, \frac{1}{m_i}\right]$, получаем

$$t_{m_i} \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

Значит,

$$0 > h_{p_{m_i}}''(t_{m_i}) \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} h_p''(0)$$

$$\Downarrow$$

$$0 \geqslant h_p''(0) = \partial_p^2 f(a)$$

Таким образом,

$$\exists p \in S_\varepsilon \quad \partial_p^2 f(a) \leqslant 0$$

а это противоречит предположению (i).

2. Мы доказали утверждение (i). Утверждение (ii) можно считать его следствием, потому что для его доказательства достаточно взять функцию $g(x) = -f(x)$, для которой (i) будет означать то же, что (ii) для f.

3. Докажем теперь (iii). Условие

$$\exists p \in \mathbb{R}^n \qquad \partial_p^2 f(a) > 0$$

означает, что для функции

$$h_p(t) = f(a+tp)$$

выполняется условие

$$h_p''(0) > 0$$

Поскольку $h_p''(t)$ непрерывна, это означает, что существует целый отрезок, на котором $h_p''(t)$ положительна:

$$\exists \delta > 0 \quad \forall t \in [0,\delta] \qquad h_p''(t) > 0$$

Отсюда

$$h_p'(t) - h_p'(0) = \big(\text{теорема Лагранжа 5.1.7}\big) = h_p''(\xi) \cdot (t-0) > 0, \qquad t \in (0,\delta]$$

$$\Downarrow$$

$$h_p'(t) > h_p'(0) = 0, \qquad t \in (0,\delta]$$

$$\Downarrow$$

$$h_p(t) - h_p(0) = (\text{теорема Лагранжа 5.1.7}) = h_p'(\xi)\cdot(t-0) > 0, \qquad t\in(0,\delta]$$
$$\Downarrow$$
$$h_p(t) > h_p(0), \qquad t\in(0,\delta]$$
$$\Downarrow$$
$$f(a+tp) > f(a), \qquad t\in(0,\delta]$$
$$\Downarrow$$
$$a \quad \text{не может быть точкой локального максимума для} \quad f$$

Аналогично доказывается, что

$$\exists q\in\mathbb{R}^n \qquad \partial_q^2 f(a) < 0$$
$$\Downarrow$$
$$a \quad \text{не может быть точкой локального минимума для} \quad f$$

$\square$

Покажем как применяются теоремы 14.1.22 и 14.1.23.

◇ **14.1.36.** Исследуем на локальный экстремум функцию

$$f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy.$$

Сначала вычисляем дифференциал:

$$\mathsf{d}\, f(x,y) = 3(x^2-y)\cdot \mathsf{d}\, x + 3(y^2-x)\cdot \mathsf{d}\, y.$$

Затем находим стационарные точки:

$$\mathsf{d}\, f(x,y) = 0 \;\Leftrightarrow\; \begin{Bmatrix} x^2-y=0 \\ y^2-x=0 \end{Bmatrix} \;\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \begin{Bmatrix} y=x^2 \\ x^4-x^2=0 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} y=x^2 \\ \begin{bmatrix} x=0 \\ x=1 \end{bmatrix} \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} \begin{Bmatrix} x=0 \\ y=0 \end{Bmatrix} \\ \begin{Bmatrix} x=1 \\ y=1 \end{Bmatrix} \end{bmatrix}$$

Таким образом, у этой функции две стационарные точки: $P_0(0;0)$ и $P_1(1;1)$.

Находим второй дифференциал:

$$\mathsf{d}^2 f(x,y) = 6x\cdot(\mathsf{d}\, x)^2 - 6\cdot \mathsf{d}\, x\, \mathsf{d}\, y + 6y\cdot(\mathsf{d}\, y)^2.$$

1) В точке $P_0(0,0)$ второй дифференциал имеет вид

$$\mathsf{d}^2 f(0,0) = -6\cdot \mathsf{d}\, x\, \mathsf{d}\, y.$$

Видно, что придавая $\mathsf{d}\, x$ и $\mathsf{d}\, y$ разные значения из $\mathbb{R}$ (с условием $(\mathsf{d}\, x)^2 + (\mathsf{d}\, y)^2 > 0$) можно сделать $\mathsf{d}^2 f(0,0)$ как положительным, так и отрицательным. Например, при $\mathsf{d}\, x = 1$, $\mathsf{d}\, y = -1$ мы получаем

$$\mathsf{d}^2 f(0,0) = 6 > 0.$$

А при $\mathsf{d}\, x = 1$, $\mathsf{d}\, y = 1$ —

$$\mathsf{d}^2 f(0,0) = -6 < 0.$$

По теореме 14.1.23 это означает, что в точке $(0,0)$ локального экстремума нет.

2) В точке $P_1(1,1)$ второй дифференциал имеет вид

$$\begin{aligned}\mathsf{d}^2 f(0,0) &= 6\cdot(\mathsf{d}\, x)^2 - 6\cdot \mathsf{d}\, x\, \mathsf{d}\, y + 6\cdot(\mathsf{d}\, y)^2 = \\ &= 3\cdot(\mathsf{d}\, x)^2 + 3\cdot(\mathsf{d}\, x)^2 - 6\cdot \mathsf{d}\, x\, \mathsf{d}\, y + 3\cdot(\mathsf{d}\, y)^2 + 3\cdot(\mathsf{d}\, y)^2 = \\ &= 3\cdot(\mathsf{d}\, x)^2 + 3\cdot\big(\mathsf{d}\, x - \mathsf{d}\, y\big)^2 + 3\cdot(\mathsf{d}\, y)^2 = \\ &= 3\cdot\underbrace{\Big((\mathsf{d}\, x)^2 + (\mathsf{d}\, y)^2\Big)}_{\substack{\vee \\ 0}} + 3\cdot\underbrace{\big(\mathsf{d}\, x - \mathsf{d}\, y\big)^2}_{\substack{\veebar \\ 0}} > 0.\end{aligned}$$

По теореме 14.1.23, в этой точке имеется локальный минимум.

◇ **14.1.37.** Рассмотрим функцию

$$f(x,y) = x^4 + y^4.$$

Ее дифференциал

$$\mathsf{d}\, f = 4x^3\cdot \mathsf{d}\, x + 4y^3\cdot \mathsf{d}\, y,$$

стационарная точка одна, $P(0,0)$, второй дифференциал

$$\mathsf{d}^2 f = 12x^2\cdot \mathsf{d}\, x^2 + 12y^2\cdot \mathsf{d}\, y^2,$$

и в точке $P(0,0)$ он нулевой:

$$\mathsf{d}^2 f = 0.$$

Теорема 14.1.23 про такую ситуацию ничего не говорит. Поэтому нужно воспользоваться какими-то другими соображениями. Здесь они очевидны: функция f везде положительная, кроме точки $P(0,0)$, где она равна нулю:

$$f(x,y) = x^4 + y^4 \geqslant 0 = f(0,0).$$

Это значит, что в этой точке имеется локальный (в действительности, даже глобальный) минимум.

◇ **14.1.38.** Исследуем на локальный экстремум функцию

$$f(x,y) = x^4 + y^4 - x^2 - 2xy - y^2.$$

Дифференциал:

$$\mathsf{d}\, f(x,y) = (4x^3 - 2x - 2y)\cdot \mathsf{d}\, x + (4y^3 - 2x - 2y)\cdot \mathsf{d}\, y.$$

Находим стационарные точки:

$$\mathsf{d}\, f(x,y) = 0 \;\Leftrightarrow\; \begin{Bmatrix} 4x^3 - 2x - 2y = 0 \\ 4y^3 - 2x - 2y = 0 \end{Bmatrix} \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; \begin{Bmatrix} x^3 - y^3 = 0 \\ 2y^3 - x - y = 0 \end{Bmatrix} \;\Leftrightarrow\; \begin{Bmatrix} x = y \\ y^3 - y = 0 \end{Bmatrix} \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; \left\{ \begin{matrix} x = y \\ \begin{bmatrix} y = 0 \\ y = 1 \\ y = -1 \end{bmatrix} \end{matrix} \right\} \;\Leftrightarrow\; \begin{bmatrix} \begin{Bmatrix} x = 0 \\ y = 0 \end{Bmatrix} \\ \begin{Bmatrix} x = 1 \\ y = 1 \end{Bmatrix} \\ \begin{Bmatrix} x = -1 \\ y = -1 \end{Bmatrix} \end{bmatrix}$$

Получаем $P_0(0;0)$, $P_1(1;1)$ и $P_2(-1;-1)$.

Второй дифференциал:

$$\mathsf{d}^2 f(x,y) = (12x^2 - 2)\cdot \mathsf{d}\, x^2 - 4\cdot \mathsf{d}\, x\, \mathsf{d}\, y + \\ + (12y^2 - 2)\cdot \mathsf{d}\, y^2.$$

1) В точке $P_0(0,0)$ второй дифференциал неположительный,

$$\mathsf{d}^2 f(0,0) = -2\cdot \mathsf{d}\, x^2 - 4\cdot \mathsf{d}\, x\, \mathsf{d}\, y - 2\cdot \mathsf{d}\, y^2 = \\ = -2\cdot \big(\mathsf{d}\, x + \mathsf{d}\, y\big)^2 \leqslant 0,$$

но и не видно, чтобы он был отрицательным, то есть, чтобы выполнялось условие

$$\mathsf{d}^2 f(0,0) < 0$$

при $(\mathsf{d}\, x)^2 + (\mathsf{d}\, y)^2 > 0$.

Теорема 14.1.23 на этот счет ничего не говорит (это ситуация, упоминавшаяся нами в замечании 14.1.35). Поэтому нужно какое-то дополнительное иследование. Оно может быть таким:

– На кривой $y = 0$ (проходящей через точку $P_0(0,0)$) функция f имеет вид

$$f(x,0) = x^4 - x^2 = x^2\cdot(x^2 - 1)$$

и в выколотой окрестности точки $x = 0$ она меньше своего значения в этой точке:

$$f(x,0) = x^2\cdot(x^2-1) < 0 = f(0,0), \quad x \neq 0.$$

Отсюда можно сделать вывод, что в точке $P_0(0,0)$ не может быть локального минимума.

– На кривой $y = -x$ (тоже проходящей через точку $P_0(0,0)$) функция f имеет вид

$$f(x,x) = 2x^4$$

и в выколотой окрестности точки $x = 0$ она больше своего значения в этой точке:

$$f(x,x) = x^4 > 0 = f(0,0), \quad x \neq 0.$$

Отсюда можно сделать вывод, что в точке $P_0(0,0)$ не может быть локального максимума.

Вместе это означает, что в точке $P_0(0,0)$ нет локального экстремума.

2) В точке $P_1(1,1)$ второй дифференциал положительный

$$\mathsf{d}^2 f(1,1) = 10\cdot \mathsf{d}\, x^2 - 4\cdot \mathsf{d}\, x\, \mathsf{d}\, y + 10\cdot \mathsf{d}\, y^2 = \\ = 8\cdot \mathsf{d}\, x^2 + 2\cdot \mathsf{d}\, x^2 - 4\cdot \mathsf{d}\, x\, \mathsf{d}\, y + 2\cdot \mathsf{d}\, y^2 + 10\cdot \mathsf{d}\, y^2 = \\ = 8\cdot \underbrace{\Big((\mathsf{d}\, x)^2 + (\mathsf{d}\, y)^2\Big)}_{\substack{\vee \\ 0}} + 2\cdot \underbrace{\big(\mathsf{d}\, x - \mathsf{d}\, y\big)^2}_{\substack{\geqslant \\ 0}} > 0.$$

Поэтому по теореме 14.1.23, в этой точке имеется локальный минимум.

3) В точке $P_2(-1,-1)$ картина та же: второй дифференциал положительный

$$\mathsf{d}^2 f(-1,-1) = 10\cdot \mathsf{d}\, x^2 - 4\cdot \mathsf{d}\, x\, \mathsf{d}\, y + 10\cdot \mathsf{d}\, y^2 = \\ = 8\cdot \mathsf{d}\, x^2 + 2\cdot \mathsf{d}\, x^2 - 4\cdot \mathsf{d}\, x\, \mathsf{d}\, y + 2\cdot \mathsf{d}\, y^2 + 10\cdot \mathsf{d}\, y^2 = \\ = 8\cdot \underbrace{\Big((\mathsf{d}\, x)^2 + (\mathsf{d}\, y)^2\Big)}_{\substack{\vee \\ 0}} + 2\cdot \underbrace{\big(\mathsf{d}\, x - \mathsf{d}\, y\big)^2}_{\substack{\geqslant \\ 0}} > 0$$

и поэтому по теореме 14.1.23, в этой точке имеется локальный минимум.

◇ **14.1.39.** Пусть требуется найти точки локального экстремума функции

$$f(x,y) = x^2 - 2xy + 4y^3$$

Для этого находим сначала дифференциал этой функции:

$$\mathsf{d}\, f = 2x\cdot \mathsf{d}\, x - 2y\cdot \mathsf{d}\, x - 2x\cdot \mathsf{d}\, y + 12y^2\cdot \mathsf{d}\, y.$$

Приравнивая его к нулю, получаем:

$$\mathsf{d}\, f = (2x - 2y)\cdot \mathsf{d}\, x + (-2x + 12y^2)\cdot \mathsf{d}\, y = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} 2x - 2y = 0 \\ -2x + 12y^2 = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = y \\ 6y^2 - y = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{matrix} x = y \\ \begin{bmatrix} y = 0 \\ y = \frac{1}{6} \end{bmatrix} \end{matrix} \right\} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} \begin{Bmatrix} x = y \\ y = 0 \end{Bmatrix} \\ \begin{Bmatrix} x = y \\ y = \frac{1}{6} \end{Bmatrix} \end{bmatrix} \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases} \\ \begin{cases} x=\frac{1}{6} \\ y=\frac{1}{6} \end{cases} \end{array}\right]$$

Это дает две критические точки: $(0,0)$ и $(\frac{1}{6}, \frac{1}{6})$.

Далее находим второй дифференциал:

$$\mathsf{d}^2 f = 2\,\mathsf{d}\,x^2 - 4\,\mathsf{d}\,x \cdot \mathsf{d}\,y + 24y \cdot \mathsf{d}\,y^2.$$

1. В точке $(0,0)$:

$$\mathsf{d}^2 f(0,0) = 2\,\mathsf{d}\,x^2 - 4\,\mathsf{d}\,x \cdot \mathsf{d}\,y = 2\,\mathsf{d}\,x(\mathsf{d}\,x - 2\,\mathsf{d}\,y).$$

При $0 < 2\,\mathsf{d}\,y < \mathsf{d}\,x$ мы получаем $\mathsf{d}^2 f > 0$. А при При $0 < \mathsf{d}\,x < 2\,\mathsf{d}\,y$ мы получаем $\mathsf{d}^2 f < 0$. Это означает, что в точке $(0,0)$ экстремума нет.

2. В точке $\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{6}\right)$ второй дифференциал неотрицательный,

$$\mathsf{d}^2 f\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{6}\right) = 2\,\mathsf{d}\,x^2 - 4\,\mathsf{d}\,x \cdot \mathsf{d}\,y + 4\,\mathsf{d}\,y^2 = \\ = \underbrace{2(\mathsf{d}\,x - \mathsf{d}\,y)^2}_{\substack{\geqslant \\ 0}} + \underbrace{2\,\mathsf{d}\,y^2}_{\substack{\geqslant \\ 0}} \geqslant 0, \quad (14.1.99)$$

но пока непонятно, будет ли он положительным, то есть будет ли выполняться неравенство

$$\mathsf{d}^2 f\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{6}\right) > 0$$

при $\mathsf{d}\,x^2 + \mathsf{d}\,y^2 > 0$.

Это доказывается рассмотрением двух случаев:[8]

— если $\mathsf{d}\,y \ne 0$, то

$$\mathsf{d}^2 f\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{6}\right) = \underbrace{2(\mathsf{d}\,x - \mathsf{d}\,y)^2}_{\substack{\geqslant \\ 0}} + \underbrace{2\,\mathsf{d}\,y^2}_{\substack{> \\ 0}} > 0.$$

— если $\mathsf{d}\,y = 0$, то условие $\mathsf{d}\,x^2 + \mathsf{d}\,y^2 > 0$ означает, что $\mathsf{d}\,x \ne 0$, и мы получаем

$$\mathsf{d}^2 f\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{6}\right) = 2 \cdot \Big(\mathsf{d}\,x - \underbrace{\mathsf{d}\,y}_{\substack{\| \\ 0}}\Big)^2 + \underbrace{2\,\mathsf{d}\,y^2}_{\substack{\| \\ 0}} = \\ = 2(\mathsf{d}\,x)^2 > 0.$$

ОТВЕТ: Локальный минимум в точке $\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{6}\right)$.

◇ **14.1.40.** Найдем локальные экстремумы функции

$$f(x,y,z) = 2x^2 - xy + 2xz - y + y^3 + z^2.$$

Для этого сначала находим и приравниваем нулю ее дифференциал:

$$\mathsf{d}\,f = 4x\,\mathsf{d}\,x - y\,\mathsf{d}\,x - x\,\mathsf{d}\,y + 2z\,\mathsf{d}\,x + \\ + 2x\,\mathsf{d}\,z - \mathsf{d}\,y + 3y^2\,\mathsf{d}\,y + 2z\,\mathsf{d}\,z = \\ = (4x - y + 2z) \cdot \mathsf{d}\,x + (3y^2 - x - 1) \cdot \mathsf{d}\,y + (2x + 2z) \cdot \mathsf{d}\,z = 0$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} 4x - y + 2z = 0 \\ 3y^2 - x - 1 = 0 \\ 2x + 2z = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} -4z - y + 2z = 0 \\ 3y^2 + z - 1 = 0 \\ x = -z \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} y = -2z \\ 3y^2 + z - 1 = 0 \\ x = -z \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} y = -2z \\ 12z^2 + z - 1 = 0 \\ x = -z \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} y = -2z \\ z \in \left\{-\frac{1}{3}; \frac{1}{4}\right\} \\ x = -z \end{cases} \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = \frac{1}{3} \\ y = \frac{2}{3} \\ z = -\frac{1}{3} \end{cases} \\ \begin{cases} x = -\frac{1}{4} \\ y = -\frac{1}{2} \\ z = \frac{1}{4} \end{cases} \end{array}\right]$$

Затем находим второй дифференциал:

$$\mathsf{d}^2 f = 4\,\mathsf{d}\,x^2 + 6y\,\mathsf{d}\,y^2 + 2\,\mathsf{d}\,z^2 - 2\,\mathsf{d}\,x\,\mathsf{d}\,y + 4\,\mathsf{d}\,x\,\mathsf{d}\,z$$

1. В точке $\left(\frac{1}{3}; \frac{2}{3}; -\frac{1}{3}\right)$ получаем:

$$\mathsf{d}^2 f = 4\,\mathsf{d}\,x^2 + 4\,\mathsf{d}\,y^2 + 2\,\mathsf{d}\,z^2 - 2\,\mathsf{d}\,x\,\mathsf{d}\,y + 4\,\mathsf{d}\,x\,\mathsf{d}\,z = \\ = (\mathsf{d}\,x^2 - 2\,\mathsf{d}\,x\,\mathsf{d}\,y + \mathsf{d}\,y^2) + (2\,\mathsf{d}\,x^2 + 4\,\mathsf{d}\,x\,\mathsf{d}\,z + 2\,\mathsf{d}\,z^2) +$$

---

[8]Это можно также доказать методом от противного, что будет короче, но не так наглядно: неравенство

$$\mathsf{d}^2 f\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{6}\right) = 2(\mathsf{d}\,x - \mathsf{d}\,y)^2 + 2\,\mathsf{d}\,y^2 \leqslant 0$$

вместе с (14.1.99) дает равенство

$$\mathsf{d}^2 f\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{6}\right) = 2(\mathsf{d}\,x - \mathsf{d}\,y)^2 + 2\,\mathsf{d}\,y^2 = 0$$

которое рождает систему уравнений

$$\begin{cases} \mathsf{d}\,x - \mathsf{d}\,y = 0 \\ \mathsf{d}\,y = 0 \end{cases}$$

решением которой будет пара условий

$$\begin{cases} \mathsf{d}\,x = 0 \\ \mathsf{d}\,y = 0 \end{cases}$$

противоречащая условию $\mathsf{d}\,x^2 + \mathsf{d}\,y^2 > 0$. Это надо интерпретировать так, что условие $\mathsf{d}\,x^2 + \mathsf{d}\,y^2 > 0$ автоматически влечет за собой условие $\mathsf{d}^2 f\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{6}\right) > 0$.

$$+\,\mathsf{d}\,x^2+3\,\mathsf{d}\,y^2=$$
$$=(\mathsf{d}\,x-\mathsf{d}\,y)^2+2(\mathsf{d}\,x+dz)^2+\mathsf{d}\,x^2+3\,\mathsf{d}\,y^2.$$

Теперь

— если $\mathsf{d}\,x\neq 0$, то $(\mathsf{d}\,x)^2>0$ и поэтому

$$\mathsf{d}^2 f=\underbrace{(\mathsf{d}\,x-\mathsf{d}\,y)^2}_{\substack{\geqslant\\ 0}}+\underbrace{2(\mathsf{d}\,x+dz)^2}_{\substack{\geqslant\\ 0}}+$$
$$+\underbrace{(\mathsf{d}\,x)^2}_{\substack{>\\ 0}}+\underbrace{3(\mathsf{d}\,y)^2}_{\substack{\geqslant\\ 0}}>0.$$

— если $\mathsf{d}\,y\neq 0$, то $(\mathsf{d}\,y)^2>0$ и поэтому

$$\mathsf{d}^2 f=\underbrace{(\mathsf{d}\,x-\mathsf{d}\,y)^2}_{\substack{\geqslant\\ 0}}+\underbrace{2(\mathsf{d}\,x+dz)^2}_{\substack{\geqslant\\ 0}}+$$
$$+\underbrace{(\mathsf{d}\,x)^2}_{\substack{\geqslant\\ 0}}+\underbrace{3(\mathsf{d}\,y)^2}_{\substack{>\\ 0}}>0.$$

— в оставшемся случае, когда $\mathsf{d}\,z\neq 0$, но $\mathsf{d}\,x=\mathsf{d}\,y=0$ мы получаем

$$\mathsf{d}^2 f=\underbrace{(\mathsf{d}\,x-\mathsf{d}\,y)^2}_{\substack{\parallel\\ 0}}+\underbrace{2(\mathsf{d}\,x+dz)^2}_{\substack{\parallel\\ (\mathsf{d}\,z)^2\\ >\\ 0}}+$$
$$+\underbrace{(\mathsf{d}\,x)^2}_{\substack{\parallel\\ 0}}+\underbrace{3(\mathsf{d}\,y)^2}_{\substack{\parallel\\ 0}}>0.$$

Таким орбразом, справедлива импликация

$$(\mathsf{d}\,x)^2+(\mathsf{d}\,y)^2+(\mathsf{d}\,z)^2>0\quad\Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow\quad \mathsf{d}^2 f\left(\frac{1}{3};\frac{2}{3};-\frac{1}{3}\right)>0$$

означающая, что в точке $\left(\frac{1}{3};\frac{2}{3};-\frac{1}{3}\right)$ имеется локальный минимум.

2. В точке $\left(-\frac{1}{4};-\frac{1}{2};\frac{1}{4}\right)$ получаем:

$$\mathsf{d}^2 f=4\,\mathsf{d}\,x^2-3\,\mathsf{d}\,y^2+2\,\mathsf{d}\,z^2-2\,\mathsf{d}\,x\,\mathsf{d}\,y+4\,\mathsf{d}\,x\,\mathsf{d}\,z=$$
$$=(\mathsf{d}\,x^2-2\,\mathsf{d}\,x\,\mathsf{d}\,y+\mathsf{d}\,y^2)+(2\,\mathsf{d}\,x^2+4\,\mathsf{d}\,x\,\mathsf{d}\,z+2\,\mathsf{d}\,z^2)+$$
$$+\,\mathsf{d}\,x^2-2\,\mathsf{d}\,y^2=$$
$$=(\mathsf{d}\,x-\mathsf{d}\,y)^2+2(\mathsf{d}\,x+dz)^2+\mathsf{d}\,x^2-2\,\mathsf{d}\,y^2.$$

При $\mathsf{d}\,x=\mathsf{d}\,y=-\,\mathsf{d}\,z\neq 0$ мы получаем:

$$\mathsf{d}^2 f=-\,\mathsf{d}\,x^2<0,$$

а при $\mathsf{d}\,x=\mathsf{d}\,y=\mathsf{d}\,z\neq 0$,

$$\mathsf{d}^2 f=-\,\mathsf{d}\,x^2+2\cdot 4\,\mathsf{d}\,x^2>0.$$

И поэтому в этой точке нет ни локального максимума, ни локального минимума.

⊳⊳ **14.1.41.** Найдите точки локального экстремума следующих функций:

1) $f=x^2-xy+y^2$,
2) $f=x^2-xy-y^2$,
3) $f=x^2-2xy+2y^2+2x$,
4) $f=x^3+y^3-x^2-2xy-y^2$,
5) $f=x^3-2y^3-3x+6y$,
6) $f=x^3-2x^2y^2+y^4$.

⊳⊳ **14.1.42.** Исследуйте функции на локальный экстремум:

1) $u=\frac{x+y}{xy}-xy$,
2) $u=\frac{8}{x}+\frac{x}{y}+y$,
3) $u=81\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)-(x^2+xy+y^2)$,
4) $u=xy+\frac{a}{x}+\frac{b}{y}$,
5) $u=3x^2-2x\sqrt{y}+y-8x$,
6) $u=x\sqrt{1+y}+y\sqrt{1+x}$, $x>-1$, $y>-1$,
8) $u=(x+y^2)\cdot e^{\frac{x}{2}}$,
9) $u=(x^2-2y^2)\cdot e^{x-y}$,
10) $x^2+xy+y^2-4\ln x-10\ln y$.

Условия локального экстремума в терминах свойств частных производных Для практических целей теоремы 14.1.22 и 14.1.23 удобно переформулировать, заменив в них дифференциалы частными производными функции f. Первая из этих теорем, применением тождества (14.1.22),

$$\mathsf{d}\,f(a)[p]=\nabla_1 f(a)\cdot p^1+...+\nabla_n f(a)\cdot p^n,\qquad p\in\mathbb{R}^n,$$

сводится к следующей:

Теорема 14.1.25 (необходимое условие локального экстремума). *Пусть функция f дифференцируема в точке $a\in\mathbb{R}^n$. Тогда если f имеет в точке a локальный экстремум, то ее частные производные в этой точке равны нулю:*

$$\nabla_1 f(a)=...=\nabla_n f(a)=0\tag{14.1.100}$$

Доказательство. Равенство нулю дифференциала в каждом направлении $p \in \mathbb{R}^n$ равносильно равенству нулю каждой производной. □

- Пусть функция $f : \mathbb{R}^n \hookrightarrow \mathbb{R}$ – непрерывно дифференцируемая порядка 2 в некоторой окрестности точки $a \in \mathsf{D}(f)$. Матрица, состоящая из вторых производных функции f в точке a
$$H_f(a) = \begin{pmatrix} \nabla_1\nabla_1 f(a) & \nabla_2\nabla_1 f(a) & ... & \nabla_n\nabla_1 f(a) \\ \nabla_1\nabla_2 f(a) & \nabla_2\nabla_2 f(a) & ... & \nabla_n\nabla_2 f(a) \\ ... & ... & ... & ... \\ \nabla_1\nabla_n f(a) & \nabla_2\nabla_n f(a) & ... & \nabla_n\nabla_n f(a) \end{pmatrix} \tag{14.1.101}$$
называется *матрицей Гессе*[9] (функции f в точке a).
Ее определитель называется *Гессианом* (функции f в точке a):
$$\det H_f(a) = \begin{vmatrix} \nabla_1\nabla_1 f(a) & \nabla_2\nabla_1 f(a) & ... & \nabla_n\nabla_1 f(a) \\ \nabla_1\nabla_2 f(a) & \nabla_2\nabla_2 f(a) & ... & \nabla_n\nabla_2 f(a) \\ ... & ... & ... & ... \\ \nabla_1\nabla_n f(a) & \nabla_2\nabla_n f(a) & ... & \nabla_n\nabla_n f(a) \end{vmatrix} \tag{14.1.102}$$

Лемма 14.1.26. *Пусть функция $f : \mathbb{R}^n \hookrightarrow \mathbb{R}$ непрерывно дифференцируема порядка 2 в некоторой окрестности точки $a \in \mathbb{R}^n$. Тогда*

(i) *матрица Гессе $H_f(a)$ функции f в точке a является симметрической:*
$$H_f(a)^T = H_f(a)$$

(ii) *второй дифференциал $\mathsf{d}^2 f(a)$ функции f в точке a является квадратичной формой на $\mathbb{R}^n$ (от переменной p), для которой матрица Гессе $H_f(a)$ является порождающей матрицей:*
$$\mathsf{d}^2 f(a)[p] = \Big\langle H_f(a)p, p \Big\rangle \tag{14.1.103}$$

Доказательство. Симметричность матрицы Гессе есть условие, доказанное в теореме Шварца 14.1.8:
$$\nabla_i\nabla_j f(a) = \nabla_j\nabla_i f(a)$$
Равенство (14.1.103) следует из формулы (14.1.37):
$$\Big\langle H_f(a)p, p \Big\rangle = \sum_{i,j=1}^{n} \nabla_i\nabla_j f(a) \cdot p^i \cdot p^j = (14.1.37) = \mathsf{d}^2 f(a)[p]$$
После этого по теореме 12.4.8, из формулы (14.1.103) и симметричности матрицы $H_f(a)$, следует что $\mathsf{d}^2 f(a)$ – квадратичная форма (и $H_f(a)$ – ее порождающая матрица). □

Применяя к теореме 14.1.23 критерий Сильвестра (теорему 12.4.19), мы получаем

Теорема 14.1.27 (достаточное условие локального экстремума)**.** *Пусть функция $f : \mathbb{R}^n \hookrightarrow \mathbb{R}$ непрерывно дифференцируема порядка 2 в некоторой окрестности точки $a \in \mathbb{R}^n$ и ее частные производные первого порядка в точке a равны нулю:*
$$\nabla_1 f(a) = ... = \nabla_n f(a) = 0.$$
Тогда

(i) *если главные миноры матрицы Гессе функции f в точке a положительны:*
$$\nabla_1\nabla_1 f(a) > 0, \quad \begin{vmatrix} \nabla_1\nabla_1 f(a) & \nabla_2\nabla_1 f(a) \\ \nabla_1\nabla_2 f(a) & \nabla_2\nabla_2 f(a) \end{vmatrix} > 0, \quad ..., \quad \begin{vmatrix} \nabla_1\nabla_1 f(a) & ... & \nabla_n\nabla_1 f(a) \\ ... & ... & ... \\ \nabla_1\nabla_n f(a) & ... & \nabla_n\nabla_n f(a) \end{vmatrix} > 0, \tag{14.1.104}$$
то a – точка локального минимума функции f;

[9] Людвиг Отто Гессе (Ludwig Otto Hesse) (1811-1874) – немецкий математик.

(ii) *если главные миноры матрицы Гессе функции f в точке a имеют чередующиеся знаки, начиная с минуса*

$$\nabla_1\nabla_1 f(a) < 0, \quad \begin{vmatrix} \nabla_1\nabla_1 f(a) & \nabla_2\nabla_1 f(a) \\ \nabla_1\nabla_2 f(a) & \nabla_2\nabla_2 f(a) \end{vmatrix} > 0, \quad ...,$$

$$(-1)^n \cdot \begin{vmatrix} \nabla_1\nabla_1 f(a) & ... & \nabla_n\nabla_1 f(a) \\ ... & ... & ... \\ \nabla_1\nabla_n f(a) & ... & \nabla_n\nabla_n f(a) \end{vmatrix} > 0, \quad (14.1.105)$$

то a – точка локального максимума функции f.

Локальный экстремум функции двух переменных.

Теорема 14.1.28. *Пусть функция $f : \mathbb{R}^2 \hookrightarrow \mathbb{R}$ дважды непрерывно дифференцируема в некоторой окрестности точки $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Для того, чтобы f имела локальный экстремум в точке (a, b) необходимо, чтобы частные производные f в точке (a, b) были равны нулю:*

$$\nabla_1 f(a, b) = \nabla_2 f(a, b) = 0. \quad (14.1.106)$$

Пусть это условие выполнено, тогда

(i) *если Гессиан функции f в точке (a, b) положителен*

$$\det H_f(a, b) = \begin{vmatrix} \nabla_1\nabla_1 f(a, b) & \nabla_2\nabla_1 f(a, b) \\ \nabla_1\nabla_2 f(a, b) & \nabla_2\nabla_2 f(a, b) \end{vmatrix} > 0 \quad (14.1.107)$$

то (a, b) – точка локального экстремума функции f, причем

— *если $\nabla_1\nabla_1 f(a, b) > 0$ то (a, b) – точка локального минимума для $f(x, y)$;*
— *если $\nabla_1\nabla_1 f(a, b) < 0$ то (a, b) – точка локального максимума для $f(x, y)$.*

(ii) *если Гессиан функции f в точке (a, b) отрицателен*

$$\det H_f(a, b) = \begin{vmatrix} \nabla_1\nabla_1 f(a, b) & \nabla_2\nabla_1 f(a, b) \\ \nabla_1\nabla_2 f(a, b) & \nabla_2\nabla_2 f(a, b) \end{vmatrix} < 0 \quad (14.1.108)$$

то f не имеет локального экстремума в точке (a, b).

! 14.1.43. В теореме ничего не сказано о случае, когда Гессиан равен нулю

$$\det H_f(a, b) = \begin{vmatrix} \nabla_1\nabla_1 f(a, b) & \nabla_2\nabla_1 f(a, b) \\ \nabla_1\nabla_2 f(a, b) & \nabla_2\nabla_2 f(a, b) \end{vmatrix} = 0$$

Тогда f может иметь, а может и не иметь локального экстремума в точке (a, b). Этот случай обсуждается ниже в примерах 14.1.45 и 14.1.46.

Доказательство. С самого начала обозначим

$$A = \nabla_1\nabla_1 f(a, b), \quad B = \nabla_2\nabla_1 f(a, b) = \nabla_1\nabla_2 f(a, b), \quad C = \nabla_2\nabla_2 f(a, b).$$

Тогда

$$\det H_f(a, b) = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = A \cdot C - B^2.$$

1. Рассмотрим сначала случай, когда Гессиан положителен:

$$A \cdot C - B^2 > 0$$

Тогда, во-первых,

$$A \neq 0, \quad C \neq 0, \quad \operatorname{sgn} A = \operatorname{sgn} C$$

и, во-вторых, дискриминанты квадратных трехчленов

$$\lambda^2 + 2\frac{B}{A}\lambda + \frac{C}{A}, \qquad \frac{A}{C} + 2\frac{B}{C}\mu + \mu^2$$

отрицательны:

$$4\left(\frac{B^2}{A^2}-\frac{C}{A}\right)<0,\quad 4\left(\frac{B^2}{C^2}-\frac{A}{C}\right)<0,$$

Отсюда следует, что квадратные трехчлены всегда положительны:

$$\lambda^2+2\frac{B}{A}\lambda+\frac{C}{A}>0,\qquad \frac{A}{C}+2\frac{B}{C}\mu+\mu^2>0$$

Поэтому, если взять вместо λ число вида $\frac{p}{q}$, то получится

$$\frac{p^2}{q^2}+2\frac{B}{A}\frac{p}{q}+\frac{C}{A}>0$$

откуда

$$\operatorname{sgn}\Big(Ap^2+2Bpq+Cq^2\Big)=\operatorname{sgn}A,\qquad q\neq 0 \tag{14.1.109}$$

Аналогично, если взять вместо μ число вида $\frac{q}{p}$, то получится

$$\frac{C}{A}+2\frac{B}{A}\frac{q}{p}+\frac{q^2}{p^2}>0$$

откуда

$$\operatorname{sgn}\Big(Ap^2+2Bpq+Cq^2\Big)=\operatorname{sgn}C,\qquad p\neq 0 \tag{14.1.110}$$

Из (14.1.107) и (14.1.108) следует, что если $p\neq 0$ или $q\neq 0$ (то есть, если $(p,q)\neq 0$), то

$$\operatorname{sgn}\Big(Ap^2+2Bpq+Cq^2\Big)=\operatorname{sgn}A=\operatorname{sgn}C \tag{14.1.111}$$

Поэтому вторая производная функции $f(x,y)$ в точке (a,b) по направлению $(p,q)\neq 0$ должна иметь тот же знак, что и A:

$$\operatorname{sgn}\mathsf{d}^2 f(a,b)(p,q)=\operatorname{sgn}\Big(Ap^2+2Bpq+Cq^2\Big)=\operatorname{sgn}A$$

Если $A>0$, то мы получаем

$$\mathsf{d}^2 f(a,b)(p,q)=Ap^2+2Bpq+Cq^2>0,\quad \forall(p,q)\neq 0$$

и это означает, что (a,b) должна быть точкой локального минимума.

Если же $A<0$, то мы получаем

$$\mathsf{d}^2 f(a,b)(p,q)=Ap^2+2Bpq+Cq^2<0,\quad \forall(p,q)\neq 0$$

и это означает, что (a,b) должна быть точкой локального максимума.

2. Рассмотрим теперь случай, когда Гессиан отрицателен:

$$A\cdot C-B^2<0$$

Тогда дискриминант квадратного трехчлена

$$A\lambda^2+2B\lambda+C$$

положителен, и это означает, что найдутся такие две точки λ_1,λ_2, что

$$A\lambda_1^2+2B\lambda_1+C>0,\quad A\lambda_2^2+2B\lambda_2+C<0$$

Возьмем теперь

$$p_1,q_1:\qquad \frac{p_1}{q_1}=\lambda_1$$

Тогда

$$\mathsf{d}^2 f(a,b)(p_1,q_1)=Ap_1^2+2Bp_1q_1+Cq_1=q_1^2\left(A\left(\frac{p_1}{q_1}\right)^2+2B\frac{p_1}{q_1}+C\right)=A\lambda_1^2+2B\lambda_1+C>0$$

С другой же стороны, если взять

$$p_2, q_2: \qquad \frac{p_2}{q_2} = \lambda_2$$

то получится

$$\mathsf{d}^2 f(a,b)(p_2,q_2) = Ap_2^2 + 2Bp_2q_2 + Cq_2 = q_2^2\left(A\left(\frac{p_2}{q_2}\right)^2 + 2B\frac{p_2}{q_2} + C\right) = A\lambda_2^2 + 2B\lambda_2 + C < 0$$

Вместе это означает, что выполняется условие (iii) теоремы 5.6, то есть (a,b) не может быть точкой локального экстремума. □

Покажем, как применяется теорема 14.1.28.

◇ **14.1.44.** Рассмотрим снова функцию из примера 14.1.36:

$$f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy.$$

Мы уже знаем ее дифференциал,

$$\mathsf{d} f(x,y) = 3(x^2 - y)\cdot \mathsf{d}\, x + 3(y^2 - x)\cdot \mathsf{d}\, y,$$

и стационарные точки: $P_0(0;0)$ и $P_1(1;1)$.

Ее второй дифференциал имеет вид

$$\mathsf{d}^2 f(x,y) = 6x\cdot \mathsf{d}\, x^2 - 2\cdot 3\cdot \mathsf{d}\, x\, \mathsf{d}\, y + 6y\cdot \mathsf{d}\, y^2.$$

А матрица Гессе — вид

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 6x & -3 \\ -3 & 6y \end{pmatrix}.$$

1) В точке $P_0(0,0)$ гессиан отрицательный:

$$\det H_f(0,0) = \det\begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} = -9 < 0,$$

поэтому по теореме 14.1.28, здесь локального экстремума нет.

2) В точке $P_1(1,1)$ гессиан положительный

$$\det H_f(1,1) = \det\begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{pmatrix} = 36 - 9 = 27 > 0,$$

а вторая производная по первой переменной положительна

$$\nabla_1\nabla_1 f(1,1) = 6 > 0.$$

Поэтому по теореме 14.1.28, в этой точке имеется локальный минимум.

◇ **14.1.45.** Рассмотрим функцию из примера 14.1.37:

$$f(x,y) = x^4 + y^4.$$

Ее дифференциал

$$\mathsf{d} f = 4x^3\cdot \mathsf{d}\, x + 4y^3\cdot \mathsf{d}\, y,$$

стационарная точка одна, $P(0,0)$, второй дифференциал

$$\mathsf{d}^2 f = 12x^2\cdot \mathsf{d}\, x^2 + 12y^2\cdot \mathsf{d}\, y^2,$$

а матрица Гессе

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 12x^2 & 0 \\ 0 & 12y^2 \end{pmatrix}.$$

В точке $P(0,0)$ гессиан нулевой:

$$\det H_f(0,0) = \det\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0.$$

Теорема 14.1.28 про такую ситуацию ничего не говорит. Поэтому нужно воспользоваться какими-то другими соображениями. Мы их привели в примере 14.1.37: функция f везде положительная, кроме точки $P(0,0)$, где она равна нулю:

$$f(x,y) = x^4 + y^4 \geqslant 0 = f(0,0).$$

Это значит, что в этой точке имеется локальный (в действительности, даже глобальный) минимум.

◇ **14.1.46.** Рассмотрим снова функцию из примера 14.1.38:

$$f(x,y) = x^4 + y^4 - x^2 - 2xy - y^2.$$

Ее дифференциал

$$\mathsf{d} f(x,y) = (4x^3 - 2x - 2y)\cdot \mathsf{d}\, x + (4y^3 - 2x - 2y)\cdot \mathsf{d}\, y.$$

и стационарные точки $P_0(0;0)$, $P_1(1;1)$, $P_2(-1;-1)$.

Второй дифференциал:

$$\mathsf{d}^2 f(x,y) = \\ = (12x^2 - 2)\cdot \mathsf{d}\, x^2 - 2\cdot 2\cdot \mathsf{d}\, x\, \mathsf{d}\, y + (12y^2 - 2)\cdot \mathsf{d}\, y^2.$$

Матрица Гессе:

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 12x^2 - 2 & -2 \\ -2 & 12y^2 - 2 \end{pmatrix}.$$

1) В точке $P_0(0,0)$ гессиан нулевой:

$$\det H_f(0,0) = \det\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} = (-2)^2 - (-2)^2 = 0,$$

поэтому теорему 14.1.28 применить невозможно, и нужно дополнительное исследование. Мы уже провели его в примере 14.1.38, и получили, что в точке $P_0(0,0)$ локального экстремума нет.

2) В точке $P_1(1,1)$ гессиан положительный

$$\det H_f(1,1) = \det \begin{pmatrix} 10 & -2 \\ -2 & 10 \end{pmatrix} = 10^2 - (-2)^2 > 0,$$

а вторая производная по первой переменной положительна

$$\nabla_1 \nabla_1 f(1,1) = 10 > 0.$$

Поэтому по теореме 14.1.28, в этой точке имеется локальный минимум.

3) В точке $P_2(-1,-1)$ картина та же: гессиан положительный

$$\det H_f(1,1) = \det \begin{pmatrix} 10 & -2 \\ -2 & 10 \end{pmatrix} = 10^2 - (-2)^2 > 0,$$

и вторая производная по первой переменной тоже положительна

$$\nabla_1 \nabla_1 f(1,1) = 10 > 0.$$

Поэтому по теореме 14.1.28, в этой точке имеется локальный минимум.

$\triangleright\triangleright$ **14.1.47.** Исследуйте на локальный экстремум с помощью теоремы 14.1.28 функции из упражнений 14.1.41 и 14.1.42.

(e) Гладкие функции на евклидовых пространствах

- Функция $f : X \hookrightarrow \mathbb{R}$ на евклидовом пространстве X называется *гладкой*, если для любого $m \in \mathbb{N}$ функция f является непрерывно дифференцируемой порядка m (в частности, это означает, что область определения $\mathsf{D}(f)$ функции f считается открытым множеством в X).
- Множество всех гладких функций на множестве $U \subseteq X$ обозначается $\mathcal{C}^\infty(U)$.

Отделение компакта гладкой функцией.

Теорема 14.1.29. *Пусть X – евклидово пространство, и $T \subseteq G$, причем T – компакт, а G – открытое множество в X. Тогда существует гладкая функция $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(X)$ со свойствами:*

$$0 \leqslant \varphi \leqslant 1 \qquad \varphi\Big|_T = 1, \qquad \varphi\Big|_{X\setminus G} = 0 \tag{14.1.112}$$

Для доказательства нам понадобятся две леммы.

Лемма 14.1.30. *Существует гладкая функция $\theta_B : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ со свойствами:*

(i) *значения θ лежат между нулем и единицей:*

$$0 \leqslant \theta(x) \leqslant 1, \qquad x \in \mathbb{R}^n,$$

(ii) *θ отлична от нуля в точности на единичном шаре с центром в нуле:*

$$\theta(x) \neq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad |x| < 1.$$

Доказательство. Такой функцией будет функция

$$\theta(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{1-|x|^2}}, & |x| < 1 \\ 0, & |x| \geqslant 0 \end{cases}.$$

Ее гладкость доказывается по аналогии с функцией в примере 9.1.35. □

Лемма 14.1.31. *Для всякого открытого шара U в евклидовом пространстве X существует гладкая функция $\theta_U : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ со свойствами:*

(i) *значения θ_U лежат между нулем и единицей:*

$$0 \leqslant \theta_U(x) \leqslant 1, \qquad x \in \mathbb{R}^n,$$

(ii) *θ_U отлична от нуля в точности на U:*

$$\theta_U(x) \neq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x \in U.$$

Доказательство. Пусть a – центр шара U, а r – его радиус. Тогда такой функцией будет функция

$$\theta_B(x) = \theta\left(\frac{x-a}{r}\right),$$

где θ – функция из леммы 14.1.30. □

Доказательство теоремы 14.1.29. Воспользуемся следствием 13.3.7 и подберем $\varepsilon > 0$ так, чтобы окрестность $B_\varepsilon(T)$ компакта T содержалась в G:

$$B_\varepsilon(T) \subset G.$$

Рассмотрим далее семейство $\{U_\varepsilon(x);\ x \in T\}$ всех открытых окрестностей радиуса ε точек x компакта T. Они образуют покрытие компакта T:

$$T \subseteq \bigcup_{x\in T} U_\varepsilon(x).$$

Поэтому по теореме 13.3.11 из них можно выбрать конечное подпокрытие $U_\varepsilon(x_1), ..., U_\varepsilon(x_k)$:

$$T \subseteq \bigcup_{i=1}^{k} U_\varepsilon(x_i).$$

Воспользуемся леммой 14.1.31 и выберем для каждой окрестности $U_\varepsilon(x_i)$ гладкую функцию θ_i так, чтобы

$$0 \leqslant \theta_i \leqslant 1, \qquad \{x \in \mathbb{R}^n : \theta_i(x) > 0\} = U_\varepsilon(x_i).$$

Функция

$$\theta = \sum_{i=1}^{n} \theta_i$$

будет будет неотрицательна на $\mathbb{R}^n$, положительна на объединении окрестностей $U_\varepsilon(x_i)$, и равна нулю вне G:

$$\theta(x) \geqslant 0 \quad (x \in \mathbb{R}^n), \qquad \theta(x) > 1 \quad \left(x \in \bigcup_{i=1} U_\varepsilon(x_i)\right), \qquad \theta(x) = 0 \quad (x \notin G).$$

Второе из этих свойств означает, что на компакте $T \subseteq \bigcup_{i=1} U_\varepsilon(x_i) = \{x \in \mathbb{R}^n : \theta(x) > 0\}$ функция θ также всюду положительна, поэтому

$$\delta = \min_{x\in T} \theta(x) > 0.$$

Положив

$$\eta(x) = \frac{1}{\delta} \cdot \theta(x), \qquad x \in \mathbb{R}^n,$$

мы получим функцию, неотрицательную на $\mathbb{R}^n$, не опускающуюся ниже единицы на T и равную нулю вне G:

$$\eta(x) \geqslant 0 \quad (x \in \mathbb{R}^n), \qquad \eta(x) > 1 \quad (x \in T), \qquad \eta(x) = 0 \quad (x \notin G).$$

Рассмотрим теперь функцию $h_{0,1}$ из примера 9.1.37:

$$\begin{cases} h_{0,1}(x) = 0, & x \leqslant 0 \\ 0 < h_{0,1}(x) < 1, & x \in (0,1) \\ h_{0,1}(x) = 1, & x \geqslant 1. \end{cases}$$

Композиция

$$\varphi(x) = h(\eta(x)), \qquad x \in \mathbb{R}^n,$$

будет обладать свойствами (14.1.112). □

Локально конечные семейства функций.

- *Носителем* (обозначение: $\operatorname{supp} f$) функции $f : U \to \mathbb{R}$, определенной на открытом множестве $U \subseteq \mathbb{R}^n$, называется замыкание множества всех точек $x \in U$, в которых эта функция отлична от нуля:
$$\operatorname{supp} f = \overline{\{x \in U : \ f(x) \neq 0\}} \tag{14.1.113}$$

- Функция $f : U \to \mathbb{R}$ называется *финитной*, если ее носитель $\operatorname{supp} f$ – компактное множество в $\mathbb{R}^n$.

- Семейство функций $\{\varphi_j;\ j \in J\}$, определенных на открытом множестве $U \subseteq \mathbb{R}^n$, называется *локально конечным* на U, если у всякой точки $x \in U$ найдется окрестность $U_\varepsilon(x)$, в которой лишь конечное число функций φ_j отлично от нуля
$$\operatorname{card}\left\{ j \in J : \ \varphi_j\Big|_{U_\varepsilon(x)} \neq 0 \right\} < \infty$$

Свойства локально конечных семейств функций

1°. *Если $\{\varphi_i;\ i \in I\}$ – локально конечное семейство функций, то любое его подсемейство $\{\varphi_{i_j};\ j \in J\}$ тоже будет локально конечным.*

2°. *Семейство функций $\{\varphi_i;\ i \in I\}$ локально конечно тогда и только тогда, когда семейство их носителей $\{\operatorname{supp} \varphi_i;\ i \in I\}$ локально конечно.*

3°. *Для каждого локально конечного семейства функций $\{\varphi_i;\ i \in I\}$ в евклидовом пространстве X справедливо равенство*
$$\operatorname{supp}\Big(\sum_{i \in I} |\varphi_i|\Big) = \bigcup_{i \in I} \operatorname{supp} \varphi_i \tag{14.1.114}$$

4°. *Сумма $\sum_{i \in I} \varphi_i$ локально конечного семейства $\{\varphi_i;\ i \in I\}$ бесконечно гладких функций на $U \subseteq \mathbb{R}^n$ тоже будет бесконечно гладкой функцией на $U \subseteq \mathbb{R}^n$.*

Доказательство. 2. Семейство функций $\{\varphi_i;\ i \in I\}$ локально конечно тогда и только тогда, когда множества точек, где функции φ_j отличны от нуля
$$\{x \in U : \ \varphi_j(x) \neq 0\}$$
образуют локально конечную систему в смысле определения на с.797. Поэтому в силу свойства 2° на с.797, это эквивалентно тому, что замыкания таких множеств, то есть носители $\{\operatorname{supp} \varphi_j;\ j \in J\}$ функций φ_j образуют локально конечную систему множеств. □

Разбиение единицы.

- Семейство функций $\{\eta_j;\ j \in J\}$, определенных на открытом множестве $U \subseteq \mathbb{R}^n$, называется *разбиением единицы* на U, если
  - функции $\{\eta_j;\ j \in J\}$ бесконечно гладкие на U,
  $$\eta_j \in \mathcal{C}^\infty(U)$$
  - семейство $\{\eta_j;\ j \in J\}$ локально конечно;
  - значения каждой функции η_j лежат между нулем и единицей:
  $$\forall x \in U \qquad 0 \leqslant \eta_j(x) \leqslant 1$$
  - в каждой точке $x \in U$ сумма значений η_j равна единице:
  $$\forall x \in U \qquad \sum_{j \in J} \eta_j(x) = 1$$

  - Говорят, что разбиение единицы $\{\eta_j;\ j \in J\}$ на U
    - *финитно*, если все входящие в него функции η_j финитны (то есть их носители $\operatorname{supp} \eta_j$ компактны);

— *подчинено покрытию* $\{U_i;\ i\in I\}$, если для любого индекса $j\in J$ найдется индекс $i\in I$ такой, что носитель функции η_j содержится в множестве U_i:
$$\operatorname{supp}\eta_j\subseteq U_i$$

— *комбинаторно подчинено покрытию* $\{U_i;\ i\in I\}$, если их множества индексов совпадают
$$I=J$$
и для всякого индекса $i\in I$
$$\operatorname{supp}\eta_i\subseteq U_i$$

Теорема 14.1.32. *Пусть U – открытое множество в евклидовом пространстве X. Для всякого открытого покрытия $\{U_i,\ i\in I\}$ множества U найдется подчиненное ему финитное разбиение единицы $\varphi_j;\ j\in J$.*

Доказательство. Прежде всего, нужно дважды применить теорему 13.3.14. Сначала, пользуясь ею, подберем для $\{U_i,\ i\in I\}$ локально-конечное покрытие $\{V_j,\ j\in J\}$, состоящее из ограниченных открытых множеств и строго вписанное в $\{U_i,\ i\in I\}$:
$$\forall j\in J\quad \exists i\in I\quad \overline{V_j}\subseteq U_i \tag{14.1.115}$$
После этого по теореме 13.3.15, подберем для $\{V_j,\ j\in J\}$ локально-конечное покрытие $\{W_j,\ j\in J\}$, комбинаторно вписанное в $\{V_j,\ j\in J\}$:
$$\forall j\in J\quad \overline{W_j}\subseteq V_j$$

Поскольку W_j содержится в ограниченном множестве V_j, оно само ограничено. Значит, $\overline{W_j}$ – компакт в $\mathbb{R}^n$. Поэтому по тореме 14.1.29 можно подобрать функцию $\varphi_j\in\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ такую, что
$$0\leqslant\varphi_j\leqslant 1\qquad \varphi_j\Big|_{\overline{W_j}}=1,\qquad \varphi_j\Big|_{\mathbb{R}^n\setminus V_j}=0$$

Строгие носители функций φ_j содержатся в множествах V_j
$$\{x\in U:\ \varphi_j(x)\ne 0\}\subseteq V_j \tag{14.1.116}$$
и, поскольку семейство $\{V_j;\ j\in J\}$ локально конечно, строгие носители функций φ_j тоже образуют локально конечное семейство, то есть система функций $\{\varphi_j;\ j\in J\}$ локально конечна. Значит, функция
$$\varphi(x)=\sum_{j\in J}\varphi_j(x)$$
определена на $\mathbb{R}^n$ и является бесконечно гладкой. Для любой точки $x\in U$ найдется множество W_k, содержащее ее
$$x\in W_k$$
(поскольку $\{W_j;\ j\in J\}$ образуют покрытие U). Значит,
$$\varphi_k(x)=1$$
и поэтому
$$\varphi(x)=\sum_{j\in J}\varphi_j(x)\geqslant\sum_{j\ne k}\underbrace{\varphi_j(x)}_{\substack{\vee\!\!/\\ 0}}+\underbrace{\varphi_k(x)}_{\substack{\parallel\\ 1}}\geqslant 1$$

Положим
$$\eta_j(x)=\frac{\varphi_j(x)}{\varphi(x)}$$
Тогда (как и φ_j) функции η_j тоже гладкие на U и тоже образуют локально конечное семейство. Более того, каждая η_j лежит между нулем и единицей, потому что
$$0\leqslant\varphi_j\leqslant\varphi\quad\Longrightarrow\quad 0\leqslant\underbrace{\frac{\varphi_j}{\varphi}}_{\substack{\parallel\\ \eta_j}}\leqslant\frac{\varphi}{\varphi}=1$$

Значит, $\{\eta_j;\ j\in J\}$ – разбиение единицы на U.

Из (14.1.116) следует,

$$\mathsf{supp}\,\eta_j=\mathsf{supp}\,\varphi_j\subseteq\overline{V_j}$$

поэтому носители функций η_j должны быть компактны. А из (14.1.115) следует, что разбиение единицы $\{\eta_j;\ j\in J\}$ подчинено покрытию $\{U_i;\ i\in I\}$:

$$\forall j\in J\quad \exists i\in I\quad U_i\supseteq\overline{V_j}\supseteq\mathsf{supp}\,\varphi_j=\mathsf{supp}\,\eta_j.$$

□

Теорема 14.1.33. *Пусть U – открытое множество в евклидовом пространстве X. Для всякого открытого покрытия $\{U_i,\ i\in I\}$ множества U найдется комбинаторно подчиненное ему разбиение единицы $\{\theta_i;\ i\in I\}$.*

Доказательство. По теореме 14.1.32, можно подобрать разбиение единицы $\{\eta_j;\ j\in J\}$, подчиненное $\{U_i;\ i\in I\}$

$$\forall j\in J\qquad \exists i\in I\qquad \mathsf{supp}\,\eta_j\subseteq U_i$$

Зафиксируем для каждого индекса $j\in J$ какой-нибудь индекс $f(j)\in I$ такой, что

$$\mathsf{supp}\,\eta_j\subseteq U_{f(j)}$$

У нас получится некое отображение $f:J\to I$. Положим

$$\theta_i=\sum_{\substack{j\,\in\,J\,:\\ f(j)\,=\,i}}\eta_j$$

(суммируются все функции η_j, у которых индекс j обладает свойством $f(j)=i$). Тогда

1) функции θ_i будут бесконечно гладкими на U, как суммы локально конечных семейств бесконечно гладких функций на U (свойство 4° на с.835),
2) получающееся семейство $\{\theta_i;\ i\in I\}$ будет в сумме давать единицу, потому что

$$\sum_{i\in I}\theta_i=\sum_{i\in I}\sum_{\substack{j\,\in\,J\,:\\ f(j)\,=\,i}}\eta_j=\underbrace{\sum_{i\notin f(J)}\sum_{\substack{j\,\in\,J\,:\\ f(j)\,=\,i}}\eta_j}_{\substack{\parallel\\ 0,\\ \text{потому что}\\ i\notin f(J)\ \Rightarrow\ \nexists j\in J:\ \ f(j)=i}}+\sum_{i\in f(J)}\sum_{\substack{j\,\in\,J\,:\\ f(j)\,=\,i}}\eta_j=\sum_{j\in J}\eta_j=1$$

3) семейство $\{\theta_i;\ i\in I\}$ будет комбинаторно подчинено покрытию $\{U_i;\ i\in I\}$, потому что

$$\forall j\in J\qquad \mathsf{supp}\,\eta_j\subseteq U_{f(j)}$$

$$\Downarrow$$

$$\forall j\in J\qquad \Big(f(j)=i\quad\Longrightarrow\quad \mathsf{supp}\,\eta_j\subseteq U_i\Big)$$

$$\Downarrow$$

$$\mathsf{supp}\,\theta_i=\mathsf{supp}\Bigg(\sum_{\substack{j\,\in\,J\,:\\ f(j)\,=\,i}}\eta_j\Bigg)=\mathsf{supp}\Bigg(\sum_{\substack{j\,\in\,J\,:\\ f(j)\,=\,i}}|\eta_j|\Bigg)=(14.1.114)=\bigcup_{\substack{j\,\in\,J\,:\\ f(j)\,=\,i}}\mathsf{supp}\,\eta_j\subseteq U_i$$

4) остается показать, что семейство $\{\theta_i;\ i\in I\}$ будет локально конечно; пусть $x\in U$; поскольку семейство $\{\eta_j;\ j\in J\}$ локально конечно, по свойству 2° на с.835 семейство $\{\mathsf{supp}\,\eta_j;\ j\in J\}$ тоже локально конечно; значит, найдется $\varepsilon>0$ такое, что множество

$$J_x=\{j\in J:\quad \mathsf{supp}\,\eta_j\cap U_\varepsilon(x)\neq\varnothing\}$$

будет конечно; отсюда следует, что множество

$$I_x=\{i\in I:\quad \mathsf{supp}\,\theta_i\cap U_\varepsilon(x)\neq\varnothing\}$$

тоже будет конечно, потому что оно является образом конечного множества J_x при отображении $f : J \to I$:

$$I_x = f(J_x)$$

это доказывается следующей цепочкой:

$$i \in I_x$$

$$\Updownarrow$$

$$\bigcup_{\substack{j \in J: \\ f(j)=i}} \Big(\operatorname{supp}\eta_j \cap U_\varepsilon(x)\Big) = \Big(\bigcup_{\substack{j \in J: \\ f(j)=i}} \operatorname{supp}\eta_j\Big) \cap U_\varepsilon(x) = (14.1.114) =$$

$$= \operatorname{supp}\Big(\sum_{\substack{j \in J: \\ f(j)=i}} |\eta_j|\Big) \cap U_\varepsilon(x) = \operatorname{supp}\Big(\sum_{\substack{j \in J: \\ f(j)=i}} \eta_j\Big) \cap U_\varepsilon(x) = \operatorname{supp}\theta_i \cap U_\varepsilon(x) \neq \varnothing$$

$$\Updownarrow$$

$$\exists j \in J \qquad f(j) = i \quad \& \quad \operatorname{supp}\eta_j \cap U_\varepsilon(x) \neq \varnothing$$

$$\Updownarrow$$

$$\exists j \in J \qquad f(j) = i \quad \& \quad j \in J_x$$

$$\Updownarrow$$

$$\exists j \in J_x \qquad f(j) = i$$

$$\Updownarrow$$

$$f(J_x) \ni i.$$

□

§ 2 Гладкие отображения евклидовых пространств

(a) Непрерывность и гладкость

Непрерывные отображения. Отображение $\varphi : X \hookrightarrow Y$ между двумя евклидовыми пространствами X и Y называется *непрерывным*, если оно перестановочно с пределом последовательности

$$\lim_{n\to\infty} \varphi(x_n) = \varphi(\lim_{n\to\infty} x_n).$$

Это означает, что для любой сходящейся последовательности x_n в области определения $\mathsf{D}(\varphi)$

$$x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x$$

соответствующая последовательность значений φ также сходится, причем к значению φ в пределе:

$$\varphi(x_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \varphi(x).$$

Из теоремы 13.2.2 следует

Теорема 14.2.1. *Для отображения евклидовых пространств $\varphi : X \hookrightarrow Y$ следующие условия эквивалентны:*

(i) *φ непрерывно,*

(ii) *для любого базиса $e = (e_1, ..., e_m)$ в Y все функции*

$$f^i = \left[\frac{1}{e}\right]^i \circ \varphi$$

непрерывны;

(iii) *для какого-нибудь базиса* $e = (e_1, ..., e_m)$ *в* Y *все функции*

$$f^i = \left[\frac{1}{e}\right]^i \circ \varphi$$

непрерывны.

Теорема 14.2.2. [10] *Образом всякого компакта* K *при непрерывном отображении* $\varphi : X \hookrightarrow Y$ *евклидовых пространств (такого, что* $K \subseteq \mathsf{D}(\varphi)$*) является компакт* $\varphi(K) \subseteq Y$*.*

Теорема 14.2.3. *Образом всякого связного множества* L *при непрерывном отображении* $\varphi : X \hookrightarrow Y$ *евклидовых пространств (такого, что* $L \subseteq \mathsf{D}(\varphi)$*) является связное множество* $\varphi(L) \subseteq Y$*.*

Вложения.

- Отображение евклидовых пространств $\varphi : X \hookrightarrow Y$ называется *открытым*, если
  1) его область определения $\mathsf{D}(\varphi)$ является открытым множеством в X, и
  2) для любого открытого множества $U \subseteq \mathsf{D}(\varphi)$ найдется открытое множество $V \subseteq Y$, пересечение которого с образом $\mathsf{R}(\varphi) = \varphi(\mathsf{D}(\varphi))$ отображения φ совпадает с $\varphi(U)$:
  $$\varphi(U) = \mathsf{R}(\varphi) \cap V.$$
- Отображение евклидовых пространств $\varphi : X \hookrightarrow Y$ называется *вложением*, если оно непрерывно, инъективно и открыто.

◇ **14.2.1.** *Непрерывное, инъективное, но не открытое отображение.* Рассмотрим отображение $\sigma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, заданное формулой

$$\sigma(s) = \left(\frac{s}{s^4+1}, \frac{s^3}{s^4+1}\right), \qquad s \in \mathbb{R},$$

или, что эквивалентно, уравнениями

$$x = \frac{s}{s^4+1}, \quad y = \frac{s^3}{s^4+1}, \qquad s \in \mathbb{R}.$$

Оно непрерывно, потому что функции в правых частях непрерывны.

Покажем, что оно инъективно. Предположим, что $\sigma(s) = \sigma(t)$ для некоторых $s \neq t$. Тогда либо $s \neq 0$, либо $t \neq 0$. Более того, должны выполняться оба эти условия,

$$s \neq 0 \quad \& \quad t \neq 0, \tag{14.2.117}$$

потому что здесь они эквивалентны:

$$s \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad 0 \neq \sigma(s) = \sigma(t) \quad \Leftrightarrow \quad t \neq 0.$$

Кроме того, из условия $\sigma(s) = \sigma(t)$ следует, что s и t имеют одинаковый знак:

$$\operatorname{sgn} s = \operatorname{sgn} t \tag{14.2.118}$$

Заметив это, мы получаем цепочку:

$$\sigma(s) = \sigma(t)$$

$$\Downarrow$$

$$\left(\frac{s}{s^4+1}, \frac{s^3}{s^4+1}\right) = \left(\frac{t}{t^4+1}, \frac{t^3}{t^4+1}\right)$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{s}{s^4+1} = \frac{t}{t^4+1} \quad \& \quad \frac{s^3}{s^4+1} = \frac{t^3}{t^4+1}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{s}{s^4+1} = \frac{t}{t^4+1} \quad \& \quad \underbrace{\frac{s}{s^4+1}}_{\substack{\| \\ \frac{t}{t^4+1} \\ \neq \ (14.2.117) \\ 0}} \cdot s^2 = \frac{t}{t^4+1} \cdot t^2$$

$$\Downarrow$$

$$s^2 = t^2$$

$$\Downarrow$$

$$s = t \quad \vee \quad \underbrace{s = -t}_{\substack{\text{невозможно,} \\ \text{в силу (14.2.117) и (14.2.118)}}}$$

$$\Downarrow$$

$$s = t$$

Убедимся, что σ не открыто. Это можно понять, глядя на его образ, который выглядит как повернутая на 45° цифра 8:

Аккуратное доказательство выглядит так.

[10] Этот результат используется в лемме 15.3.2

При $t \to \infty$ точка на плоскости $\sigma(t) \in \mathbb{R}^2$ стремится к началу координат, то есть к значению отображения σ в точке 0:

$$\sigma(t) = \left(\frac{t}{t^4+1}, \frac{t^3}{t^4+1}\right) \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} (0,0) = \sigma(0).$$

Отсюда следует, что, например, для окрестности нуля $U = (-1,1)$ не существует открытого множества $V \subseteq \mathbb{R}^2$ со свойством $\sigma(U) = \mathsf{R}(\sigma) \cap V$.

Действительно, если бы такое множество существовало, то оно должно было бы содержать точку $(0,0) = \sigma(0)$ (потому что $0 \in U$, и значит, $\sigma(0) \in \sigma(U) \subseteq V$). Но тогда V должно было бы содержать и точки $\sigma(t)$ при достаточно больших t:

$$\sigma(t) \in V, \qquad |t| > E$$

для некоторого $E > 0$, причем можно выбрать $E > 1$. Мы получили бы что $\sigma(U)$ тоже должно содержать эти точки,

$$\sigma(t) \in \mathsf{R}(\sigma) \cap V = \sigma(U), \qquad |t| > E,$$

а это неверно.

Теорема 14.2.4. *Непрерывное инъективное отображение $\sigma : K \to Y$ компакта K в евклидово пространство Y всегда является вложением.*

- Пусть S и T – подмножества в евклидовых пространствах. Отображение $\varphi : S \to T$ называется *гомеоморфизмом*, если оно непрерывно, биективно, и обратное ему отображение $\varphi^{-1} : S \leftarrow T$ тоже непрерывно. Это эквивалентно тому, что $\varphi : S \to T$ биективно, непрерывно и открыто.

Теорема 14.2.5. *Пусть X, Y, Z – евклидовы пространства, $S \subseteq X$ и $T \subseteq Y$, $\sigma : S \to Z$ – непрерывное отображение, и $\tau : T \to Z$ – вложение со свойством*

$$\mathsf{R}(\sigma) \subseteq \mathsf{R}(\tau).$$

Тогда существует непрерывное отображение $\varphi : S \to T$, выражающее σ через τ:

$$\sigma = \tau \circ \varphi. \tag{14.2.119}$$

Если вдобавок оба отображения $\sigma : S \to Z$ и $\tau : T \to Z$ являются вложениями и имеют один и тот же образ

$$\mathsf{R}(\sigma) = \mathsf{R}(\tau),$$

то соответствующее отображение $\varphi : S \to T$ является гомеоморфизмом.

Доказательство. 1. Отображение τ является биекцией между своими областью определения $\mathsf{D}(\tau)$ и образом $\mathsf{R}(\tau)$. Значит, существует обратное отображение $\tau^{-1} : \mathsf{R}(\tau) \to \mathsf{D}(\varkappa)$. Поэтому если положить

$$\varphi = \tau^{-1} \circ \sigma \tag{14.2.120}$$

то это отображение будет удовлетворять тождеству (14.2.119):

$$\tau \circ \varphi = \tau \circ \tau^{-1} \circ \sigma = \sigma.$$

Нужно проверить непрерывность отображения φ.

2. Пусть теперь оба отображения $\sigma : S \to Z$ и $\tau : T \to Z$ являются вложениями и имеют один и тот же образ $\mathsf{R}(\sigma) = \mathsf{R}(\tau)$. Тогда поменяв местами σ и τ, мы точно так же докажем существование непрерывного отображения ψ, удовлетворяющего

$$\tau = \sigma \circ \psi \tag{14.2.121}$$

При этом из инъективности σ мы получим

$$\sigma = (14.2.119) = \tau \circ \varphi = (14.2.121) = \sigma \circ \psi \circ \varphi \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{id}_U = \psi \circ \varphi$$

а из инъективности τ –

$$\tau = (14.2.121) = \sigma \circ \psi = (14.2.119) = \tau \circ \varphi \circ \psi \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{id}_V = \varphi \circ \psi.$$

$\square$

◇ **14.2.2.** Покажем, что требование, что τ должно быть вложением (а во второй части, что σ и τ оба обладают этим свойством), существенно в теореме 14.2.5. Рассмотрим еще раз пример 14.2.1 и сделаем замену переменной в области параметров:

$$s = \begin{cases} \frac{1}{t}, & t \neq 0 \\ 0, & t = 0 \end{cases}, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Мы получим новое отображение

$$\tau(t) = \left(\frac{t^3}{t^4+1}, \frac{t}{t^4+1} \right), \qquad t \in \mathbb{R},$$

которое в более привычной форме можно описать уравнениями

$$x = \frac{t^3}{t^4+1}, \quad y = \frac{t}{t^4+1}, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Отображение τ связано со старым отображением σ биективной заменой переменных

$$\sigma = \tau \circ \varphi, \quad \tau = \sigma \circ \psi,$$

где

$$\varphi(s) = \begin{cases} \frac{1}{t}, & t \neq 0 \\ 0, & t = 0 \end{cases}, \qquad t \in \mathbb{R},$$

и

$$\psi(t) = \begin{cases} \frac{1}{s}, & s \neq 0 \\ 0, & s = 0 \end{cases}, \qquad s \in \mathbb{R}.$$

Как следствие, σ и τ имеют один и тот же образ:

$$\mathsf{R}(\sigma) = \mathsf{R}(\tau).$$

Но функции перехода при этом, φ и ψ, разрывны.

Непрерывно дифференцируемые и гладкие отображения.

- *Производной отображения евклидовых пространств $\varphi : X \hookrightarrow Y$ в точке $a \in \mathsf{D}(\varphi)$ по направлению вектора $p \in X$* называется вектор

$$\partial_p \varphi(a) = \lim_{t \to 0} \frac{\varphi(a+tp) - \varphi(a)}{t} \qquad (14.2.122)$$

- *Дифференциалом (1-го порядка)* отображения евклидовых пространств $\varphi : X \hookrightarrow Y$ в точке $a \in \mathsf{D}(f)$ называется отображение $\mathsf{d}\, f(a) : X \hookrightarrow Y$, которое каждому вектору $p \in X$ ставит в соответствие производную отображения φ в точке a по направлению p:

$$\mathsf{d}\, f(a)[p] = \partial_p f(a) = \lim_{t \to 0} \frac{f(a+tp) - f(a)}{t} \qquad (14.2.123)$$

  Понятно, что дифференциал $\mathsf{d}\,\varphi$ является отображением $\mathsf{d}\,\varphi : X \hookrightarrow \mathcal{L}(X, Y)$.

- *Частными производными* отображения $\varphi : X \hookrightarrow Y$ в точке $a \in \mathsf{D}(\varphi)$ относительно базиса $e = (e_1, ..., e_n)$ в X называются векторы

$$\nabla_i \varphi(x) = \mathsf{d}\,\varphi(a)[e_i] = \partial_{e_i} \varphi(a), \qquad i = 1, ..., n. \qquad (14.2.124)$$

Теорема 14.2.6. *Для отображения евклидовых пространств $\varphi : X \hookrightarrow Y$ с открытой областью определения $\mathsf{D}(\varphi)$ следующие условия эквивалентны:*

(i) *в каждой точке $a \in \mathsf{D}(f)$ существует дифференциал $\mathsf{d}\,\varphi(a)$, являющийся непрерывным отображением $\mathsf{d}\,\varphi : \mathsf{D}(\varphi) \to \mathcal{L}(X, Y)$ и удовлетворяющий асимпотическому соотношению*

$$\varphi(x) = \varphi(a) + \mathsf{d}\,\varphi(a)[x-a] + \underset{x \to a}{\mathbf{o}}\Big(|x-a|\Big); \qquad (14.2.125)$$

(ii) *для всякого вектора $p \in X$ отображение φ имеет производную $\partial_p \varphi(a)$ по направлению p в каждой точке $a \in \mathsf{D}(f)$, причем отображение $\partial_p \varphi : \mathsf{D}(f) \to Y$ непрерывно;*

(iii) *для всякого базиса $e = (e_1, ..., e_n)$ в X отображение φ имеет частные производные $\nabla_1 \varphi(a)$,..., $\nabla_n \varphi(a)$ относительно этого базиса в каждой точке $a \in \mathsf{D}(f)$, причем отображения $\nabla_i \varphi : \mathsf{D}(\varphi) \to Y$ непрерывны;*

(iv) *существует базис $e = (e_1, ..., e_n)$ в X, относительно которого отображение φ имеет частные производные $\nabla_1 \varphi(a)$,...,$\nabla_n \varphi(a)$ в каждой точке $a \in \mathsf{D}(f)$, причем отображения $\nabla_i \varphi : \mathsf{D}(\varphi) \to Y$ непрерывны.*

Если эти условия выполнены, то дифференциал $\mathsf{d}\,\varphi$ *отображения* φ *выражается через его частные производные по произвольному базису* $e = (e_1, ..., e_n)$ *по формуле*

$$\mathsf{d}\,\varphi(a) = \sum_{i=1}^{n} \nabla_i \varphi(a) \cdot \left[\frac{1}{e}\right]^i, \qquad a \in \mathsf{D}(f). \tag{14.2.126}$$

Иными словами, справедливо тождество

$$\mathsf{d}\,\varphi(a)[p] = \partial_p \varphi(a) = \left\langle \nabla\varphi(a), \left[\frac{p}{e}\right] \right\rangle = \nabla_1\varphi(a) \cdot \left[\frac{p}{e}\right]^1 + ... + \nabla_n\varphi(a) \cdot \left[\frac{p}{e}\right]^n, \qquad a \in \mathsf{D}(\varphi),\ p \in X. \tag{14.2.127}$$

- Отображение евклидовых пространств $\varphi : X \hookrightarrow Y$ называется
  - *непрерывно дифференцируемым* (порядка 1), если его область определения $\mathsf{D}(\varphi)$ открыта в X, и оно удовлетворяет условиям (i)-(iv) теоремы 14.2.6,
  - *непрерывно дифференцируемым порядка* m, если оно непрерывно дифференцируемо порядка 1, и его дифференциал $\mathsf{d}\,\varphi : X \hookrightarrow \mathcal{L}(X, Y)$ является непрерывно дифференцируемым отображением порядка $m - 1$ (это эквивалентно тому, что все его частные производные $\nabla_1\varphi,...,\nabla_n\varphi$ относительно какого-нибудь базиса $e = (e_1, ..., e_n)$ в X являются непрерывно дифференцируемыми отображениями порядка $m - 1$),
  - *гладким*, если для любого $m \in \mathbb{N}$ оно является непрерывно дифференцируемым порядка m.

! **14.2.3.** Из соотношения (14.2.125) следует, что *непрерывно дифференцируемое отображение (порядка 1, а значит и любого другого порядка) всегда непрерывно.*

- Если $\varphi : X \hookrightarrow Y$ – отображение евклидовых пространств и $b = (b_1, ..., b_n)$ – базис в пространстве Y, то функции
$$\varphi^i = \left[\frac{1}{b}\right]^i \circ \varphi : X \hookrightarrow \mathbb{R} \tag{14.2.128}$$
называются *компонентами отображения* φ *в базисе* b.
- Если дополнительно $e = (e_1, ..., e_m)$ – базис в X, то матрица
$$\begin{pmatrix} \nabla_1\varphi^1(x) & ... & \nabla_m\varphi^1(x) \\ & ... & \\ \nabla_1\varphi^n(x) & ... & \nabla_m\varphi^n(x) \end{pmatrix} \tag{14.2.129}$$
называется *матрицей Якоби* отображения φ (относительно базисов e и b).

◇ **14.2.4.** Если X, Y, Z – евклидовы пространства, то отображения взятия композиции линейных операторов

$$(\varphi, \chi) \in \mathcal{L}(X, Y) \times \mathcal{L}(Y, Z) \mapsto \chi \circ \varphi \in \mathcal{L}(X, Z)$$

является гладким.

Теорема 14.2.7. *Для отображения евклидовых пространств* $\varphi : X \hookrightarrow Y$ *следующие условия эквивалентны:*

(i) *φ является непрерывно диффререцируемым порядка m (соответственно, гладким);*

(ii) *компоненты φ^i отображения φ в произвольном базисе $b = (b_1, ..., b_n)$ в Y являются непрерывно дифференцируемыми порядка m (соответственно, гладкими) функциями;*

(ii) *компоненты φ^i отображения φ в каком-нибудь базисе $b = (b_1, ..., b_n)$ в Y являются непрерывно дифференцируемыми порядка m (соответственно, гладкими) функциями.*

Теорема 14.2.8. [11] *Пусть $\varphi : X \hookrightarrow Y$ – непрерывно дифференцируемое отображение евклидовых пространств, и K – компакт в $\mathsf{D}(\varphi)$ со следующими свойствами:*

[11]Этот результат используется при доказательстве теоремы 16.2.8

(a) *φ инъективно на K:*

$$\forall x, y \in K \qquad x \neq y \quad \Longrightarrow \quad \varphi(x) \neq \varphi(y)$$

(b) *всюду на K отображение φ имеет невырожденный дифференциал:*

$$\forall x \in K \quad \forall p \in \mathbb{R}^l,\ p \neq 0 \qquad \mathsf{d}\,\varphi(x)[p] \neq 0$$

Тогда найдутся константы $h > 0$ и $H > 0$ такие, что справедливо двойное неравенство

$$h \cdot |x - y| \leqslant |\varphi(x) - \varphi(y)| \leqslant H \cdot |x - y|, \qquad x, y \in K$$

(b) Формула Тейлора для непрерывно дифференцируемых отображений и ее следствия

- *Дифференциалом (порядка m)* непрерывно дифференцируемого порядка m отображения евклидовых пространств $\varphi : X \hookrightarrow Y$ в точке $a \in X$ называется отображение

$$\mathsf{d}^m \varphi(a) : X \to Y,$$

определяемое индуктивными правилами, аналогичными (14.1.34) и (14.1.35):

$$\mathsf{d}^m f(a)[p] = \lim_{t \to 0} \frac{\mathsf{d}^{m-1} f(a + tp)[p] - \mathsf{d}^{m-1} f(a)[p]}{t}, \qquad p \in X \tag{14.2.130}$$

где дифференциал нулевого порядка определяется формулой

$$\mathsf{d}^0 f(a)[p] = f(a) \tag{14.2.131}$$

Формулы Тейлора для гладких отображений. Для гладких отображений евклидовых пространств $\varphi : X \hookrightarrow Y$ с $\dim Y > 1$ теорема Тейлора 14.1.12 с остаточным членом в форме Лагранжа не верна. Но два других ее варианта сохраняют справедливость:

Теорема 14.2.9. (Тейлора с равномерной оценкой остаточного члена) *Пусть $\varphi : X \hookrightarrow Y$ – непрерывно дифференцируемое отображение евклидовых пространств порядка $m + 1$. Тогда для всякого компакта $K \subset \mathsf{D}(\varphi)$ и любого числа $m \in \mathbb{N}$ найдутся два числа $\delta > 0$ и $M > 0$ такие что справедлива формула*

$$\varphi(x + p) = \varphi(x) + \frac{1}{1!}\,\mathsf{d}\,\varphi(x)[p] + \frac{1}{2!}\,\mathsf{d}^2 \varphi(x)[p] + ... + \frac{1}{m!}\,\mathsf{d}^m \varphi(x)[p] + R_m(x, p), \qquad x \in K,\ |p| \leqslant \delta$$

где отображение $R_m(x, p)$ называемое остатком формулы Тейлора порядка m для φ, удовлетворяет следующей оценке:

$$|R_m(x, p)| \leqslant M \cdot |p|^{m+1}, \qquad x \in K,\ |p| \leqslant \delta$$

Теорема 14.2.10. (Тейлора с остаточным членом в форме Пеано) *Пусть $\varphi : X \hookrightarrow Y$ – непрерывно дифференцируемое отображение евклидовых пространств порядка $m + 1$. Тогда для всякой точки $a \in \mathsf{D}(\varphi)$ и любого $m \in \mathbb{N}$*

$$\varphi(a + p) = \varphi(a) + \frac{1}{1!}\,\mathsf{d}\,\varphi(a)[p] + \frac{1}{2!}\,\mathsf{d}^2 \varphi(a)[p] + ... + \frac{1}{m!}\,\mathsf{d}^m \varphi(a)[p] + \underset{p \to 0}{\mathbf{o}}\left(|p|^m\right) \tag{14.2.132}$$

Композиция отображений. Вспомним, что в (c) мы определили понятие композиции двух числовых функций. Точно так же определяется композиция любых вообще отображений, и, в частности, отображений евклидовых пространств.

- Пусть $\varphi : X \hookrightarrow Y$ и $\chi : Y \hookrightarrow Z$ – отображения евклидовых пространств. Тогда отображение $\psi : X \hookrightarrow Z$, действующее по формуле

$$\psi(x) = \chi(y)\Big|_{y = \varphi(x)} = \chi(\varphi(x)), \qquad x \in \varphi^{-1}(\mathsf{D}(\chi))$$

называется *композицией* отображений $\chi(y)$ и $\varphi(x)$, и обозначается $\chi \circ \varphi$:

$$(\chi \circ \varphi)(x) = \chi(y)\Big|_{y = \varphi(x)} = \chi(\varphi(x))$$

Свойства композиции отображений евклидовых пространств:

1^0. *Если $\varphi : X \hookrightarrow Y$ и $\chi : Y \hookrightarrow Z$ – непрерывные отображения евклидовых пространств, то их композиция $\chi \circ \varphi : X \hookrightarrow Z$ – тоже непрерывное отображение евклидовых пространств.*

2^0. *Если $\varphi : X \hookrightarrow Y$ и $\chi : Y \hookrightarrow Z$ – непрерывно дифференцируемые отображения евклидовых пространств порядка 1, то их композиция $\chi \circ \varphi : X \hookrightarrow Z$ – тоже непрерывно дифференцируемое отображение евклидовых пространств порядка 1, причем его дифференциал удовлетворяет тождеству*

$$\mathsf{d}(\chi\circ\varphi)(x)[p] = \mathsf{d}\,\chi(\varphi(x))\Big[\,\mathsf{d}\,\varphi(x)[p]\Big], \quad x \in \mathsf{D}(\chi\circ\varphi). \tag{14.2.133}$$

3^0. *Если $\varphi : X \hookrightarrow Y$ и $\chi : Y \hookrightarrow Z$ – непрерывно дифференцируемые отображения евклидовых пространств порядка 2, то их композиция $\chi \circ \varphi : X \hookrightarrow Z$ – тоже непрерывно дифференцируемое отображение евклидовых пространств порядка 2, причем его второй дифференциал удовлетворяет тождеству*

$$\mathsf{d}^2(\chi\circ\varphi)(x)[p] = \mathsf{d}^2\,\chi(\varphi(x))\Big[\,\mathsf{d}\,\varphi(x)[p]\Big] + \mathsf{d}\,\chi(\varphi(x))\Big[\,\mathsf{d}^2\,\varphi(x)[p]\Big], \quad x \in \mathsf{D}(\chi\circ\varphi). \tag{14.2.134}$$

4^0. *Если $\varphi : X \hookrightarrow Y$ и $\chi : Y \hookrightarrow Z$ – гладкие отображения евклидовых пространств, то их композиция $\chi \circ \varphi : X \hookrightarrow Z$ – тоже гладкое отображение.*

Доказательство. 1. Пусть $\varphi : X \hookrightarrow Y$ и $\chi : Y \hookrightarrow Z$ – непрерывные отображения. Тогда для всякой сходящейся в $\mathsf{D}(\varphi)$ последовательности $x_n \to x$ соответствующая последовательность значений φ будет сходиться в Y, потому что φ – непрерывное отображение: $\varphi(x_n) \to \varphi(x)$. Если при этом $\varphi(x_n)$ и $\varphi(x)$ лежат в $\mathsf{D}(\psi)$, то в силу непрерывности χ мы получаем $\chi(\varphi(x_n)) \to \chi(\varphi(x))$.

2. Пусть $\varphi : X \hookrightarrow Y$ и $\chi : Y \hookrightarrow Z$ – непрерывно дифференцируемые отображения. Тогда

$$\begin{aligned}
\chi\big(\varphi(x+p)\big) &= (14.2.132) = \chi\big(\varphi(x) + \mathsf{d}\,\varphi(x)[p] + \underset{p\to 0}{\mathbf{o}}(|p|)\big) = (14.2.132) = \\
&= \chi\big(\varphi(x)\big) + \mathsf{d}\,\chi\big(\varphi(x)\big)\big[\,\mathsf{d}\,\varphi(x)[p] + \underset{p\to 0}{\mathbf{o}}(|p|)\big] + \underset{p\to 0}{\mathbf{o}}\big(\,\mathsf{d}\,\varphi(x)[p] + \underset{p\to 0}{\mathbf{o}}(|p|)\big) = \\
&= \chi\big(\varphi(x)\big) + \mathsf{d}\,\chi\big(\varphi(x)\big)\big[\,\mathsf{d}\,\varphi(x)[p]\big] + \mathsf{d}\,\chi\big(\varphi(x)\big)\big[\underset{p\to 0}{\mathbf{o}}(|p|)\big] + \underset{p\to 0}{\mathbf{o}}\big(\,\mathsf{d}\,\varphi(x)[p] + \underset{p\to 0}{\mathbf{o}}(|p|)\big) = \\
&= \chi\big(\varphi(x)\big) + \mathsf{d}\,\chi\big(\varphi(x)\big)\big[\,\mathsf{d}\,\varphi(x)[p]\big] + \underset{p\to 0}{\mathbf{o}}(|p|)\big).
\end{aligned}$$

Отсюда следует, во-первых, что дифференциал композиции $\chi\circ\varphi$ существует и выражается формулой (14.2.133), потому что

$$\begin{aligned}
\mathsf{d}(\chi\circ\varphi)(x)[p] &= \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\cdot\Big\{\chi\big(\varphi(x+tp)\big) - \chi\big(\varphi(x)\big)\Big\} = \\
&= \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\cdot\Big\{\chi\big(\varphi(x)\big) + \mathsf{d}\,\chi\big(\varphi(x)\big)\big[\,\mathsf{d}\,\varphi(x)[tp]\big] + \underset{t\to 0}{\mathbf{o}}(|tp|)\big) - \chi\big(\varphi(x)\big)\Big\} = \\
&= \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\cdot\Big\{t\cdot\mathsf{d}\,\chi\big(\varphi(x)\big)\big[\,\mathsf{d}\,\varphi(x)[p]\big] + t\cdot\underset{t\to 0}{\mathbf{o}}(1)\big)\Big\} = \\
&= \lim_{t\to 0}\Big\{\,\mathsf{d}\,\chi\big(\varphi(x)\big)\big[\,\mathsf{d}\,\varphi(x)[p]\big] + \underset{t\to 0}{\mathbf{o}}(1)\big)\Big\} = \mathsf{d}\,\chi\big(\varphi(x)\big)\big[\,\mathsf{d}\,\varphi(x)[p]\big]
\end{aligned}$$

Во-вторых, из (14.2.133) следует, что этот дифференциал $\mathsf{d}(\chi\circ\varphi) : X \to \mathcal{L}(X,Y)$ – непрерывное отображение (по уже доказанному свойству 1°). И, в-третьих, он удовлетворяет асимптотическому соотношению (14.2.125):

$$\begin{aligned}
\chi\big(\varphi(x+p)\big) &= \chi\big(\varphi(x)\big) + \mathsf{d}\,\chi\big(\varphi(x)\big)\big[\,\mathsf{d}\,\varphi(x)[p]\big] + \underset{t\to 0}{\mathbf{o}}(|p|)\big) = \\
&= \chi\big(\varphi(x)\big) + \mathsf{d}\,\chi\big(\varphi(x)\big)\big[\,\mathsf{d}\,\varphi(x)[p]\big] + \underset{t\to 0}{\mathbf{o}}(|p|)\big).
\end{aligned}$$

То есть, $\chi\circ\varphi$ – непрерывно дифференциуремое оображение.

3. Пусть $\varphi : X \hookrightarrow Y$ и $\chi : Y \hookrightarrow Z$ – непрерывно дифференцируемые отображения порядка 2. По уже доказангому свойству 2°, композиция $\chi\circ\varphi$ является непрерывно дифференциуремым отображением, и ее дифференциал выражется через φ и χ формулой (14.2.133). Перепишем эту формулу так:

$$\mathsf{d}(\chi\circ\varphi)(x) = \mathsf{d}\,\chi(\varphi(x))\circ\mathsf{d}\,\varphi(x), \qquad x \in \mathsf{D}(\chi\circ\varphi)$$

Заметим, что здесь отображение $x \mapsto \mathsf{d}\,\varphi(x) \in \mathcal{L}(X,Y)$ непрерывно дифференцируемо порядка 1, потому что φ непрерывно дифференцируемо порядка 2, а отображение $x \mapsto \mathsf{d}\,\chi(\varphi(x)) \in \mathcal{L}(Y,Z)$ непрерывно дифференцируемо порядка 1, потому что оно является композицией $\mathsf{d}\,\chi \circ \varphi$ непрерывно дифференцируемых отображений. Отсюда следует, что отображение $x \mapsto (\mathsf{d}\,\varphi(x), \mathsf{d}\,\chi(\varphi(x))) \in \mathcal{L}(X,Y) \times \mathcal{L}(Y,Z)$ тоже непрерывно дифференцируемо порядка 1. Теперь (опять по уже доказанному свойству 2°) мы получаем, что отображение $x \mapsto \mathsf{d}(\chi\circ\varphi)(x) = \mathsf{d}\,\chi(\varphi(x)) \circ \mathsf{d}\,\varphi(x) \in \mathcal{L}(X,Z)$ непрерывно дифференцируемо как композиция двух непрерывно дифференцируемых отображений $x \mapsto (\mathsf{d}\,\varphi(x), \mathsf{d}\,\chi(\varphi(x)))$ и $(A,B) \mapsto B \circ A$ (что второе из них непрерывно дифференцируемо – отмечалось в примере 14.2.4).

Остается доказать формулу (14.2.134):

$$\begin{aligned}
\mathsf{d}^2(\chi\circ\varphi)(x)[p] &= \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\cdot\Big\{\mathsf{d}(\chi\circ\varphi)(x+tp)[p]-\mathsf{d}(\chi\circ\varphi)(x)[p]\Big\} = (14.2.133) =\\
&= \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\cdot\Big\{\mathsf{d}\,\chi\big(\varphi(x+tp)\big)\big[\mathsf{d}\,\varphi(x+tp)[p]\big]-\mathsf{d}\,\chi\big(\varphi(x)\big)\big[\mathsf{d}\,\varphi(x)[p]\big]\Big\} =\\
&= \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\cdot\Big\{\mathsf{d}\,\chi\big(\varphi(x+tp)\big)\big[\mathsf{d}\,\varphi(x+tp)[p]\big]-\mathsf{d}\,\chi\big(\varphi(x)\big)\big[\mathsf{d}\,\varphi(x+tp)[p]\big]+\\
&\qquad + \mathsf{d}\,\chi\big(\varphi(x)\big)\big[\mathsf{d}\,\varphi(x+tp)[p]\big]-\mathsf{d}\,\chi\big(\varphi(x)\big)\big[\mathsf{d}\,\varphi(x)[p]\big]\Big\} =\\
&= \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\cdot\Big\{\mathsf{d}\,\chi\big(\varphi(x+tp)\big)\big[\mathsf{d}\,\varphi(x+tp)[p]\big]-\mathsf{d}\,\chi\big(\varphi(x)\big)\big[\mathsf{d}\,\varphi(x+tp)[p]\big]\Big\}+\\
&\qquad + \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\cdot\Big\{\mathsf{d}\,\chi\big(\varphi(x)\big)\big[\mathsf{d}\,\varphi(x+tp)[p]\big]-\mathsf{d}\,\chi\big(\varphi(x)\big)\big[\mathsf{d}\,\varphi(x)[p]\big]\Big\} =\\
&= \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\cdot\Big\{\mathsf{d}\,\chi\big(\varphi(x+tp)\big)-\mathsf{d}\,\chi\big(\varphi(x)\big)\Big\}\big[\mathsf{d}\,\varphi(x+tp)[p]\big]+\\
&\qquad + \mathsf{d}\,\chi\big(\varphi(x)\big)\Big[\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\big\{\mathsf{d}\,\varphi(x+tp)[p]-\mathsf{d}\,\varphi(x)[p]\big\}\Big] = (14.2.132) =\\
&= \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\cdot\Big\{\mathsf{d}\,\chi\big(\varphi(x)+\mathsf{d}\,\varphi(x)[tp]+\underset{t\to 0}{\mathbf{o}}(t)\big)-\mathsf{d}\,\chi\big(\varphi(x)\big)\Big\}\big[\mathsf{d}\,\varphi(x+tp)[p]\big]+\\
&\qquad + \mathsf{d}\,\chi\big(\varphi(x)\big)\big[\mathsf{d}^2\,\varphi(x)[p]\big] = (14.2.132) =\\
&= \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\cdot\Big\{\mathsf{d}\,\chi\big(\varphi(x)\big)+\mathsf{d}^2\,\chi\big(\mathsf{d}\,\varphi(x)[tp]+\underset{t\to 0}{\mathbf{o}}(t)\big)+\underset{t\to 0}{\mathbf{o}}\big(\mathsf{d}\,\varphi(x)[tp]+\underset{t\to 0}{\mathbf{o}}(t)\big)-\mathsf{d}\,\chi\big(\varphi(x)\big)\Big\}\big[\mathsf{d}\,\varphi(x+tp)[p]\big]+\\
&\qquad + \mathsf{d}\,\chi\big(\varphi(x)\big)\big[\mathsf{d}^2\,\varphi(x)[p]\big] =\\
&= \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\cdot\Big\{\mathsf{d}^2\,\chi\big(\mathsf{d}\,\varphi(x)[tp]+\underset{t\to 0}{\mathbf{o}}(t)\big)+\underset{t\to 0}{\mathbf{o}}\big(\mathsf{d}\,\varphi(x)[tp]+\underset{t\to 0}{\mathbf{o}}(t)\big)\Big\}\big[\mathsf{d}\,\varphi(x+tp)[p]\big]+\\
&\qquad + \mathsf{d}\,\chi\big(\varphi(x)\big)\big[\mathsf{d}^2\,\varphi(x)[p]\big] =\\
&= \lim_{t\to 0}\Big\{\mathsf{d}^2\,\chi\big(\mathsf{d}\,\varphi(x)[p]+\underset{t\to 0}{\mathbf{o}}(1)\big)+\underset{t\to 0}{\mathbf{o}}\big(\mathsf{d}\,\varphi(x)[p]+\underset{t\to 0}{\mathbf{o}}(1)\big)\Big\}\big[\mathsf{d}\,\varphi(x+tp)[p]\big]+\\
&\qquad + \mathsf{d}\,\chi\big(\varphi(x)\big)\big[\mathsf{d}^2\,\varphi(x)[p]\big] =\\
&= \mathsf{d}^2\,\chi(\varphi(x))\Big[\mathsf{d}\,\varphi(x)[p]\Big]+\mathsf{d}\,\chi(\varphi(x))\Big[\mathsf{d}^2\,\varphi(x)[p]\Big]
\end{aligned}$$

□

Якобиан. Пусть $\varphi : X \hookrightarrow Y$ – непрерывно дифференцируемое отображение евклидовых пространств, причем $\dim X = l \leqslant m = \dim Y$. По теореме 14.2.6 в каждой точке $x \in \mathsf{D}(\varphi)$ дифференциал $\mathsf{d}\,\varphi(x)$ представляет собой линейный оператор

$$\mathsf{d}\,\varphi(x) : X \to Y.$$

Вспомним понятие внешней степени оператора, определенное формулой (12.5.277). Рассмотрим внешнюю степень l оператора $\mathsf{d}\,\varphi(x)$. Это будет оператор,

$$\vee_l\,\mathsf{d}\,\varphi(x) : V_l(X) \to V_l(Y)$$

который каждому поливектору $p \in V_l(X)$ ставит в соответствие некий поливектор $\vee_l\,\mathsf{d}\,\varphi(x)[p] \in V_l(Y)$.

- Пусть $e_1, ..., e_m$ – положительно ориентированный ортонормированный базис в ориентированном евклидовом пространстве X (размерности m). Действие оператора $\vee_m\,\mathsf{d}\,\varphi(x)$ на элементарном поливекторе $e_1 \vee ... \vee e_m$

$$\mathsf{J}\,\varphi(x) = \vee_m \mathsf{d}\,\varphi(x)[e_1\vee...\vee e_m] = (12.5.279) = \mathsf{d}\,\varphi(x)[e_1]\vee...\vee \mathsf{d}\,\varphi(x)[e_m] = \nabla_1\varphi(x)\vee...\vee\nabla_m\varphi(x), \tag{14.2.135}$$

не зависит от выбора такого базиса e_i и называется *Якобианом* отображения $\varphi : X \hookrightarrow Y$ в точке $x \in \mathsf{D}(\varphi)$.

Доказательство. Покажем, что значение $\mathsf{J}\,\varphi(x)$ не зависит от выбора базиса. Пусть b_i – какой-то другой правильно ориентированный ортонормированный базис в X. Тогда матрица $\left[\frac{e}{b}\right]$ перехода от e к b имеет определитель 1, и мы получаем:

$$\mathsf{J}\,\varphi(x) = \vee_m \mathsf{d}\,\varphi(x)[e_1\vee...\vee e_m] = (12.5.268) = \vee_m \mathsf{d}\,\varphi(x)\Big[\underbrace{\det\left[\frac{e}{b}\right]}_{\substack{\parallel\\ 1}}\cdot b_1\vee\dots\vee b_m\Big] = \vee_m \mathsf{d}\,\varphi(x)[b_1\vee\dots\vee b_m]$$

□

- В частном случае, когда $X = Y$, Якобиан отображения $\varphi : X \hookrightarrow X$, в соответствии с теоремой 12.5.7 определяется коэффициентом в разложении по базисному вектору $e_1 \vee ... \vee e_m$

  $$\mathsf{J}\,\varphi(x) = \nabla_1\varphi(x) \vee ... \vee \nabla_m\varphi(x) = \lambda \cdot e_1 \vee ... \vee e_m,$$

  а этот коэффициент по формуле (12.5.268) совпадает с определителем матрицы Якоби (определенной на с.842):

  $$\lambda = \det\begin{pmatrix} \nabla_1\varphi^1(x) & ... & \nabla_m\varphi^1(x)\\ ... & ... & ...\\ \nabla_1\varphi^m(x) & ... & \nabla_m\varphi^m(x)\end{pmatrix} \tag{14.2.136}$$

  Поэтому этот определитель тоже называется *Якобианом* отображения $\varphi : X \hookrightarrow X$ в точке $x \in \mathsf{D}(\varphi)$.

  $$\mathsf{J}\,\varphi(x) = \det \mathsf{d}\,\varphi(x) = \det \nabla\varphi(x) = \det\begin{pmatrix}\nabla\varphi^1(x)\\ \nabla\varphi^m(x)\end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} \nabla_1\varphi^1(x) & ... & \nabla_m\varphi^1(x)\\ & ... & \\ \nabla_1\varphi^m(x) & ... & \nabla_m\varphi^m(x)\end{pmatrix} \tag{14.2.137}$$

Теорема 14.2.11. *Пусть $\varphi : X \hookrightarrow X$ и $\psi : X \hookrightarrow Y$ – гладкие отображения. Тогда*

$$J(\psi\circ\varphi)(x) = \mathsf{J}\,\psi(\varphi(x))\cdot \underbrace{\mathsf{J}\,\varphi(x)}_{\substack{\parallel\\ \det \mathsf{d}\,\varphi(x)\\ \Cap\\ \mathbb{R}}}, \qquad x \in \varphi^{-1}(\mathsf{D}(\psi)) \tag{14.2.138}$$

Доказательство. Пусть $m = \dim X$ и $n = \dim Y$. Тогда

$$\begin{gathered}\mathsf{J}(\psi\circ\varphi)(x) = \vee_m \mathsf{d}(\psi\circ\varphi)(x)[e_1\vee ... \vee e_m] = (12.5.279) = \mathsf{d}(\psi\circ\varphi)(x)[e_1]\vee ... \vee \mathsf{d}(\psi\circ\varphi)(x)[e_m] =\\ = (14.2.133) = \mathsf{d}\,\psi(\varphi(x))[\mathsf{d}\,\varphi(x)[e_1]]\vee ... \vee \mathsf{d}\,\psi(\varphi(x))[\mathsf{d}\,\varphi(x)[e_m]] = (12.5.279) =\\ = \vee_m \mathsf{d}\,\psi(\varphi(x))[\mathsf{d}\,\varphi(x)[e_1]\vee ... \vee \mathsf{d}\,\varphi(x)[e_m]] = (12.5.279) =\\ = \vee_m \mathsf{d}\,\psi(\varphi(x))[\vee_m \mathsf{d}\,\varphi(x)[e_1\vee ... \vee e_m]] = (12.5.280) = \vee_m \mathsf{d}\,\psi(\varphi(x))[\det \mathsf{d}\,\varphi(x)\cdot e_1\vee ... \vee e_m] =\\ = \vee_m \mathsf{d}\,\psi(\varphi(x))[e_1\vee ... \vee e_m]\cdot \det \mathsf{d}\,\varphi(x) = \mathsf{J}\,\psi(\varphi(x))[e_1\vee ... \vee e_m]\cdot \det \mathsf{d}\,\varphi(x).\end{gathered}$$

□

(c) Теорема об обратном отображении и ее следствия

Точки нестабильности и критические точки.

- Пусть $\varphi : X \hookrightarrow Y$ – непрерывно дифференцируемое отображение евклидовых пространств. Точка $a \in \mathsf{D}(\varphi)$ называется

– *точкой нестабильности* отображения φ, если дифференциал φ в точке a не инъективен:

$$\exists p \in X \setminus \{0\} \qquad \mathsf{d}\,\varphi(a)[p] = \partial_p \varphi(a) = \lim_{t\to 0} \frac{\varphi(a+tp)-\varphi(a)}{t} = 0 \tag{14.2.139}$$

(при этом говорят, что отображение φ *нестабильно* в точке a);

– *точкой стабильности* отображения φ, если дифференциал φ в точке a инъективен:

$$\forall p \in X \setminus \{0\} \qquad \mathsf{d}\,\varphi(a)[p] = \partial_p \varphi(a) = \lim_{t\to 0} \frac{\varphi(a+tp)-\varphi(a)}{t} \neq 0$$

(при этом говорят, что отображение φ *стабильно* в точке a; отображение φ называется *стабильным*, если оно стабильно в каждой точке $a \in U$);

– *критической точкой* отображения φ, если дифференциал φ в точке a не сюръективен; это эквивалентно условию

$$\exists q \in Y \setminus \{0\} \qquad \forall p \in X \qquad \big\langle \mathsf{d}\,\varphi(a)[p], q \big\rangle = 0 \tag{14.2.140}$$

(при этом говорят, что отображение φ *критично* в точке a);

– *некритической точкой* отображения φ, если дифференциал φ в точке a сюръективен; это эквивалентно условию

$$\forall q \in Y \setminus \{0\} \qquad \exists p \in X \qquad \big\langle \mathsf{d}\,\varphi(a)[p], q \big\rangle \neq 0$$

(при этом говорят, что отображение φ *некритично* в точке a; отображение φ называется *некритическим*, если оно некритично в каждой точке $a \in U$);

◇ **14.2.5.** Для непрерывно дифференцируемой функции $\gamma : \mathbb{R} \hookrightarrow \mathbb{R}$ (с одномерными областью определения и пространством значений),

— точки нестабильности – то же самое, что критические точки, и это в точности те $a \in U$, в которых производная γ обращается в нуль

$$\gamma'(a) = \lim_{t\to a} \frac{\gamma(t)-\gamma(a)}{t-a} = 0. \tag{14.2.141}$$

— точки стабильности – то же самоле, что некритические точки, и это в точности те $a \in U$, в которых производная γ не обращается в нуль

$$\gamma'(a) = \lim_{t\to a} \frac{\gamma(t)-\gamma(a)}{t-a} \neq 0. \tag{14.2.142}$$

◇ **14.2.6.** Для непрерывно дифференцируемого отображения $\gamma : \mathbb{R} \hookrightarrow Y$, $\dim Y > 1$ (с одномерной областью определения и многомерным пространством значений),

— точки нестабильности – в точности те $a \in U$, в которых производная отображения γ обращается в нуль:

$$\gamma'(a) = \lim_{t\to a} \frac{\gamma(t)-\gamma(a)}{t-a} \neq 0. \tag{14.2.143}$$

— точки стабильности – в точности те $a \in U$, в которых производная отображения γ не обращается в нуль:

$$\gamma'(a) = \lim_{t\to a} \frac{\gamma(t)-\gamma(a)}{t-a} \neq 0. \tag{14.2.144}$$

— все точки $a \in U$ являются критическими, потому что дифференциал, будучи линейным оператором в пространство большей размерности $\mathsf{d}\,\gamma(a) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, не может быть сюръективным оображением.

◇ **14.2.7.** Для непрерывно дифференцируемой функции $\gamma : X \hookrightarrow \mathbb{R}$, $\dim X > 1$ (с многомерной областью определения и одномерным пространством значений)

— все точки нестабильны, потому что дифференциал, будучи линейным функционалом $\mathsf{d}\,\gamma(a) : X \to \mathbb{R}$, на каком-то ненулевом векторе $p \in X$ должен обращаться в нуль:

$$\exists p \in X \setminus \{0\} \qquad \mathsf{d}\,\varphi(a)[p] = 0,$$

— *критические точки* $a \in U$ – в точности те, в которых дифференциал нулевой:

$$\forall p \in X \qquad \mathsf{d}\,\varphi(a)[p] = 0,$$

— *некритические точки* $a \in U$ – в точности те, в которых дифференциал ненулевой:

$$\exists p \in X \qquad \mathsf{d}\,\varphi(a)[p] \neq 0.$$

Теорема 14.2.12. *Пусть $\varphi : X \hookrightarrow Y$ – гладкое отображение евклидовых пространств. Для произвольной точки $a \in \mathsf{D}(\varphi)$ следующие условия эквивалентны:*

(i) *Якобиан отображения φ в точке a ненулнвой:*

$$\mathsf{J}\,\varphi(a) \neq 0, \tag{14.2.145}$$

(ii) *a является точкой стабильности для φ.*

Если дополнительно $\dim X = \dim Y$, то эти условия эквивалетны условию

(iii) *a является некритической точкой для φ.*

Доказательство. Если Якобиан ненулевой

$$\mathsf{J}\,\varphi(a) = \vee_l\, \mathsf{d}\,\varphi(a)[e_1 \vee ... \vee e_m] = \mathsf{d}\,\varphi(a)[e_1] \vee ... \vee \mathsf{d}\,\varphi(a)[e_m] \neq 0 \qquad (m = \dim X),$$

то в силу свойства 5° на с.744 это означает, что векторы $\mathsf{d}\,\varphi(a)[e_1], ..., \mathsf{d}\,\varphi(a)[e_m]$ линейно независимы. А это эквивалентно тому, что дифференциал $\mathsf{d}\,\varphi(a)$ инъективный, то есть что a – точка стабильности.

В случае $\dim X = \dim Y$ инъективность оператора $\mathsf{d}\,\varphi(a)$ эквивалентна, в силу следствия 12.2.13, его сюръективности, то есть условию, что a является некритической точкой для φ. □

Диффеоморфизмы и теорема об обратном отображении.

- Отображение $\varphi : X \hookrightarrow X$ евклидова пространства X в себя называется *диффеоморфизмом*, если оно гладкое, инъективное, и обратное ему отображение $\varphi^{-1} : X \hookrightarrow X$ – тоже гладкое.

Теорема 14.2.13 (о локальном обратном отображении)**.** *Пусть X и Y – евклидовы пространства одинаковой размерности, $\dim X = \dim Y$, и $\varphi : X \hookrightarrow X$ – гладкое отображение, стабильное в какой-то точке $a \in \mathsf{D}(\varphi)$. Тогда φ является диффеоморфизмом в некоторой окрестности этой точки:*

(i) *существует окрестность $U = U_\rho(a) \subseteq D$ точки a, образ которой под действием отображения φ*

$$V = \varphi(U) = \Big\{\varphi(u); \quad u \in U\Big\}$$

является открытым множеством в Y;

(ii) *существует гладкое отображение $\psi : V \to U$, обратное к φ на множестве U:*

$$y = \varphi(x) \quad \Leftrightarrow \quad \psi(y) = x \qquad (x \in U \quad \forall y \in V) \tag{14.2.146}$$

(iii) *дифференциалы отображений φ и ψ связаны тождеством*

$$\mathsf{d}\,\varphi(x) = \Big[\mathsf{d}\,\psi\big(\varphi(x)\big)\Big]^{-1}, \qquad \mathsf{d}\,\psi(y) = \Big[\mathsf{d}\,\varphi\big(\psi(y)\big)\Big]^{-1}, \qquad x \in U,\ y \in V. \tag{14.2.147}$$

Доказательство. Без ограничения общности мы можем считать, что $X = Y$. Нам нужно доказать, что на некоторой окрестности $U_\rho(a)$ точки a

(A) отображение $\varphi : U_\rho(a) \to X$ инъективно,

(B) его образ $V = \varphi\Big(U_\rho(a)\Big)$ – открытое множество в X, и

(C) обратное отображение $\psi = \varphi^{-1} : V \to U_\rho(a)$ непрерывно дифференцируемо порядка 1.

1. Сначала найдем такую окрестность $U_\varepsilon(a)$, на которой φ будет инъективно. Пусть

$$A = \mathsf{d}\,\varphi(a)$$

Положим

$$\lambda = \frac{1}{4\,\|A^{-1}\|} \tag{14.2.148}$$

Тогда

$$|p| = |A^{-1}Ap| \leqslant \big\|A^{-1}\big\| \cdot |Ap| = \frac{1}{4\lambda} \cdot |Ap|$$

откуда
$$|Ap| \geqslant 4\lambda|p| \tag{14.2.149}$$

Поскольку отображение φ непрерывно дифференцируемо, его дифференциал $\mathsf{d}\,\varphi$ должен быть непрерывен на его оболасти определения, поэтому

$$\|\mathsf{d}\,\varphi(u) - \mathsf{d}\,\varphi(a)\| = \|\mathsf{d}\,\varphi(u) - A\| \underset{u\to a}{\longrightarrow} 0$$

Значит, должна существовать замкнутая окрестность $B_\varepsilon(a)$ точки a, содержащаяся в U

$$B_\varepsilon(a) \subset U$$

и такая, что
$$\forall x \in B_\varepsilon(a) \qquad \|\mathsf{d}\,\varphi(x) - A\| < \lambda \tag{14.2.150}$$

Покажем, что
$$\forall x \in B_\varepsilon(a) \quad \forall p \in X \qquad |\,\mathsf{d}\,\varphi(x)[p]| \geqslant 3\lambda \cdot |p| \tag{14.2.151}$$

Действительно, для любых $x \in B_\varepsilon(a)$ и $p \in X$ получаем:

$$|\,\mathsf{d}\,\varphi(x)[p]| = |A[p] + (\mathsf{d}\,\varphi(x)[p] - A[p])| \geqslant \underbrace{|A[p]|}_{\substack{\geqslant \\ 4\lambda\cdot|p|}} - \underbrace{|\,\mathsf{d}\,\varphi(x)[p] - A[p]|}_{\substack{\leqslant \\ 2\lambda\cdot|p|}} \geqslant 4\lambda \cdot |p| - \lambda \cdot |p| = 3\lambda \cdot |p|$$

Из (14.2.151) между прочим следует, что $\mathsf{d}\,\varphi(x)$ инъективен в каждой точке $x \in U_\varepsilon(a)$,

$$p \neq 0 \quad \Longrightarrow \quad |\,\mathsf{d}\,\varphi(x)[p]| \geqslant 3\lambda \cdot |p| > 0 \quad \Longrightarrow \quad \mathsf{d}\,\varphi(x)[p] \neq 0 \tag{14.2.152}$$

(то есть при любом $x \in U_\varepsilon(a)$ линейный оператор $\mathsf{d}\,\varphi(x) : X \to X$ является биекцией).

2. Заметим теперь, что выбранный нами шар $B_\varepsilon(a)$ является компактом в U, поэтому можно воспользоваться теоремой Тейлора 14.2.9, и подобрать числа $M > 0$ и $\delta > 0$ так, чтобы остаток $R_1(x,p)$ формулы Тейлора удовлетворял неравенству

$$|R_1(x,p)| \leqslant M \cdot |p|^2, \qquad x \in B_\varepsilon(a),\ |p| \leqslant \delta$$

Положим $\rho = \min\{\varepsilon, \frac{\delta}{2}, \frac{\lambda}{2M}\}$ и заметим, что тогда
$$|\,\mathsf{d}\,\varphi(x)[p]| \geqslant 3\lambda \cdot |p|, \qquad x \in B_\rho(a),\ p \in X \tag{14.2.153}$$

и
$$|\varphi(y) - \varphi(x) - \mathsf{d}\,\varphi(x)[y-x]| \leqslant \lambda \cdot |y-x|, \qquad x, y \in B_\rho(a) \tag{14.2.154}$$

Действительно, (14.2.153) следует просто из (14.2.151), потому что $B_\rho(a) \subseteq B_\varepsilon(a)$. А (14.2.154) – из оценки остатка Тейлора: для любых $x, y \in B_\rho(a)$

$$|y-x| \leqslant 2\rho \leqslant \min\left\{\delta, \frac{\lambda}{M}\right\}$$

и поэтому

$$|\underbrace{\varphi(y) - \varphi(x) - \mathsf{d}\,\varphi(x)[\overbrace{y-x}^{p}]}_{R_1(x,p)}| \leqslant M \cdot |y-x|^2 = M \cdot \underbrace{|y-x|}_{\substack{\leqslant \\ \lambda/M}} \cdot |y-x| \leqslant \lambda|y-x|$$

Из (14.2.153) и (14.2.154) следует, что

$$\begin{aligned}|\varphi(y) - \varphi(x)| &= |\,\mathsf{d}\,\varphi(x)[y-x] + \{\varphi(y) - \varphi(x) - \mathsf{d}\,\varphi(x)[y-x]\}| \geqslant \\ &\geqslant |\,\mathsf{d}\,\varphi(x)[y-x]| + \big|\varphi(y) - \varphi(x) - \mathsf{d}\,\varphi(x)[y-x]\big| \geqslant 3\lambda \cdot |y-x| - \lambda \cdot |y-x| = 2\lambda \cdot |y-x|\end{aligned}$$

То есть,
$$|\varphi(y) - \varphi(x)| \geqslant 2\lambda \cdot |y-x|, \qquad x, y \in B_\rho(a) \tag{14.2.155}$$

Это, в частности, означает, что отображение $\varphi : U_\rho(a) \to X$ инъективно. Действительно, если взять $x \neq y \in U_\rho(a)$, то
$$|\varphi(y) - \varphi(x)| \geqslant 2\lambda|y-x| > 0 \quad \Longrightarrow \quad \varphi(y) \neq \varphi(x)$$

3. Мы выполнили пункт (A) нашей программы. Теперь нам нужно доказать, что образ $V = \varphi\Big(U_\rho(a)\Big)$ – открытое множество в X.

Зафиксируем какую-нибудь точку $x_0 \in U_\rho(a)$. Нам нужно убедиться, что найдется такая окрестность W точки $\varphi(x_0)$, что

$$\forall y^* \in W \quad \exists x^* \in U_\rho(a) \quad \varphi(x^*) = y^* \tag{14.2.156}$$

Для этого рассмотрим какую-нибудь окрестность $U_\sigma(x_0)$ точки x_0, замыкание которой лежит в $U_\rho(a)$

$$\overline{U_\sigma(x_0)} \subseteq U_\rho(a),$$

и положим

$$W = U_{\lambda\sigma}\Big(\varphi(x_0)\Big) = \{y \in X : \quad |y - \varphi(x_0)| < \lambda\sigma\}$$

Это и будет окрестность W из (14.2.156).

Чтобы в этом убедиться, зафиксируем точку $y^* \in W$ то есть

$$|\varphi(x_0) - y^*| < \lambda\sigma \tag{14.2.157}$$

и рассмотрим функцию

$$H(x) = \Big|\varphi(x) - y^*\Big|$$

Заметим сразу, что в силу (14.2.157)

$$H(x_0) = |\varphi(x_0) - y^*| < \lambda\sigma \tag{14.2.158}$$

Ясно, что функция $H(x)$ непрерывна, поэтому по теореме Вейерштрасса 14.1.1, на компактном множестве $\overline{U_\sigma(x_0)}$ она должна иметь минимум в какой-то точке x^*:

$$\exists x^* \in \overline{U_\sigma(x_0)} \quad H(x^*) = \min_{x \in \overline{U_\sigma(x_0)}} H(x)$$

Мы собираемся показать, что x^* – та самая точка, существование которой мы объявляли в (14.2.156).

Для этого вначале надо понять, что x^* не может лежать на границе множества $U_\sigma(x_0)$ то есть

$$|x^* - x_0| \ne \sigma \tag{14.2.159}$$

Действительно, иначе мы получили бы цепочку, приводящую к противоречию:

$$|x^* - x_0| = \sigma$$

$$\Downarrow$$

$$2\lambda\sigma = 2\lambda|x^* - x_0| \leqslant (14.2.155) \leqslant \Big|\varphi(x^*) - \varphi(x_0)\Big| = \Big|\varphi(x^*) - y + \big(y - \varphi(x_0)\big)\Big| \leqslant (13.1.7) \leqslant$$
$$\leqslant \Big|\varphi(x^*) - y\Big| + \Big|y - \varphi(x_0)\Big| = H(x^*) + H(x_0) < (14.2.158) < H(x^*) + \lambda\sigma$$

$$\Downarrow$$

$$2\lambda\sigma < H(x^*) + \lambda\sigma$$

$$\Downarrow$$

$$\lambda\sigma < H(x^*)$$

$$\Downarrow$$

$$(14.2.158)$$

$$\Downarrow$$

$$H(x_0) < \lambda\sigma < H(x^*)$$

$$\Downarrow$$

x^* не может быть точкой минимума для $H(x)$ на множестве $\overline{U_\sigma(x_0)}$

Таким образом, все-таки выполняется неравенство (14.2.159). Из него следует, что точка x^* лежит не на границе, а внутри шара $\overline{U_\sigma(x_0)}$, то есть, в открытом множестве $U_\sigma(x_0)$:

$$x^* \in U_\sigma(x_0)$$

Это, в свою очередь, означает, что x^* – точка локального минимума функции $H(x)$.

Рассмотрим теперь функцию $H^2(x)$. Для нее тоже получается, что x^* – точка локального минимума. Поэтому, по теореме 14.1.22, ее первый дифференциал должен быть равен нулю в точке x^*:

$$\mathsf{d}\, H^2(x^*)[p] = 0, \qquad \forall p \in X \tag{14.2.160}$$

Вычислим этот дифференциал. Функцию $H^2(x)$ можно рассматривать как композицию двух функций:

$$H^2(x) = S\Big(\varphi(x)\Big)$$

где

$$S(z) = \Big|z - y^*\Big|^2 = \Big\langle z - y^*, z - y^*\Big\rangle$$

При этом,

$$\mathsf{d}\, S(z)(q) = \lim_{t\to 0} \frac{S(z+tq) - S(z)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\Big\langle z + tq - y^*, z + tq - y^*\Big\rangle - \Big\langle z - y^*, z - y^*\Big\rangle}{t} =$$
$$= \lim_{t\to 0} \frac{\Big|z - y^*\Big|^2 + 2\Big\langle z - y^*, tq\Big\rangle + \Big\langle tq, tq\Big\rangle^2 + \Big|z - y^*\Big|^2}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{2t\Big\langle z - y^*, q\Big\rangle + \Big\langle q, tq\Big\rangle^2}{t} =$$
$$= \lim_{t\to 0}\left(2\Big\langle z - y^*, q\Big\rangle + \Big\langle q, tq\Big\rangle^2\right) = 2\Big\langle z - y^*, q\Big\rangle \tag{14.2.161}$$

Отсюда получаем

$$0 = (14.2.160) = \mathsf{d}\, H^2(x^*)[p] = \mathsf{d}(S \circ \varphi)(x^*)[p] = (14.2.133) = \mathsf{d}\, S\Big(\varphi(x^*)\Big)\Big[\mathsf{d}\,\varphi(x^*)[p]\Big] =$$
$$= (14.2.161) = 2\Big\langle \varphi(x^*) - y^*, \mathsf{d}\,\varphi(x^*)[p]\Big\rangle$$

Таким образом,

$$\forall p \in X \qquad \Big\langle \varphi(x^*) - y^*, \mathsf{d}\,\varphi(x^*)[p]\Big\rangle = 0$$

В силу (14.2.152), это равносильно условию

$$\forall q \in X \qquad \Big\langle \varphi(x^*) - y^*, q\Big\rangle = 0$$

То есть, вектор $\varphi(x^*) - y^*$ должен быть нулевым

$$\varphi(x^*) - y^* = 0$$

а это как раз и есть (14.2.156).

4. Итак, мы выполнили пункты (A) и (B) нашей программы, то есть убедились, что $\varphi : U \to V$ – биекция между двумя открытыми множествами в X. Значит, существует обратное отображение $\psi : V \to U$. Нам остается выполнить (C), то есть доказать, что это отображение непрерывно дифференцируемо.

Зафиксируем какой-нибудь $x \in U$ и рассмотрим дифференциал $\mathsf{d}\,\varphi(x) : X \to X$. Он будет биективным линейным оператором, поэтому для него существует обратный линейный оператор. Обозначим его B:

$$B = \Big(\mathsf{d}\,\varphi(x)\Big)^{-1}$$

Поскольку φ дифференцируемо в точке x, получаем

$$\varphi(x+p) - \varphi(x) = \varphi(x)[p] + R(p) \tag{14.2.162}$$

где $R : X \to X$ – некоторое отображение, обладающее свойством

$$\frac{|R(p)|}{|p|} \underset{p\to 0}{\longrightarrow} 0. \tag{14.2.163}$$

Обозначим
$$y = \varphi(x), \quad q = \varphi(x+p) - \varphi(x)$$
Тогда
$$\varphi(x+p) = y + q$$
$$\Downarrow$$
$$x + p = \psi(y+q)$$
$$\Downarrow$$
$$p = \psi(y+q) - x = \psi(y+q) - \psi(y) \tag{14.2.164}$$
Из (14.2.155), кроме того, следует, что
$$2\lambda|p| \leqslant \Big|\varphi(x+p) - \varphi(x)\Big| = |q|$$
$$\Downarrow$$
$$|p| \underset{q\to 0}{\longrightarrow} 0 \tag{14.2.165}$$
(поэтому отображение ψ непрерывно).

Перепишем (14.2.162) в виде
$$q = \varphi(x)[p] + R(p)$$
и применим к обеим частям оператор B:
$$B[q] = B\Big[\varphi(x)[p]\Big] + B\Big[R(p)\Big]$$
$$\Downarrow$$
$$B[q] = p + B\Big[R(p)\Big]$$
$$\Downarrow$$
$$p = B[q] - B\Big[R(p)\Big]$$
$$\Downarrow \qquad \text{(применяем (14.2.164))}$$
$$\psi(y+q) - \psi(y) = B[q] - B\Big[R(p)\Big] \tag{14.2.166}$$
Последнее слагаемое здесь бесконечно мало по сравнению с $|q|$:
$$\frac{\Big|-B\Big[R(p)\Big]\Big|}{|q|} \leqslant \frac{\|B\| \cdot \Big|R(p)\Big|}{|q|} = \|B\| \frac{\Big|R(p)\Big|}{\Big|\varphi(x+p) - \varphi(x)\Big|} \leqslant (14.2.155) \leqslant \|B\| \frac{\Big|R(p)\Big|}{2\lambda|p|} = \frac{\|B\|}{2\lambda} \cdot \frac{\Big|R(p)\Big|}{|p|}$$
Если устремить q к нулю, то, в силу (14.2.165), p тоже будет стремиться к нулю, поэтому
$$\lim_{q\to 0} \frac{\Big|-B\Big[R(p)\Big]\Big|}{|q|} \leqslant \lim_{p\to 0} \frac{\|B\|}{2\lambda} \cdot \frac{\Big|R(p)\Big|}{|p|} = (14.2.163) = 0$$
$$\Downarrow$$
$$\lim_{q\to 0} \frac{\Big|-B\Big[R(p)\Big]\Big|}{|q|} = 0$$
Вместе с равенством (14.2.166) это означает, что отображение ψ дифференцируемо в точке y, и его дифференциал равен $B = \Big\{ \mathsf{d}\,\varphi(x) \Big\}^{-1}$:
$$\mathsf{d}\,\psi(y) = B = \Big\{ \mathsf{d}\,\varphi(x) \Big\}^{-1} = \Big\{ \mathsf{d}\,\varphi\Big(\psi(y)\Big) \Big\}^{-1}$$
Это – вторая из формул (14.2.168), а в качестве ее следствия можно получить первую. Теперь остается заметить, что отображение $y \mapsto \psi(y)$ непрерывно, отображение $x \mapsto \mathsf{d}\,\varphi(x)$ непрерывно, и отображение перехода к обратной матрице $A \mapsto A^{-1}$ непрерывно. Значит, отображение $y \mapsto \mathsf{d}\,\psi(y)$ тоже непрерывно, и это означает, что ψ – непрерывно дифференцируемое отображение. $\square$

Теорема 14.2.14 (о глобальном обратном отображении). *Всякое инъективное, гладкое и стабильное отображение $\varphi : X \hookrightarrow X$ евклидова пространства X в себя является диффеоморфизмом. Точнее,*

(i) *образ $\mathsf{R}(\varphi)$ отображения φ является открытым множеством в X;*

(ii) *существует гладкое отображение $\psi : X \hookleftarrow X$, обратное к φ:*

$$y = \varphi(x) \quad \Leftrightarrow \quad \psi(y) = x \qquad \big(x \in \mathsf{D}(\varphi) = \mathsf{R}(\psi), \quad y \in \mathsf{R}(\varphi) = \mathsf{D}(\psi)\big) \tag{14.2.167}$$

(iii) *дифференциалы отображений φ и ψ связаны тождеством*

$$\mathsf{d}\,\varphi(x) = \Big[\mathsf{d}\,\psi\big(\varphi(x)\big)\Big]^{-1}, \qquad \mathsf{d}\,\psi(y) = \Big[\mathsf{d}\,\varphi\big(\psi(y)\big)\Big]^{-1} \tag{14.2.168}$$

Доказательство. 1. Докажем (i). По теореме об обратном отображении 14.2.13, для всякой точки $a \in \mathsf{D}(\varphi)$ найдется окрестность $U_a \subseteq \mathsf{D}(\varphi)$ образ которой под действием отображения φ будет открытым множеством:

$$\varphi(U_a) \text{ -- открыто в } X$$

Значит, объединение таких открытых множеств тоже должно быть открытым множеством (по свойству 1° пункта (b)):

$$\mathsf{R}(\varphi) = \bigcup_{a \in \mathsf{D}(\varphi)} \varphi(U_a) \text{ -- открыто в } X$$

2. Отображение φ биективно действует из $\mathsf{D}(\varphi)$ на $\mathsf{R}(\varphi)$. Значит, имеется обратное отображение $\psi : \mathsf{R}(\varphi) \to \mathsf{D}(\varphi)$.

$$\forall x \in \mathsf{D}(\varphi) \quad y = \varphi(x) \quad \Longleftrightarrow \quad \psi(y) = x$$

Покажем, что оно обязательно будет гладким. Возьмем произвольную точку $b \in \mathsf{R}(\varphi)$ и обозначим $a = \psi(b)$. По теореме 14.2.13, найдется окрестность U_a такая, что $V_a = \varphi(U_a)$ – открытое множество, и гладкая функция $\psi_a : V_a \to U_a$, обратная для $\varphi\Big|_{U_a} : U_a \to V_a$:

$$\forall x \in U_a \quad y = \varphi(x) \quad \Longleftrightarrow \quad \psi_a(y) = x$$

Это означает, что на множестве V_a функции ψ и ψ_a совпадают:

$$\forall y \in V_a \quad \psi(y) = \psi_a(y)$$

Мы получили, что для любой точки $b \in \mathsf{R}(\varphi)$ найдется гладкое отображение ψ_a, совпадающее с ψ в некоторой окрестности b. Значит, ψ – гладкое отображение. □

Ретракции и коретракции.

- Пусть X и Z – евклидовы пространства, и $\varkappa : X \hookrightarrow Z$ и $\pi : Z \hookrightarrow X$ – гладкие отображения. Говорят, что

  – отображение π является *ретракцией* для отображения $\varkappa$, а

  – отображение $\varkappa$ является *коретракцией* для отображения π,

  если композиция $\pi \circ \varkappa$ совпадает с тождественным отображением

$$\pi \circ \varkappa = \mathrm{id}_{\mathsf{D}(\varkappa)}$$

  то есть

$$\forall x \in \mathsf{D}(\varkappa) \qquad \pi(\varkappa(x)) = x \tag{14.2.169}$$

- Кроме того,

  – произвольное гладкое отображение $\pi : Z \hookrightarrow X$ называется *ретракцией*, если существует какое-нибудь гладкое отображение $\varkappa : X \hookrightarrow Z$, для которого π является ретракцией, и

  – произвольное гладкое отображение $\varkappa : X \hookrightarrow Z$ называется *коретракцией*, если существует какое-нибудь гладкое отображение $\pi : Z \hookrightarrow X$, для которого $\varkappa$ является коретракцией.

! **14.2.8.** *Основное свойство ретракции.* Если $\pi : Z \hookrightarrow X$ – ретракция для $\varkappa : X \hookrightarrow Z$, то

$$\forall y \in \mathsf{R}(\varkappa) \quad \varkappa\Big(\pi(y)\Big) = y \tag{14.2.170}$$

Доказательство.

$$y \in \mathsf{R}(\varkappa) \quad \Longrightarrow \quad \exists x \in U: \; y = \varkappa(x) \quad \Longrightarrow \quad \varkappa\Big(\pi(y)\Big) = \varkappa\Big(\underbrace{\pi\big(\varkappa(x)\big)}_{\substack{\| \; (14.2.169) \\ x}}\Big) = \varkappa(x) = y$$

□

Предложение 14.2.15. *Всякая коретракция является открытыми отображениями.*

Доказательство. Пусть $\varkappa : X \hookrightarrow Z$ – коретракция, то есть глядкое отображение, для которого существует глядкое отображение $\pi : Z \hookrightarrow X$ со свойством (14.2.169). Поскольку отображение $\varkappa$ гладкое (как коретракия), его область определения $\mathsf{D}(\varkappa)$ – открытое множество в X (см. определение гладкого отображения на с.842). Выберем какое-нибудь открытое множество $U \subseteq \mathsf{D}(\varkappa)$. Положим

$$V = \pi^{-1}(U).$$

Поскольку π – тоже гладкое отображение, его область определения $\mathsf{D}(\pi)$ тоже открыта, и оно тоже непрерывно. Поэтому множество $V = \pi^{-1}(U)$, как прообраз открытого множества, открыто в $\mathsf{D}(\pi)$, и значит, в Z. Покажем, что

$$\varkappa(U) = \mathsf{R}(\varkappa) \cap V.$$

1. Выберем $y \in \varkappa(U)$. Он лежит в образе $\varkappa(U)$ множества U под действием отображения $\varkappa$, значит для него существует $x \in U$ такой, что $y = \varkappa(x)$. Отсюда

$$\pi(y) = \pi\big(\varkappa(x)\big) = x \in U,$$

и поэтому $y \in V = \pi^{-1}(U)$. С другой стороны, $y = \varkappa(x) \in \mathsf{R}(\varkappa)$, и вместе это дает $y \in \mathsf{R}(\varkappa) \cap V$.

2. Наоборот, пусть $y \in \mathsf{R}(\varkappa) \cap V$. Из условия $y \in \mathsf{R}(\varkappa)$ следует, что $y = \varkappa(x)$ для некоторого $x \in \mathsf{D}(\varkappa)$, а из условия $y \in V = \pi^{-1}(U)$ мы получаем $\pi(y) \in U$. Вместе это дает

$$x = \pi\big(\varkappa(x)\big) = \pi(y) \in U,$$

и отсюда $y = \varkappa(x) \in \varkappa(U)$. □

Теорема 14.2.16. (о существовании локальной ретракции) *Пусть X и Z – евклидовы пространства, причем $\dim X < \dim Z$, $\varkappa : X \hookrightarrow Z$ – гладкое отображение, и $a \in X$ – точка стабильности отображения $\varkappa$. Тогда существуют*

— *открытое множество U в X, содержащее точку a,*
— *открытое множество W в Z, содержащее точку $b = \varkappa(a)$,*
— *гладкое отображение $\pi : W \to U$,*

такие, что $\varkappa : U \to W$, $\pi : W \to U$, и π является ретракцией для ограничения $\varkappa$ на U:

$$\forall x \in U \qquad \pi(\varkappa(x)) = x \tag{14.2.171}$$

Для доказательства нам понадобится

Лемма 14.2.17. *Пусть X и Z – евклидовы пространства, причем $\dim X < \dim Z$, $\varkappa : X \hookrightarrow Z$ – гладкое отображение, и $a \in X$ – точка стабильности отображения $\varkappa$. Тогда существуют евклидово пространство Y размерности $\dim Y = \dim Z - \dim X$ и линейное инъективное отображение $\theta : Y \to Z$, такое, что $(a, 0)$ будет точкой стабильности отображения*

$$\varphi : X \times Y \hookrightarrow Z, \qquad \varphi(x, y) = \varkappa(x) + \theta(y), \qquad x \in \mathsf{D}(\varkappa) \subseteq X, \; y \in Y. \tag{14.2.172}$$

Доказательство. Рассмотрим образ $P = \mathsf{Im}\,\mathsf{d}\,\varkappa(a)$ оператора $\mathsf{Im}\,\mathsf{d}\,\varkappa(a) : X \to Z$ и обозначим через Y его ортогональное дополнение относительно стандартного скалярного произведения в Z:

$$Y = P^{\perp}.$$

Тогда
$$\dim P = \dim X, \qquad \dim Q = \dim Z - \dim X.$$
Рассмотрим естественное вложение Y в Z:
$$\theta : Y \to Z \quad \Big| \quad \theta(y) = y$$
и положим
$$\varphi(x, y) = \varkappa(x) + \theta(y), \qquad x \in \mathsf{D}(\varkappa) \subseteq X,\ y \in Y.$$
Тогда для $p \in X$ и $q \in Y$ мы получим
$$\mathsf{d}\,\varphi(a, 0)[p, q] = \lim_{t\to 0} \frac{\varphi(a + tp, tq) - \varphi(a, 0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\big(\varkappa(a + tp) + \theta(tq)\big) - \big(\varkappa(a) + 0\big)}{t} =$$
$$= \lim_{t\to 0} \frac{\varkappa(a + tp) - \varkappa(a) + \theta(tq)}{t} = \lim_{t\to 0} \left(\frac{\varkappa(a + tp) - \varkappa(a)}{t} + \frac{\theta(tq)}{t} \right) = \mathsf{d}\,\varkappa(a)[p] + \theta(q).$$
Поскольку $\mathsf{d}\,\varkappa(a)[p]$ и $\theta(q)$ лежат в пространствах P и Y, дополняющих друг друга в Z, их сумма может быть нулевой только если оба они нули, а поскольку оба отображения $\mathsf{d}\,\varkappa(a)$ и θ инъективны, это возможно только если p и q нулевые:
$$\mathsf{d}\,\varphi(a, 0)[p, q] = \mathsf{d}\,\varkappa(a)[p] + \theta(q) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} \mathsf{d}\,\varkappa(a)[p] = 0 \\ \theta(q) = 0 \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} p = 0 \\ q = 0 \end{cases}.$$
То есть $\mathsf{d}\,\varphi(a, 0)$ – инъективное отображение, а это и означает, что $(a, 0)$ – точка стабильности отображения $\varphi : X \times Y \hookrightarrow Z$. □

Доказательство теоремы 14.2.16. Построим отображение $\theta : Y \to Z$ со свойствами, описанными в лемме 14.2.17. По теореме 14.2.13, найдется окрестность U' точки $(a, 0)$, образ которой V' под действием отображения φ является открытым множеством в $\mathbb{R}^n$, и существует гладкое отображение $\psi : V' \to U'$, обратное к φ. Рассмотрим проекцию $\rho : X \times Y \to X$ на первую координату
$$\rho(x, y) = x, \qquad x \in X,\ y \in Y.$$
и положим
$$\pi(z) = \rho\big(\psi(z)\big), \qquad z \in V'.$$
и
$$U = \{x \in X :\ (x, 0) \in U'\}, \qquad V = \pi^{-1}(U) = \{z \in V' :\ \pi(z) \in U\}.$$
Это будут открытые множества, причем $\pi : V \to U$ и справедливо (14.2.171):
$$\pi\big(\varkappa(x)\big) = \rho\Big(\psi\big(\varkappa(x)\big)\Big) = \rho\Big(\psi\big(\varkappa(x) + \theta(0)\big)\Big) = \rho\Big(\psi\big(\varphi(x, 0)\big)\Big) = \rho(x, 0) = x.$$
С другой стороны, из условия $(a, 0) \in U'$ следует, что $a \in U$, значит по уже доказанному тождеству (14.2.171),
$$\pi(b) = \pi(\varkappa(a)) = (14.2.171) = a,$$
и поэтому $b \in V$. □

Теорема 14.2.18 (о существовании локальной коретракции)**.** *Пусть X и Z – евклидовы пространства, причем $\dim X < \dim Z$, $\pi : Z \hookrightarrow X$ – гладкое отображение и $b \in Z$ – его некритическая точка. Тогда существуют*

- *открытое множество $V \subseteq \mathsf{D}(\pi) \subseteq Z$, содержащее точку b,*
- *открытое множество U в X, содержащее точку $a = \pi(b)$,*
- *гладкое отображение $\varkappa : U \to V$, являющееся коретракцией для π на U:*

$$\forall x \in U \qquad \pi(\varkappa(x)) = x. \tag{14.2.173}$$

Здесь для доказательства тоже понадобится вспомогательный результат:

Лемма 14.2.19. *Пусть X и Z – евклидовы пространства, причем $\dim X < \dim Z$, $\pi : Z \hookrightarrow X$ – гладкое отображение и $b \in Z$ – некритическая точка отображения π. Тогда существуют евклидово пространство Y размерности $\dim Y = \dim Z - \dim X$ и линейное сюръективное отображение $\rho : Z \to Y$, такое, что b будет некритической точкой отображения*

$$\psi : Z \hookrightarrow X \times Y, \qquad \psi(z) = (\pi(z), \rho(z)), \qquad z \in \mathsf{D}(\pi). \tag{14.2.174}$$

Доказательство. Пусть $Y = \operatorname{Ker}\big(\mathsf{d}\,\pi(b)\big)$ – ядро оператора $\mathsf{d}\,\pi(b) : Z \to X$. Обозначим через P его ортогональное дополнение относительно скалярного произведения в Z:

$$P = Y^{\perp}$$

Тогда Z будет алгебраической суммой:

$$Z = P \oplus Y$$

Пусть $\rho : Z \to Y$ – ортогональная проекция на Y:

$$\beta(p) = 0, \qquad \beta(q) = q, \qquad p \in P,\ q \in Y.$$

Ядром этого отображения будет пространство P:

$$\operatorname{Ker}\rho = P.$$

Теперь для отображения ψ из (14.2.174) и любого $r \in Z$ мы получим

$$\begin{aligned} \mathsf{d}\,\psi(b)[r] &= \lim_{t\to 0}\frac{\psi(b+tr)-\psi(b)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{\Big(\pi(b+tr),\rho(b+tr)\Big) - \Big(\pi(b),\rho(b)\Big)}{t} = \\ &= \lim_{t\to 0}\frac{\Big(\pi(b+tr)-\pi(b),\rho(b+tr)-\rho(b)\Big)}{t} = \lim_{t\to 0}\left(\frac{\pi(b+tr)-\pi(b)}{t},\frac{\rho(tr)}{t}\right) = \\ &= \Big(\mathsf{d}\,\pi(b)[r],\rho(r)\Big). \end{aligned}$$

Разложив $r = p + q$, $p \in P$, $q \in Q$, мы получим, что равенство нулю возможно только если $r = 0$

$$\mathsf{d}\,\psi(b)[r] = \mathsf{d}\,\psi(b)[p+q] = \Big(\mathsf{d}\,\pi(b)[p+\underset{\substack{\Cap \\ Y \\ \| \\ \operatorname{Ker}\mathsf{d}\,\pi(b)}}{q}],\rho(\overset{\substack{\operatorname{Ker}\rho \\ \| \\ Y \\ \Cup}}{p}+q)\Big) = \Big(\mathsf{d}\,\pi(b)[p],\rho(q)\Big) = 0 \quad \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \quad \mathsf{d}\,\pi(b)[\underset{\substack{\Cap \\ P \\ \| \\ (\operatorname{Ker}\mathsf{d}\,\pi(b))^{\perp}}}{p}] = 0 \quad \& \quad \rho(\underset{\substack{\Cap \\ Y \\ \| \\ (\operatorname{Ker}\rho)^{\perp}}}{q}) = 0 \quad \Longrightarrow \quad p = 0 \quad \& \quad q = 0 \quad \Longrightarrow \quad r = 0.$$

То есть $\mathsf{d}\,\psi(b)$ – инъективное отображение, и значит, b – точка стабильности отображения $\psi : Z \hookrightarrow X \times Y$. По теореме 14.2.12 это означает, что b – некритическая точка для ψ. □

Доказательство теоремы 14.2.18. Построим отображение ρ со свойствами, описанными в лемме 14.2.19. По теореме 14.2.13, найдется окрестность V точки b, образ которой U' под действием отображения ψ является открытым множеством в $X \times Y$, и существует гладкое отображение $\varphi : U' \to V$, обратное к ψ. Множество

$$U = \{x \in X :\ (x, \rho(b)) \in U'\}$$

открыто (потому что это прообраз открытого множества U' при непрерывном отображении $x \mapsto (x, \rho(b))$) и содержит точку $a = \pi(b)$ (потому что $(a, \rho(b)) = (\pi(b), \rho(b)) = \psi(b) \in U' = \psi(V)$). Положим

$$\varkappa(x) = \varphi(x, \rho(b)), \qquad x \in U.$$

Для $(x, y) \in U' \subseteq X \times Y$ равенство

$$(x, y) = \psi(\varphi(x, y)) = \Big(\pi\big(\varphi(x, y)\big), \rho\big(\varphi(x, y)\big)\Big)$$

влечет за собой
$$x = \pi\big(\varphi(x,y)\big)$$
В частности, при $y = \rho(b)$ мы получим
$$x = \pi\big(\varphi(x,\rho(b))\big) = \pi\big(\varkappa(x)\big), \qquad x \in U.$$

$\square$

§ 3 Многообразия и условный экстремум

(a) Многообразия

Множества уровня. *Множеством уровня* отображения евклидовых пространств $\varphi : X \hookrightarrow Y$ называется прообраз произвольной точки $b \in Y$, то есть множество
$$\varphi^{-1}(b) = \{x \in \mathsf{D}(\varphi) : \quad \varphi(x) = b\}.$$

Теорема 14.3.1. *Если $\varphi : X \hookrightarrow Y$ – непрерывное отображение евклидовых пространств, то любое его множество уровня $\varphi^{-1}(b)$, $b \in Y$, замкнуто в его области определения $\mathsf{D}(\varphi)$: если последовательность x_k лежит в $\varphi^{-1}(b)$ и сходится в X к некоторому x, лежащему $\mathsf{D}(\varphi)$, то обязательно x лежит в $\varphi^{-1}(b)$,*
$$\underset{\varphi^{-1}(b)}{\underset{\Cap}{x_k}} \xrightarrow[k\to\infty]{X} \underset{\mathsf{D}(\varphi)}{\underset{\Cap}{x}} \qquad \Longrightarrow \qquad x \in \varphi^{-1}(b).$$

Доказательство. Цепочка рассуждений такая:
$$\underset{\varphi^{-1}(b)}{\underset{\Cap}{x_k}} \xrightarrow[k\to\infty]{X} \underset{\mathsf{D}(\varphi)}{\underset{\Cap}{x}} \qquad \Longrightarrow \qquad \underbrace{\varphi(x_k)}_{\substack{\parallel\\ b}} \xrightarrow[k\to\infty]{Y} \varphi(x) \qquad \Longrightarrow \qquad b = \varphi(x) \qquad \Longrightarrow \qquad x \in \varphi^{-1}(b).$$

$\square$

◇ **14.3.1.** Типичными множествами уровня гладких отображений являются изучаемые в курсе аналитической геометрии (и в школе) кривые второго порядка на плоскости $\mathbb{R}^2$, такие как окружность
$$x^2 + y^2 = 1$$
гиперболы
$$x^2 - y^2 = 1, \qquad x \cdot y = 1$$
и параболы
$$y = x^2, \qquad x = y^2.$$

◇ **14.3.2.** Можно заметить, что всякое конечное множество на плоскости $\mathbb{R}^2$ является множеством уровня некоторой гладкой функции. Например, множество, состоящее из точек $(0,0)$ и $(1,1)$ является прообразом нуля (то есть решением уравнения $g(x,y) = 0$) для функции
$$g(x,y) = \big(x^2 + y^2\big) \cdot \big((x-1)^2 + (y-1)^2\big).$$

◇ **14.3.3.** Неожиданным наблюдением может быть, что замкнутые множества с непустой внутренностью, как, например, круг
$$M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 + y^2 \leqslant 1\}$$
тоже могут быть множествами уровня гладкой функции. В данном случае такой функцией будет функция
$$g(x,y) = f(1 - x^2 - y^2),$$
где f – функция из примера 9.1.35 (для функции g множество M является прообразом нуля: $M = g^{-1}(0)$).

◇ **14.3.4.** Замкнутые множества с непустой внутренностью и “углами”, как, например, квадрат
$$M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x \in [0,1] \ y \in [0,1]\}$$
тоже могут быть множествами уровня гладкой функции. В данном случае такой функцией будет функция
$$g(x,y) = f(-x) + f(-y) + f(x-1) + f(y-1),$$
где f – функция из примера 9.1.35 (а M является прообразом нуля для g).

Американским математиком Хаслером Уитни был доказан следующий замечательный факт:

Теорема 14.3.2 (Уитни)**.** *Всякое замкнутое множество M в произвольном евклидовом пространстве X является множеством уровня некоторой гладкой функции $f : X \to \mathbb{R}$ (определенной всюду на X):*

$$M = \Big\{x \in X : \ f(x) = 0\Big\}$$

Это означает, в частности, что такие сложно устроенные замкнутые множества как сходящиеся последовательности (см. пример (13.3.4)) или ковер Серпинского (пример 13.3.5) тоже являются множествами уровня некоторых гладких функций.

Параметризованные многообразия. Условимся говорить, что множество M в евклидовом пространстве Z *допускает параметризацию как многообразие*, если существуют евклидово пространство X (размерности $\dim X \leqslant \dim Z$) и стабильное[12] гладкое вложение[13] $\sigma : X \hookrightarrow Z$, для которого M является образом[14]:

$$M = \mathsf{R}(\sigma).$$

Если задано такое отображение σ, то множество M называется *параметризованным многообразием*, а σ – его *параметризацией.*

Теорема 14.3.3 (об эквивалентности параметризаций)**.** *Пусть*

$$\sigma : X \hookrightarrow Z, \quad \varkappa : Y \hookrightarrow Z$$

– две параметризации одного и того же множества M (как параметризованного многообразия) в евклидовом пространстве Z размерности m, то есть два гладих стабильных вложения, имеющие M своим образом:

$$\mathsf{R}(\sigma) = M = \mathsf{R}(\varkappa).$$

Тогда существует единственное гладкое отображение

$$\varphi : \mathsf{D}(\sigma) \to \mathsf{D}(\varkappa),$$

выражающее σ через $\varkappa$,

$$\sigma = \varkappa \circ \varphi \tag{14.3.175}$$

и это отображение φ является диффеоморфизмом.

Доказательство. По теореме 14.2.5 существует гомеоморфизм φ, связывающий отображения σ и $\varkappa$ равенством (14.3.175). Нам нужно показать, что φ – диффеоморфизм.

Зафиксируем для этого точку $c \in \mathsf{D}(\sigma)$. Ей будет соответствовать точка $b = \sigma(c) \in M$ и точка $a = \varkappa^{-1}(b) \in \mathsf{D}(\varkappa)$. В точке $a \in \mathsf{D}(\varkappa)$ отображение $\varkappa$ стабильно, поэтому по теореме 14.2.16 (о существовании локальной ретракции) найдутся открытые множества $U \subseteq \mathbb{R}^m$. $a \in U$, и $V \subseteq \mathbb{R}^n$, $b \in V$, и гладкое отображение $\pi : V \to U$, являющееся ретракцией для $\varkappa$ на U:

$$\forall x \in U \quad \pi(\varkappa(x)) = x.$$

Рассмотрим прообраз $W = \varphi^{-1}(U)$ открытого множества $U \subseteq \mathbb{R}^m$ при отображении φ. Поскольку φ – непрерывное отображение, W будет открытым множеством в $\mathsf{D}(\sigma)$. Заметим, что

$$W = \sigma^{-1}(\varkappa(U)) \tag{14.3.176}$$

Действительно,

$$z \in W = \varphi^{-1}(U) \quad \Longleftrightarrow \quad \varphi(z) = \varkappa^{-1}(\sigma(z)) \in U \quad \Longleftrightarrow \quad \sigma(z) \in \varkappa(U) \quad \Longleftrightarrow \quad z \in \sigma^{-1}(\varkappa(U)).$$

Отсюда следует, во-первых, что W содержит точку c:

$$a \in U \quad \Longrightarrow \quad b = \varkappa(a) \in \varkappa(U) \quad \Longrightarrow \quad c = \sigma^{-1}(b) \in W = \sigma^{-1}(\varkappa(U)),$$

---

[12] Согласно определению на с.847, отображение называется стабильным, если его дифференциал инъективен в каждой точке: $\mathsf{d}\,\sigma(a)[p] \neq 0$, $a \in \mathsf{D}(\sigma)$, $p \in X$, $p \neq 0$.

[13] Определение вложения см. на с.839.

[14] Образом отображения σ называется множество $\mathsf{R}(\sigma) = \sigma(\mathsf{D}(\sigma))$ его значений, см. определение на с.41.

и, во-вторых, что

$$\forall z \in W \qquad \pi\big(\sigma(z)\big) = \varkappa^{-1}\Bigg(\underbrace{\varkappa\Big(\pi\big(\overbrace{\sigma(z)}^{\substack{\varkappa(U)\\ \rotatebox{90}{$\in$}\ (14.3.176)}}\big)\Big)}_{\substack{\|\ (14.2.170)\\ \sigma(z)}}\Bigg) = \varkappa^{-1}\big(\sigma(z)\big) = \varphi(z).$$

Таким образом, на открытом множестве W, содержащем точку c, отображение φ является композицией гладких отображений σ и π. Значит φ является гладким в некоторой окрестности точки c. Поскольку точка $c \in \mathsf{D}(\sigma)$ с самого начала выбиралась произвольной, мы получаем, что φ – гладкое отображение всюду на $\mathsf{D}(\sigma) = \mathsf{D}(\varphi)$.

Наконец, чтобы доказать, что φ – гомеоморфизм, нужно точно так же как в теореме 14.2.5 поменять местами σ и $\varkappa$: тогда обратное отображение $\psi = \varphi^{-1}$ окажется гладким. $\square$

Параметризованные открытые кривые. Если $\gamma : \mathbb{R} \hookrightarrow X$ – гладкое отображение прямой $\mathbb{R}$ в евклидово пространство X, то его *производной* в точке $t \in \mathsf{D}(\gamma)$ называется предел

$$\gamma'(t) = \lim_{s\to 0} \frac{\gamma(t+s) - \gamma(t)}{s} \neq 0 \qquad (14.3.177)$$

Очевидно, эта величина связана с дифференциалом $\mathsf{d}\,\gamma : \mathbb{R} \hookrightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}, X)$ тождеством

$$\gamma'(t) = \mathsf{d}\,\gamma(t)[1] \qquad (14.3.178)$$

и, поскольку 1 – базис в $\mathbb{R}$, производная $\gamma'(t)$ полностью определяет дифференциал $\mathsf{d}\,\gamma(t)$.

Отсюда следует, что если мы хотим, чтобы $\gamma : \mathbb{R} \hookrightarrow X$ было параметризованным многообразием (размерномти 1), то нам достаточно потребовать, чтобы это отображение было инъективно, открыто, гладко и имело нигде не равную нулю производную:

$$\forall t \in U \quad \gamma'(t) = \lim_{s\to 0} \frac{\gamma(t+s) - \gamma(t)}{s} \neq 0.$$

Такое отображение мы будем называть *параметризованной открытой кривой.*

Отметим следующий полезный факт.

Теорема 14.3.4. *Пусть $\gamma : \mathbb{R} \hookrightarrow X$ параметризованная открытая кривая, и $f : X \hookrightarrow \mathbb{R}$ – непрерывно дифференцируемая функция. Тогда*

$$(f\circ\gamma)'(t) = \big\langle \nabla f\big(\gamma(t)\big), \gamma'(t)\big\rangle, \quad t \in \mathsf{D}(f\circ\gamma). \qquad (14.3.179)$$

Доказательство. Тождество (14.2.133) здесь принимает вид

$$\mathsf{d}(f\circ\gamma)(t)[p] = \mathsf{d}\,f(\gamma(t))[\mathsf{d}\,\gamma(t)[p]],$$

Если подставить $p = 1$, мы получаем

$$\underbrace{\mathsf{d}(f\circ\gamma)(t)[1]}_{\substack{\|\ (14.3.178)\\ (f\circ\gamma)'(t)}} = \mathsf{d}\,f(\gamma(t))\Big[\underbrace{\mathsf{d}\,\gamma(t)[1]}_{\substack{\|\ (14.3.178)\\ \gamma'(t)}}\Big],$$

и поэтому

$$(f\circ\gamma)'(t) = \mathsf{d}\,f(\gamma(t))\Big[\gamma'(t)\Big] =$$
$$= (14.1.26) = \big\langle \nabla f\big(\gamma(t)\big), \gamma'(t)\big\rangle, \qquad t \in \mathsf{D}(f\circ\gamma).$$

$\square$

◇ **14.3.5** (спираль)**.** Система

$$\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \\ z = t \end{cases}, \qquad t \in \mathbb{R}$$

задает в трехмерном пространстве кривую, называемую спиралью:

◇ **14.3.6** (параметризованная прямая)**.** Если $a, b \in \mathbb{R}^n$ – произвольные векторы, причем $a \neq 0$, то отображение

$$\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n, \qquad \Big| \qquad \gamma(t) = a\cdot t + b$$

как легко убедиться, будет иметь множеством значений прямую в $\mathbb{R}^n$, проходящую через точку b с направляющим вектором a. По этой причине такая параметризованная кривая называется *параметризованной прямой* в $\mathbb{R}^n$.

Параметризованные открытые поверхности. Еще одним частным случаем параметризованного многообразия является *параметризованная открытая поверхность*, то есть параметризованное многообразие размерности 2; это гладкое инъективное, открытое отображение $\sigma : D \to X$ произвольного открытого множества U

на плоскости $\mathbb{R}^2$ в евклидово пространство X, со всюду инъективным дифференциалом:

$$\forall t \in U \quad \forall p \in \mathbb{R}^2 \qquad p \neq 0 \quad \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow \quad \mathsf{d}\,\sigma(t)[p] = \lim_{s\to 0} \frac{\sigma(t+sp)-\sigma(t)}{s} \neq 0.$$

Ниже нам понадобятся следующее определение.

- Множество уровня $\varphi^{-1}(b)$ гладкого отображения евклидовых пространств $\varphi : Z \hookrightarrow Y$ называется
  - *критическим*, если на нем найдется критическая точка отображения φ,
  - *некритическим*, если на нем нет критических точек отображения φ.

Теорема 14.3.5 (о локальной параметризации некритического множества уровня)**.** *Всякое некритическое множество уровня M произвольного данного гладкого отображения евклидовых пространств $\pi : Z \hookrightarrow X$ локально представимо в виде параметризованного многообразия: для любой точки $b \in M$ найдется окрестность V в Z и параметризованное многообразие $\sigma : Y \hookrightarrow Z$ такие, что*

$$b \in \mathsf{R}(\sigma) = M \cap V \tag{14.3.180}$$

Доказательство. Построим отображение ρ со свойствами, описанными в лемме 14.2.19. Тогда по теореме 14.2.13, найдутся: евклидово пространстве X, окрестность V точки b, образ которой U под действием отображения

$$\psi : Z \to X \times Y \quad \Big| \quad \psi(z) = \big(\pi(z), \rho(z)\big), \qquad z \in \mathsf{D}(\pi)$$

является открытым множеством в $X \times Y$, и гладкое отображение $\varphi : U \to V$, обратное к ψ на U. Положим

$$\sigma(y) = \varphi(\pi(b), y), \qquad (\pi(b), y) \in U.$$

и убедимся, что σ является параметризованным многообразием с нужными свойствами.

1. Отображение σ инъективно, потому что φ инъективно.

2. Для $a = \rho(b)$ мы получим

$$\sigma(a) = \varphi(\pi(b), a) = \varphi(\pi(b), \rho(b)) = \varphi(\psi(b)) = b.$$

3. Пусть $y \in \mathsf{D}(\sigma)$, то есть $(\pi(b), y) \in U$. Тогда $\sigma(y) = \varphi(\pi(b), y) \in \varphi(U) = V$. Мы получаем соотношение

$$\mathsf{R}(\sigma) \subseteq V.$$

4. Опять, пусть $y \in \mathsf{D}(\sigma)$, то есть $(\pi(b), y) \in U$. Поскольку ψ биективно отображает V на U, должна существовать точка $z \in V$ такая, что $\psi(z) = (\pi(b), y)$. Мы получим такую цепочку:

$$\begin{array}{ccc}
(\pi(b), y) = \psi(z) & \Longrightarrow & (\pi(b), y) = \psi(z) = \big(\pi(z), \rho(z)\big) \\
\Downarrow & & \\
\sigma(y) = \varphi(\pi(b), y) = \varphi(\psi(z)) = z & & \Downarrow \\
\Downarrow & & \\
\pi(\sigma(y)) = \pi(z) = \pi(b) & \Longleftarrow & \pi(b) = \pi(z)
\end{array}$$

Это доказывает соотношение

$$\mathsf{R}(\sigma) \subseteq M.$$

5. Наоборот, пусть $z \in M \cap V$, то есть $z \in V$ и $\pi(z) = \pi(b)$. Тогда, обозначив $y = \rho(z)$, мы получим:

$$(\pi(b), y) = (\pi(z), \pi(z)) = \psi(z) \in V \qquad \Longrightarrow \qquad y \in \mathsf{D}(\sigma).$$

И при этом

$$\sigma(y) = \varphi(\pi(b), y) = \varphi(\pi(z), \pi(z)) = \varphi(\psi(z)) = z.$$

Это доказывает включение

$$M \cap V \subseteq \mathsf{R}(\sigma).$$

6. Для любых $y \in \mathsf{D}(\sigma)$ и $p \in Y$ мы получим:

$$\mathsf{d}\,\sigma(y)[p] = \lim_{t\to 0} \frac{\sigma(y+tp)-\sigma(y)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\varphi(\pi(b), \rho(y+tp)) - \varphi(\pi(b), \rho(y))}{t} = \mathsf{d}\,\varphi(\pi(b), \rho(y))[p, 0] \neq 0,$$

потому что $\mathsf{d}\,\varphi$ в любой точке – биективный оператор. Это доказывает, что y – точка стабильности для σ.

7. Остается убедиться, что σ можно сделать вложением. Если σ – не вложение, то можно выбрать новую окрестность W точки a в Y, так, чтобы ее замыкание было компактно и лежало в $\mathsf{D}(\sigma)$,

$$a \in W \subseteq \overline{W} \subseteq \mathsf{D}(\sigma).$$

Тогда по теореме 14.2.4 ограничение σ на компакт $\overline{W}$ будет вложением. Поэтому ограничение $\sigma' = \sigma\Big|_W$ отображения σ на окрестность W тоже будет вложением. Мы можем теперь заменить исходное оображение σ на отображение σ', а множества U и V на множества

$$U' = U \setminus \{(\pi(b), y);\ y \notin W\}, \qquad V' = \varphi(U'),$$

и мы получим нужное утверждение, в котором σ уже будет вложением. □

Теорема 14.3.6. *Всякое параметризованное многообразие $\sigma : X \hookrightarrow Z$ локально представимо как некритическое множество уровня некоторого гладкого отображения: для всякой точки $b \in \mathsf{R}(\sigma)$ найдутся окрестность V в Z и гладкое отображение $\pi : Z \hookrightarrow Y$ такие, что точка b будет лежать в некритическом множестве уровня M отображения π, и*

$$b \in M = \mathsf{R}(\sigma) \cap V. \tag{14.3.181}$$

Доказательство. Поскольку $b \in \mathsf{R}(\sigma)$, должна существовать точка $a \in \mathsf{D}(\sigma)$ такая, что

$$\sigma(a) = b.$$

При этом, a, как любая вообще точка в $\mathsf{D}(\sigma)$, будет точкой стабильности для σ. Подставим σ вместо $\varkappa$ в лемму 14.2.17 и построим линейное инъективное отображение $\theta : Y \to Z$ такое, что точка $(a, 0)$ будет точкой стабильности для отображения

$$\varphi : X \times Y \to Z, \qquad \varphi(x, y) = \sigma(x) + \theta(y), \qquad x \in \mathsf{D}(\sigma) \subseteq X,\ y \in Y.$$

По теореме 14.2.13, найдется окрестность U точки $(a, 0)$, образ которой V под действием отображения φ является открытым множеством в Z, и существует гладкое отображение $\psi : V \to U$, обратное к φ. Рассмотрим проекцию $\rho : X \times Y \to Y$ на вторую координату

$$\rho(x, y) = y, \qquad z \in X,\ y \in Y.$$

и положим

$$\pi(z) = \rho\big(\psi(z)\big), \qquad z \in V.$$

Заметим, что

$$\pi(b) = \rho\big(\psi(b)\big) = \rho\Big(\psi\big(\sigma(a)\big)\Big) = \rho\Big(\psi\big(\sigma(a) + \theta(0)\big)\Big) = \rho\Big(\psi\big(\varphi(a, 0)\big)\Big) = \rho(a, 0) = 0.$$

Рассмотрим далее множество уровня отображения π, содержащее точку b:

$$M = \{z \in \mathsf{D}(\pi) = \mathsf{D}(\psi) = V :\ \pi(z) = \pi(b) = 0\}$$

Понятно, что $M \subseteq V$. Покажем, что $M \subseteq \mathsf{R}(\sigma)$. Всякая точка $z \in V$ имеет вид $z = \varphi(x, y)$ для некоторых $x \in \mathsf{D}(\sigma) \subseteq X$ и $y \in Y$ таких, что $(x, y) \in U$. Если $z \in M$, то мы получаем, что в этом представлении y должно быть нулевым:

$$y = \rho(x, y) = \rho\Big(\psi\big(\varphi(x, y)\big)\Big) = \rho\big(\psi(z)\big) = \rho\big(\psi(b)\big) = \rho\Big(\psi\big(\sigma(a)\big)\Big) = \rho\Big(\psi\big(\sigma(a) + \theta(0)\big)\Big) =$$
$$= \rho\Big(\psi\big(\varphi(a, 0)\big)\Big) = \rho(a, 0) = 0$$

Это означает, что

$$z = \varphi(x, y) = \sigma(x) + \theta(y) = \sigma(x).$$

Мы получаем, что $M \subseteq \mathsf{R}(\sigma) \cap V$.

Наоборот, пусть $z \in \mathsf{R}(\sigma) \cap V$. Это означает, что во-первых, найдется $x \in \mathsf{D}(\sigma)$ такой, что $z = \sigma(x)$, и, во-вторых, $z = \sigma(x) \in V$. Из второго мы получаем

$$\varphi(x, 0) = \sigma(x) + \theta(0) = \sigma(x) \in V \quad \Longrightarrow \quad (x, 0) \in U,$$

и

$$\pi(z)=\rho\big(\psi(z)\big)=\rho\Big(\psi\big(\sigma(x)\big)\Big)=\rho\Big(\psi\big(\sigma(x)+\theta(0)\big)\Big)=\rho\Big(\psi\big(\varphi(x,0)\big)\Big)=\rho(x,0)=0$$

То есть $z\in M$. Мы доказали вложение $\mathsf{R}(\sigma)\cap V\subseteq M$, и значит, правую часть (14.3.181).

Покажем, что M – некритическое множество уровня для π. Для любого $z\in M$ можно подобрать $x\in\mathsf{D}(\sigma)$ такой что $z=\sigma(x)$, а для любого $q\in Y$ можно подобрать вектор $p=\theta(q)$, и тогда мы получим:

$$\begin{aligned}\mathsf{d}\,\pi(z)[p]&=\lim_{t\to0}\frac{\pi(z+tp)-\pi(z)}{t}=\lim_{t\to0}\frac{\rho\big(\psi(z+tp)\big)-\rho\big(\psi(z)\big)}{t}=\\&=\lim_{t\to0}\frac{\rho\big(\psi(\sigma(x)+\theta(tq))\big)-\rho\big(\psi(\sigma(x)+\theta(0))\big)}{t}=\lim_{t\to0}\frac{\rho\big(\psi(\varphi(x,tq))\big)-\rho\big(\psi(\varphi(x,0))\big)}{t}=\\&=\lim_{t\to0}\frac{\rho(x,tq)-\rho(x,0)}{t}=\lim_{t\to0}\frac{tq-0}{t}=q.\end{aligned}$$

Это значит, что отображение $\mathsf{d}\,\pi(z):Z\to Y$ сюръективно, то есть z – некритическая точка для π. □

Многообразия.

- Система гладких функций $f_i:Z\hookrightarrow\mathbb{R}$, $i=1,...,l$, на евклидовом пространстве Z называется *независимой в точке* $z\in Z$, если эти функции определены в окрестности этой точки и их дифференциалы в ней линейно независимы:

$$\lambda_1\cdot\mathsf{d}\,f_1(z)+...+\lambda_l\cdot\mathsf{d}\,f_l(z)=0\quad\Longrightarrow\quad\lambda_1=...=\lambda_l=0 \qquad (14.3.182)$$

  Если функции f_i независимы в любой точке множества $M\subseteq Z$, то говорят, что f_i *независимы на множестве* M.

Множество $M\subseteq Z$ называется *гладким многообразием* (или просто *многообразием*) размерности m, если выполняются следующие эквивалентные условия:

(i) M локально представимо как некритическое множество уровня какого-нибудь гладкого отображения $\pi:Z\hookrightarrow Y$, где Y – евклидово пространство размерности $\dim Y=\dim Z-m$: для всякой точки $b\in M$ должны существовать открытое множество $V\subseteq Z$ и гладкое отображение $\pi:V\to Y$, где $\dim Y=\dim Z-m$, такие что пересечение $M\cap V$ является некритическим множеством уровня для π, содержащим точку b,

(ii) M локально представимо как общее множество нулей системы независимых на M гладких функций: для всякой точки $b\in M$ существует открытое множество V в Z и гладкие функции $f_1,...,f_l$ на V, где $l=\dim Z-m$, для которых $M\cap V$ является общим множеством нулей,

$$M=\Big\{x\in V:\quad f_1(x)=f_2(x)=...=f_l(x)=0\Big\}$$

на котором функции $f_1,...,f_l$ независимы;

(iii) M локально допускает параметризацию размерности m: для всякой точки $b\in M$ существует окрестность V в Z, евклидово пространстве X размерности m и параметризованное многообразие[15] $\sigma:X\hookrightarrow Z$ такие что

$$b\in\mathsf{R}(\sigma)=M\cap V.$$

Доказательство эквивалентности. 1. $(i)\Leftrightarrow(ii)$. Пусть $\pi:Z\hookrightarrow Y$ – отображение из (i), и $M\cap V=\varphi^{-1}(b)$ для некоторого $b\in Z$. Выберем базис $e_1,...,e_l$ в Y, и положим $f_i(x)=\left[\frac{1}{e}\right]^i(\varphi(x)-b)$, мы получим систему функций из (ii). Наоборот, если $f_1,...,f_l$ – гладкие функции из (ii), то $M\cap U$ будет некритическим множеством уровня для отображения $\pi:Z\hookrightarrow\mathbb{R}_l$, определенного формулой $\pi(x)=(f_1(x),...,f_l(x))$.

2. $(i)\Leftrightarrow(iii)$. Пусть снова $\pi:Z\hookrightarrow Y$ – отображение из (i) и пусть $b\in M$. По теореме 14.3.5 существует параметризованное многообразие $\sigma:X\hookrightarrow Z$, проходящее через точку b. Это отображение удовлетворяет условию (iii). Наоборот, пусть выполнено (iii). Тогда по теореме 14.3.6 M локально представимо как некрититическое множество уровня. Это значит, что выполняется (i). □

[15] Определение параметризованного многообразия см. на с. 858.

◇ **14.3.7.** Окружность на плоскости

$$M: \quad x^2+y^2=1$$

является многообразием в $\mathbb{R}^2$, потому что ее можно представить как множество нулей функции $\varphi(x,y)=x^2+y^2-1$:

$$M=\Big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: \quad x^2+y^2-1=0\Big\}$$

а ранг соответствующей матрицы Якоби равен единице всюду на M:

$$\forall (x,y)\in M$$
$$\operatorname{rank}\Big(\nabla\varphi(x,y)\Big)=\operatorname{rank}\Big(2x,2y\Big)=1$$

◇ **14.3.8.** Окружность в трехмерном пространстве

$$M: \quad \begin{cases} x^2+y^2=1 \\ z=1 \end{cases}$$

является многообразием в $\mathbb{R}^3$, потому что ее можно представить как общее множество нулей функций $\varphi_1(x,y,z)=x^2+y^2-1$, $\varphi_2(x,y,z)=z-1$:

$$M=\Big\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3: \quad x^2+y^2-1=z-1=0\Big\}$$

а ранг соответствующей матрицы Якоби равен двойке всюду на M:

$$\forall (x,y,z)\in M$$
$$\operatorname{rank}\begin{pmatrix}\nabla\varphi_1(x,y,z)\\ \nabla\varphi_2(x,y,z)\end{pmatrix}=\operatorname{rank}\begin{pmatrix}2x & 2y & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=2$$

◇ **14.3.9.** Сфера в трехмерном пространстве

$$M: \quad x^2+y^2+z^2=1$$

является многообразием в $\mathbb{R}^3$, потому что ее можно представить как множество нулей функции $\varphi(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-1$:

$$M=\Big\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3: \quad x^2+y^2+z^2-1=0\Big\}$$

а ранг соответствующей матрицы Якоби равен единице всюду на M:

$$\forall (x,y,z)\in M$$
$$\operatorname{rank}\Big(\nabla\varphi(x,y,z)\Big)=\operatorname{rank}\Big(2x,2y,2z\Big)=1$$

◇ **14.3.10.** Покажем что замкнутый круг на плоскости

$$M: \quad x^2+y^2\leqslant 1$$

не является многообразием в $\mathbb{R}^2$. Предположим, что мы представили M как множество нулей некоторой непрерывно дифференцируемой функции φ:

$$M=\Big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: \quad \varphi(x,y)=0\Big\}$$

Тогда функция φ будет равна нулю в окрестности точки $(0,0)$. Отсюда следует, что ее частные производные $\nabla_1\varphi(x,y)$, $\nabla_2\varphi(x,y)$ будут равны нулю в точке $(0,0)$:

$$\nabla_1\varphi(0,0)=\frac{\partial\varphi}{\partial y}(0,0)=0$$

Значит ранг соответствующей матрицы Якоби равен в этой точке нулю (а не единице, как должно быть):

$$\operatorname{rank}\Big(\nabla\varphi(0,0)\Big)=$$
$$=\operatorname{rank}\left(\nabla_1 f(0,0),\nabla_2 f(0,0)\right)=\operatorname{rank}\Big(0,0\Big)=0$$

◇ **14.3.11.** Замкнутый квадрат на плоскости

$$M: \quad |x|\leqslant 1 \quad \& \quad |y|\leqslant 1$$

не является многообразием в $\mathbb{R}^2$ по тем же причинам.

◇ **14.3.12.** Полый квадрат на плоскости

$$M: \quad \left[\begin{array}{c} \left\{\begin{array}{c} |x|=1 \\ y\in[-1,1] \end{array}\right\} \\ \left\{\begin{array}{c} |y|=1 \\ x\in[-1,1] \end{array}\right\} \end{array}\right]$$

не является многообразием в $\mathbb{R}^2$. Почему это так мы покажем в §3, здесь же мы ограничимся лишь следующим намеком. Дело в том, что подобно графику гладкой функции, гладкое многообразие не должно иметь изломов. (Именно это и означает слово "гладкое".) Для квадрата условие гладкости нарушается в углах (то есть точках $(1,1)$, $(-1,1)$, $(-1,-1)$, $(1,-1)$).

(b) Касательное пространство к многообразию

Касательная прямая и касательный вектор к параметризованной кривой. Рассмотрим параметризованную открытую кривую $\gamma:\mathbb{R}\hookrightarrow X$, то есть, согласно определению на с.859, гладкое инъективное отображение $\gamma: U\to X$ открытого множества $U\subseteq\mathbb{R}$ в евклидово пространство X с нигде не равной нулю производной:

$$\gamma'(s) = \lim_{t \to s} \frac{\gamma(t) - \gamma(s)}{t - s} \ne 0$$

и попробуем построить касательную к ней в какой-нибудь точке $\gamma(t_0)$. Для этого возьмем еще одну точку $t \ne t_0$ и проведем прямую l_t через две точки $\gamma(t_0)$ и $\gamma(t)$.

Если при стремлении $t \to t_0$ секущая l_t приближается к некоторому предельному положению l, то l называется *касательной* к кривой γ в точке $\gamma(t_0)$.

Теорема 14.3.7. *Всякая параметризованная открытая кривая $\gamma : \mathbb{R} \hookrightarrow X$ имеет касательную в каждой точке $t_0 \in \mathsf{D}(\gamma)$, причем параметрическое уравнение этой касательной имеет вид*

$$x = \gamma'(t_0) \cdot t + \gamma(t_0)$$

Доказательство. Для произвольного $t \ne t_0$ рассмотрим вектор, выходящий из точки $\gamma(t_0)$ и приходящий в точку $\gamma(t)$:

$$\gamma(t) - \gamma(t_0)$$

Если его поделить на его же длину, то мы получим вектор единичной длины, выходящий из точки $\gamma(t_0)$ и проходящий через точку $\gamma(t)$

$$e_t = \frac{\gamma(t) - \gamma(t_0)}{|\gamma(t) - \gamma(t_0)|}$$

Убедимся, что при $t \to t_0 + 0$ и $t \to t_0 - 0$ этот вектор будет иметь пределы, причем

$$\lim_{t \to t_0 + 0} e_t = - \lim_{t \to t_0 - 0} e_t$$

Действительно, при $t \to t_0 + 0$ получаем:

$$e_t = \frac{\gamma(t) - \gamma(t_0)}{|\gamma(t) - \gamma(t_0)|} = \frac{\gamma(t) - \gamma(t_0)}{t - t_0} \cdot \frac{t - t_0}{|\gamma(t) - \gamma(t_0)|} = \frac{\gamma(t) - \gamma(t_0)}{t - t_0} \cdot \left(\frac{|\gamma(t) - \gamma(t_0)|}{\underbrace{t - t_0}_{\substack{\text{положительно,} \\ \text{поэтому можно} \\ \text{внести под} \\ \text{знак модуля}}}} \right)^{-1} =$$

$$= \underbrace{\frac{\gamma(t) - \gamma(t_0)}{t - t_0}}_{\substack{\downarrow \\ \gamma'(t_0)}} \cdot \underbrace{\left| \frac{\gamma(t) - \gamma(t_0)}{t - t_0} \right|^{-1}}_{\substack{\downarrow \\ \left|\gamma'(t_0)\right|^{-1}}} \xrightarrow[t \to t_0 + 0]{} \gamma'(t_0) \cdot \left|\gamma'(t_0)\right|^{-1} = \frac{\gamma'(t_0)}{\left|\gamma'(t_0)\right|}$$

А если $t \to t_0 - 0$, то получается противоположный вектор:

$$e_t = \frac{\gamma(t) - \gamma(t_0)}{|\gamma(t) - \gamma(t_0)|} = \frac{\gamma(t) - \gamma(t_0)}{t - t_0} \cdot \frac{t - t_0}{|\gamma(t) - \gamma(t_0)|} = \frac{\gamma(t) - \gamma(t_0)}{t - t_0} \cdot \left(\frac{|\gamma(t) - \gamma(t_0)|}{\underbrace{t - t_0}_{\substack{\text{отрицательно,} \\ \text{поэтому внося} \\ \text{под знак модуля} \\ \text{меняем знак дроби}}}} \right)^{-1} =$$

$$= \underbrace{\frac{\gamma(t)-\gamma(t_0)}{t-t_0}}_{\substack{\downarrow\\ \gamma'(t_0)}} \cdot \underbrace{\left(-\left|\frac{\gamma(t)-\gamma(t_0)}{t-t_0}\right|^{-1}\right)}_{\substack{\downarrow\\ -\left|\gamma'(t_0)\right|^{-1}}} \underset{t\to t_0+0}{\longrightarrow} -\gamma'(t_0)\cdot\left|\gamma'(t_0)\right|^{-1} = -\frac{\gamma'(t_0)}{\left|\gamma'(t_0)\right|}$$

Остается заметить, что в качестве направляющего вектора к касательной можно вместо $\frac{\gamma'(t_0)}{|\gamma'(t_0)|}$ или $-\frac{\gamma'(t_0)}{|\gamma'(t_0)|}$ взять $\gamma'(t_0)$. □

- Вектор $p \in X$ называется *касательным вектором* к параметризованной открытой кривой $\gamma : \mathbb{R} \hookrightarrow X$ в точке $a = \gamma(t_0)$, если он параллелен касательной прямой к γ в точке a.

Из теоремы 14.3.7 следует

Теорема 14.3.8. *Вектор $p \in X$ тогда и только тогда будет касательным к параметризованной открытой кривой $\gamma : \mathbb{R} \hookrightarrow X$ в точке $a = \gamma(t_0)$, когда p коллинеарен вектору скорости в этой точке:*

$$\exists \lambda \in \mathbb{R} \quad p = \lambda \cdot \gamma'(t_0)$$

Касательное пространство к многообразию произвольной размерности. Пусть M – гладкое многообразие в евклидовом пространстве Z и a – какая-нибудь точка на M. Вектор $p \in Z$ называется *касательным вектором* к многообразию M в точке a, если на M существует параметризованная открытая кривая $\gamma : \mathbb{R} \hookrightarrow Z$ такая, что

1) γ лежит в M:
$$\forall t \in \mathsf{D}(\gamma) \quad \gamma(t) \in M$$

2) γ проходит через точку a:
$$\exists t_0 \in \mathsf{D}(\gamma) \quad \gamma(t_0) = a$$

3) p является касательным вектором для γ в точке a:
$$\exists \lambda \in \mathbb{R} \quad p = \lambda \cdot \gamma'(t_0)$$

- Множество всех касательных векторов к многообразию M в точке $a \in M$ называется *касательным пространством* к M в a и обозначается $T_a(M)$.

Теорема 14.3.9. *Касательное пространство $T_a(M)$ к гладкому многообразию M в произвольной точке $a \in M$ обладает следующими свойствами:*

(i) *$T_a(M)$ является линейным пространством (относительно обычных операций суммирования векторов и умножения вектора на скаляр), размерность которого совпадает с размерностью многообразия M:*

$$\dim T_a(M) = m = \dim M$$

(ii) *если M задано системой уравнений*

$$\begin{cases} \varphi_1(x) = 0 \\ ... \\ \varphi_k(x) = 0 \end{cases}, \quad x \in U \tag{14.3.183}$$

то $T_a(M)$ совпадает с ортогональным дополнением к системе градиентов функций $\varphi_1, ..., \varphi_k$ в точке a:

$$T_a(M) = \Big\{\nabla\varphi_1(a), ..., \nabla\varphi_k(a)\Big\}^{\perp}$$

или, что эквивалентно, с множеством векторов $p \in Z$, обнуляющихся дифференциалами $\mathsf{d}\,\varphi_i(a)$

$$T_a(M) = \Big\{p \in Z : \ \mathsf{d}\,\varphi_1(a)[p] = ... = \mathsf{d}\,\varphi_k(a)[p] = 0\Big\}$$

(iii) *если $\sigma : D \to Z$ – какая-нибудь (локальная) параметризация многообразия M в окрестности точки a, и x_0 – точка в D, для которой*

$$\sigma(x_0) = a$$

то $T_a(M)$ совпадает с множеством всех векторов в Z, являющихся дифференциалами отображения σ в точке x_0:

$$T_a(M) = \Big\{ \mathsf{d}\,\sigma(x_0)[q]; \quad q \in X \Big\} \tag{14.3.184}$$

Доказательство. Сначала докажем, что $T_a(M)$ содержится в ортогональном дополнении к векторам $\nabla\varphi_1(a), ..., \nabla\varphi_k(a)$:

$$T_a(M) \subseteq \Big\{ \nabla\varphi_1(a), ..., \nabla\varphi_k(a) \Big\}^{\perp} \tag{14.3.185}$$

Пусть $p \in T_a(M)$ – какой-нибудь касательный вектор, то есть

$$p = \lambda \cdot \gamma'(t_0), \qquad a = \gamma(t_0)$$

для некоторой гладкой кривой $\gamma(t)$, лежащей в M. Тогда из (14.3.183) получаем, что все функции φ_i обращаются в нуль на $\gamma(t)$

$$\begin{gathered}
\varphi_i\Big(\gamma(t)\Big) = 0 \\
\Downarrow \\
\underbrace{\frac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}\,t}\ \varphi_i\Big(\gamma(t)\Big)\Big|_{t=t_0}}_{\substack{\| \\ (14.3.179) \\ \| \\ \Big\langle \nabla\varphi_i\big(\gamma(t_0)\big), \gamma'(t_0) \Big\rangle}} \quad = 0 \\
\Downarrow \\
\Big\langle p, \nabla\varphi_i\Big(\gamma(t_0)\Big) \Big\rangle = \Big\langle \lambda\gamma'(t_0), \nabla\varphi_i\Big(\gamma(t_0)\Big) \Big\rangle = 0 \\
\Downarrow \\
p \perp \nabla\varphi_i\Big(\gamma(t_0)\Big)
\end{gathered}$$

Мы получили, что любой касательный вектор p перпендикулярен всем векторам градиента:

$$\forall p \in T_a(M) \qquad p \perp \Big\{ \nabla\varphi_1(a), ..., \nabla\varphi_k(a) \Big\}$$

Это и означает, что справедливо вложение (14.3.185).

2. Рассмотрим теперь какую-нибудь параметризацию $\sigma : D \to Z$ многообразия M в окрестности точки a. Обозначим через x_0 точку в D, для которой

$$\sigma(x_0) = a$$

Рассмотрим дифференциал отображения $\sigma : D \to Z$ в этой точке:

$$\mathsf{d}\,\sigma(x_0) : X \to Z \quad \Big| \quad \mathsf{d}\,\sigma(x_0)[q] = \lim_{t\to 0} \frac{\sigma(x_0 + tq) - \sigma(x_0)}{t}$$

По теореме 14.2.6, это будет линейное отображение. Обозначим через P его образ, то есть множество векторов вида $p = \mathsf{d}\,\sigma(x_0)[q]$ где q пробегает X:

$$P = \Big\{ \mathsf{d}\,\sigma(x_0)[q]; \quad q \in X \Big\}$$

Покажем, что

$$P \subseteq T_a(M) \tag{14.3.186}$$

Действительно, для всякого $q \in X$ можно рассмотреть кривую

$$\gamma(t) = \sigma(x_0 + tq)$$

и тогда мы получим:

$$\gamma'(0) = \lim_{t\to 0} \frac{\sigma(x_0 + tq) - \sigma(x_0)}{t} = \mathsf{d}\,\sigma(x_0)[q] = p$$

То есть всякий вектор $p = \mathsf{d}\,\sigma(x_0)[q]$ является вектором скорости некоторой кривой γ на многообразии M в точке $a = \gamma(x_0)$. Это и означает, что p является касательным вектором к M в точке a, то есть справедливо (14.3.186).

3. Выпишем теперь соотношения (14.3.185) и (14.3.186) вместе

$$P \subseteq T_a(M) \subseteq \Big\{ \nabla\varphi_1(a), ..., \nabla\varphi_k(a) \Big\}^{\perp}$$

и заметим, что по бокам здесь стоят подпространства в Z одинаковой размерности m.

Действительно, поскольку $\mathsf{d}\,\sigma(x_0) : X \to Z$ – линейное инъективное отображение, его образ P должен быть подпространством в Z размерности m. А с другой стороны, $\Big\{ \nabla\varphi_1(a), ..., \nabla\varphi_k(a) \Big\}^{\perp}$ – тоже подпространство размерности $m = n - k$, потому что векторы $\nabla\varphi_1(a), ..., \nabla\varphi_k(a)$ линейно независимы.

Итак, $T_a(M)$ – множество, лежащее между двумя подпространствами в Z, имеющими одинаковую размерность m. Это означает, что $T_a(M)$ должно совпадать с этими подпространствами:

$$P = T_a(M) = \Big\{ \nabla\varphi_1(a), ..., \nabla\varphi_k(a) \Big\}^{\perp}$$

□

(c) Условный экстремум функции многих переменных

◇ **14.3.13.** . Рассмотрм следующую задачу. Пусть требуется найти наибольшее и наименьшее значения (то есть, экстремумы) функции

$$f(x, y) = x \cdot y^2$$

на множестве

$$E: \quad x^2 + y^2 \leqslant 1$$

Из картинки видно, что эти экстремумы достигаются в каких-то точках A, B, C, D на границе круга E (то есть на окружности $x^2+y^2 = 1$). Как найти эти точки?

Ясно, что A, B, C, D – не точки локального экстремума функции $f(x, y)$, потому что, например, в любой окрестности точки A имеются точки, где функция $f(x, y)$ принимает значения, большие $f(A)$, и точки, где ее значение меньше $f(A)$.

Значит наша задача не сводится к нахождению локальных экстремумов функции $f(x, y)$ (то есть не принадлежит тому типу задач, которые мы научились решать в предыдущей главе).

Такие задачи, в которых ищется экстремум функции многих переменных f на множестве уровня M некоторой гладкой функции $\varphi(x)$ на $\mathbb{R}^n$

$$\varphi(x) = C$$

называются задачами на нахождение *условного экстремума.*

Множество M может быть также задано цепочкой уравнений

$$\begin{cases} \varphi_1(x) = C_1 \\ ... \\ \varphi_k(x) = C_k \end{cases}$$

где $\varphi_i(x)$ – гладкие функции на $\mathbb{R}^n$, и в этом случае оно называется *множеством уровня системы функций* $\varphi_1(x), ..., \varphi_k(x)$.

В этом разделе мы объясним метод решения таких задач.

Теоремы Лагранжа. Начнем со следующего определения.

- Пусть M – гладкое многообразие в $\mathbb{R}^n$, заданное системой уравнений

$$\begin{cases} \varphi_1(x) = 0 \\ ... \\ \varphi_k(x) = 0 \end{cases}, \quad x \in U$$

Пусть, кроме того, f – некоторая дополнительная гладкая функция на U.
Точка $a \in M$ называется

— *точкой локального условного минимума* для f на M, если найдется окрестность $U_\varepsilon(a)$ такая, что в любой точке x, лежащей одновременно в M и в окрестности $U_\varepsilon(a)$ функция f принимает значение большее, чем в точке a:

$$\forall x \in M \cap U_\varepsilon(a) \qquad f(x) \geqslant f(a)$$

— *точкой локального условного максимума* для f на M, если найдется окрестность $U_\varepsilon(a)$ такая, что в любой точке x, лежащей одновременно в M и в окрестности $U_\varepsilon(a)$ функция f принимает значение меньшее, чем в точке a:

$$\forall x \in M \cap U_\varepsilon(a) \qquad f(x) \leqslant f(a)$$

— *точкой локального условного экстремума* для f на M, если она является точкой локального условного минимума или максимума для f на M.

Понятно, что если мы, например, ищем максимум функции f на M, то для этого достаточно найти точки локального максимума f на M, а затем выбрать из них ту, где f принимает наибольшее значение. Поэтому задача нахождения условного экстремума сводится (как и в одномерном случае) к нахождению докального условного экстремума.

А эту задачу, как оказывается, можно решить с помощью общего метода, предложенного французским математиком Ж.Л.Лагранжем. Его идея состоит в том, чтобы использовать следующую вспомогательную функцию, называемую в его честь *функцией Лагранжа*:

$$L(x, \lambda) = f(x) + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \cdot \varphi_i(x)$$

(функция f при этом обычно называется *целевой функцией*, а $\varphi_1(x), ..., \varphi_k(x)$ – *функциями связи*). Здесь $x = \Big(x^{(1)}, ..., x^{(n)}\Big)$ – по-прежнему, n-мерная переменная из $U \subseteq \mathbb{R}^n$, а $\lambda = \Big(\lambda_1, ..., \lambda_k\Big)$ – новая k-мерная переменная, пробегающая $\mathbb{R}^k$. Таким образом, функция Лагранжа $L(x, \lambda)$ зависит от $n + k$-мерной переменной $(x, \lambda) = \Big(x^{(1)}, ..., x^{(n)}, \lambda_1, ..., \lambda_k\Big)$.

Оказывается, условный локальный экстремум функции f зависит от свойств первых двух дифференциалов функции Лагранжа $L(x, \lambda)$. Напомним, что, по определению, $\mathsf{d}\, L$ и $\mathsf{d}^2\, L$ в точке (x, λ) есть функции от $n + k$-мерной переменной, то есть, что равносильно, от двух переменных p и η размерностей n и k:

$$\mathsf{d}\, L(x, \lambda)(p, \eta) = \lim_{t \to 0} \frac{L(x + t \cdot p,\ \lambda + t \cdot \eta) - L(x,\ \lambda)}{t} = \frac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}\, t} L(x + t \cdot p,\ \lambda + t \cdot \eta)\Big|_{t=0}$$

$$\mathsf{d}^2\, L(x, \lambda)(p, \eta) = \frac{\mathsf{d}^2}{\mathsf{d}\, t^2} L(x + t \cdot p,\ \lambda + t \cdot \eta)\Big|_{t=0}$$

Выведем общие формулы для вычисления дифференциалов функции Лагранжа.

$$\mathsf{d}\, L(x,\lambda)(p,\eta) = \mathsf{d}\, f(x)[p] + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \cdot \mathsf{d}\, \varphi_i(x)[p] + \sum_{i=1}^{k} \mathsf{d}\, \lambda_i(\eta) \cdot \varphi_i(x)$$

$$\mathsf{d}^2\, L(x,\lambda)(p,\eta) = \mathsf{d}^2\, f(x)[p] + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \cdot \mathsf{d}^2\, \varphi_i(x)[p] + 2\sum_{i=1}^{k} \mathsf{d}\, \lambda_i(\eta) \cdot \mathsf{d}\, \varphi_i(x) + \underbrace{\sum_{i=1}^{k} \mathsf{d}^2\, \lambda_i(\eta) \cdot \varphi_i(x)}_{0} =$$

$$= \mathsf{d}^2\, f(x)[p] + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \cdot \mathsf{d}^2\, \varphi_i(x)[p] + 2\sum_{i=1}^{k} \mathsf{d}\, \lambda_i(\eta) \cdot \mathsf{d}\, \varphi_i(x)$$

Заметим теперь, что если $a \in M$, то все $\varphi_i(a) = 0$, поэтому

$$\mathsf{d}\, L(a,\lambda)(p,\eta) = \mathsf{d}\, f(a)[p] + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \cdot \mathsf{d}\, \varphi_i(a)[p]$$

А если, вдобавок, $p \in T_a(M)$, то $\mathsf{d}\, \varphi_i(a)[p] = 0$, поэтому

$$\mathsf{d}^2\, L(x,\lambda)(p,\eta) = \mathsf{d}^2\, f(x)[p] + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \cdot \mathsf{d}^2\, \varphi_i(x)[p]$$

Таким образом, справедлива

Лемма 14.3.10. *Если $a \in M$, то есть справедливы условия*

$$\begin{cases} \varphi_1(a) = 0 \\ \dots \\ \varphi_k(a) = 0 \end{cases},$$

то первый дифференциал функции Лагранжа $\mathsf{d}\, L(a,\lambda)(p,\eta)$ не зависит от переменной η и равен

$$\mathsf{d}\, L(a,\lambda)(p,\eta) = \mathsf{d}\, L(a,\lambda)(p,0) = \mathsf{d}\, f(a)[p] + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \cdot \mathsf{d}\, \varphi_i(a)[p] \qquad (14.3.187)$$

Если же $a \in M$ и $p \in T_a(M)$, то есть справедливы условия

$$\begin{cases} \varphi_1(a) = 0 \\ \dots \\ \varphi_k(a) = 0 \end{cases}, \qquad \begin{cases} \mathsf{d}\, \varphi_1(a)[p] = 0 \\ \dots \\ \mathsf{d}\, \varphi_k(a)[p] = 0 \end{cases}$$

то второй дифференциал функции Лагранжа $\mathsf{d}^2\, L(a,\lambda)(p,\eta)$ не зависит от переменной η и равен

$$\mathsf{d}^2\, L(a,\lambda)(p,\eta) = \mathsf{d}^2\, L(a,\lambda)(p,0) = \mathsf{d}^2\, f(a)[p] + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \cdot \mathsf{d}^2\, \varphi_i(a)[p] \qquad (14.3.188)$$

Метод Лагранжа описывается следующими двумя теоремами.

Теорема 14.3.11 (первая теорема Лагранжа: необходимое условие локального условного экстремума)**.** *Если a – точка локального условного экстремума для f на M то для некоторого $\lambda^* \in \mathbb{R}^k$ первый дифференциал функции Лагранжа в точке (a,λ^*) равен нулю:*

$$\mathsf{d}\, L(a,\lambda^*)(p,\eta) = 0 \qquad \Big(\forall p,\eta\Big) \qquad (14.3.189)$$

Теорема 14.3.12 (вторая теорема Лагранжа: достаточное условие локального условного экстремума)**.** *Пусть для некоторых $a \in M$ и $\lambda^* \in \mathbb{R}^k$ первый дифференциал функции Лагранжа в точке (a,λ^*) равен нулю:*

$$\mathsf{d}\, L(a,\lambda^*)(p,\eta) = 0 \qquad \Big(\forall p,\eta\Big)$$

Тогда

— *если второй дифференциал функции Лагранжа в точке (a,λ^*) положителен на любом ненулевом касательном векторе p к многообразию M в точке a,*

$$\mathsf{d}^2 L(a,\lambda^*)(p,\eta) = \mathsf{d}^2 L(a,\lambda^*)(p,0) > 0, \qquad \Big(\forall p \in T_a(M),\ p \neq 0\Big) \tag{14.3.190}$$

то a – точка локального минимума для f на M;

— *если второй дифференциал функции Лагранжа в точке (a,λ^*) отрицателен на любом ненулевом касательном векторе p к многообразию M в точке a,*

$$\mathsf{d}^2 L(a,\lambda^*)(p,\eta) = \mathsf{d}^2 L(a,\lambda^*)(p,0) < 0, \qquad \Big(\forall p \in T_a(M),\ p \neq 0\Big) \tag{14.3.191}$$

то a – точка локального максимума для f на M;

— *если $\mathsf{d}^2 L(a,\lambda^*)$ при некоторых значениях $p \in T_a(M)$ положителен, а при некоторых – отрицателен, то a – не точка локального экстремума для f на M.*

Доказательство. Пусть f, $\varphi_1(x)$,..., $\varphi_k(x)$ – непрерывно дифференцируемые функции на открытом множестве $U \subseteq \mathbb{R}^n$,

$$M = \Big\{ x \in U : \quad \varphi_1(x) = ... = \varphi_k(x) = 0 \Big\} \qquad \Big(k < n\Big)$$

и для некоторой точки $a \in M$ градиенты

$$\nabla f(a), \nabla\varphi_1(a), ..., \nabla\varphi_k(a)$$

линейно независимы. Покажем, что тогда a не может быть точкой локального экстремума целевой функции f с функциями связи $\varphi_1(x), ..., \varphi_k(x)$.

Для этого мы построим непрерывную кривую

$$\alpha(t) \in M, \quad t \in (-\delta, \delta),$$

проходящую через точку a

$$\alpha(0) = a$$

такую, что значения функции f в точках $x = \alpha(t)$ будет больше $f(a)$ при $t > 0$, и меньше $f(a)$ при $t < 0$:

$$\begin{cases} f(\alpha(t)) > f(a) & \text{при} \quad t > 0 \\ f(\alpha(t)) < f(a) & \text{при} \quad t < 0 \end{cases} \tag{14.3.192}$$

Ясно, что если такая кривая $\alpha(t)$ существует, то a не может быть точкой локального условного экстремума для f

Рассмотрим векторы

$$c_0 = \nabla f(a), c_1 = \nabla\varphi_1(a), ..., c_k = \nabla\varphi_k(a)$$

Поскольку они линейно независимы, их можно дополнить до некоторого базиса в $\mathbb{R}^n$. Пусть c_{k+1},..., c_{n-1} – какие-нибудь новые векторы, которые вместе с $c_0, c_1, ..., c_k$ образуют базис в $\mathbb{R}^n$ (всего получаем $1 + k + (n-1-k) = n$ векторов):

$$c_0, \quad c_1, ..., c_k, \quad c_{k+1}, ..., c_{n-1}$$

Рассмотрим новые функции на $\mathbb{R}^n$:

$$\varphi_{k+1}(x) = \Big\langle c_{k+1}, x \Big\rangle, ..., \varphi_{n-1}(x) = \Big\langle c_{n-1}, x \Big\rangle$$

Это будут линейные формы на $\mathbb{R}^n$, поэтому их градиенты совпадают с векторами $c_{k+1}, ..., c_{n-1}$:

$$c_{k+1} = \nabla\varphi_{k+1}(a), ..., c_{n-1} = \nabla\varphi_{n-1}(a)$$

Таким образом, у нас получается система непрерывно дифференцируемых функций f, $\varphi_1(x)$,..., $\varphi_k(x)$, f_{k+1},..., $f_{n-1}(x)$ на множестве U у которых градиенты в точке $a \in U$ линейно независимы, потому что образуют базис:

$$\det \begin{pmatrix} \nabla f(a) \\ \nabla\varphi_1(a) \\ ... \\ \nabla\varphi_{n-1}(a) \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ ... \\ c_{n-1} \end{pmatrix} \neq 0$$

По теореме о гладком локальном обращении переменных, получаем, что

(i) существует такая окрестность $U_\varepsilon(a)$ точки a, что множество

$$V = \left\{ \Big(f(x), \varphi_1(x), ..., \varphi_{n-1}(x) \Big) \Big| \quad x \in U_\varepsilon(a) \right\}$$

открыто в $\mathbb{R}^n$;

(ii) существуют такие функции $\psi_0(y), \psi_1(y), ..., \psi_{n-1}(y), \quad y \in V$, непрерывно дифференцируемые на множестве V, что

$$\forall x \in U_\varepsilon(a) \quad \forall y \in V \qquad y = F(x) \quad \Leftrightarrow \quad \Psi(y) = x$$

Зафиксируем эти ε и $\psi_0(y), \psi_1(y), ..., \psi_{n-1}(y)$, и рассмотрим кривую

$$\alpha(t) = \Psi\Big(f(a) + t, \varphi_1(a), ..., \varphi_{n-1}(a) \Big)$$

1. Покажем, что $\alpha(t)$ определена при t лежащих в некоторой окрестности точки $0 \in \mathbb{R}$. Действительно, поскольку точка $b = f(a) = \Big(f(a), \varphi_1(a), ..., f_{n-1}(a) \Big)$ лежит в открытом множестве V, найдется такое $\delta > 0$, что вся окрестность $U_\delta(b)$ лежит в V:

$$\forall y \in U_\delta(b) \qquad y \in V$$

В частности, это должно выполняться для точек вида $y = \Big(f(a) + t, \varphi_1(a), ..., \varphi_{n-1}(a) \Big)$ при $t \in \Big(-\delta, \delta \Big)$:

$$\forall t \in (-\delta, \delta) \qquad \Big(f(a) + t, \varphi_1(a), ..., \varphi_{n-1}(a) \Big) \in V$$

Поэтому

$$\forall t \in (-\delta, +\delta) \qquad \exists \alpha(t) = \Psi\Big(f(a) + t, \varphi_1(a), ..., \varphi_{n-1}(a) \Big) \in U$$

2. Заметим далее, что кривая $\alpha(t)$ непрерывна, как композиция непрерывных отображений

$$t \quad \mapsto \quad \Big(f(a) + t, \varphi_1(a), ..., f_{n-1}(a) \Big) \quad \mapsto \quad \Psi\Big(f(a) + t, \varphi_1(a), ..., \varphi_{n-1}(a) \Big)$$

3. Кривая $\alpha(t)$ проходит через точку a:

$$\alpha(0) = \Psi\Big(f(a) + 0, \varphi_1(a), ..., \varphi_{n-1}(a) \Big) = \Psi\Big(F(a) \Big) = (1.7) = a$$

4. Покажем, что

$$f\Big(\alpha(t) \Big) = f(a) + t, \qquad t \in (-\delta, \delta)$$

Действительно, из (1.7) получаем:

$$\forall y \in V \qquad \Phi\Big\{ \Psi(y) \Big\} = y$$

$$\Downarrow$$

$$\forall y \in V \qquad f\Big\{ \Psi(y) \Big\} = y_0 \quad \Big(\text{нулевая координата} \Big)$$

$$\Downarrow$$

$$\text{подставляем} \quad y = \big(f(a) + t, \varphi_1(a), ..., \varphi_{n-1}(a) \big)$$

$$\Downarrow$$

$$\forall t \in (-\delta, \delta) \qquad f\Big\{ \Psi\big(f(a) + t, \varphi_1(a), ..., \varphi_{n-1}(a) \big) \Big\} = \big(f(a) + t, \varphi_1(a), ..., \varphi_{n-1}(a) \big)_0 = f(a) + t$$

$$\Downarrow$$

$$\forall t \in (-\delta, +\delta) \qquad f\Big\{ \alpha(t) \Big\} = \big(f(a) + t, \varphi_1(a), ..., \varphi_{n-1}(a) \big)_0 = f(a) + t \tag{14.3.193}$$

Из формулы (14.3.193) следует (14.3.192), то есть то что нам нужно было.

$\square$

Доказательство теоремы 14.3.12. Обозначим через $\varphi : U \to \mathbb{R}^k$ отображение, задаваемое функциями связи:

$$\varphi(x) = \Big(\varphi_1(x), ..., \varphi_k(x)\Big)$$

Пусть $a \in M$ и $\lambda^* \in \mathbb{R}^k$:

$$\mathsf{d}\, L(a, \lambda^*) = \mathsf{d}\, f(a) + \lambda^* \cdot \mathsf{d}\, \varphi(a) = 0 \tag{14.3.194}$$

Пользуясь условием (iii) на с.862 подберем локальную параметризацию M в окрестности точки a, то есть отображение

$$\sigma : W \to M \quad \Big| \quad \sigma(w) = \Big(\xi_1(w), ..., \xi_m(w)\Big)$$

Тогда получаем две логические цепочки. Во-первых,

$$(\varphi \circ \sigma)(w) = 0, \quad w \in W$$

$$\Downarrow$$

$$\mathsf{d}(\varphi \circ \sigma)(w) = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\mathsf{d}\, \varphi\Big(\sigma(\widetilde{a})\Big)\Big[\mathsf{d}\, \sigma(\widetilde{a})[q]\Big] = 0, \qquad \forall q \in \mathbb{R}^m$$

$$\Downarrow$$

$$\mathsf{d}\, \varphi(a)\Big[\mathsf{d}\, \sigma(\widetilde{a})[q]\Big] = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\mathsf{d}\, \sigma(\widetilde{a})[q] \in T_a(M), \qquad \forall q \in \mathbb{R}^m \tag{14.3.195}$$

И, во-вторых,

$$(\varphi \circ \sigma)(w) = 0, \quad w \in W$$

$$\Downarrow$$

$$\mathsf{d}^2(\varphi \circ \sigma)(\widetilde{a})[q] = 0, \qquad \forall q \in \mathbb{R}^m$$

$$\Downarrow \quad {\scriptstyle (14.2.134)}$$

$$\mathsf{d}^2\, \varphi\Big(\sigma(\widetilde{a})\Big)\Big[\mathsf{d}\, \sigma(\widetilde{a})[q]\Big] + \mathsf{d}\, \varphi\Big(\sigma(\widetilde{a})\Big)\Big[\mathsf{d}^2\, \sigma(\widetilde{a})[q]\Big] = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\mathsf{d}^2\, \varphi(a)\Big[\mathsf{d}\, \sigma(\widetilde{a})[q]\Big] + \mathsf{d}\, \varphi(a)\Big[\mathsf{d}^2\, \sigma(\widetilde{a})[q]\Big] = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\mathsf{d}\, \varphi(a)\Big[\mathsf{d}^2\, \sigma(\widetilde{a})[q]\Big] = -\,\mathsf{d}^2\, \varphi(a)\Big[\mathsf{d}\, \sigma(\widetilde{a})[q]\Big], \qquad \forall q \in \mathbb{R}^m \tag{14.3.196}$$

Запомним эти две формулы и рассмотрим функцию

$$\widetilde{f} = f \circ \sigma : W \to \mathbb{R}$$

Если она имеет локальный экстремум в точке $\widetilde{a}$, то f имеет локальный условный экстремум в точке $a \in M$.

Вычислим второй дифференциал $\widetilde{f}$:

$$\mathsf{d}^2\, \widetilde{f}(\widetilde{a})[q] = \mathsf{d}^2(f \circ \sigma)(\widetilde{a})[q] = (14.2.134) = \mathsf{d}^2\, f\Big(\sigma(\widetilde{a})\Big)\Big[\mathsf{d}\, \sigma(\widetilde{a})[q]\Big] + \mathsf{d}\, f\Big(\sigma(\widetilde{a})\Big)\Big[\mathsf{d}^2\, \sigma(\widetilde{a})[q]\Big] =$$

$$= \mathsf{d}^2\, f(a)\Big[\mathsf{d}\, \sigma(\widetilde{a})[q]\Big] + \mathsf{d}\, f(a)\Big[\mathsf{d}^2\, \sigma(\widetilde{a})[q]\Big] = (14.3.194) = \mathsf{d}^2\, f(a)\Big[\mathsf{d}\, \sigma(\widetilde{a})[q]\Big] - \lambda^* \cdot \mathsf{d}\, \varphi(a)\Big[\mathsf{d}^2\, \sigma(\widetilde{a})[q]\Big] = (14.3.196) =$$

$$= \mathsf{d}^2\, f(a)\Big[\mathsf{d}\, \sigma(\widetilde{a})[q]\Big] + \lambda^* \cdot \mathsf{d}^2\, \varphi(a)\Big[\mathsf{d}\, \sigma(\widetilde{a})[q]\Big] = \left(\begin{smallmatrix}\text{в силу (14.3.195),}\\ \text{справедливо (14.3.188)}\end{smallmatrix}\right) = \mathsf{d}^2\, L(a, \lambda^*)\Big[\mathsf{d}\, \sigma(\widetilde{a})[q]\Big], 0]$$

Обозначив теперь

$$p = \mathsf{d}\, \sigma(\widetilde{a})[q]$$

мы получим формулу

$$\mathsf{d}^2\,\widetilde{f}(\widetilde{a})[q] = \mathsf{d}^2\,L(a,\lambda^*)[p,0]$$

в которой $p \in T_a(M)$ и $q \in \mathbb{R}^m$ взаимно однозначное соответствуют друг другу в силу (14.3.184).

Из нее будет следовать, что условие

$$\mathsf{d}^2\,\widetilde{f}(\widetilde{a})[q] = \mathsf{d}^2\,L(a,\lambda^*)[p,0] > 0, \qquad p \in T_a(M)$$

означает положительную определенность формы $\mathsf{d}^2\,\widetilde{f}(\widetilde{a})$, то есть локальный минимум функции $\widetilde{f}$ в точке $\widetilde{a}$. А это равносильно тому, что f имеет локальный минимум на множестве M в точке a.

Точно также, условие

$$\mathsf{d}^2\,\widetilde{f}(\widetilde{a})[q] = \mathsf{d}^2\,L(a,\lambda^*)[p,0] < 0, \qquad p \in T_a(M)$$

означает отрицательную определенность формы $\mathsf{d}^2\,\widetilde{f}(\widetilde{a})$, то есть локальный максимум функции $\widetilde{f}$ в точке $\widetilde{a}$, что равносильно локальному максимуму функции f на множестве M в точке a.

И, наконец, изменение знака при различных $p \in T_a(M)$ означает, что f не имеет экстремума на множестве M в точке a

□

Задачи на условный экстремум.

◇ **14.3.14.** На эллипсоиде

$$x^2 + 2y^2 + 4z^2 = 8$$

найти точку, наиболее удаленную от точки $(0,0,3)$.

Если (x,y,z) – точка на этом эллипсоиде, то расстояние от нее до точки $(0,0,3)$ равно

$$\sqrt{x^2 + y^2 + (z-3)^2}.$$

Поэтому задачу можно понимать, как нахождения максимума функции

$$f(x,y,z) = x^2 + y^2 + (z-3)^2$$

на множестве

$$x^2 + 2y^2 + 4z^2 = 8.$$

Составим функцию Лагранжа:

$$L = x^2 + y^2 + (z-3)^2 + \lambda\cdot(x^2 + 2y^2 + 4z^2 - 8).$$

Находим и приравниваем к нулю ее дифференциал

$$\begin{gathered}\mathsf{d}\,L = 2x\,\mathsf{d}\,x + 2y\,\mathsf{d}\,y + 2(z-3)\,\mathsf{d}\,z + \\ +(x^2+2y^2+4z^2-8)\,\mathsf{d}\,\lambda + \lambda\cdot(2x\,\mathsf{d}\,x + 4y\,\mathsf{d}\,y + 8z\,\mathsf{d}\,z) = \\ = 2x(1+\lambda)\,\mathsf{d}\,x + 2y(1+2\lambda)\,\mathsf{d}\,y + 2(z-3+4\lambda z)\,\mathsf{d}\,z + \\ + (x^2+2y^2+4z^2-8)\,\mathsf{d}\,\lambda = 0 \quad \Longleftrightarrow\end{gathered}$$

$$\Longleftrightarrow \quad \begin{cases} 2x(1+\lambda) = 0 \\ 2y(1+2\lambda) = 0 \\ 2(z-3+4\lambda z) = 0 \\ x^2+2y^2+4z^2-8 = 0 \end{cases} \quad \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \quad \begin{cases} \left[\begin{array}{c} x = 0 \\ 1+\lambda = 0 \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{c} y = 0 \\ 1+2\lambda = 0 \end{array}\right. \\ z - 3 + 4\lambda z = 0 \\ x^2 + 2y^2 + 4z^2 = 8 \end{cases} \quad \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = \pm\sqrt{2} \\ \lambda = \frac{3-z}{4z} = \frac{3\mp\sqrt{2}}{\pm4\sqrt{2}} \end{cases} \\ \begin{cases} x = 0 \\ \lambda = -\frac{1}{2} \\ z = \frac{3}{1+4\lambda} = -3 \\ y \in \varnothing \end{cases} \\ \begin{cases} \lambda = -1 \\ y = 0 \\ z = \frac{3}{1+4\lambda} = -1 \\ x = \pm 2 \end{cases} \end{array}\right] \quad \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = \pm\sqrt{2} \\ \lambda = \frac{3\mp\sqrt{2}}{\pm4\sqrt{2}} \end{cases} \\ \begin{cases} x = \pm 2 \\ y = 0 \\ z = -1 \\ \lambda = -1 \end{cases} \end{array}\right]$$

Теперь значения функции f в этих точках:

$$\begin{aligned} &f(0,0,\sqrt{2}) = (\sqrt{2}-3)^2 \equiv 2,5148..., \\ &f(0,0,-\sqrt{2}) = (\sqrt{2}+3)^2 \equiv 19,4852..., \\ &f(\pm2,0,-1) = 4 + 4^2 = 20 \end{aligned}$$

ОТВЕТ: Максимум в точках $(\pm2,0,-1)$.

◇ **14.3.15.** Найти экстремум функции

$$f(x,y,z) = x + y + z^2$$

при условиях связи

$$\begin{cases} z - x = 1 \\ y - xz = 1 \end{cases}$$

Для этого составляем функцию Лагранжа:

$$L = x + y + z^2 + \lambda \cdot (z - x - 1) + \mu \cdot (y - xz - 1).$$

Находим ее дифференциал и приравниваем его к нулю:

$$\begin{aligned}
\mathsf{d}\, L &= \mathsf{d}\, x + \mathsf{d}\, y + 2z\, \mathsf{d}\, z + (z - x - 1)\, \mathsf{d}\, \lambda + \\
&+ \lambda \cdot (\mathsf{d}\, z - \mathsf{d}\, x) + (y - xz - 1)\, \mathsf{d}\, \mu + \mu \cdot (\mathsf{d}\, y - x\, \mathsf{d}\, z - z\, \mathsf{d}\, x) = \\
&= (1 - \lambda - \mu \cdot z) \cdot \mathsf{d}\, x + (1 + \mu) \cdot \mathsf{d}\, y + (2z + \lambda - \mu \cdot x) \cdot \mathsf{d}\, z + \\
&+ (z - x - 1)\, \mathsf{d}\, \lambda + (y - xz - 1)\, \mathsf{d}\, \mu = 0 \quad \Longleftrightarrow
\end{aligned}$$

$$\Longleftrightarrow \quad \begin{Bmatrix} 1 - \lambda - \mu \cdot z = 0 \\ 1 + \mu = 0 \\ 2z + \lambda - \mu \cdot x = 0 \\ z - x - 1 = 0 \\ y - xz - 1 = 0 \end{Bmatrix} \quad \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \quad \begin{Bmatrix} 1 - \lambda + z = 0 \\ \mu = -1 \\ 2z + \lambda + x = 0 \\ z - x - 1 = 0 \\ y - xz - 1 = 0 \end{Bmatrix} \quad \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \quad \begin{Bmatrix} 1 - \lambda + x + 1 = 0 \\ \mu = -1 \\ 2x + 2 + \lambda + x = 0 \\ z = x + 1 \\ y - xz - 1 = 0 \end{Bmatrix} \quad \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \quad \begin{Bmatrix} \lambda = x + 2 \\ \mu = -1 \\ 2x + 2 + x + 2 + x = 0 \\ z = x + 1 \\ y = xz + 1 \end{Bmatrix} \quad \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \quad \begin{Bmatrix} \lambda = 1 \\ \mu = -1 \\ x = -1 \\ z = 0 \\ y = 1 \end{Bmatrix} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{Bmatrix} x = -1 \\ y = 1 \\ z = 0 \\ \lambda = 1 \\ \mu = -1 \end{Bmatrix}.$$

Находим дифференциалы уравнений связи:

$$\begin{cases} \mathsf{d}\, z - \mathsf{d}\, x = 0 \\ \mathsf{d}\, y - z\, \mathsf{d}\, x - x\, \mathsf{d}\, z = 0 \end{cases}$$

Используя это, находим второй дифференциал функции L:

$$\begin{aligned}
\mathsf{d}^2\, L &= (-\mathsf{d}\, \lambda - z\, \mathsf{d}\, \mu - \mu\, \mathsf{d}\, z) \cdot \mathsf{d}\, x + \mathsf{d}\, \mu \cdot \overbrace{\mathsf{d}\, y}^{\substack{z\, \mathsf{d}\, x + x\, \mathsf{d}\, z \\ \|}} + \\
&+ (2\, \mathsf{d}\, z + \mathsf{d}\, \lambda - x\, \mathsf{d}\, \mu - \mu\, \mathsf{d}\, x) \cdot \mathsf{d}\, z + \\
&+ \underbrace{(\mathsf{d}\, z - \mathsf{d}\, x)}_{\substack{\| \\ 0}} \cdot \mathsf{d}\, \lambda + \underbrace{(\mathsf{d}\, y - z\, \mathsf{d}\, x - x\, \mathsf{d}\, z)}_{\substack{\| \\ 0}} \cdot \mathsf{d}\, \mu = \\
&= (-\mathsf{d}\, \lambda - z\, \mathsf{d}\, \mu - \mu\, \mathsf{d}\, z) \cdot \mathsf{d}\, x + \mathsf{d}\, \mu \cdot (z\, \mathsf{d}\, x + x\, \mathsf{d}\, z) + \\
&+ (2\, \mathsf{d}\, z + \mathsf{d}\, \lambda - x\, \mathsf{d}\, \mu - \mu\, \mathsf{d}\, x) \cdot \mathsf{d}\, z = \\
&= -\mathsf{d}\, \lambda\, \mathsf{d}\, x - \underbrace{\mu\, \mathsf{d}\, x\, \mathsf{d}\, z}_{\substack{\| \\ \mu\, \mathsf{d}\, x^2}} \underbrace{- z\, \mathsf{d}\, \mu\, \mathsf{d}\, x + z\, \mathsf{d}\, \mu\, \mathsf{d}\, x}_{0} + \\
&+ \underbrace{x\, \mathsf{d}\, \mu\, \mathsf{d}\, z - x\, \mathsf{d}\, \mu\, \mathsf{d}\, z}_{0} + \underbrace{2\, \mathsf{d}\, z^2}_{\substack{\| \\ 2\, \mathsf{d}\, x^2}} + \underbrace{\mathsf{d}\, \lambda\, \mathsf{d}\, z}_{\substack{\| \\ \mathsf{d}\, \lambda\, \mathsf{d}\, x}} - \underbrace{\mu\, \mathsf{d}\, x\, \mathsf{d}\, z}_{\substack{\| \\ \mu\, \mathsf{d}\, x^2}} = \\
&= -z\, \mathsf{d}\, \mu\, \mathsf{d}\, x + (2 - 2\mu) \cdot \mathsf{d}\, x^2
\end{aligned}$$

В критической точке $(-1; 1; 0; 1; -1)$ он принимает вид

$$\mathsf{d}^2\, L = 4\, \mathsf{d}\, x^2 \geqslant 0.$$

Это значит, что функция f имеет в точке $(-1; 1; 0)$ локальный условный минимум.

$\triangleright\triangleright$ **14.3.16.** Исследуйте следующие функции на условный локальный экстремум:

1) $u = \sin x \cdot \sin y \cdot \sin z$, $x + y + z = \frac{\pi}{2}$, $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$,
2) $u = x + y + z$, $\frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} = 1$, $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$.

$\diamond$ **14.3.17.** Решим, наконец, пример 14.3.13. Пусть требуется найти наибольшее и наименьшее значения (то есть, экстремумы) функции

$$f(x, y) = x \cdot y^2$$

на множестве

$$E: \quad x^2 + y^2 \leqslant 1$$

Как уже говорилось круг E можно заменить на окружность

$$M: \quad x^2 + y^2 = 1$$

Чтобы найти экстремумы $f(x, y)$ на M, достаточно найти точки локального экстремума на M, и сравнить значения $f(x, y)$ в них. Это мы и сделаем методом Лагранжа.

В качестве функции связи здесь можно взять

$$\varphi(x) = x^2 + y^2 - 1$$

Функция Лагранжа тогда будет следующей:

$$L(x, \lambda) = x \cdot y^2 + \lambda \cdot (x^2 + y^2 - 1)$$

Ее первый дифференциал в абстрактной записи:

$$\begin{aligned}
&\mathsf{d}\, L(x, y, \lambda) = \\
&= (y^2 + 2\lambda x)\, \mathsf{d}\, x + 2y(x + \lambda)\, \mathsf{d}\, y + (x^2 + y^2 - 1) \cdot \mathsf{d}\, \lambda
\end{aligned}$$

Равенство (14.3.189) принимает вид:

$$\begin{aligned}
&\mathsf{d}\, L(x, y, \lambda)(p, q, \eta) = \\
&= (y^2 + 2\lambda x) \cdot p + 2y(x + \lambda) \cdot q + (x^2 + y^2 - 1) \cdot \eta = 0
\end{aligned}$$

Оно должно выполняться для любых p, q, η, поэтому коэффициенты перед p, q, η должны быть равны нулю:

$$\mathsf{d}\, L(x, y, \lambda) = 0 \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} y^2 + 2\lambda x = 0 \\ 2y(x + \lambda) = 0 \\ x^2 + y^2 - 1 = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y^2+2\lambda x=0 \\ \begin{bmatrix} y=0 \\ x+\lambda=0 \end{bmatrix} \\ x^2+y^2-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y^2+2\lambda x=0 \\ y=0 \\ x^2+y^2=1 \end{cases} \\ \begin{cases} y^2+2\lambda x=0 \\ x=-\lambda \\ x^2+y^2=1 \end{cases} \end{array}\right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \lambda x=0 \\ y=0 \\ x^2=1 \end{cases} \\ \begin{cases} y^2=2\lambda^2 \\ x=-\lambda \\ 3\lambda^2=1 \end{cases} \end{array}\right] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \lambda x=0 \\ y=0 \\ x^2=1 \end{cases} \\ \begin{cases} y^2=2\lambda^2 \\ x=-\lambda \\ 3\lambda^2=1 \end{cases} \end{array}\right] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} \begin{cases} \lambda=0 \\ y=0 \\ x=\pm 1 \end{cases} & \\ \begin{cases} y=\pm\sqrt{\frac{2}{3}} \\ x=-\sqrt{\frac{1}{3}} \\ \lambda=\sqrt{\frac{1}{3}} \end{cases} & \begin{cases} y=\pm\sqrt{\frac{2}{3}} \\ x=\sqrt{\frac{1}{3}} \\ \lambda=-\sqrt{\frac{1}{3}} \end{cases} \end{array}\right]$$

Мы получили 6 критических точек. Теперь сравниваем значения функции $f(x,y)$ в них:

$$f(\pm 1, 0)=0$$

$$f\left(\sqrt{\frac{1}{3}}, \pm-\sqrt{\frac{2}{3}}\right)=\frac{2}{3\sqrt{3}} \quad (\text{MAX})$$

$$f\left(-\sqrt{\frac{1}{3}}, \pm-\sqrt{\frac{2}{3}}\right)=-\frac{2}{3\sqrt{3}} \quad (\text{MIN})$$

Ответ: $\max_{x^2+y^2\leqslant 1} x\cdot y^2 = x\cdot y^2\Big|_{(x,y)=\left(\sqrt{\frac{1}{3}},\pm\sqrt{\frac{2}{3}}\right)} = \frac{2}{3\sqrt{3}}$, $\quad \min_{x^2+y^2\leqslant 1} x\cdot y^2 = x\cdot y^2\Big|_{(x,y)=\left(-\sqrt{\frac{1}{3}},\pm-\sqrt{\frac{2}{3}}\right)} = -\frac{2}{3\sqrt{3}}$

◇ **14.3.18.** Рассмотрим теперь задачу на локальный условный экстремум. Пусть для той же самой функции

$$f(x,y)=x\cdot y^2$$

требуется найти точки локального максимума и минимума на множестве

$$M: \quad x^2+y^2=1$$

Для этого мы снова составляем функцию Лагранжа

$$L(x,\lambda)=x\cdot y^2+\lambda\cdot(x^2+y^2-1)$$

и находим ее стационарные точки (что было уже проделано нами в предыдущем примере):

$$\left[\begin{array}{ll} \begin{cases} \lambda=0 \\ y=0 \\ x=\pm 1 \end{cases} & \\ \begin{cases} y=\pm\sqrt{\frac{2}{3}} \\ x=-\sqrt{\frac{1}{3}} \\ \lambda=\sqrt{\frac{1}{3}} \end{cases} & \begin{cases} y=\pm\sqrt{\frac{2}{3}} \\ x=\sqrt{\frac{1}{3}} \\ \lambda=-\sqrt{\frac{1}{3}} \end{cases} \end{array}\right]$$

После этого мы находим второй дифференциал:

$$\mathsf{d}^2 L(x,\lambda)=2\lambda\Big(\mathsf{d}\,x\Big)^2+2(x+\lambda)\Big(\mathsf{d}\,y\Big)^2+ \\ +4y\,\mathsf{d}\,x\,\mathsf{d}\,y+4x\,\mathsf{d}\,x\,\mathsf{d}\,\lambda+4y\,\mathsf{d}\,y\,\mathsf{d}\,\lambda$$

Теперь нужно вычислить его значения в стационарных точках. При этом важно понимать, что условие $p\in T_a(M)$ в формулах (14.3.190) и (14.3.191) накладывает ограничения на элементарные дифференциалы $\mathsf{d}\,x$ и $\mathsf{d}\,y$: они должны быть связаны условием

$$\mathsf{d}\,\varphi(x,y)=2x\,\mathsf{d}\,x+2y\,\mathsf{d}\,y=0$$

потому что $p\in T_a(M)$ означает $\mathsf{d}\,\varphi(x)[p]=0$, то есть нас интересуют только такие значения элементарных дифференциалов $\mathsf{d}\,x$ и $\mathsf{d}\,y$, для которых $\mathsf{d}\,\varphi(x)[p]=0$. Поэтому при вычислении значений $\mathsf{d}^2 L$ в конкретных точках, мы добавляем $\mathsf{d}\,\varphi(x)=0$ как дополнительное условие.

Но кроме того у нас есть еще одно условие $p\neq 0$, которое тоже накладывает ограничения на элементарные дифференциалы: они должны не обращаться в нуль одновременно, то есть всегда либо $\mathsf{d}\,x$, либо $\mathsf{d}\,y$ должно быть отлично от нуля. Это можно изобразить в виде следующего неравенства:

$$\Big(\mathsf{d}\,x\Big)^2+\Big(\mathsf{d}\,y\Big)^2>0$$

Его мы также будем добавлять в систему при вычислении значений $\mathsf{d}^2 L$:

$$1) \begin{cases} \mathsf{d}^2 L(-1,0,0)=\underbrace{4\Big(\mathsf{d}\,x\Big)^2}_{0}-2\Big(\mathsf{d}\,y\Big)^2= \\ \qquad =-2\Big(\mathsf{d}\,y\Big)^2<0 \qquad (\text{MAX}) \\ \mathsf{d}\,\varphi(-1,0)=-2\,\mathsf{d}\,x+0=0 \\ \underbrace{\Big(\mathsf{d}\,x\Big)^2}_{0}+\Big(\mathsf{d}\,y\Big)^2>0 \quad\Rightarrow\quad \mathsf{d}\,y\neq 0 \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} \mathsf{d}^2 L(1,0,0)=\underbrace{-4\Big(\mathsf{d}\,x\Big)^2}_{0}+2\Big(\mathsf{d}\,y\Big)^2= \\ \qquad =2\Big(\mathsf{d}\,y\Big)^2>0 \qquad (\text{MIN}) \\ \mathsf{d}\,\varphi(-1,0)=2\,\mathsf{d}\,x+0=0 \\ \underbrace{\Big(\mathsf{d}\,x\Big)^2}_{0}+\Big(\mathsf{d}\,y\Big)^2>0 \quad\Rightarrow\quad \mathsf{d}\,y\neq 0 \end{cases}$$

$$3)\begin{cases} \mathsf{d}^2 L\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \pm\sqrt{\frac{2}{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \\ \quad = 2\left(-\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{2}{\sqrt{3}}\right)\left(\mathsf{d}\,x\right)^2 + \\ \quad +2\underbrace{\left(\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)}_{0}\left(\mathsf{d}\,y\right)^2 = \\ \quad = -2\sqrt{3}\left(\mathsf{d}\,x\right)^2 < 0 \qquad (\text{MAX}) \\ \mathsf{d}\,\varphi\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \pm\sqrt{\frac{2}{3}}\right) = \frac{2}{\sqrt{3}}\,\mathsf{d}\,x \pm 2\sqrt{\frac{2}{3}}\,\mathsf{d}\,y = 0 \\ \left(\mathsf{d}\,x\right)^2 + \left(\mathsf{d}\,y\right)^2 > 0 \Rightarrow \mathsf{d}\,x \neq 0\ \&\ \mathsf{d}\,y \neq 0 \end{cases}$$

$$4)\begin{cases} \mathsf{d}^2 L\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \pm\sqrt{\frac{2}{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \\ \quad = 2\left(\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{2}{\sqrt{3}}\right)\left(\mathsf{d}\,x\right)^2 + \\ \quad +2\underbrace{\left(-\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)}_{0}\left(\mathsf{d}\,y\right)^2 = \\ \quad = 2\sqrt{3}\left(\mathsf{d}\,x\right)^2 > 0 \qquad (\text{MIN}) \\ \mathsf{d}\,\varphi\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \pm\sqrt{\frac{2}{3}}\right) = -\frac{2}{\sqrt{3}}\,\mathsf{d}\,x \pm 2\sqrt{\frac{2}{3}}\,\mathsf{d}\,y = 0 \\ \left(\mathsf{d}\,x\right)^2 + \left(\mathsf{d}\,y\right)^2 > 0 \Rightarrow \mathsf{d}\,x \neq 0\ \&\ \mathsf{d}\,y \neq 0 \end{cases}$$

Ответ: точки локального условного максимума: $(-1,0)$, $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \pm\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$, точки локального условного минимума: $(1,0)$, $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \pm\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$.

◇ **14.3.19.** Аналогичная задача для функции трех переменных:

$$f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2, \qquad \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{4} = 1$$

Функция Лагранжа:

$$L(x,y,z,\lambda) = x^2 + y^2 + z^2 + \lambda\left(\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{4} - 1\right)$$

Ее дифференциал:

$$\mathsf{d}\,L(x,y,z,\lambda) = \left(2x + \lambda\frac{x}{8}\right)\mathsf{d}\,x + \\ + \left(2y + \lambda\frac{2y}{9}\right)\mathsf{d}\,y + \left(2z + \lambda\frac{z}{2}\right)\mathsf{d}\,z + \\ + \left(\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{4} - 1\right)\mathsf{d}\,\lambda$$

Критические точки:

$$\mathsf{d}\,L(x,y,z,\lambda) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x + \lambda\frac{x}{8} = 0 \\ 2y + \lambda\frac{2y}{9} = 0 \\ 2z + \lambda\frac{z}{2} = 0 \\ \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{4} - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ \lambda = -16 \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} y = 0 \\ \lambda = -9 \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} z = 0 \\ \lambda = -4 \end{array}\right. \\ \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{4} - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 2 \\ \lambda = -4 \end{cases} \\ \begin{cases} x = 4 \\ y = 0 \\ z = 0 \\ \lambda = -16 \end{cases} \\ \begin{cases} x = 0 \\ y = 3 \\ z = 0 \\ \lambda = -9 \end{cases} \end{array}\right]$$

Второй дифференциал функции Лагранжа:

$$\mathsf{d}^2 L(x,y,z,\lambda) = \left(2 + \frac{\lambda}{8}\right)(\mathsf{d}\,x)^2 + \\ + \left(2 + \frac{2\lambda}{9}\right)(\mathsf{d}\,y)^2 + \left(2 + \frac{\lambda}{2}\right)(\mathsf{d}\,z)^2 + \\ + \frac{x}{4}\,\mathsf{d}\,x\,\mathsf{d}\,\lambda + \frac{4y}{9}\,\mathsf{d}\,y\,\mathsf{d}\,\lambda + z\,\mathsf{d}\,z\,\mathsf{d}\,\lambda$$

Дифференциал функции связи:

$$\mathsf{d}\,\varphi(x,y,z) = \frac{x}{8}\,\mathsf{d}\,x + \frac{2y}{9}\,\mathsf{d}\,y + 2z\,\mathsf{d}\,z$$

Исследование критических точек на локальный условный экстремум:

$$1)\begin{cases} \mathsf{d}^2 L(0,0,2,-4) = \\ = \frac{3}{2}\left(\mathsf{d}\,x\right)^2 + \frac{17}{9}\left(\mathsf{d}\,y\right)^2 + \underbrace{2\,\mathsf{d}\,z\,\mathsf{d}\,\lambda}_{0} = \\ = \frac{3}{2}\left(\mathsf{d}\,x\right)^2 + \frac{17}{9}\left(\mathsf{d}\,y\right)^2 > 0 \quad (\text{MIN}) \\ \mathsf{d}\,\varphi(0,0,2) = 0 + 0 + \mathsf{d}\,z = 0 \\ \quad \left(\mathsf{d}\,x\right)^2 + \left(\mathsf{d}\,y\right)^2 + \left(\mathsf{d}\,z\right)^2 > 0 \Rightarrow \\ \quad\quad \Rightarrow \left(\mathsf{d}\,x\right)^2 + \left(\mathsf{d}\,y\right)^2 > 0 \end{cases}$$

$$2)\begin{cases} \mathsf{d}^2 L(0,3,0,-9) = \\ = \frac{7}{8}\left(\mathsf{d}\,x\right)^2 - \frac{5}{2}\left(\mathsf{d}\,z\right)^2 + \underbrace{\frac{4}{3}\,\mathsf{d}\,y\,\mathsf{d}\,\lambda}_{0} = \\ = \frac{7}{8}\left(\mathsf{d}\,x\right)^2 - \frac{5}{2}\left(\mathsf{d}\,z\right)^2 \gtrless 0 \quad \left(\begin{array}{c}\text{нет}\\ \text{экстремума}\end{array}\right) \\ \mathsf{d}\,\varphi(0,3,0) = 0 + \frac{2}{3}\,\mathsf{d}\,y + 0 = 0, \Rightarrow \\ \quad \Rightarrow \mathsf{d}\,y = 0 \\ \left(\mathsf{d}\,x\right)^2 + \left(\mathsf{d}\,y\right)^2 + \left(\mathsf{d}\,z\right)^2 > 0 \Rightarrow \\ \quad \Rightarrow \left(\mathsf{d}\,x\right)^2 + \left(\mathsf{d}\,z\right)^2 > 0 \end{cases}$$

$$3)\begin{cases} \mathsf{d}^2 L(4,0,0,-16) = \\ = -\frac{14}{9}\Big(\mathsf{d}\, y\Big)^2 - 6\Big(\mathsf{d}\, z\Big)^2 + \underbrace{\mathsf{d}\, x\, \mathsf{d}\, \lambda}_{0} = \\ = -\frac{14}{9}\Big(\mathsf{d}\, y\Big)^2 - 6\Big(\mathsf{d}\, z\Big)^2 < 0 \qquad (\text{MAX}) \\ \mathsf{d}\, \varphi(4,0,0) = \frac{1}{2}\mathsf{d}\, x + 0 + 0 = 0, \Rightarrow \\ \Rightarrow\ \mathsf{d}\, x = 0 \\ \Big(\mathsf{d}\, x\Big)^2 + \Big(\mathsf{d}\, y\Big)^2 + \Big(\mathsf{d}\, z\Big)^2 > 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow\ \Big(\mathsf{d}\, y\Big)^2 + \Big(\mathsf{d}\, z\Big)^2 > 0 \end{cases}$$

Ответ: точка локального условного максимума: $(4,0,0)$, точка локального условного минимума: $(0,0,2)$. Можно заметить, что, попутно мы решили задачу на "глобальный" условный экстремум: поскольку наше многообразие M компактно, функция $f(x,y,z)$ принимает в какой-то точке на M наибольшее значение, эта точка обязательно будет точкой локального условного максимума, а поскольку таких точек на M имеется только одна – $(4,0,0)$ – в ней и будет достигаться максимум на M:

$$\max_{\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{4}=1} x^2+y^2+z^2 = \\ = x^2+y^2+z^2\Big|_{(x,y,z)=(4,0,0)} = 16$$

По тем же причинам,

$$\min_{\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{4}=1} x^2+y^2+z^2 = \\ = x^2+y^2+z^2\Big|_{(x,y,z)=(0,0,2)} = 4$$

◇ **14.3.20** (экстремум на замкнутой ограниченной области)**.** Найдем наибольшее и наименьшее значения функции

$$f(x,y) = x^3 - 3x + y^3$$

на множестве

$$(x+1)^2 + y^2 \leqslant 1$$

В отличие от примера 14.3.17, где мы знали заранее (построив линии уровня), что экстремум достигается на границе, здесь мы ничего точно об не знаем, и более того, нам это не нужно.

План наших действий будет таким. Максимум функции $f(x,y)$ достигается либо внутри области, либо на ее границе. В первом случае точка максимума должна быть критической точкой функции $f(x,y)$, а во втором – критической точкой соответствующей функции Лагранжа $L(x,y,\lambda)$. Поэтому нам достаточно найти критические точки для $f(x,y)$ и $L(x,y,\lambda)$, и сравнить в них значение функции $f(x,y)$.

1. Сначала рассмотрим $f(x,y)$ внутри области. Находим первый дифференциал и приравниваем его к нулю

$$\mathsf{d}\, f(x,y) = 3(x^2-1)\,\mathsf{d}\, x + 3y^2\,\mathsf{d}\, y = 0 \ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 1 \\ y = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = -1 \\ y = 0 \end{cases} \\ \boxed{\begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases}} \end{array}\right.$$

эта точка не лежит внутри нашей области, поэтому мы ее дальше не рассматриваем

Получаем одну критическую точку: $A_1(-1,0)$.

2. Затем исследуем функцию на границе области. В этом случае уравнение связи будет иметь вид

$$(x+1)^2 + y^2 - 1 = 0$$

поэтому функция Лагранжа будет такой:

$$L = x^3 - 3x + y^3 + \lambda\cdot\Big((x+1)^2 + y^2 - 1\Big)$$

Находим ее дифференциал и приравниваем его к нулю:

$$\mathsf{d}\, L = \Big(3(x^2-1) + 2\lambda(x+1)\Big)\,\mathsf{d}\, x + \\ + \Big(3y^2 + 2\lambda y\Big)\,\mathsf{d}\, y + \Big((x+1)^2 + y^2 - 1\Big)\,\mathsf{d}\, \lambda = 0 \ \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} 3(x^2-1) + 2\lambda(x+1) = 0 \\ 3y^2 + 2\lambda y = 0 \\ (x+1)^2 + y^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

решая эту систему, находим еще четыре критические точки на границе: $B_1\left(-2,0,\frac{9}{2}\right)$, $B_2\left(0,0,\frac{3}{2}\right)$, $B_3\left(-1,1,-\frac{3}{2}\right)$, $B_4\left(-1,1,\frac{3}{2}\right)$.

3. Сравниваем значения в стационарных точках:

$$f(-1,0) = 2$$
$$f(-2,0) = -2 \quad (MIN)$$
$$f(0,0) = 0$$
$$f(-1,1) = 3 \quad (MAX)$$
$$f(-1,-1) = 1$$

Ответ: $\max_{(x+1)^2+y^2\leqslant 1} f(x,y) = f(-1,1) = 3$, $\min_{(x+1)^2+y^2\leqslant 1} f(x,y) = f(-2,0) = -2$

◇ **14.3.21.** Найдем экстремумы функции

$$f(x,y) = (x^2-1)(y^2-1)$$

на множестве

$$D: \quad \begin{cases} 2y + x^2 \leqslant 1 \\ y + 2 \geqslant 0 \end{cases}$$

1) Критические точки функции $f(x,y)$ на области D:

$$\mathsf{d}\, f(x,y) = 2x(y^2-1)\,\mathsf{d}\, x + 2y(x^2-1)\,\mathsf{d}\, y = 0 \ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x(y^2-1)=0 \\ 2y(x^2-1)=0 \end{cases}$$

Решая систему, получаем пять критических точек, из которых две не лежат в нашей области D, и поэтому мы их вычеркиваем:

$$A_0(0,0), \quad A_1(1\cancel{,}1), \quad A_2(-1\cancel{,}1),$$
$$A_3(1,-1), \quad A_4(-1,-1)$$

2) Теперь надо исследовать нашу функцию на границе области D. Заметим сразу, что она состоит из четырех гладких многообразий: во-первых, двух кусков кривых (многообразий размерности 1)

$$D_1: \begin{cases} 2y+x^2-1=0 \\ x \in \left(-\sqrt{5}, \sqrt{5}\right) \end{cases}, \quad D_2: \begin{cases} y=-2 \\ x \in \left(-\sqrt{5}, \sqrt{5}\right) \end{cases}$$

а, во-вторых, двух отдельных точек (многообразий размерности 2), лежащих на пересечении параболы $2y+x^2=1$ и прямой $y=-2$:

$$D_3\left(-\sqrt{5}, -2\right), \quad D_4\left(\sqrt{5}, -2\right),$$

На каждом из этих четырех многообразий нужно исследовать нашу функцию.

а) Рассматриваем первое многообразие

$$D_1: \quad \begin{cases} 2y+x^2-1=0 \\ x \in \left(-\sqrt{5}, \sqrt{5}\right) \end{cases}$$

Соответствующая функция Лагранжа имеет вид

$$L=(x^2-1)(y^2-1)+\lambda(2y+x^2-1)$$

Приравниваем к нулю дифференциал:

$$\mathsf{d}\, L = (2x(y^2-1)+2\lambda x)\,\mathsf{d}\, x +$$
$$+ (2y(x^2-1)+2\lambda)\,\mathsf{d}\, y + (2y+x^2-1)\,\mathsf{d}\,\lambda = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x(y^2-1)+2\lambda x=0 \\ 2y(x^2-1)+2\lambda=0 \\ 2y+x^2-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{c} x=0 \\ y^2-1+\lambda=0 \end{array}\right. \\ 2y(x^2-1)+2\lambda=0 \\ 2y+x^2-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{c} \begin{cases} x=0 \\ y=\frac{1}{2} \\ \lambda=\frac{1}{2} \end{cases} \\ \begin{cases} \lambda=1-y^2 \\ \lambda=2y^2 \\ x^2-1=-2y \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{c} \begin{cases} x=0 \\ y=\frac{1}{2} \\ \lambda=\frac{1}{2} \end{cases} \\ \begin{cases} x=\pm\sqrt{1+\frac{2}{\sqrt{3}}} \\ y=-\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \lambda=\frac{2}{3} \end{cases} \end{array}\right.$$

Выписываем полученные точки:

$$B_1\left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \quad B_2\left(-\sqrt{1+\frac{2}{\sqrt{3}}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{2}{3}\right),$$
$$B_3\left(\sqrt{1+\frac{2}{\sqrt{3}}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{2}{3}\right)$$

(все они лежат на многообразии D_1, поэтому вычеркивать ничего не нужно).

b) Второй участок границы:

$$D_2: \quad \begin{cases} y=-2 \\ x \in \left(-\sqrt{5}, \sqrt{5}\right) \end{cases}$$

Здесь можно не выписывать функцию Лагранжа, потому что $f(x,y)$ зависит только от одной переменной x:

$$f(x,y)=f(x,-2)=3(x^2-1)$$

Производную по этой переменной x приравниваем к нулю:

$$f'_x=6x=0 \quad \Leftrightarrow \quad x=0$$

Получается еще одна стационарная точка (принадлежащая D_2):

$$B_4\,(0,-2),$$

3) Сравниваем значение функции в полученных точках $A_0, A_3, A_4, B_1, B_2, B_3, B_4$ и D_3, D_4:

$$f(0,0)=-1$$
$$f(-1,-1)=f(1,-1)=0$$
$$f\left(0, \frac{1}{2}\right)=\frac{3}{4}$$
$$f\left(\pm\sqrt{1+\frac{2}{\sqrt{3}}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=-\frac{4}{3\sqrt{3}}$$
$$f(0,-2)=-3 \quad (\text{MIN})$$
$$f\left(\pm\sqrt{5},-2\right)=12 \quad (\text{MAX})$$

Ответ: $\max_{(x,y)\in D} f(x,y) = f\left(\pm\sqrt{5},-2\right) = 12$, $\min_{(x,y)\in D} f(x,y)=f(0,-2)=-3$

$\triangleright\triangleright$ **14.3.22.** Найдите локальные условные экстремумы функции $u=f(x,y)$:

1) $u=xy, \quad x+y=1$
2) $u=x^2+y^2, \quad 3x+2y=6$
3) $u=x^2-y^2, \quad 2x-y=3$

4) $u = xy^2, \quad x + 2y = 1$
5) $u = 5 - 3x - 4y, \quad x^2 + y^2 = 25$
6) $u = 1 - 4x - 8y, \quad x^2 - 8y^2 = 8$

⊳⊳ **14.3.23.** Найдите локальные условные экстремумы функции $u = f(x, y, z)$:

1) $u = 2x^2 + 3y^2 + 4z^2, \quad x + y + z = 13$
2) $u = xy^2z^3, \quad x + y + z = 12$
3) $u = x^2y^3z^4, \quad 2x + 3y + 4z = 18$
4) $u = x - 2y + 2z, \quad x^2 + y^2 + z^2 = 9$
5) $u = x - y + 2z, \quad x^2 + y^2 + 2z^2 = 16$
6) $u = xyz, \quad x^2 + y^2 + z^2 = 3$
7) $u = x + y + z, \quad \frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} = 1$ $(a > 0, b > 0, c > 0)$

⊳⊳ **14.3.24.** Найдите наибольшее и наименьшее значение функции $u = f(x, y)$ на множестве:

1) $u = x^2 + y^2 - xy - x - y, \quad x \geqslant 0, y \geqslant 0, x + y \leqslant 3$
2) $u = xy, \quad x^2 + y^2 \leqslant 1$
3) $u = xy^2, \quad x^2 + y^2 \leqslant 1$
4) $u = 2x^2 - 4xy + y^4, \quad 6x + 2y^3 \leqslant 9, x \geqslant 0, y \geqslant -1$
5) $u = 3 + 2xy, \quad x^2 + y^2 \leqslant 1$
6) $u = 3 + 2xy, \quad 4 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 9$
7) $u = x^2 - y^2, \quad x^2 + y^2 \leqslant 2x$
8) $u = y^4 - x^4, \quad x^2 + y^2 \leqslant 9$

⊳⊳ **14.3.25.** Найдите наибольшее и наименьшее значение функции $u = f(x, y, z)$ на множестве:

1) $u = x + 2y + 3z,$
$x + y \leqslant 3, \ x + y \leqslant z, \ 2x + 3y \geqslant z, \ x \geqslant 0, \ y \geqslant 0$
2) $u = 3z - y - 2x,$
$x + y \geqslant 2, \ 3x + y \leqslant 6, \ 0 \leqslant z \leqslant 3, \ x \geqslant 0$
3) $u = x + y + z, \quad x^2 + y^2 \leqslant z \leqslant 1$
4) $u = x^2 + 2y^2 + 3z^2, \quad x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 100$

Глава 15

МЕРА ЖОРДАНА И КРАТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

В главе 8 мы вычисляли площади “сложных” геометрических фигур (то есть фигур, которые не изучаются в школьном курсе геометрии). При этом из методических соображений мы отложили на будущее строгое обоснование приводимых формул и даже аккуратное определение соответствующих терминов: с самого начала в главе 8 мы объявили, что объясним потом, что такое площадь “сложной” фигуры, и откуда берутся формулы для их вычисления.

Теперь мы, наконец, можем выполнить это обещание. В этой главе мы даем строгое определение понятию площади и объема, и доказываем некоторые формулы из главы 8.

§ 1 Мера Жордана

(a) Площадь и объем в школьной геометрии

Выполнение этой программы разумно начать с напоминания, как определяются площадь и объем в школе.

Площадь многоугольника. Читатель, должно быть, помнит, что в школьной Планиметрии площадь вычисляется только для двух типов плоских фигур:

1) для многоугольников и
2) для круга.

Площадь круга определяется как “предел площадей вписанных в круг многоугольников” (или, наоборот, описанных), площадь же многоугольника, вообще говоря, никак не определяется, а вводится “описательно”. На математическом языке это означает не что иное, как аксиоматический подход.

Существует несколько аксиоматических систем для евклидовой геометрии, из них самыми известными являются система аксиом Давида Гильберта (представляющая из себя дефинициальное расширение теории вещественных чисел) и система Альфреда Тарского (теория 1 порядка). Все эти системы имеют интерпретации в Анализе, понимаемом как теория вещественных чисел (с аксиомами на с.122). Для Планиметрии эта интерпретация устроена так.

1. Прежде всего, под самой *плоскостью* (в которой рассматриваются геометрические фигуры) понимается какое-ниубдь фиксированное евклидово пространство X размерности 2 (определенное на с.755). Такое евклидово пространство X называется *евклидовой плоскостью*, и его примером является пространство $\mathbb{R}^2$.
2. После этого определяются понятия, которые в Планиметрии вводятся без определений:
   - *точкой* в X объявляется всякий элемент в X (то есть вектор евклидова пространства X), а
   - *прямой* в X – всякое множество уровня произвольного линейного функционала на X, то есть множество вида
   $$\{x \in X : \ f(x) = C\},$$
   где $f \in X^*$ и $C \in \mathbb{R}$ могут быть любыми.

3. Затем проверяется, что аксиомы Планиметрии превращаются в теоремы в Анализе, и эта конструкция называется интерпретацией Планиметрии в Анализе.

В такой интерпретации понятие многоугольника в Планиметрии удобно описывается следующим индуктивным определением.

- Прежде всего, для любых трех точек a_1, a_2, b в евклидовом пространстве X определяется множество
$$P_b(a_1, a_2) = \{\lambda_1 \cdot a_1 + \lambda_2 \cdot a_2 + b; \quad \lambda_1, \lambda_2 \in [0,1]\}, \tag{15.1.1}$$
называемое *параллелограммом*. При этом точка b называется *исходной вершиной* этого параллелограмма, а векторы a_1 и a_2 – его *направляющими векторами*. В частном случае, при $b = 0$ мы пользуемся обозначением
$$P(a_1, a_2) = P_0(a_1, a_2) = \{\lambda_1 \cdot a_1 + \lambda_2 \cdot a_2; \quad \lambda_1, \lambda_2 \in [0,1]\}, \tag{15.1.2}$$
Кроме того,
  — если направляющие векторы a_1 и a_2 ортогональны, то $P_b(a_1, a_2)$ называется *прямоугольником*, и
  — если помимо того, что a_1 и a_2 ортогональны, они еще равны по модулю, то $P_b(a_1, a_2)$ называется *квадратом*.
- *Многоугольником* в X называется множество, составленное из параллелограммов с помощью следующих операций (примененных конечное число раз):
$$A \cap B = \{x : \quad x \in A \quad \& \quad x \in B\} \qquad \text{(пересечение множеств)}$$
$$A \cup B = \{x : \quad x \in A \quad \vee \quad x \in B\} \qquad \text{(объединение множеств)}$$
$$A \setminus B = \{x : \quad x \in A \quad \& \quad x \notin B\} \qquad \text{(разность множеств)}$$

Из определения сразу видно, что многоугольники обладают следующим свойством:

(S0) **Аксиома кольца:** *если C и D – многоугольники, то их объединение $C \cup D$, пересечение $C \cap D$ и разность $C \setminus D$ – тоже многоугольники.*

После того, как определены многоугольники, их площадь определяется как отображение, которое каждому многоугольнику D ставит в соотвествие неотрицательное число S_D так, чтобы выполнялись следующие условия:

Аксиомы площади в школьной геометрии:

(S1) **Аксиома нормировки:** *площадь какого-нибудь квадрата Q со стороной $a = 1$ равна единице:*
$$S_Q = 1$$

(S2) **Аксиома аддитивности:** *если два многоугольника C и D в пересечении дают пустое множество, то площадь их объединения равна сумме их площадей:*
$$C \cap D = \varnothing \qquad \Longrightarrow \qquad S_{C \cup D} = S_C + S_D$$

(S3) **Аксиома жесткости:** *если многоугольник C и D конгруэнтны – то есть один получается из другого с помощью движения (преобразования плоскости, сохраняющего расстояния) – то площади C и D совпадают:*
$$C \cong D \qquad \Longrightarrow \qquad S_C = S_D$$

При интерпретации одной аксиоматической теории (в данном случае, Планиметрии) в другой (в Анализе) аксиомы должны превращаться в теоремы. Это значит, что сформулировав эти аксиомы площади в двумерном евклидовом пространстве, мы обязаны показать, что

Теорема 15.1.1. *В произвольном евклидомом пространстве X размерности 2 отображение $D \mapsto S_D$, определенное на многоугольниках и удовлетворяющее условиям S1 – S3, существует и единственно.*

Доказательство этого факта можно найти в книге Г. Хадвигера[1]. Мы его не приводим, поскольку в логической структуре курса можно обойтись без этого утверждения. Цель нашего разговора о школьной площади главным образом иллюстративная – предложить читателю взгляд на школьное понимание площади с точки зрения Анализа (чтобы использовать это затем как мотивировку при определении меры Жордана)[2].

Из аксиом (S0 – S3) сразу же следуют четыре важных свойства площади, которые нужно отметить, прежде чем объяснять, как получаются школьные формулы для площадей многоугольников.

Свойства площади в школьной геометрии:

1^0 **Обобщенная нормировка:** *площадь любого квадрата C со стороной 1 равна 1:*

$$S_C = 1.$$

2^0 **Монотонность:** *если фигура C содержится в фигуре D, то площадь C не превышает площади D:*

$$C \subseteq D \quad \Longrightarrow \quad S_C \leqslant S_D$$

3^0 **Конечная аддитивность:** *если фигуры $C_1,...,C_m$ попарно не пересекаются, то площадь их объединения равна сумме площадей $C_1,...,C_m$:*

$$\forall i \neq j \quad C_i \cap C_j = \varnothing \quad \Longrightarrow \quad S_{C_1 \cup ... \cup C_m} = S_{C_1} + ... + S_{C_m}$$

4^0 **Обобщенная аддитивность:** *если две фигуры C и D в пересечении дают фигуру с нулевой площадью, то площадь их объединения равна сумме их площадей:*

$$S_{C\cap D} = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad S_{C\cup D} = S_C + S_D$$

5^0 **Обобщенная конечная аддитивность:** *если среди фигур $C_1,...,C_m$ любые две в пересечении дают фигуру с нулевой площадью, то площадь их объединения равна сумме площадей $C_1,...,C_m$:*

$$\forall i \neq j \quad S_{C_i\cap C_j} = 0 \quad \Longrightarrow \quad S_{C_1 \cup ... \cup C_m} = S_{C_1} + ... + S_{C_m}$$

Доказательство. 1. Если C – квадрат со стороной 1, то движением его можно превратить в квадрат Q, упоминаемый в аксиоме S1. Поэтому применением аксиом S3 и S1 мы получаем

$$S_C = S_Q = 1.$$

2. Если $C \subseteq D$, то положив $B = D\setminus C$, получим

$$D = B \cup C \quad \& \quad B \cap C = \varnothing \qquad \Longrightarrow \qquad S_D = (\text{аксиома S2}) = S_B + S_C \geqslant 0 + S_C = S_C$$

3. Свойство 3^0 доказывается индукцией по m.

При $m = 2$ утверждение верно, потому что в этом случае 4^0 превращается в аксиому S2. Пусть утверждение доказано для какого-нибудь m:

$$\forall i \neq j \leqslant m \quad C_i \cap C_j = \varnothing \qquad \Longrightarrow \qquad S_{C_1 \cup ... \cup C_m} = S_{C_1} + ... + S_{C_m} \tag{15.1.3}$$

Тогда для $m + 1$ получаем:

$$\forall i \neq j \leqslant m+1 \quad C_i \cap C_j = \varnothing$$
$$\Downarrow$$

$$S_{C_1\cup...\cup C_m \cup C_{m=1}} = S_{[C_1\cup...\cup C_m]\cup C_{m+1}} = (\text{применяем аксиому S2}) =$$
$$= S_{C_1\cup...\cup C_m} + S_{C_{m+1}} = (15.1.3) = S_{C_1} + ... + S_{C_m} + S_{C_{m+1}}$$

---

[1] Г.Хадвигер. Лекции об объеме, площади поверхности и изопериметрии. М.: Наука, 1966. У Хадвигера определение многоугольника (многогранника) отличается от нашего, но содержательно утверждения те же. Отметим только, что существование отображения $D \mapsto S_D$, как и отображения школьного объема $D \mapsto V(D)$ ниже в теореме 15.1.2, будет получено нами потом в качестве побочного результата существования меры Жордана (см. ниже теорему 15.1.19).

[2] Уточнение: формально из материала о школьной площади и объеме нам в дальнейшем все же понадобится формула (15.1.17), выражающая модуль поливектора через объем соответствующего параллелепипеда. Эту формулу, однако, можно считать утверждением, доказываемым в теории меры Жордана, поскольку к моменту, когда она становится нужна, аксиомы меры на с. 891 уже доказаны для меры Жордана.

4. Пусть $S_{C\cap D}=0$. Тогда

$$C=\overbrace{(C\setminus D)}^{\text{два непересекающихся}}\cup\overbrace{(C\cap D)}^{\text{множества}}$$

$$\Downarrow \qquad (\text{применяем S2})$$

$$S_C=S_{C\setminus D}+\underbrace{S_{C\cap D}}_{0}=S_{C\setminus D}$$

Аналогично,

$$S_D=S_{D\setminus C}$$

Отсюда получаем

$$C\cup D=\overbrace{(C\setminus D)}^{\text{три попарно}}\cup\overbrace{(C\cap D)}^{\text{не пересекающихся}}\cup\overbrace{(D\setminus C)}^{\text{множества}}$$

$$\Downarrow \qquad (\text{применяем } 2^0)$$

$$S_{C\cup D}=\underbrace{S_{C\setminus D}}_{S_C}+\underbrace{S_{C\cap D}}_{0}+\underbrace{S_{D\setminus C}}_{S_D}=S_C+S_D$$

5. Свойство 5^0 также доказывается индукцией по m.

При $m=2$ утверждение верно, потому что 4^0 превращается в этом случае в уже доказанное свойство 3^0. Предположим, что утверждение верно при каком-нибудь m

$$\forall i\ne j\leqslant m \quad S_{C_i\cap C_j}=0 \qquad \Longrightarrow \qquad S_{C_1\cup\ldots\cup C_m}=S_{C_1}+\ldots+S_{C_m} \tag{15.1.4}$$

Тогда для $m+1$ получаем: если

$$\forall i\ne j\leqslant m+1 \quad S_{C_i\cap C_j}=0$$

то, положив

$$B_1=C_1\cap C_{m+1}, \quad \ldots, \quad B_m=C_m\cap C_{m+1}$$

получим

$$\forall i\leqslant m \quad S_{B_i}=0$$

$$\Downarrow$$

$$\forall i\ne j\leqslant m \quad B_i\cap B_j\subseteq B_i \qquad \Longrightarrow \qquad S_{B_i\cap B_j}\leqslant S_{B_i}=0$$

$$\Downarrow \qquad (\text{применяем (15.1.4)})$$

$$S_{B_1\cup\ldots\cup B_m}=S_{B_1}+\ldots+S_{B_m}=0$$

$$\Downarrow$$

$$S_{[C_1\cup\ldots\cup C_m]\cap C_{m+1}}=S_{[C_1\cap C_{m+1}]\cup\ldots\cup[C_m\cap C_{m+1}]}=S_{B_1\cup\ldots\cup B_m}=0$$

$$\Downarrow$$

$$S_{C_1\cup\ldots\cup C_m\cup C_{m=1}}=S_{[C_1\cup\ldots\cup C_m]\cup C_{m+1}}=(\text{применяем } 3^0)=S_{C_1\cup\ldots\cup C_m}+S_{C_{m+1}}= \\ =(15.1.4)=S_{C_1}+\ldots+S_{C_m}+S_{C_{m+1}}$$

□

В следующих примерах мы покажем, как из аксиом S0 – S3 следуют некоторые формулы площади из школьной планиметрии.

◇ **15.1.1. Площадь пустого множества.** Из S0 и S2 следует, что площадь пустого множества равна нулю:

$$S_\varnothing=0$$

Действительно, по аксиоме кольца S0, получается, что множество $\varnothing$ тоже имеет какую-то площадь, потому что его можно представить как разность двух фигур (например, взяв $C=D$). Положив после этого $C=D=\varnothing$, получаем

$$S_\varnothing=S_{C\cup D}=S_C+S_D=S_\varnothing+S_\varnothing=2S_\varnothing \quad \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \quad S_\varnothing = 0$$

◇ **15.1.2. Площадь одноточечного множества.** Покажем, почему из S1 – S3 следует, что площадь множества, состоящего из одной точки равна нулю:

$$S_{\{a\}} = 0$$

Доказательство. Возьмем внутри единичного квадрата Q несколько различных точек $a_1, ..., a_n$. Поскольку любые две точки переходят друг в друга при каком-нибудь жестком движении, площади одноточечных множеств $\{a_1\}, ..., \{a_n\}$ должны совпадать друг с другом, и с площадью множества $\{a\}$:

$$S_{\{a\}} = S_{\{a_1\}} = ... = S_{\{a_n\}}$$

Отсюда получаем

$$n \cdot S_{\{a\}} = S_{\{a_1\}} + ... + S_{\{a_n\}} = (\text{аксиома S2}) = \\ = S_{\{a_1,...,a_n\}} \leqslant \\ \leqslant (\text{аксиома S1}) \leqslant S_Q = (\text{аксиома S0}) = 1$$

$$\Downarrow$$

$$0 \leqslant S_{\{a\}} \leqslant \frac{1}{n}$$

Это верно для любого n, поэтому получаем

$$S_{\{a\}} = 0$$

□

◇ **15.1.3. Площадь отрезка.** Покажем, что из S1 – S3 следует, что площадь любого отрезка, интервала или полуинтервала равна нулю:

$$S_I = 0 \qquad (15.1.5)$$

Доказательство. Это доказывается индукцией.

1. Сначала надо рассмотреть случай, когда I имеет длину не превышающую единицы:

$$|I| = \varepsilon \leqslant 1$$

Тогда в единичном квадрате Q можно выбрать n непересекающихся отрезков $I_1, ..., I_n$ равной длины ε, и поскольку все они будут конгруэнтны I, получим

$$S_I = S_{I_1} = ... = S_{I_n}$$

Отсюда будет следовать, что

$$n \cdot S_I = S_{I_1} + ... + S_{I_n} = (\text{свойство } 2^0) = \\ = S_{I_1 \cup ... \cup I_n} \leqslant \\ \leqslant (\text{свойство } 1^0) \leqslant S_Q = (\text{аксиома S1}) = 1$$

$$\Downarrow$$

$$0 \leqslant S_I \leqslant \frac{1}{n}$$

Это верно для любого n, поэтому получаем

$$S_I = 0$$

2. Затем мы предполагаем, что формула (15.1.5) верна для любого отрезка интервала или полуинтервала длины $|I| \leqslant k$, и показываем, что тогда она автоматически должна быть верна для случая $|I| \leqslant k+1$.

Для этого мы разбиваем I на два интервала или полуинтервала длины меньшей k

$$I = I_1 \cup I_2 \qquad I_1 \cap I_2 = \varnothing \qquad |I_1| \leqslant k \quad |I_2| \leqslant k$$

и получаем

$$S_I = S_{I_1} + S_{I_2} = 0 + 0 = 0$$

□

◇ **15.1.4. Площадь прямоугольника.** Докажем школьную формулу площади прямоугольника:

$$S_\Pi = a \cdot b \qquad (15.1.6)$$

Это делается в три этапа.

1. Сначала рассматривается случай Π со сторонами $a = \frac{1}{k}$, $b = \frac{1}{m}$. Тогда отдельно рисуется единичный квадрат, который затем разбивается на $k \cdot m$ прямоугольников Π_i со сторонами $a = \frac{1}{k}$, $b = \frac{1}{m}$. Поскольку все эти прямоугольники конгруэнтны нашему исходному прямоугольнику Π, по аксиоме S2 получаем

$$\forall i, j \qquad S_{\Pi_i} = S_{\Pi_j} = S_\Pi \qquad (15.1.7)$$

С другой стороны, пересечение любых двух прямоугольников Π_i и Π_j есть пустое множество, или точка, или отрезок, то есть, имеет нулевую площадь, поэтому

$$1 = S_{\text{квадрата}} = (\text{свойство } 3^0) = \\ = \sum S_{\Pi_i} = (15.1.7) = k \cdot m \cdot S_\Pi \Rightarrow \\ \Rightarrow S_\Pi = \frac{1}{k \cdot m} = a \cdot b$$

2. Затем рассматривается случай Π с рациональными сторонами $a = \frac{l}{k}$, $b = \frac{n}{m}$. Тогда сам Π разбивается на $l \cdot n$ маленьких прямоугольников Π_i со сторонами $a = \frac{1}{k}$, $b = \frac{1}{m}$, для которых площадь уже подсчитана:

$$S_\Pi = (\text{свойство } 3^0) = \sum S_{\Pi_i} = l \cdot n \cdot S_\Pi = \\ = l \cdot n \cdot \frac{1}{k \cdot m} = \frac{l}{k} \cdot \frac{n}{m} = a \cdot b$$

3. После этого рассматриваются произвольные $a, b \in \mathbb{R}$. Тогда, если взять прямоугольник Π_1 с рациональными сторонами

$$a_1 < a, \qquad b_1 < b$$

лежащий в Π, то получим

$$a_1 \cdot b_1 = S_{\Pi_1} \leqslant (\text{свойство } 1^0) \leqslant S_\Pi$$

Это верно для любых чисел $a_1 < a, b_1 < b$, поэтому получаем

$$a \cdot b \leqslant S_\Pi \tag{15.1.8}$$

Аналогично, если взять прямоугольник Π_2 с рациональными сторонами

$$a_2 > a, \qquad b_2 > b$$

содержащий Π, то получим

$$a_2 \cdot b_2 = S_{\Pi_2} \geqslant (\text{свойство } 1^0) \geqslant S_\Pi$$

Это верно для любых чисел $a_2 > a, b_2 > b$, поэтому получаем

$$a \cdot b \geqslant S_\Pi \tag{15.1.9}$$

Формулы (15.1.8) и (15.1.9) вместе дают (15.1.6).

◇ **15.1.5. Площадь треугольника.** Напомним, как доказывается в школе формула площади треугольника (половина произведения длины основания на высоту)

$$S_\Delta = \frac{a \cdot h}{2}$$

Доказательство. Это происходит в два этапа.

1. Сначала рассматривается случай прямоугольного треугольника. Тогда треугольник Δ вписывается в прямоугольник Π так, чтобы гипотенуза треугольника была диагональю прямоугольника,

Затем зритель замечает, что полученный прямоугольник разбивается диагональю на два треугольника Δ и Δ_1, получающиеся один из другого с помощью движения (в данном случае, центральной симметрии относительно пересечения диагоналей), поэтому наши треугольники должны иметь одинаковую площадь (по аксиоме S2).

$$S_\Delta = S_{\Delta_1}$$

Отсюда сразу следует формула для S_Δ:

$$2S_\Delta = S_\Delta + S_{\Delta_1} = (\text{свойство } 3^0) = S_\Pi = \\ = (15.1.6) = a \cdot h \;\Rightarrow\; S_\Delta = \frac{a \cdot h}{2}$$

2. После этого рассматривается общий случай. Произвольный треугольник ΔABC разбивается высотой AK на два прямоугольных треугольника ΔAKB и ΔAKC,

Их площади вычисляются по уже доказанной формуле:

$$S_{\Delta AKB} = \frac{|KB| \cdot |AK|}{2}, \quad S_{\Delta AKC} = \frac{|CK| \cdot |AK|}{2}$$

Затем получаем

$$S_{\Delta ABC} = (\text{свойство } 3^0) = \\ = S_{\Delta AKB} + S_{\Delta AKC} = \\ = \frac{|KB| \cdot |AK|}{2} + \frac{|CK| \cdot |AK|}{2} = \\ = \big(|KB| + |CK|\big) \cdot \frac{|AK|}{2} = |CB| \cdot \frac{|AK|}{2}$$

□

◇ **15.1.6** (площадь параллелограмма)**.** Из примера 15.1.5 следует формула площади параллелограмма (произведение основания на высоту):

$$S_P = a \cdot h \tag{15.1.10}$$

Доказательство. Для доказательства нужно разрезать P диагональю на два треугольника и сложить площади. □

Объем геометрической фигуры. После подробного обсуждения школьного понимания площади, нетрудно по аналогии описать интерпретацию школьного понятия объема в Анализе. Для этого сначала нужно определить понятие многогранника в евклидовом пространстве размерности, большей 2. Как и в случе с многоугольником, это можно далть по-разному, например, так.

- Для любых векторов $a_1, ..., a_k, b$ евклидова пространства X *параллелепипед* (размерности k) с *исходной вершиной* b и *направляющими векторами* $a_1, ..., a_k$ определяется как множество

$$P_b(a_1, ..., a_k) = \left\{ \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \cdot a_i + b; \quad \lambda_i \in [0,1] \right\}. \tag{15.1.11}$$

При этом точка b называется *исходной вершиной* этого параллелепипеда, а векторы a_i – его *направляющими векторами*. В частном случае, при $b = 0$ мы пользуемся обозначением

$$P(a_1, ..., a_k) = P_0(a_1, ..., a_k) = \left\{ \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \cdot a_i; \quad \lambda_i \in [0,1] \right\}. \tag{15.1.12}$$

Кроме того,

— если направляющие векторы $a_1, ..., a_k$ ортогональны, то $P_b(a_1, ..., a_k)$ называется *прямоугольным параллелепипедом*, и

— если помимо того, что $a_1, ..., a_k$ ортогональны, они еще равны по модулю, то $P_b(a_1, a_2)$ называется *гиперкубом*.

- *Многогранником* в евклидовом пространстве X называется множество, составленное из параллелепипедов с помощью следующих операций (примененных конечное число раз):

$$A \cap B = \{x : \quad x \in A \quad \& \quad x \in B\} \qquad \text{(пересечение множеств)}$$

$$A \cup B = \{x : \quad x \in A \quad \vee \quad x \in B\} \qquad \text{(объединение множеств)}$$

$$A \backslash B = \{x : \quad x \in A \quad \& \quad x \notin B\} \qquad \text{(разность множеств)}$$

Из определения многогранника следует важное свойство:

(V0) **Аксиома кольца:** *если C и D – два многогранника в евклидовом пространстве X, то их объединение $C \cup D$, пересечение $C \cap D$ и разность $C \backslash D$ тоже является многогранниками.*

После этих приготовлений *объем многогранника* определяется как отображение, которое каждому многоугольнику D ставит в соответствие вещественное число $V(D)$ так, что при этом выполняются следующие условия.

Аксиомы объема в школьной геометрии:

(V1) **Аксиома нормировки:** *объем какого-нибудь куба Q со стороной $a = 1$ равен единице:*

$$V(Q) = 1$$

(V2) **Аксиома аддитивности:** *если два многогранника C и D в пересечении дают пустое множество, то объем их объединения равна сумме их объемов:*

$$C \cap D = \varnothing \qquad \Longrightarrow \qquad V(C \cup D) = V(C) + V(D)$$

(V3) **Аксиома жесткости:** *если многогранники C и D конгруэнтны – то есть один получается из другого с помощью движения (преобразования плоскости, сохраняющего расстояния) – то объемы C и D совпадают:*

$$C \cong D \qquad \Longrightarrow \qquad V(C) = V(D)$$

Как и в случае с аксиомами площади, в возникающей таким образом аксиоматической теории школьного объема (теории 2 порядка, интерпретирующей школьную стереометрию, которую можно понимать как теорию 1 порядка по Тарскому или как теорию 2 порядка по Гильберту) представленные нами аксиомы объема должны сопровождаться доказательством следующего утверждения:

Теорема 15.1.2. *В произвольном евклидомом пространстве X размерности отображение $D \mapsto V(D)$, определенное на многогранниках и удовлетворяющее условиям V1 – V3, существует и единственно.*

Но как и в случае с площадью, мы это утверждение не доказываем, отсылая заинтересованного читателя к книге Хадвигера[3].

Из аксиом объема (V0 – V2) сразу же следуют пять важных свойств (доказываемых так же, как свойства площади на с.882).

Свойства объема:

1^0. **Обобщенная нормировка:** *объем любого куба C со стороной 1 равна 1:*

$$V(C) = 1.$$

2^0. **Монотонность:** *если фигура C содержится в фигуре D, то объем C не превышает объема D:*

$$C \subseteq D \quad \Longrightarrow \quad V(C) \leqslant V(D)$$

3^0. **Конечная аддитивность:** *если фигуры $C_1, ..., C_m$ попарно не пересекаются, то объем их объединения равна сумме объемов $C_1, ..., C_m$:*

$$\forall i \ne j \quad C_i \cap C_j = \varnothing \quad \Longrightarrow \quad V(C_1 \cup ... \cup C_m) = V(C_1) + ... + V(C_m)$$

4^0. **Обобщенная аддитивность:** *если две фигуры C и D в пересечении дают фигуру с нулевым объемом, то объем их объединения равен сумме их объемов:*

$$V(C \cap D) = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad V(C \cup D) = V(C) + V(D)$$

5^0. **Обобщенная конечная аддитивность:** *если среди фигур $C_1, ..., C_m$ любые две в пересечении дают фигуру с нулевым объемом, то объем их объединения равна сумме их объемов:*

$$\forall i \ne j \quad V(C_i \cap C_j) = 0 \quad \Longrightarrow \quad V(C_1 \cup ... \cup C_m) = V(C_1) + ... + V(C_m).$$

Из них, в свою очередь, вытекают важные

Свойства объема параллелепипеда:

1°. *Если векторы $a_1, ..., a_n \in X$ ортогональны, то*

$$V(P(a_1, ..., a_n)) = |a_1| \cdot ... \cdot |a_n|. \tag{15.1.13}$$

2°. *Если векторы $a_1, ..., a_n \in X$ линейно зависимы, то параллелепипед $P(a_1, ..., a_n)$ имеет нулевой объем:*

$$V(P(a_1, ..., a_n)) = 0.$$

3°. *Для любых индексов $i \ne j$ и всякого числа $\lambda \in \mathbb{R}$*

$$V(P(a_1, ..., a_i, ..., a_j, ..., a_n)) = V(P(a_1, ..., a_i, ..., a_j - \lambda \cdot a_i, ..., a_n)). \tag{15.1.14}$$

4°. *Если векторы $a_1, ..., a_n \in X$ линейно независимы, то объем параллелепипеда $P(a_1, ..., a_n)$ равен произведению длин элементов ортогонализации Грама-Шмидта $e_1, ..., e_n$ базиса $a_1, ..., a_n$:*

$$V(P(a_1, ..., a_n)) = |e_1| \cdot ... \cdot |e_n|. \tag{15.1.15}$$

Доказательство. 1. Из аксиомы жесткости (V3) следует, что при ортогональных $a_1, ..., a_n$ можно считать, что они параллельны осям координат:

$$a_i = \lambda_i \cdot e_i,$$

где $e_1, ..., e_n$ – стандартный базис в X, причем можно считать, что $\lambda_i > 0$. Далее применяется тот же прием, что в примере 15.1.6. Сначала рассматривается случай, когда λ_i имеют вид $\frac{1}{q_i}$, тогда единичный гиперкуб разбивается на $q_1 \cdot ... \cdot q_n$ частей, конгруэнтных $P(a_1, ..., a_n)$, и поэтому

$$1 = V(Q) = q_1 \cdot ... \cdot q_n \cdot V(P(a_1, ..., a_n)) \quad \Longrightarrow \quad V(P(a_1, ..., a_n)) = \frac{1}{q_1 \cdot ... \cdot q_n} = |a_1| \cdot ... \cdot |a_n|.$$

[3]См. подстрочные примечания 1 и 2.

Затем рассматривается случай параллелепипеда с рациональными сторонами: $\lambda_i = \frac{p_i}{q_i}$. Тогда $P(a_1,...,a_n)$ разбивается на $p_1 \cdot ... \cdot p_n$ параллелограммов с ребрами $\frac{1}{q_i}$, и мы получаем

$$V(P(a_1,...,a_n)) = V(P(\frac{p_1}{q_1}\cdot e_1,...,\frac{p_n}{q_n}\cdot e_n)) = p_1\cdot ...\cdot p_n \cdot V(P(\frac{1}{q_1}\cdot e_1,...,\frac{1}{q_n}\cdot e_n)) =$$
$$= p_1\cdot ...\cdot p_n \cdot \frac{1}{q_1\cdot ...\cdot q_n} = \frac{p_1}{q_1}\cdot ...\cdot \frac{p_n}{q_n} = |a_1|\cdot ...\cdot |a_n|.$$

После этого рассматривается параллелограмм с произвольными ребрами λ_i. Тогда если взять параллелограмм с рациональными ребрами $\alpha_i \leqslant \lambda_i$, то

$$\alpha_1\cdot ...\alpha_n = V(P(\alpha_1\cdot e_1,...,\alpha_n\cdot e_n)) \leqslant V(P(\lambda_1\cdot e_1,...,\lambda_n\cdot e_n)) = V(P(a_1,...,a_n)).$$

А если взять параллелограмм с рациональными ребрами $\alpha_i \geqslant \lambda_i$, то

$$\alpha_1\cdot ...\alpha_n = V(P(\alpha_1\cdot e_1,...,\alpha_n\cdot e_n)) \geqslant V(P(\lambda_1\cdot e_1,...,\lambda_n\cdot e_n)) = V(P(a_1,...,a_n)).$$

Вместе это означает, что

$$V(P(a_1,...,a_n)) = \lambda_1\cdot ...\cdot \lambda_n.$$

2. Вложим параллелепипед $P(a_1,...,a_n)$ в гиперкуб Q достаточно большого объема. Если векторы $a_1,...,a_n \in X$ линейно зависимы, то $P(a_1,...,a_n)$ лежит в подпространстве, на размерность меньше чем раземрность куба Q. Поэтому для любого номера N можно найти N непересекающихся копий $P_1,...,P_N$ параллелепипеда $P(a_1,...,a_n)$ (полученных их него сдвигами), лежащихв в Q. Мы получим

$$P_1\cup ...\cup P_N \subseteq Q \quad \Longrightarrow \quad N\cdot V(P(a_1,...,a_n)) = V(P_1)+...+V(P_N) \leqslant V(Q) \quad \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow \quad V(P(a_1,...,a_n)) \leqslant \frac{V(Q)}{N}.$$

Это верно для любого $N\in\mathbb{N}$, значит $V(P(a_1,...,a_n)) = 0$.

3. С самого начала рассмотрим случай, когда векторы $a_1,...,\ a_i,...,a_j,...,a_n$ линейно зависимы, то есть какой-то из них выражается как линейная комбинация остальных. Тогда среди векторов $a_1,...,a_i,...,a_j-\lambda\cdot a_i,...,a_n$ тоже какой-то выражается, как линейная комбинация остальных, то есть эти векторы тоже будут линейно зависимы. Значит, по уже доказанному свойству 1°, в этом случае в равенстве (15.1.14) оба объема нулевые:

$$V(P(a_1,...,a_i,...,a_j,...,a_n)) = 0 = V(P(a_1,...,a_i,...,a_j-\lambda\cdot a_i,...,a_n)),$$

и нам остается рассмотреть случай, когда $a_1,...,a_n$ линейно независимы. Тогда они образуют базис пространства X, и нужно отдельно рассмотреть случаи $n=2$ и $n>2$.

а) Если векторов всего два, a_i и a_j, то формула (15.1.14) представляет собой одно из главных свойств параллелограмма: если к одному из ребер добавить вектор, параллельный другому ребру, то получится фигура, равносоставленная исходной. Точнее, можно отрезать от параллелограмма $P(a_i,a_j)$ треугольник, который если сдвинуть и приложить в другом месте, то получится $P(a_i,a_j-\lambda\cdot a_i)$:

б) Пусть далее $n>2$. Заменой переменных можно вдобавок добиться, чтобы a_i и a_j превратились в первые два вектора a_1 и a_2. Если после этого перейти к базису $a_1,...,a_n$, то параллелепипеды $P(a_1,...,a_i,...,a_j,...,a_n) = P(a_1,a_2,...,a_n)$ и $P(a_1,...,a_i,...,a_j-\lambda\cdot a_i,...,a_n) = P(a_1,a_2-\lambda\cdot a_1,...,a_n)$ превратятся в параллелепипеды $P(e_1,e_2,...,e_n)$ и $P(e_1,e_2-\lambda\cdot e_1,...,e_n)$, где $e_1,...,e_n$ – стандартный базис в X. А те, в свою очередь, можно представлять себе, как декартовы произведения двумерных параллелепипедов (пареллелограммов) на гиперкуб размерности $n-2$:

$$P(e_1,e_2,...,e_n) = P(e_1,e_2)\times[0;1]^{n-2}, \qquad P(e_1,e_2-\lambda\cdot e_1,...,e_n) = P(e_1,e_2-\lambda\cdot e_1)\times[0;1]^{n-2}$$

Параллелограммы $P(e_1,e_2)$ и $P(e_1,e_2-\lambda\cdot e_1)$, как мы уже поняли, равносоставлены, точнее можно отрезать от $P(e_1,e_2)$ треугольник, который если сдвинуть и приставить в другом месте, то получится $P(e_1,e_2-\lambda\cdot e_1)$. Когда мы это делаем, от параллелепипеда $P(e_1,e_2)\times[0;1]^{n-2}$ тоже отрезается кусок, который можно сдвигом приставить в другом месте, и получится $P(e_1,e_2-\lambda\cdot e_1)\times[0;1]^{n-2}$.

Это означает, что параллелепипеды $P(e_1, e_2, ..., e_n) = P(e_1, e_2) \times [0; 1]^{n-2}$ и $P(e_1, e_2 - \lambda \cdot e_1, ..., e_n) = P(e_1, e_2 - \lambda \cdot e_1) \times [0; 1]^{n-2}$ тоже равносоставлены. Это доказывает (15.1.14).

4. В доказательстве (15.1.15) используется формула (13.1.28):

$$e_1 = a_1, \qquad e_k = a_k - \sum_{i=1}^{k-1} \lambda_i^k \cdot e_i. \tag{15.1.16}$$

где

$$\lambda_i^k = \frac{\langle a_k, e_i \rangle}{|e_i|^2}.$$

Для всякой линейно независимой системы векторов $a_1, ..., a_n$ мы получаем:

$$\begin{aligned} V(P(a_1, a_2, a_3, ..., a_n)) &= (15.1.16) = V(P(e_1, a_2, a_3, ..., a_n)) = (15.1.14) = \\ &= V(P(e_1, a_2 - \lambda_1^2 \cdot e_1, a_3, ..., a_n)) = (15.1.16) = V(P(e_1, e_2, a_3, ..., a_n)) = (15.1.14) = \\ &= V(P(e_1, e_2, a_3 - \lambda_1^3 \cdot e_1, ..., a_n)) = (15.1.14) = V(P(e_1, e_2, a_3 - \lambda_1^3 \cdot e_1 - \lambda_2^3 \cdot e_2, ..., a_n)) = (15.1.16) = \\ &= V(P(e_1, e_2, e_3, a_4, ..., a_n)) = ... = V(P(e_1, e_2, e_3, ..., e_n)) = (15.1.13) = |e_1| \cdot |e_2| \cdot |e_3| \cdot ... \cdot |e_n|. \end{aligned}$$

□

Напомним еще, что на с.743 мы определили понятие поливектора в векторном пространстве.

Теорема 15.1.3. *Для любой системы векторов $a_1, ..., a_n$ в евклидовом пространстве X размерности n модуль поливектора $a_1 \vee ... \vee a_n$ совпадает с объемом $V(P(a_1, ..., a_n))$ параллелепипеда $P(a_1, ..., a_n)$, натянутого на векторы $a_1, ..., a_n$:*

$$\begin{aligned} \left| a_1 \vee \dots \vee a_n \right| &= \sqrt{\det \begin{pmatrix} \langle a_1, a_1 \rangle & \dots & \langle a_1, a_n \rangle \\ \dots & \dots & \dots \\ \langle a_n, a_1 \rangle & \dots & \langle a_n, a_n \rangle \end{pmatrix}} = \sqrt{\mathsf{Gram}(a_1, \dots, a_n)} = \\ &= \left| \det \begin{pmatrix} \langle a_1, e_1 \rangle & ... & \langle a_1, e_n \rangle \\ .... & ... & ... \\ \langle a_n, e_1 \rangle & ... & \langle a_n, e_n \rangle \end{pmatrix} \right| = V(P(a_1, ..., a_n)), \end{aligned} \tag{15.1.17}$$

(где $e_1, ..., e_n$ – произвольный ортогональный нормированный базис в X).

Доказательство. Здесь первые три равенства – формулы (13.1.53) и (13.1.47), а последнее выводится из (13.1.48): если под e_i понимать ортогонализацию Грама-Шмидта векторов a_i, то

$$\sqrt{\mathsf{Gram}(a_1, ..., a_{n-1}, a_n)} = (13.1.48) = |e_1| \cdot ... \cdot |e_n| = (15.1.15) = V(P(a_1, ..., a_n)).$$

□

(b) Теории меры

Мы объяснили, как определяются площадь и объем для многоугольников и многогранников. В геометрии, однако, встречаются разные более сложные фигуры, например, круги, шары, эллипсы, эллипсоиды, и разумно задаться вопросом, как определяются площадь и объем для них?

На этот вопрос отвечает часть математики, называемая *теорией меры*. Собственно, теорий меры, то есть обобщений школьных понятий площади и объема, имеется много. Мы познакомим читателя с исторически первой из них, *теорией меры Жордана.*

Парадокс Банаха-Тарского. Мы видели выше, что одной только формулировки аксиом площади S0 – S3 (на с.881) оказывается достаточно, чтобы определить и вычислять площади многоугольников на евклидовой плоскости. Естественно спросить себя поэтому, не может ли тех же аксиом быть достаточно для определения площади вообще всех множеств (можно поставить условие: всех ограниченных множеств, чтобы не возникало противоречия с интуицией) на евклидовой плоскости?

Обсудим это подробно. Представьте себе, что, по аналогии с тем, как это делается в школе, мы объявляем, что *любое ограниченное множество D* на евклидовой плоскости X обладает некоторой площадью S_D, а операция вычисления площади $D \mapsto S_D$ удовлетворяет аксиомам S1 – S3 на с.881 (в которых слово "многоугольник" заменено словосочетанием "ограниченное множество"). Можно было бы ожидать, что тогда из этих аксиом автоматически будут следовать формулы для площадей всех вообще ограниченных множеств на плоскости (а не только многоугольников, как в школе).

Так вот, оказывается, ничего подобного не происходит, потому что *"доопределять" площади в "сложных" случаях можно по-разному* (и при этом будут получаться разные значения площади для одних и тех же множеств).

Это требует пояснения. Дело в том, что задача определить площадь для всех ограниченных множеств на плоскости так, чтобы выполнялись аксиомы S1 – S3, есть тоже некая математическая проблема, которая априори может не иметь решения, может иметь одно решение, или может иметь много решений. И оказывается, что верно последнее. Этот факт был обнаружен польским математиком Стефаном Банахом[4]:

Теорема 15.1.4 (Банах)**.** *Отображение $D \mapsto S_D$, которое каждому ограниченному множеству D на плоскости ставит в соответствие число $S_D \geqslant 0$ так, чтобы выполнялись условия S1 – S3, существует, но не единственно.*

(Отсюда и следует, что площади некоторых множеств D будут зависеть от того, какое конкретное отображение $D \mapsto S_D$ ты выбираешь.)

Но и это еще не все. Дело в том, что если мы попытаемся таким же образом определить объем в трехмерном пространстве, то это вообще приведет нас к логическим противоречиям. В это трудно поверить, но оказывается, что если взять, например, какой-нибудь куб A в трехмерном пространстве, то, разбив его на подходящее количество подмножеств ("кусков") $A_1, ..., A_k$ (где k зависит от конкретной задачи, но в каждой задаче конечно), можно собрать из них (с помощью движений) какое хочешь другое ограниченное множество с непустой внутренностью. Например, можно из куба A сделать таким образом куб в два раза большего размера.

Эта теорема была доказана в 1924 году Стефаном Банахом вместе с уже упоминавшимся другим известным польским математиком Альфредом Тарским, и называется обычно парадоксом Банаха-Тарского. Ее точная формулировка выглядит так:

Теорема 15.1.5 (парадокс Банаха-Тарского)**.** *Пусть A и B – два множества в трехмерном пространстве, ограниченные и имеющие непустую внутренность. Тогда найдется такое число $k \in \mathbb{N}$, что каждое из множеств A и B можно разбить на k подмножеств*

$$A = A_1 \cup ... \cup A_k, \qquad \big(A_i \cap A_j = \varnothing, \quad \text{при} \quad i \neq j\big), \qquad B = B_1 \cup ... \cup B_k, \qquad \big(B_i \cap B_j = \varnothing, \quad \text{при} \quad i \neq j\big)$$

таким образом, что каждая пара A_i, B_i будет состоять из конгруэнтных множеств:

$$A_i \cong B_i$$

Объясним, почему из этого результата получаются противоречия в нашем проекте. Предположим, мы поступили с понятием объема так же, как с площадью, то есть объявили, что всякое ограниченное множество D в трехмерном евклидовом пространстве X обладает некоторым объемом $V(D)$, и операция вычисления объема $D \mapsto V(D)$, удовлетворяет модифицированным аксиомам V1 – V3 на с.886 (в которых слово "многогранник" заменено словосочетанием "ограниченное множество"). Тогда из теоремы 15.1.5 и аксиом V2 и V3 автоматически получалось бы, что объемы любых двух ограниченных множеств с непустой внутренностью A и B должны быть одинаковы, а это противоречит, например, доказанной выше формуле объема прямоугольного параллелепипеда (15.1.13).

Понятие меры. Очевидный вывод, к которому приводит парадокс Банаха-Тарского состоит в том, что безнадежно пытаться определить объем для всех на свете ограниченных множеств. Максимум, на что можно надеяться – что отображение $D \mapsto V(D)$ продолжается на более широкие, чем многогранники (и многоугольники) классы множеств с похожими свойствами (но не на все множества). Теории, в которых строятся такие продолжения, называются *теориями меры*. Их много, и в каждой такой теории класс множеств, на которые продолжается отображение объема $D \mapsto V(D)$ свой, эти множества называются *измеримыми множествами* (в данной теории меры), а само такое продолжение называется *(инвариантной*[5]*) мерой* и имеет обозначение $D \mapsto \mu(D)$. Формальное определение меры выглядит так.

[4]Stefan Banach (1892 – 1945).

[5]Существуют также теории, в которых изучаются неивариантные меры, то есть такие, для которых аксиома жесткости не выполняется.

- *(Инвариантной) мерой* на евклидовом пространстве X называется всякой отображение $D \mapsto \mu(D)$, определенное на некотором классе множеств $\mathcal{M}$ в X, называемых *измеримыми*, и принимающее значения в множестве $\mathbb{R}_+$ неотрицательных вещественных чисел, такое, что выполняются следующие

Аксиомы меры:

(M0) **Аксиома кольца:** *если множества C и D измеримы, то их объединение $C \cup D$, пересечение $C \cap D$ и разность $C \setminus D$ тоже измеримы.*

(M1) **Аксиома нормировки:** *мера какого-нибудь куба Q со стороной $a = 1$ равна 1:*

$$\mu(Q) = 1.$$

(M2) **Аксиома аддитивности:** *если два измеримых множества C и D в пересечении дают пустое множество, то мера их объединения равна сумме их мер:*

$$C \cap D = \varnothing \qquad \Longrightarrow \qquad \mu(C \cup D) = \mu(C) + \mu(D)$$

(M3) **Аксиома жесткости:** *если измеримые множества C и D конгруэнтны – то есть одно получается из другого с помощью движения (преобразования плоскости, сохраняющего расстояния) – то меры C и D совпадают:*

$$C \cong D \qquad \Longrightarrow \qquad \mu(C) = \mu(D)$$

Если класс $\mathcal{M}$ измеримых множеств содержит все многогранники, то мера $\mu(D)$ каждого многогранника D должна будет совпадать с его обычным объемом $V(D)$, определенном аксиомами V1 – V3 на с. 886, потому что на классе многогранников объем однозначно определяется аксиомами V1 – V3. То же самое, понятное дело, справедливо для площади многоугольников, если $\dim X = 2$, и именно поэтому говорится, что мера является обобщением понятий площади и объема.

(c) Определение меры Жордана в $\mathbb{R}^n$

Первая по времени теория меры была предложена в 1892 году французским математиком Камиллем Жорданом[6], и, хотя с тех пор появились существенно более совершенные теории, именно конструкция Жордана обычно изучается в курсе математического анализа, потому что, с одной стороны, она сохраняет простоту и наглядность, а, с другой, ее обычно бывает достаточно для вычислений. Мы также следуем этой традиции, и начнем мы со случая $\mathbb{R}^2$, который потом обобщим на случай произвольного евклидова пространства.

Мера Жордана в $\mathbb{R}^2$

Определение меры Жордана удобно описать сначала для плоскости $\mathbb{R}^2$, потому что в этом случае все построения удобно иллюстрируются картинками.

Двоичная сетка, клеточные множества и клеточная мера в $\mathbb{R}^2$. Зафиксируем число $k \in \mathbb{N}$, и на плоскости $\mathbb{R}^2$ построим прямые линии по уравнениям

$$x = \frac{p}{2^k}, \qquad y = \frac{q}{2^k} \qquad (p, q \in \mathbb{Z})$$

Мы получим систему горизонтальных и вертикальных прямых, причем любые две соседние прямые отстоят друг от друга на расстоянии $\frac{1}{2^k}$. Эта картинка и называется *двоичной сеткой* (ранга k).

Маленькие (замкнутые) квадраты Q со стороной $\frac{1}{2^k}$, из которых состоит эта сетка, то есть множества вида

$$Q: \quad \begin{cases} \frac{p}{2^k} \leqslant x \leqslant \frac{p+1}{2^k} \\ \frac{q}{2^k} \leqslant y \leqslant \frac{q+1}{2^k} \end{cases}$$

[6] Marie Ennemond Camille Jordan (1838 – 1922)

(где $p, q \in \mathbb{Z}$) называются *клетками* (ранга k).

Каждой такой клетке Q ранга k приписывается *клеточная мера* $\mu_k(Q)$ ранга k, равная произведению сторон Q:

$$\mu_k(Q) = \frac{1}{2^k} \cdot \frac{1}{2^k} = \frac{1}{4^k} \tag{15.1.18}$$

Объединение H любого конечного набора $Q_1, ..., Q_m$ клеток ранга k называется *клеточным множеством* (ранга k):

$$H = \bigcup_{i=1}^{m} Q_i \quad (\forall i \neq j \quad Q_i \neq Q_j)$$

Каждому такому множеству H приписывается *клеточная мера* $\mu_k(H)$, равная сумме клеточных мер входящих в него клеток, или, что то же самое, мере клетки ранга k, помноженной на количество m клеток входящих в H:

$$\mu_k(H) = \sum_{i=1}^{m} \mu_k(Q_i) = m \cdot \mu_k(Q_i) = \frac{m}{4^k} \tag{15.1.19}$$

Понятно, что всякое клеточное множество H ранга k можно представить как клеточное множество ранга $k+1$, если удвоить сетку. При этом количество клеток, входящих в H станет вчетверо больше, но сами клетки уменьшатся: их клеточная мера станет вчетверо меньше. Поэтому, если вычислить клеточную меру H, считая, что H – множество ранга $k+1$, то получится то же самое значение:

$$\mu_{k+1}(H) = \frac{4m}{4 \cdot 4^k} = \frac{m}{4^k} = \mu_k(H)$$

Отсюда следует, что *клеточная мера клеточного множества H ранга k не зависит от ранга клеток, которыми представлено H:*

$$\mu_k(H) = \mu_l(H) \qquad \forall l > k$$

поэтому при обозначении клеточной меры μ_k индекс k можно не писать, а заменять его, например, символом $\square$ (что будет означать клеточную меру):

$$\mu_\square(H) = \mu_k(H) = \mu_l(H) \qquad \forall l > k \tag{15.1.20}$$

Свойства клеточной меры:

$1^\square$. **Монотонность:** *если G и H - два клеточных множества (возможно, разных рангов), причем G содержится в H, то клеточная мера G не превышает клеточной меры H:*

$$G \subseteq H \quad \Longrightarrow \quad \mu_\square(G) \leqslant \mu_\square(H)$$

$2^\square$. **Полуаддитивность:** *для любых клеточных множеств G и H (возможно, разных рангов) клеточная мера их объединения $G \cup H$ не превышает суммы клеточных мер G и H:*

$$\mu_\square(G \cup H) \leqslant \mu_\square(G) + \mu_\square(H)$$

$3^\square$. **Аддитивность:** *если G и H - клеточные множества, не имеющие общих клеток, то клеточная мера их объединения $G \cup H$ равна сумме клеточных мер G и H:*

$$\mu_\square(G \cup H) = \mu_\square(G) + \mu_\square(H)$$

Доказательство. Пусть G и H – клеточные множества. Выбрав k достаточно большим, можно считать, что G и H оба имеют ранг k.

1. Если $G \subseteq H$, то, очевидно, G будет содержать не больше клеток, чем H. Поэтому и клеточная мера G не может быть больше клеточной меры H.

2. Пусть m_G и m_H – количество клеток (ранга k) содержащихся в G и H. Тогда число клеток, содержащихся в $G \cup H$ не превышает суммы m_G и m_H

$$m_{G \cup H} \leqslant m_G + m_H$$

поэтому

$$\mu_\square(G \cup H) = \mu_k(G \cup H) = \frac{m_{G\cup H}}{4^k} \leqslant \frac{m_G + m_H}{4^k} = \frac{\mu_k(G)}{4^k} + \frac{\mu_k(H)}{4^k} = \mu_\square(G) + \mu_\square(H)$$

3. Если вдобавок G и H не имеют общих клеток, то число клеток, содержащихся в $G \cup H$ равно сумме m_G и m_H:

$$m_{G \cup H} = m_G + m_H$$

поэтому

$$\mu_\square(G \cup H) = \mu_k(G \cup H) = \frac{m_{G\cup H}}{4^k} = \frac{m_G + m_H}{4^k} = \frac{\mu_k(G)}{4^k} + \frac{\mu_k(H)}{4^k} = \mu_\square(G) + \mu_\square(H)$$

$\square$

Внутреннее, граничное и инцидентное клеточные множества в $\mathbb{R}^2$. Рассмотрим теперь произвольное ограниченное множество D на плоскости XOY. Среди всех клеток нашей двоичной сетки (ранга k) какие-то пересекаются с D, а какие-то – нет. Вводятся следующие определения:

— клетка Q называется *внутренней* для множества D, если она содержится в множестве D:

$$Q \subseteq D$$

— клетка Q называется *инцидентной* для множества D, если она пересекается с множеством D,

$$Q \cap D \neq \varnothing$$

— клетка Q называется *граничной* для множества D, если она пересекается с множеством D, но не содержится в D,

$$Q \nsubseteq D \quad \& \quad Q \cap D \neq \varnothing$$

(Ясно, что инцидентная клетка обязательно будет или внутренней, или граничной.)

Объединение всех внутренних (соответственно, граничных, инцидентных) клеток обозначается $\mathsf{G}_k(D)$ (соответственно, $\mathsf{F}_k(D)$, $\mathsf{E}_k(D)$)

$$\mathsf{G}_k(D) = \bigcup_{\substack{Q \text{ – внутренняя} \\ \text{клетка ранга } k \\ \text{для множества } D}} Q, \tag{15.1.21}$$

$$\mathsf{F}_k(D) = \bigcup_{\substack{Q \text{ – граничная} \\ \text{клетка ранга } k \\ \text{для множества } D}} Q, \tag{15.1.22}$$

$$\mathsf{E}_k(D) = \bigcup_{\substack{Q \text{ – инцидентная} \\ \text{клетка ранга } k \\ \text{для множества } D}} Q \tag{15.1.23}$$

и называются соответственно *внутренним клеточным множеством ранга* k, *граничным клеточным множеством ранга* k и *инцидентным клеточным множеством ранга* k для множества D.

Свойства $\mathsf{G}_k(D)$, $\mathsf{F}_k(D)$ и $\mathsf{E}_k(D)$

1°. *$\mathsf{G}_k(D)$ и $\mathsf{F}_k(D)$ в объединении дают $\mathsf{E}_k(D)$, а пересекаются по нигде не плотному множеству:*

$$\mathsf{G}_k(D) \cup \mathsf{F}_k(D) = \mathsf{E}_k(D), \qquad \mathsf{Int}\big(\mathsf{G}_k(D) \cap \mathsf{F}_k(D)\big) = \varnothing$$

2°. *Множество D всегда содержится во внутренности $\mathsf{Int}\big(\mathsf{E}_k(D)\big)$ своего инцидентного клеточного множества $\mathsf{E}_k(D)$:*

$$D \subseteq \mathsf{Int}\big(\mathsf{E}_k(D)\big) \tag{15.1.24}$$

3°. *Справедливы включения:*

$$\mathsf{Fr}(D) \subseteq \mathsf{F}_k(D) \subseteq \mathsf{E}_k\big(\mathsf{Fr}(D)\big) \tag{15.1.25}$$

Доказательство. 1. Первое свойство очевидно, перейдем сразу ко второму.

2. Если $x \in D$, то

— либо x является внутренней точкой для своей (в этом случае необходимо единственной) инцидентной клетки Q, и тогда

$$x \in \mathsf{Int}(Q) \subseteq \mathsf{Int}\big(\mathsf{E}_k(D)\big)$$

— либо x лежит на границе какой-нибудь своей инцидентной клетки – в этом случае x все равно принадлежит внутренности объединения своих инцидентных клеток, $Q_1, ..., Q_l$ (количество которых зависит от размерности n и от положения точки x на двоичной сетке),

$$x \in \mathsf{Int}(Q_1 \cup ... \cup Q_l)$$

потому что если бы она лежала на границе $x \in \mathsf{Fr}(Q_1 \cup ... \cup Q_l)$, то это означало бы, что мы не учли в списке $Q_1, ..., Q_l$ еще какие-то клетки, и этот список нужно пополнить; как следствие,

$$x \in \mathsf{Int}(Q_1 \cup ... \cup Q_l) \subseteq \mathsf{Int}\big(\mathsf{E}_k(D)\big)$$

3. Зафиксируем двоичную сетку произвольного ранга k, и докажем вначале первое включение из (15.1.25):

$$\mathsf{Fr}(D) \subseteq \mathsf{F}_k(D) \tag{15.1.26}$$

Для этого возьмем произвольное $x \in \mathsf{Fr}(D)$ и покажем, что

$$x \in \mathsf{F}_k(D) \tag{15.1.27}$$

Пусть $Q_1, ..., Q_m$ – клетки ранга k, содержащие x:

$$x \in Q_1 \cap ... \cap Q_m$$

Доказательство состоит в том, чтобы проанализировать возможные варианты расположения клеток Q_i по отношению к D.

1) Сначала рассмотрим случай, когда таких клеток имеется всего одна (то есть $m = 1$). Тогда мы получим, что x должен лежать внутри этой единственной клетки Q_1:

$$x \in \mathsf{Int}(Q_1)$$

Поскольку $x \in \mathsf{Fr}(D)$, в любой окрестности точки x имеются точки из D и точки, лежащие вне D:

$$Q_1 \cap D \neq \varnothing \quad \& \quad Q_1 \nsubseteq D$$

Значит Q_1 должна быть граничной клеткой для D, а отсюда сразу следует (15.1.27):

$$x \in Q_1 \subseteq \mathsf{F}_k(D)$$

2) Предполагаем, что клеток больше одной: $m > 1$. Поскольку $x \in \mathsf{Fr}(D)$, в любой окрестности точки x должны быть точки из D. Поэтому хотя бы одна из клеток $Q_1, ..., Q_m$ содержит точки из D. Пусть для определенности это будет Q_1:

$$Q_1 \cap D \neq \varnothing$$

Тогда рассматриваем еще два подслучая:

2.1) если $Q_1 \nsubseteq D$, то Q_1 будет граничной клеткой для D, откуда следует (15.1.27):

$$x \in Q_1 \subseteq \mathsf{F}_k(D)$$

2.2) если же $Q_1 \subseteq D$, то мы получаем

$$x \in Q_1 \subseteq D$$

откуда сразу следует, что (Q_1 и) все оставшиеся клетки $Q_2, ..., Q_m$ – инцидентные для D:

$$x \in D \cap \bigcap_{i=2}^{m} Q_i \quad \Longrightarrow \quad \bigcup_{i=2}^{m} Q_i \subseteq \mathsf{E}_k(D) \tag{15.1.28}$$

Здесь рассматриваются два последних подслучая:

2.2.1) если все $Q_2, ..., Q_m$ содержатся в D, то получается что x – внутренняя точка для D

$$\forall i \geqslant 2 \quad Q_i \subseteq D \quad \Longrightarrow \quad x \in Q_1 \cup \bigcup_{i=2}^{m} Q_i \subseteq D \quad \Longrightarrow \quad x \in \mathsf{Int}(D)$$

а это противоречит тому что $x \in \mathsf{Fr}(D)$;

2.2.2) значит, остается вариант, что среди $Q_2, ..., Q_m$ есть какая-то клетка Q_i не содержащаяся в D

$$\exists i \geqslant 2 \quad Q_i \nsubseteq D$$

вместе с (15.1.28) это означает, что Q_i – граничная клетка для D, значит опять должно выполняться (15.1.27):

$$x \in Q_i \subseteq \mathsf{F}_k(D)$$

Таким образом, в любом случае выполняется (15.1.27), и мы доказали формулу (15.1.26).

2. Теперь нам остается доказать второе включение из (15.1.25):

$$\mathsf{F}_k(D) \subseteq \mathsf{E}_k\big(\mathsf{Fr}(D)\big) \tag{15.1.29}$$

Возьмем клетку

$$Q \subseteq \mathsf{F}_k(D) \tag{15.1.30}$$

то есть, содержащую точки из D и точки, не принадлежащие D:

$$Q \cap D \neq \varnothing \quad \& \quad Q \backslash D \neq \varnothing$$

Пусть

$$x \in Q \cap D \quad \& \quad y \in Q \backslash D$$

Рассмотрим отображение

$$f : [0, 1] \to Q \quad \Big| \quad f(t) = t \cdot y + (1 - t) \cdot x$$

Очевидно,

$$f(0) = x \in D \quad \& \quad f(1) = y \notin D$$

поэтому множество

$$T = \big\{t \in [0, 1] : \quad f(t) \in D\big\}$$

содержит точку $t = 0$ и не содержит точку $t = 1$. Пусть

$$t^* = \sup T$$

Тогда

1) найдется последовательность точек $t_i \in T$ такая, что

$$t_i < t^* \quad \Big| \quad t_i \underset{i\to\infty}{\longrightarrow} t^*$$

2) и другая последовательность точек $s_i \notin T$

$$s_i > t^* \quad \Big| \quad s_i \underset{i\to\infty}{\longrightarrow} t^*$$

Для них мы получим:

$$f(t_i) \in D \quad \& \quad f(t_i) \underset{i\to\infty}{\longrightarrow} f(t^*) \quad \& \quad f(s_i) \notin D \quad \& \quad f(s_i) \underset{i\to\infty}{\longrightarrow} f(t^*)$$

Отсюда можно сделать вывод, что в любой окрестности точки $z = f(t^*)$ имеются точки $f(t_i)$, лежащие в D, и точки $f(s_i)$, не лежащие в D. Значит, $z = f(t^*)$ – граничная точка для D:

$$z \in \mathsf{Fr}(D)$$

А, с другой стороны, $z = f(t^*) \in Q$, значит Q – инцидентная клетка для $\mathsf{Fr}(D)$:

$$Q \subseteq \mathsf{E}_k\big(\mathsf{Fr}(D)\big) \tag{15.1.31}$$

Мы получили, что из (15.1.30) следует (15.1.31), то есть справедливо (15.1.29). □

Измеримые множества и мера Жордана в $\mathbb{R}^2$. Посмотрим, что получится, если удвоить сетку, то есть провести между любыми двумя соседними прямыми еще одну. В результате получается новая сетка ранга $k+1$, у которой клетки будут в два раза меньше (по линейным размерам). Что произойдет с множествами $\mathsf{G}_k(D), \mathsf{F}_k(D), \mathsf{E}_k(D)$? Ясно, что площадь, занимаемая внутренними клетками "увеличится", потому что к ней добавятся "дополнительные внутренние клетки":

$$\mathsf{G}_k(D) \subseteq \mathsf{G}_{k+1}(D)$$

А площади, занимаемые граничными и инцидентными клетками, "уменьшатся":

$$\mathsf{F}_k(D) \supseteq F_{k+1}(D), \qquad \mathsf{E}_k(D) \supseteq \mathsf{E}_{k+1}(D)$$

В частности, получается "двойная цепочка множеств":

$$\mathsf{G}_1(D) \subseteq \mathsf{G}_2(D) \subseteq ... \subseteq \mathsf{G}_k(D) \subseteq \mathsf{G}_{k+1}(D) \subseteq ... \subseteq \mathsf{E}_{k+1}(D) \subseteq \mathsf{E}_k(D) \subseteq ... \subseteq \mathsf{E}_2(D) \subseteq \mathsf{E}_1(D) \tag{15.1.32}$$

Отсюда следует, что клеточные меры этих множеств образуют двойную числовую цепочку:

$$\begin{multline} \mu_\Box(\mathsf{G}_1(D)) \leqslant \mu_\Box(\mathsf{G}_2(D)) \leqslant ... \leqslant \mu_\Box(\mathsf{G}_k(D)) \leqslant \mu_\Box(\mathsf{G}_{k+1}(D)) \leqslant ... \\ ... \leqslant \mu_\Box(\mathsf{E}_{k+1}(D)) \leqslant \mu_\Box(\mathsf{E}_k(D)) \leqslant ... \leqslant \mu_\Box(\mathsf{E}_2(D)) \leqslant \mu_\Box(\mathsf{E}_1(D)) \end{multline} \tag{15.1.33}$$

Поэтому (по теореме Вейерштрасса о монотоных последовательностях) обе последовательности $\mu_\Box(\mathsf{G}_k(D))$ и $\mu_\Box(\mathsf{E}_k(D))$ имеют конечные пределы:

$$\lim_{k\to\infty} \mu_\Box(\mathsf{G}_k(D)) = \mu_*(D) \leqslant \mu^*(D) = \lim_{k\to\infty} \mu_\Box(\mathsf{E}_k(D))$$

- Число $\mu_*(D)$ называется *внутренней мерой Жордана* множества D, а число $\mu^*(D)$ – *внешней мерой Жордана* множества D. Эти величины не обязаны совпадать (см. ниже пример 15.1.9), но если они все-таки совпадают, то число

$$\mu(D) = \mu_*(D) = \mu^*(D)$$

называется *мерой Жордана* множества D, а само множество D называется тогда *измеримым по Жордану*.

◇ **15.1.7** (клетка). Покажем, что всякая клетка Q ранга j измерима, и ее мера $\mu(Q)$ совпадает с S_Q:

$$\mu(Q) = \frac{1}{2^j} \cdot \frac{1}{2^j} = \frac{1}{4^j}$$

Это можно сделать просто вычислив общие площади внутренних и инцидентных клеток для Q. Количество внутренних клеток ранга k для Q равно, как легко заметить, $\left(2^{k-j}\right)^2$, если $k > j$, и 0, если $k \leqslant j$. Поэтому

$$\mu_{\square}(\mathsf{G}_k(Q)) = \left\{ \begin{array}{ll} 0, & \text{при } k \leqslant j \\ \frac{\left(2^{k-j}\right)^2}{4^k}, & \text{при } k > j \end{array} \right\} = \\ = \left\{ \begin{array}{ll} 0, & \text{при } k \leqslant j \\ \frac{1}{4^j}, & \text{при } k > j \end{array} \right\} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{4^j}$$

Количество же инцидентных клеток равно $\left(2^{k-j}+2\right)^2$, если $k > j$, и 1, если $k \leqslant j$. Поэтому

$$\mu_{\square}(\mathsf{E}_k(Q)) = \left\{ \begin{array}{ll} \frac{1}{4^k}, & \text{при } k \leqslant j \\ \frac{\left(2^{k-j}+2\right)^2}{4^k}, & \text{при } k > j \end{array} \right\} = \\ = \left\{ \begin{array}{ll} \frac{1}{4^k}, & \text{при } k > j \\ \left(\frac{1}{2^j}+2\right)^2, & \text{при } k \leqslant j \end{array} \right\} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{4^j}$$

Таким образом,

$$\mu(Q) = \mu_*(Q) = \mu^*(Q) = \frac{1}{4^j}$$

◇ **15.1.8** (прямоугольник). Покажем, что всякий прямоугольник Π на плоскости со сторонами параллельными осям координат

$$D = [a,b] \times [c,d] = \\ = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \quad x \in [a,b] \quad \& \quad y \in [c,d]\right\}$$

измерим и его мера равна произведению длин сторон:

$$\mu(\Pi) = (b-a)\cdot(d-c) \qquad (15.1.34)$$

Наложим на Π двоичную сетку, и мы увидим, что множества внутренних и инцидентных клеток также представляют собой два прямоугольника:

Их площади легко вычислить. Для этого надо выписать двоичные приближения чисел a,b,c,d, то есть при каждом k найти двоично-рациональные числа $\underline{a}_k, \overline{a}_k$, приближающие a снизу и сверху

$$\underline{a}_k = \max\left\{x = \frac{i}{2^k} : \quad x \leqslant a\right\},$$

$$\overline{a}_k = \min\left\{x = \frac{i}{2^k} : \quad a \leqslant x\right\},$$

и то же самое проделать для b,c,d. Из аксиомы Архимеда следует, что

$$\underline{a}_k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} a \underset{\infty\leftarrow k}{\longleftarrow} \overline{a}_k$$

После этого станет очевидно, что при достаточно больших k (а именно, при k таких, что $\overline{a}_k < \underline{b}_k$ и $\overline{c}_k < \underline{d}_k$) общая площадь внутренних клеток для Π равна

$$\mu_{\square}(\mathsf{G}_k(\Pi)) = \left(\underline{b}_k - \overline{a}_k\right)\cdot\left(\underline{d}_k - \overline{c}_k\right)$$

а площадь инцидентных клеток –

$$\mu_{\square}(\mathsf{E}_k(\Pi)) = \left(\overline{b}_k - \underline{a}_k + \frac{2}{2^k}\right)\cdot\left(\overline{d}_k - \underline{c}_k + \frac{2}{2^k}\right)$$

Обе величины стремятся к одному пределу:

$$\mu_{\square}(\mathsf{G}_k(\Pi)) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} (b-a)\cdot(d-c) \underset{\infty\leftarrow k}{\longleftarrow} \mu_{\square}(\mathsf{E}_k(\Pi))$$

откуда и получается формула (15.1.34).

◇ **15.1.9** (неизмеримое множество). Покажем, что не всякое множество измеримо по Жордану. Пусть D состоит из точек на плоскости, лежащих в квадрате $[0,1]\times[0,1]$, и имеющих рациональные координаты:

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \quad x,y \in [0,1] \quad \& \quad x,y \in \mathbb{Q}\right\}$$

Нетрудно заметить, что при любом ранге сетки внутренние клетки у такого множества вообще отсутствуют, поэтому

$$\mu_{\square}(G_k(D)) = 0 \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0 = \mu_*(D)$$

а инцидентные клетки всегда содержат квадрат $[0,1]\times[0,1]$, поэтому

$$\mu_{\square}(\mathsf{E}_k(D)) \geqslant 1$$

Можно убедиться, что $\mu_{\square}(\mathsf{E}_k(D)) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 1$, но и без этого уже ясно, что внутренняя и внешняя меры Жордана не могут совпадать

$$\mu_*(D) = 0 < 1 \leqslant \mu^*(D)$$

и поэтому D не измеримо.

Мера Жордана в $\mathbb{R}^n$

По аналогии с плоским случаем $\mathbb{R}^2$, мера Жордана определяется в трехмерном пространстве $\mathbb{R}^3$ и вообще в пространстве произвольной размерности $\mathbb{R}^n$.

В трехмерном пространстве $\mathbb{R}^3$ определение выглядит так же, как и для плоскости, только двоичная сетка ранга k здесь будет состоять не из прямых, а из плоскостей, перпендикулярных осям координат:

$$x = \frac{p}{2^k}, \qquad y = \frac{q}{2^k}, \qquad z = \frac{r}{2^k} \qquad (p, q, r \in \mathbb{Z})$$

Соответственно, клеткой ранга k будет (замкнутый) куб Q со стороной $\frac{1}{2^k}$, образованный какими-нибудь из этих плоскостей, то есть заданный системой неравенств вида

$$Q: \quad \begin{cases} \frac{p}{2^k} \leqslant x \leqslant \frac{p+1}{2^k} \\ \frac{q}{2^k} \leqslant y \leqslant \frac{q+1}{2^k} \\ \frac{r}{2^k} \leqslant x \leqslant \frac{r+1}{2^k} \end{cases}$$

(где $p, q, r \in \mathbb{Z}$ фиксированы). Понятно, что в формулах аналогичных (15.1.18) и (15.1.19) площадь клетки S_Q должна быть заменена на объем:

$$V_Q = \left(\frac{1}{2^k}\right)^3 = \frac{1}{8^k}$$

В общем же случае двоичной сеткой ранга k в пространстве $\mathbb{R}^n$ будет система множеств, называемых гиперплоскостями и определяемых уравнениями

$$x^{(i)} = \frac{p^{(i)}}{2^k}, \qquad (i = 1, ..., n, \quad p^{(i)} \in \mathbb{Z})$$

Клетками же ранга k будут так называемые гиперкубы, которые определяются системами неравенств вида

$$Q: \quad \begin{cases} \frac{p^{(1)}}{2^k} \leqslant x^{(1)} \leqslant \frac{p^{(1)}+1}{2^k} \\ ... \\ \frac{p^{(n)}}{2^k} \leqslant x^{(n)} \leqslant \frac{p^{(n)}+1}{2^k} \end{cases}$$

(где $p^{(i)} \in \mathbb{Z}$ фиксированы).

Клеточная мера клетки $Q \subseteq \mathbb{R}^n$ по-прежнему определяется как произведение ее ребер,

$$\mu_{\square}(Q) = \left(\frac{1}{2^k}\right)^n = \frac{1}{2^{nk}}$$

а в остальном определение меры для $\mathbb{R}^n$ никак не отличается от двумерного случая, поэтому мы его здесь не повторяем. Отметим только, что, как и в двумерном случае, легко доказываются следующие факты.

◇ **15.1.10** (мера пустого множества в $\mathbb{R}^n$)**.** Пустое множество $\varnothing$ всегда измеримо в $\mathbb{R}^n$, и его мера равна нулю:

$$\mu(\varnothing) = 0$$

◇ **15.1.11** (клетка в $\mathbb{R}^n$)**.** Всякая клетка Q ранга j в $\mathbb{R}^n$ измерима, и ее мера Жордана $\mu(Q)$ совпадает с клеточной мерой $\mu_{\square}(Q)$:

$$\mu(Q) = \left(\frac{1}{2^j}\right)^n = \frac{1}{2^{nj}}$$

◇ **15.1.12** (параллелепипед в $\mathbb{R}^n$)**.** Всякий параллелепипед $\mathit{\Pi}$ в $\mathbb{R}^n$ с ребрами параллельными осям координат

$$D = [a_1, b_1] \times ... \times [a_n, b_n] = \\ = \left\{(x^1, ..., x^n) \in \mathbb{R}^n : \quad x^i \in [a_i, b_i]\right\}$$

измерим и его мера равна произведению длин ребер:

$$\mu(\mathit{\Pi}) = (b_1 - a_1) \cdot ... \cdot (b_n - a_n) \qquad (15.1.35)$$

◇ **15.1.13.** *На прямой $\mathbb{R}$ существует компакт K, неизмеримый по Жордану.*

(d) Множества нулевой меры Жордана в $\mathbb{R}^n$ и критерий измеримости

Свойства внешней меры. Напомним, что внешней мерой (ограниченного) множества D называется предел клеточных мер множеств $\mathsf{E}_k(D)$ его инцидентных клеток:

$$\mu^*(D) = \lim_{k\to\infty} \mu_\square(\mathsf{E}_k(D))$$

Свойства внешней меры

1*. **Монотонность:** *если $C \subseteq D$, то внешняя мера C не превышает внешней меры D:*

$$C \subseteq D \quad \Longrightarrow \quad \mu^*(C) \leqslant \mu^*(D) \tag{15.1.36}$$

2*. **Полуаддитивность:** *для любых двух множеств C и D внешняя мера их объединения $C \cup D$ не превышает суммы внешних мер C и D:*

$$\mu^*(C \cup D) \leqslant \mu^*(C) + \mu^*(D) \tag{15.1.37}$$

Доказательство. 1. Если $C \subseteq D$, то мы получаем логическую цепочку:

$$\begin{gathered} C \subseteq D \\ \Downarrow \\ \forall k \in \mathbb{N} \quad \mathsf{E}_k(C) \subseteq \mathsf{E}_k(D) \\ \Downarrow \\ \mu^*(C) \underset{\infty\leftarrow k}{\longleftarrow} \mu_\square(\mathsf{E}_k(C)) \leqslant \begin{pmatrix} \text{монотонность клеточной меры} \\ \text{(свойство } 1^\square \text{ параграфа (c))} \end{pmatrix} \leqslant \mu_\square(\mathsf{E}_k(D)) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \mu^*(D) \\ \Downarrow \\ \mu^*(C) \leqslant \mu^*(D) \end{gathered}$$

2. Для произвольных множеств C и D имеем:

$$\begin{gathered} \underbrace{\mu_\square\big(\mathsf{E}_k(C \cup D)\big)}_{\substack{\downarrow \\ \mu^*(C\cup D)}} = \mu_\square\big(\mathsf{E}_k(C) \cup \mathsf{E}_k(D)\big) \leqslant \begin{pmatrix} \text{полуаддитивность} \\ \text{клеточной меры} \\ \text{(свойство } 2^\square \text{ параграфа (c))} \end{pmatrix} \leqslant \underbrace{\mu_\square(\mathsf{E}_k(C)) + \mu_\square(\mathsf{E}_k(D))}_{\substack{\downarrow \\ \mu^*(C) + \mu^*(D)}} \\ \Downarrow \\ \mu^*(C \cup D) \leqslant \mu^*(C) + \mu^*(D) \end{gathered}$$

□

Множества нулевой меры и их свойства. *Множеством нулевой меры Жордана* в $\mathbb{R}^n$ называется всякое подмножество $D \subseteq \mathbb{R}^n$, внешняя мера Жордана которого равна нулю:

$$\mu^*(D) = 0 \tag{15.1.38}$$

Нетрудно убедиться, что это равносильно тому, что D измеримо и его мера Жордана равна нулю:

$$\mu(D) = 0 \tag{15.1.39}$$

Доказательство. Действительно, из (15.1.39) следует (15.1.38), потому что если существует $\mu(D)$, то $\mu^*(D) = \mu(D)$. И наоборот, если выполняется (15.1.38), то есть общая площадь инцидентных клеток для D стремится к нулю

$$\lim_{k\to\infty} \mu_\square(\mathsf{E}_k(D)) = \mu^*(D) = 0$$

то это означает, что внутренних клеток у D нет,

$$\forall i \quad \mathsf{G}_i(D) = \varnothing$$

(потому что иначе мы получили бы что для некоторого i выполняется $0 < \mu_\square(\mathsf{G}_i(D)) \leqslant \lim_{k\to\infty} \mu_\square(\mathsf{E}_k(D)) = \mu^*(D)$, то есть $0 < \mu^*(D)$). Значит,

$$\mu_*(D) = \lim_{i\to\infty} \mu_\square(\mathsf{G}_i(D)) = \lim_{i\to\infty} \mu_\square(\varnothing) = 0$$

Таким образом,

$$\mu_*(D) = 0 = \mu^*(D)$$

то есть D измеримо и имеет нулевую меру Жордана. □

Свойства множеств нулевой меры:

1^0. **Замкнутость относительно перехода к подмножеству:** *если D – множество нулевой меры в $\mathbb{R}^n$, то любое его подмножество $C \subseteq D$ тоже будет множеством нулевой меры в $\mathbb{R}^n$;*

2^0. **Замкнутость относительно объединения:** *если C и D – множества нулевой меры в $\mathbb{R}^n$, то их объединение $C \cup D$ – тоже множество нулевой меры в $\mathbb{R}^n$.*

3^0. **Топологические свойства:** *если D – множество нулевой меры в $\mathbb{R}^n$, то его внутренность $\mathsf{Int}(D)$ пуста, а дополнение к нему $\mathbb{R}^n \setminus D$ всюду плотно в $\mathbb{R}^n$:*

$$\mu(D) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \mathsf{Int}(D) = 0 \quad \& \quad \overline{\mathbb{R}^n \setminus D} = \mathbb{R}^n.$$

4^0. **Аппроксимируемость открытыми множествами:** *если D – множество нулевой меры, то для всякого $\varepsilon > 0$ найдется открытое измеримое множество U со свойствами:*

$$D \subseteq U, \quad \mu(U) < \varepsilon$$

Доказательство. 1. Пусть $\mu(D) = 0$, тогда

$$C \subseteq D \quad \Longrightarrow \quad 0 \leqslant \mu^*(C) \leqslant \left(\begin{smallmatrix}\text{монотонность внешней меры} \\ \text{(свойство } 1^* \text{ этого параграфа)}\end{smallmatrix}\right) \leqslant \mu^*(D) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \mu^*(C) = 0$$

2. Если C и D – множества нулевой меры, то

$$0 \leqslant \mu^*(C \cup D) \leqslant \left(\begin{smallmatrix}\text{полуаддитивность внешней меры} \\ \text{(свойство } 2^* \text{ этого параграфа)}\end{smallmatrix}\right) \leqslant \mu^*(C) + \mu^*(D) = 0 + 0 = 0 \quad \Longrightarrow \quad \mu^*(C \cup D) = 0$$

3. Если внутренность $\mathsf{Int}(D)$ множества D непуста, то, будучи открытым множеством, она должна содержать какой-то шар U в $\mathbb{R}^n$, а значит, и какую-то клетку Q (подходящего достаточно малого ранга). Тогда мы получаем, что D не может иметь нулевую меру:

$$Q \subseteq D \quad \Longrightarrow \quad 0 < \mu^*(Q) \leqslant \mu^*(D) \quad \Longrightarrow \quad \mu^*(D) \neq 0$$

Это доказывает равенство $\mathsf{Int}(D) = \varnothing$, в случае, если D имеет нулевую меру. По теореме 13.2.20, это эквивалентно плотности $\mathbb{R}^n \setminus D$ в $\mathbb{R}^n$, то есть равенству $\overline{\mathbb{R}^n \setminus D} = \mathbb{R}^n$.

4. Если $0 = \mu^*(D) = \lim_{k\to\infty} \mu_\square(\mathsf{E}_k(D))$, то для всякого $\varepsilon > 0$ можно найти k такое что $\mu_\square(\mathsf{E}_k(D)) < \varepsilon$. Остается положить $U = \mathsf{Int}(\mathsf{E}_k(D))$ и заметить, что $D \subseteq U$. Действительно, пусть $x \in D$, тогда если x – внутренняя точка для какой-то клетки Q ранга k, то $x \in \mathsf{Int}(Q) \subseteq \mathsf{Int}(\mathsf{E}_k(D)) = U$. Если же x лежит на границе Q, то все остальные клетки ранга k, у которых на границе лежит x (то есть все клетки входящие в $\mathsf{E}_k(\{x\})$), тоже содержатся в $\mathsf{E}_k(D)$, и поэтому x лежит внутри объединения этих клеток: $x \in \mathsf{Int}(\mathsf{E}_k(\{x\})) \subseteq \mathsf{Int}(\mathsf{E}_k(D)) = U$. $\square$

Критерий измеримости.

Теорема 15.1.6 (критерий измеримости)**.** *Множество D в $\mathbb{R}^n$ тогда и только тогда измеримо по Жордану, когда оно ограничено и его граница $\mathsf{Fr}(D)$ имеет нулевую меру Жордана:*

$$\mu\big(\mathsf{Fr}(D)\big) = 0$$

Доказательство. 1. Необходимость. Из левого включения в (15.1.25), в силу монотонности внешней меры, получаем

$$\forall k \in \mathbb{N} \qquad \mu^*\big(\mathsf{Fr}(D)\big) \leqslant \mu^*\big(\mathsf{F}_k(D)\big)$$

Поэтому, если D – измеримое множество, то есть

$$\mu_*(D) = \lim_{k\to\infty} \mu_\square(\mathsf{G}_k(D)) = \lim_{k\to\infty} \mu_\square(\mathsf{E}_k(D)) = \mu^*(D)$$

то мы получим

$$0 \leqslant \mu^*\big(\mathsf{Fr}(D)\big) \leqslant \mu^*\big(\mathsf{F}_k(D)\big) = \mu_\square(\mathsf{F}_k(D)) = \mu_\square(\mathsf{E}_k(D)) - \mu_\square(\mathsf{G}_k(D)) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

Значит, $\mu^*\big(\mathsf{Fr}(D)\big) = 0$, то есть $\mathsf{Fr}(D)$ – множество нулевой меры.

2. Достаточность. Из правого включения в (15.1.25) следует

$$\mu_\square(\mathsf{F}_k(D)) \leqslant \mu_\square(\mathsf{E}_k(\mathsf{Fr}(D)))$$

Поэтому если $\mathsf{Fr}(D)$ – множество нулевой меры, то

$$0 \leqslant \mu_\square(\mathsf{F}_k(D)) \leqslant \mu_\square(\mathsf{E}_k(\mathsf{Fr}(D))) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

$$\Downarrow$$

$$\mu_\square(\mathsf{E}_k(D)) - \mu_\square(\mathsf{G}_k(D)) = \mu_\square(\mathsf{F}_k(D)) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

$$\Downarrow$$

$$\mu_*(D) = \mu^*(D)$$

то есть E измеримо. □

Измеримость параллелепипеда.

Теорема 15.1.7. *Всякий параллелепипед $P_b(a_1, ..., a_k)$ в $\mathbb{R}^n$, где $k \leqslant n$, является измеримым по Жордану множеством.*

Для доказательства нам понадобятся две леммы.

Лемма 15.1.8. *Для всякого ограниченного множества $C \subseteq \mathbb{R}^n$ его внешняя мера оценивается неравенством*

$$\mu^*(C) \leqslant \big(\mathsf{diam}(C)\big)^n \tag{15.1.40}$$

Доказательство. Множество C можно вписать в шар диаметром $\mathsf{diam}(C)$, а его в свою очередь можно поместить в куб Q со сторонами длиной $\mathsf{diam}(C)$, параллельными осям координат:

$$C \subseteq Q$$

При этом, в силу примера 15.1.12, Q будет измеримым множеством, и его мера будет равна $\big(\mathsf{diam}(C)\big)^n$:

$$\mu^*(C) \leqslant (15.1.36) \leqslant \mu^*(Q) = \mu(Q) = (15.1.35) = \big(\mathsf{diam}(C)\big)^n.$$

□

Лемма 15.1.9. *Параллелепипед $P_b(a_1, ..., a_m)$ в $\mathbb{R}^n$ с числом направляющих векторов m, меньшим размерности пространства, $m < n$, имеет нулевую жорданову меру:*

$$\mu\big(P_b(a_1, ..., a_m)\big) = 0.$$

Доказательство. Рассмотрим отображение

$$f(x^1, ..., x^m) = \sum_{i=1}^m x^i \cdot a_i + b, \qquad x \in \mathbb{R}^m.$$

и заметим сразу, что но удовлетворяет неравенству

$$|f(x) - f(y)| \leqslant M \cdot |x - y|, \qquad x, y \in \mathbb{R}^m. \tag{15.1.41}$$

для некоторого $M > 0$.

Рассмотрим двоичную сетку ранга $i > 1$. Куб $K = [0;1]^m$ при этом разбивается на $(2^i)^m$ маленьких кубиков. Пусть Q – какой-нибудь из этих маленьких кубиков. Тогда:

$$\mathsf{diam}\, f(Q) \leqslant (15.1.41) \leqslant M \cdot \mathsf{diam}\, Q = M \cdot \frac{\sqrt[m]{2}}{2^i}$$

$$\Downarrow$$

$$\mu^*\big(f(Q)\big) \leqslant (15.1.40) \leqslant \big(\mathsf{diam}\, f(Q)\big)^n \leqslant \left(M \cdot \frac{\sqrt[m]{2}}{2^i}\right)^n = M^n \cdot \frac{\sqrt[m]{2^n}}{2^{i\cdot n}}$$

$$\Downarrow$$

$$\mu^*\big(f(K)\big) \leqslant (15.1.37) \leqslant \sum_{\substack{Q\ –\ \text{инцидентные}\\ \text{клетки для } K}} \mu^*\big(f(Q)\big) \leqslant \underbrace{(2^i)^m}_{\substack{\text{число клеток } Q,\\ \text{инцидентных } K}} \cdot M^n \cdot \frac{\sqrt[m]{2^n}}{2^{i\cdot n}} = M^n \cdot \frac{\sqrt[m]{2^n}}{2^{i\cdot(n-m)}} \underset{i\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

$$\Downarrow$$

$$\mu\big(f(K)\big) = 0$$

□

Доказательство теоремы 15.1.7. По определению,

$$P_b(a_1,...,a_k) = \Big\{ \sum_{i=1}^{k} x^i \cdot a_i + b;\ x \in [0;1]^k \Big\}.$$

Граница этого множества состоит из параллелепипедов меньшей размерности, то есть множеств вида

$$K = \Big\{ \sum_{i=1}^{m} x^i \cdot a_i + b;\ x \in [0;1]^k \Big\},$$

где $m = k-1 < k \leqslant n$ (эта формула описывает грани параллелпипеда $P_b(a_1,...,a_k)$, примыкающие к вершине b, и есть еще грани, не примыкающие к b, но они описываются такой же формулой, только b и a_i будут заменены другими векторами). Каждая такая грань K по лемме 15.1.9 имеет нулевую внешнюю меру, $\mu^*(K) = 0$, поэтому вся граница множества $P_b(a_1,...,a_k)$ имеет нулевую внешнюю меру, и значит по критерию измеримости (теорема 15.1.6), множество $P_b(a_1,...,a_k)$ измеримо. $\square$

Измеримость шара.

Теорема 15.1.10. *Всякий шар*

$$B = \{x \in \mathbb{R}^n:\ |x| \leqslant R\}$$

измерим в $\mathbb{R}^n$.

Для доказательства нам понадобится

Лемма 15.1.11. *График всякой непрерывной функции* $f: T \to \mathbb{R}$ *на компакте* $T \subseteq \mathbb{R}^n$ *имеет нулевую меру Жордана в* $\mathbb{R}^{n+1}$.

Доказательство. Выберем двоичную сетку в $\mathbb{R}^n$ и рассмотрим систему $\mathsf{E}_k(T)$ инцидентных клеток компакта T. Клеток (ранга k), инцидентных с компактом T имеется конечное число, а именно

$$N = \frac{\mu\left(\mathsf{E}_k(T)\right)}{\mu(Q)} = 2^{nk} \cdot \mu\left(\mathsf{E}_k(T)\right) \tag{15.1.42}$$

Кроме того, всякая такая клетка Q дает в пересечении с T непустой компакт $Q \cap T$. Значит, по теореме Вейерштрасса 14.1.1, функция f должна иметь максимум и минимум на $Q \cap T$. Обозначим через α_Q и β_Q точки максимума и минимума

$$\alpha_Q, \beta_Q \in Q \cap T \qquad f(\alpha_Q) = \max_{x \in Q \cap T} f(x) \quad \& \quad f(\beta_Q) = \min_{x \in Q \cap T} f(x)$$

и рассмотрим числа

$$f(\alpha_Q) - f(\beta_Q), \qquad Q \subseteq \mathsf{E}_k(T)$$

Их будет конечное число, поэтому среди них можно выбрать максимальное. Обозначим соответствующую клетку Q_k:

$$f(\alpha_{Q_k}) - f(\beta_{Q_k}) = \max_{Q \subseteq \mathsf{E}_k(T)} \left(f(\alpha_Q) - f(\beta_Q)\right) \tag{15.1.43}$$

Для всякой клетки Q из $\mathsf{E}_k(T)$ рассмотрим параллелепипед $\varPi_Q$ в $\mathbb{R}^{n+1}$, заданный правилом

$$\varPi_Q = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^{n+1}: \quad x \in Q \quad \& \quad f(\alpha_Q) \leqslant y \leqslant f(\beta_Q)\big\}$$

В силу примера 15.1.12, мера каждого такого параллелепипеда будет равна произведению длин ребер:

$$\mu(\varPi_Q) = \underbrace{\frac{1}{2^k} \cdot ... \cdot \frac{1}{2^k}}_{n \text{ множителей}} \cdot \left(f(\alpha_Q) - f(\beta_Q)\right) = \frac{1}{2^{nk}} \cdot \left(f(\alpha_Q) - f(\beta_Q)\right)$$

Кроме того, любые два таких параллелепипеда в пересечении дают множество нулевой меры, поэтому мера их объединения равна сумме мер параллелепипедов:

$$\mu\left(\bigcup_{Q \subseteq \mathsf{E}_k(T)} \varPi_Q\right) = \sum_{Q \subseteq \mathsf{E}_k(T)} \mu\left(\varPi_Q\right) = \sum_{Q \subseteq \mathsf{E}_k(T)} \frac{1}{2^{nk}} \cdot \big(f(\alpha_Q) - f(\beta_Q)\big) = \frac{1}{2^{nk}} \cdot \sum_{Q \subseteq \mathsf{E}_k(T)} \big(f(\alpha_Q) - f(\beta_Q)\big) \leqslant$$

$$\leqslant (15.1.43) \leqslant \frac{1}{2^{nk}} \cdot N \cdot \big(f(\alpha_{Q_k}) - f(\beta_{Q_k})\big) = (15.1.42) = \frac{1}{2^{nk}} \cdot 2^{nk} \cdot \mu\left(\mathsf{E}_k(T)\right) \cdot \left(f(\alpha_{Q_k}) - f(\beta_{Q_k})\right) = \\ = \mu\left(\mathsf{E}_k(T)\right) \cdot \big(f(\alpha_{Q_k}) - f(\beta_{Q_k})\big)$$

График $\varGamma$ функции f, очевидно, содержится в объединении параллелепипедов $\varPi_Q$,

$$\varGamma \subseteq \bigcup_{Q \subseteq \mathsf{E}_k(T)} \varPi_Q$$

Поэтому (в силу монотонности внешней меры) внешняя мера $\varGamma$ оценивается неравенством

$$\mu^*\big(\varGamma\big) \leqslant \mu^*\left(\bigcup_{Q \subseteq \mathsf{E}_k(T)} \varPi_Q\right) = \mu\left(\bigcup_{Q \subseteq \mathsf{E}_k(T)} \varPi_Q\right) \leqslant \mu\left(\mathsf{E}_k(T)\right) \cdot \big(f(\alpha_{Q_k}) - f(\beta_{Q_k})\big) \tag{15.1.44}$$

Теперь устремим k к бесконечности. Поскольку точки α_{Q_k} и β_{Q_k} лежат в клетке Q_k ранга k, расстояние между ними стремится к нулю:

$$0 \leqslant |\alpha_{Q_k} - \beta_{Q_k}| \leqslant \frac{\sqrt{n}}{2^k} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0 \quad \Longrightarrow \quad \alpha_{Q_k} - \beta_{Q_k} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

Поэтому, по теореме Кантора 14.1.2, значения функции f в этих точках тоже должны стремиться друг к другу:

$$f(\alpha_{Q_k}) - f(\beta_{Q_k}) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

С другой стороны, все множества $\mathsf{E}_k(T)$ содержатся в множестве $\mathsf{E}_1(T)$, поэтому из (15.1.44) получаем:

$$0 \leqslant \mu^*\big(\varGamma\big) \leqslant \underbrace{\mu\left(\mathsf{E}_k(T)\right)}_{\substack{\wedge\!\!\!\wedge \\ \mu\left(\mathsf{E}_1(T)\right)}} \cdot \underbrace{\big(f(\alpha_{Q_k}) - f(\beta_{Q_k})\big)}_{\substack{\downarrow \\ 0}} \quad \Longrightarrow \quad \mu^*\big(\varGamma\big) = 0$$

То есть $\varGamma$ – множество нулевой меры, и наша лемма доказана. □

Доказательство теоремы 15.1.10. Граница B состоит из двух полусфер, которые можно рассматривать как графики непрерывных функций на компакте. Для наглядности, мы будем считать, что размерность пространства равна 3, тогда первая полусфера

$$z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$$

есть график функции $f(x,y) = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$ на компакте $T: \ x^2 + y^2 \leqslant R^2$. А вторая полусфера

$$z = -\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$$

есть график функции $f(x,y) = -\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$ на том же компакте $T: \ x^2 + y^2 \leqslant R^2$. По лемме 15.1.11 оба эти множества имеют нулевую Жорданову меру, значит, $\mu\big(\mathsf{Fr}(B)\big) = 0$, и по теореме 15.1.6, множество B измеримо. □

(e) Проверка аксиом меры в $\mathbb{R}^n$

Теперь мы можем проверить, что отображение $D \mapsto \mu(D)$, определенное на с.896, действительно удовлетворяет аксиомам меры M0 – M3 на с.891.

Аксиома кольца.

Доказательство. Проверим аксиому кольца M0 для меры Жордана.

Если C и D – ограниченные измеримые множества в $\mathbb{R}^n$, то по теореме 15.1.6 их границы имеют нулевую меру Жордана:

$$\mu\big(\mathsf{Fr}(C)\big) = \mu\big(\mathsf{Fr}(D)\big) = 0$$

В силу свойства 2^0 на с.900, отсюда следует, что объединение границ $\mathsf{Fr}(C) \cup \mathsf{Fr}(D)$ – тоже множество нулевой меры:

$$\mu\big(\mathsf{Fr}(C) \cup \mathsf{Fr}(D)\big) = 0$$

По формуле (13.2.70), имеем

$$\mathsf{Fr}(C \cup D) \subseteq \mathsf{Fr}(C) \cup \mathsf{Fr}(D)$$

Поэтому по свойству 1^0 на с.900, множество $\mathsf{Fr}(C \cup D)$ тоже имеет нулевую меру:

$$\mu\big(\mathsf{Fr}(C \cup D)\big) = 0$$

По теореме 15.1.6, это опять означает, что $C \cup D$ измеримо.

Аналогично доказывается измеримость $C \cap D$ и $C \setminus D$. □

Аксиома нормировки.

Доказательство. Аксиома нормировки M1 сразу же следует из примера 15.1.11. Поскольку единичный гиперкуб является клеткой (ранга 1) его мера Жордана равна единице:

$$Q = [0,1]^n \quad \Longrightarrow \quad \mu(Q) = 1$$

□

Аксиома аддитивности.

Доказательство. Проверяем аксиому аддитивности M2 для меры Жордана.

Пусть C и D – непересекающиеся измеримые множества в $\mathbb{R}^n$. Тогда системы их внутренних клеток тоже не пересекаются:

$$\mathsf{G}_k(C) \cap \mathsf{G}_k(D) = \varnothing$$

Отсюда следует, что их общая площадь равна сумме площадей $\mathsf{G}_k(C)$ и $\mathsf{G}_k(D)$:

$$\mu_\square(\mathsf{G}_k(C) \cup \mathsf{G}_k(D)) = \mu_\square(\mathsf{G}_k(C)) + \mu_\square(\mathsf{G}_k(D))$$

При этом,

$$\mathsf{G}_k(C \cup D) \supseteq \mathsf{G}_k(C) \cup \mathsf{G}_k(D),$$

откуда получаем

$$\mu(C \cup D) \underset{\infty \leftarrow k}{\longleftarrow} \mu_\square(\mathsf{G}_k(C \cup D)) \geqslant \mu_\square(\mathsf{G}_k(C) \cup \mathsf{G}_k(D)) = \mu_\square(\mathsf{G}_k(C)) + \mu_\square(\mathsf{G}_k(D)) \underset{k \to \infty}{\longrightarrow} \mu(C) + \mu(D)$$

То есть,

$$\mu(C \cup D) \geqslant \mu(C) + \mu(D)$$

Но, с другой стороны, из-за полуаддитивности внешней меры,

$$\mu(C \cup D) = \mu^*(C \cup D) \leqslant (15.1.37) \leqslant \mu^*(C) + \mu^*(D) = \mu(C) + \mu(D)$$

□

Следствия из аксиом кольца и аддитивности. Как и в § 1(a), из аксиом кольца и аддитивности меры Жордана сразу получаются следующие

Свойства меры Жордана:

1^0. **Монотонность:** *если C и D – измеримые множества в $\mathbb{R}^n$, и $C \subseteq D$, то*

$$\mu(C) \leqslant \mu(D)$$

2^0. **Конечная аддитивность:** *если множества $C_1, ..., C_m$ измеримы и попарно не пересекаются, то их объединение $C_1 \cup ... \cup C_m$ (тоже измеримо и) имеет меру равную сумме мер $C_1, ..., C_m$:*

$$\forall i \neq j \quad C_i \cap C_j = \varnothing \quad \Longrightarrow \quad \mu(C_1 \cup ... \cup C_m) = \mu(C_1) + ... + \mu(C_m)$$

3^0. **Обобщенная аддитивность:** *если два измеримых множества C и D в пересечении дают множество с нулевой мерой, то их объединение $C \cup D$ (тоже измеримо и) имеет меру, равную сумме мер C и D*

$$\mu(C \cap D) = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \mu(C \cup D) = \mu(C) + \mu(D)$$

4^0. **Обобщенная конечная аддитивность:** *если среди измеримых множеств $C_1, ..., C_m$ любые два в пересечении дают множество с нулевой мерой, то их объединение $C_1 \cup ... \cup C_m$ (тоже измеримо и) имеет меру равную сумме мер $C_1, ..., C_m$:*

$$\forall i \neq j \quad \mu(C_i \cap C_j) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \mu(C_1 \cup ... \cup C_m) = \mu(C_1) + ... + \mu(C_m)$$

Инвариантность меры Жордана относительно движений.

Лемма 15.1.12 (о сдвиге измеримого множества)**.** *Если D – измеримое множество в $\mathbb{R}^n$, то его сдвиг*

$$D+a=\big\{x+a;\quad x\in D\big\}$$

на любой вектор $a\in\mathbb{R}^n$ тоже является измеримым множеством, причем

$$\mu(D+a)=\mu(D)$$

Доказательство. Рассмотрим сдвиг $\mathsf{G}_k(D)+a$ системы внутренних клеток множества D. Ясно, что $\mathsf{G}_k(D)+a$ получено сдвигом каждой клетки входящей в $\mathsf{G}_k(D)$:

$$\mathsf{G}_k(D)+a=\bigcup_{Q\subseteq\mathsf{G}_k(D)}Q+a$$

Каждая сдвинутая клетка $Q+a$ является прямоугольным параллелепипедом с ребрами параллельными осям координат, поэтому в силу примера 15.1.12, она измерима и ее мера должна быть равна произведению длин ребер, то есть мере несдвинутой клетки Q:

$$\mu(Q+a)=\left(\frac{1}{2^k}\right)^n=\mu(Q)$$

Пересечение любых двух (различных) сдвинутых клеток будет либо пустым множеством, либо параллелепипедом, одно или несколько ребер которого вырождены (то есть, равны нулю), поэтому (в силу примеров 15.1.10 и 15.1.12) мера пересечения всегда равна нулю

$$\mu\big((Q_1+a)\cap(Q_2+a)\big)=0$$

Таким образом, множество $\mathsf{G}_k(D)+a$ является объединением конечного набора параллелепипедов вида $Q+a$, из которых любые два пересекаясь дают множество нулевой меры. Значит, по свойству обобщенной конечной аддитивности 4^0 параграфа (e), $\mathsf{G}_k(D)+a$ – измеримое множество, и его мера равна сумме мер параллелепипедов $Q+a$, которая в свою очередь равна мере $\mathsf{G}_k(D)$:

$$\mu\big(\mathsf{G}_k(D)+a\big)=\sum_{Q\subseteq\mathsf{G}_k(D)}\mu(Q+a)=\sum_{Q\subseteq\mathsf{G}_k(D)}\mu(Q)=\mu\big(\mathsf{G}_k(D)\big)\qquad(15.1.45)$$

Теперь получаем цепочку:

$$\mathsf{G}_k(D)\subseteq D$$

$$\Downarrow$$

$$\mathsf{G}_k(D)+a\subseteq D+a$$

$$\Downarrow$$

$\big($фиксируем k, берем новую двоичную сетку с каким-нибудь рангом i и переходим к системам внутренних клеток ранга $i\big)$

$$\Downarrow$$

$$\mathsf{G}_i\left[\,\mathsf{G}_k(D)+a\right]\subseteq\mathsf{G}_i\left[D+a\right]$$

$$\Downarrow$$

$$\underbrace{\mu\big(\mathsf{G}_k(D)+a\big)}_{\substack{\| \\ (15.1.45) \\ \| \\ \mu(\mathsf{G}_k(D))}}\underset{\infty\leftarrow i}{\longleftarrow}\underbrace{\mu_\square\big\{\,\mathsf{G}_i\,[\underbrace{\mathsf{G}_k(D)+a}_{\substack{\text{измеримое}\\ \text{множество}}}]\big\}}_{\text{мера его внутренних клеток}}\leqslant\mu_\square\left\{\mathsf{G}_i\left[D+a\right]\right\}\underset{i\to\infty}{\longrightarrow}\mu_*(D+a)$$

$$\Downarrow$$

$$\mu\big(\mathsf{G}_k(D)\big)\leqslant\mu_*(D+a)$$

Это верно для всякого k, значит

$$\mu(D)=\lim_{k\to\infty}\mu\big(\mathsf{G}_k(D)\big)\leqslant\mu_*(D+a)$$

Точно так же, рассматривая систему сдвинутых инцидентных клеток $\mathsf{E}_k(D)+a$, можно убедиться, что

$$\mu^*(D+a)\leqslant \mu(D)$$

В результате у нас получается, что внешняя и внутренняя меры Жордана для $D+a$ совпадают с мерой D:

$$\mu(D)\leqslant \mu_*(D+a)\leqslant \mu^*(D+a)\leqslant \mu(D) \quad\Longrightarrow\quad \mu_*(D+a)=\mu^*(D+a)=\mu(D)$$

То есть, $D+a$ измеримо и его мера равна $\mu(D)$. □

Лемма 15.1.13 (о растяжении измеримого множества)**.** *Если D – измеримое множество в $\mathbb{R}^n$, то его растяжение $\lambda\cdot D$ с любым коэффициентом $\lambda\in\mathbb{R}$ тоже является измеримым множеством, причем*

$$\mu(\lambda\cdot D)=|\lambda|^n\cdot\mu(D)$$

Доказательство. Этот факт доказывается аналогично. Рассмотрим гомотетию $\lambda\cdot\mathsf{G}_k(D)$ системы внутренних клеток множества D. Ясно, что $\lambda\cdot\mathsf{G}_k(D)$ получено гомотетией каждой клетки входящей в $\mathsf{G}_k(D)$:

$$\lambda\cdot\mathsf{G}_k(D)=\bigcup_{Q\subseteq\mathsf{G}_k(D)}\lambda\cdot Q$$

Каждая растянутая клетка $\lambda\cdot Q$ является прямоугольным параллелепипедом с ребрами параллельными осям координат, поэтому в силу примера 15.1.12, ее мера должна быть равна произведению длин ребер, то есть должна отличаться от меры нерастянутой клетки Q множителем $|\lambda|^n$:

$$\mu(\lambda\cdot Q)=|\lambda|^n\cdot\mu(Q)$$

Пересечение любых двух растянутых клеток будет либо пустым множеством, либо параллелепипедом, одно или несколько ребер которого вырождены (то есть, равны нулю), поэтому (в силу примеров 15.1.10 и 15.1.12) мера пересечения всегда равна нулю

$$\mu\big((\lambda\cdot Q_1)\cap(\lambda\cdot Q_2)\big)=0$$

Таким образом, множество $\lambda\cdot\mathsf{G}_k(D)$ является объединением конечного набора параллелепипедов вида $\lambda\cdot Q$, из которых любые два пересекаясь дают множество нулевой меры. Значит, по свойству обобщенной конечной аддитивности 4^0 на с.904, $\lambda\cdot\mathsf{G}_k(D)$ – измеримое множество, и его мера равна сумме мер параллелепипедов $\lambda\cdot Q$, которая в свою очередь равна мере $\mathsf{G}_k(D)$, помноженной на $|\lambda|^n$:

$$\mu\big(\lambda\cdot\mathsf{G}_k(D)\big)=\sum_{Q\subseteq\mathsf{G}_k(D)}\mu(\lambda\cdot Q)=\sum_{Q\subseteq\mathsf{G}_k(D)}|\lambda|^n\cdot\mu(Q)=|\lambda|^n\cdot\sum_{Q\subseteq\mathsf{G}_k(D)}\mu(Q)=|\lambda|^n\cdot\mu\big(\mathsf{G}_k(D)\big) \quad (15.1.46)$$

Теперь получаем цепочку:

$$\mathsf{G}_k(D)\subseteq D$$

$$\Downarrow$$

$$\lambda\cdot\mathsf{G}_k(D)\subseteq\lambda\cdot D$$

$$\Downarrow\quad\begin{pmatrix}\text{фиксируем } k\text{, берем новую двоичную сетку}\\ \text{с каким-нибудь рангом } i \text{ и переходим}\\ \text{к системам внутренних клеток ранга } i\end{pmatrix}$$

$$\mathsf{G}_i\big[\lambda\cdot\mathsf{G}_k(D)\big]\subseteq\mathsf{G}_i\big[\lambda\cdot D\big]$$

$$\Downarrow$$

$$\underbrace{\mu\big(\lambda\cdot\mathsf{G}_k(D)\big)}_{\substack{\| \\ (15.1.46) \\ \| \\ |\lambda|^n\cdot\mu(\mathsf{G}_k(D))}}\ \underset{\infty\leftarrow i}{\longleftarrow}\ \underbrace{\mu_\square\Big\{\mathsf{G}_i\big[\underbrace{\lambda\cdot\mathsf{G}_k(D)}_{\substack{\uparrow\\ \text{измеримое множество}}}\big]\Big\}}_{\substack{\uparrow\\ \text{мера его внутренних клеток}}}\leqslant\mu_\square\big\{\mathsf{G}_i\big[\lambda\cdot D\big]\big\}\underset{i\to\infty}{\longrightarrow}\mu_*(\lambda\cdot D)$$

$$\Downarrow$$

$$|\lambda|^n\cdot\mu\big(\mathsf{G}_k(D)\big)\leqslant\mu_*(\lambda\cdot D)$$

Это верно для всякого k, значит

$$|\lambda|^n \cdot \mu(D) = \lim_{k\to\infty} |\lambda|^n \cdot \mu\big(\mathsf{G}_k(D)\big) \leqslant \mu_*(\lambda \cdot D)$$

Точно так же, рассматривая систему растянутых инцидентных клеток $\lambda \cdot \mathsf{E}_k(D)$, можно убедиться, что

$$\mu^*(\lambda \cdot D) \leqslant |\lambda|^n \cdot \mu(D)$$

В результате у нас получается:

$$|\lambda|^n \cdot \mu(D) \leqslant \mu_*(\lambda \cdot D) \leqslant \mu^*(\lambda \cdot D) \leqslant |\lambda|^n \cdot \mu(D) \quad \Longrightarrow \quad \mu_*(\lambda \cdot D) = \mu^*(\lambda \cdot D) = |\lambda|^n \cdot \mu(D)$$

То есть, $\lambda \cdot D$ измеримо и его мера равна $|\lambda|^n \cdot \mu(D)$. □

Лемма 15.1.14. *Единичный куб в* $\mathbb{R}^n$,

$$Q_1 = [0,1] \times ... \times [0,1] = \big\{x = (x^1, ..., x^n) \in \mathbb{R}^n : 0 \leqslant x^i \leqslant 1\big\}$$

при любом движении $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *превращается в измеримое множество* $F(Q)$ *с той же мерой:*

$$\mu\big(F(Q_1)\big) = \mu(Q_1) = 1$$

Доказательство. Рассмотрим шар B_R в $\mathbb{R}^n$ с центром в нуле и радиусом R:

$$B_R = \big\{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leqslant R\big\}$$

По теореме 15.1.10, он должен быть измерим в $\mathbb{R}^n$. Из леммы о растяжении 15.1.13 следует также, что мера шара B_R получается из меры шара B_1 с единичным радиусом домножением на R^n:

$$\mu(B_R) = R^n \cdot \mu(B_1) \tag{15.1.47}$$

Зафиксируем какое-нибудь $R > 1$. Тогда если взять двоичную сетку достаточно большого ранга k, а именно, такую, что

$$\frac{1}{2^k} < \frac{R-1}{\sqrt{n}} \tag{15.1.48}$$

то мы получим, что система инцидентных клеток для единичного шара B_1 будет (содержать B_1 и) содержаться в шаре B_R

$$B_1 \subseteq \mathsf{E}_k(B_1) \subseteq B_R \tag{15.1.49}$$

Действительно, если $x \in \mathsf{E}_k(B_1)$ то это означает, что x лежит в некоторой клетке Q_k ранга k, имеющей с B_1 некоторую общую точку a:

$$x \in Q_k, \quad a \in Q_k \cap B_1$$

Поскольку x и a лежат в Q_k, расстояние между ними не может быть больше диаметра множества Q_k, то есть величины $\frac{\sqrt{n}}{2^k}$, поэтому

$$|x - a| \leqslant \frac{\sqrt{n}}{2^k} < (15.1.48) < \frac{R-1}{\sqrt{n}} \cdot \sqrt{n} = R - 1$$

Значит,

$$|x| = |x - a + a| \leqslant |x - a| + |a| \leqslant (R-1) + 1 = R$$

то есть, $x \in B_R$, и мы доказали (15.1.49).

Из (15.1.49) следует:

$$\mu(B_1) \leqslant \mu\big(\mathsf{E}_k(B_1)\big) \leqslant \mu(B_R)$$

$$\Downarrow$$

$$\mu(B_1) \leqslant \frac{N}{2^{nk}} \leqslant R^n \mu(B_1) \tag{15.1.50}$$

где N – количество инцидентных клеток для B_1.

Запомним это, и рассмотрим линейное движение $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ (то есть линейное преобразование пространства $\mathbb{R}^n$, сохраняющее расстояния). Под его действием всякая клетка Q превращается в куб $\varphi(Q)$, ребра которого могут быть не параллельны осям координат. Тем не менее, по теореме 15.1.7 этот повернутый куб будет измеримым множеством.

Поэтому и объединение этих повернутых кубов – множество $\varphi\big(\mathsf{E}_k(B_1)\big)$, которое получается из $\mathsf{E}_k(B_1)$ под действием φ – будет измеримо. Его мера (в силу уже доказанного свойства обобщенной конечной аддитивности 4^0 на с.904) будет равна сумме мер повернутых кубов,

$$\mu\Big(\varphi\big(\mathsf{E}_k(B_1)\big)\Big)=\sum_{Q\subseteq B_1}\mu\big(\varphi(Q)\big)$$

(потому что пересечение любых двух повернутых кубов есть вырожденный параллелепипед, и значит, его мера равна нулю по лемме 15.1.9: $\mu\big(\varphi(Q)\cap\varphi(\widetilde{Q})\big)=0$).

Но, кроме того, любые две клетки Q и $\widetilde{Q}$ получаются друг из друга некоторым сдвигом

$$\widetilde{Q}=Q+a$$

Поэтому под действием линейного преобразования они тоже превращаются в множества, получающиеся друг из друга сдвигом:

$$\varphi(\widetilde{Q})=\varphi(Q)+\varphi(a)$$

По лемме о сдвиге 15.1.12 это означает, что меры любых двух повернутых клеток должны совпадать:

$$\mu\big(\varphi(\widetilde{Q})\big)=\mu\big(\varphi(Q)\big)$$

Значит, мера множества $\varphi\big(\mathsf{E}_k(B_1)\big)$ равна мере какой-нибудь одной повернутой клетки Q, помноженной на количество клеток (равное, по-прежнему, N):

$$\mu\Big(\varphi\big(\mathsf{E}_k(B_1)\big)\Big)=\sum_{Q\subseteq B_1}\mu\big(\varphi(Q)\big)=N\cdot\mu\big(\varphi(Q)\big) \tag{15.1.51}$$

В качестве клетки Q можно взять ту, которая получается из единичного куба Q_1 сжатием на 2^k и последующим поворотом (или, что равносильно, поворотом а потом сжатием). Поэтому по лемме 15.1.13 мера $\varphi(Q)$ должна быть равна мере куба $\varphi(Q_1)$, помноженного на $\frac{1}{2^{nk}}$:

$$\mu\big(\varphi(Q)\big)=\frac{1}{2^{nk}}\cdot\mu\big(\varphi(Q_1)\big)$$

Теперь из 15.1.51 получаем:

$$\mu\Big(\varphi\big(\mathsf{E}_k(B_1)\big)\Big)=\frac{N}{2^{nk}}\cdot\mu\big(\varphi(Q_1)\big) \tag{15.1.52}$$

Заметим теперь, что под действием φ шары B_1 и B_R остаются на месте, поэтому

$$B_1\subseteq\varphi\big(\mathsf{E}_k(B_1)\big)\subseteq B_R$$

Отсюда следует, что

$$\mu(B_1)\leqslant\mu\Big(\varphi\big(\mathsf{E}_k(B_1)\big)\Big)\leqslant\mu(B_R)$$

Подставив формулы (15.1.52) и (15.1.47), получаем

$$\mu(B_1)\leqslant\frac{N}{2^{nk}}\cdot\mu\big(\varphi(Q_1)\big)\leqslant R^n\cdot\mu(B_1) \tag{15.1.53}$$

Сгруппируем теперь (15.1.53) и (15.1.50) в одну систему:

$$\left\{\begin{matrix}\mu(B_1)\leqslant\frac{N}{2^{nk}}\cdot\mu\big(\varphi(Q_1)\big)\leqslant R^n\cdot\mu(B_1)\\ \mu(B_1)\leqslant\frac{N}{2^{nk}}\leqslant R^n\mu(B_1)\end{matrix}\right\}\iff\left\{\begin{matrix}\mu(B_1)\leqslant\frac{N}{2^{nk}}\cdot\mu\big(\varphi(Q_1)\big)\leqslant R^n\cdot\mu(B_1)\\ \frac{1}{\mu(B_1)}\geqslant\frac{2^{nk}}{N}\geqslant\frac{1}{R^n\mu(B_1)}\end{matrix}\right\}\iff$$

$$\iff\left\{\begin{matrix}\mu(B_1)\leqslant\frac{N}{2^{nk}}\cdot\mu\big(\varphi(Q_1)\big)\leqslant R^n\cdot\mu(B_1)\\ \frac{1}{R^n\mu(B_1)}\leqslant\frac{2^{nk}}{N}\leqslant\frac{1}{\mu(B_1)}\end{matrix}\right\}\implies$$

$$\implies\frac{\mu(B_1)}{R^n\mu(B_1)}\leqslant\frac{2^{nk}}{N}\cdot\frac{N}{2^{nk}}\cdot\mu\big(\varphi(Q_1)\big)\leqslant\frac{R^n\cdot\mu(B_1)}{\mu(B_1)}\iff\frac{1}{R^n}\leqslant\mu\big(\varphi(Q_1)\big)\leqslant R^n$$

Это двойное неравенство верно для любого $R>1$, поэтому устремив R к 1, получим

$$\mu\big(\varphi(Q_1)\big)=1$$

$\square$

Лемма 15.1.15. *Если D – измеримое множество в $\mathbb{R}^n$, то при любом линейном движении $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ оно превращается в измеримое множество $\varphi(D)$, причем*

$$\mu\big(\varphi(D)\big) = \mu(D)$$

Доказательство. 1. Заметим сначала, что это верно для клеток вида $Q_k = \left[0; \frac{1}{2^k}\right]^n$, то есть тех которые получаются сжатием единичного куба $Q_1 = [0;1]^n$. В этом случае мы получаем

$$Q_k = \frac{1}{2^k} \cdot Q_1$$

$$\Downarrow$$

$$\varphi(Q_k) = \frac{1}{2^k} \cdot \varphi(Q_1)$$

$$\Downarrow$$

$$\mu\big(\varphi(Q_k)\big) = \mu\Big(\frac{1}{2^k}\cdot\varphi(Q_1)\Big) = (\text{лемма 15.1.13}) = \frac{1}{2^{nk}}\cdot\mu\big(\varphi(Q_1)\big) = (\text{лемма 15.1.14}) = \frac{1}{2^{nk}}\cdot\mu(Q_1) = \mu(Q_k)$$

$$\Downarrow$$

$$\mu\big(\varphi(Q_k)\big) = \mu(Q_k) \qquad (15.1.54)$$

2. После этого можно проверить, что это верно для произвольной клетки Q (любого ранга k): поскольку Q получается из Q_k некоторым сдвигом, имеем:

$$\mu\big(\varphi(Q)\big) = \mu\big(\varphi(Q_k+a)\big) = \mu\big(\varphi(Q_k)+\varphi(a)\big) = (\text{лемма 15.1.12}) = \mu\big(\varphi(Q_k)\big) = (15.1.54) = \mu(Q_k) = \mu(Q)$$

$$\Downarrow$$

$$\mu\big(\varphi(Q)\big) = \mu(Q) \qquad (15.1.55)$$

3. Затем доказываем это для клеточного множества:

$$G = \bigcup_{i=1}^{l} Q_i, \quad \forall i \neq j \quad \mu(Q_i \cap Q_j) = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\varphi(G) = \bigcup_{i=1}^{l} \varphi(Q_i), \quad \forall i \neq j \quad \mu(\varphi(Q_i) \cap \varphi(Q_j)) = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\mu\big(\varphi(G)\big) = \sum_{i=1}^{l} \mu\big(\varphi(Q_i)\big) = (15.1.55) = \sum_{i=1}^{l} \mu(Q_i) = \mu(G)$$

$$\Downarrow$$

$$\mu\big(\varphi(G)\big) = \mu(G) \qquad (15.1.56)$$

4. И, наконец, рассматриваем произвольное измеримое множество D:

$$\mathsf{G}_k(D) \subseteq D \subseteq \mathsf{E}_k(D)$$

$$\Downarrow$$

$$\varphi(\mathsf{G}_k(D)) \subseteq \varphi(D) \subseteq \varphi(\mathsf{E}_k(D))$$

$$\Downarrow$$

$$\underbrace{\mu\big(\mathsf{G}_k(D)\big)}_{\substack{\downarrow \\ \mu_*(D)}} = (15.1.56) = \mu\big(\varphi(\mathsf{G}_k(D))\big) \leqslant \mu\big(\varphi(D)\big) \leqslant \mu\big(\varphi(\mathsf{E}_k(D))\big) = (15.1.56) = \underbrace{\mu\big(\mathsf{E}_k(D)\big)}_{\substack{\downarrow \\ \mu^*(D)}}$$

$$\Downarrow$$

$$\mu_*(D) \leqslant \mu\big(\varphi(D)\big) \leqslant \mu^*(D)$$

$$\Downarrow$$

$$\mu\big(\varphi(D)\big) = \mu(D)$$

$\square$

Теорема 15.1.16. *Если D – измеримое множество в $\mathbb{R}^n$, то при любом движении $\Phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ оно превращается в измеримое множество $\Phi(D)$, причем*

$$\mu\big(\Phi(D)\big) = \mu(D)$$

Доказательство. По теореме 13.1.16, всякое движение $\Phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ представимо в виде композиции сдвига и линейного движения:

$$\Phi(x) = \varphi(x) + a$$

поэтому

$$\mu\big(\Phi(D)\big) = \mu\big(\varphi(D) + a\big) = (\text{лемма } 15.1.12) = \mu\big(\varphi(D)\big) = (\text{лемма } 15.1.15) = \mu\big(D\big)$$

□

(f) Мера Жордана в произвольном евклидовом пространстве

Мы показали, что в каждом пространстве $\mathbb{R}^n$ существует мера Жордана. Это однозначно определяет некую меру на любом евклидовом пространстве X.

Определение меры Жордана в евклидовом пространстве. Напомним, что понятие (инвариантной) меры на евклидовом пространстве было определено на с.891.

Теорема 15.1.17. *На всяком евклидовом пространстве X размерности $\dim X = n$ существует мера μ, совпадающая с мерой Жордана на $\mathbb{R}^n$ при каждом изоморфизме евклидовых пространств $\varphi : X \to \mathbb{R}^n$.*

- Мера μ, обладающая этим свойством называется *мерой Жордана на евклидовом пространстве* X. Множества $D \subseteq X$, на которых определена эта мера (то есть такие, которые при каждом изморфизме евклидовых пространств $\varphi : X \to \mathbb{R}^n$ превращаются в измеримые по Жордану множества $\varphi(D)$ в $\mathbb{R}^n$) называются измеримыми по Жордану в X.

Доказательство. По теореме о представлении 13.1.15, изоморфизм $\varphi : X \to \mathbb{R}^n$ существует. Рассмотрим меру Жордана μ на $\mathbb{R}^n$. Назовем множество D в X измеримым, если его образ $\varphi(D)$ измерим по Жордану в $\mathbb{R}^n$, и положим

$$\mu'(D) = \mu(\varphi(D)). \tag{15.1.57}$$

Мы получим некую меру μ' в X, продолжающую школьный объем. Если теперь $\psi : X \to \mathbb{R}^n$ – какой-нибудь другой изоморфизм евклидовых пространств, то композиция $\psi \circ \varphi^{-1} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ будет изоморфизмом евклидовых пространств, и значит, движением в $\mathbb{R}^n$. Поэтому для данного множества $D \subseteq X$

1) множество $\varphi(D)$ измеримо в $\mathbb{R}^n$ тогда и только тогда, когда множество $\psi(D) = (\psi \circ \varphi^{-1})\big(\varphi(D)\big)$ измеримо, и
2) меры Жордана множеств $\varphi(D)$ и $\psi(D)$ совпадают:

$$\mu'\big(\psi(D)\big) = \mu'\Big((\psi \circ \varphi^{-1})\big(\varphi(D)\big)\Big) = \mu'\big(\varphi(D)\big).$$

Поэтому определение меры μ' в X формулой (15.1.57) не зависит от того, какой изморофизм выбираешь в качестве φ. □

Измеримость многогранников: мера, как продолжение объема.

Теорема 15.1.18. *Всякий многогранник в евклидовом пространстве X является измеримым по Жордану множеством в X.*

Доказательство. Мы можем считать, что $X = \mathbb{R}^n$. По теореме 15.1.7 все параллелепипеды измеримы. Поэтому по аксиоме меры M0, уже доказанной на с.903, множества, получаемые из параллелепипедов с помощью операций объединения, пересечения и разности, тоже измеримы. А это как раз и есть многогранники. □

Из теоремы 15.1.18 можно сделать два важных вывода. Во-первых, независимо от недоказанной нами теремы 15.1.2, мы получаем следующее отверждение:

Теорема 15.1.19. *В каждом евклидовом пространстве X существует школьный объем (или площадь, если $\dim X = 2$).*

Доказательство. Потому что в евклидовых пространствах существует мера Жордана, которая определена (помимо других множеств) на многогранниках и удовлетворяет тем же аксиомам, что и объем. □

А, во вторых, если все же теорему 15.1.2 использовать, то будет справедлива

Теорема 15.1.20. *На классе многогранников мера Жордана совпадает со школьным объемом*[7]*:*

$$\mu(D) = V(D)$$

Доказательство. По теореме 15.1.18 мера Жордана μ определена на многогранниках. Вдобавок она удовлетворяет уже доказанным аксиомам M1, M2, M3 на с.891, то есть аксиомам объема V1, V2, V3 на с.886. Поскольку по теореме 15.1.2 эти аксиомы определяют объем однозначно, мы получаем, что $\mu = V$ на классе многогранников. □

Искажение меры при линейном преобразовании.

Теорема 15.1.21. *Пусть $\varPhi : X \to X$ – линейное преобразование евклидова пространства X. Тогда всякое измеримое множество D в X превращается под действием $\varPhi$ в измеримое множество $\varPhi(D)$, мера которого отличается от меры D множителем $|\det \varPhi|$:*

$$\mu\big(\varPhi(D)\big) = |\det \varPhi| \cdot \mu(D) \tag{15.1.58}$$

Доказательство. Мы можем считать, что $X = \mathbb{R}^n$.

1. Сначала мы докажем формулу (15.1.58) для случая, когда $D = P(e_1, ..., e_n)$ – единичный гиперкуб, то есть параллелепипед, натянутый на стандартный ортонормированный базис $e_1, ..., e_n$ в $\mathbb{R}^n$. Под действием преобразования $\varPhi$ он превращается в параллелепипед $P(a_1, ..., a_n)$, где

$$a_i = \varPhi(e_i), \qquad i = 1, ..., n.$$

Само преобразование $\varPhi$ действует как матрица

$$\varPhi(x) = \begin{pmatrix} \langle a_1, e_1\rangle & ... & \langle a_n, e_1\rangle \\ ... & ... & ... \\ \langle a_1, e_n\rangle & ... & \langle a_n, e_n\rangle \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix}$$

Теперь заметим, что для меры Жордана μ, как и для школьного объема V, определенного выше аксиомами V1-V3 на с.886, справедлива формула (15.1.17). Это можно доказать двумя способами. Первый – заметить, что по теореме 15.1.20 на многогранниках мера Жордана μ совпадает с объемом V. Но это рассуждение можно считать не удовлетворительным, потому что теорема 15.1.20, на которую мы здесь опираемся, доказывается с использовнием теоремы 15.1.2, которую мы не доказали (а только дали ссылку на доказательство). Поэтому формально правильнее поступить по-другому: нужно заметить, что для меры Жордана аксиомы M0-M3 на с. 891 уже доказаны. Поэтому меру Жордана можно считать отображением $D \mapsto \mu(D)$, удовлетворяющим аксиомам школьного объема V1-V3 на с.886. Как следствие, для меры Жордана μ должно быть верно все, что мы успели вывести из аксиом V1-V3 для отображения V, и, в частности, формула (15.1.17). Применяя ее, мы получим

$$\mu(\varPhi(D)) = \mu(P(a_1, ..., a_n)) = V(P(a_1, ..., a_n)) = (15.1.17) = \sqrt{\mathsf{Gram}(a_1, ..., a_n)} =$$
$$= \left| \det \begin{pmatrix} \langle a_1, e_1\rangle & ... & \langle a_n, e_1\rangle \\ ... & ... & ... \\ \langle a_1, e_n\rangle & ... & \langle a_n, e_n\rangle \end{pmatrix} \right| = |\det \varPhi| = |\det \varPhi| \cdot \mu(D)$$

2. Далее рассмотрим случай, когда $D = P(a_1, ..., a_n)$ – параллелепипед, натянутый на произвольные векторы $a_1, ..., a_n \in \mathbb{R}^n$. Если дан оператор $\varPhi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, то под его действием $D = P(a_1, ..., a_n)$ превращается в пареллелепипед $\varPhi(D) = \varPhi(P(a_1, ..., a_n)) = P(b_1, ..., b_n)$, где

$$b_i = \varPhi(a_i), \qquad i = 1, ..., n.$$

[7]Школьный объем V описывался аксиомами V1-V3 на с.886.

С другой стороны, мы можем рассмотреть оператор $\varPsi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, определенный равенством

$$a_i = \varPsi(e_i), \qquad i = 1, ..., n,$$

где $e_1, ..., e_n$ – стандартный ортонормированный базис в $\mathbb{R}^n$, и для него D будет образом единичного гиперкуба $D = \varPsi(P(e_1, ..., e_n))$. Мы получим:

$$\mu(P(b_1, ..., b_n)) = \mu\big((\varPhi \circ \varPsi)(P(e_1, ..., e_n))\big) = \left(\begin{smallmatrix}\text{применяем формулу (15.1.58),}\\ \text{уже доказанную для } D = P(e_1, ..., e_n)\end{smallmatrix}\right) =$$
$$= |\det(\varPhi \circ \varPsi)| \cdot \mu(P(e_1, ..., e_n)) = |\det \varPhi| \cdot |\det \varPsi| \cdot \mu(P(e_1, ..., e_n)) =$$
$$= \left(\begin{smallmatrix}\text{снова применяем формулу (15.1.58),}\\ \text{уже доказанную для } D = P(e_1, ..., e_n)\end{smallmatrix}\right) = |\det \varPhi| \cdot \mu\big(P(a_1, ..., a_n)\big)$$

3. Теперь можно перейти к произвольному измеримому множеству D. Рассмотрим преобразование $\varPhi\big(G_k(D)\big)$ системы внутренних клеток множества D. Ясно, что $\varPhi\big(G_k(D)\big)$ получено преобразованием каждой клетки входящей в $G_k(D)$:

$$\varPhi\big(G_k(D)\big) = \bigcup_{Q \subseteq G_k(D)} \varPhi(Q)$$

Каждая клетка Q является параллелепипедом, поэтому для нее формула (15.1.58) уже доказана:

$$\mu\big(\varPhi(Q)\big) = |\det \varPhi| \cdot \mu(Q) \tag{15.1.59}$$

С другой стороны, пересечение $Q_1 \cap Q_2$ любых двух различных клеток будет либо пустым множеством, либо параллелепипедом, одно или несколько ребер которого вырождены (то есть, равны нулю), поэтому

$$\mu\big(\varPhi(Q_1) \cap \varPhi(Q_2)\big) = \mu\big(\varPhi(Q_1 \cap Q_2)\big) = \left(\begin{smallmatrix}\text{применяем формулу (15.1.58),}\\ \text{уже доказанную}\\ \text{для параллелепипедов}\end{smallmatrix}\right) = |\det \varPhi| \cdot \mu\big(Q_1 \cap Q_2\big) = 0$$

Таким образом, множество $\varPhi\big(G_k(D)\big)$ является объединением конечного набора параллелепипедов вида $\varPhi(Q)$, из которых любые два пересекаясь дают множество нулевой меры. Значит, по свойству обобщенной конечной аддитивности 4^0 на с.904, $\varPhi\big(G_k(D)\big)$ – измеримое множество, и его мера равна сумме мер параллелепипедов $\varPhi(Q)$:

$$\mu\Big(\varPhi\big(G_k(D)\big)\Big) = \sum_{Q \subseteq G_k(D)} \mu\big(\varPhi(Q)\big) = (15.1.59) = \sum_{Q \subseteq G_k(D)} |\det \varPhi| \cdot \mu(Q) =$$
$$= |\det \varPhi| \cdot \sum_{Q \subseteq G_k(D)} \mu(Q) = |\det \varPhi| \cdot \mu\big(G_k(D)\big) \tag{15.1.60}$$

Получаем цепочку:

$$G_k(D) \subseteq D$$
$$\Downarrow$$
$$\varPhi\big(G_k(D)\big) \subseteq \varPhi(D)$$
$$\Downarrow$$
$\big($фиксируем k, берем новую двоичную сетку с каким-нибудь рангом i и переходим к системам внутренних клеток ранга $i\big)$
$$\Downarrow$$
$$G_i\Big[\varPhi\big(G_k(D)\big)\Big] \subseteq G_i\big[\varPhi(D)\big]$$
$$\Downarrow$$
$$\underbrace{\mu\Big(\varPhi\big(G_k(D)\big)\Big)}_{\substack{\| \\ (15.1.60) \\ \| \\ |\det \varPhi| \cdot \mu(G_k(D))}} \underset{\infty \leftarrow i}{\longleftarrow} \underbrace{\mu_\square\Big\{G_i\big[\underbrace{\varPhi\big(G_k(D)\big)}_{\substack{\text{измеримое}\\ \text{множество}}}\big]\Big\}}_{\text{мера его внутренних клеток}} \leqslant \mu_\square\left\{G_i\big[\varPhi(D)\big]\right\} \underset{i \to \infty}{\longrightarrow} \mu_*(\varPhi(D))$$
$$\Downarrow$$

$$|\det\Phi|\cdot\mu\big(G_k(D)\big)\leqslant\mu_*(\Phi(D))$$

Это верно для всякого k, значит

$$|\det\Phi|\cdot\mu(D)=\lim_{k\to\infty}|\det\Phi|\cdot\mu\big(G_k(D)\big)\leqslant\mu_*(\Phi(D))$$

Точно так же, рассматривая систему преобразованных инцидентных клеток $\Phi\big(G_k(D)\big)$, можно убедиться, что

$$\mu^*(\Phi(D))\leqslant|\det\Phi|\cdot\mu(D)$$

В результате у нас получается:

$$|\det\Phi|\cdot\mu(D)\leqslant\mu_*(\Phi(D))\leqslant\mu^*(\Phi(D))\leqslant|\det\Phi|\cdot\mu(D)\quad\Longrightarrow\quad\mu_*(\Phi(D))=\mu^*(\Phi(D))=|\det\Phi|\cdot\mu(D)$$

То есть, $\Phi(D)$ измеримо и его мера равна $|\det\Phi|\cdot\mu(D)$. □

Инвариантность меры Жордана при переходе к внутренности и замыканию. Из аксиомы аддитивности и критерия измеримости 15.1.6 следует еще одно интересное свойство меры Жордана:

Теорема 15.1.22. *Если D – измеримое по Жордану множество в евклидовом пространстве X, то его внутренность $\operatorname{Int}D$ и замыкание $\overline{D}$ тоже измеримы, причем их мера совпадает с мерой D:*

$$\mu\big(\operatorname{Int}D\big)=\mu\big(D\big)=\mu\big(\overline{D}\big)\tag{15.1.61}$$

Доказательство. Множества $\operatorname{Int}D$ и $\overline{D}$ измеримы, потому что их границы содержатся в границе множества D, и поэтому должны иметь нулевую меру:

$$\operatorname{Int}D\subseteq D\quad\Longrightarrow\quad\overline{\operatorname{Int}D}\subseteq\overline{D}\quad\Longrightarrow\quad\underbrace{\overline{\operatorname{Int}D}\setminus\operatorname{Int}D}_{\substack{\parallel\\ \overline{\operatorname{Int}D}\setminus\operatorname{Int}(\operatorname{Int}D)\\ \parallel\\ \operatorname{Fr}(\operatorname{Int}D)}}\subseteq\underbrace{\overline{D}\setminus\operatorname{Int}D}_{\substack{\parallel\\ \operatorname{Fr}D}}\quad\Longrightarrow\quad\operatorname{Fr}(\operatorname{Int}D)\subseteq\operatorname{Fr}D\quad\Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow\quad 0\leqslant\mu\big(\operatorname{Fr}(\operatorname{Int}D)\big)\leqslant\mu(\operatorname{Fr}D)=0\quad\Longrightarrow\quad\mu\big(\operatorname{Fr}(\operatorname{Int}D)\big)=0\quad\Longrightarrow\quad\operatorname{Int}D\text{ измеримо}$$

$$\overline{D}\supseteq D\quad\Longrightarrow\quad\operatorname{Int}\overline{D}\supseteq\operatorname{Int}D\quad\Longrightarrow\quad\underbrace{\overline{D}\setminus\operatorname{Int}\overline{D}}_{\substack{\parallel\\ \overline{\overline{D}}\setminus\operatorname{Int}\overline{D}\\ \parallel\\ \operatorname{Fr}(\overline{D})}}\subseteq\underbrace{\overline{D}\setminus\operatorname{Int}D}_{\substack{\parallel\\ \operatorname{Fr}D}}\quad\Longrightarrow\quad\operatorname{Fr}(\overline{D})\subseteq\operatorname{Fr}(D)\quad\Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow\quad 0\leqslant\mu(\operatorname{Fr}(\overline{D}))\leqslant\mu\big(\operatorname{Fr}(D)\big)=0\quad\Longrightarrow\quad\mu(\operatorname{Fr}(\overline{D}))=0\quad\Longrightarrow\quad\overline{D}\text{ измеримо}$$

Теперь докажем (15.1.61):

$$D\setminus\operatorname{Int}D\subseteq\overline{D}\setminus\operatorname{Int}D=\operatorname{Fr}D\quad\Longrightarrow\quad 0\leqslant\mu\big(D\setminus\operatorname{Int}D\big)\leqslant\mu\big(\operatorname{Fr}D\big)=0\quad\Longrightarrow\quad\mu\big(D\setminus\operatorname{Int}D\big)=0\quad\Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow\quad\mu(D)=\underbrace{\mu\big(D\setminus\operatorname{Int}D\big)}_{\substack{\parallel\\0}}+\mu(\operatorname{Int}D)=\mu(\operatorname{Int}D)$$

$$\overline{D}\setminus D\subseteq D\setminus\operatorname{Int}D=\operatorname{Fr}D\quad\Longrightarrow\quad 0\leqslant\mu\big(\overline{D}\setminus D\big)\leqslant\mu(\operatorname{Fr}D)=0\quad\Longrightarrow\quad\mu\big(\overline{D}\setminus D\big)=0\quad\Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow\quad\mu(\overline{D})=\underbrace{\mu\big(\overline{D}\setminus D\big)}_{\substack{\parallel\\0}}+\mu(D)=\mu(D)$$

□

Компакты нулевой меры и теорема об исчерпывании.

- *Компактом нулевой меры* мы, понятное дело, называем произвольный компакт K в евклидовом пространстве X, имеющий нулевую меру Жордана:

$$\mu(K)=0$$

Из свойств 1°-3° на с.900 следуют

Свойства компактов нулевой меры:

1^0 *Объединение любого конечного набора компактов нулевой меры (а также пересечение любого вообще набора, необязательно конечного, таких компактов) всегда является компактом нулевой меры.*

2^0 *Всякий компакт нулевой меры имеет пустую внутренность:*

$$\mathsf{Int}(K) = \varnothing,$$

Теорема 15.1.23 (об исчерпывании компакта нулевой меры)**.** *Если компакт $K \subset \mathbb{R}^n$ представлен как объединение последовательности множеств M_i нулевой меры,*

$$K = \bigcup_{i=1}^{\infty} M_i, \qquad \forall i \quad \mu(M_i) = 0,$$

то он также имеет нулевую меру:

$$\mu(K) = 0$$

Доказательство. Пусть $K = \bigcup_{i=1}^{\infty} M_i$, причем K – компакт, а M_i – множества нулевой меры. Возьмем $\varepsilon > 0$ и для каждого M_i выберем с помощью свойства 4° на с.900 открытое множество U_i такое, что

$$M_i \subseteq U_i, \qquad \mu(U_i) < \frac{\varepsilon}{2^i}.$$

Тогда

$$K = \bigcup_{i=1}^{\infty} M_i \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i.$$

то есть система U_i есть открытое покрытие компакта K. Значит, из нее можно выбрать конечное подпокрытие $U_1, ..., U_N$. Теперь мы получаем:

$$K \subseteq \bigcup_{i=1}^{N} U_i \quad \Longrightarrow \quad \mu^*(K) \leqslant \sum_{i=1}^{N} \mu^*(U_i) < \sum_{i=1}^{N} \frac{\varepsilon}{2^i} = \varepsilon \cdot \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2^i} < \varepsilon \cdot \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} = \varepsilon \cdot 1 = \varepsilon$$

Мы получили, что внешняя мера K меньше какого хочешь положительного ε. Значит, $\mu^*(K) = 0$. □

Теорема 15.1.24 (о стягивании к компакту нулевой меры)**.** *Если M_i – сужающаяся последовательность измеримых по Жордану компактов,*

$$M_1 \supseteq M_2 \supseteq ... \supseteq M_i \supseteq M_{i+1} \supseteq ...$$

пересечение которой имеет нулевую Жорданову меру

$$\mu\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} M_i\right) = 0$$

то меры M_i стремятся к нулю:

$$\mu(M_i) \underset{i\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

Доказательство. Обозначим $K = \bigcap_{i=1}^{\infty} M_i$, зафиксируем $\varepsilon > 0$. Поскольку мера K равна нулю, найдется номер $k \in \mathbb{N}$ такой что

$$\mu\big(\mathsf{E}_k(K)\big) < \mu(K) + \varepsilon = \varepsilon$$

Запомним это k и заметим, что из формулы (15.1.24) следует, что множество $\mathsf{Int}\left(\mathsf{E}_k(K)\right)$ является окрестностью для компакта K:

$$K \subseteq \mathsf{Int}\left(\mathsf{E}_k(K)\right)$$

Поэтому по теореме 13.3.9 о стягивающихся компактах, почти все компакты M_i содержатся в $\mathsf{Int}\left(\mathsf{E}_k(K)\right)$:

$$\exists i_0 \in \mathbb{N} \qquad \forall i \geqslant i_0 \qquad M_i \subseteq \mathsf{Int}\left(\mathsf{E}_k(K)\right)$$

Отсюда

$$\forall i \geqslant i_0 \qquad \mu(M_i) \leqslant \mu\Big(\mathsf{Int}\left(\mathsf{E}_k(K)\right)\Big) = \mu\big(\mathsf{E}_k(K)\big) < \varepsilon$$

Мы получили, что для любого $\varepsilon > 0$ почти все числа $\mu(M_i)$ меньше ε. Значит, $\mu(M_i) \underset{i\to\infty}{\longrightarrow} 0$. □

Открытые множества полной меры и теорема о стягивании.

- Говорят, что множество U *имеет полную меру* в множестве D, или, что U является *множеством полной меры* в D, если U содержится в D, и их разность $D \setminus U$ имеет нулевую меру Жордана:
$$U \subseteq D, \quad \mu(D \setminus U) = 0$$

Свойства открытых множеств полной меры:

1^0. *Пересечение любого конечного набора открытых множеств полной меры в данном множестве D (а также объединение любого вообще набора, необязательно конечного, таких множеств) всегда является открытым множеством полной меры в D.*

2^0. *Если U – открытое множество полной меры в множестве D, то для любого открытого множества $V \subseteq D$ множество $U \cap V$ будет открытым множеством полной меры в V.*

3^0. *Если U – открытое множество полной меры в непустом открытом множестве V, то U также непусто.*

4^0. *Замыкание $\overline{U}$ всякого открытого множества U полной меры в множестве D, совпадает с ядром $\mathsf{Nuc}(D)$ множества D:*
$$\overline{U} = \mathsf{Nuc}(D) = \overline{\mathsf{Int}(D)}, \tag{15.1.62}$$

Доказательство. 1. Свойство 1^0 следует из свойств 1°-4° на с.900.

2. Пусть U – открытое множество полной меры в множестве D, и V – еще одно открытое множество в D. Обозначим $T = D \setminus U$. Тогда
$$V \setminus (U \cap V) = V \setminus U = (D \setminus U) \cap V = T \cap V$$
и отсюда
$$\mu\big(V \setminus (U \cap V)\big) = \mu(T \cap V) \leqslant \mu(T) = 0$$

3. Если U пусто, а V непусто, то мы получаем
$$\mu^*(V \setminus U) = \mu^*(V \setminus \varnothing) = \mu^*(V) \neq 0,$$
то есть U не может быть множеством полной меры в V.

4. Ясно, что U содержится во внутренности D, $U \subseteq \mathsf{Int}(D)$, поэтому замыкание U должно содержаться в ядре D:
$$\overline{U} \subseteq \overline{\mathsf{Int}(D)} = \mathsf{Nuc}(D)$$
Нам, таким образом, нужно доказать обратное включение:
$$\overline{U} \supseteq \overline{\mathsf{Int}(D)} = \mathsf{Nuc}(D)$$
Пусть $x \in \overline{\mathsf{Int}(D)}$ и W – какая-нибудь окрестность точки x. Множество
$$V = W \cap \mathsf{Int}(D)$$
должно быть открыто (как пересечение двух открытых множеств), значит, по свойству 2^0, $U \cap V$ – открытое множество полной меры в V. С другой стороны, V непусто (потому что x – точка прикосновения для $\mathsf{Int}(D)$), поэтому по свойству 3^0, $U \cap V = U \cap W \cap \mathsf{Int}(D)$ непусто. Значит, непусто и его надмножество $U \cap W$. Мы получили, что какую ни возьми окрестность W точки x множество $U \cap W$ непусто. Значит, x – точка прикосновения для U, то есть $x \in \overline{U}$.

□

Наиболее интересен случай, когда D – компакт, а U – открытое множество в евклидовом пространстве X. Тогда, естественно, U называется *открытым множеством полной меры* в компакте D.

Теорема 15.1.25 (о стягивании к открытому множеству полной меры)**.** *Если V_i – последовательность множеств полной меры в компакте L, имеющая в качестве пересечения открытое множество U в евклидовом пространстве X,*
$$U = \bigcap_{i=1}^{\infty} V_i, \qquad \forall i \quad \mu(L \setminus V_i) = 0,$$
то U также имеет полную меру в L:
$$\mu(L \setminus U) = 0$$

Доказательство. Обозначим $K = L \setminus U$ и $M_i = L \setminus V_i$. Тогда K будет компактом (как разность компакта L и открытого множества U), который исчерпывается последовательностью M_i множеств нулевой меры:

$$\mu(M_i) = \mu(L \setminus V_i) = 0, \qquad \bigcup_{i=1}^{\infty} M_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} (L \setminus V_i) = L \setminus \Big(\bigcap_{i=1}^{\infty} V_i \Big) = L \setminus U = K$$

Значит, по теореме 15.1.23, K также имеет нулевую меру:

$$0 = \mu(K) = \mu(L \setminus U)$$

то есть U – множество полной меры в L. □

Теорема 15.1.26 (об исчерпывании открытого множества полной меры)**.** *Если U – открытое множество полной меры в измеримом компакте L, и V_k – расширяющаяся последовательность измеримых по Жордану открытых множеств,*

$$V_1 \subseteq V_2 \subseteq ... \subseteq V_k \subseteq V_{k+1} \subseteq ...$$

исчерпывающая U

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} V_k = U$$

то меры множеств $L \setminus V_k$ стремятся к нулю:

$$\mu\big(L \setminus V_k\big) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

Доказательство. Обозначим $M_k = L \setminus V_k$. Тогда M_k образуют сужающаюся последовательность измеримых по Жордану компактов, пересечение которой

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} M_k = \bigcap_{k=1}^{\infty} L \setminus D_k = L \setminus \Big(\bigcap_{k=1}^{\infty} D_k \Big) = L \setminus U$$

имеет нулевую меру. Поэтому по теореме 15.1.24, меры этих множеств должны стремиться к нулю. □

§ 2 Кратные интегралы

(a) Определение и свойства кратного интеграла

Измеримое разбиение измеримого множества. Пусть D – измеримое (по Жордану) множество в евклидовом пространстве X. Система его подмножеств $\tau = \{D_1, ..., D_l\}$ называется *измеримым разбиением* множества D, если

1) все множества $D_1, ..., D_l$ измеримы,
2) объединение множеств $D_1, ..., D_l$ совпадает с D

$$\bigcup_{i=1}^{l} D_i = D,$$

3) пересечение различных множеств из системы $D_1, ..., D_l$ имеет нулевую меру:

$$\forall i \ne j \qquad \mu\big(D_i \cap D_j\big) = 0.$$

Мы будем обозначать это так:

$$D = \bigsqcup_{i=1}^{l} D_i. \tag{15.2.63}$$

Разбиение $\tau = \{D_1, ..., D_l\}$, кроме того, называется *компактным*, если все множества $D_1, ..., D_l$ являются компактами (ясно, что в этом случае D тоже должно быть компактом).

Последовательности измельчающихся разбиений. *Диаметром разбиения* $\tau = \{D_1, ..., D_l\}$ множества D называется число

$$\mathsf{diam}(\tau) = \max_{i=1,...,l} \mathsf{diam}(D_i)$$

Теорема 15.2.1. *Всякое измеримое компактное множество D в евклидовом пространстве X обладает измеримыми компактными разбиениями сколь угодно малого диаметра: для любого $\varepsilon > 0$ найдется измеримое компактное разбиение $\tau = \{D_1, ..., D_l\}$ множества D с диаметром*

$$\mathsf{diam}(\tau) < \varepsilon$$

Доказательство. Рассмотрим двоичную сетку ранга $k > \log_2 \frac{\sqrt{n}}{\varepsilon}$. Каждая ее клетка Q имеет диаметр меньший ε:

$$\mathsf{diam}\, Q = \frac{\sqrt{n}}{2^k} < \varepsilon$$

Если занумеровать все клетки инцидентные множеству D, то получим покрытие $Q_1, ..., Q_l$ множества D:

$$D \subseteq Q_1 \cup ... \cup Q_l$$

Поэтому множества

$$D_1 = Q_1 \cap D \quad , ..., \quad D_l = Q_l \cap D$$

образуют разбиение множества D с диаметром, меньшим ε. Это разбиение будет измеримым, потому что каждое множество $Q_i \cap D$ измеримо (как пересечение двух измеримых множеств Q_i и D). $\square$

Следствие 15.2.2. *Всякое измеримое множество D в евклидовом пространстве X обладает измельчающейся последовательностью разбиений $\tau^{(k)}$:*

$$\mathsf{diam}(\tau^{(k)}) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

Разбиения, подчиненные покрытию. Система открытых множеств $U_1, ..., U_l$ называется *открытым покрытием* множества D, если D содержится в объединении множеств $U_1, ..., U_l$:

$$D \subseteq \bigcup_{i=1}^{l} U_i$$

Говорят, что разбиение $D_1, ..., D_l$ множества D *подчинено покрытию* $U_1, ..., U_l$, если

$$\forall i \qquad D_i \subseteq U_i$$

Теорема 15.2.3. *Для всякого открытого покрытия $U_1, ..., U_l$ измеримого компакта D найдется подчиненное ему измеримое компактное разбиение $D_1, ..., D_l$ компакта D.*

Доказательство. 1. Рассмотрим вначале случай $l = 2$. Пусть $\{U_1, U_2\}$ – открытое покрытие измеримого компакта D. Обозначив $K = D \setminus U_2$, мы получим компакт, содержащийся в U_1,

$$K \subseteq U_1$$

(потому что из $D \subseteq U_1 \cup U_2$ следует $K = D \setminus U_2 \subseteq U_1$). Поэтому по следствию 13.3.7, некоторая δ-окрестность компакта K содержится в U_1:

$$B_\delta(K) \subseteq U_1$$

Снова воспользовавшись следствием 13.3.7, можно выбрать ε-окрестность компакта $B_\delta(K)$ содержащуюся в U_1:

$$K \subseteq B_\delta(K) \subseteq B_\varepsilon\big(B_\delta(K)\big) \subseteq U_1$$

Рассмотрим двоичную сетку ранга $k > \log_2 \frac{\sqrt{n}}{\varepsilon}$ и положим

$$D_1 = \mathsf{E}_k\left(B_\delta(K)\right) \cap D, \quad D_2 = \overline{D \setminus D_1}$$

Ясно, что $\{D_1, D_2\}$ будет измеримым разбиением множества D. Покажем, что оно подчинено покрытию $\{U_1, U_2\}$:

$$D_1 \subseteq U_1, \qquad D_2 \subseteq U_2$$

Действительно, с одной стороны,

$$x \in D_1 \subseteq \mathsf{E}_k\left(B_\delta(K)\right) \quad \Longrightarrow \quad \rho\big(x, B_\delta(K)\big) < \frac{\sqrt{n}}{2^k} < \varepsilon \quad \Longrightarrow \quad x \in B_\varepsilon\big(x, B_\delta(K)\big) \subseteq U_1 \quad \Longrightarrow \quad x \in U_1$$

то есть $D_1 \subseteq U_1$, а, с другой стороны, из условия $D \setminus K \subseteq U_2$ следует

$$D \setminus U_\delta(K) \subseteq U_2 \tag{15.2.64}$$

откуда

$$U_\delta(K) \subseteq \mathsf{E}_k\left(B_\delta(K)\right) \quad \Longrightarrow \quad D \setminus D_1 = D \setminus \mathsf{E}_k\left(B_\delta(K)\right) \subseteq \underbrace{D \setminus U_\delta(K)}_{\substack{\uparrow \\ \text{компакт}}} \quad \Longrightarrow \quad \underbrace{\overline{D \setminus D_1}}_{\substack{\| \\ D_2}} \subseteq D \setminus U_\delta(K) \underset{\substack{\uparrow \\ (15.2.64)}}{\subseteq} U_2$$

и значит, $D_2 \subseteq U_2$.

2. Теперь предположим, что мы доказали нашу теорему для случая l элементов покрытия, и покажем, что тогда она должна быть верна для $l+1$ элементов: $U_1, ..., U_l, U_{l+1}$. Обозначим

$$V = U_1 \cup ... \cup U_l$$

Тогда множества V и U_{l+1} будут открытым покрытием для D, поэтому, в силу уже доказанного, найдутся два компакта T и D_{l+1}, образующие измеримое разбиение множества D, подчиненное этому покрытию:

$$D = T \cup D_{l+1}, \qquad \mu(T \cap D_{l+1}) = 0, \qquad T \subseteq V, \qquad D_{l+1} \subseteq U_{l+1}$$

Теперь надо рассмотреть компакт T. Для него множества $U_1, ..., U_l$ будут открытым покрытием, и, поскольку их имеется l штук, по предположению индукции, найдется подчиненное ему измеримое разбиение $D_1, ..., D_l$:

$$T = D_1 \cup ... \cup D_l, \quad D_i \subseteq U_i$$

Вместе множества $D_1, ..., D_l, D_{l+1}$ будут измеримым покрытием для D, подчиненным разбиению $U_1, ..., U_l, U_{l+1}$. □

Определение кратного интеграла. Пусть нам дано произвольное измеримое множество D в евклидовом пространстве X и функция $f : D \to \mathbb{R}$. Кратный интеграл функции f по множеству D

$$\int_D f(x)\, \mathsf{d}\, x$$

определяется так же, как и определенный интеграл от функции на отрезке $[a,b]$ (см. главу 8), но разница заключается в том, что вместо разбиений отрезка на мелкие отрезки мы выбираем измеримые разбиения измеримого множества D:

- Число I называется *кратным интегралом* функции f на измеримом множестве $D \subseteq X$, и обозначается
$$I = \int_D f(x)\ \mathsf{d}\, x,$$
если для всякой измельчающейся последовательности измеримых разбиений $\tau^m = \left\{D_1^m, ..., D_{k^m}^m\right\}$ множества D
$$\Delta\big(\tau^m\big) \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} 0$$
и любой системы выделенных точек
$$\xi_i^m \in D_i^m$$
последовательность чисел
$$\sum_{i=1}^{k^m} f(\xi_i^m) \cdot \mu(D_i)$$
(называемых *интегральными суммами* функции f на множестве D) стремится к числу I:
$$\sum_{i=1}^{k^m} f(\xi_i^m) \cdot \mu(D_i) \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} I$$
Если такое число I существует, то функция f называется *интегрируемой* (по Риману) на множестве D.

◇ **15.2.1** (интеграл от константы). Как в примере 7.2.5 нетрудно проверить, что интеграл от постоянной функции $f(x) = C$ по измеримому по Жордану множеству D равен произведению C на меру D:

$$\int_D C \, \mathsf{d}\, x = C \cdot \mu(D) \qquad (15.2.65)$$

В частности, интеграл от тождественной единицы равен мере D:

$$\int_D 1 \, \mathsf{d}\, x = \mu(D) \qquad (15.2.66)$$

Интегрируемость непрерывной функции на измеримом компакте.

Теорема 15.2.4. *Если функция f непрерывна на измеримом по Жордану компакте D в евклидовом пространстве X, то f интегрируема на D.*

Этот факт доказывается так же как аналогичное утверждение в одномерном случае (теорема 7.2.4). То есть сначала вводится понятия верхней и нижней сумм Дарбу.

- Пусть функция f ограничена на измеримом по Жордану множестве D в евклидовом пространстве X, и пусть $\tau = \{D_1, ..., D_k\}$ – произвольное разбиение D. Величины

  $$s_\tau = \sum_{i=1}^{k} \inf_{x \in D_i} f(x) \cdot \mu(D_i), \quad S_\tau = \sum_{i=1}^{k} \sup_{x \in D_i} f(x) \cdot \mu(D_i)$$

  называются соответственно *нижней* и *верхней суммами Дарбу* функции f (на множестве D при разбиении τ).

Далее доказывается теорема, аналогичная 7.2.1:

Теорема 15.2.5. *Функция f, ограниченная на измеримом по Жордану множестве D в евклидовом пространстве X, тогда и только тогда интегрируема на D, когда для всякой измельчающейся последовательности $\tau^{(k)}$ разбиений D*

$$\Delta\tau^{(k)} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

соответствующие верхняя и нижняя суммы Дарбу стремятся друг к другу:

$$S_{\tau^{(k)}} - s_{\tau^{(k)}} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

После этого следует уже доказательство самой теоремы 15.2.4, которое мы предоставляем проделать читателю по аналогии с теоремой 7.2.4.

Свойства кратного интеграла. Как многомерное обобщение определенного интеграла, кратный интеграл обладает многими свойствами определенного, отмечавшимися нами в параграфе (c). Ниже при доказательстве теоремы о замене переменных в кратном интеграле 15.4.1 нам понадобятся следующие

Свойства кратного интеграла

1^0. **Линейность:** *если функции f и g интегрируемы на измеримом по Жордану множестве D то для любых чисел $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ функция $\alpha \cdot f(x) + \beta \cdot g(x)$ тоже интегрируема на D, причем*

$$\int_D \{\alpha \cdot f(x) + \beta \cdot g(x)\} \, \mathsf{d}\, x = \alpha \cdot \int_D f(x) \, \mathsf{d}\, x + \beta \cdot \int_D g(x) \, \mathsf{d}\, x \qquad (15.2.67)$$

2^0. **Аддитивность:** *если функция f ограничена и интегрируема на измеримом по Жордану множестве D, то f интегрируема на всяком измеримом подмножестве E в D (а также на $D \setminus E$), и при этом*

$$\int_E f(x) \, \mathsf{d}\, x + \int_{D\setminus E} f(x) \, \mathsf{d}\, x = \int_D f(x) \, \mathsf{d}\, x \qquad (15.2.68)$$

3^0. **Монотонность:** *если функции f и g интегрируемы на измеримом по Жордану множестве D и при этом*

$$f(x) \leqslant g(x), \qquad x \in D \tag{15.2.69}$$

то

$$\int_D f(x)\,\mathsf{d}\,x \leqslant \int_D g(x)\,\mathsf{d}\,x \tag{15.2.70}$$

4^0. **Выпуклость:** *если функция f интегрируема на измеримом по Жордану множестве D, то функция $|f(x)|$ тоже интегрируема на D, и при этом*

$$\left|\int_D f(x)\ \mathsf{d}\,x\right| \leqslant \int_D |f(x)|\ \mathsf{d}\,x \tag{15.2.71}$$

Доказательство. Свойства 1^0, 3^0 и 4^0 доказываются так же как в параграфе (c), поэтому мы докажем только свойство 2^0.

Пусть $\tau_E = \{E_1, ..., E_m\}$ – измеримое разбиение множества $E \subseteq D$. Выберем какое-нибудь измеримое разбиение $\tau_H = \{H_1, ..., H_l\}$ множества $H = D \backslash E$ так, чтобы диаметр τ_H не превышал диаметра τ_E:

$$\Delta(\tau_H) \leqslant \Delta(\tau_E)$$

Тогда общая система множеств $\tau = \{E_1, ..., E_m, H_1, ..., H_l\}$ будет измеримым разбиением множества D с диаметром

$$\Delta(\tau) = \Delta(\tau_E).$$

Разность соответствующих сумм Дарбу для разбиения τ_E будет меньше чем для τ_E:

$$0 \leqslant S_{\tau_E} - s_{\tau_E} = \sum_{i=1}^{m}\left(\sup_{x\in E_i} f(x) - \inf_{x\in E_i} f(x)\right)\cdot \mu(E_i) \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{i=1}^{m}\left(\sup_{x\in E_i} f(x) - \inf_{x\in E_i} f(x)\right)\cdot \mu(E_i) + \sum_{j=1}^{l}\left(\sup_{x\in H_j} f(x) - \inf_{x\in H_j} f(x)\right)\cdot \mu(H_j) = S_\tau - s_\tau$$

Значит, при $\Delta(\tau_E) \to 0$, получаем $\Delta(\tau) = \Delta(\tau_E) \to 0$, и поэтому

$$0 \leqslant S_{\tau_E} - s_{\tau_E} \leqslant S_\tau - s_\tau \underset{\Delta(\tau)=\Delta(\tau_E)\to 0}{\longrightarrow} 0$$

$$\Downarrow$$

$$S_{\tau_E} - s_{\tau_E} \underset{\Delta(\tau_E)\to 0}{\longrightarrow} 0$$

Это означает, что функция f интегрируема на множестве E. По тем же причинам f будет интегрируема на $H = D\backslash E$.

Если теперь выбрать произвольные точки $\xi_i \in E_i, \eta_j \in H_j$, то получим

$$\int_D f(x)\,\mathsf{d}\,x \underset{0\leftarrow\Delta\tau}{\longleftarrow} \overbrace{\underbrace{\sum_{i=1}^{m} f(\xi_i)\cdot\mu(E_i)}_{\substack{\text{интегральная сумма}\\ \text{на множестве } E}} + \underbrace{\sum_{j=1}^{l} f(\eta_j)\cdot\mu(H_j)}_{\substack{\text{интегральная сумма}\\ \text{на множестве } H}}}^{\text{интегральная сумма на множестве } D} \underset{\Delta\tau_E,\Delta\tau_H\to 0}{\longrightarrow} \int_E f(x)\,\mathsf{d}\,x + \int_H f(x)\,\mathsf{d}\,x$$

Отсюда и следует (15.2.68). □

Из свойства 3^0 и примера 15.2.1 получаем

Следствие 15.2.6 (оценка кратного интеграла)**.** *Если f – ограниченная интегрируемая функция на измеримом по Жордану множестве D в евклидовом пространстве X, то*

$$\inf_{x\in D} f(x)\cdot\mu(D) \leqslant \int_D f(x)\,\mathsf{d}\,x \leqslant \sup_{x\in D} f(x)\cdot\mu(D) \tag{15.2.72}$$

Интеграл, как функционал на множествах. Ниже нам понадобится следующее определение.

- Условимся говорить, что *последовательность компактов L_i в X сходится к точке $x \in X$*, если расстояние от L_i до x стремится к нулю:
$$\rho(L_i, x) = \max_{y\in K_i} |y - x| \underset{i\to\infty}{\longrightarrow} 0. \tag{15.2.73}$$
Это изображается соотношением
$$L_i \underset{i\to\infty}{\longrightarrow} x.$$

Пусть U – открытое множество в X и f – непрерывная функция на U. Для произвольного измеримого компакта $K \subset U$ обозначив
$$F(L) = \int_L f(x)\cdot \mathsf{d}\, x,$$
мы получим отображение $L \mapsto F(L)$, которое каждому измеримому компакту $L \subset U$ ставит в соответствие число $F(L)$. Отметим следующие свойства такого отображения:

(I-1) **Аддитивность по компактам:** *если компакты M и N образуют измеримое разбиение*[8] *компакта L*
$$L \cong M \sqcup N,$$
то
$$F(L) = F(M) + F(N)$$

(I-2) **Изотропность:** *для всякой точки $x \in U$ существует число $A \in \mathbb{R}$ такое, что справедливо соотношение*
$$F(L) = A\cdot \mu(L) + \underset{L\to x}{\mathbf{o}}\big(\mu(L)\big) \tag{15.2.74}$$
или, что эквивалентно, соотношение
$$\frac{F(L)}{\mathsf{Leng}(L)} \underset{\mathsf{Leng}(L)\to 0}{\longrightarrow} A, \tag{15.2.75}$$
Их надо понимать так: для любой последовательности L_i компактов, сходящихся к x
$$L_i \underset{i\to\infty}{\longrightarrow} x$$
справедливо соотношение
$$F(L_i) = A\cdot \mathsf{Leng}(L_i) + \underset{i\to\infty}{\mathbf{o}}\big(\mathsf{Leng}(L_i)\big) \tag{15.2.76}$$
и, эквивалентно,
$$\frac{F(L_i)}{\mathsf{Leng}(L_i)} \underset{i\to\infty}{\longrightarrow} A. \tag{15.2.77}$$

Доказательство. Утверждение **(I-1)** – просто переформулировка свойства аддитивности интеграла (формула (15.2.68)), поэтому неочевидным здесь будет только утверждение **(I-2)**. Для точки $x \in U$ положим $A = f(x)$. Тогда для любой последовательности кривых L_i, сходящейся к x, мы получим
$$\frac{1}{\mu(L_i)}\cdot\Big|F(L_i) - \underbrace{A\cdot\mu(L_i)}_{\substack{\| \, (15.2.65)\\ \int_{L_i} A\cdot \mathsf{d}\, y}}\Big| = \frac{1}{\mu(L_i)}\cdot\left|\int_{L_i} f(y)\,\mathsf{d}\, y - \int\limits_{L_i} A\cdot\mathsf{d}\, y\right| =$$
$$= \frac{1}{\mu(L_i)}\cdot\left|\int_{L_i}\Big(f(y) - A\Big)\,\mathsf{d}\, y\right| \leqslant (15.2.71) \leqslant \frac{1}{\mu(L_i)}\cdot\max_{y\in L_i}\Big|f(y)-A\Big|\cdot\mu(L_i) =$$
$$= \max_{y\in L_i}|f(y) - A| = \max_{y\in L_i}|f(y) - f(x)| \underset{i\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$
(последнее соотношение следует из того, что $f : U \to \mathbb{R}$ – непрерывная функция). Это доказывает (15.2.77). □

[8] Измеримые разбиения были определены на с.916.

- Условия **(I-1)** и **(I-2)** называются *аксиомами интеграла.* Как оказывается, они полностью определяют интегралы от непрерывных функций:

Теорема 15.2.7. *Пусть U – открытое множество в X и пусть каждому измеримому компакту $L \subset U$ поставлено в соответствие число $F(L)$ так, что функционал $L \mapsto F(L)$ удовлетворяет условиям* **(I-1)** *и* **(I-2)**. *Тогда существует и единственна непрерывная функция $f : U \to \mathbb{R}$ такая, что*

$$F(L) = \int_L f(x) \cdot \mathsf{d}\, x. \tag{15.2.78}$$

для любой скалярной кривой $L \subseteq U$.

- Функция $f : U \to \mathbb{R}$ называется *плотностью* функционала по компактам F.

Доказательство. По аксиоме **(I-2)**, всякой точке $x \in U$ соответствует некое число $A \in \mathbb{R}$, удовлетворяющее соотношению (15.2.74). Положим $f(x) = A$ и убедимся, что эта функция обладает нужными свойствами.

1. Заметим, что из соотношения (15.2.75) сразу следует, что функция $f : U \to \mathbb{R}$ единственна.

2. Покажем далее, что функция $f : U \to \mathbb{R}$ непрерывна. Возьмем какую-нибудь последовательность точек

$$x_i \underset{i\to\infty}{\longrightarrow} x$$

Для каждого i справедливо соотношение

$$F(L) = f(x_i) \cdot \mu(L) + \underset{L\to x_i}{\mathbf{o}}\big(\mu(L)\big).$$

Из него следует, что можно выбрать какой-нибудь компакт L_i со свойствами

$$\rho(L_i, \{x_i\}) < \frac{1}{i}, \qquad \left| \frac{F(L_i)}{\mu(L_i)} - f(x_i) \right| \leqslant \frac{1}{i}$$

Тогда мы получаем, что компакты L_i стремятся к x, потому что

$$\rho(L_i, \{x\}) \leqslant \rho(L_i, \{x_i\}) + \rho(\{x_i\}, \{x\}) < \frac{1}{i} + \rho(x_i, x) \underset{i\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

и значит, соответствующая последовательность средних функционала F по мере должна стремиться к $f(x)$:

$$\frac{F(L_i)}{\mu(L_i)} \underset{i\to\infty}{\longrightarrow} f(x)$$

Отсюда уже следует, что $f(x_i)$ стремится к $f(x)$:

$$|f(x_i) - f(x)| \leqslant \left| f(x_i) - \frac{F(L_i)}{\mu(L_i)} \right| + \left| \frac{F(L_i)}{\mu(L_i)} - f(x) \right| \leqslant \frac{1}{i} + \left| \frac{F(L_i)}{\mu(L_i)} - f(x) \right| \underset{i\to\infty}{\longrightarrow} 0 \tag{15.2.79}$$

3. Покажем, что для всякого компакта $K \subseteq U$ выполняется соотношение

$$\sup_{\substack{x,\, M\, :\\ x \in M \subseteq K,\\ \mathsf{diam}(M) \leqslant \varepsilon}} \left| \frac{F(M)}{\mu(M)} - f(x) \right| \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} 0 \tag{15.2.80}$$

Это удобно делать от противного: предположим, что (15.2.80) не выполняется, то есть существует компакт $K \subseteq U$ и последовательность компактов $M_i \subseteq K$ такая, что

$$\mathsf{diam}(M_i) \underset{i\to\infty}{\longrightarrow} 0, \qquad \sup_{x\in M_i} \left| \frac{F(M_i)}{\mu(M_i)} - f(x) \right| \underset{i\to\infty}{\not\longrightarrow} 0$$

Переходя к подпоследовательности, можно считать, что последовательность $\sup_{x\in M_i} \left| \frac{F(M_i)}{\mu(M_i)} - f(x) \right|$ отделена от нуля неким числом $\delta > 0$:

$$\mathsf{diam}(M_i) \underset{i\to\infty}{\longrightarrow} 0, \qquad \sup_{x\in M_i} \left| \frac{F(M_i)}{\mu(M_i)} - f(x) \right| > \delta > 0$$

Теперь можно выбрать последовательность $x_i \in M_i$ такую, что

$$\left| \frac{F(M_i)}{\mu(M_i)} - f(x_i) \right| > \delta > 0 \tag{15.2.81}$$

Последовательность x_i лежит в компакте K, поэтому она содержит сходящуюся подпоследовательность. Перейдя к ней, и переобозначив индексы, мы можем считать что сама последовательность x_i стремится к какому-то пределу $x \in K$:

$$x_i \underset{i\to\infty}{\longrightarrow} x$$

При этом, $x_i \in M_i$, а диаметры M_i стремятся к нулю, значит,

$$M_i \underset{i\to\infty}{\longrightarrow} \{x\}$$

откуда в силу (15.2.76),

$$\frac{F(M_i)}{\mu(M_i)} \underset{i\to\infty}{\longrightarrow} f(x) \tag{15.2.82}$$

и значит,

$$\frac{F(M_i)}{\mu(M_i)} - f(x_i) = \underbrace{\frac{F(M_i)}{\mu(M_i)} - f(x)}_{\substack{\downarrow\ (15.2.82)\\ 0}} + \underbrace{f(x) - f(x_i)}_{\substack{\downarrow\ (15.2.79)\\ 0}} \underset{i\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

Мы получаем противоречие с (15.2.81).

4. Покажем, что интегральные суммы функции f на компакте L стремятся к числу $F(L)$. Возьмем число $\varepsilon > 0$ и рассмотрим произвольное измеримое разбиение компакта L

$$L = \bigsqcup_{M\in\mathcal{M}} M.$$

с диаметром $\mathsf{diam}(\mathcal{M}) \leqslant \varepsilon$. Для любых $x_M \in M$ мы получим:

$$\begin{aligned}
&\left| F(L) - \sum_{M\in\mathcal{M}} f(x_M)\cdot\mu(M) \right| = \left| \sum_{M\in\mathcal{M}} F(M) - \sum_{M\in\mathcal{M}} f(x_M)\cdot\mu(M) \right| \leqslant \\
&\qquad \leqslant \sum_{M\in\mathcal{M}} \left| F(M) - f(x_M)\cdot\mu(M) \right| = \sum_{M\in\mathcal{M}} \left| \frac{F(M)}{\mu(M)} - f(x_M) \right| \cdot\mu(M) \leqslant \\
&\qquad \leqslant \sup_{\substack{x\in M\\ M\subseteq L:\\ \mathsf{diam}(M)\leqslant\varepsilon}} \left| \frac{F(M)}{\mu(M)} - f(x) \right| \cdot \sum_{M\in\mathcal{M}} \mu(M) = \underbrace{\sup_{\substack{x\in M\\ M\subseteq L:\\ \mathsf{diam}(M)\leqslant\varepsilon}} \left| \frac{F(M)}{\mu(M)} - f(x) \right|}_{\substack{\downarrow\ (15.2.80)\\ 0}} \cdot\mu(L) \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} 0
\end{aligned}$$

□

(b) Вычисление кратных интегралов

Напомним, что выше на с.462 мы определили правильные области в $\mathbb{R}^2$ как множества D, задаваемые системами вида

$$D: \quad \begin{cases} a \leqslant x \leqslant b \\ \varphi(x) \leqslant y \leqslant \psi(x) \end{cases} \tag{15.2.83}$$

где $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ и $\psi : [a,b] \to \mathbb{R}$ – непрерывные функции, удовлетворяющие неравенству

$$\varphi(x) \leqslant \psi(x), \quad x \in [a;b]$$

Там же мы обещали доказать формулу (7.3.170) для площади правильной области:

$$S_D = \int_a^b \big[g(x) - f(x) \big] \,\mathsf{d}\, x.$$

В этом пункте мы выполним это обещание и рассмотрим обобщение этого понятия на более высокие размерности.

Правильные области в $\mathbb{R}^n$.

- Правильная область в $\mathbb{R}^n$ определяется по индукции:
  - сначала объявляется, что всякий отрезок $[a, b]$ является правильной областью в $\mathbb{R}^1$;
  - затем говорится, что если D – правильная область в $\mathbb{R}^n$, то для любых двух функций φ и ψ, непрерывных на D, множество

$$\begin{cases} (x^1, ..., x^n) \in D \\ \varphi(x^1, ..., x^n) \leqslant x^{n+1} \leqslant \psi(x^1, ..., x^n) \end{cases}$$

    является *правильной областью* в $\mathbb{R}^{n+1}$.

- Это эквивалентно заданию области D системой неравенств

$$\begin{cases} \varphi^1 \leqslant x^1 \leqslant \psi^1 \\ \varphi^2(x^1) \leqslant x^2 \leqslant \psi^2(x^1) \\ ... \\ \varphi^n(x^1, ..., x^{n-1}) \leqslant x^n \leqslant \psi^n(x^1, ..., x^{n-1}) \end{cases} \tag{15.2.84}$$

  где

  1) $\varphi^1 \leqslant \psi^1$ – числа, и

  k) для всякого k функции φ^k и ψ^k определены и непрерывны на множестве

$$\begin{cases} \varphi^1 \leqslant x^1 \leqslant \psi^1 \\ \varphi^2(x^1) \leqslant x^2 \leqslant \psi^2(x^1) \\ ... \\ \varphi^{k-1}(x^1, ..., x^{k-2}) \leqslant x^{k-1} \leqslant \psi^{k-1}(x^1, ..., x^{k-2}) \end{cases}$$

- К этому добавляется, что если множество E в $\mathbb{R}^n$, получено из какой-нибудь правильной области D с помощью перестановки переменных, то E также считается правильной областью.

Теорема 15.2.8. *Всякая правильная область D в $\mathbb{R}^n$ измерима по Жордану, и ее мера вычисляется по формуле*

$$\mu(D) = \int_{\varphi^1}^{\psi^1} \Big[\int_{\varphi^2(x^1)}^{\psi^2(x^1)} \big[... \int_{\varphi^n(x^1,...,x^{n-1})}^{\psi^n(x^1,...,x^{n-1})} 1 \, \mathsf{d}\, x^n ... \big] \, \mathsf{d}\, x^2 \Big] \, \mathsf{d}\, x^1 \tag{15.2.85}$$

(где φ^k, ψ^k – система функций из (15.2.84)*).*

Доказательство этой теоремы мы отложим до страницы 927, а перед этим обсудим ее формулировки и практические следствия для пространств $\mathbb{R}^2$ и $\mathbb{R}^3$.

Площадь правильной области в $\mathbb{R}^2$. В пространстве $\mathbb{R}^2$ теорема 15.2.8 принимает вид

Теорема 15.2.9. *Всякая правильная область D в $\mathbb{R}^2$*

$$D: \quad \begin{cases} a \leqslant x \leqslant b \\ \varphi(x) \leqslant y \leqslant \psi(x) \end{cases}$$

измерима по Жордану, и ее меру можно найти по формуле:

$$\mu(D) = \int_a^b \left[\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} \mathsf{d}\, y \right] \mathsf{d}\, x =$$

$$= \int_a^b \big[\psi(x) - \varphi(x)\big] \, \mathsf{d}\, x \tag{15.2.86}$$

Доказательство. Если D – произвольная правильная область в $\mathbb{R}^2$,

$$D: \quad \begin{cases} a \leqslant x \leqslant b \\ \varphi(x) \leqslant y \leqslant \psi(x) \end{cases}$$

то, пересекая ее прямыми $x = t$, мы получим отрезки, длина которых равна

$$S(t) = \psi(t) - \varphi(t)$$

Отсюда по формуле (15.2.96) получаем

$$\mu(D) = \int_a^b \big[\psi(t) - \varphi(t)\big] \,\mathsf{d}\, t$$

а это и есть формула (15.2.86), только вместо x здесь стоит t. □

Объем правильной области в $\mathbb{R}^3$. В пространстве $\mathbb{R}^3$ теорема 15.2.8 принимает вид

Теорема 15.2.10. *Всякая правильная область D в $\mathbb{R}^3$*

$$\begin{cases} a \leqslant x \leqslant b \\ \varphi(x) \leqslant y \leqslant \psi(x) \\ \Phi(x,y) \leqslant z \leqslant \Psi(x,y) \end{cases} \tag{15.2.87}$$

измерима по Жордану, и ее мера вычисляется по формуле

$$\mu(D) = \int_a^b \left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} \left[\int_{\Phi(x,y)}^{\Psi(x,y)} \mathsf{d}\, z \right] \mathsf{d}\, y \right) \mathsf{d}\, x = \\ = \int_a^b \left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} \big[\Psi(x,y) - \Phi(x,y)\big] \,\mathsf{d}\, y \right) \mathsf{d}\, x \tag{15.2.88}$$

◇ **15.2.2** (объем эллипсоида)**.** Покажем, что объем эллипсоида, то есть области D в $\mathbb{R}^3$, заданной неравенством

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leqslant 1$$

равен $\frac{4}{3}\pi abc$.

Это становится ясно, если записать область D в правильном виде:

$$D: \begin{cases} -a \leqslant x \leqslant a \\ -b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} \leqslant y \leqslant b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} \\ -c\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} \leqslant z \leqslant c\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} \end{cases} \tag{15.2.89}$$

Как мы догадались об этом, мы объясним немного позже, а сейчас применим к этой записи формулу (15.2.88):

$$\mu(D) = \\ = \int_{-a}^a \left(\int_{-b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}^{b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}} 2c\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} \,\mathsf{d}\, y \right) \mathsf{d}\, x = \\ = \left| \begin{matrix} y = b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} \cdot \sin t \\ \mathsf{d}\, y = b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} \cdot \cos t \,\mathsf{d}\, t \\ t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \end{matrix} \right| = \\ = \int_{-a}^a \left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 2cb \left[\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} \right]^2 \cos^2 t \,\mathsf{d}\, t \right) \mathsf{d}\, x = \\ = \int_{-a}^a \left(2cb \left[1 - \frac{x^2}{a^2} \right] \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t \,\mathsf{d}\, t \right) \mathsf{d}\, x = \\ = \int_{-a}^a \left(2cb \left[1 - \frac{x^2}{a^2} \right] \underbrace{\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - 2\sin 2t}{2} \,\mathsf{d}\, t}_{\substack{\| \\ \frac{\pi}{2}}} \right) \mathsf{d}\, x = \\ = \int_{-a}^a \left(2cb \left[1 - \frac{x^2}{a^2} \right] \frac{\pi}{2} \right) \mathsf{d}\, x = \\ = \pi cb \int_{-a}^a \left[1 - \frac{x^2}{a^2} \right] \mathsf{d}\, x = \pi cb \left[x - \frac{x^3}{3a^2} \right] \Bigg|_{x=-a}^{x=a} = \\ = \pi cb \left[2a - \frac{2a^3}{3a^2} \right] = \pi cba \left[2 - \frac{2}{3} \right] = \frac{4}{3}\pi abc$$

Мы доказали, что объем равен $\frac{4}{3}\pi abc$, и осталось только объяснить читателю, откуда мы взяли представление (15.2.89).

Уметь представить область в правильном виде – главный технический навык, который должен освоить читатель для вычисления объемов (поскольку вторая половина задачи – нахождение определенных интегралов – к настоящему времени не должна быть для него проблемой). Поэтому в наших примерах мы постараемся объяснить подробно как это делается.

Алгоритм действий выглядит так. Сначала мы проектируем наш эллипсоид D на ось OX. У нас получается отрезок $[-a; a]$, и это означает, что в первой строчке представления можно записать

$$-a \leqslant x \leqslant a \tag{15.2.90}$$

Затем мы фиксируем на оси OX какую-нибудь точку x из этого интервала, и проводим через нее плоскость перпендикулярную OX. Эта плоскость, пересекаясь с нашим эллипсоидом D, даст некий эллипс:

Спроектируем этот эллипс на ось OY, и тогда у нас получится отрезок $\left[-b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}; b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}\right]$. Это означает, что переменная y в нашем представлении меняется в следующих пределах:

$$-b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}} \leqslant y \leqslant b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}} \tag{15.2.91}$$

Далее фиксируем y в этом интервале, и проводим плоскость, все точки которой имеют в качестве ординаты это самое значение y. Для нас важно как пересечет эта плоскость наш маленький эллипс (а не всю большую фигуру D). В пересечениии получится отрезок:

Его нужно спроектировать на ось OZ, и на ней получится отрезок

$$\left[-c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\,;\, c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\right].$$

Это будет означать, что z меняется в таких пределах:

$$-c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}} \leqslant z \leqslant c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}} \tag{15.2.92}$$

Собирая вместе неравенства (15.2.90), (15.2.91), (15.2.92), мы получим (15.2.89).

◇ **15.2.3.** Найдем объем области, ограниченной поверхностями

$$z=0, \quad y+z=2, \quad y=x^2$$

Для этого надо записать нашу область в правильном виде, и алгоритм действий тот же, что и в предыдущем примере. Сначала ищем, в каких пределах меняется переменная x. Для этого проектируем область D на ось OX, и у нас получается отрезок $[-\sqrt{2};\sqrt{2}]$. Это означает, что в первой строчке нашего представления можно записать

$$-\sqrt{2} \leqslant x \leqslant \sqrt{2} \tag{15.2.93}$$

После этого мы фиксируем x в этом интервале, и проводим через это значение плоскость, перпендикулярную оси OX (то есть плоскость, все точки которой имеют в качестве абсциссы значение x). Эта плоскость пересечет нашу область D по некоторому треугольнику:

Спроектируем этот треугольник на ось OY, и тогда у нас получится отрезок $[x^2;1]$. Это означает, что переменная y в нашем представлении меняется в следующих пределах:

$$x^2 \leqslant y \leqslant 2 \tag{15.2.94}$$

Остается понять, в каких пределах меняется переменная z. Для этого мы фиксируем y в этом интервале, и проводим плоскость, все точки которой имеют в качестве ординаты это самое значение y. Для нас важно как пересечет эта плоскость наш треугольник (а не всю фигуру D). В пересечениии, понятное дело, получится отрезок:

Его нужно спроектировать на ось OZ, и на ней получится отрезок $[0;2-y]$. Это будет означать, что z меняется в таких пределах:

$$0 \leqslant z \leqslant 2-y \tag{15.2.95}$$

Собрав теперь неравенства (15.2.93), (15.2.94), (15.2.95), мы получим представление D в правильном виде:

$$D: \quad \begin{cases} -\sqrt{2} \leqslant x \leqslant \sqrt{2} \\ x^2 \leqslant y \leqslant 2 \\ 0 \leqslant z \leqslant 2-y \end{cases}$$

После этого уже вычисляется объем D:

$$\mu(D) = \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \left(\int_{x^2}^{2} (2-y)\,\mathsf{d}\,y \right) \mathsf{d}\,x =$$

$$= \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \left(2y - \frac{y^2}{2} \right)\Bigg|_{y=x^2}^{y=2} \mathsf{d}\,x =$$

$$= \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \left(4-2-2x^2+\frac{x^4}{2} \right) \mathsf{d}\,x =$$

$$= \left(2x - \frac{2x^3}{3} + \frac{x^5}{10} \right)\Bigg|_{x=-\sqrt{2}}^{x=\sqrt{2}} =$$

$$= 4\sqrt{2} - \frac{4(\sqrt{2})^3}{3} + \frac{2(\sqrt{2})^5}{10} = 4\sqrt{2} - \frac{8\sqrt{2}}{3} + \frac{4\sqrt{2}}{5} = \\ = \frac{60\sqrt{2} - 40\sqrt{2} + 12\sqrt{2}}{15} = \frac{32\sqrt{2}}{15}$$

◇ **15.2.4.** Покажем, что если в предыдущем примере поменять порядок переменных в представлении D в правильном виде, то объем от этого не изменится. Пусть, например, порядок переменных будет таким: сначала y, затем x, а потом z.

Спроектировав D на ось OY, мы получим отрезок $[0; 2]$. Значит, первое неравенство в нашем представлении имеет вид:

$$0 \leqslant y \leqslant 2$$

После этого нужно зафиксировать y в этом интервале, и провести плоскость перпендикулярную оси OY. Она отсечет на нашей области прямоугольник:

Если этот прямоугольник спроектировать на ось OX, то получится отрезок $[-\sqrt{y}; \sqrt{y}]$, и поэтому второе неравенство в нашем представлении будет иметь вид

$$-\sqrt{y} \leqslant x \leqslant \sqrt{y}$$

Теперь фиксируем x в этом интервале и проводим плоскость перпендикулярную OX (состоящую из точек, абсциссы которых равны x). В пересечении с нашим прямоугольником получается отрезок

Если этот отрезок спроектировать на ось OZ, получится отрезок $[0, 2 - y]$. То есть, третье неравенство выглядит так:

$$0 \leqslant z \leqslant 2 - y$$

Собирая вместе эти неравенства, получим следующую запись D в правильном виде:

$$D: \quad \begin{cases} 0 \leqslant y \leqslant 2 \\ -\sqrt{y} \leqslant x \leqslant \sqrt{y} \\ 0 \leqslant z \leqslant 2 - y \end{cases}$$

Теперь вычисляем объем D:

$$\mu(D) = \int_0^2 \left(\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} (2 - y) \, \mathsf{d}\, x \right) \mathsf{d}\, y = \\ = \int_0^2 (2x - xy) \Big|_{x=-\sqrt{y}}^{x=\sqrt{y}} \mathsf{d}\, y = \int_0^2 (4\sqrt{y} - 2y\sqrt{y}) \, \mathsf{d}\, y = \\ = 4\frac{2\sqrt{y^3}}{3} - 2\frac{2\sqrt{y^5}}{5} \Big|_{y=0}^{y=2} = \frac{8\sqrt{2^3}}{3} - \frac{4\sqrt{2^5}}{5} = \\ = \frac{16\sqrt{2}}{3} - \frac{16\sqrt{2}}{5} = \frac{32\sqrt{2}}{15}$$

Читателю предлагается сравнить этот ответ с ответом примера 15.2.3.

⊳⊳ **15.2.5.** Найдите объемы тел, заданных неравенствами:

1) $x^2 + y^2 \leqslant Rx, \quad x^2 + y^2 + z^2 \leqslant R^2$;
2) $0 \leqslant x \leqslant 4, \quad 0 \leqslant y \leqslant 4, \quad 0 \leqslant z \leqslant x^2 + y^2 + 1$;
3) $x \geqslant 0, \quad y \geqslant 0, \quad z \geqslant 0, \quad \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} \leqslant 1$;
4) $x \geqslant 0, \quad y \geqslant 0, \quad z \geqslant 0, \quad x + y \leqslant 1, \quad z \leqslant x^2 + y^2$;
5) $x \geqslant 0, \quad y \geqslant 0, \quad z \geqslant 0, \quad 2x + 3y \leqslant 12, \quad z \leqslant \frac{1}{2}y^2$;
6) $y \leqslant 1, \quad z \geqslant 0, \quad z \leqslant x^2 + y^2, \quad y \geqslant x^2$;

Доказательство теоремы о мере правильной области. Для доказательства теоремы 15.2.8 нам понадобится

Лемма 15.2.11. *Пусть D – измеримое множество в $\mathbb{R}^n$, причем*

1) *его проекция на первую координатную ось представляет собой отрезок $[a; b]$:*

$$\{x^1; \quad x = (x^1, ..., x^n) \in D\} = [a; b],$$

2) *при любом $t \in [a; b]$ плоскость Π_t, перпендикулярная первой координатной оси, и прохо-*

дящая через точку $(t,0,...,0)$,

$$\varPi_t = \big\{x=(x^1,...,x^n)\in\mathbb{R}^n: \quad x^1=t\big\}$$

в пересечении с D *дает множество* $D\cap\varPi_t$, *измеримое в пространстве* $\mathbb{R}^{n-1}$, *меру которого мы обозначим* $S(t)$:

$$\underbrace{\mu^{n-1}}_{\text{мера в } \mathbb{R}^{n-1}}(D\cap\varPi_t)=S(t).$$

Тогда мера всего множества D *в* $\mathbb{R}^n$ *выражается через* $S(t)$ *как интеграл от* $S(t)$ *по отрезку* $[a;b]$:

$$\underbrace{\mu^n}_{\text{мера в } \mathbb{R}^n}(D)=\int_a^b S(t)\,\mathsf{d}\,t \qquad (15.2.96)$$

Доказательство. Рассмотрим двоичную сетку ранга k в $\mathbb{R}^n$. Пусть $t_1,...,t_m$ – точки, которые отсекаются гиперплоскостями этой сетки на отрезке $[a;b]$. Положив дополнительно

$$t_0=a,\quad t_{m+1}=b$$

мы получим разбиение отрезка $[a;b]$:

$$a=t_0<t_1<...<t_m<t_{m+1}=b$$

Наше множество D рассекается гиперплоскостями, проходящими через t_i на слои, которые мы обозначим D_i:

$$D_i=\big\{x=(x^1,...,x^n)\in\mathbb{R}^n: \quad t_i\leqslant x^1\leqslant t_{i+1}\big\}.$$

Выберем дополнительно числа $\xi_i\in[t_i;t_{i+1}]$, причем для двух крайних отрезков пусть эти числа совпадают с концами отрезка $[a;b]$:

$$\xi_0=a,\quad \xi_{m+1}=b$$

Тогда получаем логическую цепочку:

$$\mathsf{G}_k(D)\subseteq D\subseteq \mathsf{E}_k(D)$$

$$\Downarrow$$

$$\mathsf{G}_k(D)\cap\varPi_{\xi_i}\subseteq D\cap\varPi_{\xi_i}\subseteq \mathsf{E}_k(D)\cap\varPi_{\xi_i}$$

$$\Downarrow$$

$$\underbrace{\mu^{n-1}}_{\text{мера в } \mathbb{R}^{n-1}}\big(\mathsf{G}_k(D)\cap\varPi_{\xi_i}\big)\leqslant \underbrace{\mu^{n-1}}_{\text{мера в } \mathbb{R}^{n-1}}\big(D\cap\varPi_{\xi_i}\big)\leqslant \underbrace{\mu^{n-1}}_{\text{мера в } \mathbb{R}^{n-1}}\big(\mathsf{E}_k(D)\cap\varPi_{\xi_i}\big)$$

$$\Downarrow$$

$$\underbrace{\frac{1}{2^k}\cdot\mu^{n-1}\big(\mathsf{G}_k(D)\cap\varPi_{\xi_i}\big)}_{\substack{\text{объем внутренних клеток,}\\ \text{лежащих в слое } D_i}}\leqslant \frac{1}{2^k}\cdot\underbrace{\mu^{n-1}\big(D\cap\varPi_{\xi_i}\big)}_{S(\xi_i)}\leqslant \underbrace{\frac{1}{2^k}\cdot\mu^{n-1}\big(\mathsf{E}_k(D)\cap\varPi_{\xi_i}\big)}_{\substack{\text{объем инцидентных клеток,}\\ \text{лежащих в слое } D_i}}$$

$$\Downarrow$$

$$\underbrace{\mu^n}_{\text{мера в } \mathbb{R}^n}\big(\mathsf{G}_k(D)\cap D_i\big)\leqslant\frac{1}{2^k}\cdot S(\xi_i)\leqslant \underbrace{\mu^n}_{\text{мера в } \mathbb{R}^n}\big(\mathsf{E}_k(D)\cap D_i\big)$$

$$\Downarrow$$

$$\underbrace{\sum_{i=0}^m\mu^n\big(\mathsf{G}_k(D)\cap D_i\big)}_{\mu^n\left(\mathsf{G}_k(D)\right)}\leqslant\sum_{i=0}^m S(\xi_i)\cdot\frac{1}{2^k}\leqslant \underbrace{\sum_{i=0}^m\mu^n\big(\mathsf{E}_k(D)\cap D_i\big)}_{\mu^n\left(\mathsf{E}_k(D)\right)}$$

$$\Downarrow$$

$$\mu^n\big(\mathsf{G}_k(D)\big) \leqslant \sum_{i=0}^{m} S(\xi_i)\cdot\frac{1}{2^k} \leqslant \mu^n\big(\mathsf{E}_k(D)\big)$$

$$\Downarrow$$

$$\mu^n\big(\mathsf{G}_k(D)\big) \leqslant \underbrace{S(\xi_0)\cdot\frac{1}{2^k}}_{S(\xi_0)\cdot\left(\frac{1}{2^k}-\Delta t_0+\Delta t_0\right)} + \sum_{i=1}^{m-1} S(\xi_i)\cdot\underbrace{\frac{1}{2^k}}_{\Delta t_i} + \underbrace{S(\xi_m)\cdot\frac{1}{2^k}}_{S(\xi_m)\cdot\left(\Delta t_m+\frac{1}{2^k}-\Delta t_m\right)} \leqslant \mu^n\big(\mathsf{E}_k(D)\big)$$

$$\Downarrow$$

$$\mu^n\big(\mathsf{G}_k(D)\big) \leqslant$$
$$\leqslant S(\underbrace{\xi_0}_{a})\cdot\left(\frac{1}{2^k}-\Delta t_0\right) + \underbrace{S(\xi_0)\cdot\Delta t_0 + \sum_{i=1}^{m-1} S(\xi_i)\cdot\Delta t_i + S(\xi_m)\cdot\Delta t_m}_{\sum_{i=0}^m S(\xi_i)\cdot\Delta t_i} + S(\underbrace{\xi_m}_{b})\cdot\left(\frac{1}{2^k}-\Delta t_m\right) \leqslant$$
$$\leqslant \mu^n\big(\mathsf{E}_k(D)\big)$$

$$\Downarrow$$

$$\mu^n\big(\mathsf{G}_k(D)\big) \leqslant S(a)\cdot\left(\frac{1}{2^k}-\Delta t_0\right) + \sum_{i=0}^{m} S(\xi_i)\cdot\Delta t_i + S(b)\cdot\left(\frac{1}{2^k}-\Delta t_m\right) \leqslant \mu^n\big(\mathsf{E}_k(D)\big)$$

$$\Downarrow \qquad \text{(устремляем } k \text{ к бесконечности)}$$

$$\underbrace{\mu^n\big(\mathsf{G}_k(D)\big)}_{\substack{\downarrow\\ \mu^n(D)}} \leqslant S(a)\cdot\underbrace{\left(\frac{1}{2^k}-\Delta t_0\right)}_{\substack{\downarrow\\ 0}} + \underbrace{\sum_{i=0}^{m} S(\xi_i)\cdot\Delta t_i}_{\substack{\downarrow\\ \int_a^b S(t)\,\mathsf{d}\,t}} + S(b)\cdot\underbrace{\left(\frac{1}{2^k}-\Delta t_m\right)}_{\substack{\downarrow\\ 0}} \leqslant \underbrace{\mu^n\big(\mathsf{E}_k(D)\big)}_{\substack{\downarrow\\ \mu^n(D)}}$$

$$\Downarrow$$

$$\mu^n(D) \leqslant \int_a^b S(t)\,\mathsf{d}\,t \leqslant \mu^n(D)$$

$$\Downarrow$$

$$\mu^n(D) = \int_a^b S(t)\,\mathsf{d}\,t$$

□

Теорему 15.2.8 мы докажем только для случаев $n = 2$ и $n = 3$, полагая, что для произвольной размерности читатель сможет восстановить необходимые детали по аналогии.

Доказательство теоремы 15.2.8 для случая $n = 2$. Пусть нам дана правильная область в $\mathbb{R}^2$:

$$D: \qquad \begin{cases} a \leqslant x \leqslant b \\ \varphi(x) \leqslant y \leqslant \psi(x) \end{cases} \tag{15.2.97}$$

1. Сначала покажем, что она измерима. По теореме 15.1.6, для этого достаточно убедиться, что ее граница имеет нулевую меру. Граница же D состоит из точек, где неравенства превращаются равенства. То есть, ее можно представить как объединение четырех “линий” по количеству неравенств в этой системе. Покажем, что каждую такую “линию” можно считать графиком некоторой непрерывной функции на компакте. По лемме 15.1.11 это будет означать, что все эти “линии” имеют нулевую меру, и значит, их объединение тоже имеет нулевую меру.

a) Посмотрим, что получается, когда самое первое неравенство в системе превращается в равенство:

$$D: \qquad \begin{cases} x = a \\ \varphi(x) \leqslant y \leqslant \psi(x) \end{cases}$$

Это множество можно представить как график непрерывной функции на компакте, если положить

$$T = \{y \in \mathbb{R}: \ \varphi(a) \leqslant y \leqslant \psi(a)\}, \qquad f(y) = a$$

b) Случай $x = b$ рассматривается аналогично.

c) Пусть $y = \varphi(x)$:

$$\begin{cases} a \leqslant x \leqslant b \\ y = \varphi(x) \end{cases}$$

Это можно считать графиком непрерывной функции на компакте, если взять

$$T = [a, b], \qquad f(x) = \varphi(x)$$

d) Так же рассматривается случай $y = \psi(x)$.

2. Докажем теперь формулу (15.2.86). Рассмотрим снова правильную область (15.2.97). Пересекая ее с плоскостями $x = t$, мы получим правильные области вида

$$D \cap \Pi_t : \qquad \begin{cases} x = t \\ \varphi(t) \leqslant y \leqslant \psi(t) \end{cases}$$

(линейная) мера которых равна

$$S(t) = \psi(t) - \varphi(t).$$

Отсюда по формуле (15.2.96) получаем

$$\mu(D) = \int_a^b \big[\psi(t) - \varphi(t)\big] \, \mathsf{d}\, t$$

Это формула (15.2.86), только вместо x здесь стоит t. □

Доказательство теоремы 15.2.8 для случая $n = 3$. Пусть нам дана правильная область в $\mathbb{R}^3$:

$$D : \qquad \begin{cases} a \leqslant x \leqslant b \\ \varphi(x) \leqslant y \leqslant \psi(x) \\ \Phi(x, y) \leqslant z \leqslant \Psi(x, y) \end{cases} \tag{15.2.98}$$

1. Сначала покажем, что она измерима. По теореме 15.1.6, для этого достаточно убедиться, что ее граница имеет нулевую меру. Граница же D состоит из точек, где неравенства превращаются равенства. То есть, ее можно представить как объединение шести “поверхностей” по количеству неравенств в этой системе. Покажем, что каждую такую “поверхность” можно считать графиком некоторой непрерывной функции на компакте. По лемме 15.1.11 это будет означать, что все эти “поверхности” имеют нулевую меру, и значит, их объединение тоже имеет нулевую меру.

a) Посмотрим, что получается, когда самое первое неравенство в системе превращается в равенство:

$$D : \qquad \begin{cases} x = a \\ \varphi(x) \leqslant y \leqslant \psi(x) \\ \Phi(x, y) \leqslant z \leqslant \Psi(x, y) \end{cases}$$

Это множество можно представить как график непрерывной функции на компакте, если положить

$$T : \qquad \begin{cases} \varphi(x) \leqslant y \leqslant \psi(x) \\ \Phi(x, y) \leqslant z \leqslant \Psi(x, y) \end{cases} \qquad f(y, z) = a$$

b) Случай $x = b$ рассматривается аналогично.

c) Пусть $y = \varphi(x)$:

$$\begin{cases} a \leqslant x \leqslant b \\ y = \varphi(x) \\ \Phi(x, y) \leqslant z \leqslant \Psi(x, y) \end{cases}$$

Это можно считать графиком непрерывной функции на компакте, если взять

$$T : \qquad \begin{cases} a \leqslant x \leqslant b \\ \Phi(x, y) \leqslant z \leqslant \Psi(x, y) \end{cases} \qquad f(x, z) = \varphi(x)$$

d) Так же рассматривается случай $y = \psi(x)$.

e) Пусть $z = \Phi(x, y)$:

$$D: \quad \begin{cases} a \leqslant x \leqslant b \\ \varphi(x) \leqslant y \leqslant \psi(x) \\ z = \Phi(x, y) \end{cases}$$

Здесь компакт T и функция $f : T \to \mathbb{R}$ выбираются так:

$$T: \quad \begin{cases} a \leqslant x \leqslant b \\ \varphi(x) \leqslant y \leqslant \psi(x) \end{cases} \qquad f(x, y) = \Phi(x, y)$$

f) То же самое со случаем $z = \Psi(x, y)$.

2. Докажем теперь формулу (15.2.88). Рассмотрим снова правильную область (15.2.98). Пересекая ее с плоскостями $x = t$, мы получим правильные области вида

$$D \cap \Pi_t: \quad \begin{cases} x = t \\ \varphi(t) \leqslant y \leqslant \psi(t) \\ \Phi(t, y) \leqslant z \leqslant \Psi(t, y) \end{cases}$$

(плоская) мера которых по уже доказанной формуле (15.2.86) равна

$$S(t) = \int_{\varphi(t)}^{\psi(t)} \big[\Psi(t, y) - \Phi(t, y)\big] \, \mathsf{d}\, y$$

Отсюда по формуле (15.2.96) получаем

$$\mu(D) = \int_a^b \int_{\varphi(t)}^{\psi(t)} \big[\Psi(t, y) - \Phi(t, y)\big] \, \mathsf{d}\, y \, \mathsf{d}\, t$$

Это формула (15.2.88), только вместо x здесь стоит t. □

Переход от двойного интеграла к повторному. В случае $X = \mathbb{R}^2$ определенный на странице 918 кратный интеграл от функции $f : \mathbb{R}^2 \hookrightarrow \mathbb{R}$ по области $D \subseteq \mathbb{R}^2$ называется *двойным интегралом* и обозначается

$$\iint\limits_D f(x, y) \, \mathsf{d}\, x \, \mathsf{d}\, y$$

Следующая теорема объясняет как можно вычислить двойной интеграл.

Теорема 15.2.12. *Пусть функция $f : \mathbb{R}^2 \hookrightarrow \mathbb{R}$ определена и непрерывна на правильной области*

$$D: \quad \begin{cases} a \leqslant x \leqslant b \\ \varphi(x) \leqslant y \leqslant \psi(x) \end{cases}$$

тогда (f интегрируема на D и) двойной интеграл от f по D вычисляется по формуле

$$\iint_D f(x, y) \, \mathsf{d}\, x \, \mathsf{d}\, y = \int_a^b \left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y) \, \mathsf{d}\, y \right) \mathsf{d}\, x \qquad (15.2.99)$$

- Интеграл, стоящий в правой части формулы (15.2.99) называется *повторным интегралом* и имеет специальное обозначение (удобное тем, что сокращает количество скобок):

$$\int_a^b \mathsf{d}\, x \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y) \, \mathsf{d}\, y := \int_a^b \left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y) \, \mathsf{d}\, y \right) \mathsf{d}\, x$$

  Поэтому формулу (15.2.99) обычно записывают в виде

$$\iint_D f(x, y) \, \mathsf{d}\, x \, \mathsf{d}\, y = \int_a^b \mathsf{d}\, x \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y) \, \mathsf{d}\, y \qquad (15.2.100)$$

Для доказательства теоремы 15.2.12 нам понадобится

Лемма 15.2.13. *Пусть функция g определена и непрерывна на прямоугольнике $[a,b]\times[c;d]$. Тогда для всякой сходящейся последовательности значений переменной x на отрезке $[a;b]$*

$$x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x$$

справедливо соотношение

$$\max_{y\in[c;d]} \big|g(x_n,y)-g(x,y)\big| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \tag{15.2.101}$$

Доказательство. Этот факт следует из теоремы Кантора о равномерной непрерывности для функций многих переменных 14.1.2. Предположим, что верно обратное:

$$\max_{y\in[c;d]} \big|g(x_n,y)-g(x,y)\big| \underset{n\to\infty}{\not\longrightarrow} 0 \tag{15.2.102}$$

Тогда найдется подпоследовательность этой числовой последовательности, отделенная от нуля:

$$\exists\varepsilon>0 \quad \exists n_k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \infty \qquad \max_{y\in[c;d]} \big|g(x_{n_k},y)-g(x,y)\big| > \varepsilon$$

Отсюда уже получаем

$$\exists y_k\in[c;d] \quad \big|g(x_{n_k},y_k)-g(x,y_k)\big| > \varepsilon$$

Теперь если обозначить

$$\alpha^k=(x_{n_k},y_k), \quad \beta^k=(x,y_k)$$

то это будут две последовательности из прямоугольника $[a,b]\times[c;d]$, стремящиеся друг к другу, потому что

$$|\alpha^k-\beta^k| = \sqrt{\big(x_{n_k}-x\big)^2+\big(y_k-y_k\big)^2} = \big|x_{n_k}-x\big| \underset{n\to\infty}{\not\longrightarrow} 0$$

но при этом значения $g(\alpha^k)$ и $g(\beta^k)$ не будут стремиться друг к другу:

$$|g(\alpha^k)-g(\beta^k)| = \big|g(x_{n_k},y_k)-g(x,y_k)\big| > \varepsilon$$

Это означает, что функция g не может быть равномерно непрерывной на $[a,b]\times[c;d]$. Но по теореме Кантора 14.1.2, она должна быть равномерно непрерывна.

Полученное противоречие означает, что (15.2.102) не может выполняться, то есть должно выполняться (15.2.101). □

Лемма 15.2.14. *В предположениях теоремы 15.2.12 функция*

$$F(x)=\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\,\mathsf{d}\,y$$

непрерывна на отрезке $[a;b]$.

Доказательство. Сделаем в этом интеграле замену переменных, и обозначим получившуюся подинтегральную функцию символом $g(x,t)$:

$$F(x)=\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\,\mathsf{d}\,y = \left| \begin{matrix} y=\varphi(x)+\big[\psi(x)-\varphi(x)\big]\cdot t \\ \mathsf{d}\,y=\big[\psi(x)-\varphi(x)\big]\cdot \mathsf{d}\,t \\ t\in[0;1] \end{matrix} \right| =$$
$$= \int_0^1 \underbrace{f\Big(x,\varphi(x)+\big[\psi(x)-\varphi(x)\big]\cdot t\Big)\big[\psi(x)-\varphi(x)\big]}_{\substack{\| \\ g(x,t)}}\cdot\mathsf{d}\,t = \int_0^1 g(x,t)\,\mathsf{d}\,t$$

Функция $g(x,t)$ будет определена и непрерывна на прямоугольнике $[a;b]\times[0;1]$, поэтому по лемме 15.2.13, для любой сходящейся последовательности

$$x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x$$

получаем:

$$|F(x_n) - F(x)| = \left| \int_0^1 g(x_n, t) \, \mathsf{d}\, t - \int_0^1 g(x, t) \, \mathsf{d}\, t \right| = \left| \int_0^1 \big(g(x_n, t) - g(x, t) \big) \, \mathsf{d}\, t \right| \leqslant$$
$$\leqslant \int_0^1 |g(x_n, t) - g(x, t)| \, \mathsf{d}\, t \leqslant \int_0^1 \max_{t \in [0;1]} |g(x_n, t) - g(x, t)| \, \mathsf{d}\, t = \max_{t \in [0;1]} |g(x_n, t) - g(x, t)| \cdot (1 - 0) =$$
$$= \max_{t \in [0;1]} |g(x_n, t) - g(x, t)| \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0$$

То есть,

$$F(x_n) \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} F(x)$$

Это верно для любой последовательности x_n сходящейся к точке x, значит F непрерывна в точке x. Это в свою очередь верно для любой точки $x \in [0; 1]$, значит F непрерывна на всем отрезке $[0; 1]$. □

Доказательство теоремы 15.2.12. Сразу заметим, что, поскольку D измерима по Жордану (по теореме 15.2.9), а $f(x, y)$ непрерывна на D, интеграл в левой части формулы (15.2.99) существует (по теореме 15.2.4). С другой стороны, интеграл в правой части формулы (15.2.99) существует, потому что по лемме 15.2.14, подинтегральная функция (во внешнем интеграле) непрерывна:

$$\int_a^b \underbrace{\left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y) \, \mathsf{d}\, y \right)}_{\text{непрерывная функция от переменной } x} \mathsf{d}\, x$$

Теперь покажем, что левая часть формулы (15.2.99) совпадает с правой частью. Это мы проделаем в три этапа.

1. Сначала мы построим некоторое специальное разбиение области D. Пусть

$$x_i = a + \frac{i}{k}(b - a), \qquad i = 0, ..., k$$

Точки x_i будут разбиением отрезка $[a; b]$ на k одинаковых по длине отрезков:

$$a = x_0 < x_1 < ... < x_2 < ... < x_{k-1} < x_k = b$$

Соответственно, вертикальные линии $x = x_i$ будут разбивать область D на k вертикальных полос:

Затем положим

$$\varphi_j(x) = \varphi(x) + \frac{j}{k}\big(\psi(x) - \varphi(x)\big), \qquad j = 0, ..., k$$

Тогда графики функций $\varphi_i(x)$ будут разбивать область D на k “горизонтальных полос”:

Положив

$$D_{ij}^k : \quad \begin{cases} x_{i-1} \leqslant x \leqslant x_i \\ \varphi_{i-1}(x) \leqslant y \leqslant \varphi_i(x) \end{cases}$$

мы получим разбиение τ^k области D на k^2 маленьких правильных областей:

2. Второй этап доказательства состоит в том, чтобы убедиться, что диаметр такого разбиения стремится к нулю при увеличении k:

$$\Delta(\tau^k) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0. \tag{15.2.103}$$

Для этого нужно вписать каждую область D^k_{ij} в прямоугольник со сторонами параллельными осям координат:

Среди всех таких прямоугольников выберем тот прямоугольник P, высота h которого максимальна. Очевидно,

$$h = \varphi_j(\alpha) - \varphi_{j-1}(\beta), \quad \text{где} \quad \varphi_j(\alpha) = \max_{x\in[x_{i-1},x_i]} \varphi_j(x), \quad \varphi_{j-1}(\beta) = \min_{x\in[x_{i-1},x_i]} \varphi_{j-1}(x)$$

поэтому

$$\begin{aligned} h = \varphi_j(\alpha) - \varphi_{j-1}(\beta) = \varphi(\alpha) + \frac{j}{k}\big[\psi(\alpha)-\varphi(\alpha)\big] - \varphi(\beta) - \frac{j-1}{k}\big[\psi(\beta)-\varphi(\beta)\big] = \\ = \varphi(\alpha) - \varphi(\beta) + \frac{j}{k}\big[\psi(\alpha)-\psi(\beta)\big] - \frac{j}{k}\big[\varphi(\alpha)-\varphi(\beta)\big] + \frac{1}{k}\big[\psi(\beta)-\varphi(\beta)\big] = \\ = \frac{k-j}{k}\big[\varphi(\alpha)-\varphi(\beta)\big] + \frac{j}{k}\big[\psi(\alpha)-\psi(\beta)\big] + \frac{1}{k}\big[\psi(\beta)-\varphi(\beta)\big] \end{aligned}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{aligned} h = |h| = \left|\frac{k-j}{k}\big[\varphi(\alpha)-\varphi(\beta)\big] + \frac{j}{k}\big[\psi(\alpha)-\psi(\beta)\big] + \frac{1}{k}\big[\psi(\beta)-\varphi(\beta)\big]\right| \leqslant \\ \leqslant \underbrace{\frac{k-j}{k}}_{\substack{\wedge \\ 1}}\big|\varphi(\alpha)-\varphi(\beta)\big| + \underbrace{\frac{j}{k}}_{\substack{\wedge \\ 1}}\big|\psi(\alpha)-\psi(\beta)\big| + \frac{1}{k}\big|\psi(\beta)-\varphi(\beta)\big| \leqslant \\ \leqslant \big|\varphi(\alpha)-\varphi(\beta)\big| + \big|\psi(\alpha)-\psi(\beta)\big| + \frac{1}{k} \underbrace{\big|\psi(\beta)-\varphi(\beta)\big|}_{\substack{\wedge\!\shortmid \\ \max_{x\in[a;b]}\big|\psi(x)-\varphi(x)\big|}} \leqslant \\ \leqslant \big|\varphi(\alpha)-\varphi(\beta)\big| + \big|\psi(\alpha)-\psi(\beta)\big| + \frac{1}{k}\max_{x\in[a;b]}\big|\psi(x)-\varphi(x)\big| \end{aligned}$$

$$\Downarrow$$

$$h \leqslant \big|\varphi(\alpha)-\varphi(\beta)\big| + \big|\psi(\alpha)-\psi(\beta)\big| + \frac{1}{k}\cdot\max_{x\in[a;b]}\big|\psi(x)-\varphi(x)\big|$$

Теперь начнем менять индекс k. Для всякого k получится свой прямоугольник P^k с максимальной высотой h^k, и свои точки α^k и β^k:

$$h^k \leqslant \big|\varphi(\alpha^k)-\varphi(\beta^k)\big| + \big|\psi(\alpha^k)-\psi(\beta^k)\big| + \frac{1}{k}\cdot\max_{x\in[a;b]}\big|\psi(x)-\varphi(x)\big| \tag{15.2.104}$$

Устремим теперь k к бесконечности. Поскольку точки α^k, β^k при каждом k лежат в каком-то одном отрезке $[x_{i-1}; x_i]$, расстояние между ними не превышает $\frac{1}{k}$, поэтому

$$|\alpha^k - \beta^k| \leqslant \frac{1}{k} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

Отсюда следует, что

$$\varphi(\alpha^k) - \varphi(\beta^k) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0, \quad \psi(\alpha^k) - \psi(\beta^k) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

потому что функции φ и ψ непрерывны и значит равномерно непрерывны на $[a;b]$ по теореме Кантора 3.3.10. Теперь из (15.2.104) получаем

$$0 \leqslant h^k \leqslant \underbrace{\left|\varphi(\alpha^k) - \varphi(\beta^k)\right|}_{\substack{\downarrow \\ 0}} + \underbrace{\left|\psi(\alpha^k) - \psi(\beta^k)\right|}_{\substack{\downarrow \\ 0}} + \underbrace{\frac{1}{k}}_{\substack{\downarrow \\ 0}} \cdot \underbrace{\max_{x\in[a;b]} \left|\psi(x) - \varphi(x)\right|}_{\text{константа}} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

$$\Downarrow$$

$$h^k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

Это – то, что нам нужно было для доказательства формулы (15.2.103):

$$\Delta(\tau^k) = \max_{ij} \mathsf{diam}(D^k_{ij}) \leqslant \mathsf{diam}(P^k) = \sqrt{\left(\frac{b-a}{k}\right)^2 + (h^k)^2} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

3. Наконец, третий этап – собственно доказательство формулы (15.2.99). Для каждой области D^k_{ij} выберем точку $\xi_{ij} \in D^k_{ij}$, в которой функция f достигает максимума на D^k_{ij}:

$$f(\xi_{ij}) = M_{ij} = \max_{(x,y)\in D^k_{ij}} f(x,y)$$

Тогда мы получим:

$$\begin{gathered}
\int_a^b \mathsf{d}\,x \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\,\mathsf{d}\,y = \sum_{i=1}^k \int_{x_{i-1}}^{x_i} \mathsf{d}\,x \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\,\mathsf{d}\,y = \sum_{i=1}^k \int_{x_{i-1}}^{x_i} \mathsf{d}\,x \sum_{j=1}^k \int_{\varphi_{j-1}(x)}^{\varphi_j(x)} f(x,y)\,\mathsf{d}\,y = \\
= \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k \int_{x_{i-1}}^{x_i} \mathsf{d}\,x \int_{\varphi_{j-1}(x)}^{\varphi_j(x)} \underbrace{f(x,y)}_{\substack{\text{здесь } (x,y)\in D^k_{ij}, \\ \text{поэтому } f(x,y) \leqslant M_{ij}}} \mathsf{d}\,y \leqslant \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k \int_{x_{i-1}}^{x_i} \mathsf{d}\,x \int_{\varphi_{j-1}(x)}^{\varphi_j(x)} M_{ij}\,\mathsf{d}\,y = \\
= \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k M_{ij} \cdot \underbrace{\int_{x_{i-1}}^{x_i} \mathsf{d}\,x \int_{\varphi_{j-1}(x)}^{\varphi_j(x)} \mathsf{d}\,y}_{\substack{\| \\ \mu(D^k_{ij})}} = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k \underbrace{M_{ij}}_{\substack{\| \\ f(\xi_{ij})}} \cdot \mu(D^k_{ij}) = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k f(\xi_{ij}) \cdot \mu(D^k_{ij})
\end{gathered}$$

$$\Downarrow$$

$$\int_a^b \mathsf{d}\,x \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\,\mathsf{d}\,y \leqslant \underbrace{\sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k f(\xi_{ij}) \cdot \mu(D^k_{ij})}_{\text{интегральная сумма}} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \iint_D f(x,y)\,\mathsf{d}\,x\,\mathsf{d}\,y$$

$$\Downarrow$$

$$\int_a^b \mathsf{d}\,x \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\,\mathsf{d}\,y \leqslant \iint_D f(x,y)\,\mathsf{d}\,x\,\mathsf{d}\,y \tag{15.2.105}$$

Точно также, если в каждом D^k_{ij} выбрать точку $\eta_{ij} \in D^k_{ij}$, в которой функция f достигает минимума

$$f(\eta_{ij}) = m_{ij} = \min_{(x,y)\in D^k_{ij}} f(x,y)$$

то получим:

$$\int_a^b \mathrm{d}\,x \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}\,y \geqslant \underbrace{\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k} f(\eta_{ij})\cdot\mu(D_{ij}^k)}_{\text{интегральная сумма}} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y$$

$$\Downarrow$$

$$\int_a^b \mathrm{d}\,x \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}\,y \leqslant \iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y \qquad (15.2.106)$$

Вместе формулы (15.2.105) и (15.2.106) дают (15.2.99). □

Покажем теперь как используется формула (15.2.99).

◇ **15.2.6.** Вычислим интеграл от функции

$$f(x,y) = x\cdot y$$

по области D, ограниченной кривыми

$$y = x^2, \qquad x = y^2$$

Для этого надо сначала записать область в правильном виде. В пункте (b) мы подробно объясняли, как это делается, и здесь ответ будет таким:

$$D: \quad \begin{cases} 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ x^2 \leqslant y \leqslant \sqrt{x} \end{cases}$$

Теперь остается выписать формулу (15.2.100):

$$\iint_D x\cdot y\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y = \int_0^1 \mathrm{d}\,x \int_{x^2}^{\sqrt{x}} x\cdot y\,\mathrm{d}\,y =$$

$$= \int_0^1 \mathrm{d}\,x \left(\frac{x\cdot y^2}{2}\Big|_{y=x^2}^{y=\sqrt{x}}\right) = \int_0^1 \mathrm{d}\,x\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^5}{2}\right) =$$

$$= \left(\frac{x^3}{2} - \frac{x^6}{12}\right)\Big|_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{6} - \frac{1}{12} = \frac{1}{12}$$

Ответ: $\frac{1}{12}$.

◇ **15.2.7.** Вычислим двойной интеграл

$$\iint_D x\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y,$$

где область D ограничена кривыми

$$x = 0, \quad x = 2+\sin y, \quad y = 0, \quad y = 2\pi$$

Записываем область D в правильном виде:

$$D: \quad \begin{cases} 0 \leqslant y \leqslant 2\pi \\ 0 \leqslant x \leqslant 2+\sin y \end{cases}$$

Вычисления:

$$\iint_D x\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\,y \int_0^{2+\sin y} x\,\mathrm{d}\,x =$$

$$= \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\,y\; \frac{x^2}{2}\Big|_{x=0}^{x=2+\sin y} = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\,y\;(2+\sin y)^2 =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (4+4\sin y + \sin^2 y)\,\mathrm{d}\,y =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left(4+4\sin y + \frac{1-\cos 2y}{2}\right)\mathrm{d}\,y =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left(\frac{9}{2}+4\sin y - \frac{1}{2}\cos 2y\right)\mathrm{d}\,y =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{9y}{2} - 4\cos y - \frac{1}{4}\sin 2y\right)\Big|_{y=0}^{y=2\pi} = \frac{9\pi}{2}$$

Ответ: $\frac{9\pi}{2}$.

▷▷ **15.2.8.** Вычислите следующие двойные интегралы:

1) $\iint\limits_D x\cdot y^2\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y$, где D ограничена прямыми: $x=0, \quad y=0, \quad x+y=1$;
2) $\iint\limits_D 2y\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y$, где D ограничена линиями: $y=\sqrt{x}, \quad y=0, \quad x+y=2$;
3) $\iint\limits_D \frac{x^2}{y^2}\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y$, где D ограничена линиями: $x=2, \quad y=x, \quad xy=1$;
4) $\iint\limits_D e^x\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y$, где D ограничена линиями: $x=0, \quad y=1, \quad y=2, \quad x=\ln y$;
5) $\iint\limits_D (x^2+y^2)\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y$, где D ограничена линиями: $x=0, \quad y=x, \quad x+y=2a$;
6) $\iint\limits_D x\cdot y\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y$, где D ограничена линиями: $x+y=2, \quad x^2+y^2=2y$;
7) $\iint\limits_D (4-y)\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y$, где D ограничена линиями: $x^2=4y, \quad y=1$;
8) $\iint\limits_D e^{x+y}\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y$, где D ограничена линиями: $y=e^x, \quad x=0, \quad y=2$.

Переход от тройного интеграла к повторному. В случае $X = \mathbb{R}^3$ определенный на странице 918 кратный интеграл от функции $f : \mathbb{R}^3 \hookrightarrow \mathbb{R}$ по области $D \subseteq \mathbb{R}^3$ называется *тройным интегралом* и обозначается

$$\iiint_D f(x,y,z)\,\mathsf{d}\,x\,\mathsf{d}\,y\,\mathsf{d}\,z$$

Как и в случае двух переменных, вычисление тройного интеграла сводится к вычислению нескольких (в данном случае – трех) последовательно вложенных друг в друга определенных интегралов:

Теорема 15.2.15. *Пусть функция $f : \mathbb{R}^3 \hookrightarrow \mathbb{R}$ определена и непрерывна на правильной области*

$$D: \quad \begin{cases} a \leqslant x \leqslant b \\ \varphi(x) \leqslant y \leqslant \psi(x) \\ \Phi(x,y) \leqslant z \leqslant \Psi(x,y) \end{cases}$$

Тогда (f интегрируема на D и) тройной интеграл от $f(x,y,z)$ по D вычисляется по формуле

$$\iiint_D f(x,y)\,\mathsf{d}\,x\,\mathsf{d}\,y = \int_a^b \left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} \left[\int_{\Phi(x,y)}^{\Psi(x,y)} f(x,y,z)\,\mathsf{d}\,z \right] \mathsf{d}\,y \right) \mathsf{d}\,x \qquad (15.2.107)$$

- Интеграл, стоящий в правой части формулы (15.2.107) называется *повторным интегралом* (третьего порядка) и имеет специальное обозначение (удобное тем, что сокращает количество скобок):

$$\int_a^b \mathsf{d}\,x \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} \mathsf{d}\,y \int_{\Phi(x,y)}^{\Psi(x,y)} f(x,y,z)\,\mathsf{d}\,z := \int_a^b \left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} \left[\int_{\Phi(x,y)}^{\Psi(x,y)} f(x,y,z)\,\mathsf{d}\,z \right] \mathsf{d}\,y \right) \mathsf{d}\,x$$

Поэтому формула (15.2.107) записывается обычно в виде

$$\iiint_D f(x,y)\,\mathsf{d}\,x\,\mathsf{d}\,y = \int_a^b \mathsf{d}\,x \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} \mathsf{d}\,y \int_{\Phi(x,y)}^{\Psi(x,y)} f(x,y,z)\,\mathsf{d}\,z \qquad (15.2.108)$$

Теорема 15.2.15 доказывается так же как теорема 15.2.12, поэтому в этой теме мы рассмотрим только примеры.

◇ **15.2.9.** Вычислим интеграл от функции

$$f(x,y,z) = (1-x)\cdot y \cdot z$$

по области D, ограниченной поверхностями

$$x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0, \quad x+y+z = 1$$

Для этого записываем область в правильном виде:

$$D: \quad \begin{cases} 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 0 \leqslant y \leqslant 1-x \\ 0 \leqslant z \leqslant 1-x-y \end{cases}$$

После этого выписываем формулу (15.2.108):

$$\iiint_D (1-x)\cdot y\cdot z\,\mathsf{d}\,x\,\mathsf{d}\,y\,\mathsf{d}\,z =$$

$$= \int_0^1 \mathsf{d}\,x \int_0^{1-x} \mathsf{d}\,y \int_0^{1-x-y} (1-x)\cdot y\cdot z\,\mathsf{d}\,z =$$

$$= \int_0^1 \mathsf{d}\,x \int_0^{1-x} \mathsf{d}\,y \Big((1-x)\cdot y \cdot \frac{z^2}{2}\Big)\Big|_{z=0}^{z=1-x-y} =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 \mathsf{d}\,x \int_0^{1-x} \mathsf{d}\,y \big((1-x)\cdot y\cdot(1-x-y)^2\big) =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 \mathsf{d}\,x \int_0^{1-x} (1-x)\cdot y\cdot\big((1-x)^2 - 2(1-x)y + y^2\big)\,\mathsf{d}\,y =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 \mathsf{d}\,x \int_0^{1-x} (1-x)\cdot\big((1-x)^2 y - 2(1-x)y^2 + y^3\big)\,\mathsf{d}\,y =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 \mathsf{d}\,x (1-x)\cdot\left((1-x)^2\frac{y^2}{2} - 2(1-x)\frac{y^3}{3} + \frac{y^4}{4}\right)\Big|_{y=0}^{y=1-x} =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 (1-x)\cdot\left(\frac{(1-x)^4}{2} - 2\frac{(1-x)^4}{3} + \frac{(1-x)^4}{4}\right)\mathsf{d}\,x =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 (1-x)^5\cdot\left(\frac{6}{12} - \frac{8}{12} + \frac{3}{12}\right)\mathsf{d}\,x =$$

$$= \frac{1}{24}\int_0^1 (1-x)^5\,\mathsf{d}\,x = -\frac{1}{24\cdot 6}(1-x)^6\Big|_0^1 = \frac{1}{144}$$

Ответ: $\frac{1}{144}$.

⊳⊳ **15.2.10.** Вычислите следующие тройные интегралы:

1) $\iiint\limits_D x^2\cdot y^2\cdot z \,\mathsf{d}\, x \,\mathsf{d}\, y$, где D ограничена поверхностями: $x=1,\ x=3,\ y=0,\ y=2,\ z=2,\ z=5$;
2) $\iiint\limits_D x\cdot y\cdot z \,\mathsf{d}\, x \,\mathsf{d}\, y$, где D задана неравенствами: $x\geqslant 0,\quad y\geqslant 0,\quad z\geqslant 0,\quad x^2+y^2+z^2\leqslant 1$;
3) $\iiint\limits_D z \,\mathsf{d}\, x \,\mathsf{d}\, y$, где D задана неравенствами: $x\geqslant 0,\quad y\geqslant 0,\quad z\geqslant 0,\quad 2x+y+z\leqslant 4$;
4) $\iiint\limits_D (x+z) \,\mathsf{d}\, x \,\mathsf{d}\, y$, где D задана неравенствами: $x\geqslant 0,\quad z\geqslant 0,\quad x+z\leqslant 1,\quad x+y\leqslant 1,\quad x-y\leqslant 1$;
5) $\iiint\limits_D (x^2-z^2) \,\mathsf{d}\, x \,\mathsf{d}\, y$, где D задана неравенствами: $y+x\geqslant 0,\quad z\leqslant 1,\quad x\leqslant z,\quad y\leqslant z$;
6) $\iiint\limits_D xyz \,\mathsf{d}\, x \,\mathsf{d}\, y$, где D задана неравенствами: $y\geqslant x^2,\quad x\geqslant y^2,\quad 0\leqslant z\leqslant xy$;
7) $\iiint\limits_D xy^2z^3 \,\mathsf{d}\, x \,\mathsf{d}\, y$, где D задана неравенствами: $y\leqslant x\leqslant 1,\quad 0\leqslant z\leqslant xy$;

(c) Интегралы со значениями в евклидовом пространстве

Пусть нам даны:

- евклидовы пространства X и Y,
- отображение $\alpha : X \hookrightarrow Y$.
- измеримое множество $D\subseteq \mathsf{D}(\alpha)$.

Кратный интеграл отображения α по множеству D

$$\int_D \alpha(x)\,\mathsf{d}\, x$$

определяется так же, как и в случае $Y=\mathbb{R}$ (определение на с.918):

- вектор $I\in Y$ называется *векторным интегралом* отображения α на измеримом множестве $D\subseteq \mathsf{D}(\alpha)$, и обозначается

$$I=\int_D \alpha(x)\ \mathsf{d}\, x$$

если для всякой измельчающейся последовательности разбиений $\mathcal{T}^m$ множества D

$$\Delta(\mathcal{T}^m) \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

и любой системы выделенных точек

$$\xi_T\in T,\qquad T\in\mathcal{T}^m$$

последовательность векторов

$$\sum_{T\in\mathcal{T}^m}\alpha(\xi_T)\cdot\mu(T)$$

(называемых *интегральными суммами* отображения α на множестве D) стремятся к вектору I:

$$\sum_{T\in\mathcal{T}^m}\alpha(\xi_T)\cdot\mu(T) \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} I$$

Если такой вектор I существует, то отображение α называется *интегрируемым* (по Риману) на множестве D.

Теорема 15.2.16. *Для отображения евклидовых пространств $\alpha : X\hookrightarrow Y$ и измеримого по Жордану множества $D\subseteq \mathsf{D}(\alpha)$ следующие условия эквивалентны:*

(i) *α интегрируемо на D,*

(ii) *для любого ортогонального нормированного базиса $\mathbf{e}$ в Y координатные функции $t\in D\mapsto \left[\frac{\alpha(t)}{\mathbf{e}}\right]_i$ интегрируемы на D,*

(iii) *для какого-нибудь ортогонального нормированного базиса $\mathbf{e}$ в Y координатные функции $t\in D\mapsto \left[\frac{\alpha(t)}{\mathbf{e}}\right]_i$ интегрируемы на D.*

Если эти условия выполняются, то интеграл отображения α на D задается равенством

$$\int_D \alpha(t)\ \mathsf{d}\,t = \sum_{i=1}^{n} \int_D \left[\frac{\alpha(t)}{\mathbf{e}}\right]_i \mathsf{d}\,t \cdot e_i \tag{15.2.109}$$

(где $\mathbf{e}$ *– произвольный ортогональный нормированный базис в* Y*).*

Доказательство. Сначала докажем импликацию (i)⇒(ii). Пусть α интегрируемо на D. Обозначим его интеграл буквой I и выберем произвольный ортогональный нормированный базис $\mathbf{e}$ в Y. Тогда из условия

$$\sum_{T\in\mathcal{T}} \alpha(\xi_T)\cdot\mu(T) \underset{\mathsf{diam}\,\mathcal{T}\to\infty}{\longrightarrow} I$$

мы при любом $i = 1, ..., n$ получим

$$\left|\sum_{T\in\mathcal{T}} \left[\frac{\alpha(\xi_T)}{\mathbf{e}}\right]_i \cdot\mu(T) - \left[\frac{I}{\mathbf{e}}\right]_i\right| = \left|\left[\frac{\sum_{T\in\mathcal{T}} \alpha(\xi_T)\cdot\mu(T) - I}{\mathbf{e}}\right]_i\right| \leqslant \left|\sum_{T\in\mathcal{T}} \alpha(\xi_T)\cdot\mu(T) - I\right| \underset{\mathsf{diam}\,\mathcal{T}\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

То есть интегральные суммы функции $t\in D\mapsto \left[\frac{\alpha(t)}{\mathbf{e}}\right]_i$ сходятся к числу $\left[\frac{I}{\mathbf{e}}\right]_i$ при измельчении разбиения $\mathcal{T}$:

$$\sum_{T\in\mathcal{T}} \left[\frac{\alpha(\xi_T)}{\mathbf{e}}\right]_i \cdot\mu(T) \underset{\mathsf{diam}\,\mathcal{T}\to\infty}{\longrightarrow} \left[\frac{I}{\mathbf{e}}\right]_i$$

Значит, эта функция интегрируема.

Импликация (ii)⇒(iii) очевидна.

Докажем (iii)⇒(i). Пусть $\mathbf{e}$ – какой-нибудь ортогональный нормированный базис в Y, и пусть для всякого $i = 1, ..., n$ функция $t\in D\mapsto \left[\frac{\alpha(t)}{\mathbf{e}}\right]_i$ интегрируема на D. Тогда вектор

$$I = \sum_{i=1}^{n} \int_D \left[\frac{\alpha(t)}{\mathbf{e}}\right]_i \mathsf{d}\,t \cdot e_i$$

будет интегралом отображения α на D, потому что

$$\left|\sum_{T\in\mathcal{T}} \alpha(\xi_T)\cdot\mu(T) - I\right| = \left\{\sum_{i=1}^{n} \Bigg(\underbrace{\sum_{T\in\mathcal{T}^m} \left[\frac{\alpha(\xi_T)}{\mathbf{e}}\right]_i \cdot\mu(T) - \int_D \left[\frac{\alpha(t)}{\mathbf{e}}\right]_i \mathsf{d}\,t}_{\substack{\downarrow \\ 0 \\ \text{как разность интегральной суммы и интеграла}}} \Bigg)^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \underset{\mathsf{diam}\,\mathcal{T}\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

Мы доказали равносильность условий (i), (ii), (iii). Параллельно мы вывели, что в случае выполнения (iii) интеграл отображения α на D можно определить формулой (15.2.109). Поскольку такой интеграл единственен, эта формула верна всегда. □

В качестве следствия мы получаем аналог теоремы 15.2.4:

Теорема 15.2.17. *Если отображение евклидовых пространств* $\alpha : X \hookrightarrow Y$ *непрерывно на измеримом по Жордану компакте* $D \subseteq \mathsf{D}(\alpha)$*, то* α *интегрируемо на* D*.*

Свойства интеграла со значениями в евклидовом пространстве:

1°. **Перестановочность со скалярным умножением:** скалярное умножение векторного интеграла на произвольный вектор $p\in X$ дает обычный интеграл по измеримому компакту

$$\left\langle p, \int_D \alpha(t)\ \mathsf{d}\,t\right\rangle = \int_D \langle p, \alpha(t)\rangle\ \mathsf{d}\,t \tag{15.2.110}$$

как следствие, для всякого линейного функционала $f : X \to \mathbb{R}$ справедлива формула

$$f\left(\int_D \alpha(t)\ \mathsf{d}\,t\right) = \int_D f(\alpha(t))\ \mathsf{d}\,t \tag{15.2.111}$$

2°. **Неравенство выпуклости для векторного интеграла:** модуль векторного интеграла не превосходит интеграла от модуля

$$\left| \int_D \alpha(t)\, \mathsf{d}\, t \right| \leqslant \int_D |\alpha(t)|\, \mathsf{d}\, t \tag{15.2.112}$$

3°. **Оценка невязки в неравенстве выпуклости:** если отображение $\alpha : D \to Y$ удовлетворяет условию Липшица

$$|\alpha(s) - \alpha(t)| \leqslant C \cdot |s - t|, \quad s, t \in D \tag{15.2.113}$$

то невязка (разность между правой и левой частями) в неравенстве выпуклости оценивается формулой

$$0 \leqslant \int_D |\alpha(s)|\, \mathsf{d}\, s - \left| \int_D \alpha(s)\, \mathsf{d}\, s \right| \leqslant 2C \cdot \mathsf{diam}(D) \cdot \mu(D) \tag{15.2.114}$$

Доказательство. 1. Перестановочность со скалярным умножением:

$$\left\langle p, \int_D \alpha(t)\ \mathsf{d}\, t \right\rangle = \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{p}{\mathbf{e}} \right]_i \cdot \left[\frac{\int_D \alpha(t)\ \mathsf{d}\, t}{\mathbf{e}} \right]_i = (15.2.109) = \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{p}{\mathbf{e}} \right]_i \cdot \int_D \left[\frac{\alpha(t)}{\mathbf{e}} \right]_i \mathsf{d}\, t =$$
$$= \int_D \left(\sum_{i=1}^{n} \left[\frac{p}{\mathbf{e}} \right]_i \cdot \left[\frac{\alpha(t)}{\mathbf{e}} \right]_i \right) \mathsf{d}\, t = \int_D \langle p, \alpha(t) \rangle\ \mathsf{d}\, t$$

2. Выпуклость:

$$\left| \int_D \alpha(t)\, \mathsf{d}\, t \right| = \sqrt{\left(\int_D \alpha_1(t)\, \mathsf{d}\, t \right)^2 + \ldots + \left(\int_D \alpha_m(t)\, \mathsf{d}\, t \right)^2} = (13.1.13) =$$
$$= \sup_{C_1^2 + \ldots + C_m^2 = 1} \left(C_1 \cdot \int_D \alpha_1(t)\, \mathsf{d}\, t + \ldots + C_m \cdot \int_D \alpha_m(t)\, \mathsf{d}\, t \right) =$$
$$= \sup_{C_1^2 + \ldots + C_m^2 = 1} \int_D \big(C_1 \cdot \alpha_1(t) + \ldots + C_m \cdot \alpha_m(t) \big)\, \mathsf{d}\, t \leqslant$$
$$\leqslant \int_D \sup_{C_1^2 + \ldots + C_m^2 = 1} \big(C_1 \cdot \alpha_1(t) + \ldots + C_m \cdot \alpha_m(t) \big)\, \mathsf{d}\, t = (13.1.13) = \int_D \sqrt{\big(\alpha_1(t)\big)^2 + \ldots + \big(\alpha_m(t)\big)^2}\, \mathsf{d}\, t =$$
$$= \int_D |\alpha(t)|\, \mathsf{d}\, t$$

3. Докажем формулу (15.2.114). Первое неравенство в этой формуле

$$0 \leqslant \int_D |\alpha(s)|\, \mathsf{d}\, s - \left| \int_D \alpha(s)\, \mathsf{d}\, s \right|$$

есть просто по-другому записанное неравенство выпуклости (15.2.112), поэтому нужно убедиться в справедливости второго неравенства. Для этого зафиксируем точку $\xi \in D$ и заметим, что

$$\int_D |\alpha(\xi)|\, \mathsf{d}\, s = \left| \int_D \alpha(\xi)\, \mathsf{d}\, s \right| \tag{15.2.115}$$

Действительно,

$$\int_D \underbrace{|\alpha(\xi)|}_{\substack{\uparrow \\ \text{не зависит от } s, \\ \text{поэтому можно вынести} \\ \text{из-под знака интеграла}}} \mathsf{d}\, s = |\alpha(\xi)| \cdot \underbrace{\int_D \mathsf{d}\, s}_{\substack{\| \\ \mu(D)}} = |\alpha(\xi)| \cdot \underbrace{\mu(D)}_{\substack{\geqslant \\ 0, \\ \text{поэтому можно внести} \\ \text{под знака модуля}}} = |\alpha(\xi) \cdot \mu(D)| = \left| \underbrace{\alpha(\xi)}_{\substack{\uparrow \\ \text{не зависит от } s, \\ \text{поэтому можно внести} \\ \text{под знак интеграла}}} \cdot \int_D \mathsf{d}\, s \right| = \left| \int_D \alpha(\xi)\, \mathsf{d}\, s \right|$$

Теперь получаем:

$$\left| \int_D |\alpha(s)| \,\mathsf{d}\, s - \left| \int_D \alpha(s) \,\mathsf{d}\, s \right| \right| = \left| \int_D |\alpha(s)| \,\mathsf{d}\, s \underbrace{- \int_D |\alpha(\xi)| \,\mathsf{d}\, s + \left| \int_D \alpha(\xi) \,\mathsf{d}\, s \right|}_{\substack{\| \\ 0, \\ \text{в силу (15.2.115)}}} - \left| \int_D \alpha(s) \,\mathsf{d}\, s \right| \right| \leqslant$$

$$\leqslant \left| \int_D |\alpha(s)| \,\mathsf{d}\, s - \int_D |\alpha(\xi)| \,\mathsf{d}\, s \right| + \left| \left| \int_D \alpha(\xi) \,\mathsf{d}\, s \right| - \left| \int_D \alpha(s) \,\mathsf{d}\, s \right| \right| \leqslant$$

$$\leqslant \left| \int_D \Big(|\alpha(s)| - |\alpha(\xi)| \Big) \,\mathsf{d}\, s \right| + \left| \int_D \alpha(\xi) \,\mathsf{d}\, s - \int_D \alpha(s) \,\mathsf{d}\, s \right| \leqslant \int_D \Big| |\alpha(s)| - |\alpha(\xi)| \Big| \,\mathsf{d}\, s + \left| \int_D \Big(\alpha(\xi) - \alpha(s) \Big) \,\mathsf{d}\, s \right| \leqslant$$

$$\leqslant \int_D \Big| \alpha(s) - \alpha(\xi) \Big| \,\mathsf{d}\, s + \int_D \Big| \alpha(\xi) - \alpha(s) \Big| \,\mathsf{d}\, s = 2 \int_D \Big| \alpha(s) - \alpha(\xi) \Big| \,\mathsf{d}\, s \leqslant 2 \int_D C \cdot \Big| s - \xi \Big| \,\mathsf{d}\, s \leqslant 2 \int_D C \cdot \mathsf{diam}(D) \,\mathsf{d}\, s =$$
$$= 2C \cdot \mathsf{diam}(D) \cdot \mu(D)$$

□

§ 3 Гладкие, регулярные и полурегулярные отображения компакта

(a) Гладкие отображения компакта и условие Липшица

(b) Теоремы Сарда

Условие Липшица и его следствия.

- Говорят, что отображение евклидовых пространств $\varphi : X \hookrightarrow Y$ удовлетворяет *условию Липшица* на множестве $K \subseteq X$, если $K \subseteq \mathsf{D}(\varphi)$ и существует константа C (называемая *константой Липшица* для φ на K) такая, что выполняется неравенство

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| \leqslant C \cdot |x - y|, \quad x, y \in K. \tag{15.3.116}$$

Теорема 15.3.1. *Всякое непрерывно дифференцируемое отображение евклидовых пространств $\varphi : X \hookrightarrow Y$ удовлетворяет условию Липшица на любом компакте K из своей области определения $D(\varphi)$.*

Доказательство. Пусть U – окрестность компакта K, на которую φ гладко продолжается. По теореме 14.1.13 о равномерной оценке остатка в формуле Тейлора, найдутся два числа $\varepsilon > 0$ и $M > 0$ такие что

$$\varphi(x + p) = \varphi(x) + \mathsf{d}\,\varphi(x)[p] + R_1(x, p), \quad |R_k(x, p)| \leqslant M \cdot |p|^2, \qquad x \in K,\ |p| \leqslant \varepsilon$$

Положим

$$L = \max_{x \in K} |\varphi(x)|, \qquad N = \max_{x \in K} \|\mathsf{d}\,\varphi(x)\|, \qquad C = \max\left\{ \frac{2L}{\varepsilon}, N + \varepsilon M \right\} \tag{15.3.117}$$

Покажем, что для любых $x, y \in K$, выполняется неравенство Липшица (15.3.116). Для этого придется рассмотреть два случая. Сначала предполагаем, что $|y - x| \geqslant \varepsilon$. Тогда

$$|\varphi(y) - \varphi(x)| \leqslant |\varphi(y)| + |\varphi(x)| \leqslant L + L = \frac{2L}{\varepsilon} \cdot \varepsilon \leqslant \frac{2L}{\varepsilon} \cdot |y - x| \leqslant C \cdot |y - x|$$

Затем предполагаем, что $|y - x| \leqslant \varepsilon$. В этом случае

$$|\varphi(y) - \varphi(x)| = |\,\mathsf{d}\,\varphi(x)[y - x] + R_1(x, y - x)| \leqslant |\,\mathsf{d}\,\varphi(x)[y - x]| + |R_1(x, y - x)| \leqslant$$
$$\leqslant \underbrace{\|\mathsf{d}\,\varphi(x)\|}_{\substack{\wedge\!\! \| \\ N}} \cdot |y - x| + \underbrace{|R_1(x, y - x)|}_{\substack{\wedge\!\! \| \\ M \cdot |y - x|^2}} \leqslant N \cdot |y - x| + M \cdot \underbrace{|y - x|}_{\substack{\wedge\!\! \| \\ \varepsilon}} \cdot |y - x| \leqslant$$
$$\leqslant N \cdot |y - x| + M \cdot \varepsilon \cdot |y - x| = (N + \varepsilon M) \cdot |y - x| \leqslant C \cdot |y - x|$$

□

◇ **15.3.1.** Существует компактная область D в $\mathbb{R}^2$ и функция $f : D \to \mathbb{R}$ со следующими свойтсвами:

1) f непрерывна на D;
2) f – гладкая на $\operatorname{Int} D$;
3) частные производные $\nabla_i f$ непрерывно продолжаются на D.
4) f не удовлетворяет условию Липшица.

Доказательство. Рассмотрим бесконечно гладкую функцию $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ со следующими свойствами:

$$\forall x \leqslant 0 \quad \varphi(x) = 0, \qquad \forall x > 0 \quad \varphi(x) > 0$$

(такую функцию мы построили в примере 10.2.7). Пусть G обозначает открытое множество на плоскости $\mathbb{R}^2$, лежащее между положительным лучом прямой OX и куском графика функции $\varphi^2(x)$, соответствующим условию $x \geqslant 0$:

$$G: \quad \begin{cases} 0 < x \\ 0 < y < \varphi^2(x) \end{cases}$$

Пусть D – замкнутая область в $\mathbb{R}^2$, получающаяся из круга $B = \{x^2 + y^2 \leqslant 1\}$ выбрасыванием области G:

$$D = B \setminus G$$

Рассмотрим функцию

$$f(x,y) = \begin{cases} \varphi(x), & \text{если} \quad x > 0 \quad \text{и} \quad y > 0 \\ 0, & \text{в противном случае} \end{cases}$$

По построению, это будет слабо гладкая функция на D. Покажем, что она не удовлетворяет условию Липшица. Действительно, для всякого $x > 0$ возьмем две точки на нашей области: $A(x, \varphi^2(x))$ и $B(x, 0)$. Тогда

$$\frac{|f(A) - f(B)|}{|A - B|} = \frac{|f(x,\varphi^2(x)) - f(x,0)|}{|\varphi^2(x) - 0|} = \\ = \frac{\varphi(x) - 0}{\varphi^2(x)} = \frac{1}{\varphi(x)} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} \infty$$

Это означает, что не может быть такой константы $C > 0$, для которой неравенство $|f(A) - f(B)| \leqslant C \cdot |A - B|$ выполнялось бы для любых $A, B \in D$. □

Теорема 15.3.2. *Если $\varphi : X \hookrightarrow Y$ – непрерывно дифференцируемое отображение евклидовых пространств, причем $\dim X \leqslant \dim Y$, то всякий компакт $K \subseteq \mathsf{D}(\varphi)$ с нулевой мерой Жордана оно переводит в компакт $\varphi(K)$ с нулевой мерой Жордана.*

Нам понадобится

Лемма 15.3.3. *Если $\varphi : X \hookrightarrow Y$ – непрерывно дифференцируемое отображение евклидовых пространств и $K \subseteq \mathsf{D}(\varphi)$ – компакт, то существуют такие два числа $\varepsilon > 0$ и $M > 0$, что для всякого гиперкуба Q с диаметром, не превосходящим ε и имеющего непустое пересечение с K*

$$\operatorname{diam} Q \leqslant \varepsilon \quad \& \quad Q \cap K \neq \varnothing \tag{15.3.118}$$

выполняется неравенство

$$\operatorname{diam} \varphi(Q) \leqslant M \cdot \operatorname{diam} Q \tag{15.3.119}$$

Доказательство. По определению непрерывно дифференцируемого отображения евклидовых пространств, область определения $\mathsf{D}(\varphi)$ является открытым множеством в X. Поэтому по следствию 13.3.7, некоторая ε-окрестность компакта K содержится в $\mathsf{D}(\varphi)$:

$$B_\varepsilon(K) \subseteq U$$

Зафиксируем это $\varepsilon > 0$, и заметим, что множество $B_\varepsilon(K)$ тоже является компактом, потому что оно замкнуто и ограничено. Поэтому, по теореме 15.3.1, отображение φ должно удовлетворять условию Липшица на компакте $B_\varepsilon(K)$:

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| \leqslant M \cdot |x - y|, \qquad x, y \in B_\varepsilon(K)$$

Отсюда уже сразу следует наша лемма. □

Доказательство теоремы 15.3.2. Обозначим $m = \dim X \leqslant \dim Y = n$. По теореме 14.2.2, $\varphi(K)$ будет компактом в Y, поэтому нам нужно только доказать, что его мера будет нулевой.

Воспользуемся леммой 15.3.3, и подберем такие числа $\varepsilon > 0$ и $M > 0$, чтобы для всякого гиперкуба Q выполнялось

$$\operatorname{diam} Q \leqslant \varepsilon \quad \& \quad Q \cap K \neq \varnothing \quad \Longrightarrow \quad \operatorname{diam} \varphi(Q) \leqslant M \cdot \operatorname{diam} Q$$

Рассмотрим двоичную сетку с каким-нибудь рангом k таким, чтобы $\frac{1}{k} \leqslant \frac{\varepsilon}{\sqrt{m}}$. Тогда всякая инцидентная клетка Q ранга k для K будет иметь диаметр $\mathsf{diam}\, Q \leqslant \varepsilon$, поэтому

$$\mathsf{diam}\, \varphi(Q) \leqslant M \cdot \mathsf{diam}\, Q = M \cdot \frac{\sqrt{m}}{k}$$

$$\Downarrow$$

$$\varphi(Q) \text{ содержится в некотором кубе с ребром } M \cdot \frac{\sqrt{m}}{k}$$

$$\Downarrow$$

$$\mu^*\big(\varphi(Q)\big) \leqslant \left(M \cdot \frac{\sqrt{m}}{k}\right)^n = M^n \cdot \frac{\sqrt{m^n}}{k^n}$$

$$\Downarrow$$

$$0 \leqslant \mu^*\big(\varphi(K)\big) \leqslant \sum_{Q \subseteq \mathsf{E}_k(K)} M^n \cdot \frac{\sqrt{m^n}}{k^n} = M^n \cdot \sqrt{m^n} \cdot \frac{1}{k^{n-m}} \cdot \overbrace{\frac{1}{k^m}}^{\substack{\text{мера одной} \\ \text{клетки в } \mathbb{R}^m}} \cdot \overbrace{N_k}^{\substack{\text{количество} \\ \text{инцидентных} \\ \text{клеток ранга } k}} =$$

$$= \underbrace{M^n \cdot \sqrt{m^n}}_{\text{не зависит от } k} \cdot \frac{1}{k^{n-m}} \cdot \underbrace{\mu\big(\mathsf{E}_k(K)\big)}_{\substack{\text{общая мера} \\ \text{инцидентных} \\ \text{клеток ранга } k}} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

$$\Downarrow$$

$$\mu^*\big(\varphi(K)\big) = 0$$

$\square$

Условие Гельдера и его следствия.

- Будем говорить, что отображение евклидовых пространств $\varphi : X \hookrightarrow Y$ удовлетворяет условию Гельдера на множестве $K \subseteq X$ с показателем $\alpha > 0$, если φ определено на ε-окрестности $B_\varepsilon(K)$ множества K и существует константа $M > 0$ такая, что

$$|\varphi(x+p) - \varphi(x)| \leqslant M \cdot |p|^\alpha, \qquad x \in K, \ |p| < \varepsilon. \qquad (15.3.120)$$

Теорема 15.3.4. *Пусть $\varphi : X \hookrightarrow Y$ – отображение евклидовых пространств, непрерывно дифференцируемое порядка $m+1$ и $K \subseteq X$ – множество со свойствами:*

(i) некоторая ε-окрестность $B_\varepsilon(K)$ множества K содержится в области определения φ:

$$B_\varepsilon(K) \subseteq \mathsf{D}(\varphi),$$

(ii) на K все дифференциалы отображения φ порядков от 1 до m равны нулю:

$$\forall x \in K \quad \forall k = 1, ..., m \qquad \mathsf{d}\, \varphi(x) = 0.$$

Тогда отображение φ удовлетворяет условию Гельдера на множестве K с показателем $\alpha = m+1$.

Доказательство. По теореме 14.2.9, найдется $M > 0$ такое, что $x \in K$ и $|p| < \varepsilon$ мы получим

$$|\varphi(x+p) - \varphi(x)| = |\varphi(x+p) - \varphi(x) - \underbrace{\mathsf{d}\, \varphi(x)}_{\substack{\| \\ 0}}[p] - \underbrace{\mathsf{d}^2\, \varphi(x)}_{\substack{\| \\ 0}}[p] - ... - \underbrace{\mathsf{d}^m\, \varphi(x)}_{\substack{\| \\ 0}}[p]| = |R_m(x,p)| \leqslant M \cdot |p|^{m+1}.$$

$\square$

Теорема 15.3.5. *Пусть отображение евклидовых пространств $\varphi : X \hookrightarrow Y$ удовлетворяет условию Гельдера на ограниченном множестве $K \subseteq X$ с показателем $\alpha > \frac{\dim X}{\dim Y}$. Тогда образ $\varphi(K)$ является множеством нулевой меры Жордана:*

$$\mu\big(\varphi(K)\big) = 0$$

Доказательство. Пусть выполняется (15.3.120). Обозначим $m = \dim X$, $n = \dim Y$ и рассмотрим двоичную сетку с рангом $r > -\log_2 \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}$, то есть такую, у которой диаметр всякой клетки (куба) P, меньше ε:

$$\operatorname{diam} P = \frac{\sqrt{m}}{2^r} < \varepsilon.$$

Зафиксируем какую-нибудь клетку P, инцидентную K, и покажем, что

$$\mu\big(\varphi(K \cap P)\big) = 0$$

Поскольку K покрывается конечным набором таких клеток P, это будет означать, что $\mu\big(\varphi(K)\big) = 0$.

Рассмотрим новую двоичную сетку более высокого ранга $i > r$. Куб P при этом разбивается на $(2^{i-r})^m$ маленьких кубиков. Пусть Q – какой-нибудь из этих маленьких кубиков, причем инцидентный K. Из (15.3.120) мы получаем:

$$\operatorname{diam} \varphi(Q) \leqslant M \cdot (2 \operatorname{diam} Q)^\alpha = M \cdot \left(2 \cdot \frac{1}{2^i}\right)^\alpha = M \cdot \frac{2^\alpha}{2^{i\alpha}}$$

$$\Downarrow$$

$$\mu\big(\varphi(Q)\big) \leqslant \big(\operatorname{diam} \varphi(Q)\big)^n \leqslant \left(M \cdot \frac{2^\alpha}{2^{i\alpha}}\right)^n = M^n \cdot \frac{2^{\alpha n}}{2^{i\alpha n}}$$

$$\Downarrow$$

$$\mu\big(\varphi(K \cap P)\big) \leqslant \underbrace{(2^{i-r})^m}_{\substack{\text{максимальное возможное} \\ \text{число кубиков } Q, \\ \text{содержащихся в } P \\ \text{и инцидентных } K}} \cdot M^n \cdot \frac{2^{\alpha n}}{2^{i\alpha n}} = M^n \cdot \frac{2^{\alpha n}}{2^{rm}} \cdot \frac{1}{2^{i(\alpha n - m)}} \underset{i\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

$$\Downarrow$$

$$\mu\big(\varphi(K \cap P)\big) = 0$$

□

Малая теорема Сарда.

Теорема 15.3.6 (малая теорема Сарда). *Если $\varphi : X \hookrightarrow Y$ – непрерывно дифференцируемое отображение евклидовых пространств, причем $\dim X < \dim Y$, то всякий компакт $K \subseteq \mathsf{D}(\varphi)$ оно переводит в компакт $\varphi(K)$ с нулевой мерой Жордана.*

Доказательство. Подберем $\varepsilon > 0$ так, чтобы замкнутая окрестность $B_\varepsilon(K)$ компакта K содержалась в $\mathsf{D}(\varphi)$. По теореме 15.3.1, отображение φ удовлетворяет условию Липшица на компакте $B_\varepsilon(K)$. Значит, φ удовлетворяет условию Гельдера (15.3.120) на K с показателем $\alpha = 1 > \frac{\dim X}{\dim Y}$. Отсюда по теореме 15.3.5, $\mu\big(\varphi(K)\big) = 0$. □

Критические точки и критические значения. Напомним, что в примере 14.2.7 мы определили понятие критической точки: если X – евклидово пространство и $f : X \hookrightarrow \mathbb{R}$ – непрерывно дифференцируемая функция[9], то точка $a \in \mathsf{D}(f)$ называется

— *критической* для f, если дифференциал этой функции в этой точке равен нулю:

$$\mathsf{d} f(a) = 0;$$

— *некритической* для f, если это не так:

$$\mathsf{d} f(a) \neq 0.$$

Пусть кроме того D – компакт в области определения $\mathsf{D}(f)$ функции f. Число $\lambda \in \mathbb{R}$ называется

— *некритическим значением для функции f на компакте D*, если все точки $x \in D$, где f принимает значение λ являются некритическими:

$$\forall x \in D \quad f(x) = \lambda \quad \Longrightarrow \quad \mathsf{d} f(x) \neq 0$$

соответствующее множество уровня $\{x \in D : \ f(x) = \lambda\}$ при этом называется *некритическим множеством уровня функции f на компакте D*;

[9]Непрерывно дифференцируемые функции на евклидовых пространствах были определены на с.808.

— *критическим значением для функции f на компакте D*, если оно является значением f в некоторой критической точке $x \in D$:

$$\exists x \in D \qquad \lambda = f(x) \quad \& \quad \mathsf{d}\, f(x) = 0;$$

соответствующее множество уровня $\{x \in D : \ f(x) = \lambda\}$ в таком случае называется *критическим множеством уровня функции f на компакте D*.

Множество всех критических значений непрерывно дифференцируемой функции $f : X \hookrightarrow \mathbb{R}$ на компакте $D \subseteq \mathsf{D}(f)$ мы обозначаем $\mathsf{CV}_D[f]$:

$$\mathsf{CV}_D[f] = \Big\{ f(x) : \quad x \in D \quad \& \quad \mathsf{d}\, f(x) = 0 \Big\}.$$

Теорема 15.3.7. *Некритическое множество уровня непрерывно дифференциуремой функции $f : \mathbb{R} \hookrightarrow \mathbb{R}$ на компакте $D \subseteq \mathsf{D}(f)$ всегда конечно.*

Доказательство. Предположим, что λ – некритическое значение функции f на D, но множество уровня $K = \{t \in D : \ f(t) = \lambda\}$ бесконечно. Тогда найдется последовательность из неповторяющихся точек $t_n \in D$:

$$f(t_n) = \lambda$$

По теореме Бореля, из нее можно выбрать сходящуюся подпоследовательность t_{n_k}:

$$t_{n_k} \underset{k \to \infty}{\longrightarrow} t_*$$

Рассмотрим точку t_*. Поскольку функция f непрерывна, в точке t_* значение f тоже должно быть равно λ:

$$f(t_*) = \lambda$$

То есть t_* тоже принадлежит нашему множеству уровня, и, поскольку оно некритическое, получаем

$$f'(t_*) \neq 0$$

Пусть, для определенности, $f'(t_*) > 0$. Тогда существует окрестность $U_\varepsilon(t_*)$, в которой везде производная будет положительна:

$$\forall t \in U_\varepsilon(t_*) \quad f'(t) > 0$$

Мы получаем, что в интервале $U_\varepsilon(t_*)$ функция f строго возрастает, причем в точке t_* она равна λ. Значит, нигде больше на $U_\varepsilon(t_*)$ она не может быть равна λ. Но с другой стороны, t_* является пределом последовательности точек t_{n_k}, в которых $f(t_n) = \lambda$. Понятно, что эти точки должны заходить в окрестность $U_\varepsilon(t_*)$. Мы получаем противоречие.

Точно так же рассматривается случай $f'(t_*) < 0$: здесь тоже t_* оказывается единственной точкой, где f принимает значение λ на некотором интервале $U_\varepsilon(t_*)$, и это означает, что наше исходное предположение о бесконечности множества K было неверным. □

Теорема 15.3.8. *Пусть $f : X \hookrightarrow \mathbb{R}$ – непрерывно дифференцируемая функция на евклидовом пространстве X. Ее некритическое множество уровня K на любом компакте $D \subseteq \mathsf{D}(f)$ всегда имеет нулевую меру Жордана в X:*

$$\mu(K) = 0$$

Доказательство. Пусть C – значение функции f на компакте K. Рассмотрим гладкое продолжение g функции f в какую-нибудь окрестность U компакта D. Выбросив, в случае необходимости, лишние точки из U, можно добиться, чтобы множество

$$M = \{x \in U : \ g(x) = C\}$$

было многообразием, то есть чтобы всюду на этом множестве дифференциал функции g был ненулевым:

$$\forall x \in M \quad \mathsf{d}\, g(x) \neq 0.$$

Тогда компакт K становится подмножеством гладкого многообразия M. По теореме 14.3.5, для каждой точки $b \in K$ существует некая окрестность V_b в X и параметризованное многообразие $\sigma_b : U_b \to X$, $U_b \subseteq Y$, $\dim Y = \dim X - 1$, такие, что

$$b \in \sigma_b(U_b) = M \cap V_b.$$

Уменьшив, если нужно, окрестности U_b, мы можем добиться, чтобы у каждой из них замыкание $\overline{U_b}$ было компактно, и чтобы каждое отображение σ_b продолжалось в окрестность $\overline{U_b}$. Окрестности $\{V_b;\ b\in K\}$ покрывают компакт K, поэтому из них можно выбрать конечное подпокрытие $V_{b_1},...,V_{b_k}$:

$$K\subseteq V_{b_1}\cup...\cup V_{b_k}.$$

Отсюда

$$K\subseteq M\cap(V_{b_1}\cup...\cup V_{b_k})=(M\cap(V_{b_1})\cup...\cup(M\cap(V_{b_k})=\sigma(U_{b_1})\cup...\cup\sigma(U_{b_k})\subseteq\sigma(\overline{U_{b_1}})\cup...\cup\sigma(\overline{U_{b_k}}).$$

При этом по теореме Сарда 15.3.6, каждое множество $\sigma(U_{b_i})$ имеет нулевую меру Жордана. Значит, K тоже имеет нулевую меру. □

Большая теорема Сарда.

Теорема 15.3.9 (большая теорема Сарда)**.** *Пусть $f:X\hookrightarrow\mathbb{R}$ – (бесконечно) гладкая функция на евклидовом пространстве X. Тогда на произвольном компакте $D\subset\mathsf{D}(f)$ множество $\mathsf{CV}_D[f]$ критических значений f имеет нулевую Жорданову меру:*

$$\mu\big(\mathsf{CV}_D[f]\big)=0$$

Доказательство. Организуем индукцию по $n=\dim X$.

1. Рассмотрим сначала случай $n=1$. Пусть $f:\mathbb{R}\hookrightarrow\mathbb{R}$ – гладкая функция, и $D\subset\mathsf{D}(f)$ – компакт. Множество C критических точек на D есть просто множество тех $x\in D$, в которых дифференциал функции f равен нулю:

$$C=\{x\in D:\ \mathsf{d}\,f(x)=0\}$$

По теореме 14.1.13, найдутся числа $\varepsilon>0$ и $M>0$ такие, что

$$|f(x+p)-f(x)|=|f(x+p)-f(x)-\underbrace{\mathsf{d}\,f(x)}_{\substack{\|\\0}}[p]|\leqslant M\cdot|p|^2,\qquad x\in C,\ |p|\leqslant\varepsilon$$

Мы получаем, что наша функция f удовлетворяет условиям теоремы 15.3.5 с $K=C$ и $\alpha=2$, поэтому

$$\mu\big(f(C)\big)=0$$

2. Предположим теперь, что мы доказали это утверждение для какого-то $n-1$. Покажем, что тогда оно справедливо и для n. Для этого придется построить новую индукцию. Обозначим через C_k множество точек $x\in D$ в которых все дифференциалы функции f порядков от 1 до k включительно равны нулю:

$$C_k=\{x\in D:\quad\forall i=1,...,k\quad\mathsf{d}^i\,f(x)=0\}$$

Мы получим следующую цепочку множеств:

$$C_n\subseteq...\subseteq C_2\subseteq C_1\subseteq D\subset\mathsf{D}(f),$$

и наша задача – доказать, что

$$\mu\big(f(C_1)\big)=0.$$

Для этого мы организуем “обратную” индукцию по k: сначала докажем, что $\mu\big(f(C_n)\big)=0$, а потом по индукции доберемся до $\mu\big(f(C_1)\big)=0$.

a) Итак, покажем, что

$$\mu\big(f(C_n)\big)=0.\tag{15.3.121}$$

По теореме 15.3.4, на множестве C_n функция f удовлетворяет условию Гельдера с показателем $\alpha=n+1>\frac{n}{1}=\frac{\dim X}{\dim\mathbb{R}}$:

$$|f(x+p)-f(x)|\leqslant M\cdot|p|^{n+1},\qquad x\in C_n,\ |p|\leqslant\varepsilon\tag{15.3.122}$$

Поэтому по теореме 15.3.5, $\mu\big(f(C_n)\big)=0$.

б) Мы доказали (15.3.121). Теперь предположим, что мы доказали, что $\mu\big(f(C_{k+1})\big)=0$ для некоторого k. Покажем, что тогда $\mu\big(f(C_k)\big)=0$. Нам понадобится следующее вспомогательное утверждение:

(A) Для всякой точки $a \in C_k \setminus C_{k+1}$ найдется окрестность $U \subset \mathsf{D}(f)$ такая, что

$$\mu\big(f(C_k \cap U)\big) = 0$$

Возьмем произвольную точку $a \in C_k \setminus C_{k+1}$. Поскольку $a \notin C_{k+1}$, какая-то производная порядка $k+1$ функции f в этой точке не равна нулю:

$$\nabla_{s_1} ... \nabla_{s_k} \nabla_{s_{k+1}} f(a) \neq 0$$

Если обозначить

$$h = \nabla_{s_1} ... \nabla_{s_k} f,$$

то мы получим, что эта функция равна нулю в любой точке $x \in C_k$ (как производная от f порядка k), но ее производная по переменной $x_{s_{k+1}}$ не равна нулю в точке a:

$$h(x) = 0 \quad (x \in C_k), \qquad \nabla_{s_{k+1}} h(a) \neq 0$$

Будем считать для определенности, что $x_{s_{k+1}} = x_n$ (если это не так, то мы всегда можем переобозначить переменные так, чтобы это условие выполнялось):

$$h(x) = 0 \quad (x \in C_k), \qquad \nabla_n h(a) \neq 0 \tag{15.3.123}$$

Рассмотрим отображение

$$H : \mathsf{D}(f) \to \mathbb{R}^n \quad \Big| \quad H(x) = \big(x_1, x_2, ..., x_{n-1}, h(x)\big)$$

Оно действует между евклидовыми пространствами одинаковой размерности, $\dim X = n \dim \mathbb{R}^n$, является гладким[10], и его Якобиан в точке a не равен нулю,

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & ... & 0 & 0 \\ 0 & 1 & ... & 0 & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & 1 & 0 \\ \nabla_1 h(a) & \nabla_2 h(a) & ... & \nabla_{n-1} h(a) & \nabla_n h(a) \end{pmatrix} = \nabla_n h(a) \neq 0.$$

Поэтому, по теореме 14.2.13 об обратном отображении, существует некоторая компактная окрестность U точки a такая, что H является диффеоморфизмом U на некоторую компактную окрестность $H(U)$ точки $H(a)$.

Рассмотрим вложение

$$\sigma : \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}^n \quad \Big| \quad \sigma(x_1, x_2, ..., x_{n-1}) = (x_1, x_2, ..., x_{n-1}, 0)$$

и множество

$$V = \sigma^{-1}\big(H(U)\big) = \{y \in \mathbb{R}^{n-1} : \ \sigma(y) \in H(U)\}$$

Очевидно, V будет компактной областью в $\mathbb{R}^{n-1}$, на которой определена функция

$$\varphi = f \circ H^{-1} \circ \sigma, \qquad \varphi(x_1, x_2, ..., x_{n-1}) = f\big(H^{-1}(x_1, x_2, ..., x_{n-1}, 0)\big)$$

Поскольку f, H и σ – гладкие функции, φ будет гладкой функцией на компактной области V в $\mathbb{R}^{n-1}$, и поэтому, по предположению индукции, ее множество критических значений имеет нулевую меру:

$$\mu\big(\,\mathsf{CV}_V[\varphi]\big) = 0.$$

Покажем, что $f(C_k \cap U)$ содержится в $\mathsf{CV}_V[\varphi]$:

$$f(C_k \cap U) \subseteq \mathsf{CV}_V[\varphi] \tag{15.3.124}$$

Возьмем какую-нибудь точку $x \in C_k \cap U$. В силу (15.3.123), имеем:

$$H(x) = \big(x_1, x_2, ..., x_{n-1}, h(x)\big) = \big(x_1, x_2, ..., x_{n-1}, 0\big) \in \mathsf{Im}\,\sigma$$

$$\Downarrow$$

[10]В этот момент мы используем исходное требование, что f является бесконечно гладкой функцией.

$$\exists y \in V: \quad \sigma(y) = H(x)$$

Заметим, что эта точка $y \in V$ обладает следующими двумя свойствами. Во-первых, значение φ в y совпадает со значением f в x:

$$\varphi(y) = f(H^{-1}(\sigma(y))) = f(H^{-1}(H(x))) = f(x)$$

Во-вторых, y – критическая точка для φ, потому что

$$\mathsf{d}\,\varphi(y) = \mathsf{d}\,\big(f \circ H^{-1} \circ \sigma\big)(y) = \mathsf{d}\,f(\underbrace{H^{-1}(\sigma(y))}_{\substack{\parallel \\ x}}) \circ \mathsf{d}\,H^{-1}(\sigma(y)) \circ \mathsf{d}\,\sigma(y) = \underbrace{\mathsf{d}\,f(x)}_{\substack{\parallel \\ 0}}) \circ \mathsf{d}\,H^{-1}(\sigma(y)) \circ \mathsf{d}\,\sigma(y) = 0$$

Итак, мы получили, что для всякой точки $x \in C_k \cap U$ найдется критическая точка $y \in V$ функции φ такая, что

$$\varphi(y) = f(x)$$

Это и означает, что справедливо (15.3.124), то есть $f(C_k \cap U)$ содержится в $\mathsf{CV}_V[\varphi]$, и поэтому тоже имеет нулевую меру:

$$\mu\big(f(C_k \cap U)\big) \leqslant \mu\big(\,\mathsf{CV}_V[\varphi]\big) = 0$$

Мы доказали утверждение (A) на с.947. Из него теперь следует, что можно покрыть множество $C_k \setminus C_{k+1}$ некоторой последовательностью компактов U_i на которых значения функции f имеет нулевую меру:

$$C_k \setminus C_{k+1} = \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i, \qquad \forall i \quad \mu\big(f(U_i)\big) = 0$$

По предположению индукции, $\mu\big(f(C_{k+1})\big) = 0$, поэтому, если положить $U_0 = C_{k+1}$, то мы получим покрытие компакта C_k компактами U_i, на которых значения функции f имеет нулевую меру:

$$C_k = \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i, \qquad \forall i \quad \mu\big(f(U_i)\big) = 0$$

Отсюда можно сделать вывод, что компакт $f(C_k)$ покрывается последовательностью компактов $f(U_i)$, имеющих нулевую меру:

$$f(C_k) = \bigcup_{i=1}^{\infty} f(U_i), \qquad \forall i \quad \mu\big(f(U_i)\big) = 0$$

Теперь по теореме 15.1.23 мы получим, что $f(C_k)$ имеет нулевую меру:

$$\mu\big(f(C_k)\big) = 0.$$

□

(c) Регулярные и полурегулярные отображения

Напомним, что выше на с.791 мы определили *окрестность множества* A в евклидовом пространстве X, как произвольное открытое множество $U \subseteq X$, содержащее A:

$$A \subseteq U.$$

Гладкие отображения компакта.

- Пусть K – компакт в евклидовом пространстве X. Отображение $\varphi : K \to Y$ в евклидово пространство Y называется *гладким отображением* (компакта K в пространство Y), если оно удовлетворяет следующим равносильным условиям:
  - (i) отображение $\varphi : K \to Y$ продолжается до некоторого гладкого отображения $\widetilde{\varphi} : U \to Y$ в некоторую окрестность $U \subseteq X$ компакта K:

$$\widetilde{\varphi}|_U = \varphi$$

(ii) для всякой точки $x \in K$ найдутся окрестность $U \subseteq X$ и гладкое отображение $\varphi_U : U \to Y$ такие, что на пересечении $U \cap K$ отображения φ и φ_U совпадают:

$$\varphi_U|_{U\cap K} = \varphi|_U$$

Доказательство. Импликация $(i) \Longrightarrow (ii)$ очевидна. Обратная импликация $(ii) \Longrightarrow (i)$ следует из теоремы о разбиении единицы 14.1.32. Если выполняется (ii), то выберем для всякой точки $x \in K$ окрестность U_x и гладкое отображение $\varphi_x : U_x \to Y$ такие, что

$$\varphi_x|_{U_x\cap K} = \varphi|_{U_x} \tag{15.3.125}$$

Положим $U = \bigcup_{x\in K} U_x$. Тогда множества U_x образуют покрытие U, и по теореме 14.1.32 можно выбрать гладкое локально конечное разбиение единицы η_x на U, подчиненное покрытию U_x:

$$0 \leqslant \eta_x \leqslant 1, \qquad \operatorname{supp} \eta_x \subseteq U_x, \qquad \sum_{x\in K} \eta_x = 1$$

Положив

$$\widetilde{\varphi} = \sum_{x\in K} \eta_x \cdot \varphi_x$$

мы получим гладкое отображение $\widetilde{\varphi} : U \to Y$, причем для всякого $y \in K$

$$\widetilde{\varphi}(y) = \sum_{x\in K} \eta_x(y) \cdot \varphi_x(y) = \sum_{x\in K:\ y\in U_x} \eta_x(y) \cdot \varphi_x(y) = (15.3.125) =$$

$$= \sum_{x\in K:\ y\in U_x} \eta_x(y) \cdot \varphi(y) = \Bigg(\sum_{x\in K:\ y\in U_x} \eta_x(y) \Bigg) \cdot \varphi(y) = 1 \cdot \varphi(y)$$

□

Регулярная и сингулярная части отображения. Напомним, что в соответствии с определениями на с.41, для всякого отображения $f : X \hookrightarrow Y$ его область определения и область значений обозначаются соответственно символами $\mathsf{D}(f)$ и $\mathsf{R}(f)$:

$$\mathsf{D}(f) := \{x \in X : \ \exists y \in Y \ y = f(x)\} \subseteq X, \qquad \mathsf{R}(f) := \{y \in Y : \ \exists x \in X \ y = f(x)\}.$$

- Пусть X и Y – евклидовы пространства, причем $\dim X = m \leqslant n = \dim Y$, $I \subseteq X$ – компакт, и $\varphi : I \to Y$ – непрерывно дифференцируемое отображение. Точка $s \in I$ называется
  - *регулярной точкой*, или *регулярным параметром*, отображения φ на компакте I, если она обладает следующими тремя свойствами:

    (R0) s – внутренняя точка компакта I:

    $$s \in \mathsf{Int}(I)$$

    (R1) s – точка стабильности отображения φ:

    $$\forall p \in X \qquad p \neq 0 \quad \Longrightarrow \quad \mathsf{d}\,\varphi(s)\langle p\rangle = \lim_{t\to 0} \frac{\varphi(s+tp) - \varphi(s)}{t} \neq 0$$

    (R2) s – не кратная точка отображения φ на компакте I, то есть никакая другая точка $t \in I$ не переходит при отображении φ туда же, куда переходит точка s:

    $$\nexists t \in I : \quad t \neq s \quad \& \quad \varphi(t) = \varphi(s);$$

    по-другому это условие можно сформулировать так: если образ точки s под действием отображения φ совпадает с образом какой-то точки $t \in I$, то эти точки должны совпадать:

    $$\forall t \in I : \quad \varphi(t) = \varphi(s) \quad \Longrightarrow \quad t = s;$$

— *сингулярной точкой*, или *сингулярным параметром*, отображения φ на компакте I, если она не является регулярной, то есть обладает каким-нибудь их следующих трех свойств:

(S0) s – граничная точка компакта I:

$$s \in \mathsf{Fr}(I)$$

(S1) s – точка нестабильности отображения φ:

$$\exists p \in X \qquad p \neq 0 \quad \& \quad \mathsf{d}\,\varphi(s)\langle p\rangle = \lim_{t\to 0}\frac{\varphi(s+tp)-\varphi(s)}{t} = 0$$

(S2) s – кратная точка отображения φ на компакте I, то есть существует какая-то другая точка $t \in I$, переходящая при отображении φ туда же, куда переходит точка s:

$$\exists t \in I: \quad t \neq s \quad \& \quad \varphi(t) = \varphi(s).$$

Множество всех регулярных точек отображения $\varphi : I \to Y$ обозначается $\mathsf{D}_{\mathsf{reg}}(\varphi)$ и называется *областью регулярных параметров*, а множество всех сингулярных точек обозначается $\mathsf{D}_{\mathsf{sing}}(\varphi)$ и называется *областью сингулярных параметров*:

$$\mathsf{D}_{\mathsf{reg}}(\varphi) := \{s \in I : \ s \text{ – регулярная точка отображения } \varphi \text{ на } I\},$$

$$\mathsf{D}_{\mathsf{sing}}(\varphi) := \{s \in I : \ s \text{ – сингулярная точка отображения } \varphi \text{ на } I\}$$

Понятно, что $\mathsf{D}_{\mathsf{reg}}(\varphi)$ и $\mathsf{D}_{\mathsf{sing}}(\varphi)$, не пересекаясь, в объединении дают $I = \mathsf{D}(\varphi)$:

$$\mathsf{D}(\varphi) = \mathsf{D}_{\mathsf{reg}}(\varphi) \sqcup \mathsf{D}_{\mathsf{sing}}(\varphi)$$

Образы этих множеств, обозначаемые

$$\mathsf{R}_{\mathsf{reg}}(\varphi) := \varphi(\mathsf{D}_{\mathsf{reg}}(\varphi)), \qquad \mathsf{R}_{\mathsf{sing}}(\varphi) := \varphi(\mathsf{D}_{\mathsf{sing}}(\varphi)) \tag{15.3.126}$$

называются соответственно *регулярным* и *сингулярным носителем* отображения φ. Заметим, что при отображении φ никакая регулярная точка $s \in \mathsf{D}_{\mathsf{reg}}(\varphi)$ не может иметь одинаковый образ с какой-нибудь сингулярной точкой $t \in \mathsf{D}_{\mathsf{sing}}(\varphi)$ (потому что s регулярная, и значит, не кратная). Поэтому регулярная $\mathsf{D}_{\mathsf{reg}}(\varphi)$ и сингулярная $\mathsf{D}_{\mathsf{sing}}(\varphi)$ области параметров под действием φ не перемешиваются, то есть их образы – множества $\mathsf{R}_{\mathsf{reg}}(\varphi)$ и $\mathsf{R}_{\mathsf{sing}}(\varphi)$ – не пересекаются (и в объединении дают $\varphi(I) = \mathsf{R}(\varphi)$):

$$\mathsf{R}(\varphi) = \mathsf{R}_{\mathsf{reg}}(\varphi) \sqcup \mathsf{R}_{\mathsf{sing}}(\varphi) \tag{15.3.127}$$

Ограничения отображения φ на множества $\mathsf{D}_{\mathsf{reg}}(\varphi)$ и $\mathsf{D}_{\mathsf{sing}}(\varphi)$ обозначаются

$$\mathsf{reg}\,\varphi : \mathsf{D}_{\mathsf{reg}}(\varphi) \to \mathsf{R}_{\mathsf{reg}}(\varphi), \qquad \mathsf{sing}\,\varphi : \mathsf{D}_{\mathsf{sing}}(\varphi) \to \mathsf{R}_{\mathsf{sing}}(\varphi)$$

и называются соответственно *регулярной* и *сингулярной частью* отображения φ. Полезно заметить, что $\mathsf{reg}\,\varphi$ и $\mathsf{sing}\,\varphi$ не зависят от выбора гладкого продолжения отображения φ в окрестность компакта I.

Свойства регулярной и сингулярной части:

1°. *Всегда* $\mathsf{D}_{\mathsf{reg}}(\varphi)$ *– открытое множество в* X, $\mathsf{D}_{\mathsf{sing}}(\varphi)$ *– компакт в* X, *и выполняются включения*

$$\mathsf{D}_{\mathsf{reg}}(\varphi) \subseteq \mathsf{Int}\big(\mathsf{D}(\varphi)\big) \tag{15.3.128}$$

$$\mathsf{Fr}(\mathsf{D}(\varphi)) \subseteq \mathsf{D}_{\mathsf{sing}}(\varphi). \tag{15.3.129}$$

2°. *Если* $\dim X = \dim Y$, *то* $\mathsf{R}_{\mathsf{reg}}(\varphi)$ *– открытое множество в* Y, $\mathsf{R}_{\mathsf{sing}}(\varphi)$ *– компакт в* Y *и выполняются включения*

$$\mathsf{R}_{\mathsf{reg}}(\varphi) \subseteq \mathsf{Int}\big(\mathsf{R}(\varphi)\big) \tag{15.3.130}$$

$$\mathsf{Fr}\big(\mathsf{R}(\varphi)\big) \subseteq \mathsf{R}_{\mathsf{sing}}(\varphi) \tag{15.3.131}$$

3°. *Для всякого множества $Q \subseteq Y$ справедливо включение*

$$\mathsf{Fr}\left(\varphi^{-1}(Q)\right) \subseteq \varphi^{-1}(\mathsf{Fr}\, Q) \cup \mathsf{D}_{\mathsf{sing}}(\varphi) \tag{15.3.132}$$

Доказательство. 1. Здесь достаточно доказать, что $\mathsf{D}_{\mathsf{sing}}(\varphi)$ – компакт в X. Рассмотрим продолжение отображения $\varphi : I \to Y$ до гладкого отображения $\widetilde{\varphi} : U \to Y$ в некоторую окрестность U компакта I. Пусть $U \times U$ – декартов квадрат, и $\pi : U \times U \to U$ – отображение проектирования на первую координату:

$$\pi(s,t) = s, \qquad s,t \in U$$

Обозначим

$$A = \{(s,t) \in I \times I : \ s \text{ – точка нестабильности для } \widetilde{\varphi}\},$$

$$B = \{(s,t) \in I \times I : \ \varphi(s) = \varphi(t)\}, \quad \varDelta = \{(s,t) \in I \times I : \ s = t\}$$

и заметим, что

$$\mathsf{D}_{\mathsf{sing}}(\varphi) \setminus \mathsf{Fr}(I) = \pi\big(A \cup (B \setminus \varDelta)\big) \setminus \mathsf{Fr}(I) \tag{15.3.133}$$

Действительно,

$$\begin{aligned}
s \in \pi\big(A \cup (B \setminus \varDelta)\big) \setminus \mathsf{Fr}(I) \quad &\Longleftrightarrow \quad s \in \pi\big(A \cup (B \setminus \varDelta)\big) \quad \& \quad s \notin \mathsf{Fr}(I) \quad \Longleftrightarrow \\
&\Longleftrightarrow \quad \big(\exists t \in I : \ (s,t) \in A \cup (B \setminus \varDelta)\big) \quad \& \quad s \notin \mathsf{Fr}(I) \quad \Longleftrightarrow \\
&\Longleftrightarrow \quad \big(\exists t \in I : \ (s,t) \in A \text{ или } (s,t) \in B \setminus \varDelta\big) \quad \& \quad s \notin \mathsf{Fr}(I) \quad \Longleftrightarrow \\
&\Longleftrightarrow \quad \big(\exists t \in I : \ \mathsf{d}\,\widetilde{\varphi}(s) \text{ вырождено или } \big[\,\varphi(s) = \varphi(t) \ \& \ s \neq t\,\big]\big) \quad \& \quad s \notin \mathsf{Fr}(I) \quad \Longleftrightarrow \\
&\Longleftrightarrow \quad \big(\mathsf{d}\,\widetilde{\varphi}(s) \text{ вырождено или } \big[\,\exists t \in I : \ \varphi(s) = \varphi(t) \ \& \ s \neq t\,\big]\big) \quad \& \quad s \notin \mathsf{Fr}(I) \quad \Longleftrightarrow \\
&\underset{\substack{\uparrow \\ \mathsf{d}\,\widetilde{\varphi}(s) = \mathsf{d}\,\varphi(s), \\ \text{поскольку } s \text{ –} \\ \text{внутренняя точка для } I}}{\Longleftrightarrow} \quad \big(\mathsf{d}\,\varphi(s) \text{ вырождено или } \big[\,\exists t \in I : \ \varphi(s) = \varphi(t) \ \& \ s \neq t\,\big]\big) \quad \& \quad s \notin \mathsf{Fr}(I) \quad \Longleftrightarrow \\
&\Longleftrightarrow \quad s \in \mathsf{D}_{\mathsf{sing}}(\varphi) \setminus \mathsf{Fr}(I)
\end{aligned}$$

Поскольку $\mathsf{Fr}(I) \subseteq \mathsf{D}_{\mathsf{sing}}(\varphi)$, мы из (15.3.133) теперь получаем:

$$\begin{aligned}
\mathsf{D}_{\mathsf{sing}}(\varphi) = \mathsf{D}_{\mathsf{sing}}(\varphi) \cup \mathsf{Fr}(I) = \big(\,\mathsf{D}_{\mathsf{sing}}(\varphi) \setminus \mathsf{Fr}(I)\big) \cup \mathsf{Fr}(I) = \\
= \big(\pi\big(A \cup (B \setminus \varDelta)\big) \setminus \mathsf{Fr}(I)\big) \cup \mathsf{Fr}(I) = \pi\big(A \cup (B \setminus \varDelta)\big) \cup \mathsf{Fr}(I)
\end{aligned}$$

То есть

$$\mathsf{D}_{\mathsf{sing}}(\varphi) = \pi\big(A \cup (B \setminus \varDelta)\big) \cup \mathsf{Fr}(I)$$

Отсюда можно сделать вывод, что для доказательства компактности множества $\mathsf{D}_{\mathsf{sing}}(\varphi)$ достаточно доказать замкнутость множества $A \cup (B \setminus \varDelta)$ в $I \times I$: тогда станет ясно, что $A \cup (B \setminus \varDelta)$ – компакт (как замкнутое подмножество в компакте $I \times I$), поэтому его образ $\pi\big(A \cup (B \setminus \varDelta)\big)$ при непрерывном отображении $\pi : U \times U \to U$ тоже является компактом, и в объединении с компактом $\mathsf{Fr}(I)$ это дает компакт $\mathsf{D}_{\mathsf{sing}}(\varphi)$.

Возьмем какую-нибудь точку стабильности $r \in I$ для отображения $\widetilde{\varphi}$. По теореме 14.2.16 существует окрестность $U(r) \subseteq U$ точки r такая, что

$$\forall s \in U(r) \quad s \text{ – точка стабильности для } \widetilde{\varphi} \quad \& \quad \widetilde{\varphi}|_{U(r)} : U(r) \to Y \quad \text{- инъективное отображение}$$

Тогда множество

$$V(r) = U(r) \times U(r) = \{(s,t) \in I \times I : \ s \in U(r) \quad \& \quad t \in U(r)\}$$

будет открытым подмножеством в $U \times U$ со следующими свойствами:

$$\forall r \in I \qquad (r,r) \notin A \quad \Longrightarrow \quad (r,r) \in V(r) \tag{15.3.134}$$

$$A \cap V(r) = \varnothing \tag{15.3.135}$$

$$B \cap V(r) = \varDelta \cap V(r) \tag{15.3.136}$$

Если для разных точек стабильности $r \in I$ отображения $\widetilde{\varphi}$ выбирать такие окрестности $U(r)$, и соответствующие им открытые множества $V(r)$, то можно будет рассмотреть объединение

$$V = \bigcup_{\substack{r \in I: \\ r - \text{точка} \\ \text{стабильности} \\ \text{для } \widetilde{\varphi}}} V(r) = \bigcup_{\substack{r \in I: \\ (r,r) \notin A}} V(r)$$

Это множество будет удовлетворять следующим двум равенствам:

$$(B \cap \Delta) \setminus A = (B \cap V) \setminus A = B \cap V \qquad (15.3.137)$$

Здесь сначала доказывается второе:

$$(B \cap V) \setminus A = B \cap (V \setminus A) = (15.3.135) = B \cap V.$$

А затем первое: с одной стороны,

$$\Delta \setminus A = \{(r,r): \ (r,r) \notin A\} \subseteq (15.3.134) \subseteq \bigcup_{\substack{r \in I: \\ (r,r) \notin A}} V(r) = V$$

$$\Downarrow$$

$$(B \cap \Delta) \setminus A = B \cap \big(\Delta \setminus A\big) \subseteq B \cap V = (B \cap V) \setminus A$$

а, с другой –

$$B \cap V = B \cap \bigcup_{\substack{r \in I: \\ (r,r) \notin A}} V(r) = \bigcup_{\substack{r \in I: \\ (r,r) \notin A}} B \cap V(r) = (15.3.136) = \bigcup_{\substack{r \in I: \\ (r,r) \notin A}} \Delta \cap V(r) \subseteq \Delta$$

$$\Downarrow$$

$$(B \cap V) \setminus A \subseteq \Delta \setminus A$$

$$\Downarrow$$

$$(B \cap V) \setminus A = B \cap \big[(B \cap V) \setminus A\big] \subseteq B \cap \big[\Delta \setminus A\big] = (B \cap \Delta) \setminus A$$

Мы доказали (15.3.137). Из этих равенств следует

$$A \cup (B \setminus \Delta) = (0.3.178) = (A \cup B) \setminus \big[(B \cap \Delta) \setminus A\big] = (15.3.137) = (A \cup B) \setminus \big[(B \cap V) \setminus A\big] = (0.3.178) = A \cup (B \setminus V)$$

Теперь нужно заметить, что каждое из множеств A, $B \setminus V$ замкнуто: A замкнуто, как прообраз замкнутого множества $\{r \in I: \ r - \text{точка нестабильности для } \widetilde{\varphi}\}$ при непрерывном отображении π, а $B \setminus V$ замкнуто, как разность замкнутого множества B и открытого множества V. Значит, объединение этих множеств

$$A \cup (B \setminus \Delta) = A \cup (B \setminus V)$$

тоже должно быть замкнуто, а это нам и нужно было доказать.

2. Пусть $m = n$. Множество $\mathsf{D}_{\mathsf{reg}}(\varphi)$ открыто в X, а отображение φ на нем гладко, инъективно и невырождено, поэтому по теореме о глобальном обратном отображении 14.2.14 образ $\mathsf{R}_{\mathsf{reg}}(\varphi) = \varphi\big(\mathsf{D}_{\mathsf{reg}}(\varphi)\big)$ должен быть открытым множеством в $Y \cong X$. С другой стороны, $\mathsf{R}_{\mathsf{sing}}(\varphi)$, будучи образом компакта $\mathsf{D}_{\mathsf{sing}}(\varphi))$ при непрерывном отображении φ, сам является компактом в $Y \cong X$. Заметим далее, что $\mathsf{R}_{\mathsf{reg}}(\varphi)$ – открытое множество, содержащееся в $\mathsf{R}(\varphi)$, и значит, оно содержится во внутренности $\mathsf{R}(\varphi)$,

$$\mathsf{Int}\,\big(\mathsf{R}(\varphi)\big) \supseteq \mathsf{R}_{\mathsf{reg}}(\varphi),$$

– это доказывает (15.3.130), и из него уже получаем (15.3.131):

$$\mathsf{Fr}\,\big(\mathsf{R}(\varphi)\big) = \mathsf{R}(\varphi) \setminus \mathsf{Int}\,\big(\mathsf{R}(\varphi)\big) \subseteq \mathsf{R}(\varphi) \setminus \mathsf{R}_{\mathsf{reg}}(\varphi) = \mathsf{R}_{\mathsf{sing}}(\varphi).$$

3. Включение (15.3.132) эквивалентно включению

$$\mathsf{Int}\,\varphi^{-1}(Q) = \varphi^{-1}(Q) \setminus \mathsf{Fr}\,\big(\varphi^{-1}(Q)\big) \supseteq \varphi^{-1}(Q) \setminus \big(\varphi^{-1}(\mathsf{Fr}\,Q) \cup \mathsf{D}_{\mathsf{sing}}(\varphi)\big) \qquad (15.3.138)$$

Докажем его. Пусть $t \in \varphi^{-1}(Q) \setminus \big(\varphi^{-1}(\mathsf{Fr}\, Q) \cup \mathsf{D}_{\mathsf{sing}}(\varphi)\big)$, то есть $t \in \varphi^{-1}(Q)$, $t \notin \varphi^{-1}(\mathsf{Fr}\, Q)$ и $t \notin \mathsf{D}_{\mathsf{sing}}(\varphi)$. Тогда, во-первых, $\varphi(t) \notin \mathsf{Fr}\, Q$, а, во-вторых, $\varphi(t) \notin \mathsf{R}_{\mathsf{sing}}(\varphi)$. То есть

$$\varphi(t) \in Q \setminus \big(\mathsf{Fr}\, Q \cup \mathsf{R}_{\mathsf{sing}}(\varphi)\big) = \mathsf{Int}\, Q \setminus \mathsf{R}_{\mathsf{sing}}(\varphi).$$

Обозначим $U = \mathsf{Int}\, Q \setminus \mathsf{R}_{\mathsf{sing}}(\varphi)$. Это будет открытое множество в Y, содержащее точку $\varphi(t)$. Поэтому его пересечение с $\mathsf{R}_{\mathsf{reg}}(\varphi)$

$$U \cap \mathsf{R}_{\mathsf{reg}}(\varphi) = \big(\mathsf{Int}\, Q \setminus \mathsf{R}_{\mathsf{sing}}(\varphi)\big) \cap \mathsf{R}_{\mathsf{reg}}(\varphi) = \mathsf{Int}\, Q \cap \mathsf{R}_{\mathsf{reg}}(\varphi)$$

является открытым множеством в $\mathsf{R}_{\mathsf{reg}}(\varphi)$, содержащим точку $\varphi(t)$. Значит, прообраз этого множества

$$V = \varphi^{-1}(U) = \varphi^{-1}\big(U \cap \mathsf{R}_{\mathsf{reg}}(\varphi)\big)$$

является открытым множеством в $\mathsf{D}_{\mathsf{reg}}(\varphi)$, содержащим точку t. При этом, $\mathsf{D}_{\mathsf{reg}}(\varphi)$ открыто в X, значит, V является открытым множеством в X, содержащим точку t. С другой стороны, множество V содержится в $\varphi^{-1}(Q)$. Мы получаем, что точка $t \in \varphi^{-1}(Q)$ обладает окрестностью V, целиком лежащей в $\varphi^{-1}(Q)$. Значит, t не может принадлежать границе множества $\varphi^{-1}(Q)$. Это доказывает (15.3.138). □

Регулярные и полурегулярные отображения.

- Пусть I – измеримый по Жордану компакт в евклидовом пространстве X. Бесконечно гладкое отображение $\alpha : I \to Y$ в произвольное евклидово пространство Y, $\dim X \leqslant \dim Y$, называется

  — *полурегулярным*, если его сингулярная область параметров имеет нулевую (жорданову) меру:

  $$\mu\big(\mathsf{D}_{\mathsf{sing}}(\varphi)\big) = 0 \qquad (15.3.139)$$

  Это эквивалентно следующим условиям:

  C1 (стабильность почти всюду): множество внутренних точек компакта I, в которых дифференциал отображения α не инъективен, имеет нулевую Жорданову меру:

  $$\mu\big\{s \in \mathsf{Int}(I) : \quad \exists p \in X \setminus \{0\} \quad \mathsf{d}\,\alpha(s)[p] = 0\big\} = 0$$

  C2 (инъективность почти всюду): отображение $\alpha : I \to Y$ инъективно всюду, кроме, может быть, подмножества жордановой меры нуль в I:

  $$\mu\big\{s \in I : \quad \exists t \in I \quad s \neq t \quad \& \quad \alpha(s) = \alpha(t)\big\} = 0$$

  — *регулярным*, если оно удовлетворяет следующим условиям:

  C1* (стабильность): $\alpha : I \to Y$ обладает гладким продолжением $\tilde{\alpha} : U \to Y$ в некоторую окрестность U компакта I, у которого дифференциал инъективен всюду на I:

  $$\forall s \in I \quad \forall p \in X \setminus \{0\} \quad \mathsf{d}\,\alpha(s)[p] \neq 0$$

  C2* (инъективность): отображение $\alpha : I \to Y$ всюду инъективно:

  $$\forall s, t \in I \quad s \neq t \quad \Longrightarrow \quad \alpha(s) \neq \alpha(t)$$

- Число m при этом называется *размерностью* (полу)регулярного отображения α.

Свойства регулярной и сингулярной части полурегулярного отображения:

1°. *Область параметров $\mathsf{D}(\varphi)$ и носитель $\mathsf{R}(\varphi)$ всякого полурегулярного отображения φ являются измеримыми по Жордану компактами в X и Y.*

2°. *Область регулярных параметров $\mathsf{D}_{\mathsf{reg}}(\varphi)$ полурегулярного отображения φ является открытым подмножеством полной меры в $\mathsf{D}(\varphi)$:*

$$\mu\big(\mathsf{D}(\varphi) \setminus \mathsf{D}_{\mathsf{reg}}(\varphi)\big) = \mu\big(\mathsf{D}_{\mathsf{sing}}(\varphi)\big) = 0,$$

и, как следствие, замыкание $\mathsf{D}_{\mathsf{reg}}(\varphi)$ совпадает с ядром $\mathsf{D}(\varphi)$

$$\overline{\mathsf{D}_{\mathsf{reg}}(\varphi)} = \mathsf{Nuc}\,\big(\mathsf{D}(\varphi)\big) = \overline{\mathsf{Int}\,\mathsf{D}(\varphi)} \qquad (15.3.140)$$

3°. *Если $m = n$, то регулярный носитель $\mathsf{R}_{\mathsf{reg}}(\varphi)$ полурегулярного отображения φ является открытым подмножеством полной меры в носителе $\mathsf{R}(\varphi)$ этого отображения:*

$$\mu\big(\mathsf{R}(\varphi) \setminus \mathsf{R}_{\mathsf{reg}}(\varphi)\big) = \mu\big(\mathsf{R}_{\mathsf{sing}}(\varphi)\big) = 0,$$

и, как следствие, замыкание $\mathsf{R}_{\mathsf{reg}}(\varphi)$ совпадает с ядром $\mathsf{R}(\varphi)$

$$\overline{\mathsf{R}_{\mathsf{reg}}(\varphi)} = \mathsf{Nuc}\left(\mathsf{R}(\varphi)\right) = \overline{\mathsf{Int}\,\mathsf{R}(\varphi)} \qquad (15.3.141)$$

Вдобавок в этом случае ядро области определения отображается в точности на ядро области значений:

$$\varphi\big(\mathsf{Nuc}(\mathsf{D}(\varphi))\big) = \mathsf{Nuc}(\mathsf{R}(\varphi)). \qquad (15.3.142)$$

4°. *Ограничение $\varphi|_J$ полурегулярного отображения φ на измериый компакт $J \subseteq \mathsf{D}(\varphi)$ всегда является полурегулярным отображением, причем внутренние точки компакта J, являющиеся регулярными для φ, будут регулярными и для $\varphi|_J$:*

$$\mathsf{Int}(J) \cap \mathsf{D}_{\mathsf{reg}}(\varphi) \subseteq \mathsf{D}_{\mathsf{reg}}(\varphi|_J) \qquad (15.3.143)$$

а сингулярные точки для $\varphi|_J$ либо являются сингулярными для φ, либо лежат на границе J:

$$\mathsf{D}_{\mathsf{sing}}(\varphi|_J) \subseteq \mathsf{Fr}(J) \cup \mathsf{D}_{\mathsf{sing}}(\varphi) \qquad (15.3.144)$$

Доказательство. 1. По определению, всякая граничная точка $\mathsf{D}(\varphi)$ является сингулярной, то есть

$$\mathsf{Fr}(\mathsf{D}(\varphi)) \subseteq \mathsf{D}_{\mathsf{sing}}(\varphi)$$

поэтому

$$\mu\big(\mathsf{Fr}(\mathsf{D}(\varphi))\big) \leqslant \mu\big(\mathsf{D}_{\mathsf{sing}}(\varphi)\big) = 0$$

и значит $\mathsf{D}(\varphi)$ – измеримый по Жордану компакт. Чтобы доказать, что область значений $\mathsf{R}(\varphi)$ также измерима, нужно рассмотреть два случая. При $m < n$ это следует из малой теоремы Сарда 15.3.6: $\mathsf{R}(\varphi)$, как образ компакта $\mathsf{D}(\varphi)$ при гладком отображении φ, будет компактом нулевой меры, и значит, измеримым компактом. Если же $m = n$, то здесь дополнительно используется формула (15.3.131):

$$\mathsf{Fr}(\mathsf{R}(\varphi)) \subseteq (15.3.131) \subseteq \mathsf{R}_{\mathsf{sing}}(\varphi) = \varphi(\mathsf{D}_{\mathsf{sing}}(\varphi)) \quad \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \quad \mu^*\Big(\mathsf{Fr}(\mathsf{R}(\varphi))\Big) \leqslant \mu^*\Bigg(\underbrace{\varphi\big(\overbrace{\mathsf{D}_{\mathsf{sing}}(\varphi)}^{\substack{\text{множество нулевой меры, в силу (15.3.139)}\\ \downarrow}}\big)}_{\substack{\uparrow \\ \text{множество нулевой меры, по лемме 15.3.2}}}\Bigg) = 0 \quad \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \quad \mathsf{R}(\varphi) \text{ – измеримое множество}$$

2. Второе свойство следует из свойства 1° на с. 950 и того факта, что $\mathsf{D}_{\mathsf{reg}}(\varphi)$ и $\mathsf{D}_{\mathsf{sing}}(\varphi)$ дополняют друг друга в $\mathsf{D}(\varphi)$. Формула (15.3.140) при этом становится следствием формулы (15.1.62).

3. Третье свойство следует из свойства 2° на с. 950, того факта, что $\mathsf{R}_{\mathsf{reg}}(\varphi)$ и $\mathsf{R}_{\mathsf{sing}}(\varphi)$ дополняют друг друга в $\mathsf{R}(\varphi)$ и теоремы 15.3.2, согласно которой мера компакта $\mathsf{R}_{\mathsf{sing}}(\varphi)$ должна быть нулевой, поскольку он является образом компакта нулевой меры $\mathsf{D}_{\mathsf{sing}}(\varphi)$. Формула (15.3.141) при этом становится следствием формулы (15.1.62).

Докажем теперь формулу (15.3.142). Прежде всего заметим, что

$$\varphi\Big(\mathsf{Nuc}\left(\mathsf{D}(\varphi)\right)\Big) = (15.3.140) = \varphi\big(\overline{\mathsf{D}_{\mathsf{reg}}(\varphi)}\big) \subseteq \overline{\varphi\big(\mathsf{D}_{\mathsf{reg}}(\varphi)\big)} = \overline{\mathsf{R}_{\mathsf{reg}}(\varphi)} = (15.3.141) = \mathsf{Nuc}(\mathsf{R}(\varphi)) \qquad (15.3.145)$$

С другой стороны, если $y \in \mathsf{Nuc}(\mathsf{R}(\varphi)) = \overline{\mathsf{R}_{\mathsf{reg}}(\varphi)}$, то найдется последовательность $y_k \in \mathsf{R}_{\mathsf{reg}}(\varphi)$, сходящаяся к y:

$$y_k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} y \qquad (15.3.146)$$

Поскольку φ биективно отображает $\mathsf{D}_{\mathsf{reg}}(\varphi)$ на $\mathsf{R}_{\mathsf{reg}}(\varphi)$, найдется последовательность $x_k \in \mathsf{D}_{\mathsf{reg}}(\varphi)$ такая, что

$$\varphi(x_k) = y_k$$

Она содержится в компакте $\overline{\mathsf{D}_{\mathsf{reg}}(\varphi)} = \mathsf{Nuc}(\mathsf{D}(\varphi)) \subseteq \mathsf{D}(\varphi)$, значит из нее можно выбрать сходящуюся подпоследовательность

$$x_{k_i} \underset{i\to\infty}{\longrightarrow} x \in \mathsf{Nuc}(\mathsf{D}(\varphi))$$

Поскольку отображение $\varphi : \mathsf{D}(\varphi) \to \mathsf{R}(\varphi)$ непрерывно, получаем

$$y_{k_i} = \varphi(x_{k_i}) \underset{i\to\infty}{\longrightarrow} \varphi(x) \in \varphi\Big(\mathsf{Nuc}\left(\mathsf{D}(\varphi)\right)\Big)$$

Вместе с (15.3.146) это означает, что

$$\varphi(x) = y$$

Получается, что для произвольной точки $y \in \mathsf{Nuc}(\mathsf{R}(\varphi)) = \overline{\mathsf{R}_{\mathsf{reg}}(\varphi)}$ мы подобрали точку $x \in \mathsf{Nuc}(\mathsf{D}(\varphi)) = \overline{\mathsf{D}_{\mathsf{reg}}(\varphi)}$ такую, что $\varphi(x) = y$. Это значит, что справедливо включение

$$\varphi\Big(\mathsf{Nuc}\left(\mathsf{D}(\varphi)\right)\Big) \supseteq \mathsf{Nuc}(\mathsf{R}(\varphi))$$

которое вместе с (15.3.145) доказывает (15.3.142).

4. Включения (15.3.143) и (15.3.144) эквивалентны и очевидны. Из второго следует

$$\mu^*\big(\mathsf{D}_{\mathsf{sing}}(\varphi|_J)\big) \leqslant \mu^*\big(\mathsf{Fr}(J) \cup \mathsf{D}_{\mathsf{sing}}(\varphi)\big) \leqslant \mu^*\big(\mathsf{Fr}(J)\big) + \mu^*\big(\mathsf{D}_{\mathsf{sing}}(\varphi)\big) = 0 + 0 = 0,$$

то есть отображение $\varphi|_J$ должно быть полурегулярно. □

Композиция полурегулярных отображений.

Теорема 15.3.10. *Пусть даны:*

(i) *три евклидовых пространства X, Y, Z, причем*

$$\dim X \leqslant \dim Y \leqslant \dim Z,$$

(ii) *два полурегулярных отображения*

$$\varphi : X \hookrightarrow Y, \qquad \psi : Y \hookrightarrow Z,$$

причем регулярный носитель отображения φ содержится в области регулярных параметров отображения ψ:

$$\mathsf{R}_{\mathsf{reg}}(\varphi) \subseteq \mathsf{D}_{\mathsf{reg}}(\psi)$$

Тогда композиция

$$\psi \circ \varphi : X \hookrightarrow Z$$

является полурегулярным отображением с теми же областями регулярных и сингулярных параметров, что и у φ:

$$\mathsf{D}_{\mathsf{sing}}(\psi \circ \varphi) = \mathsf{D}_{\mathsf{sing}}(\varphi), \qquad \mathsf{D}_{\mathsf{reg}}(\psi \circ \varphi) = \mathsf{D}_{\mathsf{reg}}(\varphi).$$

След отображения в другом отображении. Пусть $\alpha : I \to Y$ и $\beta : J \to Y$ – два отображения (необязательно, полурегулярных). Множество

$$\beta^{-1}\big(\mathsf{R}(\alpha)\big) = \{t \in J : \beta(t) \in \mathsf{R}(\alpha)\} = \{t \in J : \exists s \in I \quad \beta(t) = \alpha(s)\}$$

называется *следом* отображения α в области параметров отображения β, а отображение

$$\beta|_\alpha = \beta|_{\beta^{-1}(\mathsf{R}(\alpha))} : \beta^{-1}\big(\mathsf{R}(\alpha)\big) \to \mathbb{R}^n$$

то есть, ограничение отображения β на множество $\beta^{-1}\big(\mathsf{R}(\alpha)\big)$ – *следом отображения α в отображении β*. Таким образом,

$$\mathsf{D}(\beta|_\alpha) = \beta^{-1}\big(\mathsf{R}(\alpha)\big), \qquad \mathsf{R}(\beta|_\alpha) = \beta\big(\beta^{-1}(\mathsf{R}(\alpha)\big) = \mathsf{R}(\alpha) \cap \mathsf{R}(\beta)$$

Отметим следующие

Свойства следа:

1°.
$$\mathsf{R}(\beta) \subseteq \mathsf{R}(\alpha) \quad \Longrightarrow \quad \beta|_{\alpha} = \beta \tag{15.3.147}$$

2°. ассоциативность:
$$\gamma|_{\beta|_{\alpha}} = (\gamma|_{\beta})|_{\alpha} \tag{15.3.148}$$

3°.
$$\alpha|_{\beta|_{\alpha}} = \alpha|_{\beta} \tag{15.3.149}$$

Доказательство. Свойство 1° очевидно, докажем 2°. В обоих частях (15.3.148) записаны ограничения отображения γ на некоторые подмножества в $\mathsf{D}(\gamma)$, поэтому нам нужно лишь доказать, что эти подмножества совпадают:
$$\mathsf{D}\left(\gamma|_{\beta|_{\alpha}}\right) = \mathsf{D}\left((\gamma|_{\beta})|_{\alpha}\right)$$

Действительно,
$$\mathsf{D}\left(\gamma|_{\beta|_{\alpha}}\right) = \gamma^{-1}\big(\mathsf{R}(\beta|_{\alpha})\big) = \gamma^{-1}\big(\mathsf{R}(\beta) \cap \mathsf{R}(\alpha)\big) = \gamma^{-1}\big(\mathsf{R}(\beta)\big) \cap \gamma^{-1}\big(\mathsf{R}(\alpha)\big) =$$
$$= \left(\gamma|_{\gamma^{-1}(\mathsf{R}(\beta))}\right)^{-1}\big(\mathsf{R}(\alpha)\big) = (\gamma|_{\beta})^{-1}\big(\mathsf{R}(\alpha)\big) = \mathsf{D}\left((\gamma|_{\beta})|_{\alpha}\right)$$

Остается доказать 3°:
$$\alpha|_{\beta|_{\alpha}} = (15.3.148) = (\alpha|_{\beta})|_{\alpha} = (15.3.147) = \alpha|_{\beta}$$

□

◇ **15.3.2.** *След полурегулярного отображения в другом полурегулярном отображении не обязан быть полурегулярным отображением.*

Доказательство. Рассмотрим неизмеримый по Жордану компакт $K \subseteq [0;1]$ из примера 15.1.13 и построим гладкую функцию $\varphi : [0;1] \to \mathbb{R}$, имеющую компакт K своим множеством нулей:
$$K = \{t \in [0;1] : \ \varphi(t) = 0\}.$$

Определим два отображения $\alpha : [0;1] \to \mathbb{R}^2$ и $\beta : [0;1] \to \mathbb{R}^2$ правилами
$$\alpha(s) = (s;0), \quad s \in [0;1]$$
$$\beta(t) = (t;\varphi(t)), \quad t \in [0;1].$$

Это будут регулярные отображения, потому что они инъективны и всюду имеют ненулевые производные:
$$\alpha'(s) = (1;0), \quad s \in [0;1]$$
$$\beta'(t) = (1;\varphi'(t)), \quad t \in [0;1].$$

При этом след отображения α в области параметров отображения β будет в точности компактом K:
$$t \in \beta^{-1}\big(\mathsf{R}(\alpha)\big) \quad \Longleftrightarrow \quad \beta(t) \in \mathsf{R}(\alpha) \quad \Longleftrightarrow$$
$$\Longleftrightarrow \quad \varphi(t) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad t \in K.$$

То есть область параметров отображения $\beta|_{\alpha}$ – неизмеримое множество K. □

(d) Подчиненность, эквивалентность и функция перехода

- Пусть $\alpha : I \to Y$ и $\beta : J \to Y$ – два полурегулярных отображения одинаковой размерности m. Будем говорить, что
  - — β *подчинено* α, и обозначать это записью
  $$\beta \subseteq \alpha,$$
  если носитель (образ) β содержится в носителе (образе) α:
  $$\mathsf{R}(\beta) \subseteq \mathsf{R}(\alpha)$$
  - — β *регулярно подчинено* α, если носитель β содержится в регулярном носителе α:
  $$\mathsf{R}(\beta) \subseteq \mathsf{R}_{\mathsf{reg}}(\alpha)$$
  (понятно, что в этом случае след $\mathsf{D}(\alpha|_{\beta})$ отображения β в области параметров α состоит только из регулярных точек отображения α: $\mathsf{D}(\alpha|_{\beta}) \subseteq \mathsf{D}_{\mathsf{reg}}(\alpha)$).

— α и β *эквивалентны*, и обозначать это записью

$$\beta \cong \alpha,$$

если их носители (образы) совпадают:

$$\mathsf{R}(\alpha) = \mathsf{R}(\beta)$$

Функция перехода.

- Для заданных полурегулярных отображений $\alpha : I \to Y$ и $\beta : J \to Y$ размерности m условимся *функцией перехода* (выражающей β через α) называть всякое гладкое отображение $\varphi : \mathsf{D}_{\mathsf{reg}}(\beta) \hookrightarrow \mathsf{D}_{\mathsf{reg}}(\alpha)$, удовлетворяющее следующим условиям:

  (i) $\mathsf{D}(\varphi)$ является (открытым) множеством полной меры в компакте $\mathsf{D}(\beta)$:

  $$\mu\big(\mathsf{D}(\beta) \setminus \mathsf{D}(\varphi)\big) = 0 \qquad (15.3.150)$$

  (поэтому, в частности, $\mathsf{D}(\varphi)$ плотно в $\mathsf{D}(\beta)$);

  (ii) на $\mathsf{D}(\varphi)$ отображение φ выражает β через α:

  $$\forall t \in \mathsf{D}(\varphi) \qquad \alpha(\varphi(t)) = \beta(t)$$

  $$\begin{tikzcd}[column sep=small]
  & & & & Y & & & & & \\
  \mathsf{D}(\beta) \arrow[urrrr, bend left, "\beta"] & \supseteq & \mathsf{D}_{\mathsf{reg}}(\beta) & \supseteq & \mathsf{D}(\varphi) \arrow[r, "\varphi"] & \mathsf{R}(\varphi) & \subseteq & \mathsf{D}_{\mathsf{reg}}(\alpha) & \subseteq & \mathsf{D}(\alpha) \arrow[ulllll, bend right, "\alpha"']
  \end{tikzcd}$$

  Всякую функцию перехода φ, выражающую β через α, мы изображаем записью

  $$\varphi : \beta \rightarrowtail \alpha.$$

- Функция перехода $\varphi : \beta \rightarrowtail \alpha$ называется

  – *глобальной*, если она продолжается до гладкого отображения $\psi : \mathsf{D}(\beta) \to \mathsf{D}(\alpha)$ (такое продолжение, если оно существует, единственно, поскольку $\mathsf{D}(\varphi)$ плотно в $\mathsf{D}(\beta)$),

  – *продолжаемой*, если она продолжается до какой-нибудь другой функции перехода $\psi : \beta \rightarrowtail \alpha$, определенной на более широком множестве:

  $$\mathsf{D}(\varphi) \subsetneqq \mathsf{D}(\psi)$$

  (такое продолжение ψ может быть неединственным, потому что его область определения $\mathsf{D}(\psi)$ может по-разному выбираться);

  – *непродолжаемой*, если такого продолжения $\psi : \beta \rightarrowtail \alpha$ не существует,

  – *максимальной*, если любая другая функция перехода $\psi : \beta \rightarrowtail \alpha$ является ограничением функции φ (на более узкое открытое множество полной меры в $\mathsf{D}(\beta)$).

  – *обратимой*, если существует функция перехода $\psi : \alpha \rightarrowtail \beta$, являющаяся обратным отображением для φ:

  $$\psi = \varphi^{-1}.$$

Когда существует функция перехода мы объясним в теоремах 15.3.11 и 15.3.14, а сейчас отметим важные

Свойства функций перехода:

1° *Любые две функции перехода $\varphi : \beta \rightarrowtail \alpha$ и $\psi : \beta \rightarrowtail \alpha$ совпадают на общей общей области определения:*

$$\forall t \in \mathsf{D}(\varphi) \cap \mathsf{D}(\psi) \qquad \varphi(t) = \psi(t)$$

2° *У всякой функции перехода $\varphi : \beta \rightarrowtail \alpha$ область определения $\mathsf{D}(\varphi)$ и образ $\mathsf{R}(\varphi)$ являются открытыми множествами в X, а φ является (биекцией и) диффеоморфизмом между $\mathsf{D}(\varphi)$ и $\mathsf{R}(\varphi)$.*

3° *Функция перехода $\varphi : \beta \rightarrowtail \alpha$ обратима тогда и только тогда, когда ее образ $\mathsf{R}(\varphi)$ является множеством полной меры в $\mathsf{D}(\alpha)$:*

$$\mu\big(\mathsf{D}(\alpha) \setminus \mathsf{R}(\varphi)\big) = 0 \tag{15.3.151}$$

(поэтому, в частности, $\mathsf{R}(\varphi)$ будет плотно в $\mathsf{D}(\alpha)$);

4° *Если $\varphi : \beta \rightarrowtail \alpha$ – обратимая функция перехода, то можно подобрать две последовательности измеримых компактных областей $D_k \subseteq \mathsf{R}(\varphi)$ и $G_k \subseteq \mathsf{D}(\varphi)$ такие что*

$$D_k = \varphi(G_k), \quad \mu\big(\mathsf{D}(\alpha) \setminus D_k\big) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0, \quad \mu\big(\mathsf{D}(\beta) \setminus G_k\big) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0 \tag{15.3.152}$$

Доказательство. 1. Свойство 1° следует из инъективности α на $\mathsf{D}_{\mathsf{reg}}(\alpha)$:

$$\alpha(\underbrace{\varphi(t)}_{\substack{\Cap\\ \mathsf{D}_{\mathsf{reg}}(\alpha)}}) = \beta(t) = \alpha(\underbrace{\psi(t)}_{\substack{\Cap\\ \mathsf{D}_{\mathsf{reg}}(\alpha)}}) \quad \Longrightarrow \quad \varphi(t) = \psi(t).$$

2. Сразу заметим, что отображение φ инъективно, потому что определено на множестве $\mathsf{D}_{\mathsf{reg}}(\beta)$, на котором β инъективно:

$$s \ne t \in \mathsf{D}(\varphi) \subseteq \mathsf{D}_{\mathsf{reg}}(\beta) \quad \Longrightarrow \quad \alpha(\varphi(s)) = \beta(s) \ne \beta(t) = \alpha(\varphi(t)) \quad \Longrightarrow \quad \varphi(s) \ne \varphi(t).$$

Покажем, что φ стабильно в каждой точке $t \in \mathsf{D}(\varphi)$. Действительно, $t \in \mathsf{D}(\varphi) \subseteq \mathsf{D}_{\mathsf{reg}}(\beta)$ является точкой стабильности для отображения β, поэтому дифференциал $\mathsf{d}\,\beta(t)$ инъективен. С другой стороны, образ $\varphi(t)$ лежит в $\mathsf{R}(\varphi) \subseteq \mathsf{D}_{\mathsf{reg}}(\alpha)$, значит $\varphi(t)$ – точка стабильности для α, и поэтому дифференциал $\mathsf{d}\,\alpha(t)$ тоже инъективен. Теперь из равенства

$$\underbrace{\mathsf{d}\,\beta(t)}_{\text{инъективно}} = \underbrace{\mathsf{d}\,\alpha(\varphi(t))}_{\text{инъективно}} \circ \mathsf{d}\,\varphi(t), \qquad t \in V$$

получаем, что отображение $\mathsf{d}\,\varphi$ тоже должно быть инъективно (потому что иначе оно отображало бы какой-то вектор $p \ne 0$ в нуль, и значит, $\mathsf{d}\,\beta(t)[p] = \mathsf{d}\,\alpha(\varphi(t))\big[\,\mathsf{d}\,\varphi[p]\big] = 0$, то есть $\mathsf{d}\,\beta(t)$ не могло бы быть инъективно). Таким образом, t – точка стабильности для φ (и это верно для любой $t \in V$).

Итак, $\varphi : X \hookrightarrow X$ – гладкое, инъективное и стабильное отображение. По теореме о глобальном открытом отображении 14.2.14, образ $\mathsf{R}(\varphi)$ – открытое множество в X, и обратное отображение $\varphi^{-1} : \mathsf{R}(\varphi) \to \mathsf{D}(\varphi)$ – тоже гладкое.

3. Пусть $\varphi : \beta \rightarrowtail \alpha$ – функция перехода. Тогда по свойству 2° существует обратная функция $\psi = \varphi^{-1} : \mathsf{R}(\varphi) \to \mathsf{D}(\varphi)$, являющаяся гладкой. На множестве $\mathsf{R}(\varphi)$ она будет выражать α через β:

$$\forall s \in \mathsf{R}(\varphi) \qquad \alpha(s) = \beta(\psi(s)).$$

Единственное, чего ей может недоставать для того, чтобы быть функцией перехода, выражающей α через β, это условия (15.3.150), по которому множество $\mathsf{D}(\psi) = \mathsf{R}(\varphi)$ должно быть множеством полной меры в $\mathsf{D}(\alpha)$. Это как раз условие (15.3.151).

4. Пусть $\varphi : \beta \rightarrowtail \alpha$ – обратимая функция перехода. Выберем в качестве G_k объединение внутренних двоичных клеток ранга k для множества $\mathsf{D}(\varphi)$,

$$G_k = \mathsf{G}_k(\mathsf{D}(\varphi)),$$

и положим

$$D_k = \alpha^{-1}\big(\beta(G_k)\big) = \mathsf{D}\left(\alpha|_{\beta|_{G_k}}\right) = \varphi(G_k)$$

Из свойства 1° на с.953 следует, что D_k – измеримые по Жордану компакты. Условия

$$\mu(\mathsf{D}(\alpha) \setminus D_k) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0, \qquad \mu(\mathsf{D}(\beta) \setminus G_k) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

доказываются с помощью теоремы 15.1.24: сначала нужно их заменить на равносильные условия

$$\mu(\mathsf{D}(\alpha) \setminus \mathsf{Int}(D_k)) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0, \qquad \mu(\mathsf{D}(\beta) \setminus \mathsf{Int}(G_k)) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

а затем заметить, что системы множеств

$$\mathsf{D}(\alpha) \setminus \mathsf{Int}(D_k), \qquad \mathsf{D}(\beta) \setminus \mathsf{Int}(G_k)$$

представляют из себя сужающиеся последовательности компактов, и их пересечения

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} \mathsf{D}(\alpha) \setminus \mathsf{Int}(D_k) = \mathsf{D}(\alpha) \setminus U, \qquad \bigcap_{k=1}^{\infty} \mathsf{D}(\beta) \setminus \mathsf{Int}(G_k) = \mathsf{D}(\beta) \setminus \mathsf{D}(\varphi)$$

имеют нулевую меру по уже доказанному свойству 3°. Значит, по теореме 15.1.24, меры этих компактов стремятся к нулю. $\square$

Регулярно подчиненные отображения.

Теорема 15.3.11. *Пусть α и β – два полурегулярных отображения, причем β регулярно подчинено α:*

$$\mathsf{R}(\beta) \subseteq \mathsf{R}_{\mathsf{reg}}(\alpha)$$

Тогда существует и единственна глобальная функция перехода φ, выражающая β через α:

$$\varphi : \beta \rightarrowtail \alpha.$$

Ее продолжение на $\mathsf{D}(\beta)$ является гладким отображением $\psi : \mathsf{D}(\beta) \to \mathsf{D}(\alpha)$, выражающим β через α на всей области определения β:

$$\forall t \in \mathsf{D}(\beta) \quad \alpha(\psi(t)) = \beta(t) \qquad \begin{tikzcd} \mathsf{R}(\beta) \arrow[r, phantom, "\subseteq"] & \mathsf{R}_{\mathsf{reg}}(\alpha) \\ \mathsf{D}(\beta) \arrow[u, "\beta"] \arrow[r, "\psi"'] & \mathsf{D}_{\mathsf{reg}}(\alpha) \arrow[u, "\mathsf{reg}\,\alpha"'] \end{tikzcd} \tag{15.3.153}$$

Доказательство. Регулярная часть $\mathsf{reg}\,\alpha : \mathsf{D}_{\mathsf{reg}}(\alpha) \to \mathsf{R}_{\mathsf{reg}}(\alpha)$ отображения α является биективным отображением $\mathsf{D}_{\mathsf{reg}}(\alpha)$ в $\mathsf{R}_{\mathsf{reg}}(\alpha)$. Поэтому существует обратное ему отображение $(\mathsf{reg}\,\alpha)^{-1} : \mathsf{R}_{\mathsf{reg}}(\alpha) \to \mathsf{D}_{\mathsf{reg}}(\alpha)$, и, положив

$$\psi = (\mathsf{reg}\,\alpha)^{-1} \circ \beta$$

мы получим (единственное) отображение ψ, замыкающее диаграмму (15.3.153). Нам нужно лишь убедиться, что ψ – гладкое (тогда функцией перехода φ будет ограничение $\psi\big|_{\mathsf{D}_{\mathsf{reg}}(\beta)}$).

Продолжим β до гладкого отображения $\widetilde{\beta} : V \to Y$ в некоторую окрестность V компакта $\mathsf{D}(\beta)$ (при этом мы уже не ждем, что образ $\widetilde{\beta}$ будет тоже лежать в $\mathsf{R}_{\mathsf{reg}}(\alpha)$). Зафиксируем точку $b \in \mathsf{D}(\beta)$. Для нее существует единственная точка $a \in \mathsf{D}(\alpha)$ такая что $\alpha(a) = \beta(b)$ (очевидно, $a = \psi(b)$). Поскольку $a \in \mathsf{D}_{\mathsf{reg}}(\alpha)$ – точка стабильности отображения $\mathsf{reg}\,\alpha$, по теореме о существовании локальной ретракции 14.2.16, существуют окрестность $U \subseteq \mathsf{D}_{\mathsf{reg}}(\alpha)$ точки a, открытое множество $W \subset Y$ и гладкое отображение $\pi : W \to U$, являющееся ретракцией для $\alpha|_U$:

$$\forall s \in U \quad \pi\big(\alpha(s)\big) = s$$

При этом, в силу (14.2.170), выполняется тождество

$$\forall x \in \mathsf{R}_{\mathsf{reg}}(\alpha) \cap W \quad \alpha\big(\pi(x)\big) = x \tag{15.3.154}$$

Положив теперь

$$\widetilde{V} = V \cap \widetilde{\beta}^{-1}(W), \qquad \widetilde{\psi} = \pi \circ \widetilde{\beta}|_{\widetilde{V}},$$

мы получим гладкое отображение $\widetilde{\psi} : \widetilde{V} \to U$ такое, что

$$\forall t \in \mathsf{D}(\beta) \cap \widetilde{V} \qquad \mathsf{reg}\,\alpha\big(\widetilde{\psi}(t)\big) = \mathsf{reg}\,\alpha\Big(\pi\big(\underbrace{\beta(t)}_{\substack{\uparrow \\ \text{лежит в } \mathsf{R}_{\mathsf{reg}}(\alpha) \cap W}}\big)\Big) = (15.3.154) = \beta(t) = \mathsf{reg}\,\alpha\big(\psi(t)\big)$$

То есть,

$$\forall t \in \mathsf{D}(\beta) \cap \widetilde{V} \qquad \widetilde{\psi}(t) = \psi(t)$$

$$\begin{tikzcd} & & & & & W \arrow[ddlllll, bend right, "\pi"'] \arrow[d, phantom, sloped, "\subseteq"] \\ & & & \mathsf{R}_{\mathsf{reg}}(\alpha) \arrow[r, phantom, "\subseteq"] & & Y \\ U \arrow[r, phantom, "\subseteq"] & & \mathsf{D}_{\mathsf{reg}}(\alpha) \arrow[ur, "\mathsf{reg}\,\alpha"] & \mathsf{D}(\beta) \arrow[l, "\psi"] \arrow[u, "\beta"'] \arrow[r, phantom, "\subseteq"] & & V \arrow[u, "\widetilde{\beta}"'] \arrow[d, phantom, sloped, "\supseteq"] \\ & & & & & \widetilde{V} \arrow[ulllll, bend left, "\widetilde{\psi}"] \end{tikzcd}$$

Мы получили, что какую ни возьми точку $b \in \mathsf{D}(\beta)$, у нее найдется окрестность $\widetilde{V}$ и гладкое отображение $\widetilde{\psi} : \widetilde{V} \to U$, совпадающее с $\psi : \mathsf{D}(\beta) \to \mathsf{D}(\alpha)$ на множестве $\mathsf{D}(\beta) \cap \widetilde{V}$. Этого достаточно, чтобы сделать вывод, что $\psi : \mathsf{D}(\beta) \to \mathsf{D}(\alpha)$ – гладкое отображение (в смысле определения на с.948). □

Вырожденные полурегулярные отображения. Полурегулярное отображение $\alpha : I \to Y$ называется *вырожденным*, если его область параметров I имеет нулевую меру:

$$\mu(I) = 0$$

Лемма 15.3.12. *Если полурегулярное отображение $\beta : J \to Y$ вырождено*

$$\mu(\mathsf{D}(\beta)) = 0$$

то его след $\alpha|_\beta$ в любом другом полурегулярном отображении $\alpha : I \to Y$ также является вырожденным полурегулярным отображением:

$$\mu\big(\,\mathsf{D}(\alpha|_\beta)\big) = 0.$$

Доказательство. 1. Заметим сразу, что мы можем считать, что $\beta : J \to Y$ подчинено $\alpha : I \to Y$,

$$\mathsf{R}(\beta) \subseteq \mathsf{R}(\alpha)$$

Действительно, если это не так, то мы можем рассмотреть подмножество

$$J_0 = \beta^{-1}(\mathsf{R}(\alpha) \cap \mathsf{R}(\beta)) = \mathsf{D}(\beta|_\alpha)$$

Поскольку оно содержится в множестве нулевой меры J, оно само имеет нулевую меру. С другой стороны, оно замкнуто, и поэтому будет измеримым (по Жордану) компактом. Значит, по свойству 4° на с. 954, ограничение $\beta_0 = \beta|_{J_0} : J_0 \to Y$ является полурегулярным отображением, причем вырожденным, поскольку $\mu(J_0) = 0$. В результате мы получаем

$$\mathsf{D}(\alpha|_\beta) = \alpha^{-1}\big(\,\mathsf{R}(\beta)\big) = \alpha^{-1}\big(\,\mathsf{R}(\alpha) \cap \mathsf{R}(\beta)\big) = \alpha^{-1}\big(\beta(J_0)\big) = \mathsf{D}(\alpha|_{\beta_0})$$

и можно доказывать нашу лемму для отображения β_0 (подчиненного α).

2. Итак, мы считаем, что $\beta : J \to Y$ подчинено $\alpha : I \to Y$. Разобьем след отображения β в области параметров α

$$A = \mathsf{D}(\alpha|_\beta)$$

на ту часть, которая попадает в $\mathsf{D}_{\mathsf{sing}}(\alpha)$,

$$A_0 = A \cap \mathsf{D}_{\mathsf{sing}}(\alpha)$$

(это будет множество нулевой меры, поскольку α полурегулярно, и значит $\mu(A_0) \leqslant \mu(\mathsf{D}_{\mathsf{sing}}(\alpha)) = 0$) и остаток:

$$A \setminus \mathsf{D}_{\mathsf{sing}}(\alpha)$$

Область параметров J отображения β при этом разбивается на ту часть, которая соответствует A_0,

$$J_0 = \beta^{-1}\big(\alpha(A_0)\big) = \mathsf{D}(\beta|_{\alpha|_{A_0}})$$

и остаток $J \setminus J_0$. Поскольку J_0 – измеримый компакт (точнее, компакт нулевой меры, как и J), можно построить последовательность измеримых компактов J_k в $J \setminus J_0$, поглощающую $J \setminus J_0$:

$$J_k \subseteq J \setminus J_0, \qquad J \setminus J_0 = \bigcup_{k=1}^{\infty} J_k$$

(для этого можно рассмотреть двоичную сетку ранга k и положить в качестве J_k пересечение J с объединением клеток, инцидентных J, но не пересекающихся с J_0).

Каждый компакт J_k измерим (точнее, имеет нулевую меру, как подмножество в J), и поэтому ограничение $\beta|_{J_k}$ отображения β на J_k есть полурегулярное отображение (свойство 4° на с. 954). По построению, его след в области параметров α

$$A_k = \mathsf{D}(\alpha|_{\beta|_{J_k}}) = \alpha^{-1}\big(\beta(J_k)\big)$$

не пересекается с A_0, то есть содержится в регулярной области параметров α

$$A_k \subseteq \mathsf{D}_{\mathsf{reg}}(\alpha)$$

Значит, $\beta|_{J_k}$ регулярно подчинено α, и мы можем применить теорему 15.3.11: существует гладкое отображение $\varphi_k : J_k \to I$ выражающее $\beta|_{J_k}$ через α:

$$\begin{tikzcd} \beta(J_k) \arrow[r, phantom, "\subseteq"] & \alpha(A_k) \\ J_k \arrow[u, "\beta|_{J_k}"] \arrow[r, "\varphi_k"'] & A_k \arrow[u, "\alpha|_{A_k}"'] \end{tikzcd}$$

Поскольку отображение α биективно на $\mathsf{D}_{\mathsf{reg}}(\alpha)$, а с ним и на A_k, мы получаем

$$A_k = \varphi_k(J_k)$$

то есть, A_k – образ компакта нулевой меры при гладкой замене переменных $\varphi_k : J_k \to A_k$. Применяя теорему 15.3.2, получаем, что A_k сам имеет нулевую меру:

$$\mu(A_k) = 0$$

Теперь получаем, что компакт $A = \mathsf{D}(\alpha|_\beta)$ является объединением последовательности компактов $A_0, A_1, ...$, каждый из которых имеет нулевую меру:

$$A = A_0 \cup \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k, \qquad \mu(A_i) = 0$$

По теореме об исчерпывании компакта 15.1.23, это означает, что A сам имеет нулевую меру. □

Следствие 15.3.13. *Если полурегулярные отображения $\alpha : I \to Y$ и $\beta : J \to Y$ эквивалентны,*

$$\alpha(I) = \beta(J)$$

то вырожденность одного из них эквивалентна вырожденности другого:

$$\mu(I) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \mu(J) = 0.$$

Подчиненные полурегулярные отображения. В примере 15.3.2 мы видели, что след $\alpha|_\beta$ полурегулярного отображения β в другом полурегулярном отображении α не обязан быть полурегулярным отображением. Однако в частном случае, когда β подчинено α, след становится полурегулярным, и одновременно существует функция перехода:

Теорема 15.3.14 (о подчиненных полурегулярных отображениях)**.** *Полурегулярное отображение $\beta : J \to Y$ подчинено полурегулярному отображению $\alpha : I \to Y$,*

$$\mathsf{R}(\beta) \subseteq \mathsf{R}(\alpha),$$

тогда и только тогда, когда существует функция перехода φ, выражающая β через α,

$$\varphi : \beta \rightarrowtail \alpha.$$

При этом,

(a) *след $\alpha|_\beta$ отображения β в отображении α является полурегулярным отображением, эквивалентным β:*

$$\mu\big(\mathsf{D}_{\mathsf{sing}}(\alpha|_\beta)\big) = 0, \qquad (\alpha|_\beta) \cong \beta$$

(в частности, множество $\mathsf{D}(\alpha|_\beta) = \alpha^{-1}\big(\mathsf{R}(\beta)\big)$ измеримо в I),

(b) *образ $\mathsf{R}(\varphi)$ отображения φ является открытым множеством полной меры в $\mathsf{D}(\alpha|_\beta)$:*

$$\mu\big(\mathsf{D}(\alpha|_\beta) \setminus \mathsf{R}(\varphi)\big) = 0 \tag{15.3.155}$$

(поэтому, в частности, $\mathsf{R}(\varphi)$ плотно в $\mathsf{D}(\alpha|_\beta)$).

Доказательство. Из существования функции перехода $\varphi : \beta \rightarrowtail \alpha$, подчиненность β отображению α выводится легко: поскольку β выражается через α на множестве $\mathsf{D}(\varphi)$, мы получаем

$$\beta(\mathsf{D}(\varphi)) \subseteq \alpha(\varphi(\mathsf{D}(\varphi))) \subseteq \mathsf{R}(\alpha).$$

При этом $\mathsf{D}(\varphi)$ плотно в $\mathsf{D}(\beta)$, значит

$$\mathsf{R}(\beta) = \beta(\mathsf{D}(\beta)) = \overline{\beta(\mathsf{D}(\varphi))} \subseteq \mathsf{R}(\alpha).$$

Поэтому интерес представляет обратная импликация. Будем считать, что $\mathsf{R}(\beta) \subseteq \mathsf{R}(\alpha)$.

1. Из вложения $\mathsf{R}_{\mathsf{reg}}(\beta) \subseteq \mathsf{R}(\alpha)$ следует $\mathsf{R}(\alpha) \cap \mathsf{R}_{\mathsf{reg}}(\beta) = \mathsf{R}_{\mathsf{reg}}(\beta)$, откуда

$$\mathsf{R}_{\mathsf{reg}}(\alpha) \cap \mathsf{R}_{\mathsf{reg}}(\beta) = \big(\mathsf{R}(\alpha) \setminus \mathsf{R}_{\mathsf{sing}}(\alpha)\big) \cap \mathsf{R}_{\mathsf{reg}}(\beta) = (0.3.177) = \underbrace{\big(\mathsf{R}(\alpha) \cap \mathsf{R}_{\mathsf{reg}}(\beta)\big)}_{\substack{\parallel \\ \mathsf{R}_{\mathsf{reg}}(\beta)}} \setminus \mathsf{R}_{\mathsf{sing}}(\alpha) = \mathsf{R}_{\mathsf{reg}}(\beta) \setminus \mathsf{R}_{\mathsf{sing}}(\alpha)$$

то есть

$$\mathsf{R}_{\mathsf{reg}}(\alpha) \cap \mathsf{R}_{\mathsf{reg}}(\beta) = \mathsf{R}_{\mathsf{reg}}(\beta) \setminus \mathsf{R}_{\mathsf{sing}}(\alpha) \tag{15.3.156}$$

2. Положим

$$N = \mathsf{R}_{\mathsf{reg}}(\alpha) \cap \mathsf{R}_{\mathsf{reg}}(\beta) = \mathsf{R}_{\mathsf{reg}}(\beta) \setminus \mathsf{R}_{\mathsf{sing}}(\alpha), \qquad U = \alpha^{-1}(N) = (\mathsf{reg}\,\alpha)^{-1}(N), \qquad V = \beta^{-1}(N) = (\mathsf{reg}\,\beta)^{-1}(N)$$

Поскольку регулярные части $\mathsf{reg}\,\alpha$ и $\mathsf{reg}\,\beta$ отображений α и β являются биекциями, можно рассмотреть отображение

$$\varphi = \alpha|_U^{-1} \circ \beta|_V : V \to U,$$

также являющееся биекцией. Покажем, что φ удовлетворяет нашим требованиям.

3. Из формулы (15.3.156) и биективности $\mathsf{reg}\,\beta$ следует

$$\begin{aligned} V = (\mathsf{reg}\,\beta)^{-1}\big(\mathsf{R}_{\mathsf{reg}}(\alpha) \cap \mathsf{R}_{\mathsf{reg}}(\beta)\big) = (\mathsf{reg}\,\beta)^{-1}\big(\mathsf{R}_{\mathsf{reg}}(\beta) \setminus \mathsf{R}_{\mathsf{sing}}(\alpha)\big) = \\ = \mathsf{D}_{\mathsf{reg}}(\beta) \setminus \beta^{-1}\big(\mathsf{R}_{\mathsf{sing}}(\alpha)\big) = \mathsf{D}_{\mathsf{reg}}(\beta) \setminus \mathsf{D}\left(\beta|_{\mathsf{sing}\,\alpha}\right) \end{aligned} \tag{15.3.157}$$

Отсюда следует, что множество V открыто, как разность открытого множества $\mathsf{D}_{\mathsf{reg}}(\beta)$ и компакта $\beta^{-1}\big(\mathsf{R}_{\mathsf{sing}}(\alpha)\big)$.

4. Гладкость отображения φ доказывается так же, как в теореме 15.3.11.

5. Из (15.3.157) получаем цепочку:

$$\mathsf{D}_{\mathsf{reg}}(\beta) \setminus \mathsf{D}\left(\beta|_{\mathsf{sing}\,\alpha}\right) = V$$

$$\Downarrow$$

$$\underbrace{\mathsf{D}_{\mathsf{reg}}(\beta)}_{\substack{\parallel \\ J \setminus \mathsf{D}_{\mathsf{sing}}(\beta)}} \subseteq V \cup \mathsf{D}\left(\beta|_{\mathsf{sing}\,\alpha}\right)$$

$$\Downarrow$$

$$J \subseteq V \cup \mathsf{D}\left(\beta|_{\mathsf{sing}\,\alpha}\right) \cup \mathsf{D}_{\mathsf{sing}}(\beta) \tag{15.3.158}$$

$$\Downarrow$$

$$J \setminus V \subseteq \underbrace{\mathsf{D}\left(\beta|_{\mathsf{sing}\,\alpha}\right)}_{\substack{\uparrow \\ \text{имеет нулевую} \\ \text{меру, по лемме 15.3.12}}} \cup \underbrace{\mathsf{D}_{\mathsf{sing}}(\beta)}_{\substack{\uparrow \\ \text{имеет нулевую} \\ \text{меру, потому что} \\ \beta \text{ полурегулярно}}} \tag{15.3.159}$$

$$\Downarrow$$

$$\mu(J \setminus V) = 0 \tag{15.3.160}$$

6. Далее, поскольку U – открытое множество, содержащееся в $\mathsf{D}(\alpha|_\beta)$, оно должно содержаться во внутренности $\mathsf{D}(\alpha|_\beta)$:

$$U \subseteq \mathsf{Int}\big(\mathsf{D}(\alpha|_\beta)\big)$$

С другой стороны,

$$U = (\mathsf{reg}\,\alpha)^{-1}(N) \subseteq \mathsf{D}_{\mathsf{reg}}(\alpha)$$

и вместе это дает

$$U \subseteq \mathsf{Int}\left(\mathsf{D}(\alpha|_\beta)\right) \cap \mathsf{D}_{\mathsf{reg}}(\alpha) \subseteq (15.3.143) \subseteq \mathsf{D}_{\mathsf{reg}}(\alpha|_\beta)$$

Во-вторых, из (15.3.158) получаем также:

$$J \subseteq V \cup \mathsf{D}\left(\beta|_{\mathsf{sing}\,\alpha}\right) \cup \mathsf{D}_{\mathsf{sing}}(\beta)$$

$$\Downarrow$$

$$J = V \cup \mathsf{D}\left(\beta|_{\mathsf{sing}\,\alpha}\right) \cup \mathsf{D}_{\mathsf{sing}}(\beta)$$

$$\Downarrow$$

$$\underbrace{\beta(J)}_{\substack{\| \\ \mathsf{R}(\beta)}} = \underbrace{\beta(V)}_{\substack{\| \\ N}} \cup \underbrace{\beta\big(\mathsf{D}(\beta|_{\mathsf{sing}\,\alpha})\big)}_{\substack{\| \\ \mathsf{R}(\beta|_{\mathsf{sing}\,\alpha})}} \cup \underbrace{\beta\big(\mathsf{D}_{\mathsf{sing}}(\beta)\big)}_{\substack{\| \\ \mathsf{R}_{\mathsf{sing}}(\beta)}}$$

$$\Downarrow$$

$$\mathsf{R}(\beta) = N \cup \mathsf{R}(\beta|_{\mathsf{sing}\,\alpha}) \cup \mathsf{R}_{\mathsf{sing}}(\beta)$$

$$\Downarrow$$

$$\underbrace{\alpha^{-1}\big(\mathsf{R}(\beta)\big)}_{\substack{\| \\ \mathsf{D}(\alpha|_\beta)}} = \underbrace{\alpha^{-1}(N)}_{\substack{\| \\ U}} \cup \underbrace{\alpha^{-1}\big(\mathsf{R}(\beta|_{\mathsf{sing}\,\alpha})\big)}_{\substack{\| \\ \mathsf{D}(\alpha|_{\beta|_{\mathsf{sing}\,\alpha}})}} \cup \underbrace{\alpha^{-1}\big(\mathsf{R}_{\mathsf{sing}}(\beta)\big)}_{\substack{\| \\ \mathsf{D}(\alpha|_{\mathsf{sing}\,\beta})}}$$

$$\Downarrow$$

$$\mathsf{D}(\alpha|_\beta) = U \cup \mathsf{D}\left(\alpha|_{\beta|_{\mathsf{sing}\,\alpha}}\right) \cup \mathsf{D}\left(\alpha|_{\mathsf{sing}\,\beta}\right)$$

$$\Downarrow$$

$$\mathsf{D}(\alpha|_\beta) \setminus U \subseteq \underbrace{\mathsf{D}\left(\alpha|_{\beta|_{\mathsf{sing}\,\alpha}}\right) \cup \mathsf{D}\left(\alpha|_{\mathsf{sing}\,\beta}\right)}_{\substack{\uparrow \\ \text{эти множества имеют нулевую} \\ \text{меру, по лемме 15.3.12}}}$$

$$\Downarrow$$

$$\mu\big(\mathsf{D}(\alpha|_\beta) \setminus U\big) = 0 \tag{15.3.161}$$

7. Равенство (15.3.161) теперь дает полурегулярность отображения $\alpha|_\beta$:

$$U \subseteq \mathsf{D}_{\mathsf{reg}}(\alpha|_\beta) \quad \Longrightarrow \quad \mathsf{D}_{\mathsf{sing}}(\alpha|_\beta) = \mathsf{D}(\alpha|_\beta) \setminus \mathsf{D}_{\mathsf{reg}}(\alpha|_\beta) \subseteq \mathsf{D}(\alpha|_\beta) \setminus U \quad \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow \quad \mu\big(\mathsf{D}_{\mathsf{sing}}(\alpha|_\beta)\big) \leqslant \mu\big(\mathsf{D}(\alpha|_\beta) \setminus U\big) = 0$$

$\square$

Эквивалентные полурегулярные отображения.

Теорема 15.3.15 (об эквивалентных полурегулярных отображениях)**.** *Полурегулярные отображения $\alpha : I \to Y$ и $\beta : J \to Y$ эквивалентны,*

$$\mathsf{R}(\alpha) = \mathsf{R}(\beta)$$

тогда и только тогда, когда существует обратимая функция перехода $\varphi : \beta \rightarrowtail \alpha$.

Доказательство. 1. Если существует функция перехода $\varphi : \beta \rightarrowtail \alpha$, то должны выполняться условия $\mathsf{R}(\beta) \subseteq \mathsf{R}(\alpha)$, а если она обратима, то и $\mathsf{R}(\alpha) \subseteq \mathsf{R}(\beta)$, то есть $\mathsf{R}(\alpha) = \mathsf{R}(\beta)$.

2. Наоборот, если $\mathsf{R}(\alpha) = \mathsf{R}(\beta)$, то, во-первых, из теоремы 15.3.14 следует существование функции перехода $\varphi : \beta \rightarrowtail \alpha$. А, во-вторых, условие $\mathsf{R}(\alpha) = \mathsf{R}(\beta)$ будет означать, что след $\alpha|_\beta$ совпадает с α, поэтому

$$\mu\big(\mathsf{D}(\alpha) \setminus \mathsf{R}(\varphi)\big) = \mu\big(\mathsf{D}(\alpha|_\beta) \setminus \mathsf{R}(\varphi)\big) = 0.$$

То есть $\mathsf{R}(\varphi)$ – открытое множество полной меры в $\mathsf{D}(\alpha)$. По свойству 3° на с.958 это означает, что φ – обратимая функция перехода. $\square$

§ 4 Замена переменных в кратном интеграле

(a) Теорема о замене переменных

Формулировка теоремы о замене переменных в кратном интеграле.

- *(Полу)регулярной заменой переменных* на измеримом компакте D в евклидовом пространстве X называется всякое его (полу)регулярное отображение $\varphi : D \to X$ в то же евклидово пространство.

Теорема 15.4.1 (о замене переменных в кратном интеграле)**.** *Пусть D – измеримый по Жордану компакт в евклидовом пространстве X и $\varphi : D \to X$ – полурегулярная замена переменных. Тогда*

(i) образ $E = \varphi(D)$ – измеримый по Жордану компакт в Y, и

(ii) интеграл от всякой непрерывной функции f по области $E = \varphi(D)$ вычисляется по формуле[11]*:*

$$\int_{\varphi(D)} f(y)\,\mathsf{d}\,y = \int_D f\big(\varphi(x)\big) \cdot |\,\mathsf{J}(x)|\,\mathsf{d}\,x \tag{15.4.162}$$

Доказательство этого утверждения мы отложим до с.970, предпослав ему несколько технических результатов.

Мера внутренних компактов при полурегулярной замене переменных.

Теорема 15.4.2. *Если D – компактная область в евклидовом пространстве X, и $\varphi : D \to X$ – полурегулярная замена переменных, то всякий измеримый компакт $G \subseteq \mathsf{Int}(D)$ под действием отображения φ превращается в измеримый компакт $\varphi(G)$, мера которого вычисляется по формуле:*

$$\mu\big(\varphi(G)\big) = \int_G |\det \mathsf{d}\,\varphi(x)|\,\mathsf{d}\,x \tag{15.4.163}$$

Для доказательства нам понадобятся три леммы.

Лемма 15.4.3. *Если D – компактная область в X, и $\varphi : D \to X$ – полурегулярная замена переменных, то для всякого компакта $K \subseteq \mathsf{Int}(D)$ существуют числа $\delta > 0$ и $N > 0$ такие, что для всякого гиперкуба $Q \subseteq K$ с длиной ребра $h < \delta$ выполняется неравенство:*

$$\mu\big(\varphi(Q)\big) \leqslant |\,\mathsf{J}(a)| \cdot \mu(Q) \cdot (1 + Nh)^n \tag{15.4.164}$$

где a – центр гиперкуба Q, $\mathsf{J}(a) = \det \mathsf{d}\,\varphi(a)$ – якобиан отображения $\varphi : U \to V$ в точке a.

Доказательство. 1. Пусть $U = \mathsf{Int}(D)$ и $V = \varphi(U)$. Поскольку φ инъективно и имеет невырожденный дифференциал на U, по теореме о гладком обращении переменных 14.2.14, V является открытым множеством, и существует обратное отображение $\psi = \varphi^{-1} : V \to U$, которое будет гладким, причем дифференциалы этих отображений связаны формулой (14.2.168):

$$\big[\,\mathsf{d}\,\varphi(x)\big]^{-1} = \mathsf{d}\,\psi\big(\varphi(x)\big)$$

Отсюда в свою очередь следует, что отображение $x \in U \mapsto \big[\,\mathsf{d}\,\varphi(x)\big]^{-1}$ непрерывно, и значит непрерывно отображение $x \in U \mapsto \Big\|\big[\,\mathsf{d}\,\varphi(x)\big]^{-1}\Big\|$. Поэтому на компакте $K \subseteq U$ оно имеет наибольшее значение, которое мы обозначим L:

$$L = \max_{a \in K} \Big\|\big[\,\mathsf{d}\,\varphi(a)\big]^{-1}\Big\| \tag{15.4.165}$$

Воспользуемся теоремой 14.2.9 о равномерной оценке остатка ряда Тейлора, и выберем числа $\varepsilon > 0$ и $M > 0$ такие, что

$$\varphi(x+p) = \varphi(x) + \mathsf{d}\,\varphi(x)[p] + R_1(x,p), \qquad |R_1(x,p)| \leqslant M \cdot |p|^2, \qquad x \in K,\ |p| \leqslant \varepsilon \tag{15.4.166}$$

[11] Здесь $\mathsf{J}(x)$ – Якобиан замены переменных φ, определенный в (14.2.137), $\mathsf{J}(x) = \det \mathsf{d}\,\varphi(x)$.

Положим

$$N = \frac{LMn}{2}$$

и зафиксируем $\delta > 0$ так, чтобы

$$\forall h < \delta \qquad \frac{h\sqrt{n}}{2} + \frac{N}{2}h^2 < \varepsilon \tag{15.4.167}$$

Чтобы убедиться в справедливости (15.4.164), рассмотрим какой-нибудь гиперкуб Q с ребром $h < \delta$, содержащийся в K:

$$Q \subseteq K \tag{15.4.168}$$

Пусть $a \in Q$ – центр куба Q. Обозначим через $\widetilde{Q}$ куб, с тем же центром a, но имеющий длину ребра $h + Nh^2$ (таким образом, $\widetilde{Q}$ получается из Q гомотетией с центром в точке a и коэффициентом $1 + Nh$.

Пусть кроме того $\widetilde{\varphi} : X \to X$ обозначает отображение, действующее по формуле

$$\widetilde{\varphi}(x) = \varphi(a) + \mathsf{d}\,\varphi(a)[x - a] \tag{15.4.169}$$

Покажем, что справедливо включение:

$$\varphi(Q) \subseteq \widetilde{\varphi}(\widetilde{Q}) \tag{15.4.170}$$

(то есть, образ куба Q при отображении φ содержится в образе куба $\widetilde{Q}$ при отображении $\widetilde{\varphi}$). Действительно, пусть $x \in Q$, тогда положив

$$y = x + \big(\mathsf{d}\,\varphi(a)\big)^{-1}\big[R_1(a, x - a)\big]$$

мы получим с одной стороны,

$$|y - x| = \Bigg|\underbrace{\big(\mathsf{d}\,\varphi(a)\big)^{-1}}_{\text{матрица}}\big[\underbrace{R_1(a, x - a)}_{\text{вектор}}\big]\Bigg| \leqslant (13.1.38) \leqslant \underbrace{\Big\|\big(\mathsf{d}\,\varphi(a)\big)^{-1}\Big\|}_{\substack{\wedge\!\!\!\!\backslash \\ L \\ \text{в силу (15.4.165)}}} \cdot \underbrace{\big|R_1(a, x - a)\big|}_{\substack{\wedge\!\!\!\!\backslash \\ M \cdot |x - a|^2}} \leqslant$$

$$\leqslant L \cdot M \cdot \underbrace{|x - a|^2}_{\substack{\wedge\!\!\!\!\backslash \\ \left(\frac{h\sqrt{n}}{2}\right)^2}} \leqslant \frac{LMn}{4}h^2 = \frac{N}{2}h^2$$

Мы получили, что точка x лежит в кубе Q, а точка y отступает от нее на расстояние не больше $\frac{N}{2}h^2$. Значит, если добавить к ребрам куба Q с обеих сторон по величине $\frac{N}{2}h^2$, то полученный куб будет содержать y. То есть $y \in \widetilde{Q}$.

А, с другой стороны,

$$y = x + \big(\mathsf{d}\,\varphi(a)\big)^{-1}\big[R_1(a, x - a)\big]$$

$$\Downarrow$$

$$y - a = x - a + \big(\mathsf{d}\,\varphi(a)\big)^{-1}\big[R_1(a, x - a)\big]$$

$$\Downarrow \qquad \left(\substack{\text{применяем к обеим частям} \\ \text{линейный оператор } \mathsf{d}\,\varphi(a)}\right)$$

$$\mathsf{d}\,\varphi(a)[y - a] = \mathsf{d}\,\varphi(a)[x - a] + \mathsf{d}\,\varphi(a)\Big[\big(\mathsf{d}\,\varphi(a)\big)^{-1}\big[R_1(a, x - a)\big]\Big]$$

$$\Downarrow$$

$$\mathsf{d}\,\varphi(a)[y - a] = \mathsf{d}\,\varphi(a)[x - a] + R_1(a, x - a)$$

$$\Downarrow$$

$$\underbrace{\varphi(a) + \mathsf{d}\,\varphi(a)[y - a]}_{\substack{\| \\ \widetilde{\varphi}(y) \\ \text{в силу (15.4.169)}}} = \underbrace{\varphi(a) + \mathsf{d}\,\varphi(a)[x - a] + R_1(a, x - a)}_{\substack{\| \\ \varphi(x) \\ \text{в силу (15.4.166)}}}$$

$$\Downarrow$$

$$\widetilde{\varphi}(y)=\varphi(x)$$

Мы получили, что для всякой точки $x\in Q$ найдется точка $y\in\widetilde{Q}$ такая, что $\widetilde{\varphi}(y)=\varphi(x)$. Это и означает, что выполняется (15.4.170).

3. Заметим теперь, что $\widetilde{\varphi}$ есть композиция линейного отображения $\mathsf{d}\,\varphi(a)$ и сдвига на вектор $\varphi(a)$. Поэтому по теореме 15.1.21 мера всякого измеримого множества S под действием $\widetilde{\varphi}$ умножается на модуль определителя $\mathsf{d}\,\varphi(a)$:

$$\mu\big(\widetilde{\varphi}(S)\big)=\mu\big(\,\mathsf{d}\,\varphi(a)[S]\big)=(15.1.58)=|\underbrace{\det\big(\,\mathsf{d}\,\varphi(a)\big)}_{\text{Якобиан}}|\cdot\mu(S)=|\,\mathsf{J}(a)|\cdot\mu(S)$$

Поэтому из соотношения (15.4.170) следует

$$\mu\Big(\underbrace{\varphi(Q)}_{\substack{\text{измеримо}\\ \text{по свойству }1^\circ\\ \text{на с.953}}}\Big)\leqslant\mu\big(\widetilde{\varphi}(\widetilde{Q})\big)=|\,\mathsf{J}(a)|\cdot\mu(\widetilde{Q})=|\,\mathsf{J}(a)|\cdot\big(h+2\frac{N}{2}h^2\big)^n=$$

$$=|\,\mathsf{J}(a)|\cdot\underbrace{h^n}_{\substack{\|\\ \mu(Q)}}\cdot(1+Nh)^n=|\,\mathsf{J}(a)|\cdot\mu(Q)\cdot(1+Nh)^n$$

То есть, мы доказали (15.4.164). □

Лемма 15.4.4. *Если D – компактная область в X, и $\varphi:D\to X$ – полурегулярная замена переменных, то для всякого измеримого по Жордану компакта $G\subseteq\mathsf{Int}(D)$ мера его образа $\varphi(G)$ оценивается сверху неравенством:*

$$\mu\big(\varphi(G)\big)\leqslant\int_G|\det\mathsf{d}\,\varphi(x)|\,\mathsf{d}\,x \tag{15.4.171}$$

Доказательство. Пусть $U=\mathsf{Int}(D)$. Воспользовавшись следствием 13.3.7, выберем $\varepsilon>0$ так, чтобы замкнутая ε-окрестность компакта G лежала в U:

$$B_\varepsilon(G)\subseteq U$$

Обозначим

$$K=B_\varepsilon(G)$$

Поскольку это множество замкнуто и ограничено, оно будет компактом. Обозначим

$$C=\max_{x\in K}|\,\mathsf{J}(x)| \tag{15.4.172}$$

(эта величина конечна потому что $\mathsf{J}(x)$ – непрерывная функция на компакте K).

По лемме 15.4.3, найдутся $\delta>0$ и $N>0$ со свойством (15.4.164). Обозначим

$$\beta(h)=(1+Nh)^n-1$$

и возьмем двоичную сетку с рангом k таким, чтобы

$$\frac{1}{k}<\min\left\{\delta,\frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}\right\}$$

Всякая инцидентная клетка Q для G с таким рангом k обязательно будет лежать в K, потому что

$$\exists x\in Q\cap G\quad\Longrightarrow\quad\forall y\in Q\quad|y-x|\leqslant\mathsf{diam}\,Q=\frac{\sqrt{n}}{k}<\varepsilon\quad\Longrightarrow\quad\forall y\in Q\quad y\in B_\varepsilon(G)=K$$

Таким образом,

$$\mathsf{E}_k(G)\subseteq K \tag{15.4.173}$$

$$\Downarrow$$

$$\forall Q\subseteq\mathsf{E}_k(G)\subseteq K\qquad\mu\big(\varphi(Q)\big)\leqslant(15.4.164)\leqslant|\,\mathsf{J}(a)|\cdot\mu(Q)\cdot(1+Nh)^n=|\,\mathsf{J}(a)|\cdot\mu(Q)\cdot\left(1+\beta\left(\frac{1}{k}\right)\right)$$

$$\Downarrow$$

$$\mu\big(\varphi(G)\big) \leqslant \mu\left(\varphi\big(\mathsf{E}_k(G)\big)\right) = \sum_{Q\subseteq \mathsf{E}_k(G)} \mu\big(\varphi(Q)\big) \leqslant \sum_{Q\subseteq \mathsf{E}_k(G)} |\,\mathsf{J}(a)| \cdot \mu(Q) \cdot \left(1+\beta\left(\frac{1}{k}\right)\right) =$$

$$= \sum_{Q\subseteq \mathsf{E}_k(G)} |\,\mathsf{J}(a)| \cdot \mu(Q) + \beta\left(\frac{1}{k}\right) \cdot \sum_{Q\subseteq \mathsf{E}_k(G)} \underbrace{|\,\mathsf{J}(a)|}_{\substack{\wedge\!\!\!\backslash \\ C=\max_{x\in K}|\,\mathsf{J}(x)|, \\ \text{см. (15.4.172)}}} \cdot \mu(Q) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{Q\subseteq \mathsf{E}_k(G)} |\,\mathsf{J}(a)| \cdot \mu(Q) + \beta\left(\frac{1}{k}\right) \cdot \underbrace{\sum_{Q\subseteq \mathsf{E}_k(G)} C \cdot \mu(Q)}_{\substack{\| \\ C\cdot \sum_{Q\subseteq \mathsf{E}_k(G)} \mu(Q) \\ \| \\ C\cdot \mu(\mathsf{E}_k(G))}} =$$

$$= \sum_{Q\subseteq \mathsf{E}_k(G)} |\,\mathsf{J}(a)| \cdot \mu(Q) + \beta\left(\frac{1}{k}\right) \cdot C \cdot \underbrace{\mu\big(\mathsf{E}_k(G)\big)}_{\substack{\wedge\!\!\!\backslash \\ \mu(K), \\ \text{в силу (15.4.173)}}} \leqslant \sum_{Q\subseteq \mathsf{E}_k(G)} |\,\mathsf{J}(a)| \cdot \mu(Q) + \beta\left(\frac{1}{k}\right) \cdot C \cdot \mu(K)$$

$$\Downarrow$$

$$\mu\big(\varphi(G)\big) \leqslant \sum_{Q\subseteq \mathsf{E}_k(G)} |\,\mathsf{J}(a)| \cdot \mu(Q) + \beta\left(\frac{1}{k}\right) \cdot C \cdot \mu(K) \tag{15.4.174}$$

Теперь при фиксированном k рассмотрим множества $G_Q = G \cap Q$, где Q – различные инцидентные клетки для G ранга k. Их будет конечный набор, поэтому их можно рассматривать как разбиение множества G. Выберем в каждом элементе этого разбиения G_Q точку ξ_Q по правилу:

- если $Q \subseteq G$ (то есть $Q \subseteq G_k(G)$), то $\xi_Q = a$ (то есть ξ_Q – центр куба Q);
- если $Q \nsubseteq G$ (то есть $Q \subseteq \mathsf{F}_k(G)$), то $\xi_Q \in G_Q$ – произвольная точка из G_Q.

Тогда меру множества $\mu\big(\varphi(G)\big)$ можно будет оценить через интегральную сумму функции $|\,\mathsf{J}(x)|$ следующим образом:

$$\mu\big(\varphi(G)\big) \leqslant (15.4.174) \leqslant \sum_{Q\subseteq \mathsf{E}_k(G)} |\,\mathsf{J}(a)| \cdot \mu(Q) + \beta\left(\frac{1}{k}\right) \cdot C \cdot \mu(K) =$$

$$= \sum_{Q\subseteq G_k(G)} |\,\mathsf{J}(\underset{\substack{\| \\ \xi_Q}}{a})| \cdot \mu(\underset{\substack{\| \\ G_Q}}{Q}) + \sum_{Q\subseteq \mathsf{F}_k(G)} |\,\mathsf{J}(a)| \cdot \mu(Q) + \beta\left(\frac{1}{k}\right) \cdot C \cdot \mu(K) \leqslant$$

$$\leqslant \underbrace{\sum_{Q\subseteq G_k(G)} |\,\mathsf{J}(\xi_Q)| \cdot \mu(G_Q) + \overbrace{\sum_{Q\subseteq \mathsf{F}_k(G)} |\,\mathsf{J}(\xi_Q)| \cdot \mu(G_Q)}^{\substack{\text{это слагаемое мы насильно} \\ \text{приписали, отчего вся сумма} \\ \text{могла только увеличиться}}}}_{\text{складываем}} + \sum_{Q\subseteq \mathsf{F}_k(G)} |\,\mathsf{J}(a)| \cdot \mu(Q) + \beta\left(\frac{1}{k}\right) \cdot C \cdot \mu(K) =$$

$$= \sum_{Q\subseteq \mathsf{E}_k(G)} |\,\mathsf{J}(\xi_Q)| \cdot \mu(G_Q) + \sum_{Q\subseteq \mathsf{F}_k(G)} \underbrace{|\,\mathsf{J}(a)|}_{\substack{\wedge\!\!\!\backslash \\ C=\max_{x\in K}|\,\mathsf{J}(x)|, \\ \text{см. (15.4.172)}}} \cdot \mu(Q) + \beta\left(\frac{1}{k}\right) \cdot C \cdot \mu(K) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{Q\subseteq \mathsf{E}_k(G)} |\,\mathsf{J}(\xi_Q)| \cdot \mu(G_Q) + \underbrace{\sum_{Q\subseteq \mathsf{F}_k(G)} C \cdot \mu(Q)}_{\substack{\| \\ C\cdot \sum_{Q\subseteq \mathsf{F}_k(G)} \mu(Q) \\ \| \\ C\cdot \mu(\mathsf{F}_k(G))}} + \beta\left(\frac{1}{k}\right) \cdot C \cdot \mu(K) =$$

$$= \sum_{Q\subseteq \mathsf{E}_k(G)} |\,\mathsf{J}(\xi_Q)| \cdot \mu(G_Q) + C \cdot \mu\big(\mathsf{F}_k(G)\big) + \beta\left(\frac{1}{k}\right) \cdot C \cdot \mu(K)$$

$$\Downarrow$$

$$\mu\big(\varphi(G)\big) \leqslant \underbrace{\overbrace{\sum_{Q\subseteq \mathsf{E}_k(G)} |\,\mathsf{J}(\xi_Q)| \cdot \mu(G_Q)}^{\text{интегральная сумма функции } |\,\mathsf{J}(x)|}}_{\substack{\downarrow \\ \int_G |\,\mathsf{J}(x)|\,\mathsf{d}\,x}} + C \cdot \underbrace{\mu\big(\,\mathsf{F}_k(G)\big)}_{\substack{\downarrow \\ 0}} + \underbrace{\beta\left(\frac{1}{k}\right)}_{\substack{\downarrow \\ 0}} \cdot C \cdot \mu(K) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \int_G |\,\mathsf{J}(x)|\,\mathsf{d}\,x + 0 + 0$$

$$\Downarrow$$

$$\mu\big(\varphi(G)\big) \leqslant \int_G |\,\mathsf{J}(x)|\,\mathsf{d}\,x$$

$\square$

Лемма 15.4.5. *Если D – компактная область в X, и $\varphi : D \to X$ – полурегулярная замена переменных, то для всякого измеримого по Жордану компакта $G \subseteq \mathsf{Int}(D)$ мера его образа $\varphi(G)$ оценивается снизу неравенством:*

$$\int_G |\det \mathsf{d}\,\varphi(x)|\,\mathsf{d}\,x \leqslant \mu\big(\varphi(G)\big) \qquad (15.4.175)$$

Доказательство. Пусть $U = \mathsf{Int}(D)$ и $V = \varphi(U)$. Из биективности $\varphi : U \to V$ следует, что существует обратное отображение $\psi = \varphi^{-1} : V \to U$, которое, в силу теоремы об обратном отображении 14.2.13, будет непрерывно дифференцируемым на V, причем дифференциалы этих отображений связаны формулой (14.2.168):

$$\big[\,\mathsf{d}\,\varphi(x)\big]^{-1} = \mathsf{d}\,\psi\big(\varphi(x)\big) \qquad (15.4.176)$$

Рассмотрим разбиение $\tau = \{G_1, ..., G_m\}$ компакта G, получаемое пересечением двоичных клеток Q какого-нибудь ранга k с множеством G (каждое G_i будет компактом, как пересечение двух компактов Q и G). Обозначим

$$E_1 = \varphi(G_1), ..., E_m = \varphi(G_m)$$

По свойству 1° на с.953 эти множества компактны и измеримы, а по лемме 15.3.2 пересечение любых двух из них имеет нулевую меру. Значит, эти множества образуют измеримое разбиение $\widetilde{\tau} = \{G_1, ..., G_m\}$ множества $E = \varphi(G)$. Выберем точки $\xi_i \in G_i$ так, чтобы в них достигался минимум функции $\big|\det \mathsf{d}\,\varphi(x)\big|$ на компакте G_i:

$$\big|\det \mathsf{d}\,\varphi(\xi_i)\big| = \min_{x\in G_i} \big|\det \mathsf{d}\,\varphi(x)\big|$$

Тогда по формуле (15.4.176) мы получим:

$$\max_{y\in E_i} \big|\det \mathsf{d}\,\psi(y)\big| = \max_{y\in \varphi(G_i)} \big|\det \mathsf{d}\,\psi(y)\big| = \max_{x\in G_i} \Big|\det \mathsf{d}\,\psi\big(\varphi(G_i)\big)\Big| = (15.4.176) = \max_{x\in G_i} \Big|\det\big[\,\mathsf{d}\,\varphi(x)\big]^{-1}\Big| =$$
$$= \max_{x\in G_i} \Big|\big[\det \mathsf{d}\,\varphi(x)\big]^{-1}\Big| = \max_{x\in G_i} \big|\det \mathsf{d}\,\varphi(x)\big|^{-1} = \max_{x\in G_i} \frac{1}{\big|\det \mathsf{d}\,\varphi(x)\big|} = \frac{1}{\min_{x\in G_i}\big|\det \mathsf{d}\,\varphi(x)\big|} = \frac{1}{\big|\det \mathsf{d}\,\varphi(\xi_i)\big|}$$

$$\Downarrow$$

$$\max_{y\in E_i} \big|\det \mathsf{d}\,\psi(y)\big| = \frac{1}{\big|\det \mathsf{d}\,\varphi(\xi_i)\big|} \qquad (15.4.177)$$

$$\Downarrow$$

$$\mu(G_i) = \mu\big(\psi(E_i)\big) \leqslant \left(\substack{\text{выписываем формулу (15.4.171)} \\ \text{для отображения } \psi \text{ на множестве } E_i}\right) \leqslant \int_{E_i} |\det \mathsf{d}\,\psi(y)|\,\mathsf{d}\,y \leqslant$$
$$\leqslant (15.2.72) \leqslant \max_{y\in E_i} \big|\det \mathsf{d}\,\psi(y)\big| \cdot \mu(E_i) = (15.4.177) = \frac{\mu(E_i)}{\big|\det \mathsf{d}\,\varphi(\xi_i)\big|}$$

$$\Downarrow$$

$$\mu(G_i) \leqslant \frac{\mu(E_i)}{\min_{x\in G_i}\big|\det \mathsf{d}\,\varphi(x)\big|} \qquad (15.4.178)$$

Теперь рассмотрим интегральную сумму для функции $|\mathsf{J}(x)| = \big|\det \mathsf{d}\,\varphi(x)\big|$:

$$\int_G \big|\det \mathsf{d}\,\varphi(x)\big|\,\mathsf{d}\,x \underset{\infty\leftarrow k}{\longleftarrow} \sum_{i=1}^m \big|\det \mathsf{d}\,\varphi(\xi_i)\big| \cdot \mu(G_i) \leqslant (15.4.178) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^m \big|\det \mathsf{d}\,\varphi(\xi_i)\big| \cdot \frac{\mu(E_i)}{\big|\det \mathsf{d}\,\varphi(\xi_i)\big|} = \sum_{i=1}^m \mu(E_i) = \mu(E) = \mu\big(\varphi(G)\big)$$

$$\Downarrow$$

$$\int_G \big|\det \mathsf{d}\,\varphi(x)\big|\,\mathsf{d}\,x \leqslant \mu\big(\varphi(G)\big)$$

□

Доказательство теоремы 15.4.2. Теперь формула (15.4.163) следует из (15.4.171) и (15.4.175):

$$\mu\big(\varphi(G)\big) \leqslant \int_G \big|\det \mathsf{d}\,\varphi(x)\big|\,\mathsf{d}\,x \leqslant \mu\big(\varphi(G)\big) \quad\Longrightarrow\quad \mu\big(\varphi(G)\big) = \int_G \big|\det \mathsf{d}\,\varphi(x)\big|\,\mathsf{d}\,x$$

□

Мера произвольных компактов при полурегулярной замене переменных.

Теорема 15.4.6. *Если D – измеримый по Жордану компакт в X, то при полурегулярной замене переменных $\varphi : D \to X$ он превращается в измеримый компакт $\varphi(D)$, мера которого вычисляется по формуле:*

$$\mu\big(\varphi(D)\big) = \int_D |\det \mathsf{d}\,\varphi(x)|\,\mathsf{d}\,x \tag{15.4.179}$$

Доказательство. Что $\varphi(D)$ – измеримый по Жордану компакт - следует из свойства 1° на с.953. Рассмотрим сетку ранга k для D. Пусть G^k – объединение внутренних клеток этой сетки для множества $\mathsf{D}_{\mathsf{reg}}(\varphi)$:

$$G^k = \bigcup_{Q\subset \mathsf{D}_{\mathsf{reg}}(\varphi)} Q$$

Обозначим $E = \varphi(D)$, $E^k = \varphi(G^k)$. Тогда, поскольку $\varphi : \mathsf{D}_{\mathsf{reg}}(\varphi) \to \varphi\big(\mathsf{D}_{\mathsf{reg}}(\varphi)\big)$ – диффеоморфизм, получаем

$$\bigcup_{k=1}^\infty \mathsf{Int}(E^k) = \bigcup_{k=1}^\infty \mathsf{Int}\left(\varphi(G^k)\right) = \bigcup_{k=1}^\infty \varphi\big(\mathsf{Int}(G^k)\big) = \varphi\Big(\bigcup_{k=1}^\infty \mathsf{Int}(G^k)\Big) = \varphi\big(\mathsf{Int}(D)\big) = \varphi\big(\mathsf{D}_{\mathsf{reg}}(\varphi)\big) \tag{15.4.180}$$

Покажем, что выполняются соотношения

$$\mu(D \setminus G^k) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0 \qquad \mu\big(\varphi(D)\setminus\varphi(G^k)\big) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0, \tag{15.4.181}$$

Первое из них очевидно, а для доказательства второго нужно применить теорему 15.1.24: из (15.4.180) следует, что множества $E\setminus \mathsf{Int}(E^k)$ образуют сужающуюся последовательность компактов, причем ее пересечение

$$\bigcap_{k=1}^\infty E\setminus \mathsf{Int}(E^k) = \varphi(D)\setminus\varphi\big(\mathsf{D}_{\mathsf{reg}}(\varphi)\big) = \varphi\big(\mathsf{D}_{\mathsf{sing}}(\varphi)\big)$$

имеет нулевую меру по лемме 15.3.2. Значит, по теореме 15.1.24

$$\mu\big(\varphi(D)\setminus\varphi(G^k)\big) \leqslant \mu(E\setminus \mathsf{Int}(E^k)) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

откуда и получаем второе соотношение в (15.4.181).

Теперь остается воспользоваться теоремой 15.4.2:

$$\int_D \big|\det \mathsf{d}\,\varphi(x)\big|\,\mathsf{d}\,x \underset{\infty\leftarrow k}{\longleftarrow} \int_{G^k} \big|\det \mathsf{d}\,\varphi(x)\big|\,\mathsf{d}\,x = \mu\big(\varphi(G^k)\big) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \mu\big(\varphi(D)\big)$$

$$\Downarrow$$

$$\int_D \big|\det \mathsf{d}\,\varphi(x)\big|\,\mathsf{d}\,x = \mu\big(\varphi(D)\big)$$

□

Следствие 15.4.7. *Если D – измеримый компакт в X, и $\varphi : D \to X$ – полурегулярная замена переменных, то формула* (15.4.179) *верна для всякого измеримого компакта $G \subseteq D$:*

$$\mu\big(\varphi(G)\big) = \int_G |\det \mathsf{d}\,\varphi(x)|\,\mathsf{d}\,x \tag{15.4.182}$$

Доказательство. Ограничение отображения φ на множество G тоже является полурегулярной заменой переменных:

$$\varphi : G \to X$$

Значит, для него применима теорема 15.4.6, то есть справедлива формула (15.4.179), в которой D нужно заменить на G. □

Доказательство теоремы о замене переменных.

Доказательство теоремы 15.4.1. Рассмотрим разбиение $\tau = \{D_1, ..., D_m\}$ компакта D, получаемое пересечением двоичных клеток Q какого-нибудь ранга k с множеством D (каждое D_i будет компактом, как пересечение двух компактов Q и D). Обозначим

$$E_1 = \varphi(D_1), ..., E_m = \varphi(D_m)$$

По свойству 1° на с.953 эти множества компактны и измеримы, а по лемме 15.3.2 пересечение любых двух из них имеет нулевую меру. Значит, эти множества образуют измеримое разбиение $\widetilde{\tau} = \{E_1, ..., E_m\}$ множества $E = \varphi(D)$. Из леммы 15.3.3 при этом следует, что при увеличении k диаметр этого разбиения стремится к нулю:

$$\Delta\big(\widetilde{\tau}\big) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0 \tag{15.4.183}$$

Получаем:

$$\int_D f\big(\varphi(x)\big)\big|\,\mathsf{J}(x)\big|\,\mathsf{d}\,x = \sum_{i=1}^m \int_{D_i} f\big(\varphi(x)\big)\big|\,\mathsf{J}(x)\big|\,\mathsf{d}\,x \leqslant \begin{pmatrix}\text{свойство } 3^0\\ \text{на с.920}\end{pmatrix} \leqslant \sum_{i=1}^m \int_{D_i} \underbrace{\max_{x\in D_i} f\big(\varphi(x)\big)}_{\substack{\text{константа, которую}\\ \text{выносим из-под}\\ \text{знака интеграла}}} \big|\,\mathsf{J}(x)\big|\,\mathsf{d}\,x =$$

$$= \sum_{i=1}^m \underbrace{\max_{x\in D_i} f\big(\varphi(x)\big)}_{\substack{\parallel\\ \max_{y\in E_i} f(y),\\ \text{поскольку}\\ \varphi(D_i)=E_i}} \cdot \underbrace{\int_{D_i} \big|\,\mathsf{J}(x)\big|\,\mathsf{d}\,x}_{\substack{\parallel\\ \mu(E_i),\\ \text{в силу (15.4.182)}}} = \underbrace{\sum_{i=1}^m \max_{y\in E_i} f(y)\cdot\mu(E_i)}_{\substack{\text{верхняя сумма Дарбу}\\ \text{функции } f(y)\\ \text{на множестве } E=\varphi(D)}} \underset{\substack{\text{при } k\to\infty\\ \Delta(\widetilde{\tau})\to 0\\ \text{в силу (15.4.183)}}}{\longrightarrow} \int_{\varphi(D)} f(y)\,\mathsf{d}\,y$$

$$\Downarrow$$

$$\int_D f\big(\varphi(x)\big)\big|\,\mathsf{J}(x)\big|\,\mathsf{d}\,x \leqslant \int_{\varphi(D)} f(y)\,\mathsf{d}\,y \tag{15.4.184}$$

Аналогично (через нижние суммы Дарбу) доказывается обратное неравенство:

$$\int_D f\big(\varphi(x)\big)\big|\,\mathsf{J}(x)\big|\,\mathsf{d}\,x \geqslant \int_{\varphi(D)} f(y)\,\mathsf{d}\,y$$

которое вместе с (15.4.184) дает (15.4.162). □

(b) Применение теоремы о замене переменных

Разные замены.

◇ **15.4.1.** Пусть нам необходимо вычислить интеграл

$$\iint_E \sqrt{x\cdot y}\,\mathsf{d}\,x\,\mathsf{d}\,y$$

где область E задается неравенствами:

$$E: \quad \begin{cases} x \leqslant y^2 \leqslant 2x \\ 1 \leqslant x \cdot y \leqslant 2 \end{cases}$$

Эта область, неудобна тем, что если ее записать в правильном виде, то в полученной системе функции, задающие изменение переменной y, придется описывать сложными формулами, из которых становятся понятно, что они не будут элементарными функциями:

$$E: \quad \begin{cases} 2^{-\frac{2}{3}} \leqslant x \leqslant 2^{\frac{2}{3}} \\ \max\left\{\frac{1}{x}; \sqrt{x}\right\} \leqslant y \leqslant \min\left\{\frac{2}{x}; \sqrt{2x}\right\} \end{cases}$$

Можно, конечно, разбить E на три правильных области, для которых эта проблема не возникает

$$E_1: \begin{cases} 2^{-\frac{2}{3}} \leqslant x \leqslant 1 \\ \frac{1}{x} \leqslant y \leqslant \sqrt{2x} \end{cases} \qquad E_2: \begin{cases} 1 \leqslant x \leqslant 2^{\frac{1}{3}} \\ \sqrt{x} \leqslant y \leqslant \sqrt{2x} \end{cases}$$

$$E_2: \begin{cases} 2^{\frac{1}{3}} \leqslant x \leqslant 2^{\frac{2}{3}} \\ \sqrt{x} \leqslant y \leqslant \frac{2}{x} \end{cases}$$

но это означает, что придется вычислять три повторных интеграла, а потом складывать полученные значения.

Оказывается, что проще вычислить этот интеграл с помощью теоремы о замене переменной 15.4.1. Для этого нужно перейти к новым переменным. Пусть

$$\frac{y^2}{x} = u, \qquad x \cdot y = v$$

Тогда наша область в новых переменных перепишется так:

$$D: \quad \begin{cases} 1 \leqslant u \leqslant 2 \\ 1 \leqslant v \leqslant 2 \end{cases} \tag{15.4.185}$$

Выразим x и y через u и v:

$$x = u^{-\frac{1}{3}} \cdot v^{\frac{2}{3}}, \qquad y = u^{\frac{1}{3}} \cdot v^{\frac{1}{3}}$$

Тогда

$$\begin{matrix} \frac{\partial x}{\partial u} = -\frac{1}{3}u^{-\frac{4}{3}} \cdot v^{\frac{2}{3}} & \frac{\partial x}{\partial v} = \frac{2}{3}u^{-\frac{1}{3}} \cdot v^{-\frac{1}{3}} \\ \frac{\partial y}{\partial u} = \frac{1}{3}u^{-\frac{2}{3}} \cdot v^{\frac{1}{3}} & \frac{\partial y}{\partial v} = \frac{1}{3}u^{\frac{2}{3}} \cdot v^{-\frac{2}{3}} \end{matrix}$$

поэтому Якобиан равен

$$\mathsf{J}(x) = \det\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix} = \\ = \det\begin{pmatrix} -\frac{1}{3}u^{-\frac{4}{3}} \cdot v^{\frac{2}{3}} & \frac{2}{3}u^{-\frac{1}{3}} \cdot v^{-\frac{1}{3}} \\ \frac{1}{3}u^{-\frac{2}{3}} \cdot v^{\frac{1}{3}} & \frac{1}{3}u^{\frac{2}{3}} \cdot v^{-\frac{2}{3}} \end{pmatrix} = -\frac{1}{3u}$$

Поскольку на множестве D отображение $(u, v) \mapsto (x, y)$ не имеет сингулярных точек (здесь нет ни кратных точек, ни точек, в которых якобиан обращается в нуль на D), мы можем сделать вывод, что оно регулярно на D, то есть $(u, v) \mapsto (x, y)$ – регулярная замена переменных на D. Значит, можно применить формулу (15.4.162). Подынтегральная функция в новых переменных запишется так:

$$\sqrt{x \cdot y} = \sqrt{v}$$

Теперь воспользуемся формулой (15.4.162):

$$\iint_E \sqrt{x \cdot y}\,\mathsf{d}\,x\,\mathsf{d}\,y = (15.4.162) = \\ = \iint_D \underbrace{\sqrt{v}}_{\substack{\uparrow \\ \text{подынтегральная} \\ \text{функция}}} \cdot \underbrace{\left|-\frac{1}{3u}\right|}_{\substack{\uparrow \\ \text{Якобиан}}} \mathsf{d}\,u\,\mathsf{d}\,v = (15.4.185) = \\ = \int_1^2 \mathsf{d}\,u \int_1^2 \frac{\sqrt{v}}{3u}\,\mathsf{d}\,v = \int_1^2 \mathsf{d}\,u \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{v^{\frac{3}{2}}}{3u}\right)\Big|_{v=1}^{v=2} = \\ = \frac{2}{9} \cdot \left(2^{\frac{3}{2}} - 1\right) \cdot \int_1^2 \frac{1}{u}\,\mathsf{d}\,u = \frac{2}{9} \cdot \left(2^{\frac{3}{2}} - 1\right) \cdot \ln u\Big|_{u=1}^{u=2} = \\ = \frac{2}{9} \cdot \left(\sqrt{8} - 1\right) \cdot \ln 2$$

Ответ: $\frac{2}{9} \cdot \left(\sqrt{8} - 1\right) \cdot \ln 2$.

◇ **15.4.2.** Если первый пример показался читателю неубедительным, то следующий тройной интеграл будет более веским аргументом:

$$\iiint_E x\,\mathsf{d}\,x\,\mathsf{d}\,y\,\mathsf{d}\,z, \qquad E: \quad \begin{cases} 0 \leqslant -x + y + z \leqslant 1 \\ 0 \leqslant x - y + z \leqslant 1 \\ 0 \leqslant x + y - 2z \leqslant 1 \end{cases}$$

Область интегрирования E здесь – параллелепипед (ребра которого не параллельны осям координат).

Если попробовать записать E в правильном виде, то для того, чтобы нужные границы определялись элементарными функциями, придется разбивать E уже не на три, а на 24 куска. В этом легко убедиться, спроектировав E на плоскость

[12] Из приводимых ниже формул (15.4.187) следует, что вершины параллелепипеда проецируются в следующие точки на XOY: $(0;0), \left(\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right), (1;1), \left(\frac{3}{2};\frac{1}{2}\right), (2;2), \left(\frac{5}{2};\frac{3}{2}\right), \left(\frac{3}{2};\frac{5}{2}\right), (3;3)$

XOY^{12}:

Ребра параллелепипеда E, проектируясь на XOY, разбивают всю проекцию на 12 треугольников $F_1,...,F_{12}$, поэтому записывая E в правильном виде, нам нужно разбивать E на 12 кусков $E_1,...,E_{12}$, "расположенных над областями F_i", и отдельно выписывать для каждого F_i неравенства следующего вида:

$$E_i: \qquad \begin{cases} (x,y)\in F_i \\ \varPhi(x,y)\leqslant z\leqslant \varPsi(x,y) \end{cases}$$

Но каждый треугольник F_i не прямоуголен. Поэтому, чтобы записать саму область F_i в правильном виде, нужно дополнительно разбить F_i на два куска. Таким образом, E в общей сложности разбивается на $12\cdot 2=24$ кусков.

В этой задаче, конечно, формула замены переменных намного упрощает вычисления. Пусть

$$-x+y+z=u, \qquad x-y+z=v, \qquad x+y-2z=w$$

Тогда наша область в новых переменных перепишется так:

$$D: \quad \begin{cases} 0\leqslant u\leqslant 1 \\ 0\leqslant v\leqslant 1 \\ 0\leqslant w\leqslant 1 \end{cases} \tag{15.4.186}$$

Выразим x, y и z через u, v и w:

$$x=\frac{u+3v+2w}{2},\ y=\frac{3u+v+2w}{2},\ z=\frac{u+v}{2} \tag{15.4.187}$$

Тогда

$$\begin{matrix} \frac{\partial x}{\partial u}=\frac12 & \frac{\partial x}{\partial v}=\frac32 & \frac{\partial x}{\partial w}=1 \\ \frac{\partial y}{\partial u}=\frac32 & \frac{\partial y}{\partial v}=\frac12 & \frac{\partial y}{\partial w}=1 \\ \frac{\partial z}{\partial u}=\frac12 & \frac{\partial z}{\partial v}=\frac12 & \frac{\partial z}{\partial w}=0 \end{matrix}$$

то есть

$$\mathsf{J}(x)=\det\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{pmatrix}=$$
$$=\det\begin{pmatrix} \frac12 & \frac32 & 1 \\ \frac32 & \frac12 & 1 \\ \frac12 & \frac12 & 0 \end{pmatrix}=\frac12\cdot\det\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}=$$
$$=\frac12\cdot\left(1\cdot\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}-1\cdot\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}\right)=$$
$$=\frac12\cdot\big((6-2)-(2-6)\big)=4$$

Здесь опять на множестве D отображение $(u,v,w)\mapsto(x,y,z)$ не имеет сингулярных точек (нет ни кратных точек, ни точек, в которых якобиан обращается в нуль на D), поэтому отображение $(u,v,w)\mapsto(x,y,z)$ регулярно на D, то есть является регулярной заменой переменных на D. Применим формулу (15.4.162):

$$\iiint\limits_E x\,\mathsf{d}\,x\,\mathsf{d}\,y\,\mathsf{d}\,z=(15.4.162)=$$
$$=\iiint\limits_D \underbrace{\frac{v+w}{2}}_{\substack{\text{подынтегральная}\\\text{функция}}}\cdot\Big|\underbrace{4}_{\text{Якобиан}}\Big|\,\mathsf{d}\,u\,\mathsf{d}\,v\,\mathsf{d}\,w=(15.4.186)=$$
$$=\int_0^1\mathsf{d}\,u\int_0^1\mathsf{d}\,v\int_0^1\frac{v+w}{2}\,\mathsf{d}\,w=$$
$$=2\cdot\int_0^1\mathsf{d}\,u\int_0^1\mathsf{d}\,v\left(vw+\frac{w^2}{2}\right)\Big|_{w=0}^{w=1}=$$
$$=2\cdot\int_0^1\mathsf{d}\,u\int_0^1\left(v+\frac12\right)\mathsf{d}\,v=$$
$$=2\cdot\int_0^1\mathsf{d}\,u\left(\frac{v^2}{2}+\frac{v}{2}\right)\Big|_{v=0}^{v=1}=$$
$$=2\cdot\int_0^1\left(\frac12+\frac12\right)\mathsf{d}\,u=2\cdot1=2$$

Ответ: 2.

⊳⊳ **15.4.3.** Вычислите следующие кратные интегралы:

1) $\iint\limits_E\frac{y}{x}\,\mathsf{d}\,x\,\mathsf{d}\,y,\quad E:\quad x\leqslant 2y,\quad y\leqslant 2x,\quad 1\leqslant xy\leqslant 3;$
2) $\iint\limits_E xy\,\mathsf{d}\,x\,\mathsf{d}\,y,\quad E:\quad y^2\leqslant x\leqslant 2y^2,\quad 1\leqslant x^2y\leqslant 2;$
3) $\iint\limits_E(x+y)^2\,\mathsf{d}\,x\,\mathsf{d}\,y,\quad E:\quad y\leqslant x,\quad x\leqslant 3y,\quad 2\leqslant x+y\leqslant 3;$
4) $\iiint\limits_E y\,\mathsf{d}\,x\,\mathsf{d}\,y\,\mathsf{d}\,z,\quad E:\quad 1\leqslant x+y+z\leqslant 2,\quad 2\leqslant x-y+z\leqslant 3,\quad 3\leqslant x-y-z\leqslant 4;$
5) $\iiint\limits_E xz\,\mathsf{d}\,x\,\mathsf{d}\,y\,\mathsf{d}\,z,\quad E:\quad 1\leqslant -x+y+z\leqslant 2,\quad 2\leqslant x-y+z\leqslant 3,\quad 3\leqslant x+y-z\leqslant 4;$
6) $\iiint\limits_E\mathsf{d}\,x\,\mathsf{d}\,y\,\mathsf{d}\,z,\quad E:\quad xy\leqslant z\leqslant 2xy,\quad 2\leqslant xy\leqslant 4,\quad x\leqslant y\leqslant 3x.$

Полярные координаты. Вспомним о полярных координатах, изучавшихся нами на с. 466:

$$\begin{cases} x=\rho\cdot\cos\varphi \\ y=\rho\cdot\sin\varphi \end{cases} \tag{15.4.188}$$

Модуль Якобиана такой замены переменных равен ρ:

$$|\,\mathsf{J}\,|=\left|\det\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial\varphi} & \frac{\partial x}{\partial\rho} \\ \frac{\partial y}{\partial\varphi} & \frac{\partial y}{\partial\rho} \end{pmatrix}\right|=\left|\det\begin{pmatrix} -\rho\sin\varphi & \cos\varphi \\ \rho\cos\varphi & \sin\varphi \end{pmatrix}\right|=$$
$$=\rho(\sin^2\varphi+\cos^2\varphi)=\rho$$

Ясно, что сингулярные точки при отображении $(\varphi,\rho)\mapsto(x,y)$ могут получаться в двух случаях:

– если $\rho = 0$, и тогда якобиан (а значит и дифференциал) отображения равен нулю, и
– если $\varphi_1 - \varphi_2 = 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, и тогда точки (φ_1, ρ) и (φ_2, ρ) при этом отображении слипаются.

Отсюда следует, в частности, что на рассматривавшейся в теореме 7.3.19 области D в $\mathbb{R}^2$, заданной неравенствами

$$D : \begin{cases} \alpha \leqslant \varphi \leqslant \beta \\ \rho \leqslant R(\varphi) \end{cases}$$

отображение $(\varphi, \rho) \mapsto (x, y)$ будет полурегулярным тогда и только тогда, когда $\beta - \alpha \leqslant 2\pi$. С помощью теоремы 15.4.1 получаем формулу площади в полярных координатах (7.3.172):

$$S_D = \mu(D) = (15.2.66) = \iint\limits_D \mathsf{d}\, x \, \mathsf{d}\, y = (15.4.162) =$$

$$= \iint\limits_D \rho \, \mathsf{d}\, \rho \, \mathsf{d}\, \varphi = \int_\alpha^\beta \mathsf{d}\, \varphi \int_0^{R(\varphi)} \rho \; \mathsf{d}\, \rho =$$

$$= \int_\alpha^\beta \mathsf{d}\, \varphi \frac{\rho^2}{2} \Big|_{\rho=0}^{\rho=R(\varphi)} = \frac{1}{2} \int_\alpha^\beta R(\varphi)^2 \; \mathsf{d}\, \varphi$$

Ее можно обобщить на случай, когда на переменную ρ накладывается еще одно дополнительное условие:

Теорема 15.4.8. *Площадь области на плоскости, заданной неравенствами*

$$D : \begin{cases} \alpha \leqslant \varphi \leqslant \beta \\ Q(\varphi) \leqslant \rho \leqslant R(\varphi) \end{cases}$$

(где $\beta - \alpha \leqslant 2\pi$, а Q и R – полурегулярные функции на отрезке $[\alpha, \beta]$) вычисляется по формуле

$$S_D = \frac{1}{2} \int_\alpha^\beta \big(R(\varphi)^2 - Q(\varphi)^2 \big) \; \mathsf{d}\, \varphi \qquad (15.4.189)$$

Доказательство.

$$S_D = \mu(D) = (15.2.66) = \iint\limits_D \mathsf{d}\, x \, \mathsf{d}\, y = (15.4.162) =$$

$$= \iint\limits_D \rho \, \mathsf{d}\, \rho \, \mathsf{d}\, \varphi = \int_\alpha^\beta \mathsf{d}\, \varphi \int_{Q(\varphi)}^{R(\varphi)} \rho \; \mathsf{d}\, \rho =$$

$$= \int_\alpha^\beta \mathsf{d}\, \varphi \frac{\rho^2}{2} \Big|_{\rho=Q(\varphi)}^{\rho=R(\varphi)} = \frac{1}{2} \int_\alpha^\beta \big(R(\varphi)^2 - Q^2(\varphi) \big) \; \mathsf{d}\, \varphi$$

□

◇ **15.4.4.** Вычислим для иллюстрации площадь области, заданной неравенствами:

$$\begin{cases} (x^2 + y^2)^2 \leqslant 2a^2 (x^2 - y^2) \\ x^2 + y^2 \geqslant a^2 \end{cases}$$

Переходя к полярным координатам, получим:

$$\begin{cases} \big((\rho \sin\varphi)^2 + (\rho\cos\varphi)^2 \big)^2 \leqslant \\ \leqslant 2a^2 \big((\rho\sin\varphi)^2 - (\rho\cos\varphi)^2 \big) \\ (\rho\sin\varphi)^2 + (\rho\cos\varphi)^2 \geqslant a^2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \rho^4 \leqslant 2a^2 \rho^2 \cos 2\varphi \\ \rho^2 \geqslant a^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \rho \leqslant a\sqrt{2\cos 2\varphi} \\ \rho \geqslant a \end{cases}$$

По точкам (именно так в параграфе (e) мы учились строить кривые в полярных координатах) строим картинку:

Здесь очень важно, что две кривые – $\rho = a\sqrt{2\cos 2\varphi}$ и $\rho = a$ – пересекаются при $\varphi = \pm\frac{\pi}{6}$ или $\varphi = \pm\frac{5\pi}{6}$. Это следует из решения системы:

$$\begin{cases} \rho = a\sqrt{2\cos 2\varphi} \\ \rho = a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{2\cos 2\varphi} = 1 \\ \rho = a \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos 2\varphi = \frac{1}{2} \\ \rho = a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\varphi = \frac{\pi}{3} + 2\pi n \\ \rho = a \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \varphi = \frac{\pi}{6} + \pi n \\ \rho = a \end{cases}$$

Запишем теперь правую половинку E_1 нашей области в правильном виде относительно полярных координат. Алгоритм действий для этого тот же, что объяснялся в параграфе (b), где области записывались в правильном виде относительно декартовых координат.

Представим себе, что точка A бегает по правой половинке E_1 области E. Тогда ее координата φ пробегает отрезок $\left[-\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{6}\right]$:

$$-\frac{\pi}{6} \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{6} \qquad (15.4.190)$$

Зафиксируем какое-нибудь значение φ из этого промежутка, и проведем линию в $\mathbb{R}^2$, точки которой имеют в качестве первой полярной координаты это самое зафиксированное значение φ. Ясно, что это будет луч, выходящий из начала координат. В пересечении с E_1 она дает некий отрезок:

Далее смотрим только на этот отрезок. Когда точка A бегает по отрезку, у нее значение переменной ρ будет меняться в интервале $[a; a\sqrt{2\cos 2\varphi}]$:

$$a \leqslant \rho \leqslant a\sqrt{2\cos 2\varphi} \qquad (15.4.191)$$

Теперь переписываем (15.4.190), (15.4.191), и у нас получается запись области E_1 в правильном виде в полярных координатах:

$$\begin{cases} -\frac{\pi}{6} \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{6} \\ a \leqslant \rho \leqslant a\sqrt{2\cos 2\varphi} \end{cases}$$

Теперь вычисляем площадь E_1:

$$S = \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \left(\left(a\sqrt{2\cos 2\varphi}\right)^2 - a^2\right) \mathsf{d}\,\varphi = \\ = \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} a^2(2\cos 2\varphi - 1)\,\mathsf{d}\,\varphi = \\ = \frac{a^2}{2}(\sin 2\varphi - \varphi)\Big|_{\varphi=-\frac{\pi}{6}}^{\varphi=\frac{\pi}{6}} = \frac{a^2}{2}\left(\sqrt{3} - \frac{\pi}{3}\right)$$

Это – площадь половинки нашей области. Умножаем ее на двойку, и получаем

Ответ: $a^2\left(\sqrt{3} - \frac{\pi}{3}\right)$

$\rhd\rhd$ **15.4.5.** Вычислите площадь следующих фигур:

1) $a(\sqrt{x^2+y^2} - x) \leqslant x^2 + y^2 \leqslant a^2$;
2) $a^3 \leqslant (x^2+y^2)^{\frac{3}{2}} \leqslant 4axy$;
3) $ay^2 \leqslant (x^2+y^2)^{\frac{3}{2}} \leqslant a^3$;
4) $a^3 \leqslant (x^2+y^2)^{\frac{3}{2}} \leqslant \frac{a}{4}(4x^2+y^2)$;

Цилиндрические координаты. В некоторых задачах (обычно там, где имеется некоторая осевая симметрия) полезно переходить к следующей системе координат, называемых *цилиндрическими*. В этих координатах положение точки A в трехмерном пространстве $\mathbb{R}^3$ задается следующими параметрами:

– полярными координатами (φ, ρ) проекции точки A на плоскость XOY, и
– высотой h, получаемой проекцией A на ось OZ.

Таким образом, цилиндрические координаты (φ, ρ, h) точки A связаны с ее обычными декартовыми координатами (x, y, z) формулами

$$\begin{cases} x = \rho\cdot\cos\varphi \\ y = \rho\cdot\sin\varphi \\ z = h \end{cases} \qquad \begin{cases} \rho = \sqrt{x^2+y^2} \\ \operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{x} \\ h = z \end{cases},$$

Модуль Якобиана такой замены переменных равен ρ:

$$|\,\mathsf{J}\,| = \left|\det\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial\varphi} & \frac{\partial x}{\partial\rho} & \frac{\partial x}{\partial h} \\ \frac{\partial y}{\partial\varphi} & \frac{\partial y}{\partial\rho} & \frac{\partial y}{\partial h} \\ \frac{\partial z}{\partial\varphi} & \frac{\partial z}{\partial\rho} & \frac{\partial z}{\partial h} \end{pmatrix}\right| = \\ = \left|\det\begin{pmatrix} -\rho\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ \rho\cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right| = \rho(\sin^2\varphi + \cos^2\varphi) = \rho$$

Как и в случае с полярными координатами, сингулярные точки у отображения $(\varphi, \rho, h) \mapsto (x, y, z)$ могут получаться в двух случаях:

– если $\rho = 0$, и тогда якобиан (а значит и дифференциал) отображения равен нулю, и
– если $\varphi_1 - \varphi_2 = 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, и тогда точки (h, φ_1, ρ) и (h, φ_2, ρ) при этом отображении слипаются.

Как следствие, на всякой области

$$D: \quad \begin{cases} a \leqslant h \leqslant b \\ \alpha \leqslant \varphi \leqslant \beta \\ Q(\varphi) \leqslant \rho \leqslant R(\varphi) \end{cases}$$

(где $\beta - \alpha \leqslant 2\pi$, а Q и R – полурегулярные функции на отрезке $[\alpha, \beta]$) цилиндрические координаты будут полурегулярной заменой переменных.

$\diamond$ **15.4.6.** Пусть требуется вычислить тройной интеграл

$$\iiint\limits_E (x^2+y^2)\,\mathsf{d}\,x\,\mathsf{d}\,y\,\mathsf{d}\,z,$$

где область E ограничена поверхностями

$$z = 2, \qquad x^2 + y^2 = 2z$$

Представим эту область системой неравенств

$$E: \; x^2+y^2 \leqslant 2z \quad \& \quad z \leqslant 2$$

и перейдем к цилиндрическим координатам:

$$\rho^2 \leqslant 2h \quad \& \quad h \leqslant 2 \qquad (15.4.192)$$

Теперь запишем нашу область в правильном виде в цилиндрических координатах. Это делается способом, аналогичным тому, что объяснялся в параграфе (b), где области записывались в правильном виде относительно декартовых координат.

Представим себе, что точка A бегает по области E. Тогда ее координата h пробегает отрезок $[0;2]$:

$$0 \leqslant h \leqslant 2 \qquad (15.4.193)$$

Зафиксируем какое-нибудь значение h из этого промежутка, и проведем поверхность в $\mathbb{R}^3$, точки которой имеют в качестве третьей цилиндрической координаты это самое зафиксированное значение h (то есть, проводим горизонтальную плоскость со значением $z = h$). В пересечении с нашей областью E она дает некий круг:

Далее смотрим только на этот круг. Когда точка A бегает по кругу, у нее значение переменной φ будет меняться в интервале $[0;2\pi]$:

$$0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi \qquad (15.4.194)$$

Запоминаем это, фиксируем какое-нибудь значение φ из этого промежутка, и проводим поверхность в $\mathbb{R}^3$, точки которой имеют в качестве первой цилиндрической координаты это самое зафиксированное значение φ. Понятно, что это будет полуплоскость, опирающаяся на ось OZ. В пересечении с нашим кругом эта полуплоскость даст некий отрезок:

Теперь смотрим только на этот отрезок. Из (15.4.192) следует, что когда точка A бегает по отрезку, у нее значение переменной ρ будет меняться в интервале $[0;\sqrt{h}]$:

$$0 \leqslant \rho \leqslant \sqrt{2h} \qquad (15.4.195)$$

Теперь переписываем (15.4.193), (15.4.194), (15.4.195), и у нас получается запись области интегрирования в правильном виде в цилиндрических координатах:

$$D: \quad \begin{cases} 0 \leqslant h \leqslant 2 \\ 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi \\ 0 \leqslant \rho \leqslant \sqrt{2h} \end{cases}$$

Подынтегральная функция при переходе к новым переменным превращается в ρ^2:

$$x^2 + y^2 = \rho^2$$

Теперь остается вычислить интеграл:

$$\iiint\limits_E (x^2+y^2)\,\mathsf{d}\,x\,\mathsf{d}\,y\,\mathsf{d}\,z =$$

$$= \iiint\limits_D \underbrace{\rho^2}_{\substack{\text{подын-}\\\text{тегральная}\\\text{функция}}} \cdot \underbrace{\rho}_{\substack{\text{модуль}\\\text{Якобиана}}} \,\mathsf{d}\,\varphi\,\mathsf{d}\,\rho\,\mathsf{d}\,h =$$

$$= \int_0^2 \mathsf{d}\,h \int_0^{2\pi} \mathsf{d}\,\varphi \int_0^{\sqrt{2h}} \rho^3\,\mathsf{d}\,\rho =$$

$$= \int_0^2 \mathsf{d}\,h \int_0^{2\pi} \mathsf{d}\,\varphi \Big(\frac{\rho^4}{4}\Big)\Big|_{\rho=0}^{\rho=\sqrt{2h}} =$$

$$= \int_0^2 \mathsf{d}\,h \int_0^{2\pi} 4h^2\,\mathsf{d}\,\varphi = \int_0^2 \mathsf{d}\,h \big(h^2\varphi\big)\Big|_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} =$$

$$= 2\pi \int_0^2 h^2\,\mathsf{d}\,h = 2\pi\Big(\frac{h^3}{3}\Big)\Big|_{h=0}^{h=2} = \frac{16\pi}{3}$$

Ответ: $\frac{16\pi}{3}$.

⊳⊳ **15.4.7.** Вычислите тройные интегралы:

1) $\iiint\limits_E z\sqrt{x^2+y^2}\,\mathsf{d}\,x\,\mathsf{d}\,y\,\mathsf{d}\,z, \quad E: \quad y \geqslant 0, \quad 0 \leqslant z \leqslant a, \quad x^2+y^2 \leqslant 2x;$

2) $\iiint\limits_E z\,\mathsf{d}\,x\,\mathsf{d}\,y\,\mathsf{d}\,z, \quad E: \quad x^2+y^2 \leqslant z \leqslant H;$

3) $\iiint\limits_E \mathsf{d}\,x\,\mathsf{d}\,y\,\mathsf{d}\,z, \quad E: \quad 0 \leqslant z, \quad x^2+y^2 \leqslant 2Rx, \quad x^2+y^2+z^2 \leqslant 4R^2;$

4) $\iiint\limits_E (x^2+y^2+z^2)\,\mathsf{d}\,x\,\mathsf{d}\,y\,\mathsf{d}\,z, \quad E: \quad 0 \leqslant x, \quad x^2+y^2 \leqslant R^2, \quad 0 \leqslant z \leqslant H;$

5) $\iiint\limits_D xy\,\mathsf{d}\,x\,\mathsf{d}\,y, \quad E: \quad x^2+y^2 \leqslant 1, \quad 0 \leqslant z \leqslant 1, \quad x \geqslant 0, \quad y \geqslant 0;$

6) $\iiint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}\,\mathsf{d}\,x\,\mathsf{d}\,y, \quad E: \quad \sqrt{x^2+y^2} \leqslant z \leqslant H;$

Сферические координаты. Еще одна часто используемая замена переменных – так называемые *сферические координаты.* Они обычно используются в задачах, где имеется некоторая симметрия относительно вращений вокруг различных осей, проходящих через начало координат.

Сферические координаты точки A в трехмерном пространстве $\mathbb{R}^3$ определяются следующим образом. Сначала A проектируется на плоскость XOY (получаемую при этом точку мы обозначим B). После этого вычисляются:

- угол φ между лучами OX и OB,
- угол θ между лучами OB и OA,
- расстояние r от A до O.

Понятно, что (φ,θ,r) связаны с обычными декартовыми координатами (x,y,z) точки A формулами

$$\begin{cases} x = r\cdot\cos\theta\cdot\cos\varphi \\ y = r\cdot\cos\theta\cdot\sin\varphi \\ z = r\cdot\sin\theta \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} 0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi \\ -\frac{\pi}{2}\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2} \\ r\geqslant 0 \end{pmatrix}$$

Модуль Якобиана такой замены переменных равен $r^2\cos\theta$:

$$|\,\mathsf{J}\,| = \left|\det\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial\varphi} & \frac{\partial x}{\partial\theta} & \frac{\partial x}{\partial r} \\ \frac{\partial y}{\partial\varphi} & \frac{\partial y}{\partial\theta} & \frac{\partial y}{\partial r} \\ \frac{\partial z}{\partial\varphi} & \frac{\partial z}{\partial\theta} & \frac{\partial z}{\partial r}\end{pmatrix}\right| =$$

$$= \left|\det\begin{pmatrix} -r\cos\theta\sin\varphi & -r\sin\theta\cos\varphi & \cos\theta\cos\varphi \\ r\cos\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi & \cos\theta\sin\varphi \\ 0 & r\cos\theta & \sin\theta\end{pmatrix}\right| =$$

$$= \Bigg| - r\cos\theta\cdot\det\begin{pmatrix} -r\cos\theta\sin\varphi & \cos\theta\cos\varphi \\ r\cos\theta\cos\varphi & \cos\theta\sin\varphi\end{pmatrix} +$$

$$+\sin\theta\cdot\det\begin{pmatrix} -r\cos\theta\sin\varphi & -r\sin\theta\cos\varphi \\ r\cos\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi\end{pmatrix}\Bigg| =$$

$$= \Big| - r\cos\theta\cdot\big(- r\cos^2\theta\cdot\underbrace{(\sin^2\varphi+\cos^2\varphi)}_{\substack{\parallel\\1}}\big) +$$

$$+\sin\theta\cdot r^2\sin\theta\cos\theta\underbrace{(\sin^2\varphi+\cos^2\varphi)}_{\substack{\parallel\\1}}\Big| =$$

$$= \left|r^2\cos^3\theta + r^2\sin^2\theta\cos\theta\right| =$$
$$= \Big|r^2\cos\theta\cdot\underbrace{(\cos^2\theta+\sin^2\theta)}_{\substack{\parallel\\1}}\Big| =$$

$$= |r^2\cdot\underbrace{\cos\theta}_{\substack{\vee\!\!\shortparallel\\0,\\ \text{потому что}\\ \theta\in[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]}}| = r^2\cos\theta$$

Сингулярные точки у отображения $(\varphi,\theta,r)\mapsto(x,y,z)$ могут получаться

- если $r=0$ или $\theta=\pm\frac{\pi}{2}$, и тогда якобиан (а значит и дифференциал) отображения равен нулю, и
- если $\varphi_1-\varphi_2=2\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$, и тогда точки (φ_1,θ,r) и (φ_1,θ,r) при этом отображении слипаются.

Вопрос о том, будут ли на данной области сферические координаты полурегулярной заменой переменных, лучше решать в каждом случае отдельно, поэтому мы упомянем лишь самый распространенный случай:

$$D:\quad\begin{cases}\alpha\leqslant\varphi\leqslant\beta\\ \eta(\varphi)\leqslant\theta\leqslant\varkappa(\varphi)\\ Q(\varphi,\theta)\leqslant r\leqslant R(\varphi,\theta)\end{cases}$$

Такая область заведомо будет удовлетворять условиям полурегулярности для отображения $(\varphi,\theta,r)\mapsto(x,y,z)$, если выполнены следующие условия:

1) $\beta-\alpha\leqslant 2\pi$,
2) функции η и $\varkappa$ полурегулярны на отрезке $[\alpha,\beta]$ и отображают его в отрезок $[-\frac{\pi}{2};+\frac{\pi}{2}]$,
3) функции Q и R (неотрицательны и) полурегулярны на области

$$\begin{cases}\alpha\leqslant\varphi\leqslant\beta\\ \eta(\varphi)\leqslant\theta\leqslant\varkappa(\varphi)\end{cases}$$

◇ **15.4.8.** Вычислим тройной интеграл

$$\iiint\limits_{E:\ x^2+y^2+z^2\leqslant z}\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,\mathsf{d}\,x\,\mathsf{d}\,y\,\mathsf{d}\,z,$$

Перепишем уравнение для E в сферических координатах:

$$(r\cos\theta\cos\varphi)^2+(r\cos\theta\sin\varphi)^2+(r\sin\theta)^2\leqslant$$
$$\leqslant r\sin\theta\ \Leftrightarrow\ r^2\leqslant r\sin\theta\ \Leftrightarrow\ r\leqslant\sin\theta \qquad (15.4.196)$$

Теперь запишем нашу область в правильном виде в сферических координатах. Ясно, что когда произвольная точка A бегает по нашей области E, переменная будет φ меняться в пределах $[0;2\pi]$:

$$0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi \qquad (15.4.197)$$

Зафиксируем какое-нибудь значение φ из этого промежутка, и проведем поверхность в $\mathbb{R}^3$, точки которой имеют в качестве первой сферической координаты это самое зафиксированное значение φ. Понятно, что это будет полуплоскость, опирающаяся на ось OZ. В пересечении с нашей областью E она дает некий полукруг:

Далее смотрим только на этот полукруг. Когда точка A бегает по полукругу, у нее значение переменной θ будет меняться в интервале $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$:

$$0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2} \qquad (15.4.198)$$

Запоминаем это, фиксируем какое-нибудь значение θ из этого промежутка, и проводим поверхность в $\mathbb{R}^3$, точки которой имеют в качестве второй сферической координаты это самое зафиксированное значение θ. Понятно, что это будет конус, с вершиной в начале координат. В пересечении с нашим полукругом он даст некий отрезок:

Теперь смотрим только на этот отрезок. Из (15.4.196) следует, что когда точка A бегает по отрезку, у нее значение переменной r будет меняться в интервале $[0; \sin\theta]$:

$$0 \leqslant r \leqslant \sin\theta \qquad (15.4.199)$$

Это – последнее нужное нам условие. Теперь переписываем (15.4.197), (15.4.198), (15.4.199), и у нас получается запись области интегрирования в правильном виде в сферических координатах:

$$D: \quad \begin{cases} 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi \\ 0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2} \\ 0 \leqslant r \leqslant \sin\theta \end{cases}$$

Нам остается вычислить интеграл по формуле замены переменных:

$$\iiint\limits_E \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,\mathsf{d}\,x\,\mathsf{d}\,y\,\mathsf{d}\,z =$$

$$= \iiint\limits_D \underbrace{r}_{\substack{\text{подын-}\\ \text{тегральная}\\ \text{функция}}} \cdot \underbrace{r^2\cos\theta}_{\substack{\text{модуль}\\ \text{Якобиана}}}\,\mathsf{d}\,\varphi\,\mathsf{d}\,\theta\,\mathsf{d}\,r =$$

$$= \int_0^{2\pi}\mathsf{d}\,\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathsf{d}\,\theta\int_0^{\sin\theta} r^3\cos\theta\,\mathsf{d}\,r =$$

$$= \int_0^{2\pi}\mathsf{d}\,\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathsf{d}\,\theta\left(\frac{r^4}{4}\cos\theta\right)\Big|_{r=0}^{r=\sin\theta} =$$

$$= \frac{1}{4}\int_0^{2\pi}\mathsf{d}\,\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4\theta\cos\theta\,\mathsf{d}\,\theta =$$

$$= \frac{1}{4}\int_0^{2\pi}\mathsf{d}\,\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4\theta\,\mathsf{d}\sin\theta =$$

$$= \frac{1}{4}\int_0^{2\pi}\mathsf{d}\,\varphi\left(\frac{\sin^5\theta}{5}\right)\Big|_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{2}} =$$

$$= \frac{1}{4}\int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{5}\right)\mathsf{d}\,\varphi = \frac{1}{20}\cdot 2\pi = \frac{\pi}{10}$$

Ответ: $\frac{\pi}{10}$

⊳⊳ **15.4.9.** Вычислите тройные интегралы:

1) $\iiint\limits_E \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,\mathsf{d}\,x\,\mathsf{d}\,y\,\mathsf{d}\,z, \quad E: \quad 1 \leqslant x^2+y^2+z^2 \leqslant 8;$
2) $\iiint\limits_E (x^2+y^2-z^2)\,\mathsf{d}\,x\,\mathsf{d}\,y\,\mathsf{d}\,z, \quad E: \quad 1 \leqslant x^2+y^2+z^2 \leqslant 4, \quad x \geqslant 0, \quad y \geqslant 0;$
3) $\iiint\limits_E (yz+zx)\,\mathsf{d}\,x\,\mathsf{d}\,y\,\mathsf{d}\,z, \quad E: \quad 0 \leqslant z, \quad 0 \leqslant x \leqslant y, \quad x^2+y^2+z^2 \leqslant R^2;$
4) $\iiint\limits_E \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\,\mathsf{d}\,x\,\mathsf{d}\,y\,\mathsf{d}\,z, \quad E: \quad \sqrt{x^2+y^2} \leqslant z, \quad x^2+y^2+z^2 \leqslant R^2;$
5) $\iiint\limits_E xyz\,\mathsf{d}\,x\,\mathsf{d}\,y\,\mathsf{d}\,z, \quad E: \quad x \geqslant 0, \quad y \geqslant 0, \quad z \geqslant 0, \quad x^2+y^2+z^2 \leqslant R^2;$

Глава 16

КРИВАЯ, ЕЕ ДЛИНА И ИНТЕГРАЛЫ ПО КРИВОЙ

§ 1 Параметризованная кривая

- *Параметризованной кривой* в евклидовом пространстве X называется всякое полурегулярное (в смысле определения на с.953) отображение размерности 1 в X, то есть бесконечно гладкое отображение $\alpha : I \to X$, где I – измеримый по Жордану компакт на прямой $\mathbb{R}$, удовлетворяющее следующим условиям:

  C1 (стабильность почти всюду): множество внутренних точек компакта I, в которых производная $\alpha : I \to X$ равна нулю, имеет нулевую Жорданову меру:

$$\mu\Big\{s \in \mathsf{Int}(I) : \quad \alpha'(s) = 0\Big\} = 0 \qquad \left(\alpha'(s) := \lim_{t\to s} \frac{\alpha(t) - \alpha(s)}{t - s}\right) \qquad (16.1.1)$$

  C2 (инъективность почти всюду): отображение $\alpha : I \to X$ инъективно всюду, кроме, может быть, подмножества жордановой меры нуль в I:

$$\mu\Big\{s \in I : \quad \exists t \in I \quad s \neq t \quad \& \quad \alpha(s) = \alpha(t)\Big\} = 0$$

- Параметризованная кривая $\alpha : I \to X$ называется

  — *регулярной*, если она является регулярным отображением, то есть условия C1 и C2 можно усилить до условий

  C1* (стабильность): $\alpha : I \to X$ обладает гладким продолжением $\tilde{\alpha} : U \to X$ в некоторую окрестность U компакта I, у которого производная не равна нулю всюду на I:

$$\forall s \in I \quad \tilde{\alpha}'(s) = \lim_{t\to s} \frac{\tilde{\alpha}(t) - \tilde{\alpha}(s)}{t - s} \neq 0$$

  C2* (инъективность): отображение $\alpha : I \to X$ всюду инъективно:

$$\forall s, t \in I \quad s \neq t \quad \Longrightarrow \quad \alpha(s) \neq \alpha(t)$$

  — *вырожденной*, если α является вырожденным полурегулярным отображением, то есть I имеет нулевую жорданову меру:

$$\mu(I) = 0$$

  — *простой*, если ее область параметров I является отрезком.

◇ **16.1.1. Параметризованный отрезок.** Если $x, y \in X$ – произвольные точки, то отображение $\alpha : [0,1] \to X$,

$$\alpha(s) = (1-s)\cdot x + s\cdot y, \quad s \in [0,1],$$

является, очевидно, параметризованной кривой в X, которую естественно назвать *параметризованным отрезком* (с началом в x и концом в y). Мы обозначаем такую кривую символом $[x,y]$[1]. Таким образом, $[x,y]$ есть отображение $[x,y] : [0,1] \to X$, действующее по формуле

$$[x,y](s) = (1-s)\cdot x + s\cdot y, \quad s \in [0,1],$$

(a) Подчиненность, эквивалентность и функция перехода

Скалярная подчиненность и скалярная эквивалентность. Как и более общие полурегулярные отображения, параметризованные кривые бывают подчиненными и эквивалентными.

- Пусть $\alpha : I \to X$ и $\beta : J \to X$ – две параметризованные кривые. Говорят, что
  - β *(скалярно) подчинена* α, и обозначают это записью
  $$\beta \subseteq \alpha,$$
  если носитель β содержится в носителе α:
  $$\mathsf{R}(\beta) \subseteq \mathsf{R}(\alpha)$$
  - β *(скалярно) эквивалентна* α, и обозначают это записью
  $$\beta \cong \alpha,$$
  если носитель β совпадает с носителем α:
  $$\mathsf{R}(\beta) = \mathsf{R}(\alpha)$$

Теоремы 15.3.14 и 15.3.15 приобретают следующий вид.

Теорема 16.1.1. *Если параметризованная кривая $\beta : J \to X$ подчинена параметризованной кривой $\alpha : I \to X$,*

$$\beta \subseteq \alpha$$

то след $\alpha|_\beta$ кривой β в кривой α является параметризованной кривой, эквивалентной β:

$$\beta \cong \alpha|_\beta$$

Теорема 16.1.2. *Если параметризованные кривые $\alpha : I \to X$ и $\beta : J \to X$ эквивалентны,*

$$\alpha \cong \beta$$

то существуют открытые множества $U \subset \mathsf{D}(\alpha)$, $V \subset \mathsf{D}(\beta)$ и диффеоморфизм $\varphi : V \to U$, называемый функцией перехода*, выражающей кривую β через кривую α, и обозначаемый записью*

$$\varphi : \beta \rightarrowtail \alpha$$

такие, что выполняются следующие условия

(a) $U = \mathsf{R}(\varphi)$ и $V = \mathsf{D}(\varphi)$ являются множествами полной меры в компактах $\mathsf{D}(\alpha)$ и $\mathsf{D}(\beta)$:

$$\mu\Big(\mathsf{D}(\alpha) \setminus U\Big) = 0 = \mu\Big(\mathsf{D}(\beta) \setminus V\Big)$$

(b) на множествах U и V отображения α и β инъективны и имеют ненулевую производную:

$$\forall s \in U \quad \alpha'(s) \neq 0, \qquad \forall t \in V \quad \beta'(t) \neq 0$$

[1]Это обозначение понадобится нам ниже в примере 16.3.8.

(c) на V отображение φ выражает β через α:

$$\forall t \in V \qquad \alpha(\varphi(t)) = \beta(t)$$

$$\begin{tikzcd} & X & \\ U \arrow[ur, "\alpha"] & & V \arrow[ul, "\beta"'] \arrow[ll, "\varphi"] \end{tikzcd}$$

При этом

(i) любые две функции перехода $\varphi_1 : \beta \rightarrowtail \alpha$ и $\varphi_2 : \beta \rightarrowtail \alpha$ совпадают на общей области определения:

$$\forall t \in \mathsf{D}(\varphi_1) \cap \mathsf{D}(\varphi_2) \qquad \varphi_1(t) = \varphi_2(t)$$

(ii) для любой функции перехода $\varphi : \beta \rightarrowtail \alpha$ обратное отображение φ^{-1} является функцией перехода, выражающей кривую α через кривую β:

$$\varphi^{-1} : \alpha \rightarrowtail \beta,$$

(iii) для любой функции перехода $\varphi : \beta \rightarrowtail \alpha$ можно подобрать две последовательности измеримых компактных областей $D_k \subseteq \mathsf{R}(\varphi)$ и $G_k \subseteq \mathsf{D}(\varphi)$ такие что

$$D_k = \varphi(G_k), \quad \mu\Big(\mathsf{D}(\alpha) \setminus D_k\Big) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0, \quad \mu\Big(\mathsf{D}(\beta) \setminus G_k\Big) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

Функция перехода $\varphi : \beta \rightarrowtail \alpha$ называется

– *продолжаемой*, если она продолжается до какой-нибудь другой функции перехода $\varphi_1 : \beta \rightarrowtail \alpha$, определенной на более широком множестве:

$$\mathsf{D}(\varphi) \subsetneqq \mathsf{D}(\varphi_1)$$

– *непродолжаемой*, если такого продолжения $\varphi_1 : \beta \rightarrowtail \alpha$ не существует,

– *максимальной*, если любая другая функция перехода $\psi : \beta \rightarrowtail \alpha$ является ограничением функции φ (на более узкое множество полной меры в $\mathsf{D}(\beta)$).

◇ **16.1.2. Полурегулярная замена переменных существует не всегда.** При первом знакомстве понятие функции перехода оставляет впечатление неоправданной сложности из-за интуитивных ожиданий, что для любых двух эквивалентных параметризованных кривых $\alpha : I \to X$ и $\beta : J \to X$,

$$\mathsf{R}(\beta) = \mathsf{R}(\alpha)$$

должна существовать замена переменной, выражающая одну из них через другую, например, β через α:

$$\varphi : J \to I \quad \Big| \quad \beta(t) = \alpha(\varphi(t)), \quad t \in J,$$

Если бы такая всюду определенная замена переменных φ, всегда существовала (здесь еще важно условие *полурегулярности*, о котором мы скажем чуть ниже), то это сильно упростило бы формулировку теоремы 16.1.2 (а до нее теоремы 15.3.15), потому что не понадобилось бы вводить специальные множества U и V – можно было бы добиваться, чтобы $U = I$ и $V = J$ (разумеется, при этом нужно было бы менять другие детали формулировок, в частности, отказываться от требования, чтобы U и V были открытыми, однако это было бы уже не так существенно для теории в целом и вполне достижимо).

Так вот, оказывается, что это невозможно из-за условия гладкости, накладываемого на отображение φ. Это условие нужно для того, чтобы ограничения φ на измеримые компакты были полурегулярными отображениями, и, как следствие, к ним можно было бы применять теорему о замене переменных 15.4.1, что в свою очередь позволило бы доказывать основные в этой науке теоремы 16.2.3 и 16.3.6 о длине и о векторной длине кривой. И из-за него нужная замена переменных существует не всегда. Мы покажем это здесь на простейшем примере. Рассмотрим две параметризованные кривые

$$\alpha : \quad \begin{cases} x = \cos s \\ y = \sin s \end{cases}, \quad s \in [0, 2\pi]$$

и

$$\beta : \quad \begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases}, \quad t \in [-\pi, \pi]$$

Они эквивалентны, то есть имеют одинаковый носитель, и этим носителем будет множество на плоскости, традиционно называемое *окружностью*:

(ниже на с.987 мы введем понятие скалярной кривой, и после этого станет ясно, что окружность – один из примеров скалярной кривой).

Предположим далее, что существует (гладкая) замена переменной $\varphi : [-\pi,\pi] \to [0,2\pi]$, выражающая β через α,

$$\alpha(\varphi(t)) = \beta(t), \quad t \in [-\pi,\pi]$$

то есть такая, что справедлива система тождеств:

$$\begin{cases} \cos\varphi(t) = \cos t \\ \sin\varphi(t) = \sin t \end{cases}, \quad t \in [-\pi,\pi]$$

Тогда

1) при $t \in (0,\pi)$ мы получим:

$$\sin\varphi(t) = \underbrace{\sin t}_{\substack{\vee \\ 0}} \quad (t \in [0,\pi])$$

$$\Downarrow$$

$$\sin \underbrace{\varphi(t)}_{\substack{\Cap \\ [0,2\pi]}} > 0$$

$$\Downarrow$$

$$\varphi(t) \in (0,\pi)$$

$$\Downarrow$$

$$\cos \underbrace{\varphi(t)}_{\substack{\Cap \\ (0,\pi)}} = \cos \underbrace{t}_{\substack{\Cap \\ (0,\pi)}}$$

$$\Downarrow \begin{pmatrix} \text{функция } \cos \\ \text{инъективна} \\ \text{на интервале} \\ (0,\pi) \end{pmatrix}$$

$$\varphi(t) = t, \quad t \in (0,\pi) \tag{16.1.2}$$

2) а при $t \in (-\pi,0)$ мы получим:

$$\sin\varphi(t) = \underbrace{\sin t}_{\substack{\wedge \\ 0}} \quad (t \in (-\pi,0))$$

$$\Downarrow$$

$$\sin \underbrace{\varphi(t)}_{\substack{\Cap \\ [0,2\pi]}} < 0$$

$$\Downarrow$$

$$\varphi(t) \in (\pi,2\pi)$$

$$\Downarrow$$

$$\cos \underbrace{\varphi(t)}_{\substack{\Cap \\ (\pi,2\pi)}} = \cos \underbrace{t}_{\substack{\Cap \\ (-\pi,0)}}$$

$$\Downarrow$$

$$\cos \underbrace{(\varphi(t) - 2\pi)}_{\substack{\Cap \\ (-\pi,0)}} = \cos \underbrace{t}_{\substack{\Cap \\ (-\pi,0)}}$$

$$\Downarrow \begin{pmatrix} \text{функция } \cos \\ \text{инъективна} \\ \text{на интервале} \\ (-\pi,0) \end{pmatrix}$$

$$\varphi(t) - 2\pi = t, \quad t \in (-\pi,0)$$

$$\Downarrow$$

$$\varphi(t) = t + 2\pi, \quad t \in (-\pi,0) \tag{16.1.3}$$

Теперь вспоминаем, что функция $\varphi : [-\pi,\pi] \to [0,2\pi]$ должна быть гладкой, и значит, непрерывной. Отсюда следует, что в точке 0 она равна двум разным числам:

$$\begin{cases} \varphi(0) = \lim_{t\to+0}\varphi(t) = (16.1.2) = \lim_{t\to+0} t = 0 \\ \varphi(0) = \lim_{t\to-0}\varphi(t) = (16.1.3) = \lim_{t\to-0} t + 2\pi = \\ = 2\pi \end{cases}$$

Понятно, что такое невозможно. Это противоречие означает, что замены переменной $\varphi : [-\pi,\pi] \to [0,2\pi]$, которую мы хотели бы получить, не существует.

$\diamond$ **16.1.3. Максимальная функция перехода не всегда существует.** Это еще один неприятный эффект в этой науке, из-за которого утяжеляются формулировки. Рассмотрим параметризованную кривую α на плоскости, заданную системой

$$\begin{cases} x = \cos s \\ y = \sin s \cdot \cos s \end{cases}, \quad s \in [0,2\pi]$$

или, что то же самое, уравнением

$$\alpha(s) = (\cos s;\ \sin s \cdot \cos s), \quad s \in [0,2\pi]$$

Производная этого отображения имеет вид

$$\alpha'(s) = (-\sin s;\ \cos 2s)$$

и нигде не обращается в нуль. Поэтому сингулярными точками будут только концы отрезка $\{0;\ 2\pi\}$ и точки $\{\frac{\pi}{2};\ \frac{3\pi}{2}\}$, где отображение α не инъективно:

$$\mathsf{D}_{\mathsf{sing}}(\alpha) = \left\{0;\ \frac{\pi}{2};\ \frac{3\pi}{2};\ 2\pi\right\}$$

На плоскости эта кривая выглядит “положенной набок восьмеркой”:

Рассмотрим также эквивалентную ей кривую β, заданную системой

$$\begin{cases} x = -\cos t \\ y = \sin t \cos t \end{cases}, \quad t \in [0, 2\pi]$$

или, что равносильно, уравнением

$$\beta(t) = (-\cos t; \sin t \cos t), \quad t \in [0, 2\pi]$$

У этого отображения производная также нигде не обращается в нуль, и поэтому множество сингулярных точек здесь такое же:

$$\mathsf{D}_{\mathsf{sing}}(\alpha) = \left\{0;\ \frac{\pi}{2};\ \frac{3\pi}{2};\ 2\pi\right\}$$

А на плоскости картинка отличается только расстановкой “характерных точек”:

(совпадение рисунков иллюстрирует эквивалентность кривых α и β). Пересечение регулярных носителей α и β представляет собой восьмерку с тремя выколотыми точками:

и поэтому множества U и V, конструируемые в доказательстве теоремы 15.3.15, (совпадают и) имеют вид

$$U = V = \left(0;\ \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2};\ \pi\right) \cup \left(\pi;\ \frac{3\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{3\pi}{2};\ 2\pi\right)$$

А функция перехода выглядит так:

$$\varphi(t) = \begin{cases} t+\pi, & t \in \left(0;\ \frac{\pi}{2}\right) \\ t+\pi, & t \in \left(\frac{\pi}{2};\ \pi\right) \\ t-\pi, & t \in \left(\pi;\ \frac{3\pi}{2}\right) \\ t-\pi, & t \in \left(\frac{3\pi}{2};\ 2\pi\right) \end{cases}$$

Ее можно двумя способами продолжить до более широких функций перехода:

$$\varphi_1(t) = \begin{cases} t+\pi, & t \in (0;\ \pi) \\ t-\pi, & t \in \left(\pi;\ \frac{3\pi}{2}\right) \\ t-\pi, & t \in \left(\frac{3\pi}{2};\ 2\pi\right) \end{cases}$$

и

$$\varphi_2(t) = \begin{cases} t+\pi, & t \in \left(0;\ \frac{\pi}{2}\right) \\ t+\pi, & t \in \left(\frac{\pi}{2};\ \pi\right) \\ t-\pi, & t \in (\pi;\ 2\pi) \end{cases}$$

Эти функции уже не продолжишь: например, функцию φ_1 можно было бы продолжить только доопределив ее в какой-нибудь из внутренних точек интервала $(0;\ 2\pi)$, то есть, либо в π, либо в $\frac{3\pi}{2}$. Но в π ее продолжить невозможно, потому что пределы слева и справа в этой точке не совпадают,

$$\lim_{t\to\pi-0} \varphi_1(t) = 2\pi \neq 0 = \lim_{t\to\pi+0} \varphi_1(t)$$

(и значит, никакое продолжение не будет непрерывным). А в $\frac{3\pi}{2}$ ее продолжить нельзя, потому что если это сделать (доопределив ее по непрерывности, $\varphi_1(\frac{3\pi}{2}) = \frac{\pi}{2}$), то “расширенная” функция перехода получится определенной на множестве

$$(0;\ \pi) \cup (\pi;\ 2\pi)\,,$$

на котором отображение β перестает быть инъективным:

$$\beta\left(\frac{\pi}{2}\right) = (0;0) = \beta\left(\frac{3\pi}{2}\right)$$

Итак, φ_1 и φ_2 – две различные непродолжаемые функции перехода. Из этого следует, что максимальной функции перехода здесь не существует (потому что такая функция – обозначим ее на минуту ψ – была бы общим продолжением для φ_1 и φ_2, и поскольку $\mathsf{D}(\varphi_1) \neq \mathsf{D}(\varphi_2)$, множество $\mathsf{D}(\psi) = \mathsf{D}(\varphi_1) \cup \mathsf{D}(\varphi_2)$ должно было бы быть строго шире, чем, например, $\mathsf{D}(\varphi_1)$, то есть мы получили бы, что φ_1 продолжаема).

Ориентированная подчиненность и ориентированная эквивалентность

- Пусть $\alpha : I \to X$ и $\beta : J \to X$ – две параметризованные кривые. Говорят, что
  — β *ориентированно подчинена* α, и обозначают это записью

$$\beta \subseteqq \alpha,$$

если существует функция перехода $\varphi : \beta \rightarrowtail \alpha$, имеющая всюду положительную производную:

$$\varphi'(t) > 0, \qquad t \in \mathsf{D}(\varphi) \tag{16.1.4}$$

(в этом случае β подчинена α, то есть $\mathsf{R}(\beta) \subseteq \mathsf{R}(\alpha)$);

— β *ориентированно эквивалентна* α, и обозначают это записью

$$\beta \equiv \alpha,$$

если β эквивалентна α,

$$\beta \cong \alpha$$

(то есть $\mathsf{R}(\beta) = \mathsf{R}(\alpha)$) и ориентированно подчинена α:

$$\beta \subseteqq \alpha.$$

(в этом случае α тоже ориентированно подчинена β: $\alpha \subseteqq \beta$).

Из теоремы 16.1.1 следует

Теорема 16.1.3. *Если параметризованная кривая $\beta : J \to X$ ориентированно подчинена параметризованной кривой $\alpha : I \to X$,*

$$\beta \subseteqq \alpha$$

то след $\alpha\big|_\beta$ кривой β в кривой α является параметризованной кривой, ориентированно эквивалентной β:

$$\beta \equiv \alpha\big|_\beta$$

Следующие свойства очевидны.

Свойства ориентированно эквивалентных кривых:

1^0. *Всегда $\alpha \equiv \alpha$.*

2^0. *Если $\alpha \equiv \beta$, то $\beta \equiv \alpha$.*

3^0. *Если $\alpha \equiv \beta$ и $\beta \equiv \gamma$, то $\alpha \equiv \gamma$.*

4^0. *Если $\widetilde{\beta} \equiv \beta \subseteqq \alpha \equiv \widetilde{\alpha}$, то $\widetilde{\beta} \subseteqq \widetilde{\alpha}$.*

◇ **16.1.4.** Пусть $\alpha : I \to L$ и $\beta : J \to L$ – две параметризации кривой L, причем хотя бы одна из них не является простой или регулярной. Тогда тот факт, что они не одинаково ориентированы совсем не означает, они должны быть ориентированы противоположно.

Как следствие, количество классов эквивалентности параметризаций данной кривой L, вопреки ожиданиям, вовсе не равно двойке. Оно, как оказывается, бесконечно.

(b) Разбиения параметризованных кривых

Кривые, пересекающиеся несущественно Пусть нам даны две параметризованные кривые $\alpha : I \to X$ и $\beta : J \to X$. Будем говорить, что они *пересекаются несущественно*, и обозначать это записью

$$\alpha \pitchfork \beta,$$

если выполняются следующие два эквивалентных условия:

(a) след $\beta\big|_\alpha$ кривой α в кривой β есть вырожденная параметризованная кривая:

$$\mu\Big(\mathsf{D}(\beta\big|_\alpha)\Big) = \mu\Big(\beta^{-1}\big(\alpha(I)\big)\Big) = 0.$$

(b) след $\alpha\big|_\beta$ кривой β в кривой α есть вырожденная параметризованная кривая;

$$\mu\Big(\mathsf{D}(\alpha\big|_\beta)\Big) = \mu\Big(\alpha^{-1}\big(\beta(J)\big)\Big) = 0.$$

Понятно, что частным случаем здесь будет ситуация, когда кривые совсем не пересекаются:

$$\mathsf{R}(\alpha) \cap \mathsf{R}(\beta) = \varnothing,$$

Доказательство. Эквивалентность условий (a) и (b) следует из леммы 15.3.12 и формулы (15.3.148): если $\beta\big|_{\alpha}$ – вырожденное полурегулярное отображение, то его след

$$\alpha\big|_{\beta\big|_{\alpha}} = \alpha\big|_{\beta}$$

в полурегулярном отображении α тоже должен быть вырожденным полурегулярным отображением, и наоборот. □

Теорема 16.1.4. *Если параметризованные кривые α и β пересекаются несущественно, то любые две эквивалентные им кривые $\widetilde{\alpha}$ и $\widetilde{\beta}$ также пересекаются несущественно:*

$$\widetilde{\beta} \cong \beta \pitchfork \alpha \cong \widetilde{\alpha} \quad \Longrightarrow \quad \widetilde{\beta} \pitchfork \widetilde{\alpha}$$

Доказательство. Если $\widetilde{\beta} \cong \beta$ и $\beta \pitchfork \alpha$, то мы получаем

$$\mu\Big(\mathsf{D}(\alpha\big|_{\widetilde{\beta}})\Big) = \mu\Big(\alpha^{-1}\big(\mathsf{R}(\widetilde{\beta})\big)\Big) = \mu\Big(\alpha^{-1}\big(\mathsf{R}(\beta)\big)\Big) = 0.$$

то есть $\widetilde{\beta} \pitchfork \alpha$. Точно так же получаем $\widetilde{\beta} \pitchfork \widetilde{\alpha}$. □

Разбиение параметризованной кривой. Говорят, что параметризованные кривые $\beta_1, ..., \beta_m$ образуют *(ориентированное) разбиение* параметризованной кривой α и обозначают это формулой

$$\alpha \equiv \beta_1 \sqcup ... \sqcup \beta_m,$$

или формулой

$$\alpha \equiv \bigsqcup_{i=1}^{m} \beta_i, \tag{16.1.5}$$

если

- P1: каждая кривая β_i (ориентированно) подчинена α,
- P2: кривые $\beta_1, ..., \beta_m$ попарно несущественно пересекаются:

$$\forall i \neq j \qquad \beta_i \pitchfork \beta_j$$

- P3: объединение их образов совпадает с образом α:

$$\mathsf{R}(\alpha) = \mathsf{R}(\beta_1) \cup ... \cup \mathsf{R}(\beta_m)$$

Заметим, что если кривые $\beta_1, ..., \beta_m$ невырождены, то они не могут повторяться (поскольку пересекаются несущественно). Поэтому в таких случаях удобно разбиение представлять себе как множество кривых (а не как последовательность с индексами). Это позволяет в записи избавиться от индексов: если разбиение обозначено одной буквой $\mathcal{B} = \{\beta_1, ..., \beta_m\}$, то формула (16.1.5) переписывается так:

$$\alpha \equiv \bigsqcup_{\beta \in \mathcal{B}} \beta.$$

Теорема 16.1.5 (о следе разбиения в области параметров). *Пусть $\alpha : I \to X$ – параметризованная кривая. Тогда*

(i) для любого измеримого разбиения $I_1, ..., I_m$ компакта I (компактами), система ограничений $\alpha|_{I_1}, ..., \alpha|_{I_m}$ образует ориентированное разбиение кривой α:

$$I = \bigsqcup_{i=1}^{m} I_i \qquad \Longrightarrow \qquad \alpha \equiv \bigsqcup_{i=1}^{m} \alpha|_{I_i} \tag{16.1.6}$$

(ii) *наоборот, если $\beta_1, ..., \beta_m$ – (ориентированное) разбиение параметризованной кривой $\alpha : I \to X$, то система множеств $\alpha^{-1}(\mathsf{R}(\beta_i))$ является измеримым разбиением компакта I:*

$$\alpha \equiv \bigsqcup_{i=1}^{m} \beta_i \qquad \Longrightarrow \qquad I = \bigsqcup_{i=1}^{m} \alpha^{-1}(\mathsf{R}(\beta_i)), \tag{16.1.7}$$

и тогда следы $\alpha\big|_{\beta_1}, ..., \alpha\big|_{\beta_m}$ кривых $\beta_1, ..., \beta_m$ в кривой α, (ориентированно) эквивалентны кривым $\beta_1, ..., \beta_m$ и образуют разбиение кривой α,

$$\alpha\big|_{\beta_i} \equiv \beta_i, \qquad \alpha \equiv \bigsqcup_{i=1}^{m} \alpha\big|_{\beta_i}. \tag{16.1.8}$$

Доказательство. 1. Пусть $I_1, ..., I_m$ – измеримое разбиение компакта I. Все кривые $\alpha_i = \alpha|_{I_i}$ ориентированно подчинены α. Они пересекаются несущественно, потому что

$$\mu(\mathsf{D}(\alpha_i\big|_{\alpha_j})) = \mu\Big(\alpha_i^{-1}(\alpha_j(I_j))\Big) = \mu\Big(\alpha_i^{-1}(\alpha(I_j))\Big) = \mu\Big(I_i \cap I_j\Big) = 0$$

Объединение их образов совпадает с образом α:

$$\mathsf{R}(\alpha) = \alpha(I) = \alpha\Big(\bigcup_{i=1}^{m} I_i\Big) = \bigcup_{i=1}^{m} \alpha(I_i) = \bigcup_{i=1}^{m} \mathsf{R}(\alpha_i)$$

2. Пусть $\beta_1, ..., \beta_m$ – разбиение параметризованной кривой $\alpha : I \to X$. Каждая кривая β_i подчинена α, поэтому множество $I_i = \alpha^{-1}(\mathsf{R}(\beta_i))$ измеримо в I по теореме 15.3.14. Отсюда по свойству 4° на с.954 следует, что ограничение $\alpha_i = \alpha\big|_{I_i}$ является полурегулярным отображением. Далее, для любых $i \neq j$ мы получаем

$$\alpha_i \cong \beta_i \pitchfork \beta_j \cong \alpha_j$$

и поэтому по теореме 16.1.4

$$\alpha_i \pitchfork \alpha_j$$

Отсюда следует, что пересечение областей параметров этих кривых имеет нулевую меру:

$$\mu(I_i \cap I_j) = \mu(\mathsf{D}(\alpha_i\big|_{\alpha_j})) = 0.$$

С другой стороны, из того, что образы β_i покрывают образ α следует, что I_i покрывают I. Поэтому справедливо (16.1.7). В силу (16.1.6) отсюда следует

$$\alpha \equiv \bigsqcup_{i=1}^{m} \alpha|_{I_i}$$

При этом по теореме 16.1.3

$$\alpha|_{I_i} = \alpha|_{\beta_i} \equiv \beta_i.$$

□

Теорема 16.1.6 (об эквивалентных разбиениях). *Пусть $\beta_1, ..., \beta_m$ – (ориентированное) разбиение параметризованной кривой α:*

$$\alpha \equiv \bigsqcup_{i=1}^{m} \beta_i.$$

Тогда

(i) *для любой кривой $\widetilde{\alpha}$, (ориентированно) эквивалентной кривой α, система $\beta_1, ..., \beta_m$ будет также разбиением:*

$$\widetilde{\alpha} \equiv \alpha \quad \Longrightarrow \quad \widetilde{\alpha} \equiv \bigsqcup_{i=1}^{m} \beta_i,$$

(ii) *любые кривые $\widetilde{\beta}_1, ..., \widetilde{\beta}_m$ (ориентированно) эквивалентные кривым $\beta_1, ..., \beta_m$, также образуют разбиение кривой α:*

$$\widetilde{\beta}_i \equiv \beta_i \quad \Longrightarrow \quad \alpha \equiv \bigsqcup_{i=1}^{m} \widetilde{\beta}_i,$$

Доказательство. Эту теорему надо понимать так, что ее утверждение верно в двух ситуациях: если из формулировки выбросить содержащиеся в скобках упоминания об ориентированности, либо если удалить сами скобки. Мы докажем второе (а первое доказывается по аналогии).

1. Если $\alpha \equiv \bigsqcup_{i=1}^m \beta_i$ и $\widetilde{\alpha}$ ориентированно эквивалентна α, то чтобы доказать равенство $\widetilde{\alpha} \equiv \bigsqcup_{i=1}^m \beta_i$ нужно только проверить условие P1. Оно следует из свойства 4° с. 983: поскольку β_i подчинены α, они также подчинены и $\widetilde{\alpha}$.

2. Если $\alpha \equiv \bigsqcup_{i=1}^m \beta_i$ и $\widetilde{\beta}_i$ ориентированно эквивалентны β_i, то чтобы доказать равенство $\alpha \equiv \bigsqcup_{i=1}^m \widetilde{\beta}_i$ нужно только проверить условие P2. Оно следует из теоремы 16.1.4: если β_i и β_j существенно не пересекаются, то $\widetilde{\beta}_i$ и $\widetilde{\beta}_j$ также существенно не пересекаются. □

Теорема 16.1.7 (о дополнении к подчиненной кривой). *Если α – параметризованная кривая и β – (ориентированно) подчиненная ей параметризованная кривая, то найдется параметризованная кривая γ, (ориентированно) подчиненная кривой α и составляющая с β (ориентированное) разбиение α:*

$$\alpha \equiv \beta \sqcup \gamma. \tag{16.1.9}$$

Доказательство. По теореме 16.1.3, след $\alpha\big|_\beta$ кривой β в кривой α является параметризованной кривой (и значит, полурегулярным отображением). Поэтому ее область параметров $I_\beta = \alpha^{-1}(\mathsf{R}(\beta))$ является измеримым по Жордану компактом в области параметров $I = \mathsf{D}(\alpha)$. Положим $I_\gamma = \overline{I \setminus I_\beta}$. По свойствам меры Жордана, это будет тоже измеримый компакт, причем из включения $I_\beta \cap I_\gamma \subseteq \mathsf{Fr}(I_\beta)$ следует

$$\mu(I_\beta \cap I_\gamma) \leqslant \mu(\mathsf{Fr}(I_\beta)) = 0$$

Таким образом, множества I_β и I_γ образуют разбиение компакта I, и значит ограничения $\alpha|_{I_\beta}$ и $\alpha|_{I_\gamma}$ отображения α будут (в силу теоремы 16.1.5) разбиением кривой α.

$$\alpha \equiv \alpha|_{I_\beta} \sqcup \alpha|_{I_\gamma}$$

Положим $\gamma = \alpha|_{I_\gamma}$. Тогда поскольку $\beta \equiv \alpha|_\beta$, по теореме 16.1.6 мы получаем

$$\alpha \equiv \beta \sqcup \gamma.$$

□

Теорема 16.1.8 (о следе разбиения в подчиненной кривой)**.** *Пусть $\beta_1, ..., \beta_m$ – (ориентированное) разбиение параметризованной кривой α:*

$$\alpha \equiv \bigsqcup_{i=1}^m \beta_i.$$

Тогда на всякой параметризованной кривой γ, (ориентированно) подчиненной кривой α,

$$\gamma \subseteq \alpha,$$

кривые $\beta_1, ..., \beta_m$ оставляют след, являющийся (ориентированным) разбиением кривой γ

$$\gamma \equiv \bigsqcup_{i=1}^m \gamma\big|_{\beta_i}.$$

Доказательство. Обозначим $I = \mathsf{D}(\alpha)$ и рассмотрим следы всех этих кривых в кривой α. По теореме 16.1.6, следы $\alpha\big|_{\beta_i}$ эквивалентны β_i и образуют разбиение α,

$$\alpha\big|_{\beta_i} \equiv \beta_i, \qquad \alpha \equiv \bigsqcup_{i=1}^m \alpha\big|_{\beta_i}.$$

а их области параметров $I_i = \mathsf{D}(\alpha\big|_{\beta_i})$ образуют разбиение области параметров α:

$$I = \bigsqcup_{i=1}^m I_i.$$

Отсюда следует, что ограничивая эти множества на область параметров $J = \mathsf{D}(\alpha\big|_\gamma)$ кривой $\alpha\big|_\gamma$ мы также получаем разбиение:

$$J = \bigsqcup_{i=1}^{m} J_i, \qquad J_i = J \cap I_i.$$

По теореме 16.1.5 это означает, что ограничения $\alpha\big|_{J_i}$ являются разбиением ограничения $\alpha\big|_J$:

$$\alpha\big|_J \equiv \bigsqcup_{i=1}^{m} \alpha_{J_i}$$

Мы получаем цепочку:

$$\gamma \equiv \alpha\big|_J \equiv \bigsqcup_{i=1}^{m} \alpha_{J_i} \equiv \bigsqcup_{i=1}^{m} \alpha\big|_{\gamma|_{\beta_i}} \equiv \bigsqcup_{i=1}^{m} \gamma\big|_{\beta_i}.$$

□

§ 2 Скалярная кривая, ее длина и изотропный интеграл по кривой

(a) Скалярная кривая

Определение скалярной кривой и примеры.

- Множество L в евклидовом пространстве X мы называем *скалярной кривой*, или просто *кривой*, если оно является носителем (образом) некоторой параметризованной кривой $\alpha : I \to X$:

$$L = \mathsf{R}(\alpha) = \alpha(I).$$

  При этом отображение α называется *параметризацией* кривой L.
- Кривая L называется
  — *регулярной*, если она допускает регулярную параметризацию $\alpha : I \to L$ (то есть если ее можно представить как образ регулярной параметризованной кривой $\alpha : I \to X$; это не означает, однако, что любая другая параметризация $\beta : J \to L$ также обязана быть регулярной, потому что, например, всегда можно подобрать неиньективную параметризацию $\beta : J \to L$);
  — *вырожденной*, если она допускает вырожденную параметризацию $\alpha : I \to L$ (то есть если ее можно представить как образ вырожденной параметризованной кривой $\alpha : I \to X$; при этом в силу следствия 15.3.13, любая другая параметризация $\beta : J \to X$ множества L также будет вырожденной параметризованной кривой).
  — *связной*, если L является связным множеством,
  — *простой*, если существует (полурегулярная) параметризация $\alpha : I \to L$, в которой $I = [a, b]$ – отрезок.

◇ **16.2.1. Конечное множество точек.** В соответствии с нашими определениями, всякое конечное множество точек $\{x_1, ..., x_l\}$ в X можно рассматривать как кривую, поскольку мы можем представить $\{x_1, ..., x_l\}$ как образ отображения $\alpha : I \to X$, где $I = [1, 1] \cup ... \cup [l, l]$ – объединение конечного набора вырожденных отрезков, а $\alpha(i) = x_i$.

◇ **16.2.2. Окружность** представляет собой пример простой, но не регулярной кривой. Уравнения

$$\begin{cases} x = a\cos t \\ y = a\sin t \end{cases}, \qquad t \in [0, 2\pi]$$

определяют простую полурегулярную параметризацию $\alpha(t) = (x(t), y(t))$ окружности с центром в начале координат и радиусом a.

Можно показать (хоть это, формально говоря, – совсем нетривиальная задача), что при любой параметризации для такой кривой будет нарушаться условие инъективности C1* (и именно поэтому эта кривая не будет регулярной). С другой стороны, ее “односвязный” кусок, например, полуокружность, представляет собой пример регулярной кривой

$$\begin{cases} x = a\cos t \\ y = a\sin t \end{cases}, \qquad t \in [0,\pi]$$

◇ **16.2.3. Замечание об изломах.** Рассмотрим график L функции $y = |x|$ на отрезке $[-1,1]$. Это множество можно представить как образ полурегулярного отображения, область определения которого состоит, например, из двух отрезков. Вот пример такой параметризации:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = t+1 \\ y = -t-1 \end{cases}, \quad t \in [-2,-1] \\ \begin{cases} x = t \\ y = t \end{cases}, \qquad t \in [0,1] \end{array}\right]$$

Поэтому L является кривой.

Не так очевидно, что L допускает простую полурегулярную параметризацию (то есть, с областью определения в виде отрезка). Чтобы это понять, рассмотрим, например, функцию

$$\eta(t) = \begin{cases} 2e^{-\frac{1}{x}}, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -2e^{-\frac{1}{x}}, & x < 0 \end{cases}$$

В примере 10.2.7 мы уже определяли похожую функцию, и так же, как и там нетрудно показать, что $\eta(t)$ – гладкая всюду на $\mathbb{R}$. Более того, интересное свойство $\eta(t)$ состоит в том, что (несмотря на то, что она знакопеременна) ее модуль

$$|\eta(t)| = \begin{cases} 2e^{-\frac{1}{x}}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

тоже является гладкой функцией всюду на $\mathbb{R}$. Отсюда уже следует, что простую параметризацию нашего множества L можно задать уравнениями

$$\begin{cases} x = \eta(t) \\ y = |\eta(t)| \end{cases}, \qquad t \in \left[-\frac{1}{\ln 2}, \frac{1}{\ln 2}\right]$$

Тем не менее, такая параметризация не будет регулярной, потому что в точке $t = 0$ ее вектор скорости равен нулю:

$$\begin{cases} x'(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{cases}.$$

Более того, можно заметить, что у L вообще нет регулярной параметризации, и значит, L не является регулярной кривой. Это следует из того, что в точке $(0,0)$ кривая L имеет *излом*.

С формальной точки зрения этот термин означает, что какую ни возьми параметризацию $\alpha : [a,b] \to L$ множества L, единичный касательный вектор $\frac{\alpha'(t)}{|\alpha'(t)|}$ не будет иметь предел в точке t_0, соответствующей значению $\alpha(t_0) = (0,0)$. Действительно, если, например, двигаться слева направо, то до точки $(0,0)$ единичный касательный вектор должен быть равен $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ а после нее он уже будет $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

Эти рассуждения с единичным вектором можно заменить более простым (хотя и не таким наглядным) соображением: излом в точке $(0,0)$ означает, что как ни параметризуй множество L (полурегулярными) отображениями $\alpha : [a,b] \to L$, в точке $t_0 \in (a,b)$, соответствующей значению $\alpha(t_0) = (0,0)$ вектор скорости обязательно будет нулевым:

$$\alpha(t_0) = (0,0) \quad \Longrightarrow \quad \alpha'(t_0) = 0$$

Действительно, если бы это было не так, то есть $\alpha(t_0) = (0,0)$ и $\alpha'(t_0) \neq 0$, то при переходе через точку $(0,0)$ единичный касательный вектор $\frac{\alpha'(t)}{|\alpha'(t)|}$ менялся бы непрерывно, что, как мы уже поняли, невозможно.

Итак, множество L не является регулярной кривой, и, обобщая это наблюдение, можно сказать, что вообще всякая кривая L, имеющая излом, не может быть регулярной.

◇ **16.2.4. Кардиоида**, рассмотренная нами в примере 7.3.37, и описываемая уравнением в полярных координатах

$$\rho = 1 + \cos\varphi, \qquad \varphi \in [0, 2\pi]$$

является (простой) кривой, поскольку естественно параметризуется уравнениями

$$\begin{cases} x = \cos\varphi \cdot (1 + \cos\varphi) \\ y = \sin\varphi \cdot (1 + \cos\varphi) \end{cases}, \qquad \varphi \in [0, 2\pi]$$

а сингулярная область параметров здесь состоит из трех точек

$$\mathsf{D}_{\mathsf{sing}}(\alpha) = \{0, \pi, 2\pi\}$$

Точки 0 и 2π входят в нее как кратные (поскольку $\alpha(0) = \alpha(2\pi)$), а точка π – как критическая (то есть такая, в которой производная равна нулю).

Действительно, производные функций $x(\varphi)$ и $y(\varphi)$ выглядят так:

$$\begin{cases} x' = -\sin\varphi - \sin 2\varphi \\ y' = \cos\varphi + \cos 2\varphi \end{cases}$$

Поэтому модуль вектора скорости не равен нулю нигде, кроме точки $\varphi = \pi$:

$$|\alpha'(\varphi)| = \sqrt{|x'(\varphi)| + |y'(\varphi)|} = \sqrt{2 + 2\cos\varphi}$$

Взяв вместо $[0, 2\pi]$ отрезок $[-\pi, \pi]$, можно уменьшить число сингулярных точек до двух,

$$\mathsf{D}_{\mathsf{sing}}(\alpha) = \{-\pi, +\pi\} = \mathsf{Fr}(\mathsf{D}(\alpha)),$$

но все же, как ни параметризуй эту кривую, параметры, при которых α попадает в $(0,0)$ (при нашей параметризации, параметры $\varphi = \pm\pi$) будут сингулярными для α. Это происходит из-за того, что в ней имеется излом.

Чтобы это понять, рассмотрим единичный касательный вектор к кривой:

$$\frac{\alpha'(\varphi)}{|\alpha'(\varphi)|} = -\frac{\sin\varphi + \sin 2\varphi}{\sqrt{2+2\cos\varphi}} \cdot \mathbf{i} + \frac{\cos\varphi + \cos 2\varphi}{\sqrt{2+2\cos\varphi}} \cdot \mathbf{j}$$

Если посчитать предел при $\varphi \to \pi \pm 0$, то получится

$$\lim_{\varphi\to\pi\pm 0} \frac{\alpha'(\varphi)}{|\alpha'(\varphi)|} = \mp \cdot \mathbf{i}$$

То есть, при переходе через точку $\varphi = \pi$ касательный вектор скачкообразно меняется, а это и есть излом, как мы объясняли в примере 16.2.3.

Таким образом, $(0,0)$ – точка излома, и поэтому как ни параметризуй нашу кривую, вектор скорости в ней всегда будет нулевым, и значит это будет сингулярная точка.

$\diamond$ **16.2.5.** Рассмотрим множество на плоскости, описываемое уравнением в полярных координатах

$$\rho = 1 + \cos n\varphi, \qquad \varphi \in [0, 2\pi]$$

Оно будет кривой, поскольку естественно параметризуется уравнениями

$$\begin{cases} x = \cos\varphi \cdot (1+\cos n\varphi) \\ y = \sin\varphi \cdot (1+\cos n\varphi) \end{cases}, \qquad \varphi \in [0, 2\pi]$$

Сингулярная область параметров здесь состоит из $n+2$ точек:

$$\mathsf{D}_{\mathsf{sing}}(\alpha) = \left\{0, \frac{\pi}{n}, \frac{3\pi}{n}, ..., \frac{(2n-1)\pi}{n}, 2\pi\right\}$$

Точки 0 и 2π входят в нее как кратные, а точки вида $\frac{(2m-1)\pi}{n}$ – как критические (и, одновременно, тоже кратные).

Частным случаем такой кривой (при $n = 1$) будет кардиоида.

$\diamond$ **16.2.6** (спираль)**.** Рассмотрим следующие две функции:

$$\alpha(t) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{t}} \cos\frac{1}{t}, & t > 0 \\ 0, & t = 0 \end{cases}, \quad t \in [0,1]$$

и

$$\beta(t) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{t}} \sin\frac{1}{t}, & t > 0 \\ 0, & t = 0 \end{cases}, \quad t \in [0,1]$$

Теми же приемами, что и в примере 10.2.7 нетрудно показать, что обе они являются гладкими, причем их производные в точке 0 равны нулю:

$$\alpha'(0) = \beta'(0) = 0$$

Теперь рассмотрим множество L на плоскости $\mathbb{R}^2$, заданное системой уравнений

$$\begin{cases} x = \alpha(t) \\ y = \beta(t) \end{cases}, \quad t \in [0,1]$$

или, что то же самое, параметризованное гладким отображением $\gamma(t) = (\alpha(t), \beta(t))$, $t \in [0,1]$. Это отображение γ будет простой параметризацией для L, потому что оно инъективно, и его производная нигде не обращается в нуль, кроме точки $t = 0$. Действительно,

$$\begin{cases} \alpha'(t) = \frac{1}{t^2} e^{-\frac{1}{t}} \left(\sin\frac{1}{t} + \cos\frac{1}{t}\right) \\ \beta'(t) = \frac{1}{t^2} e^{-\frac{1}{t}} \left(\sin\frac{1}{t} - \cos\frac{1}{t}\right) \end{cases}, \qquad t \in (0,1]$$

$$\Downarrow$$

$$|\gamma'(t)|^2 = (\alpha'(t))^2 + (\beta'(t))^2 = \frac{2}{t^4} e^{-\frac{2}{t}} \neq 0.$$

Таким образом, L – кривая. Покажем, что она не регулярна (то есть не допускает регулярной параметризации).

Для этого сначала заметим, что сама параметризация γ не регулярна, потому что ее вектор скорости равен нулю в точке $t = 0$ (напомним, что $\alpha'(0) = \beta'(0) = 0$).

Далее, можно заметить, что, как ни параметризуй L, все равно в точке $x = y = 0$ вектор скорости этой параметризации будет равен нулю. Это следует из того, что в любой окрестности точки $x = y = 0$ единичный касательный вектор принимает все свои возможные значения. В частности, можно выбрать последовательность точек, сходящуюся к $(0,0)$, в которых единичный касательный вектор будет равен $\mathbf{n}(t_k) = (0,1)$, и тогда мы получим, что если бы существовала правильная параметризация γ_1, то в точке $(0,0)$ ее единичный касательный вектор

$$\mathbf{n}(t) = \frac{\gamma_1'(t)}{|\gamma_1'(t)|}$$

тоже должен был бы быть равен $\mathbf{n}(0) = (0,1)$. Но, с другой стороны, можно выбрать последовательность точек, сходящихся к $(0,0)$, в которых единичный касательный вектор будет равен $\mathbf{n}(t_k) = (1,0)$, и это означает, что $\mathbf{n}(0) = (1,0)$. В общем, у нас получается, что правильной параметризации здесь быть не может.

$\diamond$ **16.2.7. Лемниската Бернулли**, рассмотренная нами в примере 7.3.38, и описываемая уравнением в полярных координатах

$$\rho = a\sqrt{\cos 2\varphi}$$

является кривой, потому что ее можно параметризовать уравнениями

$$\begin{cases} x = a\cos\varphi \cdot \sqrt{\cos 2\varphi} \\ y = a\sin\varphi \cdot \sqrt{\cos 2\varphi} \end{cases},$$

$$\varphi \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right]$$

Очевидно, лемниската не будет простой кривой, потому что ее невозможно параметризовать так, чтобы склеивание происходило только на концах отрезка параметров – ее как ни параметризуй, в точке $(0,0)$ всегда будет "лишнее склеивание".

◇ **16.2.8. Астроида**, построенная нами в примере 7.3.31:

$$\begin{cases} x = a\cos^3 t \\ y = a\sin^3 t \end{cases}, \quad t \in [0, 2\pi]$$

также является параметризованной кривой. Ее сингулярная область параметров состоит из пяти точек

$$\mathsf{sing}(\alpha) = \left\{0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi\right\}$$

потому что именно в них отображение $\alpha(t) = (x(t), y(t))$ имеет нулевую производную:

$$\gamma'(t) = 0 \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} x' = -3a\cos^2 t \sin t = 0 \\ y' = 3a\sin^2 t \cos t = 0 \end{cases} \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; \left[\begin{matrix} \cos t = 0 \\ \sin t = 0 \end{matrix}\right] \;\Leftrightarrow\; t = \frac{\pi k}{2}$$

Поскольку в этих точках кривая терпит излом, ее невозможно параметризовать по-другому, чтобы число сингулярных точек уменьшилось, поэтому астроида также не будет регулярной кривой.

След подчиненной кривой в области параметров объемлющей кривой. В соответствии с определением с. 956, мы говорим, что кривая M *подчинена* кривой L, если M содержится в L:

$$M \subseteq L.$$

Если кривая M подчинена кривой L и $\alpha : I \to L$ – параметризация кривой L, то отображение $\alpha|_M$, определенное как ограничение отображения α на подмножество $\alpha^{-1}(M) \subseteq I$:

$$\alpha|_M = \alpha|_{\alpha^{-1}(M)} : \alpha^{-1}(M) \to M$$

мы будем называть *следом кривой* M в параметризации α.

Из общей теоремы о подчиненном полурегулярном отображении 15.3.14 следуют два свойства подчиненных кривых:

Теорема 16.2.1. *След $\alpha|_M$ подчиненной кривой $M \subseteq L$ в произвольной параметризации $\alpha : I \to L$ кривой L является параметризацией кривой M (а множество $\alpha^{-1}(M)$ – измеримым по Жордану компактом).*

Теорема 16.2.2. *Если M и N – две скалярные кривые, подчиненные скалярной кривой L,*

$$M \subseteq L, \qquad N \subseteq L,$$

то их объединение $M \cup N$ и пересечение $M \cap N$ тоже являются скалярными кривыми, подчиненными кривой L:

$$M \cup N \subseteq L, \qquad M \cap N \subseteq L.$$

Разбиение скалярной кривой. Пусть $\mathcal{T}$ обозначает конечное множество кривых. Говорят, что $\mathcal{T}$ является *разбиением кривой* L, и записывают это формулой

$$L \cong \bigsqcup_{T \in \mathcal{T}} T$$

если выполняются следующие эквивалентные условия:

(a) существует параметризация α кривой L и параметризации β_T кривых $T \in \mathcal{T}$ такие, что система $\{\beta_T;\, T \in \mathcal{T}\}$ является разбиением параметризованной кривой α

$$\alpha \cong \bigsqcup_{T \in \mathcal{T}} \beta_T$$

(b) для любой параметризации α кривой L и любых параметризаций β_T кривых $T \in \mathcal{T}$ система $\{\beta_T;\, T \in \mathcal{T}\}$ является разбиением параметризованной кривой α

$$\alpha \cong \bigsqcup_{T \in \mathcal{T}} \beta_T$$

Доказательство. Эквивалентность этих условий следует из теорем 16.1.4 и 16.1.6. □

Из теорем 16.1.5, 16.1.6, 16.1.7 и 16.1.8 следуют

Свойства разбиений скалярных кривых

1°. *Разбиения скалярной кривой эквивалентны разбиениям ее области параметров: если $\alpha : I \to L$ – произвольная параметризая скалярной кривой L, то*

(i) *для любого измеримого разбиения $I_1, ..., I_m$ области параметров I компактами ограничения*

$$\alpha_i = \alpha\big|_{I_i}$$

определяют скалярные кривые $L_1, ..., L_m$, образующие разбиение скалярной кривой L.

(ii) *и наоборот, для любого разбиения $L_1, ..., L_m$ скалярной кривой L множества $I_i = \{s \in I : \alpha(s) \in \mathbf{L}_i\}$, образуют измеримое разбиение множества I компактами.*

2°. *Если M – скалярная кривая, подчиненная скалярной кривой L,*

$$M \subseteq L$$

то найдется скалярная кривая N, образующая в паре с M разбиение кривой L:

$$L \cong M \sqcup N$$

3°. *Если $\mathcal{T}$ – разбиение кривой L,*

$$L \cong \bigsqcup_{T \in \mathcal{T}} T$$

то для любой подчиненной кривой $M \subseteq L$ система $\{T \cap M; T \in \mathcal{T}\}$ будет разбиением кривой M:

$$M \cong \bigsqcup_{T \in \mathcal{T}} T \cap M$$

В частности, если $\{S, T\}$ – разбиение кривой L,

$$L \cong S \sqcup T,$$

то для любой подчиненной кривой $M \subseteq L$ пара кривых $\{S \cap M, T \cap M\}$ образует разбиение кривой M,

$$M \cong (S \cap M) \sqcup (T \cap M) \tag{16.2.10}$$

(b) Длина кривой

Определение длины и формула для ее вычисления. Пусть L – кривая и $\alpha : I \to L$ – какая-нибудь ее параметризация. Чтобы определить длину L, рассмотрим систему $\mathsf{G}_k(I)$ двоичных внутренних клеток двоичной сетки[2] какого-нибудь ранга k для множества I. Каждая клетка $Q \subseteq \mathsf{G}_k(I)$ есть отрезок $[A_Q, B_Q]$ длиной $\frac{1}{2^k}$. Концы A_Q и B_Q этого отрезка под действием отображения $\alpha : I \to L$ превращаются в точки $\alpha(A_Q)$ и $\alpha(B_Q)$ на кривой L. Соединив их, мы получим отрезок $[\alpha(A_Q), \alpha(B_Q)]$, вписанный в кривую L. Длина l_Q отрезка $[\alpha(A_Q), \alpha(B_Q)]$ будет равна

$$l_Q = |\alpha(B_Q) - \alpha(A_Q)|$$

[2]Понятие двоичной сетки было введено на с.891.

Эту процедуру мы проделываем для всех клеток Q, и у нас получается система отрезков, называемая *двоичной ломаной ранга k, вписанной в L*:

Эту ломаную мы обозначаем α_k. Ее длина l_{α_k} считается равной сумме длин входящих в нее отрезков:

$$l_{\alpha_k} = \sum_{Q \in \mathsf{G}_k(I)} |\alpha(B_Q) - \alpha(A_Q)|$$

Допуская небрежность в речи, можно сказать, что при увеличении ранга k двоичной сетки соответствующая ломаная все более "приближается" к кривой L.

Теорема 16.2.3. *Для любой кривой L и всякой ее параметризации $\alpha : I \to L$ существует конечный предел длин двоичных ломаных, вписанных в L*

$$l = \lim_{k\to\infty} l_{\alpha_k}$$

Этот предел называется длиной *кривой L и обозначается* $\mathsf{Leng}(L)$. *Он не зависит от выбора параметризации $\alpha : I \to L$ и вычисляется по формуле*

$$\boxed{\mathsf{Leng}(L) = \int_I |\alpha'(s)| \,\mathsf{d}\, s} \tag{16.2.11}$$

Доказательство. 1. Докажем вначале, что

$$l_{\alpha_k} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \int_I |\alpha'(s)| \,\mathsf{d}\, s \tag{16.2.12}$$

Действительно, с одной стороны,

$$\left| l_{\alpha_k} - \int_{\mathsf{G}_k(I)} |\alpha'(s)| \,\mathsf{d}\, s \right| = \left| \sum_{Q \in \mathsf{G}_k(I)} \Big| \underbrace{\alpha(B_Q) - \alpha(A_Q)}_{\substack{\| \\ (16.3.44) \\ \| \\ \int_Q \alpha'(s)\,\mathsf{d}\,s}} \Big| - \sum_{Q \in \mathsf{G}_k(I)} \int_Q |\alpha'(s)| \,\mathsf{d}\, s \right| =$$

$$= \left| \sum_{Q \in \mathsf{G}_k(I)} \left| \int_Q \alpha'(s) \,\mathsf{d}\, s \right| - \sum_{Q \in \mathsf{G}_k(I)} \int_Q |\alpha'(s)| \,\mathsf{d}\, s \right| \leqslant \left| \sum_{Q \in \mathsf{G}_k(I)} \left(\left| \int_Q \alpha'(s) \,\mathsf{d}\, s \right| - \underbrace{\int_Q |\alpha'(s)| \,\mathsf{d}\, s}_{\substack{\| \\ |\alpha'(\xi_Q)| \cdot \mu(Q) \\ \| \\ \left|\int_Q \alpha'(\xi_Q)\,\mathsf{d}\,s\right| \\ \text{для некоторого } \xi_Q \in Q \\ \text{поскольку } Q \text{ - отрезок}}} \right) \right| \leqslant$$

$$\leqslant \left| \sum_{Q \in \mathsf{G}_k(I)} \left(\left| \int_Q \alpha'(s) \,\mathsf{d}\, s \right| - \left| \int_Q \alpha'(\xi_Q) \,\mathsf{d}\, s \right| \right) \right| \leqslant \sum_{Q \in \mathsf{G}_k(I)} \left| \int_Q \alpha'(s) \,\mathsf{d}\, s - \int_Q \alpha'(\xi_Q) \,\mathsf{d}\, s \right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{Q \in \mathsf{G}_k(I)} \int_Q |\alpha'(s) - \alpha'(\xi_Q)| \,\mathsf{d}\, s \leqslant \sum_{Q \in \mathsf{G}_k(I)} \max_{s,t \in I: |s-t| \leqslant \frac{1}{2^k}} |\alpha'(s) - \alpha'(t)| \cdot \mu(Q) =$$

$$= \max_{s,t \in I: |s-t| \leqslant \frac{1}{2^k}} |\alpha'(s) - \alpha'(t)| \cdot \sum_{Q \in \mathsf{G}_k(I)} \mu(Q) = \underbrace{\max_{s,t \in I: |s-t| \leqslant \frac{1}{2^k}} |\alpha'(s) - \alpha'(t)|}_{\substack{\downarrow \\ 0}} \cdot \underbrace{\mu\Big(\mathsf{G}_k(I) \Big)}_{\substack{\downarrow \\ \mu(I)}} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

А с другой –

$$\left|\int_{I\setminus \mathsf{G}_k(I)} |\alpha'(s)|\,\mathsf{d}\,s\right| \leqslant \underbrace{\max_{s\in I}|\alpha'(s)|}_{\substack{\|\\ \text{const}}}\cdot\underbrace{\mu\Big(I\setminus \mathsf{G}_k(I)\Big)}_{\substack{\downarrow\\ 0}} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

Вместе мы получаем

$$\left|l_{\alpha_k}-\int_I |\alpha'(s)|\,\mathsf{d}\,s\right| = \left|l_{\alpha_k}-\int_{\mathsf{G}_k(I)} |\alpha'(s)|\,\mathsf{d}\,s-\int_{I\setminus \mathsf{G}_k(I)} |\alpha'(s)|\,\mathsf{d}\,s\right|\leqslant$$

$$\leqslant \underbrace{\left|l_{\alpha_k}-\int_{\mathsf{G}_k(I)} |\alpha'(s)|\,\mathsf{d}\,s\right|}_{\substack{\downarrow\\ 0}}+\underbrace{\left|\int_{I\setminus \mathsf{G}_k(I)} |\alpha'(s)|\,\mathsf{d}\,s\right|}_{\substack{\downarrow\\ 0}} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

2. Теперь остается убедиться, что если $\alpha: I\to L$ и $\beta: J\to L$ – две параметризации кривой L, то

$$\int_I |\alpha'(s)|\ \mathsf{d}\,s = \int_J |\beta'(t)|\ \mathsf{d}\,t$$

Это делается с помощью теоремы 16.1.2. Пусть $\varphi: V\to U$ – описанная в ней функция перехода, а $D_k\subseteq U$ и $G_k\subseteq V$ – соответствующие измеримые компактные области. Поскольку на каждом G_k отображение $\varphi: G_k\to D_k$ будет гладкой заменой переменной, превращающей $\alpha|_{D_k}$ в $\beta|_{G_k}$,

$$\alpha\big(\varphi(t)\big)=\beta(t),\qquad t\in G_k,$$

получаем

$$\int_{G_k}|\beta'(t)|\,\mathsf{d}\,t=\int_{G_k}|(\alpha\circ\varphi)'(t)|\,\mathsf{d}\,t=\int_{G_k}|\alpha'(\varphi(t))|\cdot|\varphi'(t)|\,\mathsf{d}\,t=$$

$$=\left|\begin{matrix} s=\varphi(t)\\ s\in D_k\ \Leftrightarrow\ t\in G_k\end{matrix}\right| = \int_{D_k}|\alpha'(s)|\,\mathsf{d}\,s \tag{16.2.13}$$

Отсюда

$$\left|\int_I|\alpha'(s)|\,\mathsf{d}\,s-\int_J|\beta'(t)|\,\mathsf{d}\,t\right| = \left|\int_{I\setminus D_k}|\alpha'(s)|\,\mathsf{d}\,s+\int_{D_k}|\alpha'(s)|\,\mathsf{d}\,s-\left(\int_{J\setminus G_k}|\beta'(t)|\,\mathsf{d}\,t+\int_{G_k}|\beta'(t)|\,\mathsf{d}\,t\right)\right|\leqslant$$

$$\leqslant\left|\int_{I\setminus D_k}|\alpha'(s)|\,\mathsf{d}\,s\right|+\left|\int_{J\setminus G_k}|\beta'(t)|\,\mathsf{d}\,t\right|+\underbrace{\left|\int_{D_k}|\alpha'(s)|\,\mathsf{d}\,s-\int_{G_k}|\beta'(t)|\,\mathsf{d}\,t\right|}_{\substack{\|\\ 0,\\ \text{в силу (16.2.13)}}}\leqslant$$

$$\leqslant\max_{s\in I}|\alpha'(s)|\cdot\mu(I\setminus D_k)+\max_{t\in J}|\beta'(t)|\cdot\mu(J\setminus G_k)\underset{k\to\infty}{\longrightarrow}0$$

□

Длина вырожденной кривой.

Теорема 16.2.4. *Скалярная кривая L тогда и только тогда вырождена, когда она имеет нулевую длину:*

$$\forall\alpha: I\to L\quad \mu\big(\mathsf{D}(\alpha)\big)=0\quad\Longleftrightarrow\quad \mathsf{Leng}(L)=0$$

Доказательство. Если L вырождена, то есть имеет параметризацию $\alpha: I\to L$, в которой I – компакт нулевой меры, то по формуле (16.2.11) мы получаем

$$\mathsf{Leng}(L)=\int_I|\alpha'(s)|\,\mathsf{d}\,s\leqslant\max_{s\in I}|\alpha'(s)|\cdot\mu(I)=0.$$

Наоборот, если существует какая-то невырожденная параметризация $\alpha: I\to L$, то есть такая, у которой I – измеримый по Жордану компакт с ненулевой мерой, то внутренность этого компакта должна быть непустой $\mathsf{Int}\,I\neq\varnothing$, в силу свойств измеримости по Жордану,

$$\mu(\mathsf{Int}\,I)=(15.1.61)=\mu(I)>0.$$

А с другой стороны, множество точек $\mathsf{Int}\, I$, в которых производная α не обращается в нуль,

$$J = \{s \in \mathsf{Int}(I) : \ |\alpha'(s)| > 0\} = \{s \in \mathsf{Int}(I) : \ \alpha'(s) \neq 0\}$$

должно иметь полную меру в $\mathsf{Int}\, I$ (и в I), в силу условия стабильности почти всюду (16.1.1):

$$\mu(J) = \mu(\mathsf{Int}\, I) = \mu(I) > 0.$$

Поэтому

$$\mathsf{Leng}(L) = \int_I |\alpha'(s)|\, \mathsf{d}\, s \geqslant \underbrace{\int_J |\alpha'(s)|\, \mathsf{d}\, s}_{\substack{\text{интеграл от положительной} \\ \text{непрерывной функции } s \mapsto |\alpha'(s)| \\ \text{на измеримом открытом множестве } J}} > 0.$$

$\square$

Аддитивность длины.

Теорема 16.2.5. *Если $\mathcal{T}$ – разбиение кривой L, то сумма длин компонент $\mathcal{T}$ равна длине L:*

$$\mathsf{Leng}(L) = \sum_{\mathbf{T} \in \mathcal{T}} \mathsf{Leng}(T) \tag{16.2.14}$$

Доказательство. Пусть $\alpha : I \to L$ и $\beta_T : J_T \to T$ – параметризации кривых L и $T \in \mathcal{T}$, причем $\beta_T : J_T \to T$ является разбиением параметризованной кривой $\alpha : I \to L$. По теореме 16.1.6(iii), каждый след $\alpha_T = \alpha\big|_{\beta_T}$ эквивалентен β_T, система следов $\alpha_T = \alpha\big|_{\beta_T}$, $T \in \mathcal{T}$, образует разбиение кривой α, а их области определения $I_T = \mathsf{D}(\alpha_T) = \alpha^{-1}(T)$ – разбиение области I:

$$\alpha_T = \alpha\big|_{\beta_T} \cong \beta_T, \qquad \alpha \cong \bigsqcup_{T \in \mathcal{T}} \alpha\big|_{\beta_T}, \qquad I = \bigsqcup_{T \in \mathcal{T}} I_T.$$

Отсюда, прежде всего, по теореме 16.2.3 следует, что

$$\int_{I_T} |\alpha'(s)| \ \mathsf{d}\, s = \mathsf{Leng}(T), \qquad T \in \mathcal{T}$$

(потому что длина не зависит от выбора параметризации), и из этого уже мы получаем

$$\mathsf{Leng}(L) = \int_I |\alpha'(s)| \ \mathsf{d}\, s = \sum_{T \in \mathcal{T}} \int_{I_T} |\alpha'(s)| \ \mathsf{d}\, s = \sum_{T \in \mathcal{T}} \mathsf{Leng}(T)$$

$\square$

Длины стягивающихся кривых.

Теорема 16.2.6. *Если L – кривая и M_k – последовательность подчиненных кривых, стягивающихся к подчиненной вырожденной кривой M в L,*

$$M_1 \supseteq M_2 \supseteq ... \supseteq M_i \supseteq M_{i+1} \supseteq ... \supseteq \bigcap_{k=1}^{\infty} M_k = M, \qquad \mathsf{Leng}(M) = 0$$

то длины кривых M_k стремятся к нулю:

$$\mathsf{Leng}(M_k) \underset{k \to \infty}{\longrightarrow} 0$$

Доказательство. Пусть $\alpha : I \to L$ – какая-нибудь параметризация кривой L. По теореме 16.2.1, множества

$$I_{M_k} = \alpha^{-1}(M_k)$$

будут измеримыми по Жордану компактами. Очевидно, они образуют сужающуюся последовательность компактов, стягивающихся к компакту $I_M = \alpha^{-1}(M)$, мера которого равна нулю по теореме 16.2.4:

$$I_{M_1} \supseteq I_{M_2} \supseteq ... \supseteq I_{M_i} \supseteq I_{M_{i+1}} \supseteq ... \supseteq \bigcap_{k=1}^{\infty} I_{M_k} = I_M, \qquad \mu(I_M) = 0$$

Значит, по теореме 15.1.24, меры компактов I_{M_k} стремятся к нулю:

$$\mu(I_{M_k}) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

Отсюда

$$\mathsf{Leng}(M_k) = \int_{I_{M_k}} |\alpha'(t)| \,\mathsf{d}\, t \leqslant \max_{t\in I_{M_k}} |\alpha'(t)| \cdot \mu(I_{M_k}) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

□

Регулярная аппроксимация скалярной кривой. Будем говорить, что последовательность регулярных кривых M_k задает *регулярную аппроксимацию кривой* L, если все кривые M_k подчинены кривой L и длина M_k стремится к длине L:

$$\mathsf{Leng}(M_k) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \mathsf{Leng}(L)$$

Теорема 16.2.7. *Всякая кривая L обладает регулярной аппроксимацией.*

Доказательство. Выберем параметризацию $\alpha : I \to L$. Обозначим через D_k объединение внутренних двоичных клеток ранга k для множества $\mathsf{D}_{\mathsf{reg}}(\alpha)$. Для всякого k ограничение α_k кривой α на компакт D_k будет регулярной кривой, ориентированно подчиненной α. Поэтому ориентированная кривая M_k, задаваемая α_k, будет ориентированно подчинена ориентированной кривой L.

По теореме (15.1.26) об исчерпывании открытого множества полной меры, мера множеств $I \setminus \mathsf{Int}(D_k)$ стремится к нулю, поэтому

$$0 \leqslant \mu\Big(I \setminus D_k\Big) \leqslant \mu\Big(I \setminus \mathsf{Int}(D_k)\Big) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0 \quad\Longrightarrow\quad \mu\Big(I \setminus D_k\Big) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0 \quad\Longrightarrow$$
$$\mathsf{Leng}(L) - \mathsf{Leng}(M_k) = \int_I |\tilde\alpha'(s)| \,\mathsf{d}\, s - \int_{D_k} |\tilde\alpha'(s)| \,\mathsf{d}\, s = \int_{I\setminus D_k} |\tilde\alpha'(s)| \,\mathsf{d}\, s \leqslant \max_{s\in I} |\tilde\alpha'(s)| \cdot \mu\Big(I \setminus D_k\Big) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

□

Длина кривой, подчиненной регулярной кривой

Теорема 16.2.8. *Если L – регулярная кривая, то существует константа $C > 0$, такая что для любой подчиненной кривой $M \subseteq L$ справедливо неравенство*

$$\mathsf{Leng}(M) \leqslant C \cdot \mathsf{diam}(M)$$

Лемма 16.2.9. *Если L – регулярная кривая, и $\alpha : I \to L$ – ее регулярная параметризация, то существует константа $H > 0$, такая что для любой подчиненной кривой $M \subseteq L$ соответствующая ей область параметров в I*

$$I_M = \{s \in I : \ \alpha(s) \in M\}$$

удовлетворяет неравенству

$$\mathsf{diam}(I_M) \leqslant H \cdot \mathsf{diam}(M) \tag{16.2.15}$$

или, что равносильно, неравенству

$$\frac{\mathsf{diam}(I_M)}{\mathsf{diam}(M)} \leqslant H \qquad (M \subseteq L) \tag{16.2.16}$$

Доказательство. По теореме 14.2.8, найдется число $h > 0$ такое что

$$\forall x, y \in I \qquad h \cdot |x - y| \leqslant |\alpha(x) - \alpha(y)|$$

Поэтому

$$h \cdot \mathsf{diam}(I_M) = h \cdot \sup_{x,y\in I_M} |x - y| \leqslant \sup_{x,y\in I_M} |\alpha(x) - \alpha(y)| = \mathsf{diam}(M),$$

и остается положить $H = \frac{1}{h}$. □

Доказательство теоремы 16.2.8. Пусть $\alpha : I \to L$ – регулярная параметризация кривой L. Предположим, что теорема 16.2.8 неверна, то есть для любого $k \in \mathbb{N}$ найдется подчиненная кривая $M_k \subseteq L$ такая, что

$$\mathsf{Leng}(M_k) > k \cdot \mathsf{diam}(M_k)$$

Тогда у нас получается последовательность подчиненных кривых $M_k \subseteq L$, у которых отношение $\frac{\mathsf{diam}(I_{M_k})}{\mathsf{diam}(M_k)}$ бесконечно возрастает, что противоречит (16.2.16):

$$k \cdot \mathsf{diam}(M_k) < \mathsf{Leng}(M_k) = \int_{I_{M_k}} |\alpha'(s)| \, \mathsf{d}\, s \leqslant \max_{s \in I} |\alpha'(s)| \cdot \mu(I_{M_k}) \leqslant \max_{s \in I} |\alpha'(s)| \cdot \mathsf{diam}(I_{M_k})$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{\mathsf{diam}(I_{M_k})}{\mathsf{diam}(M_k)} > \frac{k}{\max_{s \in I} |\alpha'(s)|} \underset{k \to \infty}{\longrightarrow} \infty$$

$\square$

Доказательство формул длины главы 8. Напомним, что в главе 8 мы приводили три формулы для длины кривой, пообещав объяснить и доказать их потом. Сейчас наступил момент, когда мы можем выполнить свое обещание.

$\diamond$ **16.2.9.** *Доказательство формулы* (7.3.173) Прежде всего, в теореме 7.3.20 мы объявили, что если кривая L задана уравнением

$$y = f(x), \quad x \in [a; b]$$

(в котором f – гладкая функция на отрезке $[a; b]$), то ее длина равна

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + \big(f'(x)\big)^2} \, \mathsf{d}\, x \qquad (16.2.17)$$

Чтобы это доказать, нужно просто параметризовать кривую L отображением

$$\alpha : [a, b] \to L \quad | \quad \alpha(s) = \big(s, f(s)\big),$$

(которое, очевидно, инъективно, а производная его $\alpha'(s) = \big(1, f'(s)\big)$ нигде не равна нулю, и поэтому это будет регулярная параметризация L), и тогда мы получим

$$\mathsf{Leng}(L) = \int_I |\alpha'(s)| \, \mathsf{d}\, s = \int_a^b \sqrt{1 + \big(f'(s)\big)^2} \, \mathsf{d}\, s$$

$\diamond$ **16.2.10.** *Доказательство формулы* (7.3.174). Далее, в теореме 7.3.21 было сказано, что если кривая L задана параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \chi(t) \end{cases}, \quad t \in [\alpha; \beta]$$

причем $\varphi(t)$ и $\chi(t)$ – гладкие функции на $[a; b]$, то ее длина равна

$$l = \int_a^b \sqrt{\big(\varphi'(t)\big)^2 + \big(\chi'(t)\big)^2} \, \mathsf{d}\, t \qquad (16.2.18)$$

Здесь для доказательства нужно просто заметить, что такая параметризация – то же самое, что отображение

$$\alpha : [a, b] \to L \quad | \quad \alpha(s) = \big(\varphi(s), \chi(s)\big),$$

и поэтому

$$\mathsf{Leng}(L) = \int_I |\alpha'(s)| \, \mathsf{d}\, s = \int_a^b \sqrt{\big(\varphi'(s)\big)^2 + \big(\chi'(s)\big)^2} \, \mathsf{d}\, s$$

$\diamond$ **16.2.11.** *Доказательство формулы* (7.3.175). Наконец, в теореме 7.3.22 сообщалось, что если кривая L задана уравнением в полярных координатах,

$$\rho = R(\varphi), \quad \varphi \in [a; b]$$

(где $R(\varphi)$ – гладкая функция на $[a; b]$), то ее длина равна

$$l = \int_a^b \sqrt{R(\varphi)^2 + \big(R'(\varphi)\big)^2} \, \mathsf{d}\, \varphi \qquad (16.2.19)$$

Здесь для доказательства тоже нужно понять, что параметризация в полярных координатах равносильна заданию отображения

$$\alpha : [a, b] \to L \quad | \quad \alpha(\varphi) = \big(R(\varphi)\cos\varphi, R(\varphi)\sin\varphi\big),$$

и поэтому

$$\alpha'(\varphi) = \Big(-R(\varphi)\sin\varphi + R'(\varphi)\cos\varphi, \; R(\varphi)\cos\varphi + R'(\varphi)\sin\varphi \Big)$$

Модуль этой величины, после упрощений, выглядит так:

$$\alpha'(\varphi) = \sqrt{R(\varphi)^2 + R'(\varphi)^2}$$

поэтому

$$\mathsf{Leng}(L) = \int_I |\alpha'(\varphi)| \, \mathsf{d}\, \varphi = \int_a^b \sqrt{R(\varphi)^2 + R'(\varphi)^2} \, \mathsf{d}\, \varphi$$

Найдем длину какой-нибудь кривой из тех, что мы еще не вычисляли в § 3 главы 8.

◇ **16.2.12** (спираль). Вспомним спираль из примера 16.2.6, то есть кривую L, заданную уравнениями

$$\begin{cases} x = \alpha(t) \\ y = \beta(t) \end{cases}, \quad t \in [0,1]$$

где

$$\alpha(t) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{t}} \cos\frac{1}{t}, & t > 0 \\ 0, & t = 0 \end{cases}, \quad t \in [0,1]$$

и

$$\beta(t) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{t}} \sin\frac{1}{t}, & t > 0 \\ 0, & t = 0 \end{cases}, \quad t \in [0,1]$$

Как мы уже отмечали в примере 16.2.6, производные ее компонент описываются равенствами

$$\begin{cases} \alpha'(t) = \frac{1}{t^2} e^{-\frac{1}{t}} \left(\sin\frac{1}{t} + \cos\frac{1}{t}\right) \\ \beta'(t) = \frac{1}{t^2} e^{-\frac{1}{t}} \left(\sin\frac{1}{t} - \cos\frac{1}{t}\right) \end{cases}, \qquad t \in (0,1].$$

Поэтому

$$\mathsf{Leng}(L) = (16.2.18) = \int_0^1 \sqrt{\alpha'(t)^2 + \beta'(t)^2}\, \mathsf{d}\, t = \\ = \int_0^1 \frac{1}{t^2} e^{-\frac{1}{t}} \left\{ \left(\sin\frac{1}{t} + \cos\frac{1}{t}\right)^2 + \right. \\ \left. + \left(\sin\frac{1}{t} - \cos\frac{1}{t}\right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \mathsf{d}\, t = \int_0^1 \frac{1}{t^2} e^{-\frac{1}{t}} \cdot \sqrt{2}\, \mathsf{d}\, t = \\ = \sqrt{2} \cdot \int_0^1 e^{-\frac{1}{t}} \cdot \mathsf{d}\left(-\frac{1}{t}\right) = \sqrt{2} \cdot e^{-\frac{1}{t}}\Big|_0^1 = \frac{\sqrt{2}}{e}.$$

(c) Изотропный интеграл по кривой

Определение и формула для вычисления изотропного интеграла по кривой. Пусть L – кривая в евклидовом пространстве X и $f : L \to \mathbb{R}$ – непрерывная функция на ней. Рассмотрим произвольное разбиение $\mathcal{M}$ этой кривой

$$L = \bigsqcup_{M \in \mathcal{M}} M,$$

и на каждом элементе M этого разбиения выберем точку

$$x_M \in M$$

Тогда величина

$$\sum_{M \in \mathcal{M}} f(x_M) \cdot \mathsf{Leng}(M)$$

называется *интегральной суммой функции f на кривой L.*

Теорема 16.2.10. *При измельчении разбиения $\mathcal{M}$ интегральные суммы функции f на кривой L стремятся к некоему числу, обозначаемому*

$$\int_L f(x)\ \mathsf{Leng}(\mathsf{d}\, x) = \lim_{\substack{L = \bigsqcup_{M \in \mathcal{M}} M, \\ \mathsf{diam}(\mathcal{M}) \to 0}} \sum_{M \in \mathcal{M}} f(x_M) \cdot \mathsf{Leng}(M) \qquad (16.2.20)$$

и называемому (изотропным) интегралом функции f по кривой L. *Эта величина вычисляется по формуле*

$$\boxed{\int_L f(x)\ \mathsf{Leng}(\mathsf{d}\, x) = \int_I f\big(\alpha(t)\big) \cdot \Big|\alpha'(t)\Big|\ \mathsf{d}\, t} \qquad (16.2.21)$$

где $\alpha : I \to L$ – произвольная полурегулярная параметризация кривой L.

! **16.2.13.** Формулу (16.2.20) следует интерпретировать вот каким образом: для любой измельчающейся последовательности $\mathcal{M}^k$ разбиений кривой L,

$$L = \bigsqcup_{M \in \mathcal{M}^k} M, \qquad \mathsf{diam}(\mathcal{M}^k) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

и для любой системы выделенных точек

$$x_M^k \in M \in \mathcal{M}^k$$

справедливо соотношение

$$\int_L f(x) \cdot \mathsf{Leng}(\mathsf{d}\, x) \underset{\infty \leftarrow k}{\longleftarrow} \sum_{M \in \mathcal{M}^k} f(x_M^k) \cdot \mathsf{Leng}(M).$$

Доказательство. Покажем, что интегральные суммы стремятся к числу $\int_I f(\alpha(t)) \cdot \left|\alpha'(t)\right| \mathsf{d}\, t$. По теореме 16.1.5 всякому разбиению кривой L

$$L = \bigsqcup_{M\in\mathcal{M}} M,$$

соответствует измеримое разбиение множества I

$$I_M = \alpha^{-1}(M), \quad M \in \mathcal{M}$$

Отсюда получаем:

$$\left| \sum_{M\in\mathcal{M}} f(x_M) \cdot \underbrace{\mathsf{Leng}(M)}_{\substack{\| \\ (16.2.11) \\ \| \\ \int_{I_M} |\alpha'(t)|\, \mathsf{d}\, t}} - \underbrace{\int_I f(\alpha(t)) \cdot \left|\alpha'(t)\right| \mathsf{d}\, t}_{\text{разбиваем на интегралы по } I_M} \right| =$$

$$= \left| \sum_{M\in\mathcal{M}} f(x_M) \cdot \int_{I_M} \left|\alpha'(t)\right| \mathsf{d}\, t - \sum_{M\in\mathcal{M}} \int_{I_M} f(\alpha(t)) \cdot \left|\alpha'(t)\right| \mathsf{d}\, t \right| = \left(\begin{smallmatrix}\text{выносим за скобку} \\ \text{знак суммы}\end{smallmatrix}\right) =$$

$$= \left| \sum_{M\in\mathcal{M}} \left(\underbrace{f(x_M)}_{\substack{\text{вносим под} \\ \text{знак интеграла}}} \cdot \int_{I_M} \left|\alpha'(t)\right| \mathsf{d}\, t - \int_{I_M} f(\alpha(t)) \cdot \left|\alpha'(t)\right| \mathsf{d}\, t \right) \right| =$$

$$= \left| \sum_{M\in\mathcal{M}} \left(\int_{I_M} f(x_M) \cdot \left|\alpha'(t)\right| \mathsf{d}\, t - \int_{I_M} f(\alpha(t)) \cdot \left|\alpha'(t)\right| \mathsf{d}\, t \right) \right| = \left(\begin{smallmatrix}\text{выносим за скобку} \\ \text{знак интеграла}\end{smallmatrix}\right) =$$

$$= \left| \sum_{M\in\mathcal{M}} \int_{I_M} \left(f(x_M) \cdot \left|\alpha'(t)\right| - f(\alpha(t)) \cdot \left|\alpha'(t)\right| \right) \mathsf{d}\, t \right| = \left(\begin{smallmatrix}\text{выносим за скобку} \\ \left|\alpha'(t)\right|\end{smallmatrix}\right) =$$

$$= \left| \sum_{M\in\mathcal{M}} \int_{I_M} \Big(f(x_M) - f(\alpha(t)) \Big) \cdot \left|\alpha'(t)\right| \mathsf{d}\, t \right| \leqslant \left(\begin{smallmatrix}\text{применяем формулу} \\ \left|\sum a_i\right| \leqslant \sum \left|a_i\right|\end{smallmatrix}\right) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{M\in\mathcal{M}} \left| \int_{I_M} \Big(f(x_M) - f(\alpha(t)) \Big) \cdot \left|\alpha'(t)\right| \mathsf{d}\, t \right| \leqslant \left(\begin{smallmatrix}\text{применяем формулу} \\ \left|\int h(t)\,\mathsf{d}\, t\right| \leqslant \int \left|h(t)\right| \mathsf{d}\, t\end{smallmatrix}\right) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{M\in\mathcal{M}} \int_{I_M} \underbrace{\Big| f(x_M) - f(\alpha(t)) \Big|}_{\substack{\wedge\!\!\backslash \\ \sup\limits_{\substack{x,\, y \,\in\, L\, : \\ |x-y| \,\leqslant\, \mathsf{diam}(\mathcal{M})}} |f(x)-f(y)|}} \cdot \left|\alpha'(t)\right| \mathsf{d}\, t \leqslant \sum_{M\in\mathcal{M}} \int_{I_M} \underbrace{\sup_{\substack{x,\, y \,\in\, L\, : \\ |x-y| \,\leqslant\, \mathsf{diam}(\mathcal{M})}} \Big| f(x) - f(y) \Big|}_{\substack{\text{эта величина не зависит от } t \text{ и } M \\ \text{поэтому ее можно вынести} \\ \text{за знаки интеграла и суммы}}} \cdot \left|\alpha'(t)\right| \mathsf{d}\, t \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{\substack{x,\, y \,\in\, L\, : \\ |x-y| \,\leqslant\, \mathsf{diam}(\mathcal{M})}} \Big| f(x) - f(y) \Big| \cdot \underbrace{\sum_{M\in\mathcal{M}} \int_{I_M} \left|\alpha'(t)\right| \mathsf{d}\, t}_{\substack{\| \\ \int_I \left|\alpha'(t)\right| \mathsf{d}\, t \\ \| \\ \mathsf{Leng}(L)}} = \underbrace{\sup_{\substack{x,\, y \,\in\, L\, : \\ |x-y| \,\leqslant\, \mathsf{diam}(\mathcal{M})}} \Big| f(x) - f(y) \Big|}_{\substack{\downarrow \\ 0 \\ \text{при } \mathsf{diam}(\mathcal{M}) \to 0 \\ \text{поскольку } f \text{ равномерно} \\ \text{непрерывна на компакте } L \\ \text{(теорема Кантора)}}} \cdot \mathsf{Leng}(L) \underset{\mathsf{diam}(\mathcal{M})\to 0}{\longrightarrow} 0$$

□

◇ **16.2.14. Интеграл от постоянной функции по кривой** равен значению этой константы, помноженному на длину кривой:

$$\int_L C \cdot \mathsf{Leng}(\mathsf{d}\, x) = C \cdot \mathsf{Leng}(L) \qquad (16.2.22)$$

Действительно,

$$\int_L C \cdot \mathsf{Leng}(\mathsf{d}\, x) \underset{0 \leftarrow \mathsf{diam}(\mathcal{M})}{\longleftarrow} \sum_{M\in\mathcal{M}} C \cdot \mathsf{Leng}(M) =$$

$$= C \cdot \sum_{M\in\mathcal{M}} \mathsf{Leng}(M) = C \cdot \mathsf{Leng}(L).$$

Свойства изотропного интеграла по кривым

1^0. **Линейность:** *если f и g – две непрерывные функции на кривой L, то для любых чисел $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$*

$$\int_L \{\lambda \cdot f(x) + \mu \cdot g(x)\} \cdot \mathsf{Leng}(\mathsf{d}\, x) = \lambda \cdot \int_L f(x) \cdot \mathsf{Leng}(\mathsf{d}\, x) + \mu \cdot \int_L g(x) \cdot \mathsf{Leng}(\mathsf{d}\, x) \quad (16.2.23)$$

2^0. **Аддитивность:** *если $L = \bigsqcup_{M \in \mathcal{M}} M$ – разбиение кривой L, то для любой непрерывной функции f на L*

$$\int_L f(x)\ \mathsf{Leng}(\mathsf{d}\, x) = \sum_{M \in \mathcal{M}} \int_M f(x) \cdot \mathsf{Leng}(\mathsf{d}\, x) \quad (16.2.24)$$

3^0. **Оценка через скалярную длину кривой:** *если f – непрерывная функция на кривой L, то*

$$\left| \int_L f(x)\ \mathsf{Leng}(\mathsf{d}\, x) \right| \leqslant \max_{x \in L} \Big| f(x) \Big| \cdot \mathsf{Leng}(L) \quad (16.2.25)$$

4^0. **Монотонность:** *если f и g – непрерывные функции на кривой L, причем*

$$f(x) \leqslant g(x), \qquad x \in L,$$

то

$$\int_L f(x)\ \mathsf{Leng}(\mathsf{d}\, x) = \int_L g(x)\ \mathsf{Leng}(\mathsf{d}\, x) \quad (16.2.26)$$

5^0. **Теорема о среднем:** *если f – непрерывная функция на связной кривой L, то для некоторой точки $\xi \in L$ справедливо равенство*

$$\int_L f(x)\ \mathsf{Leng}(\mathsf{d}\, x) = f(\xi) \cdot \mathsf{Leng}(L) \quad (16.2.27)$$

Доказательство. 1. Для разбиений $\mathcal{M}$ кривой L получаем:

$$\int_L \{\lambda \cdot f(x) + \mu \cdot g(x)\}\, \mathsf{Leng}(\mathsf{d}\, x) \underset{0 \leftarrow \mathsf{diam}\, \mathcal{M}}{\longleftarrow} \sum_{M \in \mathcal{M}} \{\lambda \cdot f(x_M) + \mu \cdot g(x_M)\}\, \mathsf{Leng}(M) =$$
$$= \lambda \cdot \sum_{M \in \mathcal{M}} f(x_M)\, \mathsf{Leng}(M) + \mu \cdot \sum_{M \in \mathcal{M}} g(x_M)\, \mathsf{Leng}(M) \underset{\mathsf{diam}\, \mathcal{M} \to 0}{\longrightarrow}$$
$$\underset{\mathsf{diam}\, \mathcal{M} \to 0}{\longrightarrow} \lambda \cdot \int_L f(x)\, \mathsf{Leng}(\mathsf{d}\, x) + \mu \cdot \int_L g(x)\, \mathsf{Leng}(\mathsf{d}\, x)$$

2. Формулу (16.2.24) удобно доказать для частного случая, когда разбиение состоит из двух кривых, а затем она переносится на общий случай по индукции. Пусть

$$L \cong M \sqcup N.$$

Если $\mathcal{M}$ – разбиение кривой M, а $\mathcal{N}$ – разбиение кривой N, то объединение $\mathcal{M} \cup \mathcal{N}$ будет разбиением кривой L. Поэтому

$$\int_L f(x)\, \mathsf{Leng}(\mathsf{d}\, x) \underset{0 \leftarrow \mathsf{diam}(\mathcal{M} \cup \mathcal{N})}{\longleftarrow} \sum_{M' \in \mathcal{M}} f(x_{M'})\, \mathsf{Leng}(M') + \sum_{N' \in \mathcal{N}} f(x_{N'})\, \mathsf{Leng}(N') \underset{\mathsf{diam}(\mathcal{M} \cup \mathcal{N}) \to 0}{\longrightarrow}$$
$$\underset{\mathsf{diam}(\mathcal{M} \cup \mathcal{N}) \to 0}{\longrightarrow} \int_M f(x)\, \mathsf{Leng}(\mathsf{d}\, x) + \int_N f(x)\, \mathsf{Leng}(\mathsf{d}\, x).$$

3. Для разбиений $\mathcal{M}$ кривой L получаем:

$$\left| \int_L f(x)\, \mathsf{Leng}(\mathsf{d}\, x) \right| \underset{0 \leftarrow \mathsf{diam}\, \mathcal{M}}{\longleftarrow} \left| \sum_{M \in \mathcal{M}_n} f\big(x_M\big)\, \mathsf{Leng}(M) \right| \leqslant \sum_{M \in \mathcal{M}_n} \big| f\big(x_M\big)\, \mathsf{Leng}(M) \big| =$$
$$= \sum_{M \in \mathcal{M}_n} \big| f\big(x_M\big) \big| \cdot \mathsf{Leng}(M) \leqslant \sum_{M \in \mathcal{M}_n} \max_{x \in L} |f(x)| \cdot \mathsf{Leng}(M) =$$

$$= \max_{x\in L} |f(x)| \cdot \sum_{M\in\mathcal{M}} \mathsf{Leng}(M) = \max_{x\in L} |f(x)| \cdot \mathsf{Leng}(L)$$

4. Для разбиений $\mathcal{M}$ кривой L получаем:

$$\int_L f(x)\ \mathsf{Leng}(\mathsf{d}\,x) \underset{0\leftarrow \mathsf{diam}\,\mathcal{M}}{\longleftarrow} \sum_{M\in\mathcal{M}_n} f\big(x_M\big)\,\mathsf{Leng}(M) \leqslant \sum_{M\in\mathcal{M}_n} g\big(x_M\big)\,\mathsf{Leng}(M) \underset{\mathsf{diam}\,\mathcal{M}\to 0}{\longrightarrow} \int_L g(x)\ \mathsf{Leng}(\mathsf{d}\,x)$$

5. Пусть f – непрерывная функция на связной кривой L. Обозначим

$$m = \min_{x\in L} f(x), \qquad M = \max_{x\in L} f(x).$$

Тогда

$$m \leqslant f(x) \leqslant M, \qquad x\in L$$

$$\Downarrow$$

$$m\cdot \mathsf{Leng}(L) = \int_L m\ \mathsf{Leng}(\mathsf{d}\,x) \leqslant \int_L f(x)\ \mathsf{Leng}(\mathsf{d}\,x) \leqslant \int_L M\ \mathsf{Leng}(\mathsf{d}\,x) = M\cdot \mathsf{Leng}(L)$$

$$\Downarrow$$

$$m \leqslant \frac{1}{\mathsf{Leng}(L)} \cdot \int_L f(x)\ \mathsf{Leng}(\mathsf{d}\,x) \leqslant M$$

Поскольку L – связное множество, по теореме 14.2.3 его образ $f(L)$ под действием непрерывного отображения f тоже является связным множеством. С другой стороны, по теореме 14.2.2, $f(L)$ – компакт в $\mathbb{R}$. Значит, это отрезок:

$$f(L) = [m, M].$$

Число $\frac{1}{\mathsf{Leng}(L)} \cdot \int_L f(x)\ \mathsf{Leng}(\mathsf{d}\,x)$ лежит в этом отрезке, значит, найдется точка $\xi \in L$ такая, что

$$f(\xi) = \frac{1}{\mathsf{Leng}(L)} \cdot \int_L f(x)\ \mathsf{Leng}(\mathsf{d}\,x).$$

$\square$

Изотропный интеграл, как функционал на кривых. Ниже нам понадобится следующее определение.

- Условимся говорить, что *последовательность скалярных кривых L_i в X сходится к точке* $x\in X$, если расстояние от L_i до x стремится к нулю:

$$\rho(L_i, x) = \max_{y\in L_i} |y-x| \underset{i\to\infty}{\longrightarrow} 0. \tag{16.2.28}$$

  Это изображается соотношением

$$L_i \underset{i\to\infty}{\longrightarrow} x.$$

Пусть U – открытое множество в X и f – непрерывная функция на U. Для произвольной кривой $L\subset U$ обозначив

$$F(L) = \int_L f(x)\cdot \mathsf{Leng}(\mathsf{d}\,x),$$

мы получим отображение $L \mapsto F(L)$, которое каждой кривой $L\subset U$ ставит в соответствие число $F(L)$. Отметим следующие свойства такого отображения:

(IIС-1) **Аддитивность по скалярным кривым:** *если кривые M и N образуют разбиение кривой L*

$$L \cong M \sqcup N,$$

то

$$F(L) = F(M) + F(N)$$

(IIC-2) **Изотропность:** *для всякой точки $x \in U$ существует число $A \in \mathbb{R}$ такое, что справедливо соотношение*

$$F(L) = A \cdot \mathsf{Leng}(L) + \underset{L \to x}{\mathbf{o}}\big(\mathsf{Leng}(L)\big) \tag{16.2.29}$$

или, что эквивалентно, соотношение

$$\frac{F(L)}{\mathsf{Leng}(L)} \underset{\mathsf{Leng}(L)\to 0}{\longrightarrow} A, \tag{16.2.30}$$

Их надо понимать так: для любой последовательности L_i кривых, сходящихся к x

$$L_i \underset{i\to\infty}{\longrightarrow} x$$

справедливо соотношение

$$F(L_i) = A \cdot \mathsf{Leng}(L_i) + \underset{i \to \infty}{\mathbf{o}}\big(\mathsf{Leng}(L_i)\big) \tag{16.2.31}$$

и, эквивалентно,

$$\frac{F(L_i)}{\mathsf{Leng}(L_i)} \underset{i\to\infty}{\longrightarrow} A. \tag{16.2.32}$$

Доказательство. Утверждение **(IIC-1)** – просто переформулировка свойства аддитивности изотропного интеграла по кривым (формула (16.2.24)), поэтому неочевидным здесь будет только утверждение **(IIC-2)**. Для точки $x \in U$ положим $A = f(x)$. Тогда для любой последовательности кривых L_i, сходящейся к x, мы получим

$$\frac{1}{\mathsf{Leng}(L_i)} \cdot \Big|F(L_i) - \underbrace{A \cdot \mathsf{Leng}(L_i)}_{\substack{\parallel\ (16.2.22) \\ \int_{L_i} A \cdot \mathsf{Leng}(\mathsf{d}\, y)}}\Big| = \frac{1}{\mathsf{Leng}(L_i)} \cdot \left| \int_{L_i} f(y)\, \mathsf{Leng}(\mathsf{d}\, y) - \int_{L_i} A \cdot \mathsf{Leng}(\mathsf{d}\, y) \right| =$$

$$= \frac{1}{\mathsf{Leng}(L_i)} \cdot \left| \int_{L_i} \Big(f(y) - A\Big)\, \mathsf{Leng}(\mathsf{d}\, y) \right| \leqslant (16.2.25) \leqslant \frac{1}{\mathsf{Leng}(L_i)} \cdot \max_{y \in L_i} \Big|f(y) - A\Big| \cdot \mathsf{Leng}(L_i) =$$

$$= \max_{y\in L_i} |f(y) - A| = \max_{y \in L_i} |f(y) - f(x)| \underset{i\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

(последнее соотношение следует из того, что $f : U \to \mathbb{R}$ – непрерывная функция). Это доказывает (16.2.32). □

- Условия **(IIC-1)** и **(IIC-2)** называются *аксиомами изотропного интеграла по кривым.* Как оказывается, они полностью определяют изотропные интегралы, как функционалы от кривых (как раньше аксиомы **(I-1)** и **(I-2)** определяли интегралы в евклидовом пространстве в соответствие с теоремой 15.2.7):

Теорема 16.2.11. *Пусть U – открытое множество в X и пусть каждой кривой $L \subset U$ поставлено в соответствие число $F(L)$ так, что функционал $L \mapsto F(L)$ удовлетворяет условиям* **(IIC-1)** *и* **(IIC-2)**. *Тогда существует и единственна непрерывная функция $f : U \to \mathbb{R}$ такая, что*

$$F(L) = \int_L f(x) \cdot \mathsf{Leng}(\mathsf{d}\, x). \tag{16.2.33}$$

для любой скалярной кривой $L \subseteq U$.

- Функция $f : U \to \mathbb{R}$ называется *изотропной плотностью* функционала по кривым F.

Доказательство. По аксиоме **(IIC-2)**, всякой точке $x \in U$ соответствует некое число $A \in \mathbb{R}$, удовлетворяющее соотношению (16.2.29). Положим $f(x) = A$ и убедимся, что эта функция обладает нужными свойствами.

1. Заметим, что из соотношения (16.2.30) сразу следует, что функция $f : U \to \mathbb{R}$ единственна.

2. Покажем далее, что функция $f : U \to \mathbb{R}$ непрерывна. Возьмем какую-нибудь последовательность точек

$$x_i \underset{i\to\infty}{\longrightarrow} x$$

Для каждого i справедливо соотношение

$$F(L) = f(x_i) \cdot \mathsf{Leng}(L) + \underset{L\to x_i}{\mathbf{o}}\big(\mathsf{Leng}(L)\big).$$

Из него следует, что можно выбрать какую-нибудь кривую L_i со свойствами

$$\rho(L_i, \{x_i\}) < \frac{1}{i}, \qquad \left|\frac{F(L_i)}{\mathsf{Leng}(L_i)} - f(x_i)\right| \leqslant \frac{1}{i}$$

Тогда мы получаем, что кривые L_i стремятся к x, потому что

$$\rho(L_i, \{x\}) \leqslant \rho(L_i, \{x_i\}) + \rho(\{x_i\}, \{x\}) < \frac{1}{i} + \rho(x_i, x) \underset{i\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

и значит, соответствующая последовательность средних функционала F по длине должна стремиться к $f(x)$:

$$\frac{F(L_i)}{\mathsf{Leng}(L_i)} \underset{i\to\infty}{\longrightarrow} f(x)$$

Отсюда уже следует, что $f(x_i)$ стремится к $f(x)$:

$$|f(x_i) - f(x)| \leqslant \left|f(x_i) - \frac{F(L_i)}{\mathsf{Leng}(L_i)}\right| + \left|\frac{F(L_i)}{\mathsf{Leng}(L_i)} - f(x)\right| \leqslant \frac{1}{i} + \left|\frac{F(L_i)}{\mathsf{Leng}(L_i)} - f(x)\right| \underset{i\to\infty}{\longrightarrow} 0 \qquad (16.2.34)$$

3. Покажем, что для всякого компакта $K \subseteq U$ выполняется соотношение

$$\sup_{\substack{x,\,M\,:\\ x\in M\subseteq K,\\ \mathsf{diam}(M)\leqslant\varepsilon}} \left|\frac{F(M)}{\mathsf{Leng}(M)} - f(x)\right| \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} 0 \qquad (16.2.35)$$

Это удобно делать от противного: предположим, что (16.2.35) не выполняется, то есть существует компакт $K \subseteq U$ и последовательность кривых $M_i \subseteq K$ такая, что

$$\mathsf{diam}(M_i) \underset{i\to\infty}{\longrightarrow} 0, \qquad \sup_{x\in M_i} \left|\frac{F(M_i)}{\mathsf{Leng}(M_i)} - f(x)\right| \underset{i\to\infty}{\not\longrightarrow} 0$$

Переходя к подпоследовательности, можно считать, что последовательность $\sup_{x\in M_i}\left|\frac{F(M_i)}{\mathsf{Leng}(M_i)} - f(x)\right|$ отделена от нуля неким числом $\delta > 0$:

$$\mathsf{diam}(M_i) \underset{i\to\infty}{\longrightarrow} 0, \qquad \sup_{x\in M_i} \left|\frac{F(M_i)}{\mathsf{Leng}(M_i)} - f(x)\right| > \delta > 0$$

Теперь можно выбрать последовательность $x_i \in M_i$ такую, что

$$\left|\frac{F(M_i)}{\mathsf{Leng}(M_i)} - f(x_i)\right| > \delta > 0 \qquad (16.2.36)$$

Последовательность x_i лежит в компакте K, поэтому она содержит сходящуюся подпоследовательность. Перейдя к ней, и переобозначив индексы, мы можем считать что сама последовательность x_i стремится к какому-то пределу $x \in K$:

$$x_i \underset{i\to\infty}{\longrightarrow} x$$

При этом, $x_i \in M_i$, а диаметры M_i стремятся к нулю, значит,

$$M_i \underset{i\to\infty}{\longrightarrow} \{x\}$$

откуда в силу (16.2.31),

$$\frac{F(M_i)}{\mathsf{Leng}(M_i)} \underset{i\to\infty}{\longrightarrow} f(x) \qquad (16.2.37)$$

и значит,

$$\frac{F(M_i)}{\mathsf{Leng}(M_i)} - f(x_i) = \underbrace{\frac{F(M_i)}{\mathsf{Leng}(M_i)} - f(x)}_{\substack{\downarrow\ (17.2.47)\\ 0}} + \underbrace{f(x) - f(x_i)}_{\substack{\downarrow\ (16.2.34)\\ 0}} \underset{i\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

Мы получаем противоречие с (17.2.46).

4. Покажем, что интегральные суммы функции f на кривой L стремятся к числу $F(L)$. Возьмем число $\varepsilon > 0$ и рассмотрим произвольное разбиение кривой L

$$L = \bigsqcup_{M\in\mathcal{M}} M.$$

с диаметром $\mathsf{diam}(\mathcal{M}) \leqslant \varepsilon$. Для любых $x_M \in M$ мы получим:

$$\left|F(L) - \sum_{M\in\mathcal{M}} f(x_M)\cdot \mathsf{Leng}(M)\right| = \left|\sum_{M\in\mathcal{M}} F(M) - \sum_{M\in\mathcal{M}} f(x_M)\cdot \mathsf{Leng}(M)\right| \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{M\in\mathcal{M}} \left|F(M) - f(x_M)\cdot \mathsf{Leng}(M)\right| = \sum_{M\in\mathcal{M}} \left|\frac{F(M)}{\mathsf{Leng}(M)} - f(x_M)\right|\cdot \mathsf{Leng}(M) \leqslant$$
$$\leqslant \sup_{\substack{x\in M\\ M\subseteq L:\\ \mathsf{diam}(M)\leqslant\varepsilon}} \left|\frac{F(M)}{\mathsf{Leng}(M)} - f(x)\right|\cdot \sum_{M\in\mathcal{M}} \mathsf{Leng}(M) = \underbrace{\sup_{\substack{x\in M\\ M\subseteq L:\\ \mathsf{diam}(M)\leqslant\varepsilon}} \left|\frac{F(M)}{\mathsf{Leng}(M)} - f(x)\right|}_{\substack{\downarrow\ (16.2.35)\\ 0}}\cdot \mathsf{Leng}(L) \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} 0$$

□

§ 3 Ориентированная кривая, ее векторная длина и анизотропный интеграл по кривой

(a) Ориентированная кривая

Определение ориентированной кривой. Напомним, что выше на с.983 мы определили понятие ориентированно эквивалентных параметризованных кривых: $\alpha \equiv \beta$ означает, что кривые α и β имеют одинаковый носитель, и функция перехода $\varphi : \beta \rightarrowtail \alpha$ имеет всюду положительную производную.

Теорема 16.3.1. *Все возможные параметризации данной кривой L в евклидовом пространстве X делятся на классы $\{P_i\}$*[3]*, в каждом из которых любые два представителя ориентированно эквивалентны:*

1) *если $\alpha, \beta \in P_i$, то $\alpha \equiv \beta$,*
2) *если $\alpha \in P_i \neq P_j \ni \beta$ то $\alpha \not\equiv \beta$.*

Выбрать какую-нибудь ориентацию на кривой L – значит выбрать какой-нибудь из классов P_i, и объявить, что все параметризации, лежащие в этом классе имеют ориентацию, согласованную с выбранной ориентацией нашей кривой L. Это все равно, что выбрать какую-нибудь параметризацию α кривой L, и сказать, что все параметризации β, одинаково ориентированные с α считаются согласованными с ориентацией L.

- Кривая L в евклидовом пространстве X с выбранной на ней ориентацией называется *ориентированной кривой.* Мы будем обозначать ориентированные кривые жирными буквами, $\mathbf{L}$, $\mathbf{M}$, и т.д., чтобы не путать их с неориентированными. Если параметризация $\alpha : I \to L$ принадлежит выбранному классу P_i (то есть имеет ориентацию, согласованную с выбранной) ориентаций на L, то мы записываем это так:

$$\alpha : I \to \mathbf{L}$$

- Если $\mathbf{L}$ – ориентированная кривая, то та же кривая L без ориентации называется *носителем* ориентированной кривой $\mathbf{L}$ и обозначается $|\mathbf{L}|$:

$$L = |\mathbf{L}|\,.$$

[3] Из-за того, что в нашем определении кривая L не обязана быть связной, таких классов $\{P_i\}$ может быть больше, чем два.

◇ **16.3.1. Ориентированный отрезок.** Напомним что в примере 16.1.1 нами была определена параметризованная кривая, называемая параметризованным отрезком, это отображение вида

$$\alpha : [0,1] \to X, \quad \alpha(s) = x + s \cdot (y - x),$$

где $x, y \in X$ – произвольные точки. Оно параметризует множество в X, в геометрии называемое отрезком с концами $\{x, y\}$. Это множество, рассматриваемое как ориентированная кривая в X с ориентацией, определяемой параметризацией α, мы называем *ориентированным отрезком* и обозначаем $[x, y]$. Понятно, что при перестановке вершин отрезка его ориентация меняется на противоположную

$$[x, y] = \ominus[y, x]$$

Ориентированно подчиненная кривая. Мы говорим, что ориентированная кривая $\mathbf{M}$ *ориентированно подчинена* ориентированной кривой $\mathbf{L}$, если выполняются следующие эквивалентные условия:

(a) существует параметризация $\alpha : I \to \mathbf{L}$, согласованная с ориентацией $\mathbf{L}$, такая что след $\alpha|_M : \alpha^{-1}(\mathbf{M}) \to \mathbf{M}$ кривой $\mathbf{M}$ в α будет параметризацией $\mathbf{M}$, согласованной с ориентацией $\mathbf{M}$;

(b) для любой параметризации $\alpha : I \to \mathbf{L}$, согласованной с ориентацией $\mathbf{L}$, след $\alpha|_M : \alpha^{-1}(\mathbf{M}) \to \mathbf{M}$ кривой $\mathbf{M}$ в α будет параметризацией $\mathbf{M}$, согласованной с ориентацией $\mathbf{M}$.

Из общей теоремы о подчиненном полурегулярном отображении 15.3.14 следует

Теорема 16.3.2. *Если* $\mathbf{M}$ *и* $\mathbf{N}$ *– две ориентированные кривые, ориентированно подчиненные кривой* $\mathbf{L}$*,*

$$\mathbf{M} \subseteqq \mathbf{L}, \qquad \mathbf{N} \subseteqq \mathbf{L},$$

то их объединение $\mathbf{M} \cup \mathbf{N}$ *и пересечение* $\mathbf{M} \cap \mathbf{N}$ *тоже являются ориентированными кривыми, ориентированно подчиненными кривой* $\mathbf{L}$*:*

$$\mathbf{M} \cup \mathbf{N} \subseteqq \mathbf{L}, \qquad \mathbf{M} \cap \mathbf{N} \subseteqq \mathbf{L}.$$

По аналогии с определением на с.995, мы говорим что последовательность ориентированных регулярных кривых $\mathbf{M}_k$ задает *регулярную аппроксимацию ориентированной кривой* $\mathbf{L}$*, согласованную с ориентацией* $\mathbf{L}$, если все кривые $\mathbf{M}_k$ ориентированно подчинены кривой $\mathbf{L}$, и длина $\mathbf{M}_k$ стремится к длине $\mathbf{L}$:

$$\mathsf{Leng}(\mathbf{M}_k) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \mathsf{Leng}(\mathbf{L})$$

Следующий факт доказывается в точности как теорема 16.2.7:

Теорема 16.3.3. *Всякая ориентированная кривая* $\mathbf{L}$ *обладает регулярной аппроксимацией, согласованной с ориентацией* $\mathbf{L}$.

Разбиение ориентированной кривой. Пусть $\mathcal{T}$ обозначает конечное множество ориентированных кривых. Говорят, что $\mathcal{T}$ является *разбиением ориентированной кривой* $\mathbf{L}$, и записывают это формулой

$$\mathbf{L} \equiv \bigsqcup_{\mathbf{T}\in\mathcal{T}} \mathbf{T}$$

если выполняются следующие эквивалентные условия:

(a) существует параметризация α кривой $\mathbf{L}$, согласованная с ориентацией $\mathbf{L}$, и параметризации $\beta_{\mathbf{T}}$ кривых $\mathbf{T} \in \mathcal{T}$, согласованные с ориентациями $\mathbf{T}$, такие, что система $\{\beta_{\mathbf{T}};\ \mathbf{T} \in \mathcal{T}\}$ является разбиением параметризованной кривой α

$$\alpha \equiv \bigsqcup_{\mathbf{T}\in\mathcal{T}} \beta_{\mathbf{T}}$$

(b) для любой параметризации α кривой $\mathbf{L}$, согласованной с ориентацией $\mathbf{L}$, и любых параметризаций $\beta_{\mathbf{T}}$ кривых $\mathbf{T} \in \mathcal{T}$, согласованных с ориентациями $\mathbf{T}$, система $\{\beta_{\mathbf{T}};\ \mathbf{T} \in \mathcal{T}\}$ является разбиением параметризованной кривой α

$$\alpha \equiv \bigsqcup_{\mathbf{T}\in\mathcal{T}} \beta_{\mathbf{T}}$$

Доказательство. Эквивалентность этих условий следует из теорем 16.1.4 и 16.1.6. □

Из теорем 16.1.5, 16.1.6, 16.1.7 и 16.1.8 следуют

Свойства разбиений ориентированных кривых

1°. *Разбиения ориентированной кривой эквивалентны разбиениям ее области параметров: если $\alpha : I \to \mathbf{L}$ – произвольная параметризая ориентированной кривой $\mathbf{L}$, согласованная с ее ориентацией, то*

- *(i) для любого измеримого разбиения $I_1, ..., I_m$ области параметров I компактами ограничения*

$$\alpha_i = \alpha\big|_{I_i}$$

определяют ориентированные кривые $\mathbf{L}_1, ..., \mathbf{L}_m$, образующие разбиение ориентированной кривой $\mathbf{L}$.

- *(ii) и наоборот, для любого разбиения $\mathbf{L}_1, ..., \mathbf{L}_m$ кривой $\mathbf{L}$ множества $I_i = \{s \in I : \alpha(s) \in \mathbf{L}_i\}$, образуют измеримое разбиение множества I компактами.*

2°. *Если $\mathbf{M}$ – ориентированная кривая, ориентированно подчиненная кривой $\mathbf{L}$,*

$$\mathbf{M} \subseteqq \mathbf{L}$$

то найдется ориентированная кривая $\mathbf{N}$, образующая в паре с $\mathbf{M}$ разбиение кривой $\mathbf{L}$:

$$\mathbf{L} \equiv \mathbf{M} \sqcup \mathbf{N}$$

3°. *Если $\mathcal{T}$ – разбиение ориентированной кривой $\mathbf{L}$,*

$$\mathbf{L} \equiv \bigsqcup_{\mathbf{T} \in \mathcal{T}} \mathbf{T}$$

то для любой ориентированно подчиненной кривой $\mathbf{M} \subseteqq \mathbf{L}$ система $\{\mathbf{T} \cap \mathbf{M}; \mathbf{T} \in \mathcal{T}\}$ будет разбиением кривой $\mathbf{M}$:

$$\mathbf{M} \equiv \bigsqcup_{\mathbf{T} \in \mathcal{T}} \mathbf{T} \cap \mathbf{M}$$

В частности, если $\{\mathbf{S}, \mathbf{T}\}$ – разбиение ориентированной кривой $\mathbf{L}$,

$$\mathbf{L} \equiv \mathbf{S} \sqcup \mathbf{T},$$

то для любой ориентированно подчиненной кривой $\mathbf{M} \subseteq \mathbf{L}$ пара кривых $\{\mathbf{S} \cap \mathbf{M}, \mathbf{T} \cap \mathbf{M}\}$ образует разбиение ориентированной кривой $\mathbf{M}$,

$$\mathbf{M} \equiv (\mathbf{S} \cap \mathbf{M}) \sqcup (\mathbf{T} \cap \mathbf{M}) \tag{16.3.38}$$

Измельчающиеся разбиения ориентированных кривых. Пусть $\mathcal{T}$ – разбиение ориентированной кривой $\mathbf{L}$:

$$\mathbf{L} \equiv \bigsqcup_{\mathbf{T} \in \mathcal{T}} \mathbf{T}$$

Диаметром разбиения $\mathcal{T}$ кривой $\mathbf{L}$ мы, как обычно, называем максимум диаметров элементов этого разбиения:

$$\mathsf{diam}(\mathcal{T}) := \max_{\mathbf{T} \in \mathcal{T}} \mathsf{diam}(\mathbf{T}) = \max_{\mathbf{T} \in \mathcal{T}} \sup_{x,y \in \mathsf{R}(\mathbf{T})} |x - y|$$

Последовательность $\mathcal{T}_k$ разбиений кривой $\mathbf{L}$

$$\mathbf{L} \equiv \bigsqcup_{\mathbf{T} \in \mathcal{T}_k} \mathbf{T}$$

называется *измельчающейся*, если диаметры этих разбиений стремятся к нулю

$$\mathsf{diam}(\mathcal{T}_k) \underset{k \to \infty}{\longrightarrow} 0.$$

Теорема 16.3.4. *Всякая ориентированная кривая $\mathbf{L}$ обладает измельчающейся последовательностью разбиений.*

Доказательство. Пусть $\alpha : I \to \mathbf{L}$ – параметризация кривой $\mathbf{L}$, согласованная с ее ориентацией. Построим аналог двоичной сетки в X, в котором след $Q\cap\mathbf{L}$ каждой клетки Q на кривой $\mathbf{L}$ является кривой, полчиненной $\mathbf{L}$ (что это возможно – неочевидный факт, потому что в каких-то случаях $Q\cap\mathbf{L}$ может быть множеством, прообраз которого при отображении $\alpha : I \to \mathbf{L}$ неизмерим по Жордану). Рассмотрим линейный функционал $f : X \to \mathbb{R}$, являющийся проекцией на первую координату:

$$f(x_1, ...x_n) = x_1.$$

Композиция $f \circ \alpha : I \to \mathbb{R}$ является гладким отображением. По теореме Сарда 15.3.9, множество критических значений этой функции имеет нулевую меру Жордана:

$$\mu\Big(\mathsf{CV}_D[f\circ\alpha]\Big) = 0.$$

Отсюда следует, что в любом интервале вида

$$\left(\frac{p}{2^k}, \frac{p+1}{2^k}\right)$$

найдется некритическое значение C_p^1 этой функции. Его прообраз при отображении f

$$\Pi_p = \{x \in X : \ f(x) = C_p^1\}$$

является (гипер)плоскостью, у которой прообраз при отображении α представляет собой некритическое множество уровня Z_p^1 функции $f\circ\alpha$, поэтому в силу примера 15.3.7, Z_p^1 – конечное множество, и, как следствие, у него мера Жордана будет нулевой:

$$\mu(Z_p^1) = 0. \tag{16.3.39}$$

Для всякого $p \in \mathbb{Z}$ зафиксируем такое число C_p^1 и соответствующую гиперплоскость Π_p^1. После этого рассмотрим в качестве f проекцию на вторую координату и для нее выберем соответствующую систему C_p^2 некритических значений и систему гиперплоскостей Π_p^2. Проделав это для всех координат $x_1, ..., x_n$, мы получим некое разбиение пространства X гиперплоскостями Π_p^i, $i = 1, ..., n$, $p \in \mathbb{Z}$, которую мы можем назвать *двоичной сеткой ранга k, трансверсальной кривой* $\mathbf{L}$. Такая двоичная сетка порождает разбиение X на прямоугольные параллелепипеды, которые мы называем *клетками.* Диаметр каждой такой клетки Q оценивается неравенством

$$\mathsf{diam}\, Q \leqslant \frac{2\sqrt{n}}{2^k} = \frac{\sqrt{n}}{2^{k-1}}. \tag{16.3.40}$$

При этом прообраз границы клетки Q при отображении α представляет собой объединение конечного семейства множеств вида Z_p^i, которые по построению имеют нулевую меру Жордана. Значит,

$$\mu\Big(\alpha^{-1}\big(\mathsf{Fr}(Q)\big)\Big) = 0.$$

Из включения (15.3.132)

$$\mathsf{Fr}\,\Big(\alpha^{-1}(Q)\Big) \subseteq \alpha^{-1}(\mathsf{Fr}\,Q) \cup \mathsf{D}_{\mathsf{sing}}(\alpha)$$

мы получаем, что граница множества $\alpha^{-1}(Q)$ также имеет нулевую меру:

$$\mu\Big(\mathsf{Fr}\,\alpha^{-1}(Q)\Big) \leqslant \mu\Big(\alpha^{-1}(\mathsf{Fr}\,Q)\Big) + \mu\Big(\mathsf{D}_{\mathsf{sing}}(\alpha)\Big) = 0 + 0 = 0.$$

Это означает, что $\alpha^{-1}(Q)$ является имеримым по Жордану множеством. С другой стороны, если P – какая-то другая клетка в этой сетке, то их пересечение лежит в какой-то плоскости Π_p^i

$$\alpha^{-1}(P) \cap \alpha^{-1}(Q) = \alpha^{-1}(P \cap Q) \subseteq \alpha^{-1}(\Pi_p^i) = Z_p^i,$$

и мера этого множества нулевая в силу формулы (16.3.39) (верной не только для индекса 1, но и любого другого). В итоге мы получаем, что множества вида $\alpha^{-1}(Q)$, где Q пробегает множество клеток данной сетки, образуют измеримое разбиение компакта $\mathsf{R}(\alpha)$. Отсюда следует, что кривые

$$\alpha\Big(\alpha^{-1}(Q)\Big) = Q \cap \mathbf{L}$$

образуют разбиение кривой $\mathbf{L}$. Из (16.3.40) следует, что при $k \to \infty$ диаметр такого разбиения стремится к нулю.

$$\mathsf{diam}(\mathcal{T}_k) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

$\square$

Дробностью разбиения $\mathcal{T}$ кривой $\mathbf{L}$ мы называем максимум длин элементов этого разбиения:

$$\mathsf{frac}(\mathcal{T}) := \max_{\mathbf{T}\in\mathcal{T}} \mathsf{Leng}(\mathbf{T})$$

Теорема 16.3.5. *У всякой измельчающейся последовательности $\mathcal{T}_k$ разбиений ориентированной кривой $\mathbf{L}$ дробность стремится к нулю:*

$$\mathsf{frac}(\mathcal{T}_k) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Доказательство. 1. Рассмотрим сначала случай, когда $\mathbf{L}$ – регулярная кривая. Пусть $\alpha : I \to \mathbf{L}$ ее регулярная параметризация. Поскольку α – биективное и непрерывное отображение компактов, по теореме 14.2.4 оно является вложением, и значит, обратное отображение $\alpha^{-1} : \mathbf{L} \to I$ тоже будет непрерывно. Значит, оно равномерно непрерывно:

$$\sup_{x,y\in\mathbf{L}:\ |x-y|<\delta} |\alpha^{-1}(x) - \alpha^{-1}(y)| \underset{\delta\to 0}{\longrightarrow} 0.$$

Отсюда следует, что диаметры разбиений $\mathcal{J}_k$ области параметров I, соответствующих разбиениям $\mathcal{T}_k$ кривой $\mathbf{L}$, тоже страмятся к нулю:

$$\mathsf{diam}\, \mathcal{I}_k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Как следствие,

$$\mathsf{frac}(\mathcal{T}_k) = \max_{\mathbf{T}\in\mathcal{T}_k} \mathsf{Leng}(\mathbf{T}) = \max_{J\in\mathcal{J}_k} \int_J |\alpha'(t)|\, \mathsf{d}\, t \leqslant \max_{t\in I} |\alpha'(t)| \cdot \max_{J\in\mathcal{J}_k} \mu(J) \leqslant$$
$$\leqslant \max_{t\in I} |\alpha'(t)| \cdot \max_{J\in\mathcal{J}_k} \mathsf{diam}(J) = \max_{t\in I} |\alpha'(t)| \cdot \mathsf{diam}\, \mathcal{J}_k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

2. Зафиксируем $\varepsilon > 0$. С помощью теоремы 16.3.3 подберем регулярную ориентированную кривую $\mathbf{M}$, ориентированно подчиненную кривой $\mathbf{L}$, так чтобы их длины отличались на величину, меньшую $\frac{\varepsilon}{2}$. Обозначим через $\mathbf{N}$ дополнение кривой $\mathbf{M}$ в кривой $\mathbf{L}$ (свойство 2°. на с.1005):

$$\mathbf{L} \equiv \mathbf{M} \sqcup \mathbf{N}.$$

Тогда

$$\mathsf{Leng}(\mathbf{N}) = \mathsf{Leng}(\mathbf{L}) - \mathsf{Leng}(\mathbf{M}) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Каждое разбиение $\mathcal{T}_k$ оставляет на кривой $\mathbf{M}$ след в виде системы подчиненных кривых, которые образуют разбиение кривой $\mathbf{M}$ (свойство 3° на с.1005)

$$\mathbf{M} \equiv \bigsqcup_{\mathbf{T}\in\mathcal{T}_k} \mathbf{T}\cap\mathbf{M}.$$

При этом, понятное дело, мы получаем измельчающуюся последовательность разбиений. Поскольку $\mathbf{M}$ – регулярная кривая, по уже доказанному, дробность этих разбиений стремится к нулю:

$$\mathsf{frac}\{\mathbf{T}\cap\mathbf{M};\ \mathbf{T}\in\mathcal{T}_k\} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Поэтому для почти всех k должно быть справедливо неравенство

$$\mathsf{frac}\{\mathbf{T}\cap\mathbf{M};\ \mathbf{T}\in\mathcal{T}_k\} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Для таких k и произвольного $\mathbf{T}\in\mathcal{T}_k$ мы теперь получим:

$$\mathsf{Leng}(\mathbf{T}) = \mathsf{Leng}(\mathbf{T}\cap\mathbf{M}) + \mathsf{Leng}(\mathbf{T}\cap\mathbf{N}) \leqslant \mathsf{Leng}(\mathbf{T}\cap\mathbf{M}) + \mathsf{Leng}(\mathbf{N}) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Это верно для почти всех k при заранее фиксированном произвольном $\varepsilon > 0$. Значит,

$$\mathsf{frac}(\mathcal{T}_k) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

□

(b) Векторная длина ориентированной кривой

Определение векторной длины и ее свойства. *Векторная длина* ориентированной кривой $\mathbf{L}$ определяется как (векторный) интеграл от производной какой-нибудь параметризации $\alpha : I \to \mathbf{L}$ кривой $\mathbf{L}$, согласованной с ее ориентацией:

$$\overrightarrow{\mathsf{Leng}}(\mathbf{L}) = \int_I \alpha'(s) \ \mathsf{d}\, s \tag{16.3.41}$$

Теорема 16.3.6. *Векторная длина $\overrightarrow{\mathsf{Leng}}(\mathbf{L})$ ориентированной кривой $\mathbf{L}$ не зависит от выбора ее параметризации $\alpha : I \to \mathbf{L}$, согласованной с ее ориентацией, и по модулю не превосходит длины этой кривой:*

$$|\overrightarrow{\mathsf{Leng}}(\mathbf{L})| \leqslant \mathsf{Leng}(\mathbf{L}) \tag{16.3.42}$$

Доказательство. Формула (16.3.42) очевидна:

$$|\overrightarrow{\mathsf{Leng}}(\mathbf{L})| = \left| \int_I \alpha'(s) \ \mathsf{d}\, s \right| \leqslant \int_I |\alpha'(s)| \ \mathsf{d}\, s = \mathsf{Leng}(\mathbf{L})$$

В остальном здесь почти дословно повторяется доказательство второй половины теоремы 16.2.3 – различие состоит только в том, что в нужных местах $|\alpha'(s)|$ и $|\beta'(t)|$ заменяются на $\alpha'(s)$ и $\beta'(t)$ (и, чтобы в цепочке (16.2.13) $\varphi'(t)$ можно было заменить на $|\varphi'(t)|$, становится важным требование, чтобы α и β были одинаково ориентированы).

Вот как выглядит это на деле. Пусть $\alpha : I \to \mathbf{L}$ и $\beta : J \to \mathbf{L}$ – две параметризации, согласованные с ориентацией $\mathbf{L}$. Их функция перехода $\varphi : V \to U$ (из теоремы об эквивалентных кривых 16.1.2) будет иметь всюду положительную производную:

$$\varphi'(t) > 0, \qquad t \in V.$$

Нужно показать, что

$$\int_I \alpha'(s) \ \mathsf{d}\, s = \int_J \beta'(t) \ \mathsf{d}\, t$$

Пусть $D_k \subseteq U$ и $G_k \subseteq V$ – измеримые компактные области, как в теореме 16.1.2. На каждом G_k отображение $\varphi : G_k \to D_k$ будет гладкой заменой переменной, превращающей $\alpha|_{D_k}$ в $\beta|_{G_k}$,

$$\alpha\big(\varphi(t)\big) = \beta(t), \qquad t \in G_k$$

Поэтому

$$\begin{gathered}\int_{G_k} \beta'(t)\, \mathsf{d}\, t = \int_{G_k} (\alpha \circ \varphi)'(t)\, \mathsf{d}\, t = \int_{G_k} \alpha'(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\, \mathsf{d}\, t = \\ = \int_{G_k} \alpha'(\varphi(t)) \cdot |\varphi'(t)|\, \mathsf{d}\, t = \left| \begin{matrix} s = \varphi(t) \\ s \in D_k \ \Leftrightarrow \ t \in G_k \end{matrix} \right| = \int_{D_k} \alpha'(s)\, \mathsf{d}\, s\end{gathered} \tag{16.3.43}$$

Теперь получаем:

$$\begin{aligned}&\left| \int_I \alpha'(s)\, \mathsf{d}\, s - \int_J \beta'(t)\, \mathsf{d}\, t \right| = \left| \int_{I \setminus D_k} \alpha'(s)\, \mathsf{d}\, s + \int_{D_k} \alpha'(s)\, \mathsf{d}\, s - \left(\int_{J \setminus G_k} \beta'(t)\, \mathsf{d}\, t + \int_{G_k} \beta'(t)\, \mathsf{d}\, t \right) \right| \leqslant \\ &\leqslant \left| \int_{I \setminus D_k} \alpha'(s)\, \mathsf{d}\, s \right| + \left| \int_{J \setminus G_k} \beta'(t)\, \mathsf{d}\, t \right| + \Bigg| \underbrace{\int_{D_k} \alpha'(s)\, \mathsf{d}\, s - \int_{G_k} \beta'(t)\, \mathsf{d}\, t}_{\substack{\parallel \\ 0, \\ \text{в силу (16.3.43)}}} \Bigg| \leqslant \\ &\leqslant \max_{s \in I} |\alpha'(s)| \cdot \mu(I \setminus D_k) + \max_{t \in J} |\beta'(t)| \cdot \mu(J \setminus G_k) \underset{k \to \infty}{\longrightarrow} 0\end{aligned}$$

$\square$

◇ **16.3.2. Формула Ньютона-Лейбница для простой кривой.** Пусть $\mathbf{L}$ – простая ориентированная кривая, и $\alpha : [a,b] \to \mathbf{L}$ – какая-нибудь ее параметризация, согласованная с ее ориентацией. Тогда векторная длина $\mathbf{L}$ совпадает с ее вектором перемещения (то есть с вектором, соединяющим начало $\alpha(a)$ и конец $\alpha(b)$):

$$\overrightarrow{\mathsf{Leng}}(L) = \int_{[a,b]} \alpha'(t)\,\mathsf{d}\,t = \alpha(b) - \alpha(a) \qquad (16.3.44)$$

Это следует из обычной формулы Ньютона-Лейбница для одномерных интегралов:

$$\int_{[a,b]} \alpha'(t)\,\mathsf{d}\,t = \\ = \left(\int_{[a,b]} \alpha_1'(t)\,\mathsf{d}\,t, ..., \int_{[a,b]} \alpha_m'(t)\,\mathsf{d}\,t\right) = \\ = \Big(\alpha_1(b) - \alpha_1(a), ..., \alpha_m(b) - \alpha_m(a)\Big) = \\ = \Big(\alpha_1(b), ..., \alpha_m(b)\Big) - \Big(\alpha_1(a), ..., \alpha_m(a)\Big) = \\ = \alpha(b) - \alpha(a)$$

Аддитивность векторной длины.

Теорема 16.3.7. *Если $\mathcal{T}$ – разбиение ориентированной кривой $\mathbf{L}$, то сумма векторных длин компонент $\mathcal{T}$ равна векторной длине $\mathbf{L}$:*

$$\overrightarrow{\mathsf{Leng}}(\mathbf{L}) = \sum_{\mathbf{T}\in\mathcal{T}} \overrightarrow{\mathsf{Leng}}(\mathbf{T}) \qquad (16.3.45)$$

Доказательство. Пусть $\alpha : I \to \mathbf{L}$ и $\beta_{\mathbf{T}} : J_{\mathbf{T}} \to \mathbf{T}$ – параметризации кривых $\mathbf{L}$ и $\mathbf{T} \in \mathcal{T}$, согласованные с их ориентациями, причем $\beta_{\mathbf{T}} : J_{\mathbf{T}} \to \mathbf{T}$ является разбиением параметризованной кривой $\alpha : I \to \mathbf{L}$. По теореме 16.1.6(iii), каждый след $\alpha_{\mathbf{T}} = \alpha\big|_{\beta_{\mathbf{T}}}$ ориентированно эквивалентен $\beta_{\mathbf{T}}$, система следов $\alpha_{\mathbf{T}} = \alpha\big|_{\beta_{\mathbf{T}}}$, $\mathbf{T} \in \mathcal{T}$, образует разбиение кривой α, а их области определения $I_{\mathbf{T}} = \mathsf{D}(\alpha_{\mathbf{T}}) = \alpha^{-1}(T)$ – разбиение области I.

$$\alpha_{\mathbf{T}} = \alpha\big|_{\beta_{\mathbf{T}}} \equiv \beta_{\mathbf{T}}, \qquad \alpha \equiv \bigsqcup_{\mathbf{T}\in\mathcal{T}} \alpha\big|_{\beta_{\mathbf{T}}}, \qquad I = \bigsqcup_{\mathbf{T}\in\mathcal{T}} I_{\mathbf{T}}.$$

Отсюда, прежде всего, по теореме 16.3.6 следует, что

$$\int_{I_{\mathbf{T}}} \alpha'(s)\ \mathsf{d}\,s = \overrightarrow{\mathsf{Leng}}(T), \qquad \mathbf{T} \in \mathcal{T}$$

(потому что векторная длина не зависит от выбора параметризации), и из этого уже мы получаем

$$\overrightarrow{\mathsf{Leng}}(L) = \int_I \alpha'(s)\ \mathsf{d}\,s = \sum_{\mathbf{T}\in\mathcal{T}} \int_{I_{\mathbf{T}}} \alpha'(s)\ \mathsf{d}\,s = \sum_{\mathbf{T}\in\mathcal{T}} \overrightarrow{\mathsf{Leng}}(T)$$

□

Связь между скалярной и векторной длиной.

Теорема 16.3.8 (о связи скалярной и векторной длины). *Скалярная длина всякой ориентированной кривой $\mathbf{L}$ всегда мажорирует сумму модулей векторных длин элементов ее произвольного разбиения*

$$\mathbf{L} = \bigsqcup_{T\in\mathcal{T}} \mathbf{T} \quad \Longrightarrow \quad \sum_{\mathbf{T}\in\mathcal{T}} |\overrightarrow{\mathsf{Leng}}(\mathbf{T})| \leqslant \mathsf{Leng}(\mathbf{L}) \qquad (16.3.46)$$

и является пределом этих сумм при измельчении этого разбиения:

$$\boxed{\mathsf{Leng}(\mathbf{L}) = \lim_{\substack{\mathbf{L} = \bigsqcup_{\mathbf{T}\in\mathcal{T}} \mathbf{T} \\ \mathsf{diam}(\mathcal{T}) \to 0}} \sum_{\mathbf{T}\in\mathcal{T}} |\overrightarrow{\mathsf{Leng}}(\mathbf{T})|} \qquad (16.3.47)$$

– то есть для любой измельчающейся последовательности $\mathcal{T}_k$ разбиений кривой $\mathbf{L}$

$$\mathbf{L} = \bigsqcup_{T\in\mathcal{T}_k} \mathbf{T}, \qquad \mathsf{diam}(\mathcal{T}_k) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

справедливо соотношение

$$\sum_{\mathbf{T}\in\mathcal{T}_k} |\overrightarrow{\mathsf{Leng}}(\mathbf{T})| \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \mathsf{Leng}(\mathbf{L})$$

Доказательство. Заметим сразу, что формула (16.3.46) следует из (16.3.42) и (16.2.14):

$$\sum_{\mathbf{T}\in\mathcal{T}} |\overrightarrow{\mathsf{Leng}}(\mathbf{T})| \leqslant (16.3.42) \leqslant \sum_{\mathbf{T}\in\mathcal{T}} \mathsf{Leng}(\mathbf{T}) = (16.2.14) = \mathsf{Leng}(\mathbf{L})$$

1. Пусть $\mathbf{L}$ – регулярная ориентированная кривая, $\mathcal{T}$ – ее разбиение и $\alpha : I \to L$ – ее регулярная параметризация, согласованная с ориентацией. По свойству 1° разбиений кривых (с.1005), система компактов

$$I_{\mathbf{T}},\ \mathbf{T}\in\mathcal{T}$$

образует измеримое разбиение компакта I. По лемме 16.2.9, существует константа $H > 0$, такая что для любой подчиненной кривой $M \subseteq L$ соответствующая ей область параметров

$$I_M = \{s \in I : \ \alpha(s) \in M\}$$

удовлетворяет неравенству (16.2.15):

$$\mathsf{diam}(I_M) \leqslant H \cdot \mathsf{diam}(M) \tag{16.3.48}$$

Кроме того, поскольку производная $\alpha' : I \to X$ – продолжается до гладкого отображения в окрестности компакта I, по теореме 15.3.1 она должно удовлетворять условию Липшица:

$$|\alpha'(s) - \alpha'(t)| \leqslant C \cdot |s - t|, \qquad s, t \in I \tag{16.3.49}$$

Отсюда получаем:

$$0 \leqslant \mathsf{Leng}(\mathbf{L}) - \sum_{\mathbf{T}\in\mathcal{T}} |\overrightarrow{\mathsf{Leng}}(\mathbf{T})| = \sum_{\mathbf{T}\in\mathcal{T}} \mathsf{Leng}(\mathbf{T}) - \sum_{\mathbf{T}\in\mathcal{T}} |\overrightarrow{\mathsf{Leng}}(\mathbf{T})| = \sum_{\mathbf{T}\in\mathcal{T}} \Big(\mathsf{Leng}(\mathbf{T}) - |\overrightarrow{\mathsf{Leng}}(\mathbf{T})|\Big) =$$
$$= \sum_{\mathbf{T}\in\mathcal{T}} \left(\int_{I_{\mathbf{T}}} |\alpha'(s)|\,\mathsf{d}\,s - \left| \int_{I_{\mathbf{T}}} \alpha'(s)\,\mathsf{d}\,s \right| \right) \leqslant (15.2.114) \leqslant \sum_{\mathbf{T}\in\mathcal{T}} 2C \cdot \mathsf{diam}(I_{\mathbf{T}}) \cdot \mu(I_{\mathbf{T}}) \leqslant (17.3.58) \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{\mathbf{T}\in\mathcal{T}} 2C \cdot H \cdot \mathsf{diam}(\mathbf{T}) \cdot \mu(I_{\mathbf{T}}) \leqslant 2C \cdot H \cdot \max_{\mathbf{T}\in\mathcal{T}} \mathsf{diam}(\mathbf{T}) \cdot \sum_{\mathbf{T}\in\mathcal{T}} \mu(I_{\mathbf{T}}) = 2C \cdot H \cdot \mathsf{diam}(\mathcal{T}) \cdot \mu(I)$$

Числа C, H и $\mu(I)$ не зависят от разбиения $\mathcal{T}$, поэтому, если диаметр $\mathcal{T}$ стремится к нулю, разность $\mathsf{Leng}(\mathbf{L}) - \sum_{\mathbf{T}\in\mathcal{T}} |\overrightarrow{\mathsf{Leng}}(\mathbf{T})|$ тоже уменьшается:

$$0 \leqslant \mathsf{Leng}(\mathbf{L}) - \sum_{\mathbf{T}\in\mathcal{T}} |\overrightarrow{\mathsf{Leng}}(\mathbf{T})| \leqslant 2C \cdot H \cdot \mathsf{diam}(\mathcal{T}) \cdot \mu(I) \underset{\mathsf{diam}(\mathcal{T})\to 0}{\longrightarrow} 0$$

2. Пусть теперь $\mathbf{L}$ – произвольная ориентированная кривая. Зафиксируем $\varepsilon > 0$ и, пользуясь теоремой 16.2.7, выберем регулярную ориентированную кривую $\mathbf{M}$, подчиненную $\mathbf{L}$, так, чтобы длина $\mathbf{M}$ отличалась от длины $\mathbf{L}$ меньше чем на $\frac{\varepsilon}{3}$:

$$\mathbf{M} \subseteq \mathbf{L}, \qquad \mathsf{Leng}(\mathbf{L}) - \mathsf{Leng}(\mathbf{M}) < \frac{\varepsilon}{3}$$

По свойству 2° на с.1005, найдется ориентированная кривая $\mathbf{N}$, подчиненная $\mathbf{L}$, образующая с $\mathbf{M}$ разбиение $\mathbf{L}$:

$$\mathbf{L} \equiv \mathbf{M} \sqcup \mathbf{N}.$$

Ее длина должна, конечно, удовлетворять неравенству

$$\mathsf{Leng}(\mathbf{N}) = \mathsf{Leng}(\mathbf{L}) - \mathsf{Leng}(\mathbf{M}) < \frac{\varepsilon}{3} \tag{16.3.50}$$

Если $\mathbf{T}$ – какая-нибудь еще ориентированная кривая, подчиненная $\mathbf{L}$, то в силу (16.3.38) и (16.3.45) получаем:

$$\mathbf{T} \equiv (\mathbf{T}\cap\mathbf{M}) \sqcup (\mathbf{T}\cap\mathbf{N})$$
$$\Downarrow$$
$$\overrightarrow{\mathsf{Leng}}(\mathbf{T}) = \overrightarrow{\mathsf{Leng}}(\mathbf{T}\cap\mathbf{M}) + \overrightarrow{\mathsf{Leng}}(\mathbf{T}\cap\mathbf{N})$$
$$\Downarrow$$

$$\left| \left| \overrightarrow{\mathsf{Leng}}(\mathbf{T}) \right| - \left| \overrightarrow{\mathsf{Leng}}(\mathbf{T} \cap \mathbf{M}) \right| \right| \leqslant \left| \overrightarrow{\mathsf{Leng}}(\mathbf{T}) - \overrightarrow{\mathsf{Leng}}(\mathbf{T} \cap \mathbf{M}) \right| = \left| \overrightarrow{\mathsf{Leng}}(\mathbf{T} \cap \mathbf{N}) \right| \qquad (16.3.51)$$

Если теперь $\mathcal{T}_k$ – измельчающаяся последовательность разбиений кривой $\mathbf{L}$ (существующая по теореме 16.3.4),

$$\mathbf{L} = \bigsqcup_{T \in \mathcal{T}_k} \mathbf{T}, \qquad \mathsf{diam}(\mathcal{T}_k) \underset{k \to \infty}{\longrightarrow} 0$$

то, по свойству 3° на с.1005, система

$$\mathcal{T}_k \cap \mathbf{M} = \{\mathbf{T} \cap \mathbf{M};\ \mathbf{T} \in \mathcal{T}_k\}$$

будет измельчающейся последовательностью разбиений кривой $\mathbf{M}$,

$$\mathbf{M} = \bigsqcup_{T \in \mathcal{T}_k} \mathbf{T} \cap \mathbf{M}, \qquad \mathsf{diam}(\mathcal{T}_k \cap \mathbf{M}) \underset{k \to \infty}{\longrightarrow} 0$$

и, поскольку мы уже доказали формулу (16.3.47) для регулярных кривых, для $\mathbf{M}$ выполняется соотношение

$$\sum_{\mathbf{T} \in \mathcal{T}_k} \left| \overrightarrow{\mathsf{Leng}}(\mathbf{T} \cap \mathbf{M}) \right| \underset{k \to \infty}{\longrightarrow} \mathsf{Leng}(\mathbf{M}).$$

В частности, для почти всех $k \in \mathbb{N}$ должно быть справедливо неравенство

$$\mathsf{Leng}(\mathbf{M}) - \sum_{\mathbf{T} \in \mathcal{T}_k} \left| \overrightarrow{\mathsf{Leng}}(\mathbf{T} \cap \mathbf{M}) \right| < \frac{\varepsilon}{3} \qquad (16.3.52)$$

Для таких k мы теперь получаем:

$$\left| \mathsf{Leng}(\mathbf{L}) - \sum_{\mathbf{T} \in \mathcal{T}_k} |\overrightarrow{\mathsf{Leng}}(\mathbf{T})| \right| = \left| \underbrace{\mathsf{Leng}(\mathbf{N}) + \mathsf{Leng}(\mathbf{M})}_{\substack{\| \\ \mathsf{Leng}(\mathbf{L})}} - \sum_{\mathbf{T} \in \mathcal{T}_k} |\overrightarrow{\mathsf{Leng}}(\mathbf{T})| \right| =$$

$$= \left| \mathsf{Leng}(\mathbf{N}) + \mathsf{Leng}(\mathbf{M}) \underbrace{- \sum_{\mathbf{T} \in \mathcal{T}_k} |\overrightarrow{\mathsf{Leng}}(\mathbf{T} \cap \mathbf{M})| + \sum_{\mathbf{T} \in \mathcal{T}_k} |\overrightarrow{\mathsf{Leng}}(\mathbf{T} \cap \mathbf{M})|}_{\substack{\| \\ 0}} - \sum_{\mathbf{T} \in \mathcal{T}_k} |\overrightarrow{\mathsf{Leng}}(\mathbf{T})| \right| \leqslant$$

$$\leqslant \underbrace{\mathsf{Leng}(\mathbf{N})}_{\substack{\wedge \\ \frac{\varepsilon}{3}}} + \underbrace{\left| \mathsf{Leng}(\mathbf{M}) - \sum_{\mathbf{T} \in \mathcal{T}_k} |\overrightarrow{\mathsf{Leng}}(\mathbf{T} \cap \mathbf{M})| \right|}_{\substack{\wedge \\ \frac{\varepsilon}{3}}} + \left| \sum_{\mathbf{T} \in \mathcal{T}_k} \Big(|\overrightarrow{\mathsf{Leng}}(\mathbf{T} \cap \mathbf{M})| - |\overrightarrow{\mathsf{Leng}}(\mathbf{T})| \Big) \right| <$$

$$< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \sum_{\mathbf{T} \in \mathcal{T}_k} \Big| |\overrightarrow{\mathsf{Leng}}(\mathbf{T} \cap \mathbf{M})| - |\overrightarrow{\mathsf{Leng}}(\mathbf{T})| \Big| \leqslant (17.3.61) \leqslant \frac{2\varepsilon}{3} + \sum_{\mathbf{T} \in \mathcal{T}_k} \left| \overrightarrow{\mathsf{Leng}}(\underbrace{\mathbf{T} \cap \mathbf{N}}_{\substack{\uparrow \\ \text{эти кривые образуют} \\ \text{разбиение для } \mathbf{N}}}) \right| \leqslant$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{уже доказанная} \\ \text{формула (16.3.46)}}}{\leqslant} \frac{2\varepsilon}{3} + \mathsf{Leng}(\mathbf{N}) < \frac{2\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

$\square$

(c) Анизотропный интеграл по кривой и дифференциальные формы степени 1

В физике довольно часто приходится иметь дело с функционалами от кривых, зависящими от ориентации этих кривых. Примером такого функционала является работа силы вдоль кривой – этот функционал каждой простой кривой $\mathbf{L}$ в пространстве ставит в соответствие работу $A(\mathbf{L})$ некоторой силы (например, силы тяжести) по перемещению некоего тела вдоль этой кривой из начальной точки в конечную. Если направление движения вдоль кривой $\mathbf{L}$ поменять на противоположное (то есть заменить кривую $\mathbf{L}$ на противоположно ориентированную кривую, которую мы обозначим $\ominus\mathbf{L}$), то, естественно, работа силы поменяет знак на противоположный:

$$A(\ominus\mathbf{L}) = -A(\mathbf{L})$$

Такие функционалы на кривых, конечно, не могут описываться аксиомами изотропного интегрирования по кривым **(IIC-1)** и **(IIC-2)** на с.1001. Ниже на с.1016 мы увидим, что аксиомы **(IIC-1)** и **(IIC-2)** можно заменить на очень похожие аксиомы **(UIC-1)** и **(UIC-2)**, и тогда полученные условия будут описывать функционалы, зависящие от ориентации кривых, и которые поэтому можно назвать анизотропными интегралами по кривым.

Дифференциальные формы степени 1.

- Пусть U – открытое множество в евклидовом пространстве X. *Дифференциальной формой степени 1* на U называется произвольное непрерывное отображение $\omega : U \to \Lambda_1(X)$ (со значениями в пространстве внешних форм степени 1 на X).

Теорема 16.3.9 (о строении дифференциальных форм степени 1)**.** *Пусть $e = (e_1, ..., e_n)$ – базис и U – открытое множество в X. Тогда всякое семейство $\zeta_1, ..., \zeta_n$ непрерывных функций на U определяет дифференциальную форму степени 1 на U по формуле*

$$\omega(x)[p] = \sum_{i=1}^{n} \zeta_i(x) \cdot \left[\frac{p}{e}\right]^i, \qquad x \in U,\, p \in X. \tag{16.3.53}$$

И наоборот, всякой дифференциальной форме ω степени 1 на U соответствует единственная система непрерывных функций $\zeta_1, ..., \zeta_n$ на U, для которой выполняется тождество (16.3.53).

Доказательство. Здесь используется теорема 12.2.8 о строении линейных функционалов на X. □

◇ **16.3.3. Постоянная форма степени 1.** Всякая линейная форма $\eta : X \to \mathbb{R}$ на X определяет дифференциальную форму ω степени 1 на произвольном открытом множестве $U \subseteq X$ по формуле

$$\omega(x)[p] = \eta[p].$$

◇ **16.3.4. Точная форма степени 1.** Если f – гладкая функция на открытом множестве $U \subseteq X$, то ее дифференциал $\mathsf{d}\, f$ является, как легко заметить, дифференциальной формой степени 1 на U:

$$\omega(x)[p] = \mathsf{d}\, f(x)[p] = \lim_{t\to 0} \frac{f(x+tp) - f(x)}{t}.$$

Такая форма называется точной, и в разложении по базису (16.3.53) она принимает вид

$$\omega(x)[p] = \mathsf{d}\, f(x)[p] = \sum_{i=1}^{n} \nabla_i f(x) \cdot \left[\frac{p}{e}\right]^i$$

(то есть, коэффициенты ζ_i совпадают с частными производными функции f).

Интеграл от дифференциальной формы степени 1 вдоль кривой. Пусть нам дана некая дифференциальная форма $(x, p) \mapsto \omega(x)[p]$ степени 1 на открытом множестве $U \subseteq X$, и пусть $\mathbf{L}$ – ориентированная кривая в U. Рассмотрим произвольное ее разбиение $\mathcal{M}$

$$\mathbf{L} = \bigsqcup_{\mathbf{M}\in\mathcal{M}} \mathbf{M},$$

На каждом элементе $\mathbf{M}$ этого разбиения выберем точку

$$x_{\mathbf{M}} \in \mathbf{M}$$

Величину

$$\sum_{\mathbf{M}\in\mathcal{M}} \omega\big(x_{\mathbf{M}}\big)\Big[\overrightarrow{\mathsf{Leng}}(\mathbf{M})\Big]$$

назовем *интегральной суммой формы ω на кривой* $\mathbf{L}$.

Теорема 16.3.10. *При измельчении разбиения $\mathcal{M}$ интегральные суммы формы ω на кривой $\mathbf{L}$ стремятся к некоему числу, обозначаемому*

$$\int_{\mathbf{L}} \omega(x)\Big[\overrightarrow{\mathsf{Leng}}(\mathsf{d}\,x)\Big] = \lim_{\substack{\mathbf{L}=\bigsqcup_{\mathbf{M}\in\mathcal{M}}\mathbf{M},\\ \mathsf{diam}(\mathcal{M})\to 0}} \sum_{\mathbf{M}\in\mathcal{M}} \omega\big(x_{\mathbf{M}}\big)\Big[\overrightarrow{\mathsf{Leng}}(\mathbf{M})\Big] \qquad (16.3.54)$$

и называемому (анизотропным) интегралом дифференциальной формы ω *по кривой* $\mathbf{L}$. *Эта величина вычисляется по формуле*

$$\boxed{\int_{\mathbf{L}} \omega(x)\Big[\overrightarrow{\mathsf{Leng}}(\mathsf{d}\,x)\Big] = \int_I \omega(\alpha(t))[\alpha'(t)]\,\mathsf{d}\,t,} \qquad (16.3.55)$$

где $\alpha : I \to \mathbf{L}$ – произвольная параметризация $\mathbf{L}$, сохраняющая ориентацию.

! 16.3.5. Формулу (16.3.54) следует понимать так, что для всякой измельчающейся последовательности $\mathcal{M}^k$ разбиений кривой $\mathbf{L}$,

$$\mathbf{L} = \bigsqcup_{\mathbf{M}\in\mathcal{M}^k} \mathbf{M}, \qquad \mathsf{diam}(\mathcal{M}^k) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

и для любой системы выделенных точек

$$x^k_{\mathbf{M}} \in \mathbf{M} \in \mathcal{M}^k$$

справедливо соотношение

$$\int_{\mathbf{L}} \omega(x)\Big[\overrightarrow{\mathsf{Leng}}(\mathsf{d}\,x)\Big] \underset{\infty\leftarrow k}{\longleftarrow} \sum_{\mathbf{M}\in\mathcal{M}^k} \omega(x^k_{\mathbf{M}})\Big[\overrightarrow{\mathsf{Leng}}(\mathbf{M})\Big]$$

Доказательство. Покажем, что интегральные суммы стремятся к числу $\int_I \omega(\alpha(t))[\alpha'(t)]\,\mathsf{d}\,t$.

По свойству 1^0 на с.1005, всякому разбиению кривой $\mathbf{L}$

$$\mathbf{L} = \bigsqcup_{\mathbf{M}\in\mathcal{M}} \mathbf{M},$$

соответствует измеримое разбиение множества I

$$I_{\mathbf{M}} = \alpha^{-1}(\mathbf{M}), \quad \mathbf{M}\in\mathcal{M}$$

Отсюда получаем:

$$\left| \sum_{\mathbf{M}\in\mathcal{M}} \omega\big(x_{\mathbf{M}}\big)\Big[\underbrace{\overrightarrow{\mathsf{Leng}}(\mathbf{M})}_{\substack{\| \\ (16.3.41) \\ \| \\ \int_{I_{\mathbf{M}}} \alpha'(t)\,\mathsf{d}\,t}}\Big] - \underbrace{\int_I \omega\big(\alpha(t)\big)\Big[\alpha'(t)\Big]\,\mathsf{d}\,t}_{\text{разбиваем на интегралы по } I_{\mathbf{M}}} \right| =$$

$$= \left| \sum_{\mathbf{M}\in\mathcal{M}} \omega\big(x_{\mathbf{M}}\big)\left[\int_{I_{\mathbf{M}}} \alpha'(t)\,\mathsf{d}\,t\right] - \sum_{\mathbf{M}\in\mathcal{M}} \int_{I_{\mathbf{M}}} \omega\big(\alpha(t)\big)\Big[\alpha'(t)\Big]\,\mathsf{d}\,t \right| = \left(\substack{\text{выносим за скобку} \\ \text{знак суммы}}\right) =$$

$$= \left| \sum_{\mathbf{M}\in\mathcal{M}} \left(\omega(\underbrace{x_{\mathbf{M}}}_{\substack{\uparrow \\ \text{не зависит} \\ \text{от } t}})\Big[\underbrace{\int_{I_{\mathbf{M}}} \alpha'(t)\,\mathsf{d}\,t}_{\substack{\text{знак интеграла} \\ \text{можно вынести} \\ \text{из-под аргумента,} \\ \text{поскольку } \omega(x)[p] \\ \text{– линейная форма} \\ \text{по аргументу } p \\ \text{при фиксированном } x}}\Big] - \int_{I_{\mathbf{M}}} \omega\big(\alpha(t)\big)\Big[\alpha'(t)\Big]\,\mathsf{d}\,t \right) \right| =$$

$$= \left| \sum_{\mathbf{M}\in\mathcal{M}} \left(\int_{I_{\mathbf{M}}} \omega\big(x_{\mathbf{M}}\big)\Big[\alpha'(t)\Big]\,\mathsf{d}\,t - \int_{I_{\mathbf{M}}} \omega\big(\alpha(t)\big)\Big[\alpha'(t)\Big]\,\mathsf{d}\,t \right) \right| =$$

$$= \left| \sum_{\mathbf{M}\in\mathcal{M}} \int_{I_{\mathbf{M}}} \Big(\omega\big(x_{\mathbf{M}}\big) - \omega\big(\alpha(t)\big) \Big)[\alpha'(t)]\,\mathsf{d}\,t \right| \leqslant \left(\substack{\text{применяем формулу} \\ \left|\sum a_i\right| \leqslant \sum\left|a_i\right|}\right) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{\mathbf{M}\in\mathcal{M}} \left| \int_{I_{\mathbf{M}}} \Big(\omega(x_{\mathbf{M}}) - \omega(\alpha(t))\Big)[\alpha'(t)] \,\mathsf{d}\, t \right| \leqslant \left(\begin{smallmatrix}\text{применяем формулу}\\ \left|\int h(t)\,\mathsf{d}\,t\right| \leqslant \int \left|h(t)\right| \mathsf{d}\,t\end{smallmatrix}\right) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{\mathbf{M}\in\mathcal{M}} \int_{I_{\mathbf{M}}} \left| \Big(\omega(x_{\mathbf{M}}) - \omega(\alpha(t))\Big)[\alpha'(t)] \right| \mathsf{d}\, t \leqslant \left(\begin{smallmatrix}\text{применяем формулу}\\ \left|\omega(x)[p]\right| \leqslant \left|\omega(x)\right| \cdot |p|\end{smallmatrix}\right) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{\mathbf{M}\in\mathcal{M}} \underbrace{\sup_{t\in I_{\mathbf{M}}} \left|\omega(x_{\mathbf{M}}) - \omega(\alpha(t))\right|}_{\substack{\wedge\!\!\!\backslash \\ \sup_{|x-y|\leqslant \mathsf{diam}(\mathcal{M})} \left|\omega(x)-\omega(y)\right|}} \cdot \underbrace{\int_{I_{\mathbf{M}}} |\alpha'(t)| \,\mathsf{d}\, t}_{\substack{\| \\ \mathsf{Leng}(\mathbf{M})}} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{\mathbf{M}\in\mathcal{M}} \sup_{|x-y|\leqslant \mathsf{diam}(\mathcal{M})} \left|\omega(x)-\omega(y)\right| \cdot \mathsf{Leng}(\mathbf{M}) =$$

$$= \sup_{|x-y|\leqslant \mathsf{diam}(\mathcal{M})} \left|\omega(x)-\omega(y)\right| \cdot \underbrace{\sum_{\mathbf{M}\in\mathcal{M}} \mathsf{Leng}(\mathbf{M})}_{\substack{\| \\ \mathsf{Leng}(\mathbf{L})}} = \underbrace{\sup_{|x-y|\leqslant \mathsf{diam}(\mathcal{M})} \left|\omega(x)-\omega(y)\right|}_{\substack{\downarrow \\ 0 \\ \text{при } \mathsf{diam}(\mathcal{M})\to 0 \\ \text{поскольку } \omega \text{ равномерно} \\ \text{непрерывна на компакте } L \\ \text{(теорема Кантора)}}} \cdot \mathsf{Leng}(\mathbf{L}) \underset{\mathsf{diam}(\mathcal{M})\to 0}{\longrightarrow} 0$$

□

◇ **16.3.6. Интеграл от постоянной дифференциальной формы степени 1** из примера 16.3.3 равен значению функционала η на векторной длине $\overrightarrow{\mathsf{Leng}}(\mathbf{L})$ кривой интегрирования:

$$\int_{\mathbf{L}} \eta[\mathsf{d}\, x\,] = (16.3.54) = \eta\Big[\overrightarrow{\mathsf{Leng}}(\mathbf{L})\Big]. \qquad (16.3.56)$$

Действительно,

$$\int_{\mathbf{L}} \eta[\overrightarrow{\mathsf{Leng}}(\mathsf{d}\, x)\,] \underset{\substack{\mathbf{L}=\bigsqcup_{\mathbf{M}\in\mathcal{M}}\mathbf{M} \\ 0\leftarrow \mathsf{diam}(\mathcal{M})}}{\longleftarrow} \sum_{\mathbf{M}\in\mathcal{M}} \eta[\overrightarrow{\mathsf{Leng}}(\mathbf{M})\,] =$$

$$= \eta\left[\sum_{\mathbf{M}\in\mathcal{M}} \overrightarrow{\mathsf{Leng}}(\mathbf{M})\right] = \eta\left[\overrightarrow{\mathsf{Leng}}(\mathbf{L})\right]$$

◇ **16.3.7. Интеграл от точной дифференциальной формы степени 1** из примера 16.3.4 сводится к обычному определеному интегралу

$$\int_{\mathbf{L}} \mathsf{d}\, f(x)[\mathsf{d}\, x\,] = (16.3.55) =$$

$$= \int_I \mathsf{d}\, f(\alpha(s))[\alpha'(s)]\,\mathsf{d}\, s = (14.2.133) =$$

$$= \int_I (f\circ\alpha)'(s)\,\mathsf{d}\, s. \qquad (16.3.57)$$

для всякой параметризации $\alpha : I \to \mathbf{L}$, сохраняющей ориентацию $\mathbf{L}$. В частности, если $\mathbf{L}$ – простая кривая и $\alpha : [a,b] \to \mathbf{L}$ – ее простая параметризация, сохраняющая ориентацию, то интеграл от $\mathsf{d}\, f$ вдоль $\mathbf{L}$ равен скачку функции f на $\mathbf{L}$:

$$\int_{\mathbf{L}} \mathsf{d}\, f(x)[\mathsf{d}\, x\,] = \int_a^b (f\circ\alpha)'(s)\,\mathsf{d}\, s =$$

$$= f(\alpha(b)) - f(\alpha(a)). \qquad (16.3.58)$$

◇ **16.3.8. Интеграл от дифференциальной формы по отрезку.** Для всякой дифференциальной формы ω степени 1 и любого направленного отрезка $[A,B] \subseteq X$ найдется точка $\xi \in [A,B]$ такая, что

$$\int_{[A,B]} \omega(x)\Big[\overrightarrow{\mathsf{Leng}}(\mathsf{d}\, x)\Big] = \omega(\xi)\,[B-A] \qquad (16.3.59)$$

Чтобы убедиться в этом, параметризуем отрезок $[A,B]$ так, чтобы производная этой параметризации была постоянной:

$$\alpha(t) = A + (B-A)\cdot t, \qquad t\in[0,1].$$

Тогда $\alpha'(t) = B - A$ в любой точке $t\in[0,1]$. Рассмотрим функцию

$$h(t) = \omega(\alpha(t))[\alpha'(t)] = \omega(\alpha(t))[B-A], \quad t\in[a,b].$$

По теореме о среднем для определенного интеграла (свойство 7^0 на с.435), найдется такая точка $\tau\in[0,1]$, что

$$\int_{[0,1]} h(t)\,\mathsf{d}\, t = h(\tau)\cdot(1-0) = h(\tau)$$

Положив $\xi = \alpha(\tau)$, мы получим:

$$\int_{[A,B]} \omega(x)\Big[\overrightarrow{\mathsf{Leng}}(\mathsf{d}\, x)\Big] = (16.3.55) =$$

$$= \int_{[0,1]} \omega(\alpha(t))[\alpha'(t)]\,\mathsf{d}\, t = \int_{[0,1]} h(t)\,\mathsf{d}\, t = h(\tau) =$$

$$= \omega(\alpha(\tau))[B-A] = \omega(\xi)[B-A]$$

Свойства анизотропного интеграла по кривым

1^0. **Линейность:** *если ψ и ω – две дифференциальные формы степени 1 на U и $\mathbf{L}$ – ориентированная кривая в U, то для любых чисел $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$*

$$\int_{\mathbf{L}} \{\lambda\cdot\psi(x)+\mu\cdot\omega(x)\}\,[\overrightarrow{\mathsf{Leng}}(\mathsf{d}\,x)] = \lambda\cdot\int_{\mathbf{L}}\psi(x)[\overrightarrow{\mathsf{Leng}}(\mathsf{d}\,x)]+\mu\cdot\int_{\mathbf{L}}\omega(x)[\overrightarrow{\mathsf{Leng}}(\mathsf{d}\,x)] \quad (16.3.60)$$

2^0. **Аддитивность:** *если $\mathbf{L}=\bigsqcup_{\mathbf{M}\in\mathcal{M}}\mathbf{M}$ – ориентированное разбиение кривой $\mathbf{L}$, то для любой дифференциальной формы ω степени 1 на L*

$$\int_{\mathbf{L}}\omega(x)[\overrightarrow{\mathsf{Leng}}(\mathsf{d}\,x)] = \sum_{\mathbf{M}\in\mathcal{M}}\int_{\mathbf{M}}\omega(x)[\overrightarrow{\mathsf{Leng}}(\mathsf{d}\,x)]. \quad (16.3.61)$$

3^0. **Оценка через скалярную длину:** *если ω – дифференциальная форма степени 1 на кривой $\mathbf{L}$, то*

$$\left|\int_{\mathbf{L}}\omega(x)[\overrightarrow{\mathsf{Leng}}(\mathsf{d}\,x)]\right| \leqslant \max_{x\in\mathbf{L}}\Big|\omega(x)\Big|\cdot\mathsf{Leng}(\mathbf{L}) \quad (16.3.62)$$

Доказательство. 1. Для разбиений $\mathcal{M}$ кривой $\mathbf{L}$ получаем:

$$\int_{\mathbf{L}} \{\lambda\cdot\psi(x)+\mu\cdot\omega(x)\}\,[\overrightarrow{\mathsf{Leng}}(\mathsf{d}\,x)] \underset{0\leftarrow\mathsf{diam}\,\mathcal{M}}{\longleftarrow} \sum_{\mathbf{M}\in\mathcal{M}}\{\lambda\cdot\psi(x_{\mathbf{M}})+\mu\cdot\omega(x_{\mathbf{M}})\}\,[\overrightarrow{\mathsf{Leng}}(\mathbf{M})] =$$
$$= \lambda\cdot\sum_{\mathbf{M}\in\mathcal{M}}\psi(x_{\mathbf{M}})[\overrightarrow{\mathsf{Leng}}(\mathbf{M})]+\mu\cdot\sum_{\mathbf{M}\in\mathcal{M}}\omega(x_{\mathbf{M}})[\overrightarrow{\mathsf{Leng}}(\mathbf{M})] \underset{\mathsf{diam}\,\mathcal{M}\to 0}{\longrightarrow}$$
$$\underset{\mathsf{diam}\,\mathcal{M}\to 0}{\longrightarrow} \lambda\cdot\int_{\mathbf{L}}\psi(x)[\overrightarrow{\mathsf{Leng}}(\mathsf{d}\,x)]+\mu\cdot\int_{\mathbf{L}}\omega(x)[\overrightarrow{\mathsf{Leng}}(\mathsf{d}\,x)]$$

2. Формулу (16.3.61) удобно доказать для частного случая, когда разбиение состоит из двух кривых, а затем она переносится на общий случай по индукции. Пусть

$$\mathbf{L}\equiv\mathbf{M}\sqcup\mathbf{N}.$$

Если $\mathcal{M}$ – разбиение кривой $\mathbf{M}$, а $\mathcal{N}$ – разбиение кривой $\mathbf{N}$, то объединение $\mathcal{M}\cup\mathcal{N}$ будет разбиением кривой $\mathbf{L}$. Поэтому

$$\int_{\mathbf{L}}\omega(x)[\overrightarrow{\mathsf{Leng}}(\mathsf{d}\,x)] \underset{0\leftarrow\mathsf{diam}(\mathcal{M}\cup\mathcal{N})}{\longleftarrow} \sum_{\mathbf{M}'\in\mathcal{M}}\omega(x_{\mathbf{M}'})[\overrightarrow{\mathsf{Leng}}(\mathbf{M}')]+\sum_{\mathbf{N}'\in\mathcal{N}}\omega(x_{\mathbf{N}'})[\overrightarrow{\mathsf{Leng}}(\mathbf{N}')] \underset{\mathsf{diam}(\mathcal{M}\cup\mathcal{N})\to 0}{\longrightarrow}$$
$$\underset{\mathsf{diam}(\mathcal{M}\cup\mathcal{N})\to 0}{\longrightarrow}\int_{\mathbf{M}}\omega(x)[\overrightarrow{\mathsf{Leng}}(\mathsf{d}\,x)]+\int_{\mathbf{N}}\omega(x)[\overrightarrow{\mathsf{Leng}}(\mathsf{d}\,x)].$$

3. Для разбиений $\mathcal{M}$ кривой $\mathbf{L}$ получаем:

$$\left|\int_{\mathbf{L}}\omega(x)\Big[\overrightarrow{\mathsf{Leng}}(\mathsf{d}\,x)\Big]\right| \underset{0\leftarrow\mathsf{diam}\,\mathcal{M}}{\longleftarrow} \left|\sum_{\mathbf{M}\in\mathcal{M}_n}\omega\big(x_{\mathbf{M}}\big)\Big[\overrightarrow{\mathsf{Leng}}(\mathbf{M})\Big]\right| \leqslant \sum_{\mathbf{M}\in\mathcal{M}_n}\Big|\omega\big(x_{\mathbf{M}}\big)\Big[\overrightarrow{\mathsf{Leng}}(\mathbf{M})\Big]\Big| \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{\mathbf{M}\in\mathcal{M}_n}\big|\omega\big(x_{\mathbf{M}}\big)\big|\cdot\Big|\overrightarrow{\mathsf{Leng}}(\mathbf{M})\Big| \leqslant \sum_{\mathbf{M}\in\mathcal{M}_n}\max_{x\in\mathbf{L}}|\omega(x)|\cdot\Big|\overrightarrow{\mathsf{Leng}}(\mathbf{M})\Big| =$$
$$= \max_{x\in\mathbf{L}}|\omega(x)|\cdot\sum_{\mathbf{M}\in\mathcal{M}}\Big|\overrightarrow{\mathsf{Leng}}(\mathbf{M})\Big| \underset{\mathsf{diam}\,\mathcal{M}\to 0}{\overset{(16.3.47)}{\longrightarrow}} \max_{x\in\mathbf{L}}\Big|\omega(x)\Big|\cdot\mathsf{Leng}(\mathbf{L})$$

$\square$

Анизотропный интеграл, как функционал на кривых. Ниже нам понадобится следующее определение.

- Условимся говорить, что *последовательность ориентированных кривых* $\mathbf{L}_i$ *в* X *сходится к точке* $x \in X$, если соответствующие скалярные кривые стремятся к x:

$$|\mathbf{L}_i| \underset{i\to\infty}{\longrightarrow} x. \tag{16.3.63}$$

Это изображается соотношением

$$\mathbf{L}_i \underset{i\to\infty}{\longrightarrow} x.$$

Пусть U – открытое множество в X и ω – дифференциальная форма степени 1 на U. Для произвольной ориентированной кривой $\mathbf{L} \subset U$ обозначив

$$\Omega(\mathbf{L}) = \int_{\mathbf{L}} \omega(x)\Big[\overrightarrow{\mathsf{Leng}}(\mathsf{d}\,x)\Big] \tag{16.3.64}$$

мы получим отображение $\mathbf{L} \mapsto \Omega(\mathbf{L})$, которое каждой ориентированной кривой $\mathbf{L} \subset U$ ставит в соответствие число $\Omega(\mathbf{L})$. Отметим следующие свойства этого отображения.

(UIC-1) **Аддитивность по ориентированным кривым:** *если кривые* $\mathbf{M}$ *и* $\mathbf{N}$ *образуют разбиение ориентированной кривой* $\mathbf{L}$

$$\mathbf{L} \equiv \mathbf{M} \sqcup \mathbf{N},$$

то

$$\Omega(\mathbf{L}) = \Omega(\mathbf{M}) + \Omega(\mathbf{N})$$

(UIC-2) **Анизотропность:** *для всякой точки* $x \in U$ *существует линейный функционал* $\eta : X \to \mathbb{R}$ *такой, что справедливо соотношение*

$$\Omega(\mathbf{L}) = \eta\big(\overrightarrow{\mathsf{Leng}}(\mathbf{L})\big) + \underset{\mathbf{L}\to x}{\mathbf{o}}\big(\mathsf{Leng}(\mathbf{L})\big) \tag{16.3.65}$$

которое надо понимать так: для любой последовательности $\mathbf{L}_i$ *ориентированных кривых, сходящихся к* x

$$\mathbf{L}_i \underset{i\to\infty}{\longrightarrow} x$$

справедливо соотношение

$$\Omega(\mathbf{L}_i) = \eta\big(\overrightarrow{\mathsf{Leng}}(\mathbf{L}_i)\big) + \underset{i\to\infty}{\mathbf{o}}\big(\mathsf{Leng}(\mathbf{L}_i)\big) \tag{16.3.66}$$

Доказательство. Утверждение **(UIC-1)** – просто переформулировка свойства аддитивности анизотропного интеграла (формула (16.3.61)), поэтому неочевидным здесь будет только утверждение **(UIC-2)**. Для точки $x \in X$ положим

$$\eta = \omega(x)$$

Тогда для любой последовательности кривых $\mathbf{L}_i$, сходящейся к x, мы получим

$$\frac{1}{\mathsf{Leng}(\mathbf{L}_i)} \cdot \Bigg|\Omega(\mathbf{L}_i) - \underbrace{\eta[\overrightarrow{\mathsf{Leng}}(\mathbf{L}_i)]}_{\substack{\| \,(16.3.56) \\ \int_{\mathbf{L}_i}\eta[\overrightarrow{\mathsf{Leng}}(\mathsf{d}\,y)]}}\Bigg| = \frac{1}{\mathsf{Leng}(\mathbf{L}_i)} \cdot \left|\int_{\mathbf{L}_i} \omega(y)[\overrightarrow{\mathsf{Leng}}(\mathsf{d}\,y)] - \int_{\mathbf{L}_i} \eta[\overrightarrow{\mathsf{Leng}}(\mathsf{d}\,y)]\right| =$$

$$= \frac{1}{\mathsf{Leng}(\mathbf{L}_i)} \cdot \left|\int_{\mathbf{L}_i} \Big(\omega(y) - \eta\Big)[\overrightarrow{\mathsf{Leng}}(\mathsf{d}\,y)]\right| \leqslant (16.3.62) \leqslant \frac{1}{\mathsf{Leng}(\mathbf{L}_i)} \cdot \max_{y\in\mathbf{L}_i}\Big|\omega(y) - \eta\Big| \cdot \mathsf{Leng}(\mathbf{L}_i) =$$

$$= \max_{y\in\mathbf{L}_i}\Big|\omega(y) - \eta\Big| = \max_{y\in\mathbf{L}_i}\Big|\omega(y) - \omega(x)\Big| \underset{i\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

(последнее соотношение следует из того, что $\omega : U \to \Lambda_1(X)$ – нерерывное отображение). Это доказывает (16.3.66). □

- Условия **(UIC-1)** и **(UIC-2)** называются *аксиомами анизотропного интеграла по кривым.* Как оказывается, они полностью определяют анизотропные интегралы, как функционалы от кривых:

Теорема 16.3.11. *Пусть U – открытое множество в X и пусть каждой ориентированной кривой $\mathbf{L} \subset U$ поставлено в соответствие число $\Omega(\mathbf{L})$ так, что функционал $\mathbf{L} \mapsto \Omega(\mathbf{L})$ удовлетворяет условиям* **(UIC-1)** *и* **(UIC-2)**. *Тогда существует и единственна непрерывная дифференциальная форма $\omega : U \to \Lambda_1(X)$ такая, что*

$$\Omega(\mathbf{L}) = \int_{\mathbf{L}} \omega(x)[\overrightarrow{\mathsf{Leng}}(\mathsf{d}\, x)]. \tag{16.3.67}$$

для любой ориентированной кривой $\mathbf{L} \subseteq U$.

- Дифференциальная форма $\omega : U \to \Lambda_1(X)$ называется *анизотропной плотностью* функционала по кривым Ω.

Доказательство. По аксиоме **(UIC-2)**, всякой точке $x \in U$ соответствует функционал $\eta : X \to \mathbb{R}$, удовлетворяющий соотношению (16.3.65). Положим $\omega(x) = \eta$ и убедимся, что это отображение обладает нужными свойствами.

1. Заметим, что из соотношения (16.3.65) сразу следует, что дифференциальная форма $\omega : U \to \Lambda_1(X)$ единственна. Действительно, для всякого вектора $p \in X$ и любого числа $t \neq 0$ мы можем рассмотреть направленный отрезок $[x; x+tp]$ в X, векторная длина которого равна tp, а скалярная – $|tp|$, и для такой кривой мы получим:

$$\Omega\big([x; x+tp]\big) = \eta(tp) + \underset{t\to 0}{\mathbf{o}}(|t|\cdot|p|) \quad \Longrightarrow \quad \eta(p) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\cdot \Omega\big([x; x+tp]\big),$$

и видно, что $\omega(x) = \eta$ определяется однозначно по Ω.

2. Покажем далее, что отображение $\omega : U \to \Lambda_1(X)$ непрерывно. Возьмем какую-нибудь последовательность точек

$$x_i \underset{i\to\infty}{\longrightarrow} x$$

Зафиксируем $p \in X$, $p \neq 0$. Соотношение (16.3.66) справедливо в каждой точке множества U, в частности в каждой точке x_i, и если в качестве кривых взять ориентированные отрезки[4] $\mathbf{L} = [x_i, x_i + tp]$, $t > 0$:

$$\Omega\big([x_i; x_i+tp]\big) = \omega(x_i)[tp] + \underset{t\to 0}{\mathbf{o}}(t) = t\cdot\omega(x_i)[p] + t\cdot \underset{t\to 0}{\mathbf{o}}(1).$$

Отсюда следует, что для всякого i можно выбрать $t_i > 0$ так, чтобы

$$t_i < \frac{1}{i}, \qquad \left|\frac{\Omega\big([x_i; x_i+tp]\big)}{t_i} - \omega(x_i)[p]\right| \leqslant \frac{1}{i} \tag{16.3.68}$$

Тогда мы получаем, что кривые $\mathbf{L}_i = [x_i, x_i + t_i p]$ стремятся к x, потому что

$$\rho(\mathbf{L}_i, x) \leqslant \rho(\mathbf{L}_i, x_i) + \rho(x_i, x) = t_i + \rho(x_i, x) < \frac{|p|}{i} + \rho(x_i, x) \underset{i\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

и значит в этой точке для них выполняется соотношение (16.3.66):

$$\Omega\big([x_i; x_i+t_i p]\big) = \omega(x)[t_i p] + \underset{i\to\infty}{\mathbf{o}}(t_i) = t_i\cdot\omega(x)[p] + t_i\cdot \underset{t\to\infty}{\mathbf{o}}(1)$$

откуда

$$\frac{\Omega\big([x_i; x_i+t_i p]\big)}{t_i} \underset{i\to\infty}{\longrightarrow} \omega(x)[p]. \tag{16.3.69}$$

Теперь мы получаем:

$$|\omega(x_i)[p] - \omega(x)[p]| \leqslant \underbrace{\left|\omega(x_i)[p] - \frac{\Omega\big([x_i; x_i+t_i p]\big)}{t_i}\right|}_{\substack{\downarrow\ (16.3.68)\\ 0}} + \underbrace{\left|\frac{\Omega\big([x_i; x_i+t_i p]\big)}{t_i} - \omega(x)[p]\right|}_{\substack{\downarrow\ (16.3.69)\\ 0}} \underset{i\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

Это верно для всякого $p \neq 0$. Отсюда следует, что

$$|\omega(x_i) - \omega(x)| \underset{i\to\infty}{\longrightarrow} 0. \tag{16.3.70}$$

[4]Ориентированные отрезки были определены нами на с.1004.

3. Покажем, что для всякого компакта $K \subseteq U$ выполняется соотношение

$$\sup_{\substack{x,\mathbf{M}:\\ x\in\mathbf{M}\subseteq K,\\ \mathsf{diam}(M)\leqslant\varepsilon}} \left|\frac{\Omega(\mathbf{M})-\omega(x)[\overrightarrow{\mathsf{Leng}}(\mathbf{M})]}{\mathsf{Leng}(\mathbf{M})}\right| \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} 0 \qquad (16.3.71)$$

Это удобно делать от противного: предположим, что (16.3.71) не выполняется, то есть существует компакт $K \subseteq U$ и последовательность кривых $\mathbf{M}_i \subseteq K$ такая, что

$$\mathsf{diam}(\mathbf{M}_i) \underset{i\to\infty}{\longrightarrow} 0, \qquad \sup_{x\in\mathbf{M}_i} \left|\frac{\Omega(\mathbf{M}_i)-\omega(x)[\overrightarrow{\mathsf{Leng}}(\mathbf{M}_i)]}{\mathsf{Leng}(\mathbf{M}_i)}\right| \underset{i\to\infty}{\not\longrightarrow} 0$$

Переходя к подпоследовательности, можно считать, что последовательность во втором соотношении отделена от нуля неким числом $\delta > 0$:

$$\mathsf{diam}(\mathbf{M}_i) \underset{i\to\infty}{\longrightarrow} 0, \qquad \sup_{x\in\mathbf{M}_i} \left|\frac{\Omega(\mathbf{M}_i)-\omega(x)[\overrightarrow{\mathsf{Leng}}(\mathbf{M}_i)]}{\mathsf{Leng}(\mathbf{M}_i)}\right| > \delta > 0$$

Теперь можно выбрать последовательность $x_i \in \mathbf{M}_i$ такую, что

$$\left|\frac{\Omega(\mathbf{M}_i)-\omega(x_i)[\overrightarrow{\mathsf{Leng}}(\mathbf{M}_i)]}{\mathsf{Leng}(\mathbf{M}_i)}\right| > \delta > 0 \qquad (16.3.72)$$

Последовательность x_i лежит в компакте K, поэтому она содержит сходящуюся подпоследовательность. Перейдя к ней, и переобозначив индексы, мы можем считать что сама последовательность x_i стремится к какому-то пределу $x \in K$:

$$x_i \underset{i\to\infty}{\longrightarrow} x$$

При этом, $x_i \in \mathbf{M}_i$, а диаметры $\mathbf{M}_i$ стремятся к нулю, значит,

$$\mathbf{M}_i \underset{i\to\infty}{\longrightarrow} x$$

откуда в силу (16.3.66),

$$\left|\frac{\Omega(\mathbf{M}_i)-\omega(x)[\overrightarrow{\mathsf{Leng}}(\mathbf{M}_i)]}{\mathsf{Leng}(\mathbf{M}_i)}\right| \underset{i\to\infty}{\longrightarrow} 0 \qquad (16.3.73)$$

и значит,

$$\left|\frac{\Omega(\mathbf{M}_i)-\omega(x_i)[\overrightarrow{\mathsf{Leng}}(\mathbf{M}_i)]}{\mathsf{Leng}(\mathbf{M}_i)}\right| \leqslant \underbrace{\left|\frac{\Omega(\mathbf{M}_i)-\omega(x)[\overrightarrow{\mathsf{Leng}}(\mathbf{M}_i)]}{\mathsf{Leng}(\mathbf{M}_i)}\right|}_{\substack{\downarrow\ (16.3.73)\\ 0}} + \underbrace{\left|\frac{\omega(x)[\overrightarrow{\mathsf{Leng}}(\mathbf{M}_i)]-\omega(x_i)[\overrightarrow{\mathsf{Leng}}(\mathbf{M}_i)]}{\mathsf{Leng}(\mathbf{M}_i)}\right|}_{\substack{\| \\ \left|\left(\omega(x)-\omega(x_i)\right)\left[\frac{\overrightarrow{\mathsf{Leng}}(\mathbf{M}_i)}{\mathsf{Leng}(\mathbf{M}_i)}\right]\right| \\ \wedge\!\!\backslash \\ \left|\omega(x)-\omega(x_i)\right|\cdot\left|\frac{\overrightarrow{\mathsf{Leng}}(\mathbf{M}_i)}{\mathsf{Leng}(\mathbf{M}_i)}\right| \\ \wedge\!\!\backslash\ (16.3.42) \\ \left|\omega(x)-\omega(x_i)\right| \\ \downarrow\ (16.3.70) \\ 0}} \underset{i\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

Мы получаем противоречие с (16.3.72).

4. Покажем, что интегральные суммы формы ω на кривой $\mathbf{L}$ стремятся к числу $\Omega(\mathbf{L})$. Возьмем число $\varepsilon > 0$ и рассмотрим произвольное разбиение кривой $\mathbf{L}$

$$\mathbf{L} = \bigsqcup_{\mathbf{M}\in\mathcal{M}} \mathbf{M}.$$

с диаметром $\mathsf{diam}(\mathcal{M}) \leqslant \varepsilon$. Для любых $x_{\mathbf{M}} \in \mathbf{M}$ мы получим:

$$\left|\Omega(\mathbf{L}) - \sum_{\mathbf{M}\in\mathcal{M}} \omega(x_{\mathbf{M}})[\overrightarrow{\mathsf{Leng}}(\mathbf{M})]\right| = \left|\sum_{\mathbf{M}\in\mathcal{M}} \Omega(\mathbf{M}) - \sum_{\mathbf{M}\in\mathcal{M}} \omega(x_{\mathbf{M}})[\overrightarrow{\mathsf{Leng}}(\mathbf{M})]\right| =$$

$$= \left|\sum_{\mathbf{M}\in\mathcal{M}} \Big(\Omega(\mathbf{M}) - \omega(x_{\mathbf{M}})[\overrightarrow{\mathsf{Leng}}(\mathbf{M})]\Big)\right| \leqslant \sum_{\mathbf{M}\in\mathcal{M}} \left|\Omega(\mathbf{M}) - \omega(x_{\mathbf{M}})[\overrightarrow{\mathsf{Leng}}(\mathbf{M})]\right| =$$

$$= \sum_{\mathbf{M}\in\mathcal{M}} \left|\frac{\Omega(\mathbf{M}) - \omega(x_{\mathbf{M}})[\overrightarrow{\mathsf{Leng}}(\mathbf{M})]}{\mathsf{Leng}(\mathbf{M})}\right| \cdot \mathsf{Leng}(\mathbf{M}) \leqslant \sup_{\substack{x,\,\mathbf{M}:\\ x\in\mathbf{M}\subseteq\mathbf{L},\\ \mathsf{diam}(M)\leqslant\varepsilon}} \left|\frac{\Omega(\mathbf{M}) - \omega(x)[\overrightarrow{\mathsf{Leng}}(\mathbf{M})]}{\mathsf{Leng}(\mathbf{M})}\right| \cdot \sum_{\mathbf{M}\in\mathcal{M}} \mathsf{Leng}(\mathbf{M}) =$$

$$= \underbrace{\sup_{\substack{x,\,\mathbf{M}:\\ x\in\mathbf{M}\subseteq\mathbf{L},\\ \mathsf{diam}(M)\leqslant\varepsilon}} \left|\frac{\Omega(\mathbf{M}) - \omega(x)[\overrightarrow{\mathsf{Leng}}(\mathbf{M})]}{\mathsf{Leng}(\mathbf{M})}\right|}_{\substack{\downarrow\ (16.3.71)\\ 0}} \cdot \mathsf{Leng}(\mathbf{L}) \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} 0$$

$\square$

Глава 17

ПОВЕРХНОСТЬ, ЕЕ ПЛОЩАДЬ И ИНТЕГРАЛЫ ПО ПОВЕРХНОСТИ

§ 1 Параметризованная поверхность

- *Параметризованной поверхностью* в евклидовом пространстве X называется всякое полурегулярное (в смысле определения на с.953) отображение размерности 2 в X, то есть бесконечно гладкое отображение $\alpha : I \to X$, где I – измеримый по Жордану компакт на плоскости $\mathbb{R}^2$, удовлетворяющее следующим условиям:

  C1 (стабильность почти всюду): дифференциал $\alpha : I \to X$ инъективен всюду на внутренности I, кроме, может быть, подмножества жордановой меры нуль в I:

$$\mu\Big\{x \in \mathsf{Int}(I) : \quad \exists p \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \quad \mathsf{d}\,\alpha(x)[p] = 0\Big\} = 0,$$
$$\left(\mathsf{d}\,\alpha(x)[p] := \lim_{t\to 0} \frac{\alpha(x+tp) - \alpha(x)}{t}\right)$$

  по теореме 14.2.12 это эквивалентно тому, что Якобиан отображения α ненулевой всюду на внутренности I, кроме быть может, множества жордановой меры нуль:

$$\mu\Big\{x \in \mathsf{Int}(I) : \quad \mathsf{J}\,\alpha(x) = 0\Big\} = 0. \qquad (17.1.1)$$

  C2 (инъективность почти всюду): отображение $\alpha : I \to X$ инъективно всюду, кроме, может быть, подмножества жордановой меры нуль в I:

$$\mu\Big\{s \in I : \quad \exists t \in I \quad s \neq t \quad \& \quad \alpha(s) = \alpha(t)\Big\} = 0$$

- Параметризованная поверхность $\alpha : I \to X$ называется

  – *регулярной*, если она является регулярным отображением, то есть условия C1 и C2 можно усилить до условий

    C1* (стабильность): $\alpha : I \to X$ обладает гладким продолжением $\tilde{\alpha} : U \to X$ в некоторую окрестность U компакта I, у которого дифференциал невырожден всюду на I:

$$\forall x \in I \quad \forall p \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \qquad \mathsf{d}\,\tilde{\alpha}(x)[p] \neq 0$$

    или, что то же самое, Якобиан отображения $\tilde{\alpha}$ ненулевой всюду на I:

$$\mu\Big\{x \in I : \quad \mathsf{J}\,\tilde{\alpha}(x) = 0\Big\} = 0. \qquad (17.1.2)$$

    C2* (инъективность): отображение $\alpha : I \to X$ всюду инъективно:

$$\forall s, t \in I \quad s \neq t \quad \Longrightarrow \quad \alpha(s) \neq \alpha(t)$$

– *вырожденной*, если α является вырожденным полурегулярным отображением, то есть I имеет нулевую Жорданову меру:
$$\mu(I) = 0$$

◇ **17.1.1. Параметризованный параллелограмм.** Формула

$$\alpha(u,v) = a_1\cdot u + a_2\cdot v + b; \quad (u,v) \in [0,1]^2, \quad (17.1.3)$$

где a_1, a_2, b – фиксированные векторы из евклидова пространства X, определяет поверхность называемую *параллелограммом* в X. Точку b мы будем называть *вершиной* этого параллелограмма, а векторы a_1, a_2 – его *направляющими*.

(a) Подчиненность, эквивалентность и функция перехода

Якобиан параметризованной поверхности. Пусть $\sigma : D \to X$ – параметризованная поверхность в евклидовом пространстве X, и $\tilde\sigma$ – какое-нибудь гладкое продолжение отображения σ в некоторую окрестность U компакта D. Напомним, что выше формулой (14.2.123) мы определили дифференциал отображения

$$\mathsf{d}\,\tilde\sigma(a)[p] = \lim_{t\to 0} \frac{\tilde\sigma(a+tp) - \tilde\sigma(a)}{t}, \qquad a \in U,\ p \in \mathbb{R}^2.$$

В каждой точке на ядре области параметров

$$a \in \mathsf{Nuc}(D) = \overline{\mathsf{Int}(D)}$$

этот дифференциал не зависит от выбора окрестности U и продолжения $\tilde\sigma$, потому что можно подобрать последовательность

$$a_i \in U \quad a_i \underset{i\to\infty}{\longrightarrow} a$$

и тогда получится

$$\mathsf{d}\,\sigma(a_i)[p] = \mathsf{d}\,\tilde\sigma(a_i)[p] \underset{i\to\infty}{\longrightarrow} \mathsf{d}\,\tilde\sigma(a)[p]$$

то есть $\mathsf{d}\,\tilde\sigma(a)[p]$ зависит от $\mathsf{d}\,\sigma(a_i)[p]$ (а не от $\tilde\sigma$). Поэтому на множестве $\mathsf{Nuc}(D) = \overline{\mathsf{Int}(D)}$ определен дифференциал отображения σ:

$$\mathsf{d}\,\sigma(a)[p] = \mathsf{d}\,\tilde\sigma(a)[p] = \lim_{t\to 0} \frac{\tilde\sigma(a+tp) - \tilde\sigma(a)}{t}, \qquad a \in \mathsf{Nuc}(D) = \overline{\mathsf{Int}(D)},\ p \in \mathbb{R}^2.$$

По той же причине на множестве $\mathsf{Nuc}(D) = \overline{\mathsf{Int}(D)}$ однозначно определяются частные производные отображения σ

$$\nabla_1\sigma(a) = \mathsf{d}\,\sigma(a)[e_1] = \nabla_1\tilde\sigma(a), \qquad \nabla_2\sigma(a) = \mathsf{d}\,\sigma(a)[e_2] = \nabla_2\tilde\sigma(a)$$

и Якобиан

$$\mathsf{J}\,\sigma(a) = \vee_2\,\mathsf{d}\,\sigma(a)[e_1 \vee e_2] = \nabla_1\sigma(a) \vee \nabla_2\sigma(a), \qquad a \in \overline{\mathsf{Int}(D)} \tag{17.1.4}$$

Модуль Якобиана вычисляется по формуле

$$|\,\mathsf{J}\,\sigma(a)| = |\nabla_1\sigma(a) \vee \nabla_2\sigma(a)| = (13.1.53) = \sqrt{\mathsf{Gram}(\nabla_1\sigma(a), \nabla_2\sigma(a))} =$$
$$= \sqrt{\det\begin{pmatrix} [\nabla_1\sigma(a), \nabla_1\sigma(a)] & [\nabla_1\sigma(a), \nabla_2\sigma(a)] \\ [\nabla_2\sigma(a), \nabla_1\sigma(a)] & [\nabla_2\sigma(a), \nabla_2\sigma(a)] \end{pmatrix}} =$$
$$= \sqrt{|\nabla_1\sigma(a)|^2 \cdot |\nabla_2\sigma(a)|^2 - [\nabla_1\sigma(a), \nabla_2\sigma(a)]^2}. \tag{17.1.5}$$

На наросте же множества D Якобиан считается нулевым:

$$\mathsf{J}\,\sigma(a) := 0, \qquad a \in D \setminus \overline{\mathsf{Int}(D)} \tag{17.1.6}$$

Из теоремы 14.2.11 следует

Теорема 17.1.1. *Если $\sigma : D \to X$ – параметризованная поверхность в евклидовом пространстве X и $\varphi : G \to D$ – полурегулярная замена переменных, то Якобиан отображения $\sigma \circ \varphi : G \to X$ связан с Якобианом отображения $\sigma : D \to X$ формулой*

$$J(\sigma\circ\varphi)(a) = \mathsf{J}\,\sigma(\varphi(a)) \cdot \mathsf{J}\,\varphi(a), \qquad a \in \mathsf{Nuc}(G) \tag{17.1.7}$$

Скалярная подчиненность и скалярная эквивалентность. Как и более общие полурегулярные отображения, параметризованные поверхности бывают подчиненными и эквивалентными.

- Пусть $\alpha : I \to X$ и $\beta : J \to X$ – две параметризованные поверхности в евклидовом пространстве X. Говорят, что
  - — β *подчинена* α, и обозначают это записью
$$\beta \subseteq \alpha,$$
если носитель β содержится в носителе α:
$$\mathsf{R}(\beta) \subseteq \mathsf{R}(\alpha)$$
  - — β *эквивалентна* α, и обозначают это записью
$$\beta \cong \alpha,$$
если носитель β совпадает с носителем α:
$$\mathsf{R}(\beta) = \mathsf{R}(\alpha)$$

Теоремы 15.3.14 и 15.3.15 приобретают следующий вид.

Теорема 17.1.2. *Если параметризованная поверхность $\beta : J \to X$ подчинена параметризованной поверхности $\alpha : I \to X$,*
$$\beta \subseteq \alpha$$
то след $\alpha|_\beta$ отображения β в отображении α является параметризованной поверхностью, эквивалентной β:
$$\beta \cong \alpha|_\beta.$$

Теорема 17.1.3. *Если параметризованные поверхности $\alpha : I \to X$ и $\beta : J \to X$ эквивалентны,*
$$\alpha \cong \beta$$
то существуют открытые множества $U \subset \mathsf{D}(\alpha)$, $V \subset \mathsf{D}(\beta)$ и диффеоморфизм $\varphi : V \to U$, называемый функцией перехода, *выражающей отображение β через отображение α, и обозначаемый записью*
$$\varphi : \beta \rightarrowtail \alpha$$
такие, что выполняются следующие условия

(a) $U = \mathsf{R}(\varphi)$ *и* $V = \mathsf{D}(\varphi)$ *являются множествами полной меры в компактах* $\mathsf{D}(\alpha)$ *и* $\mathsf{D}(\beta)$*:*
$$\mu\Big(\mathsf{D}(\alpha) \setminus U\Big) = 0 = \mu\Big(\mathsf{D}(\beta) \setminus V\Big)$$

(b) *на множествах U и V отображения α и β инъективны и имеют инъективный дифференциал:*
$$\forall s \in U \quad \mathsf{J}\,\alpha(s) \neq 0, \qquad \forall t \in V \quad \mathsf{J}\,\beta(t) \neq 0$$

(c) *на V отображение φ выражает β через α:*
$$\forall t \in V \qquad \alpha(\varphi(t)) = \beta(t)$$
$$\begin{tikzcd} & X & \\ U \arrow[ur, "\alpha"] & & V \arrow[ul, "\beta"'] \arrow[ll, "\varphi"] \end{tikzcd}$$

При этом

(i) *любые две функции перехода $\varphi_1 : \beta \rightarrowtail \alpha$ и $\varphi_2 : \beta \rightarrowtail \alpha$ совпадают на общей общей области определения:*
$$\forall t \in \mathsf{D}(\varphi_1) \cap \mathsf{D}(\varphi_2) \qquad \varphi_1(t) = \varphi_2(t)$$

(ii) *для любой функции перехода $\varphi : \beta \rightarrowtail \alpha$ обратное отображение φ^{-1} является функцией перехода, выражающей поверхность α через поверхность β:*
$$\varphi^{-1} : \alpha \rightarrowtail \beta,$$

(iii) *для любой функции перехода $\varphi : \beta \rightarrowtail \alpha$ можно подобрать две последовательности измеримых компактных областей $D_k \subseteq \mathsf{R}(\varphi)$ и $G_k \subseteq \mathsf{D}(\varphi)$ такие что*
$$D_k = \varphi(G_k), \quad \mu\Big(\mathsf{D}(\alpha) \setminus D_k\Big) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0, \quad \mu\Big(\mathsf{D}(\beta) \setminus G_k\Big) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

Ориентированная подчиненность и ориентированная эквивалентность.

- Пусть $\alpha : I \to X$ и $\beta : J \to X$ – две параметризованные поверхности в евклидовом пространстве X. Говорят, что
  — β *ориентированно подчинена* α, и обозначают это записью
$$\beta \subseteqq \alpha,$$
  если существует функция перехода $\varphi : \beta \rightarrowtail \alpha$, имеющая всюду положительный Якобиан:
$$\det \mathsf{d}\,\varphi(x) > 0, \qquad x \in \mathsf{D}(\varphi) \tag{17.1.8}$$
  (в этом случае β подчинена α, то есть $\mathsf{R}(\beta) \subseteq \mathsf{R}(\alpha)$);
  — β *ориентированно эквивалентна* α, и обозначают это записью
$$\beta \equiv \alpha,$$
  если β эквивалентна α,
$$\beta \cong \alpha$$
  (то есть $\mathsf{R}(\beta) = \mathsf{R}(\alpha)$) и ориентированно подчинена α:
$$\beta \subseteqq \alpha.$$
  (в этом случае α тоже ориентированно подчинена β: $\alpha \subseteqq \beta$).

Из теоремы 17.1.2 следует

Теорема 17.1.4. *Если параметризованная поверхность $\beta : J \to X$ ориентированно подчинена параметризованной поверхности $\alpha : I \to X$,*
$$\beta \subseteqq \alpha$$
то след $\alpha|_\beta$ отображения β в отображении α является параметризованной поверхностью, ориентированно эквивалентной β:
$$\beta \equiv \alpha|_\beta.$$

Следующие свойства очевидны.

Свойства параметризованных поверхностей:

1^0. *Всегда $\alpha \equiv \alpha$.*

2^0. *Если $\alpha \equiv \beta$, то $\beta \equiv \alpha$.*

3^0. *Если $\alpha \equiv \beta$ и $\beta \equiv \gamma$, то $\alpha \equiv \gamma$.*

4^0. *Если $\widetilde{\beta} \equiv \beta \subseteqq \alpha \equiv \widetilde{\alpha}$, то $\widetilde{\beta} \subseteqq \widetilde{\alpha}$.*

(b) Разбиения параметризованных поверхностей

Поверхности, пересекающиеся несущественно. Пусть нам даны две параметризованные поверхности $\alpha : I \to X$ и $\beta : J \to X$. Будем говорить, что они *пересекаются несущественно*, и обозначать это записью
$$\alpha \pitchfork \beta,$$
если выполняются следующие два эквивалентных условия:

(a) след $\beta\big|_\alpha$ отображения α в отображении β есть вырожденная параметризованная поверхность:
$$\mu\Big(\mathsf{D}(\beta\big|_\alpha)\Big) = \mu\Big(\beta^{-1}\big(\alpha(I)\big)\Big) = 0.$$

(b) след $\alpha\big|_\beta$ отображения β в отображении α есть вырожденная параметризованная поверхность;
$$\mu\Big(\mathsf{D}(\alpha\big|_\beta)\Big) = \mu\Big(\alpha^{-1}\big(\beta(J)\big)\Big) = 0.$$

Понятно, что частным случаем здесь будет ситуация, когда поверхности совсем не пересекаются:
$$\mathsf{R}(\alpha) \cap \mathsf{R}(\beta) = \varnothing,$$

Доказательство. Эквивалентность условий (a) и (b) следует из леммы 15.3.12 и формулы (15.3.148): если $\beta\big|_\alpha$ – вырожденное полурегулярное отображение, то его след

$$\alpha\big|_{\beta|_\alpha} = \alpha\big|_\beta$$

в полурегулярном отображении α тоже должен быть вырожденным полурегулярным отображением, и наоборот. $\square$

Теорема 17.1.5. *Если параметризованные поверхности α и β пересекаются несущественно, то любые две эквивалентные им поверхности $\widetilde{\alpha}$ и $\widetilde{\beta}$ также пересекаются несущественно:*

$$\widetilde{\beta} \cong \beta \pitchfork \alpha \cong \widetilde{\alpha} \quad \Longrightarrow \quad \widetilde{\beta} \pitchfork \widetilde{\alpha}$$

Доказательство. Если $\widetilde{\beta} \cong \beta$ и $\beta \pitchfork \alpha$, то мы получаем

$$\mu\Big(\mathsf{D}(\alpha\big|_{\widetilde{\beta}})\Big) = \mu\Big(\alpha^{-1}\big(\mathsf{R}(\widetilde{\beta})\big)\Big) = \mu\Big(\alpha^{-1}\big(\mathsf{R}(\beta)\big)\Big) = 0.$$

то есть $\alpha \pitchfork \widetilde{\beta}$. Точно так же получаем $\widetilde{\alpha} \pitchfork \widetilde{\beta}$. $\square$

Разбиение параметризованной поверхности. Говорят, что параметризованные поверхности $\beta_1, ..., \beta_m$ образуют *(ориентированное) разбиение* параметризованной поверхности α и обозначают это формулой

$$\alpha \equiv \beta_1 \sqcup ... \sqcup \beta_m,$$

или формулой

$$\alpha \equiv \bigsqcup_{i=1}^m \beta_i, \tag{17.1.9}$$

если

P1: каждая поверхность β_i (ориентированно) подчинена α,

P2: поверхности $\beta_1, ..., \beta_m$ попарно несущественно пересекаются:

$$\forall i \neq j \qquad \beta_i \pitchfork \beta_j$$

P3: объединение их носителей совпадает с носителем α:

$$\mathsf{R}(\alpha) = \mathsf{R}(\beta_1) \cup ... \cup \mathsf{R}(\beta_m)$$

Заметим, что если поверхности $\beta_1, ..., \beta_m$ невырождены, то они не могут повторяться (поскольку пересекаются несущественно). Поэтому в таких случаях удобно разбиение представлять себе как множество поверхностей (а не как последовательность с индексами). Это позволяет в записи избавиться от индексов: если разбиение обозначено одной буквой $\mathcal{B} = \{\beta_1, ..., \beta_m\}$, то формула (17.1.9) переписывается так:

$$\alpha \equiv \bigsqcup_{\beta\in\mathcal{B}} \beta.$$

◇ **17.1.2.** Если $\alpha : I \to X$ – параметризованная поверхность, то для любого измеримого разбиения $I_1, ..., I_m$ компакта I, система ограничений $\alpha|_{I_1}, ..., \alpha|_{I_m}$ образует разбиение поверхности α:

$$\alpha \equiv \bigsqcup_{i=1}^m \alpha|_{I_i}$$

(Это доказывается так же, как теорема 16.1.5.)

Следующие четыре теоремы аналогичны теоремам 16.1.5, 16.1.6, 16.1.7 и 16.1.8 и доказываются так же.

Теорема 17.1.6 (о следе разбиения в области параметров). *Пусть $\alpha : I \to X$ – параметризованная поверхность. Тогда*

(i) *для любого измеримого разбиения* $I_1, ..., I_m$ *компакта* I *(компактами), система ограничений* $\alpha|_{I_1}, ..., \alpha|_{I_m}$ *образует ориентированное разбиение поверхности* α*:*

$$I = \bigsqcup_{i=1}^{m} I_i \qquad \Longrightarrow \qquad \alpha \equiv \bigsqcup_{i=1}^{m} \alpha|_{I_i} \tag{17.1.10}$$

(ii) *наоборот, если* $\beta_1, ..., \beta_m$ *– (ориетированное) разбиение параметризованной поверхности* $\alpha : I \to X$*, то система множеств* $\alpha^{-1}(\mathsf{R}(\beta_i))$ *является измеримым разбиением компакта* I*:*

$$\alpha \equiv \bigsqcup_{i=1}^{m} \beta_i \qquad \Longrightarrow \qquad I = \bigsqcup_{i=1}^{m} \alpha^{-1}(\mathsf{R}(\beta_i)), \tag{17.1.11}$$

и тогда следы $\alpha\big|_{\beta_1}, ..., \alpha\big|_{\beta_m}$ *кривых* $\beta_1, ..., \beta_m$ *в поверхности* α*, (ориентированно) эквивалентны поверхностям* $\beta_1, ..., \beta_m$ *и образуют разбиение поверхности* α*,*

$$\alpha\big|_{\beta_i} \equiv \beta_i, \qquad \alpha \equiv \bigsqcup_{i=1}^{m} \alpha\big|_{\beta_i}. \tag{17.1.12}$$

Теорема 17.1.7 (об эквивалентных разбиениях). *Пусть* $\beta_1, ..., \beta_m$ *– (ориентированное) разбиение параметризованной поверхности* α*:*

$$\alpha \equiv \bigsqcup_{i=1}^{m} \beta_i.$$

Тогда

(i) *для любой поверхности* $\widetilde{\alpha}$*, (ориентированно) эквивалентной поверхности* α*, система* $\beta_1, ..., \beta_m$ *будет также разбиением:*

$$\widetilde{\alpha} \equiv \alpha \quad \Longrightarrow \quad \widetilde{\alpha} \equiv \bigsqcup_{i=1}^{m} \beta_i,$$

(ii) *любые поверхности* $\widetilde{\beta}_1, ..., \widetilde{\beta}_m$ *(ориентированно) эквивалентные поверхностям* $\beta_1, ..., \beta_m$*, также образуют разбиение поверхности* α*:*

$$\widetilde{\beta}_i \equiv \beta_i \quad \Longrightarrow \quad \alpha \equiv \bigsqcup_{i=1}^{m} \widetilde{\beta}_i,$$

Теорема 17.1.8 (о дополнении к подчиненной поверхности). *Если* α *– параметризованная поверхность и* β *– (ориентированно) подчиненная ей параметризованная поверхность, то найдется параметризованная поверхность* γ*, (ориентированно) подчиненная поверхности* α *и составляющая с* β *(ориентированное) разбиение* α*:*

$$\alpha \equiv \beta \sqcup \gamma. \tag{17.1.13}$$

Теорема 17.1.9 (о следе разбиения в подчиненной поверхности). *Пусть* $\beta_1, ..., \beta_m$ *– (ориентированное) разбиение параметризованной поверхности* α*:*

$$\alpha \equiv \bigsqcup_{i=1}^{m} \beta_i.$$

Тогда на всякой параметризованной поверхности γ*, (ориентированно) подчиненной поверхности* α*,*

$$\gamma \subseteq \alpha,$$

кривые $\beta_1, ..., \beta_m$ *оставляют след, являющийся (ориентированным) разбиением поверхности* γ

$$\gamma \equiv \bigsqcup_{i=1}^{m} \gamma\big|_{\beta_i}.$$

§ 2 Поверхность, ее скалярная площадь и изотропный интеграл по поверхности

(a) Поверхность

Определение поверхности и примеры.

- Множество L в евклидовом пространстве X мы называем *скалярной поверхностью*, или просто *поверхностью*, если оно является образом некоторой параметризованной поверхности $\alpha : I \to X$:
$$S = \mathsf{R}(\alpha).$$
При этом отображение α называется *параметризацией* поверхности L.
- Поверхность L называется
  - — *регулярной*, если она допускает регулярную параметризацию $\alpha : I \to L$ (то есть можно ее представить как образ регулярной параметризованной поверхности $\alpha : I \to X$),
  - — *вырожденной*, если она допускает вырожденную параметризацию $\alpha : I \to L$ (то есть если ее можно представить как образ вырожденной параметризованной поверхности $\alpha : I \to X$; при этом в силу следствия 15.3.13, любая другая параметризация $\beta : J \to X$ множества L также будет вырожденной параметризованной поверхностью).
  - — *связной*, если L является связным множеством.

След подчиненной поверхности в области параметров объемлющей поверхности. В соответствии с определением с. 956, мы говорим, что поверхность M *подчинена* поверхности L, если M содержится в L:
$$M \subseteq L.$$

Если поверхность M подчинена поверхности L и $\sigma : D \to L$ – параметризация поверхности L, то отображение $\sigma|_M$, определенное как ограничение отображения σ на подмножество $\sigma^{-1}(M) \subseteq D$:
$$\sigma|_M = \sigma|_{\sigma^{-1}(M)} : \sigma^{-1}(M) \to M$$
мы будем называть *следом поверхности* M в параметризации σ.

Из общей теоремы о подчиненном полурегулярном отображении 15.3.14 следуют два свойства подчиненных поверхностей:

Теорема 17.2.1. *След $\sigma|_M$ подчиненной поверхности $M \subseteq L$ в произвольной параметризации $\sigma : D \to L$ поверхности L является параметризацией поверхности M (а множество $\sigma^{-1}(M)$ – измеримым по Жордану компактом).*

Теорема 17.2.2. *Если M и N – две скалярные поверхности, подчиненные скалярной поверхности L,*
$$M \subseteq L, \qquad N \subseteq L,$$
то их объединение $M \cup N$ и пересечение $M \cap N$ тоже являются скалярными поверхностями, подчиненными поверхности L:
$$M \cup N \subseteq L, \qquad M \cap N \subseteq L.$$

Разбиение скалярной поверхности. Пусть $\mathcal{T}$ обозначает конечное множество поверхностей. Говорят, что $\mathcal{T}$ является *разбиением поверхности* L, и записывают это формулой
$$L \cong \bigsqcup_{T \in \mathcal{T}} T$$
если выполняются следующие эквивалентные условия:

(a) существует параметризация α поверхности L и параметризации β_T поверхностей $T \in \mathcal{T}$ такие, что система $\{\beta_T;\ T \in \mathcal{T}\}$ является разбиением параметризованной поверхности α
$$\alpha \cong \bigsqcup_{T \in \mathcal{T}} \beta_T$$

(b) для любой параметризации α поверхности L и любых параметризаций β_T поверхностей $T \in \mathcal{T}$ система $\{\beta_T; T \in \mathcal{T}\}$ является разбиением параметризованной поверхности α

$$\alpha \cong \bigsqcup_{T\in\mathcal{T}} \beta_T$$

Доказательство. Эквивалентность этих условий следует из теорем 16.1.4 и 16.1.6. □

Из теорем 17.1.6, 17.1.7, 17.1.8 и 17.1.9 следуют

Свойства разбиений скалярных поверхностей

1°. *Разбиения скалярной поверхности эквивалентны разбиениям ее области параметров: если $\alpha : I \to L$ – произвольная параметризая скалярной поверхности L, то*

(i) для любого измеримого разбиения $I_1, ..., I_m$ области параметров I компактами ограничения

$$\alpha_i = \alpha\big|_{I_i}$$

определяют скалярные поверхности $L_1, ..., L_m$, образующие разбиение скалярной поверхности L,

(ii) и наоборот, для любого разбиения $L_1, ..., L_m$ скалярной поверхности L множества $I_i = \{s \in I : \alpha(s) \in L_i\}$, образуют измеримое разбиение множества I компактами.

2°. *Если M – скалярная поверхность, подчиненная скалярной поверхности L,*

$$M \subseteq L$$

то найдется скалярная поверхность N, образующая в паре с M разбиение поверхности L:

$$L \cong M \sqcup N$$

3°. *Если $\mathcal{T}$ – разбиение скаляной поверхности L,*

$$L \cong \bigsqcup_{T\in\mathcal{T}} T$$

то для любой подчиненной поверхности $M \subseteq L$ система $\{T \cap M; T \in \mathcal{T}\}$ будет разбиением поверхности M:

$$M \cong \bigsqcup_{T\in\mathcal{T}} T \cap M$$

В частности, если $\{S, T\}$ – разбиение поверхности L,

$$L \cong S \sqcup T,$$

то для любой подчиненной поверхности $M \subseteq L$ пара поверхностей $\{S \cap M, T \cap M\}$ образует разбиение поверхности M,

$$M \cong (S \cap M) \sqcup (T \cap M) \tag{17.2.14}$$

(b) Площадь поверхности

Определение площади поверхности и формула для ее вычисления. Теперь мы, наконец, можем объяснить как определяется площадь поверхности в X.

Пусть S – поверхность в X и $\sigma : D \to S$ – какая-нибудь ее параметризация. Чтобы определить площадь S, рассмотрим систему $\mathsf{G}_k(D)$ внутренних клеток двоичной сетки[1] какого-нибудь ранга k для множества D. Каждая клетка $Q \subseteq \mathsf{G}_k(D)$ есть квадрат со стороной $\frac{1}{2^k}$. Как у любого квадрата, у Q имеется две диагонали. Зафиксируем какую-нибудь из них, например, ту, которая параллельна прямой $x+y = 0$ (для дальнейших построений неважно, какую именно диагональ мы фиксируем, но для единообразия, пусть все выбранные диагонали будут параллельны). Наш квадрат Q разобьется таким образом на два прямоугольных треугольника (с катетами, параллельными осям координат).

[1] Понятие двоичной сетки было введено на с.891.

Проделаем ту же самую процедуру со всеми внутренними клетками, и тогда множество $\mathsf{G}_k(D)$ разобьется на систему прямоугольных треугольников:

Занумеруем эти треугольники: $T_1, ..., T_m$. Для каждого треугольника T_i пусть A_i, B_i, C_i обозначают его вершины. Под действием отображения σ эти точки превращаются в точки $\sigma(A_i), \sigma(B_i), \sigma(C_i)$ на поверхности S. Соединив их отрезками, мы получим треугольник T_i, вписанный в S:

Площадь $\mathsf{Area}(T_i)$ этого треугольника будет равна половине площади параллелограмма, образованного векторами $\sigma(A_i) - \sigma(C_i)$ и $\sigma(B_i) - \sigma(C_i)$, то есть, по формуле (15.1.17)

$$\mathsf{Area}(T_i) = \frac{1}{2}\Big|\big(\sigma(A_i) - \sigma(C_i)\big) \vee \big(\sigma(B_i) - \sigma(C_i)\big)\Big| = \frac{1}{2}\sqrt{\mathsf{Gram}\,\Big(\sigma(A_i) - \sigma(C_i), \sigma(B_i) - \sigma(C_i)\Big)}$$

Эту процедуру мы проделываем для всех треугольников T_i, и у нас получается система треугольников, называемая *многогранной поверхностью, вписанной в* S:

Эту многогранную поверхность мы обозначаем S_k. Ее площадь считается равной сумме площадей входящих в нее треугольников:

$$\mathsf{Area}(S_k) = \sum_{i=1}^{m} \mathsf{Area}(T_i) = \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{2}\Big|\big(\sigma(A_i) - \sigma(C_i)\big) \vee \big(\sigma(B_i) - \sigma(C_i)\big)\Big| =$$
$$= \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{2}\sqrt{\mathsf{Gram}\,\Big(\sigma(A_i) - \sigma(C_i), \sigma(B_i) - \sigma(C_i)\Big)}$$

Понятно, что при увеличении ранга k двоичной сетки соответствующая многогранная поверхность все более "приближается" к S.

Теорема 17.2.3. *Для любой поверхности S и всякой ее параметризации $\sigma : D \to S$ существует конечный предел площадей многогранных поверхностей S_k, вписанных в S*

$$\lim_{k\to\infty} \mathsf{Area}(S_k)$$

Этот предел называется площадью *поверхности S и обозначается $\mathsf{Area}(S)$. Он не зависит от выбора параметризации $\sigma : D \to S$ и вычисляется по формуле*

$$\boxed{\mathsf{Area}(S) = \iint_D \big|\,\mathsf{J}\,\sigma(u,v)\big|\,\mathsf{d}\,u\,\mathsf{d}\,v = \iint_D \sqrt{\mathsf{Gram}\,(\nabla_1\sigma(u,v), \nabla_2\sigma(u,v))}\,\mathsf{d}\,u\,\mathsf{d}\,v} \qquad (17.2.15)$$

или, в подробной записи,

$$\boxed{\mathsf{Area}(S)=\iint\limits_D \sqrt{\left|\nabla_1\sigma(u,v)\right|^2\cdot\left|\nabla_2\sigma(u,v)\right|^2-\left[\nabla_1\sigma(u,v),\nabla_2\sigma(u,v)\right]^2}\,\mathsf{d}\,u\,\mathsf{d}\,v} \tag{17.2.16}$$

Доказательство. Пусть для определенности, в каждом треугольнике T_i через C_i обозначается вершина прямого угла, через A_i – вершина острого угла, лежащая на одной горизонтали с C_i, а через B_i – вершина острого угла, лежащая на одной вертикали с C_i.

Обозначив

$$h_i=\begin{cases}\frac{1}{2^k}, & \text{если треугольник } T_i \text{ лежит ниже своей гипотенузы,}\\ -\frac{1}{2^k}, & \text{если треугольник } T_i \text{ лежит выше своей гипотенузы}\end{cases}$$

мы получим

$$A_i=C_i+h_i\cdot e_1,\qquad B_i=C_i+h_i\cdot e_2$$

где $e_1=(1,0), e_2=(0,1)$ – стандартные базисные векторы на плоскости $\mathbb{R}^2$.

1. Отметим следующее неравенство:

$$\left|\frac{\sigma(A_i)-\sigma(C_i)}{h_i}\right|\leqslant\max_{M\in D}\left|\nabla_1\sigma(M)\right| \tag{17.2.17}$$

Докажем это (здесь мы считаем, что $h_i>0$, случай же отрицательного h_i рассматривается аналогично):

$$\left|\frac{\sigma(A_i)-\sigma(C_i)}{h_i}\right|=\left|\frac{1}{h_i}\Big(\sigma(C_i+h_i\cdot e_1)-\sigma(C_i)\Big)\right|=\left|\frac{1}{h_i}\int_0^{h_i}\underbrace{\frac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}\,t}\Big(\sigma(C_i+t\cdot e_1)\Big)}_{\substack{\parallel\\ \nabla_1\sigma(C_i+t\cdot e_1)}}\mathsf{d}\,t\right|=$$

$$=\left|\frac{1}{h_i}\int_0^{h_i}\nabla_1\sigma(C_i+t\cdot e_1)\,\mathsf{d}\,t\right|\leqslant(15.2.112)\leqslant\frac{1}{h_i}\int_0^{h_i}\underbrace{\Big|\nabla_1\sigma(\overbrace{C_i+t\cdot e_1}^{\substack{\text{лежит в } T_i\\ \downarrow}})\Big|}_{\substack{\wedge\!\!\parallel\\ \max_{M\in D}|\nabla_1\sigma(M)|}}\mathsf{d}\,t\leqslant\frac{1}{h_i}\int_0^{h_i}\underbrace{\max_{M\in D}\left|\nabla_1\sigma(M)\right|}_{\text{не зависит от } t}\mathsf{d}\,t=$$

$$=\max_{M\in D}\left|\nabla_1\sigma(M)\right|\frac{1}{h_i}\underbrace{\int_0^{h_i}1\,\mathsf{d}\,t}_{\substack{\parallel\\ h_i}}=\max_{M\in D}\left|\nabla_1\sigma(M)\right|$$

2. Отметим еще два неравенства:

$$\max_i\sup_{L\in T_i}\left|\nabla_1\sigma(L)-\frac{\sigma(A_i)-\sigma(C_i)}{h_i}\right|\leqslant\max_{\substack{M,\,N\,\in\,D\\ |M\,-\,N|\,\leqslant\,\frac{\sqrt{2}}{2^k}}}\left|\nabla_1\sigma(M)-\nabla_1\sigma(N)\right|=I_k\underset{k\to\infty}{\longrightarrow}0 \tag{17.2.18}$$

$$\max_i\sup_{L\in T_i}\left|\nabla_2\sigma(L)-\frac{\sigma(B_i)-\sigma(C_i)}{h_i}\right|\leqslant\max_{\substack{M,\,N\,\in\,D\\ |M\,-\,N|\,\leqslant\,\frac{\sqrt{2}}{2^k}}}\left|\nabla_2\sigma(M)-\nabla_2\sigma(N)\right|=J_k\underset{k\to\infty}{\longrightarrow}0 \tag{17.2.19}$$

Они доказываются одинаково, вот, например, доказательство (17.2.18): во-первых,

$$\max_{\substack{M,\,N\,\in\,D\\ |M\,-\,N|\,\leqslant\,\frac{\sqrt{2}}{2^k}}}\left|\nabla_1\sigma(M)-\nabla_1\sigma(N)\right|=I_k\underset{k\to\infty}{\longrightarrow}0$$

потому что функция $\nabla_1\sigma(M)$ непрерывна на компакте D, значит, по теореме Кантора 14.1.2, равномерно непрерывна на D. А, во-вторых, если $L\in T_i$, то (здесь мы, как и выше, считаем, что $h_i>0$, но случай отрицательного h_i рассматривается точно так же)

$$\left|\nabla_1\sigma(L)-\frac{\sigma(A_i)-\sigma(C_i)}{h_i}\right| = \left|\nabla_1\sigma(L)-\frac{1}{h_i}\Big(\sigma(C_i+h_i\cdot e_1)-\sigma(C_i)\Big)\right| =$$

$$= \Bigg|\underbrace{\nabla_1\sigma(L)}_{\substack{\| \\ \frac{1}{h_i}\int_0^{h_i}\underbrace{\nabla_1\sigma(L)\,\mathsf{d}\,t}_{\text{не зависит от } t}}} - \frac{1}{h_i}\int_0^{h_i}\underbrace{\frac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}\,t}\Big(\sigma(C_i+t\cdot e_1)\Big)}_{\substack{\| \\ \nabla_1\sigma(C_i+t\cdot e_1)}}\mathsf{d}\,t\Bigg| = \left|\frac{1}{h_i}\int_0^{h_i}\nabla_1\sigma(L)\,\mathsf{d}\,t-\frac{1}{h_i}\int_0^{h_i}\nabla_1\sigma(C_i+t\cdot e_1)\,\mathsf{d}\,t\right| =$$

$$= \left|\frac{1}{h_i}\int_0^{h_i}\big(\nabla_1\sigma(L)\,\mathsf{d}\,t-\nabla_1\sigma(C_i+t\cdot e_1)\big)\,\mathsf{d}\,t\right| \leqslant (15.2.112) \leqslant \frac{1}{h_i}\int_0^{h_i}\underbrace{\Big|\nabla_1\sigma(\overset{\substack{\text{лежит}\\ \text{в } T_i\\ \downarrow}}{L})-\nabla_1\sigma(\overbrace{C_i+t\cdot e_1}^{\substack{\text{лежит в } T_i\\ \downarrow}})\Big|}_{\substack{\wedge\!\!\backslash\!\backslash \\ \max_{M,N\in T_i}|\nabla_1\sigma(M)-\nabla_1\sigma(N)|}}\mathsf{d}\,t \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{h_i}\int_0^{h_i}\underbrace{\max_{M,N\in T_i}|\nabla_1\sigma(M)-\nabla_1\sigma(N)|\,\mathsf{d}\,t}_{\text{не зависит от } t} = \max_{M,N\in T_i}|\nabla_1\sigma(M)-\nabla_1\sigma(N)|\,\frac{1}{h_i}\underbrace{\int_0^{h_i}1\,\mathsf{d}\,t}_{\substack{\| \\ h_i}} =$$

$$= \max_{\substack{M,N\in T_i\\ \uparrow \\ \text{содержится в } D\\ \text{и имеет диаметр}\\ \mathsf{diam}(T_i)=\frac{\sqrt{2}}{2^k}}}|\nabla_1\sigma(M)-\nabla_1\sigma(N)| \leqslant \max_{\substack{M,\,N\,\in\, D\\ |M-N|\leqslant\frac{\sqrt{2}}{2^k}}}|\nabla_1\sigma(M)-\nabla_1\sigma(N)|$$

3. Заметим следующее соотношение:

$$\left|\iint\limits_{\mathsf{G}_k(D)}|\,\mathsf{J}\,\sigma(u,v)|\,\mathsf{d}\,u\,\mathsf{d}\,v-\sum_{i=1}^m\frac{1}{2}\Big|\big(\sigma(A_i)-\sigma(C_i)\big)\vee\big(\sigma(B_i)-\sigma(C_i)\big)\Big|\right| = R_k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0 \qquad (17.2.20)$$

Оно доказывается с помощью следующей (рекордной по длине в этом тексте) цепочки неравенств:

$$\left|\iint\limits_{\mathsf{G}_k(D)}|\,\mathsf{J}\,\sigma(u,v)|\,\mathsf{d}\,u\,\mathsf{d}\,v-\sum_{i=1}^m\frac{1}{2}\Big|\big(\sigma(A_i)-\sigma(C_i)\big)\vee\big(\sigma(B_i)-\sigma(C_i)\big)\Big|\right| =$$

$$= \left|\sum_{i=1}^m\iint\limits_{T_i}|\,\mathsf{J}\,\sigma(u,v)|\,\mathsf{d}\,u\,\mathsf{d}\,v-\sum_{i=1}^m\frac{1}{2}\Big|\big(\sigma(A_i)-\sigma(C_i)\big)\vee\big(\sigma(B_i)-\sigma(C_i)\big)\Big|\right| =$$

$$= \left|\sum_{i=1}^m\left(\iint\limits_{T_i}|\,\mathsf{J}\,\sigma(u,v)|\,\mathsf{d}\,u\,\mathsf{d}\,v-\frac{1}{2}\Big|\big(\sigma(A_i)-\sigma(C_i)\big)\vee\big(\sigma(B_i)-\sigma(C_i)\big)\Big|\right)\right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^m\left|\iint\limits_{T_i}|\,\mathsf{J}\,\sigma(u,v)|\,\mathsf{d}\,u\,\mathsf{d}\,v-\frac{1}{2}\Big|\big(\sigma(A_i)-\sigma(C_i)\big)\vee\big(\sigma(B_i)-\sigma(C_i)\big)\Big|\right| =$$

$$= \sum_{i=1}^m\left|\iint\limits_{T_i}|\,\mathsf{J}\,\sigma(u,v)|\,\mathsf{d}\,u\,\mathsf{d}\,v-\frac{1}{\underbrace{2\mu(T_i)}_{\substack{\| \\ h_i^2}}}\iint\limits_{T_i}\underbrace{\Big|\big(\sigma(A_i)-\sigma(C_i)\big)\vee\big(\sigma(B_i)-\sigma(C_i)\big)\Big|}_{\text{не зависит от } u,v}\,\mathsf{d}\,u\,\mathsf{d}\,v\right| =$$

$$= \sum_{i=1}^m\left|\iint\limits_{T_i}|\,\mathsf{J}\,\sigma(u,v)|\,\mathsf{d}\,u\,\mathsf{d}\,v-\underset{\substack{\uparrow\\ \text{вносим}\\ \text{под интеграл}}}{\frac{1}{h_i^2}}\iint\limits_{T_i}\Big|\big(\sigma(A_i)-\sigma(C_i)\big)\vee\big(\sigma(B_i)-\sigma(C_i)\big)\Big|\,\mathsf{d}\,u\,\mathsf{d}\,v\right| =$$

$$= \sum_{i=1}^m\left|\iint\limits_{T_i}|\,\mathsf{J}\,\sigma(u,v)|\,\mathsf{d}\,u\,\mathsf{d}\,v-\iint\limits_{T_i}\left|\frac{\sigma(A_i)-\sigma(C_i)}{h_i}\vee\frac{\sigma(B_i)-\sigma(C_i)}{h_i}\right|\,\mathsf{d}\,u\,\mathsf{d}\,v\right| =$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \left| \iint\limits_{T_i} \left(|\mathsf{J}\,\sigma(u,v)| - \left| \frac{\sigma(A_i)-\sigma(C_i)}{h_i} \vee \frac{\sigma(B_i)-\sigma(C_i)}{h_i} \right| \right) \mathsf{d}\,u\,\mathsf{d}\,v \right| \leqslant (15.2.71) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{m} \iint\limits_{T_i} \left| |\mathsf{J}\,\sigma(u,v)| - \left| \frac{\sigma(A_i)-\sigma(C_i)}{h_i} \vee \frac{\sigma(B_i)-\sigma(C_i)}{h_i} \right| \right| \mathsf{d}\,u\,\mathsf{d}\,v =$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \iint\limits_{T_i} \Bigg| |\mathsf{J}\,\sigma(u,v)| \underbrace{- \left| \frac{\sigma(A_i)-\sigma(C_i)}{h_i} \vee \nabla_2\sigma(u,v) \right| + \left| \frac{\sigma(A_i)-\sigma(C_i)}{h_i} \vee \nabla_2\sigma(u,v) \right|}_{\substack{\text{эти два слагаемых в сумме дают ноль,}\\ \text{поэтому от их добавления сумма не меняется}}} -$$

$$- \left| \frac{\sigma(A_i)-\sigma(C_i)}{h_i} \vee \frac{\sigma(B_i)-\sigma(C_i)}{h_i} \right| \Bigg| \mathsf{d}\,u\,\mathsf{d}\,v =$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \iint\limits_{T_i} \Bigg| |\mathsf{J}\,\sigma(u,v)| - \left| \frac{\sigma(A_i)-\sigma(C_i)}{h_i} \vee \nabla_2\sigma(u,v) \right| +$$

$$+ \left| \frac{\sigma(A_i)-\sigma(C_i)}{h_i} \vee \nabla_2\sigma(u,v) \right| - \left| \frac{\sigma(A_i)-\sigma(C_i)}{h_i} \vee \frac{\sigma(B_i)-\sigma(C_i)}{h_i} \right| \Bigg| \mathsf{d}\,u\,\mathsf{d}\,v \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{m} \iint\limits_{T_i} \left(\left| |\mathsf{J}\,\sigma(u,v)| - \left| \frac{\sigma(A_i)-\sigma(C_i)}{h_i} \vee \nabla_2\sigma(u,v) \right| \right| + \right.$$

$$\left. + \left| \left| \frac{\sigma(A_i)-\sigma(C_i)}{h_i} \vee \nabla_2\sigma(u,v) \right| - \left| \frac{\sigma(A_i)-\sigma(C_i)}{h_i} \vee \frac{\sigma(B_i)-\sigma(C_i)}{h_i} \right| \right| \right) \mathsf{d}\,u\,\mathsf{d}\,v \leqslant$$

$$\leqslant (13.1.8) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{m} \iint\limits_{T_i} \left(\left| \mathsf{J}\,\sigma(u,v) - \frac{\sigma(A_i)-\sigma(C_i)}{h_i} \vee \nabla_2\sigma(u,v) \right| + \right.$$

$$\left. + \left| \frac{\sigma(A_i)-\sigma(C_i)}{h_i} \vee \nabla_2\sigma(u,v) - \frac{\sigma(A_i)-\sigma(C_i)}{h_i} \vee \frac{\sigma(B_i)-\sigma(C_i)}{h_i} \right| \right) \mathsf{d}\,u\,\mathsf{d}\,v \leqslant$$

$$\leqslant (14.2.135) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{m} \iint\limits_{T_i} \left(\left| \nabla_1\sigma(u,v) \vee \nabla_2\sigma(u,v) - \frac{\sigma(A_i)-\sigma(C_i)}{h_i} \vee \nabla_2\sigma(u,v) \right| + \right.$$

$$\left. + \left| \frac{\sigma(A_i)-\sigma(C_i)}{h_i} \vee \nabla_2\sigma(u,v) - \frac{\sigma(A_i)-\sigma(C_i)}{h_i} \vee \frac{\sigma(B_i)-\sigma(C_i)}{h_i} \right| \right) \mathsf{d}\,u\,\mathsf{d}\,v =$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \iint\limits_{T_i} \left(\left| \nabla_1\sigma(u,v) \vee \nabla_2\sigma(u,v) - \frac{\sigma(A_i)-\sigma(C_i)}{h_i} \vee \nabla_2\sigma(u,v) \right| + \right.$$

$$\left. + \left| \frac{\sigma(A_i)-\sigma(C_i)}{h_i} \vee \left(\nabla_2\sigma(u,v) - \frac{\sigma(B_i)-\sigma(C_i)}{h_i} \right) \right| \right) \mathsf{d}\,u\,\mathsf{d}\,v \leqslant$$

$$\leqslant (13.1.57) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{m} \iint\limits_{T_i} \left(\underbrace{\left| \nabla_1\sigma(u,v) - \frac{\sigma(A_i)-\sigma(C_i)}{h_i} \right|}_{\substack{\mathbin{\rotatebox[origin=c]{90}{$\geqslant$}}(17.2.18)\\ I_k}} \cdot \underbrace{\left| \nabla_2\sigma(u,v) \right|}_{\substack{\text{не превышает максимума}\\ \text{этой функции на } D}} + \right.$$

$$\left. + \underbrace{\left| \frac{\sigma(A_i)-\sigma(C_i)}{h_i} \right|}_{\substack{\text{оцениваем}\\ \text{по формуле (17.2.17)}}} \cdot \underbrace{\left| \nabla_2\sigma(u,v) - \frac{\sigma(B_i)-\sigma(C_i)}{h_i} \right|}_{\substack{\mathbin{\rotatebox[origin=c]{90}{$\geqslant$}}\,(17.2.19)\\ J_k}} \right) \mathsf{d}\,u\,\mathsf{d}\,v \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{m} \iint_{T_i} \underbrace{\left(I_k \cdot \max_{M\in D} \left| \nabla_2 \sigma(M) \right| + \max_{M\in D} \left| \nabla_1 \sigma(M) \right| \cdot J_k \right)}_{\substack{\text{не зависит от } u,\, v, \\ \text{поэтому можно вынести за знак} \\ \text{интеграла и суммы}}} \mathsf{d}\, u \, \mathsf{d}\, v =$$

$$= \left(I_k \cdot \max_{M\in D} \left| \nabla_2 \sigma(M) \right| + \max_{M\in D} \left| \nabla_1 \sigma(M) \right| \cdot J_k \right) \cdot \underbrace{\sum_{i=1}^{m} \mu(T_i)}_{\substack{\parallel \\ \mu\left(\mathsf{G}_k(D)\right)}} =$$

$$= \Bigg(\underbrace{I_k}_{\substack{\downarrow \\ 0 \\ \text{при } k\to\infty, \\ \text{по формуле (17.2.18)}}} \cdot \underbrace{\max_{M\in D} \left| \nabla_2 \sigma(M) \right|}_{\text{не зависит от } k} + \underbrace{\max_{M\in D} \left| \nabla_1 \sigma(M) \right|}_{\text{не зависит от } k} \cdot \underbrace{J_k}_{\substack{\downarrow \\ 0 \\ \text{при } k\to\infty, \\ \text{по формуле (17.2.19)}}} \Bigg) \cdot \underbrace{\mu\Big(\mathsf{G}_k(D)\Big)}_{\substack{\downarrow \\ \mu(D) \\ \text{при } k\to\infty}} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

4. Теперь мы можем доказать (17.2.15):

$$\Bigg| \underbrace{\iint_D |\, \mathsf{J}\, \sigma(u,v)|\, \mathsf{d}\, u \, \mathsf{d}\, v}_{\text{разбиваем на два интеграла}} - \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{2} \Big| \big(\sigma(A_i)-\sigma(C_i)\big) \vee \big(\sigma(B_i)-\sigma(C_i)\big) \Big| \Bigg| =$$

$$= \Bigg| \iint_{D\setminus \mathsf{G}_k(D)} |\, \mathsf{J}\, \sigma(u,v)|\, \mathsf{d}\, u \, \mathsf{d}\, v + \iint_{\mathsf{G}_k(D)} |\, \mathsf{J}\, \sigma(u,v)|\, \mathsf{d}\, u \, \mathsf{d}\, v -$$

$$- \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{2} \Big| \big(\sigma(A_i)-\sigma(C_i)\big) \vee \big(\sigma(B_i)-\sigma(C_i)\big) \Big| \Bigg| \leqslant \underbrace{\Bigg| \iint_{D\setminus \mathsf{G}_k(D)} |\, \mathsf{J}\, \sigma(u,v)|\, \mathsf{d}\, u \, \mathsf{d}\, v \Bigg|}_{\substack{\text{неотрицательно, поэтому} \\ \text{модуль можно убрать}}} +$$

$$+ \underbrace{\Bigg| \iint_{\mathsf{G}_k(D)} |\, \mathsf{J}\, \sigma(u,v)|\, \mathsf{d}\, u \, \mathsf{d}\, v - \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{2} \Big| \big(\sigma(A_i)-\sigma(C_i)\big) \vee \big(\sigma(B_i)-\sigma(C_i)\big) \Big| \Bigg|}_{\text{заменяем на обозначение } R_k \text{ из (17.2.20)}} =$$

$$= \underbrace{\iint_{D\setminus \mathsf{G}_k(D)} |\, \mathsf{J}\, \sigma(u,v)|\, \mathsf{d}\, u \, \mathsf{d}\, v}_{\text{оцениваем по формуле (15.2.72)}} + R_k \leqslant$$

$$\leqslant \max_{M\in D} |\, \mathsf{J}\, \sigma(M)| \cdot \underbrace{\mu\Big(D\setminus \mathsf{G}_k(D)\Big)}_{\substack{\wedge\!\!\parallel \\ \mu\left(\mathsf{F}_k(D)\right)}} + R_k \leqslant$$

$$\leqslant \underbrace{\max_{M\in D} |\, \mathsf{J}\, \sigma(M)|}_{\text{не зависит от } k} \cdot \underbrace{\mu\Big(\mathsf{F}_k(D)\Big)}_{\substack{\downarrow \\ 0 \\ \text{при } k\to\infty, \\ \text{поскольку } D \text{ измеримо}}} + \underbrace{R_k}_{\substack{\downarrow \\ 0 \\ \text{при } k\to\infty, \\ \text{в силу (17.2.20)}}} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

$$\Downarrow$$

$$S_{\sigma_k} = \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{2} \Big| \big(\sigma(A_i)-\sigma(C_i)\big) \vee \big(\sigma(B_i)-\sigma(C_i)\big) \Big| \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \iint_D |\, \mathsf{J}\, \sigma(u,v)|\, \mathsf{d}\, u \, \mathsf{d}\, v$$

5. Нам остается убедиться, что если $\sigma : D \to S$ и $\tau : G \to S$ – две параметризации поверхности S, то

$$\iint_D |\, \mathsf{J}\, \sigma(x,y)|\, \mathsf{d}\, x \, \mathsf{d}\, y = \iint_G |\, \mathsf{J}\, \tau(u,v)|\, \mathsf{d}\, u \, \mathsf{d}\, v \tag{17.2.21}$$

Это делается с помощью теоремы 17.1.3. Пусть $\varphi : \tau \rightarrowtail \sigma$ – описанная в ней функция перехода, а $D_k \subseteq \mathsf{R}(\sigma)$ и $G_k \subseteq \mathsf{R}(\tau)$ – соответствующие измеримые компактные области. Поскольку на каждом

G_k отображение $\varphi : G_k \to D_k$ будет гладкой заменой переменной, превращающей $\sigma|_{D_k}$ в $\tau|_{G_k}$,

$$\tau(u,v) = \sigma\big(\varphi(u,v)\big), \qquad (u,v) \in G_k,$$

справедлива формула (17.1.7):

$$\mathsf{J}\,\tau(a) = J(\sigma \circ \varphi)(a) = \mathsf{J}\,\sigma(\varphi(a)) \cdot \mathsf{J}\,\varphi(a), \qquad a \in \mathsf{Nuc}(G_k) = G_k$$

Поэтому

$$\iint\limits_{G_k} |\,\mathsf{J}\,\tau(u,v)|\,\mathsf{d}\,u\,\mathsf{d}\,v = \iint\limits_{G_k} |\,\mathsf{J}\,\sigma(\varphi(u,v))| \cdot |\,\mathsf{J}\,\varphi(u,v)|\,\mathsf{d}\,u\,\mathsf{d}\,v = \begin{pmatrix} \text{замена переменных} \\ \text{в кратном интеграле} \\ (x,y) = \varphi(u,v) \end{pmatrix} = \iint\limits_{D_k} |\,\mathsf{J}\,\sigma(x,y)|\,\mathsf{d}\,x\,\mathsf{d}\,y \tag{17.2.22}$$

Мы получили формулу

$$\iint\limits_{D_k} |\,\mathsf{J}\,\sigma(x,y)|\,\mathsf{d}\,x\,\mathsf{d}\,y = \iint\limits_{G_k} |\,\mathsf{J}\,\tau(u,v)|\,\mathsf{d}\,u\,\mathsf{d}\,v \tag{17.2.23}$$

Из нее теперь следует

$$\left| \iint_D |\,\mathsf{J}\,\sigma(x,y)|\,\mathsf{d}\,x\,\mathsf{d}\,y - \iint_G |\,\mathsf{J}\,\tau(u,v)|\,\mathsf{d}\,u\,\mathsf{d}\,v \right| =$$
$$= \left| \iint_{D\setminus D_k} |\,\mathsf{J}\,\sigma(x,y)|\,\mathsf{d}\,x\,\mathsf{d}\,y + \iint_{D_k} |\,\mathsf{J}\,\sigma(x,y)|\,\mathsf{d}\,x\,\mathsf{d}\,y - \left(\iint_{G\setminus G_k} |\,\mathsf{J}\,\tau(u,v)|\,\mathsf{d}\,u\,\mathsf{d}\,v + \iint_{G_k} |\,\mathsf{J}\,\tau(u,v)|\,\mathsf{d}\,u\,\mathsf{d}\,v \right) \right| \leqslant$$
$$\leqslant \left| \iint_{D\setminus D_k} |\,\mathsf{J}\,\sigma(x,y)|\,\mathsf{d}\,x\,\mathsf{d}\,y \right| + \left| \iint_{G\setminus G_k} |\,\mathsf{J}\,\tau(u,v)|\,\mathsf{d}\,u\,\mathsf{d}\,v \right| + \Bigg| \underbrace{\iint_{D_k} |\,\mathsf{J}\,\sigma(x,y)|\,\mathsf{d}\,x\,\mathsf{d}\,y - \iint_{G_k} |\,\mathsf{J}\,\tau(u,v)|\,\mathsf{d}\,u\,\mathsf{d}\,v}_{\substack{\| \\ 0, \\ \text{в силу (17.2.23)}}} \Bigg| \leqslant$$
$$\leqslant \max_{(x,y)\in D} |\,\mathsf{J}\,\sigma(x,y)| \cdot \underbrace{\mu(D \setminus D_k)}_{\substack{\downarrow \\ 0, \\ \text{по теореме 17.1.3}}} + \max_{(u,v)\in G} |\,\mathsf{J}\,\tau(u,v)| \cdot \underbrace{\mu(G \setminus G_k)}_{\substack{\downarrow \\ 0, \\ \text{по теореме 17.1.3}}} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

Это уже влечет (17.2.21). □

◇ **17.2.1. Площадь параллелограмма.** Напомним, что выше в примере 17.1.1 мы определили параллелограмм в X, как поверхность $\mathbf{P}_b(a_1,a_2)$ с параметризацией

$$\alpha(u,v) = a_1 \cdot u + a_2 \cdot v + b; \quad (u,v) \in [0,1]^2,$$

где a_1, a_2, b – фиксированные векторы из X. Точка b называется *вершиной* этого параллелограмма, а векторы a_1, a_2 – его *направляющими*. Покажем, что

$$\mathsf{Area}\,\big(\mathbf{P}_b(a_1,a_2)\big) = |a_1 \vee a_2|. \tag{17.2.24}$$

Действительно,

$$\mathsf{J}\,\alpha(u,v) = \nabla_1\alpha(u,v) \vee \nabla_2\alpha(u,v) = a_1 \vee a_2,$$

и поэтому

$$\overrightarrow{\mathsf{Area}}\,\big(\mathbf{P}_b(a_1,a_2)\big) = \int_0^1 \int_0^1 |\,\mathsf{J}\,\alpha(u,v)|\,\mathsf{d}\,u\,\mathsf{d}\,v =$$
$$= \int_0^1 \int_0^1 |a_1 \vee a_2|\,\mathsf{d}\,u\,\mathsf{d}\,v = |a_1 \vee a_2|.$$

Площадь вырожденной поверхности.

Теорема 17.2.4. *Поверхность S тогда и только тогда вырождена, когда она имеет нулевую площадь:*

$$\forall \sigma : D \to S \quad \mu\big(\mathsf{D}(\sigma)\big) = 0 \quad \iff \quad \mathsf{Area}(S) = 0$$

Доказательство. Здесь повторяются рассуждения теоремы 16.2.4. Если L вырождена, то есть имеет параметризацию $\alpha : I \to L$, в которой I – компакт нулевой меры, то по формуле (16.2.11) мы получаем

$$\mathsf{Area}(L) = \iint_I |\mathsf{J}\,\alpha(u,v)|\,\mathsf{d}\,d\,\mathsf{d}\,v \leqslant \max_{(u,v)\in I} |\mathsf{J}\,\alpha(u,v)| \cdot \mu(I) = 0.$$

Наоборот, если существует какая-то невырожденная параметризация $\alpha : I \to L$, то есть такая, у которой I – измеримый по Жордану компакт с ненулевой мерой, то внутренность этого компакта должна быть непустой $\mathsf{Int}\, I \neq \varnothing$, в силу свойств измеримости по Жордану,

$$\mu(\mathsf{Int}\, I) = (15.1.61) = \mu(I) > 0.$$

А с другой стороны, множество точек $\mathsf{Int}\, I$, в которых Якобиан α не обращается в нуль,

$$J = \{s \in \mathsf{Int}(I) : \ |\mathsf{J}\,\alpha(s)| > 0\} = \{s \in \mathsf{Int}(I) : \ \mathsf{J}\,\alpha(s) \neq 0\}$$

должно иметь полную меру в $\mathsf{Int}\, I$ (и в I), в силу условия стабильности почти всюду (16.1.1):

$$\mu(J) = \mu(\mathsf{Int}\, I) = \mu(I) > 0.$$

Поэтому

$$\mathsf{Area}(L) = \iint_I |\alpha'(u,v)|\,\mathsf{d}\,u\,\mathsf{d}\,v \geqslant \underbrace{\iint_J |\mathsf{J}\,\alpha(u,v)|\,\mathsf{d}\,u\,\mathsf{d}\,v}_{\substack{\text{интеграл от положительной}\\ \text{непрерывной функции } s \mapsto |\mathsf{J}\,\alpha(s)|\\ \text{на измеримом открытом множестве } J}} > 0.$$

□

Аддитивность площади.

Теорема 17.2.5. *Если $\mathcal{T}$ – разбиение поверхности L, то сумма площадей компонент $\mathcal{T}$ равна площади L:*

$$\mathsf{Area}(L) = \sum_{\mathbf{T}\in\mathcal{T}} \mathsf{Area}(T) \tag{17.2.25}$$

Доказательство. А здесь те же рассуждения, что в теореме 16.2.5. Пусть $\alpha : I \to L$ и $\beta_T : J_T \to T$ – параметризации поверхностей L и $T \in \mathcal{T}$, причем $\beta_T : J_T \to T$ является разбиением параметризованной поверхности $\alpha : I \to L$. По теореме 17.1.7(iii), каждый след $\alpha_T = \alpha\big|_{\beta_T}$ эквивалентен β_T, система следов $\alpha_T = \alpha\big|_{\beta_T}$, $T \in \mathcal{T}$, образует разбиение кривой α, а их области определения $I_T = \mathsf{D}(\alpha_T) = \alpha^{-1}(T)$ – разбиение области I:

$$\alpha_T = \alpha\big|_{\beta_T} \cong \beta_T, \qquad \alpha \cong \bigsqcup_{T\in\mathcal{T}} \alpha\big|_{\beta_T}, \qquad I = \bigsqcup_{T\in\mathcal{T}} I_T.$$

Отсюда, прежде всего, по теореме 17.2.3 следует, что

$$\iint_{I_T} |\alpha'(s)|\ \mathsf{d}\,s = \mathsf{Area}(T), \qquad T \in \mathcal{T}$$

(потому что площадь не зависит от выбора параметризации), и из этого уже мы получаем

$$\mathsf{Area}(L) = \iint_I |\alpha'(s)|\ \mathsf{d}\,s = \sum_{T\in\mathcal{T}} \iint_{I_T} |\alpha'(s)|\ \mathsf{d}\,s = \sum_{T\in\mathcal{T}} \mathsf{Area}(T)$$

□

Площади стягивающихся поверхностей.

Теорема 17.2.6. *Если L – поверхность и T_k – последовательность подчиненных поверхностей, стягивающихся к подчиненной вырожденной поверхности T в L,*

$$T_1 \supseteq T_2 \supseteq ... \supseteq T_i \supseteq T_{i+1} \supseteq ... \supseteq \bigcap_{k=1}^{\infty} T_k = T, \qquad \mathsf{Area}(T) = 0$$

то площади поверхностей T_k стремятся к нулю:

$$\mathsf{Area}(T_k) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

Доказательство. Это аналог теоремы 16.2.6. Пусть $\sigma : D \to L$ – какая-нибудь параметризация поверхности L. По теореме 16.2.1, множества

$$D_{T_k} = \sigma^{-1}(T_k)$$

будут измеримыми по Жордану компактами. Очевидно, они образуют сужающуюся последовательность компактов, стягивающихся к компакту $D_T = \sigma^{-1}(T)$, мера которого равна нулю по теореме 16.2.4:

$$D_{T_1} \supseteq D_{T_2} \supseteq ... \supseteq D_{T_i} \supseteq D_{T_{i+1}} \supseteq ... \supseteq \bigcap_{k=1}^{\infty} D_{T_k} = D_T, \qquad \mu(D_T) = 0$$

Значит, по теореме 15.1.24, меры компактов D_{T_k} стремятся к нулю:

$$\mu(D_{T_k}) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

Отсюда

$$\mathsf{Area}(T_k) = \iint_{D_{T_k}} |\,\mathsf{J}\,\sigma(u,v)|\,\mathsf{d}\,u\,\mathsf{d}\,v \leqslant \max_{(u,v)\in D_{T_k}} |\,\mathsf{J}\,\sigma(u,v)| \cdot \mu(D_{T_k}) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

□

Регулярная аппроксимация скалярной поверхности. Будем говорить, что последовательность регулярных поверхностей T_k задает *регулярную аппроксимацию поверхности* L, если все T_k подчинены L и выполняется соотношение

$$\mathsf{Area}(T_k) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \mathsf{Area}(L).$$

Теорема 17.2.7. *Всякая поверхность L обладает регулярной аппроксимацией.*

Доказательство. Это аналог теоремы 16.2.7. Выберем параметризацию $\sigma : D \to L$. Обозначим через D_k объединение внутренних двоичных клеток ранга k для множества $\mathsf{D_{reg}}(\sigma)$. Для всякого k ограничение σ_k поверхности σ на компакт D_k будет регулярной поверхностью, подчиненной σ. Поэтому поверхность T_k, задаваемая σ_k, будет подчинена поверхности L.

По теореме (15.1.26) об исчерпывании открытого множества полной меры, мера множеств $D \setminus \mathsf{Int}(D_k)$ стремится к нулю, поэтому

$$0 \leqslant \mu\Big(D \setminus D_k\Big) \leqslant \mu\Big(D \setminus \mathsf{Int}(D_k)\Big) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0 \quad \Longrightarrow \quad \mu\Big(D \setminus D_k\Big) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0 \quad \Longrightarrow$$

$$\mathsf{Area}(L) - \mathsf{Area}(T_k) = \iint_D |\,\mathsf{J}\,\sigma(u,v)|\,\mathsf{d}\,u\,\mathsf{d}\,v - \iint_{D_k} |\,\mathsf{J}\,\sigma(u,v)|\,\mathsf{d}\,u\,\mathsf{d}\,v =$$

$$= \iint_{D\setminus D_k} |\,\mathsf{J}\,\sigma(u,v)|\,\mathsf{d}\,u\,\mathsf{d}\,v \leqslant \max_{(u,v)\in D} |\,\mathsf{J}\,\sigma(u,v)| \cdot \mu\Big(D \setminus D_k\Big) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

□

Площадь поверхности, подчиненной регулярной поверхности Следующее утверждение аналогично теореме 16.2.8.

Теорема 17.2.8. *Если L – регулярная поверхность, то существует константа $C > 0$, такая что для любой подчиненной поверхности $T \subseteq L$ справедливо неравенство*

$$\mathsf{Area}(T) \leqslant C \cdot \mathsf{diam}(T)^2$$

Лемма 17.2.9. *Если L – регулярная поверхность, и $\sigma : D \to L$ – ее регулярная параметризация, то существует константы $H > 0$ и $K > 0$ такие, что для любой подчиненной поверхности $T \subseteq L$ соответствующая ей область параметров в D*

$$D_T = \{s \in D : \ \sigma(s) \in T\}$$

удовлетворяет неравенствам

$$\mathsf{diam}(D_T) \leqslant H \cdot \mathsf{diam}(T) \tag{17.2.26}$$

$$\mu(D_T) \leqslant K \cdot \mathsf{diam}(T)^2 \tag{17.2.27}$$

$$\frac{\mu(D_T)}{\mathsf{diam}(T)^2} \leqslant K. \tag{17.2.28}$$

Доказательство. По теореме 14.2.8, найдется число $h > 0$ такое что

$$\forall x, y \in D \qquad h \cdot |x - y| \leqslant |\sigma(x) - \sigma(y)|$$

Поэтому

$$h \cdot \mathsf{diam}(D_T) = h \cdot \sup_{x,y \in D_T} |x - y| \leqslant \sup_{x,y \in D_T} |\sigma(x) - \sigma(y)| = \mathsf{diam}(T).$$

и это доказывает (17.2.26). Положив $K = \frac{1}{h^2}$, мы получим:

$$\mu(D_T) \leqslant \mathsf{diam}(D_T)^2 \leqslant \frac{1}{h^2} \cdot \mathsf{diam}(T)^2 = K \cdot \mathsf{diam}(T)^2$$

□

Доказательство теоремы 17.2.8. Пусть $\sigma : D \to L$ – регулярная параметризация поверхности L. Предположим, что теорема 17.2.8 неверна, то есть для любого $k \in \mathbb{N}$ найдется подчиненная поверхность $T_k \subseteq L$ такая, что

$$\mathsf{Area}(T_k) > k \cdot \mathsf{diam}(T_k)^2$$

Тогда у нас получается последовательность подчиненных поверхностей $T_k \subseteq L$, у которых отношение $\frac{\mathsf{diam}(D_{T_k})}{\mathsf{diam}(T_k)^2}$ бесконечно возрастает, что противоречит (17.2.28):

$$k \cdot \mathsf{diam}(T_k)^2 < \mathsf{Area}(T_k) = \iint_{D_{T_k}} |\,\mathsf{J}\,\sigma(u,v)|\,\mathsf{d}\,u\,\mathsf{d}\,v \leqslant \max_{(u,v)\in D} |\,\mathsf{J}\,\sigma(u,v)| \cdot \mu(D_{T_k}) \leqslant \max_{s \in D} |\,\mathsf{J}\,\sigma(u,v)| \cdot \mu(D_{T_k})$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{\mu(D_{T_k})}{\mathsf{diam}(T_k)^2} > \frac{k}{\max_{(u,v)\in D} |\,\mathsf{J}\,\sigma(u,v)|} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \infty$$

□

Доказательство формул площади главы 8. В главе 8 мы приводили две формулы для площади поверхности вращения, и пообещали объяснить и доказать их потом. Сейчас мы выполним это обещание.

◇ **17.2.2.** *Доказательство формулы* (7.3.182). В теореме 7.3.25 мы объявили, что площадь поверхности вращения

$$y^2 + z^2 = f(x)^2, \quad x \in [a; b]$$

вычисляется по формуле

$$S = 2\pi \int_a^b f(x) \cdot \sqrt{1 + (f'(x))^2}\,\mathsf{d}\,x$$

Чтобы это доказать, нужно параметризовать поверхность. Это можно сделать так:

$$\sigma(x, \varphi) = \Big(x; f(x) \cdot \cos\varphi; f(x) \cdot \sin\varphi\Big), \qquad x \in [a, b],\ \varphi \in [0, 2\pi].$$

Тогда

$$\begin{cases} \nabla_1\sigma(x,\varphi) = \Big(1; f'(x) \cdot \cos\varphi; f(x)' \cdot \sin\varphi\Big) \\ \nabla_2\sigma(x,\varphi) = \Big(0; -f(x) \cdot \sin\varphi; f(x) \cdot \cos\varphi\Big) \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$|\nabla_1\sigma(x,\varphi)| = \\ = \sqrt{1 + f'(x)^2 \cdot \cos^2\varphi + f'(x)^2 \cdot \sin^2\varphi} = \\ = \sqrt{1 + f'(x)^2}$$

$$|\nabla_2\sigma(x,\varphi)| = \sqrt{f(x)^2 \cdot \sin^2\varphi + f(x)^2 \cdot \cos^2\varphi} = \\ = f(x)$$

$$[\nabla_1\sigma(x,\varphi), \nabla_2\sigma(x,\varphi)] = \\ = -f(x) \cdot f'(x) \cdot \sin\varphi \cdot \cos\varphi + \\ + f(x) \cdot f'(x) \cdot \sin\varphi \cdot \cos\varphi = \\ = 0$$

Отсюда сразу видно, что условие (7.3.180) обеспечивает невырожденность Якобиана:

$$|\,\mathsf{J}\,\sigma(x,\varphi)| = \sqrt{\mathsf{Gram}(\nabla_1\sigma(x,\varphi), \nabla_2\sigma(x,\varphi))} = \\ = \sqrt{\det\begin{pmatrix} |\nabla_1\sigma|^2 & [\nabla_1\sigma, \nabla_2\sigma] \\ [\nabla_1\sigma, \nabla_2\sigma] & |\nabla_2\sigma|^2 \end{pmatrix}} = \\ = \sqrt{\det\begin{pmatrix} 1 + f'(x)^2 & 0 \\ 0 & f(x) \end{pmatrix}} = \\ = f(x) \cdot \sqrt{1 + f'(x)^2} \neq 0$$

И оно же гарантирует инъективность отображения σ почти всюду:

$$x_1 \neq x_2$$

$$\Downarrow$$
$$\sigma(x_1,\varphi_1)\ne\sigma(x_2,\varphi_2)$$

и

$$\varphi_1\ne\varphi_2$$
$$\Downarrow$$
$$(\cos\varphi_1,\sin\varphi_1)\ne(\cos\varphi_2,\sin\varphi_2)$$
$$\Downarrow$$
$$(f(x_1)\cdot\cos\varphi_1,f(x_1)\cdot\sin\varphi_1)\ne$$
$$\ne(f(x_2)\cdot\cos\varphi_2,f(x_2)\cdot\sin\varphi_2)$$
$$\Downarrow$$
$$\sigma(x_1,\varphi_1)\ne\sigma(x_2,\varphi_2)$$

Площадь поверхности получается такой:

$$\begin{aligned}S&=(17.2.16)=\\&=\iint_D\Big(|\nabla_1\sigma(x,\varphi)|^2\cdot|\nabla_1\sigma(x,\varphi)|^2-\\&-[\nabla_1\sigma(x,\varphi),\nabla_2\sigma(x,\varphi)]\Big)^{\frac12}\,\mathsf{d}\,x\,\mathsf{d}\,\varphi=\\&=\int_0^{2\pi}\mathsf{d}\,\varphi\int_a^b\Big((1+f'(x)^2)\cdot f(x)^2-0\Big)^{\frac12}\,\mathsf{d}\,x=\\&=2\pi\cdot\int_a^b f(x)\cdot\sqrt{1+f'(x)^2}\,\mathsf{d}\,x\end{aligned}$$

◇ **17.2.3.** *Доказательство формулы* (7.3.186). В теореме 7.3.26 мы объявили, что площадь поверхности вращения

$$D:\quad\begin{cases}x=\alpha(t)\\y^2+z^2=\beta(t)^2\end{cases},\quad t\in[a;b]$$

вычисляется по формуле

$$S=2\pi\int_a^b\beta(t)\cdot\sqrt{\alpha'(t)^2+\beta'(t)^2}\,\mathsf{d}\,t$$

Здесь поверхность параметризуется формулой

$$\sigma(t,\varphi)=\Big(\alpha(t);\beta(t)\cdot\cos\varphi;\beta(t)\cdot\sin\varphi\Big),$$
$$t\in[a,b],\ \varphi\in[0,2\pi].$$

Для нее

$$\begin{cases}\nabla_1\sigma(t,\varphi)=\Big(\alpha'(t);\beta'(t)\cdot\cos\varphi;\beta'(t)\cdot\sin\varphi\Big)\\\nabla_2\sigma(t,\varphi)=\Big(0;-\beta(t)\cdot\sin\varphi;\beta(t)\cdot\cos\varphi\Big)\end{cases}$$
$$\Downarrow$$
$$\begin{cases}|\nabla_1\sigma(t,\varphi)|=\sqrt{\alpha'(t)^2+\beta'(t)^2}\\|\nabla_2\sigma(t,\varphi)|=\beta(t)\\ [\nabla_1\sigma(t,\varphi),\nabla_2\sigma(t,\varphi)]=0\end{cases}$$

Отсюда сразу видно, что условия (7.3.183) и (7.3.184) обеспечивают невырожденность Якобиана:

$$\begin{aligned}|\mathsf{J}\,\sigma(t,\varphi)|&=\sqrt{\mathsf{Gram}(\nabla_1\sigma(t,\varphi),\nabla_2\sigma(t,\varphi))}=\\&=\sqrt{\det\begin{pmatrix}|\nabla_1\sigma|^2&[\nabla_1\sigma,\nabla_2\sigma]\\ [\nabla_1\sigma,\nabla_2\sigma]&|\nabla_2\sigma|^2\end{pmatrix}}=\\&=\sqrt{\det\begin{pmatrix}\alpha'(t)^2+\beta'(t)^2&0\\0&\beta(t)\end{pmatrix}}=\\&=\beta(t)\cdot\sqrt{\alpha'(t)^2+\beta'(t)^2}\ne0\end{aligned}$$

И они же гарантируют инъективность отображения σ почти всюду:

$$t_1\ne t_2$$
$$\Downarrow$$
$$\alpha(t_1)\ne\alpha(t_2)$$
$$\Downarrow$$
$$\sigma(t_1,\varphi_1)\ne\sigma(t_2,\varphi_2)$$

и

$$\varphi_1\ne\varphi_2$$
$$\Downarrow$$
$$(\cos\varphi_1,\sin\varphi_1)\ne(\cos\varphi_2,\sin\varphi_2)$$
$$\Downarrow$$
$$(\beta(t_1)\cdot\cos\varphi_1,\beta(t_1)\cdot\sin\varphi_1)\ne$$
$$\ne(\beta(t_2)\cdot\cos\varphi_2,\beta(t_2)\cdot\sin\varphi_2)$$
$$\Downarrow$$
$$\sigma(t_1,\varphi_1)\ne\sigma(t_2,\varphi_2)$$

Площадь поверхности получается такой:

$$\begin{aligned}S&=(17.2.16)=\\&=\iint_D\Big(|\nabla_1\sigma(t,\varphi)|^2\cdot|\nabla_1\sigma(t,\varphi)|^2-\\&-[\nabla_1\sigma(t,\varphi),\nabla_2\sigma(t,\varphi)]\Big)^{\frac12}\,\mathsf{d}\,t\,\mathsf{d}\,\varphi=\\&=\int_0^{2\pi}\mathsf{d}\,\varphi\int_a^b\Big((\alpha'(t)^2+\beta'(t)^2)\cdot\beta(t)^2-0\Big)^{\frac12}\,\mathsf{d}\,x=\\&=2\pi\cdot\int_a^b\beta(t)\cdot\sqrt{\alpha'(t)^2+\beta'(t)^2}\,\mathsf{d}\,x\end{aligned}$$

(c) Изотропный интеграл по поверхности

Определение и формула вычисления изотропного интеграла по поверхности. Пусть L – поверхность в евклидовом пространстве X и $f : L \to \mathbb{R}$ – непрерывная функция на ней. Рассмотрим произвольное разбиение $\mathcal{M}$ этой поверхности

$$L = \bigsqcup_{M \in \mathcal{M}} M,$$

и на каждом элементе M этого разбиения выберем точку

$$x_M \in M$$

Тогда величина

$$\sum_{M \in \mathcal{M}} f(x_M) \cdot \mathsf{Area}(M)$$

называется *интегральной суммой функции f на поверхности L.*

Теорема 17.2.10. *При измельчении разбиения $\mathcal{M}$ интегральные суммы функции f на поверхности L стремятся к некоему числу, обозначаемому*

$$\iint_L f(x)\ \mathsf{Area}(\mathsf{d}\,x) = \lim_{\substack{L = \bigsqcup_{M \in \mathcal{M}} M,\\ \mathsf{diam}(\mathcal{M}) \to 0}} \sum_{M \in \mathcal{M}} f(x_M) \cdot \mathsf{Area}(M) \tag{17.2.29}$$

и называемому (изотропным) интегралом функции f по поверхности L. *Эта величина вычисляется по формуле*

$$\boxed{\iint_L f(x)\ \mathsf{Area}(\mathsf{d}\,x) = \iint_I f\big(\alpha(t)\big) \cdot \Big| \mathsf{J}\,\alpha(u,v) \Big|\ \mathsf{d}\,u\,\mathsf{d}\,v} \tag{17.2.30}$$

или, в подробной записи,

$$\iint_\Sigma f(x)\ \mathsf{Area}(\mathsf{d}\,x) = \iint_I f\big(\alpha(u,v)\big) \cdot \sqrt{\mathsf{Gram}\left(\nabla_1\alpha(u,v), \nabla_2\alpha(u,v)\right)}\ \mathsf{d}\,u\,\mathsf{d}\,v =$$
$$= \iint\limits_I f\big(\alpha(u,v)\big) \cdot \sqrt{|\nabla_1\alpha(u,v)|^2 \cdot |\nabla_2\alpha(u,v)|^2 - [\nabla_1\alpha(u,v), \nabla_2\alpha(u,v)]^2}\,\mathsf{d}\,u\,\mathsf{d}\,v \tag{17.2.31}$$

где $\alpha : I \to L$ – произвольная полурегулярная параметризация поверхности L.

! **17.2.4.** Формулу (17.2.29) надо понимать так: для любой измельчающейся последовательности $\mathcal{M}^k$ разбиений поверхности L,

$$L = \bigsqcup_{M \in \mathcal{M}^k} M, \qquad \mathsf{diam}(\mathcal{M}^k) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

и для любой системы выделенных точек

$$x_M^k \in M \in \mathcal{M}^k$$

справедливо соотношение

$$\iint_L f(x) \cdot \mathsf{Area}(\mathsf{d}\,x) \underset{\infty \leftarrow k}{\longleftarrow} \sum_{M \in \mathcal{M}^k} f(x_M^k) \cdot \mathsf{Area}(M).$$

Доказательство. Покажем, что интегральные суммы стремятся к числу $\iint_I f\big(\alpha(t)\big) \cdot \Big| \mathsf{J}\,\alpha(t) \Big|\ \mathsf{d}\,t$. По теореме 16.1.5 всякому разбиению кривой L

$$L = \bigsqcup_{M \in \mathcal{M}} M,$$

соответствует измеримое разбиение множества I

$$I_M = \alpha^{-1}(M), \quad M \in \mathcal{M}$$

Отсюда получаем:

$$\left|\sum_{M\in\mathcal{M}} f(x_M)\cdot \underbrace{\mathsf{Area}(M)}_{\substack{\| \\ (17.2.15) \\ \| \\ \iint_{I_M} |\mathsf{J}\,\alpha(t)|\,\mathsf{d}\,t}} - \underbrace{\iint_I f\big(\alpha(t)\big)\cdot\Big|\mathsf{J}\,\alpha(t)\Big|\,\mathsf{d}\,t}_{\text{разбиваем на интегралы по } I_M}\right| =$$

$$= \left|\sum_{M\in\mathcal{M}} f(x_M)\cdot\iint_{I_M}\Big|\mathsf{J}\,\alpha(t)\Big|\,\mathsf{d}\,t - \sum_{M\in\mathcal{M}}\iint_{I_M} f\big(\alpha(t)\big)\cdot\Big|\mathsf{J}\,\alpha(t)\Big|\,\mathsf{d}\,t\right| = \left(\begin{matrix}\text{выносим за скобку}\\ \text{знак суммы}\end{matrix}\right) =$$

$$= \left|\sum_{M\in\mathcal{M}}\left(\underbrace{f(x_M)}_{\substack{\text{вносим под}\\ \text{знак интеграла}}}\cdot\iint_{I_M}\Big|\mathsf{J}\,\alpha(t)\Big|\,\mathsf{d}\,t - \iint_{I_M} f\big(\alpha(t)\big)\cdot\Big|\mathsf{J}\,\alpha(t)\Big|\,\mathsf{d}\,t\right)\right| =$$

$$= \left|\sum_{M\in\mathcal{M}}\left(\iint_{I_M} f(x_M)\cdot\Big|\mathsf{J}\,\alpha(t)\Big|\,\mathsf{d}\,t - \iint_{I_M} f\big(\alpha(t)\big)\cdot\Big|\mathsf{J}\,\alpha(t)\Big|\,\mathsf{d}\,t\right)\right| = \left(\begin{matrix}\text{выносим за скобку}\\ \text{знак интеграла}\end{matrix}\right) =$$

$$= \left|\sum_{M\in\mathcal{M}}\iint_{I_M}\Big(f(x_M)\cdot\Big|\mathsf{J}\,\alpha(t)\Big| - f\big(\alpha(t)\big)\cdot\Big|\mathsf{J}\,\alpha(t)\Big|\Big)\,\mathsf{d}\,t\right| = \left(\begin{matrix}\text{выносим за скобку}\\ \Big|\mathsf{J}\,\alpha(t)\Big|\end{matrix}\right) =$$

$$= \left|\sum_{M\in\mathcal{M}}\iint_{I_M}\Big(f(x_M) - f\big(\alpha(t)\big)\Big)\cdot\Big|\mathsf{J}\,\alpha(t)\Big|\,\mathsf{d}\,t\right| \leqslant \left(\begin{matrix}\text{применяем формулу}\\ \Big|\sum a_i\Big| \leqslant \sum\Big|a_i\Big|\end{matrix}\right) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{M\in\mathcal{M}}\left|\iint_{I_M}\Big(f(x_M) - f\big(\alpha(t)\big)\Big)\cdot\Big|\mathsf{J}\,\alpha(t)\Big|\,\mathsf{d}\,t\right| \leqslant \left(\begin{matrix}\text{применяем формулу}\\ \Big|\iint h(t)\,\mathsf{d}\,t\Big| \leqslant \iint\Big|h(t)\Big|\,\mathsf{d}\,t\end{matrix}\right) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{M\in\mathcal{M}}\iint_{I_M}\underbrace{\Big|f(x_M) - f\big(\alpha(t)\big)\Big|}_{\substack{\wedge\!\!\!\mid\!\mid \\ \sup\limits_{\substack{x,\,y\,\in\,L\,:\\ |x-y|\,\leqslant\,\mathsf{diam}(\mathcal{M})}}\Big|f(x)-f(y)\Big|}}\cdot\Big|\mathsf{J}\,\alpha(t)\Big|\,\mathsf{d}\,t \leqslant \sum_{M\in\mathcal{M}}\iint_{I_M}\underbrace{\sup_{\substack{x,\,y\,\in\,L\,:\\ |x-y|\,\leqslant\,\mathsf{diam}(\mathcal{M})}}\Big|f(x)-f(y)\Big|}_{\substack{\text{эта величина не зависит от } t \text{ и } M\\ \text{поэтому ее можно вынести}\\ \text{за знаки интеграла и суммы}}}\cdot\Big|\mathsf{J}\,\alpha(t)\Big|\,\mathsf{d}\,t \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{\substack{x,\,y\,\in\,L\,:\\ |x-y|\,\leqslant\,\mathsf{diam}(\mathcal{M})}}\Big|f(x)-f(y)\Big|\cdot\underbrace{\sum_{M\in\mathcal{M}}\iint_{I_M}\Big|\mathsf{J}\,\alpha(t)\Big|\,\mathsf{d}\,t}_{\substack{\| \\ \iint_I \big|\mathsf{J}\,\alpha(t)\big|\,\mathsf{d}\,t \\ \| \\ \mathsf{Area}(L)}} = \underbrace{\sup_{\substack{x,\,y\,\in\,L\,:\\ |x-y|\,\leqslant\,\mathsf{diam}(\mathcal{M})}}\Big|f(x)-f(y)\Big|}_{\substack{\downarrow \\ 0 \\ \text{при } \mathsf{diam}(\mathcal{M})\to 0 \\ \text{поскольку } f \text{ равномерно} \\ \text{непрерывна на компакте } L \\ \text{(теорема Кантора)}}}\cdot\mathsf{Area}(L) \underset{\mathsf{diam}(\mathcal{M})\to 0}{\longrightarrow} 0$$

$\square$

◇ 17.2.5. Интеграл от постоянной функции по поверхности равен значению этой константы, помноженному на площадь поверхности:

$$\iint_L C\cdot\mathsf{Area}(\mathsf{d}\,x) = C\cdot\mathsf{Area}(L) \qquad (17.2.32)$$

Действительно,

$$\iint_L C\cdot\mathsf{Area}(\mathsf{d}\,x) \underset{0\leftarrow\mathsf{diam}(\mathcal{M})}{\longleftarrow} \sum_{M\in\mathcal{M}} C\cdot\mathsf{Area}(M) = C\cdot\sum_{M\in\mathcal{M}}\mathsf{Area}(M) = C\cdot\mathsf{Area}(L).$$

Свойства изотропного интеграла по поверхностям

1^0. **Линейность:** *если f и g – две непрерывные функции на поверхности L, то для любых чисел $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$*

$$\iint_L\{\lambda\cdot f(x)+\mu\cdot g(x)\}\cdot\mathsf{Area}(\mathsf{d}\,x) = \lambda\cdot\iint_L f(x)\cdot\mathsf{Area}(\mathsf{d}\,x) + \mu\cdot\iint_L g(x)\cdot\mathsf{Area}(\mathsf{d}\,x) \quad (17.2.33)$$

2^0. **Аддитивность:** *если* $L = \bigsqcup_{M\in\mathcal{M}} M$ *– разбиение поверхности* L*, то для любой непрерывной функции* f *на* L

$$\iint_L f(x)\ \mathsf{Area}(\mathsf{d}\,x) = \sum_{M\in\mathcal{M}} \iint_M f(x)\cdot \mathsf{Area}(\mathsf{d}\,x) \tag{17.2.34}$$

3^0. **Оценка через скалярную длину кривой:** *если* f *– непрерывная функция на поверхности* L*, то*

$$\left|\iint_L f(x)\ \mathsf{Area}(\mathsf{d}\,x)\right| \leqslant \max_{x\in L}\left|f(x)\right|\cdot \mathsf{Area}(L) \tag{17.2.35}$$

4^0. **Монотонность:** *если* f *и* g *– непрерывные функции на поверхности* L*, причем*

$$f(x)\leqslant g(x), \qquad x\in L,$$

то

$$\iint_L f(x)\ \mathsf{Area}(\mathsf{d}\,x) = \iint_L g(x)\ \mathsf{Area}(\mathsf{d}\,x) \tag{17.2.36}$$

5^0. **Теорема о среднем:** *если* f *– непрерывная функция на связной поверхности* L*, то для некоторой точки* $\xi\in L$ *справедливо равенство*

$$\iint_L f(x)\ \mathsf{Area}(\mathsf{d}\,x) = f(\xi)\cdot \mathsf{Area}(L) \tag{17.2.37}$$

Доказательство. Это доказывается так же как свойства изотропного интеграла по кривым на с.999.

1. Для разбиений $\mathcal{M}$ поверхности L получаем:

$$\iint_L \{\lambda\cdot f(x)+\mu\cdot g(x)\}\,\mathsf{Area}(\mathsf{d}\,x) \underset{0\leftarrow \mathsf{diam}\,\mathcal{M}}{\longleftarrow} \sum_{M\in\mathcal{M}} \{\lambda\cdot f(x_M)+\mu\cdot g(x_M)\}\,\mathsf{Area}(M) =$$
$$= \lambda\cdot \sum_{M\in\mathcal{M}} f(x_M)\,\mathsf{Area}(M) + \mu\cdot \sum_{M\in\mathcal{M}} g(x_M)\,\mathsf{Area}(M) \underset{\mathsf{diam}\,\mathcal{M}\to 0}{\longrightarrow}$$
$$\underset{\mathsf{diam}\,\mathcal{M}\to 0}{\longrightarrow} \lambda\cdot\iint_L f(x)\,\mathsf{Area}(\mathsf{d}\,x) + \mu\cdot \iint_L g(x)\,\mathsf{Area}(\mathsf{d}\,x)$$

2. Формулу (17.2.34) удобно доказать для частного случая, когда разбиение состоит из двух поверхностей, а затем она переносится на общий случай по индукции. Пусть

$$L\cong M\sqcup N.$$

Если $\mathcal{M}$ – разбиение поверхности M, а $\mathcal{N}$ – разбиение поверхности N, то объединение $\mathcal{M}\cup\mathcal{N}$ будет разбиением поверхности L. Поэтому

$$\iint_L f(x)\,\mathsf{Area}(\mathsf{d}\,x) \underset{0\leftarrow \mathsf{diam}(\mathcal{M}\cup\mathcal{N})}{\longleftarrow} \sum_{M'\in\mathcal{M}} f(x_{M'})\,\mathsf{Area}(M') + \sum_{N'\in\mathcal{N}} f(x_{N'})\,\mathsf{Area}(N') \underset{\mathsf{diam}(\mathcal{M}\cup\mathcal{N})\to 0}{\longrightarrow}$$
$$\underset{\mathsf{diam}(\mathcal{M}\cup\mathcal{N})\to 0}{\longrightarrow} \iint_M f(x)\,\mathsf{Area}(\mathsf{d}\,x) + \iint_N f(x)\,\mathsf{Area}(\mathsf{d}\,x).$$

3. Для разбиений $\mathcal{M}$ поверхности L получаем:

$$\left|\iint_L f(x)\,\mathsf{Area}(\mathsf{d}\,x)\right| \underset{0\leftarrow \mathsf{diam}\,\mathcal{M}}{\longleftarrow} \left|\sum_{M\in\mathcal{M}_n} f\big(x_M\big)\,\mathsf{Area}(M)\right| \leqslant \sum_{M\in\mathcal{M}_n} \left|f\big(x_M\big)\,\mathsf{Area}(M)\right| =$$
$$= \sum_{M\in\mathcal{M}_n} \left|f\big(x_M\big)\right|\cdot \mathsf{Area}(M) \leqslant \sum_{M\in\mathcal{M}_n} \max_{x\in L}|f(x)|\cdot \mathsf{Area}(M) =$$
$$= \max_{x\in L}|f(x)|\cdot \sum_{M\in\mathcal{M}} \mathsf{Area}(M) = \max_{x\in L}|f(x)|\cdot \mathsf{Area}(L)$$

4. Для разбиений $\mathcal{M}$ поверхности L получаем:

$$\iint_L f(x)\ \mathsf{Area}(\mathsf{d}\,x) \underset{0\leftarrow \mathsf{diam}\,\mathcal{M}}{\longleftarrow} \sum_{M\in\mathcal{M}_n} f\big(x_M\big)\,\mathsf{Area}(M) \leqslant \sum_{M\in\mathcal{M}_n} g\big(x_M\big)\,\mathsf{Area}(M) \underset{\mathsf{diam}\,\mathcal{M}\to 0}{\longrightarrow} \iint_L g(x)\ \mathsf{Area}(\mathsf{d}\,x)$$

5. Пусть f – непрерывная функция на связной поверхности L. Обозначим

$$m=\min_{x\in L} f(x), \qquad M=\max_{x\in L} f(x).$$

Тогда

$$m\leqslant f(x)\leqslant M, \qquad x\in L$$

$$\Downarrow$$

$$m\cdot\mathsf{Area}(L)=\iint_L m\ \mathsf{Area}(\mathsf{d}\,x)\leqslant \iint_L f(x)\ \mathsf{Area}(\mathsf{d}\,x)\leqslant \iint_L M\ \mathsf{Area}(\mathsf{d}\,x)=M\cdot\mathsf{Area}(L)$$

$$\Downarrow$$

$$m\leqslant \frac{1}{\mathsf{Area}(L)}\cdot\iint_L f(x)\ \mathsf{Area}(\mathsf{d}\,x)\leqslant M$$

Поскольку L – связное множество, по теореме 14.2.3 его образ $f(L)$ под действием непрерывного отображения f тоже является связным множеством. С другой стороны, по теореме 14.2.2, $f(L)$ – компакт в $\mathbb{R}$. Значит, это отрезок:

$$f(L)=[m,M].$$

Число $\frac{1}{\mathsf{Area}(L)}\cdot\iint_L f(x)\ \mathsf{Area}(\mathsf{d}\,x)$ лежит в этом отрезке, значит, найдется точка $\xi\in L$ такая, что

$$f(\xi)=\frac{1}{\mathsf{Area}(L)}\cdot\iint_L f(x)\ \mathsf{Area}(\mathsf{d}\,x).$$

□

Изотропный интеграл, как функционал на поверхностях.

- Условимся говорить, что *последовательность скалярных поверхностей L_i в евклидовом пространстве X сходится к точке $x\in X$*, если расстояние от L_i до x стремится к нулю:

$$\rho(L_i,x)=\max_{y\in L_i}|y-x| \underset{i\to\infty}{\longrightarrow} 0. \tag{17.2.38}$$

  Это изображается соотношением

$$L_i \underset{i\to\infty}{\longrightarrow} x.$$

Пусть U – открытое множество в X и f – непрерывная функция на U. Обозначив для произвольной поверхности $L\subset U$

$$F(L)=\iint_L f(x)\cdot\mathsf{Area}(\mathsf{d}\,x),$$

мы получим отображение $L\mapsto F(L)$, которое каждой поверхности $L\subset U$ ставит в соответствие число $F(L)$. Отметим следующие свойства такого отображения:

(IIS-1) **Аддитивность по скалярным поверхностям:** если поверхности M и N образуют разбиение поверхности L

$$L\cong M\sqcup N,$$

то

$$F(L)=F(M)+F(N)$$

(IIS-2) **Изотропность:** для всякой точки $x\in U$ существует число $A\in\mathbb{R}$ такое, что справедливо соотношение

$$F(L)=A\cdot\mathsf{Area}(L)+\underset{L\to x}{\mathbf{o}}\big(\mathsf{Area}(L)\big) \tag{17.2.39}$$

или, что эквивалентно, соотношение

$$\frac{F(L)}{\mathsf{Area}(L)} \underset{\mathsf{Area}(L)\to 0}{\longrightarrow} A, \tag{17.2.40}$$

Их надо понимать так: для любой последовательности L_i поверхностей, сходящихся к x

$$L_i \underset{i\to\infty}{\longrightarrow} x$$

справедливо соотношение

$$F(L_i) = A \cdot \mathsf{Area}(L_i) + \underset{i\to\infty}{\mathbf{o}}\big(\mathsf{Area}(L_i)\big) \tag{17.2.41}$$

и, эквивалентно,

$$\frac{F(L_i)}{\mathsf{Area}(L_i)} \underset{i\to\infty}{\longrightarrow} A. \tag{17.2.42}$$

Доказательство. Утверждение **(IIS-1)** – переформулировка свойства аддитивности изотропного интеграла по поверхностям (формула (17.2.34)), поэтому неочевидным здесь будет только утверждение **(IIS-2)**. Для точки $x \in U$ положим $A = f(x)$. Тогда для любой последовательности поверхностей L_i, сходящейся к x, мы получим

$$\frac{1}{\mathsf{Area}(L_i)} \cdot \Big|F(L_i) - \underbrace{A \cdot \mathsf{Area}(L_i)}_{\substack{\| \ (17.2.32) \\ \iint_{L_i} A \cdot \mathsf{Area}(\mathsf{d}\, y)}}\Big| = \frac{1}{\mathsf{Area}(L_i)} \cdot \left| \iint_{L_i} f(y)\, \mathsf{Area}(\mathsf{d}\, y) - \iint_{L_i} A \cdot \mathsf{Area}(\mathsf{d}\, y) \right| =$$

$$= \frac{1}{\mathsf{Area}(L_i)} \cdot \left| \iint_{L_i} \Big(f(y) - A\Big)\, \mathsf{Area}(\mathsf{d}\, y) \right| \leqslant (17.2.35) \leqslant \frac{1}{\mathsf{Area}(L_i)} \cdot \max_{y\in L_i} \Big|f(y) - A\Big| \cdot \mathsf{Area}(L_i) =$$

$$= \max_{y\in L_i} |f(y) - A| = \max_{y\in L_i} |f(y) - f(x)| \underset{i\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

(последнее соотношение следует из того, что $f : U \to \mathbb{R}$ – непрерывная функция). Это доказывает (17.2.42). $\square$

- Условия **(IIS-1)** и **(IIS-2)** называются *аксиомами изотропного интеграла по поверхностям.* Они полностью определяют изотропные интегралы, как функционалы от поверхностей (как аксиомы **(IIC-1)** и **(IIC-2)** определяли изотропные интегралы по кривым в соответствие с теоремой 16.2.11, а до этого аксиомы **(I-1)** и **(I-2)** определяли интегралы в евклидовом пространстве в соответствие с теоремой 15.2.7):

Теорема 17.2.11. *Пусть U – открытое множество в X и пусть каждой поверхности $L \subset U$ поставлено в соответствие число $F(L)$ так, что функционал $L \mapsto F(L)$ удовлетворяет условиям* **(IIS-1)** *и* **(IIS-2)**. *Тогда существует и единственна непрерывная функция $f : U \to \mathbb{R}$ такая, что*

$$F(L) = \iint_L f(x) \cdot \mathsf{Leng}(\mathsf{d}\, x). \tag{17.2.43}$$

для любой скалярной поверхности $L \subseteq U$.

- Функция $f : U \to \mathbb{R}$ называется *изотропной плотностью* функционала по поверхностям F.

Доказательство. По аксиоме **(IIS-2)**, всякой точке $x \in U$ соответствует некое число $A \in \mathbb{R}$, удовлетворяющее соотношению (17.2.39). Положим $f(x) = A$ и убедимся, что эта функция обладает нужными свойствами.

1. Заметим, что из соотношения (17.2.40) сразу следует, что функция $f : U \to \mathbb{R}$ единственна.

2. Покажем далее, что функция $f : U \to \mathbb{R}$ непрерывна. Возьмем какую-нибудь последовательность точек

$$x_i \underset{i\to\infty}{\longrightarrow} x$$

Для каждого i справедливо соотношение

$$F(L) = f(x_i) \cdot \mathsf{Area}(L) + \underset{L\to x_i}{\mathbf{o}}\big(\mathsf{Area}(L)\big).$$

Из него следует, что можно выбрать какую-нибудь поверхность L_i со свойствами

$$\rho(L_i, \{x_i\}) < \frac{1}{i}, \qquad \left|\frac{F(L_i)}{\mathsf{Area}(L_i)} - f(x_i)\right| \leqslant \frac{1}{i}$$

Тогда мы получаем, что поверхности L_i стремятся к x, потому что

$$\rho(L_i,\{x\})\leqslant \rho(L_i,\{x_i\})+\rho(\{x_i\},\{x\})<\frac{1}{i}+\rho(x_i,x)\underset{i\to\infty}{\longrightarrow}0$$

и значит, соответствующая последовательность средних функционала F по длине должна стремиться к $f(x)$:

$$\frac{F(L_i)}{\mathsf{Area}(L_i)}\underset{i\to\infty}{\longrightarrow}f(x)$$

Отсюда уже следует, что $f(x_i)$ стремится к $f(x)$:

$$|f(x_i)-f(x)|\leqslant\left|f(x_i)-\frac{F(L_i)}{\mathsf{Area}(L_i)}\right|+\left|\frac{F(L_i)}{\mathsf{Area}(L_i)}-f(x)\right|\leqslant\frac{1}{i}+\left|\frac{F(L_i)}{\mathsf{Area}(L_i)}-f(x)\right|\underset{i\to\infty}{\longrightarrow}0 \qquad (17.2.44)$$

3. Покажем, что для всякого компакта $K\subseteq U$ выполняется соотношение

$$\sup_{\substack{x,\,M:\\ x\in M\subseteq K,\\ \mathsf{diam}(M)\leqslant\varepsilon}}\left|\frac{F(M)}{\mathsf{Area}(M)}-f(x)\right|\underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow}0 \qquad (17.2.45)$$

Это удобно делать от противного: предположим, что (17.2.45) не выполняется, то есть существует компакт $K\subseteq U$ и последовательность поверхностей $M_i\subseteq K$ такая, что

$$\mathsf{diam}(M_i)\underset{i\to\infty}{\longrightarrow}0,\qquad \sup_{x\in M_i}\left|\frac{F(M_i)}{\mathsf{Area}(M_i)}-f(x)\right|\underset{i\to\infty}{\not\longrightarrow}0$$

Переходя к подпоследовательности, можно считать, что последовательность $\sup_{x\in M_i}\left|\frac{F(M_i)}{\mathsf{Area}(M_i)}-f(x)\right|$ отделена от нуля неким числом $\delta>0$:

$$\mathsf{diam}(M_i)\underset{i\to\infty}{\longrightarrow}0,\qquad \sup_{x\in M_i}\left|\frac{F(M_i)}{\mathsf{Area}(M_i)}-f(x)\right|>\delta>0$$

Теперь можно выбрать последовательность $x_i\in M_i$ такую, что

$$\left|\frac{F(M_i)}{\mathsf{Area}(M_i)}-f(x_i)\right|>\delta>0 \qquad (17.2.46)$$

Последовательность x_i лежит в компакте K, поэтому она содержит сходящуюся подпоследовательность. Перейдя к ней, и переобозначив индексы, мы можем считать что сама последовательность x_i стремится к какому-то пределу $x\in K$:

$$x_i\underset{i\to\infty}{\longrightarrow}x$$

При этом, $x_i\in M_i$, а диаметры M_i стремятся к нулю, значит,

$$M_i\underset{i\to\infty}{\longrightarrow}\{x\}$$

откуда в силу (17.2.41),

$$\frac{F(M_i)}{\mathsf{Area}(M_i)}\underset{i\to\infty}{\longrightarrow}f(x) \qquad (17.2.47)$$

и значит,

$$\frac{F(M_i)}{\mathsf{Area}(M_i)}-f(x_i)=\underbrace{\frac{F(M_i)}{\mathsf{Area}(M_i)}-f(x)}_{\substack{\downarrow\ (17.2.47)\\ 0}}+\underbrace{f(x)-f(x_i)}_{\substack{\downarrow\ (16.2.34)\\ 0}}\underset{i\to\infty}{\longrightarrow}0$$

Мы получаем противоречие с (17.2.46).

4. Покажем, что интегральные суммы функции f на кривой L стремятся к числу $F(L)$. Возьмем число $\varepsilon>0$ и рассмотрим произвольное разбиение кривой L

$$L=\bigsqcup_{M\in\mathcal{M}}M.$$

с диаметром $\mathsf{diam}(\mathcal{M}) \leqslant \varepsilon$. Для любых $x_M \in M$ мы получим:

$$\left| F(L) - \sum_{M\in\mathcal{M}} f(x_M)\cdot \mathsf{Area}(M) \right| = \left| \sum_{M\in\mathcal{M}} F(M) - \sum_{M\in\mathcal{M}} f(x_M)\cdot \mathsf{Area}(M) \right| \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{M\in\mathcal{M}} \left| F(M) - f(x_M)\cdot \mathsf{Area}(M) \right| = \sum_{M\in\mathcal{M}} \left| \frac{F(M)}{\mathsf{Area}(M)} - f(x_M) \right| \cdot \mathsf{Area}(M) \leqslant$$
$$\leqslant \sup_{\substack{x\in M\\ M\subseteq L:\\ \mathsf{diam}(M)\leqslant\varepsilon}} \left| \frac{F(M)}{\mathsf{Area}(M)} - f(x) \right| \cdot \sum_{M\in\mathcal{M}} \mathsf{Area}(M) = \underbrace{\sup_{\substack{x\in M\\ M\subseteq L:\\ \mathsf{diam}(M)\leqslant\varepsilon}} \left| \frac{F(M)}{\mathsf{Area}(M)} - f(x) \right|}_{\substack{\downarrow\ (17.2.45)\\ 0}} \cdot \mathsf{Area}(L) \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} 0$$

□

§ 3 Ориентированная поверхность, ее векторная площадь и анизотропный интеграл по поверхности

(a) Ориентированная поверхность

Определение ориентированной поверхности.

Теорема 17.3.1. *Все возможные параметризации данной поверхности L делятся на классы $\{P_i\}$, в каждом из которых любые два представителя одинаково ориентированы:*

1) *если $\alpha,\beta\in P_i$, то $\alpha\equiv\beta$,*
2) *если $\alpha\in P_i\ne P_j\ni\beta$ то $\alpha\not\equiv\beta$.*

! **17.3.1.** Выбранное нами определение поверхности предполагает, что этих классов эквивалентности может быть больше двух. Это зависит от (минимально возможного) числа связных компонент в области параметров данной поверхности: каждая такая компонента увеличивает число классов эквивалентности вдвое.

Выбрать какую-нибудь ориентацию на поверхности L – значит выбрать какой-нибудь из классов P_i, и объявить, что все параметризации, лежащие в этом классе имеют ориентацию, согласованную с выбранной ориентацией нашей поверхности L. Это то же самое, что выбрать какую-нибудь параметризацию α поверхности L, и сказать, что все параметризации β, одинаково ориентированные с α считаются согласованными с ориентацией L.

- Поверхность L в евклидовом пространстве X с выбранной на ней ориентацией называется *ориентированной поверхностью.* Мы будем обозначать ориентированные поверхности жирными буквами, $\mathbf{L}$, $\mathbf{T}$, и т.д., чтобы не путать их с неориентированными. Если параметризация $\alpha: I\to L$ принадлежит выбранному классу P_i (то есть имеет ориентацию, согласованную с выбранной) ориентаций на L, то мы записываем это так:
$$\alpha: I\to \mathbf{L}$$
- Если $\mathbf{L}$ – ориентированная поверхность, то та же поверхность L без ориентации называется *носителем* ориентированной поверхности $\mathbf{L}$ и обозначается $|\mathbf{L}|$:
$$L = |\mathbf{L}|\,.$$

◇ **17.3.2. Ориентированный параллелограмм.** Напомним, что выше в примере 17.1.1 мы определили параметризованный параллелограмм в X формулой

$$\alpha(u,v) = a_1\cdot u + a_2\cdot v + b;\quad (u,v)\in[0,1]^2,$$

где a_1,a_2,b – фиксированные векторы из X. Такое отображение параметризует множество в X, в геометрии называемое параллелограммом. Это множество, рассматриваемое как ориентированная поверхность в X с ориентацией, определяемой параметризацией α, мы называем *ориентированным параллелограммом* и обозначаем $\mathbf{P}_b(a_1, a_2)$. Точку b мы по-прежнему будем называть *вершиной* этого параллелограмма, а векторы a_1, a_2 – его *направляющими.*

Ориентированно подчиненная поверхность. Мы говорим, что ориентированная поверхность $\mathbf{M}$ *ориентированно подчинена* ориентированной поверхности $\mathbf{L}$, если выполняются следующие эквивалентные условия:

(a) существует параметризация $\alpha : I \to \mathbf{L}$, согласованная с ориентацией $\mathbf{L}$, такая что след $\alpha|_M : \alpha^{-1}(\mathbf{M}) \to \mathbf{M}$ поверхности $\mathbf{M}$ в α будет параметризацией $\mathbf{M}$, согласованной с ориентацией $\mathbf{M}$;

(b) для любой параметризации $\alpha : I \to \mathbf{L}$, согласованной с ориентацией $\mathbf{L}$, след $\alpha|_M : \alpha^{-1}(\mathbf{M}) \to \mathbf{M}$ поверхности $\mathbf{M}$ в α будет параметризацией $\mathbf{M}$, согласованной с ориентацией $\mathbf{M}$.

Из общей теоремы о подчиненном полурегулярном отображении 15.3.14 следует

Теорема 17.3.2. *Если* $\mathbf{M}$ *и* $\mathbf{N}$ *– две ориентированные поверхности, ориентированно подчиненные поверхности* $\mathbf{L}$*,*

$$\mathbf{M} \subseteqq \mathbf{L}, \qquad \mathbf{N} \subseteqq \mathbf{L},$$

то их объединение $\mathbf{M} \cup \mathbf{N}$ *и пересечение* $\mathbf{M} \cap \mathbf{N}$ *тоже являются ориентированными поверхностями, ориентированно подчиненными поверхности* $\mathbf{L}$*:*

$$\mathbf{M} \cup \mathbf{N} \subseteqq \mathbf{L}, \qquad \mathbf{M} \cap \mathbf{N} \subseteqq \mathbf{L}.$$

По аналогии с определением на с.1035, мы говорим что последовательность ориентированных регулярных поверхностей $\mathbf{M}_k$ задает *регулярную аппроксимацию ориентированной поверхности* $\mathbf{L}$*, согласованную с ориентацией* $\mathbf{L}$, если все $\mathbf{M}_k$ ориентированно подчинены $\mathbf{L}$ и выполняется соотношение

$$\mathsf{Area}(\mathbf{M}_k) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \mathsf{Area}(\mathbf{L}).$$

Следующий факт доказывается в точности как теорема 17.2.7:

Теорема 17.3.3. *Всякая ориентированная поверхность* $\mathbf{L}$ *обладает регулярной аппроксимацией, согласованной с ориентацией* $\mathbf{L}$.

Разбиение ориентированной поверхности. Пусть $\mathcal{T}$ обозначает конечное множество ориентированных поверхностей. Говорят, что $\mathcal{T}$ является *разбиением ориентированной поверхности* $\mathbf{L}$, и записывают это формулой

$$\mathbf{L} \equiv \bigsqcup_{\mathbf{T}\in\mathcal{T}} \mathbf{T}$$

если выполняются следующие эквивалентные условия:

(a) существует параметризация α поверхности $\mathbf{L}$, согласованная с ориентацией $\mathbf{L}$, и параметризации $\beta_{\mathbf{T}}$ поверхностей $\mathbf{T} \in \mathcal{T}$, согласованные с ориентациями $\mathbf{T}$, такие, что система $\{\beta_{\mathbf{T}};\ \mathbf{T} \in \mathcal{T}\}$ является (ориентированным) разбиением[2] параметризованной поверхности α

$$\alpha \equiv \bigsqcup_{\mathbf{T}\in\mathcal{T}} \beta_{\mathbf{T}}$$

(b) для любой параметризации α поверхности $\mathbf{L}$, согласованной с ориентацией $\mathbf{L}$, и любых параметризаций $\beta_{\mathbf{T}}$ поверхностей $\mathbf{T} \in \mathcal{T}$, согласованных с ориентациями $\mathbf{T}$, система $\{\beta_{\mathbf{T}};\ \mathbf{T} \in \mathcal{T}\}$ является (ориентированным) разбиением параметризованной поверхности α

$$\alpha \equiv \bigsqcup_{\mathbf{T}\in\mathcal{T}} \beta_{\mathbf{T}}$$

Доказательство. Эквивалентность этих условий следует из лемм 17.1.5 и 17.1.7. $\square$

[2] Ориентированные разбиения параметризованных поверхностей были определены на с.1024.

Из теорем 17.1.6, 17.1.7, 17.1.8 и 17.1.9 следуют

Свойства разбиений ориентированных поверхностей

1°. *Разбиения ориентированной поверхности эквивалентны разбиениям ее области параметров: если $\alpha : I \to \mathbf{L}$ – произвольная параметризая ориентированной поверхности $\mathbf{L}$, согласованная с ее ориентацией, то*

(i) *для любого измеримого разбиения $I_1, ..., I_m$ области параметров I компактами ограничения*

$$\alpha_i = \alpha\big|_{I_i}$$

определяют ориентированные поверхности $\mathbf{L}_1, ..., \mathbf{L}_m$, образующие разбиение ориентированной поверхности $\mathbf{L}$.

(ii) *и наоборот, для любого разбиения $\mathbf{L}_1, ..., \mathbf{L}_m$ ориентированной поверхности $\mathbf{L}$ множества $I_i = \{s \in I : \alpha(s) \in \mathbf{L}_i\}$, образуют измеримое разбиение множества I компактами.*

2°. *Если $\mathbf{M}$ – ориентированная поверхность, ориентированно подчиненная поверхности $\mathbf{L}$,*

$$\mathbf{M} \subseteqq \mathbf{L}$$

то найдется ориентированная поверхность $\mathbf{N}$, образующая в паре с $\mathbf{M}$ разбиение ориентированной поверхности $\mathbf{L}$:

$$\mathbf{L} \equiv \mathbf{M} \sqcup \mathbf{N}$$

3°. *Если $\mathcal{T}$ – разбиение ориентированной поверхности $\mathbf{L}$,*

$$\mathbf{L} \equiv \bigsqcup_{\mathbf{T}\in\mathcal{T}} \mathbf{T}$$

то для любой ориентированно подчиненной поверхности $\mathbf{M} \subseteqq \mathbf{L}$ система $\{\mathbf{T}\cap\mathbf{M};\ \mathbf{T}\in\mathcal{T}\}$ будет разбиением ориентированной поверхности $\mathbf{M}$:

$$\mathbf{M} \equiv \bigsqcup_{\mathbf{T}\in\mathcal{T}} \mathbf{T}\cap\mathbf{M}$$

В частности, если $\{\mathbf{S}, \mathbf{T}\}$ – разбиение ориентированной поверхности $\mathbf{L}$,

$$\mathbf{L} \equiv \mathbf{S} \sqcup \mathbf{T},$$

то для любой ориентированно подчиненной поверхности $\mathbf{M} \subseteqq \mathbf{L}$ пара кривых $\{\mathbf{S}\cap\mathbf{M}, \mathbf{T}\cap\mathbf{M}\}$ образует разбиение ориентированной поверхности $\mathbf{M}$,

$$\mathbf{M} \equiv (\mathbf{S}\cap\mathbf{M}) \sqcup (\mathbf{T}\cap\mathbf{M}) \tag{17.3.48}$$

Измельчающиеся разбиения ориентированных поверхностей. Пусть $\mathcal{T}$ – разбиение ориентированной поверхности $\mathbf{L}$:

$$\mathbf{L} \equiv \bigsqcup_{\mathbf{T}\in\mathcal{T}} \mathbf{T}$$

Диаметром разбиения $\mathcal{T}$ поверхности $\mathbf{L}$ мы, как обычно, называем максимум диаметров элементов этого разбиения:

$$\mathsf{diam}(\mathcal{T}) := \max_{\mathbf{T}\in\mathcal{T}} \mathsf{diam}(\mathbf{T}) = \max_{\mathbf{T}\in\mathcal{T}} \sup_{x,y\in\mathsf{R}(\mathbf{T})} |x-y|$$

Последовательность $\mathcal{T}_k$ разбиений поверхности $\mathbf{L}$

$$\mathbf{L} \equiv \bigsqcup_{\mathbf{T}\in\mathcal{T}_k} \mathbf{T}$$

называется *измельчающейся*, если диаметры этих разбиений стремятся к нулю

$$\mathsf{diam}(\mathcal{T}_k) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Теорема 17.3.4. *Всякая ориентированная поверхность $\mathbf{L}$ обладает измельчающейся последовательностью разбиений.*

Доказательство. Пусть $\alpha : I \to \mathbf{L}$ – параметризация поверхности $\mathbf{L}$, согласованная с ее ориентацией. Построим аналог двоичной сетки в X, в котором след $Q \cap \mathbf{L}$ каждой клетки Q на поверхности $\mathbf{L}$ является поверхностью, полчиненной $\mathbf{L}$ (что это возможно – неочевидный факт, потому что в каких-то случаях $Q \cap \mathbf{L}$ может быть множеством, прообраз которого при отображении $\alpha : I \to \mathbf{L}$ неизмерим по Жордану). Рассмотрим линейный функционал $f : X \to \mathbb{R}$, являющийся проекцией на первую координату:

$$f(x_1, ...x_n) = x_1.$$

Композиция $f \circ \alpha : I \to \mathbb{R}$ является гладким отображением. По теореме Сарда 15.3.9, множество критических значений этой функции имеет нулевую меру Жордана:

$$\mu\Big(\mathsf{CV}_D[f \circ \alpha]\Big) = 0.$$

Отсюда следует, что в любом интервале вида

$$\left(\frac{p}{2^k}, \frac{p+1}{2^k}\right)$$

найдется некритическое значение C_p^1 этой функции. Его прообраз при отображении f

$$\Pi_p = \{x \in X : \ f(x) = C_p^1\}$$

является (гипер)плоскостью, у которой прообраз при отображении α представляет собой некритическое множество уровня Z_p^1 функции $f \circ \alpha$, поэтому по теореме 15.3.8, Z_p^1 – компакт с нулевой жордановой мерой:

$$\mu(Z_p^1) = 0. \tag{17.3.49}$$

Для всякого $p \in \mathbb{Z}$ зафиксируем такое число C_p^1 и соответствующую гиперплоскость Π_p^1. После этого рассмотрим в качестве f проекцию на вторую координату и для нее выберем соответствующую систему C_p^2 некритических значений и систему гиперплоскостей Π_p^2. Проделав это для всех координат $x_1, ..., x_n$, мы получим некое разбиение пространства X гиперплоскостями Π_p^i, $i = 1, ..., n$, $p \in \mathbb{Z}$, которую мы можем назвать *двоичной сеткой ранга* k. Такая двоичная сетка порождает разбиение X на прямоугольные параллелепипеды, которые мы называем *клетками*. Диаметр каждой такой клетки Q оценивается неравенством

$$\mathsf{diam}\, Q \leqslant \frac{2\sqrt{n}}{2^k} = \frac{\sqrt{n}}{2^{k-1}}. \tag{17.3.50}$$

При этом прообраз границы клетки Q при отображении α представляет собой объединение конечного семейства множеств вида Z_p^i, которые по построению имеют нулевую меру Жордана. Значит,

$$\mu\Big(\alpha^{-1}\big(\mathsf{Fr}(Q)\big)\Big) = 0.$$

Из включения (15.3.132)

$$\mathsf{Fr}\left(\alpha^{-1}(Q)\right) \subseteq \alpha^{-1}(\mathsf{Fr}\, Q) \cup \mathsf{D}_{\mathsf{sing}}(\alpha)$$

мы получаем, что граница множества $\alpha^{-1}(Q)$ также имеет нулевую меру:

$$\mu\Big(\mathsf{Fr}\, \alpha^{-1}(Q)\Big) \leqslant \mu\Big(\alpha^{-1}(\mathsf{Fr}\, Q)\Big) + \mu\Big(\mathsf{D}_{\mathsf{sing}}(\alpha)\Big) = 0 + 0 = 0.$$

Это означает, что $\alpha^{-1}(Q)$ является имеримым по Жордану множеством. С другой стороны, если P – какая-то другая клетка в этой сетке, то их пересечение лежит в какой-то плоскости Π_p^i

$$\alpha^{-1}(P) \cap \alpha^{-1}(Q) = \alpha^{-1}(P \cap Q) \subseteq \alpha^{-1}(\Pi_p^i) = Z_p^i,$$

и мера этого множества нулевая в силу формулы (17.3.49) (верной не только для индекса 1, но и любого другого). В итоге мы получаем, что множества вида $\alpha^{-1}(Q)$, где Q пробегает множество клеток данной сетки, образуют измеримое разбиение компакта $\mathsf{R}(\alpha)$. Отсюда следует, что поверхности

$$\alpha\Big(\alpha^{-1}(Q)\Big) = Q \cap \mathbf{L}$$

образуют разбиение поверхности $\mathbf{L}$. Из (17.3.50) следует, что при $k \to \infty$ диаметр такого разбиения стремится к нулю.

$$\mathsf{diam}(\mathcal{T}_k) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

$\square$

Дробностью разбиения $\mathcal{T}$ поверхности $\mathbf{L}$ мы называем максимум скалярных площадей элементов этого разбиения:

$$\mathsf{frac}(\mathcal{T}) := \max_{\mathbf{T}\in\mathcal{T}} \mathsf{Area}(\mathbf{T})$$

Теорема 17.3.5. *У всякой измельчающейся последовательности $\mathcal{T}_k$ разбиений ориентированной поверхности $\mathbf{L}$ дробность стремится к нулю:*

$$\mathsf{frac}(\mathcal{T}_k) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Доказательство. 1. Рассмотрим сначала случай, когда $\mathbf{L}$ – регулярная поверхность. Пусть $\alpha : I \to \mathbf{L}$ ее регулярная параметризация. Поскольку α – биективное и непрерывное отображение компактов, по теореме 14.2.4 оно является вложением, и значит, обратное отображение $\alpha^{-1} : \mathbf{L} \to I$ тоже будет непрерывно. Значит, оно равномерно непрерывно:

$$\sup_{x,y\in\mathbf{L}:\ |x-y|<\delta} |\alpha^{-1}(x) - \alpha^{-1}(y)| \underset{\delta\to 0}{\longrightarrow} 0.$$

Отсюда следует, что диаметры разбиений $\mathcal{J}_k$ области параметров I, соответствующих разбиениям $\mathcal{T}_k$ поверхности $\mathbf{L}$, тоже страмятся к нулю:

$$\mathsf{diam}\,\mathcal{I}_k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Как следствие,

$$\mathsf{frac}(\mathcal{T}_k) = \max_{\mathbf{T}\in\mathcal{T}_k} \mathsf{Area}(\mathbf{T}) = \max_{J\in\mathcal{J}_k} \int_J |\alpha'(t)|\,\mathsf{d}\,t \leqslant \max_{t\in I} |\alpha'(t)| \cdot \max_{J\in\mathcal{J}_k} \mu(J) \leqslant$$
$$\leqslant \max_{t\in I} |\alpha'(t)| \cdot \max_{J\in\mathcal{J}_k} \mathsf{diam}(J) = \max_{t\in I} |\alpha'(t)| \cdot \mathsf{diam}\,\mathcal{J}_k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

2. Зафиксируем $\varepsilon > 0$. С помощью теоремы 17.3.3 подберем регулярную ориентированную поверхность $\mathbf{M}$, ориентированно подчиненную поверхности $\mathbf{L}$, так чтобы их площади отличались на величину, меньшую $\frac{\varepsilon}{2}$. Обозначим через $\mathbf{N}$ дополнение поверхности $\mathbf{M}$ в поверхности $\mathbf{L}$ (свойство 2°. на с.1046):

$$\mathbf{L} \equiv \mathbf{M} \sqcup \mathbf{N}.$$

Тогда

$$\mathsf{Area}(\mathbf{N}) = \mathsf{Area}(\mathbf{L}) - \mathsf{Area}(\mathbf{M}) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Каждое разбиение $\mathcal{T}_k$ оставляет на поверхности $\mathbf{M}$ след в виде системы подчиненных поверхностей, которые образуют разбиение поверхности $\mathbf{M}$ (свойство 3° на с.1046)

$$\mathbf{M} \equiv \bigsqcup_{\mathbf{T}\in\mathcal{T}_k} \mathbf{T}\cap\mathbf{M}.$$

При этом, понятное дело, мы получаем измельчающуюся последовательность разбиений. Поскольку $\mathbf{M}$ – регулярная поверхность, по уже доказанному, дробность этих разбиений стремится к нулю:

$$\mathsf{frac}\{\mathbf{T}\cap\mathbf{M};\ \mathbf{T}\in\mathcal{T}_k\} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Поэтому для почти всех k должно быть справедливо неравенство

$$\mathsf{frac}\{\mathbf{T}\cap\mathbf{M};\ \mathbf{T}\in\mathcal{T}_k\} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Для таких k и произвольного $\mathbf{T}\in\mathcal{T}_k$ мы теперь получим:

$$\mathsf{Area}(\mathbf{T}) = \mathsf{Area}(\mathbf{T}\cap\mathbf{M}) + \mathsf{Area}(\mathbf{T}\cap\mathbf{N}) \leqslant \mathsf{Area}(\mathbf{T}\cap\mathbf{M}) + \mathsf{Area}(\mathbf{N}) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Это верно для почти всех k при заранее фиксированном произвольном $\varepsilon > 0$. Значит,

$$\mathsf{frac}(\mathcal{T}_k) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

$\square$

(b) Векторная площадь ориентированной поверхности

Определение векторной площади и ее свойства. Напомним, что Якобиан $\mathsf{J}\,\alpha$ параметризованной поверхности $\alpha : I \to X$ был определен выше формулой (14.2.135) и представляет собой бивектор в X, то есть элемент пространства $V_2(X)$.

- *Векторная площадь* ориентированной поверхности $\mathbf{L}$ в X, $n \geqslant 2$, определяется как (векторный) интеграл от Якобиана какой-нибудь параметризации $\alpha : I \to \mathbf{L}$ поверхности $\mathbf{L}$, согласованной с ее ориентацией:

$$\overrightarrow{\mathsf{Area}}(\mathbf{L}) = \iint_I \mathsf{J}\,\alpha(s)\ \mathsf{d}\,s = \iint_I \mathsf{d}\,\tilde{\alpha}(s)[e_1] \vee \mathsf{d}\,\tilde{\alpha}(s)[e_2]\ \mathsf{d}\,s \qquad (17.3.51)$$

Теорема 17.3.6. *Векторная площадь $\overrightarrow{\mathsf{Area}}(\mathbf{L})$ ориентированной поверхности $\mathbf{L}$ не зависит от выбора ее параметризации $\alpha : I \to \mathbf{L}$, согласованной с ее ориентацией, и по модулю не превосходит площади этой поверхности:*

$$|\,\overrightarrow{\mathsf{Area}}(\mathbf{L})| \leqslant \mathsf{Area}(\mathbf{L}) \qquad (17.3.52)$$

Доказательство. Формула (17.3.52) очевидна:

$$|\,\overrightarrow{\mathsf{Area}}(\mathbf{L})| = \left| \iint_I \mathsf{J}\,\alpha(s)\ \mathsf{d}\,s \right| \leqslant \iint_I |\,\mathsf{J}\,\alpha(s)|\ \mathsf{d}\,s = \mathsf{Area}(\mathbf{L})$$

В остальном здесь почти дословно повторяется доказательство второй половины теоремы 17.2.3 – различие состоит только в том, что в нужных местах $|\,\mathsf{J}\,\alpha(s)|$ и $|\,\mathsf{J}\,\beta(t)|$ заменяются на $\mathsf{J}\,\alpha(s)$ и $\mathsf{J}\,\beta(t)$ (и, чтобы в цепочке (17.2.22) $|\,\mathsf{J}\,\varphi(u,v)|$ можно было заменить на $\mathsf{J}\,\varphi(u,v)$, становится важным требование, чтобы α и β были одинаково ориентированы).

Вот как выглядит это на деле. Пусть $\alpha : I \to \mathbf{L}$ и $\beta : J \to \mathbf{L}$ – две параметризации, согласованные с ориентацией $\mathbf{L}$. Их функция перехода $\varphi : V \to U$ (из теоремы об эквивалентных поверхностях 17.1.3) будет иметь всюду положительную производную:

$$\mathsf{J}\,\varphi(t) > 0, \qquad t \in V.$$

Нужно показать, что

$$\iint_I \mathsf{J}\,\alpha(s)\ \mathsf{d}\,s = \iint_J \mathsf{J}\,\beta(t)\ \mathsf{d}\,t$$

Пусть $D_k \subseteq U$ и $G_k \subseteq V$ – измеримые компактные области, как в теореме 17.1.3. На каждом G_k отображение $\varphi : G_k \to D_k$ будет гладкой заменой переменной, превращающей $\alpha|_{D_k}$ в $\beta|_{G_k}$,

$$\alpha\big(\varphi(t)\big) = \beta(t), \qquad t \in G_k$$

Поэтому

$$\begin{aligned}\iint_{G_k} \mathsf{J}\,\beta(t)\,\mathsf{d}\,t = \iint_{G_k} J(\alpha\circ\varphi)(t)\,\mathsf{d}\,t = \iint_{G_k} \mathsf{J}\,\alpha(\varphi(t))\cdot \mathsf{J}\,\varphi(t)\,\mathsf{d}\,t = \\ = \iint_{G_k} \mathsf{J}\,\alpha(\varphi(t))\cdot |\,\mathsf{J}\,\varphi(t)|\,\mathsf{d}\,t = \left| \begin{matrix} s=\varphi(t) \\ s\in D_k \ \Leftrightarrow\ t\in G_k \end{matrix} \right| = \iint_{D_k} \mathsf{J}\,\alpha(s)\,\mathsf{d}\,s \end{aligned} \qquad (17.3.53)$$

Теперь получаем:

$$\begin{aligned}\left| \iint_I \mathsf{J}\,\alpha(s)\,\mathsf{d}\,s - \iint_J \mathsf{J}\,\beta(t)\,\mathsf{d}\,t \right| = \left| \iint_{I\setminus D_k} \mathsf{J}\,\alpha(s)\,\mathsf{d}\,s + \iint_{D_k} \mathsf{J}\,\alpha(s)\,\mathsf{d}\,s - \left(\iint_{J\setminus G_k} \mathsf{J}\,\beta(t)\,\mathsf{d}\,t + \iint_{G_k} \mathsf{J}\,\beta(t)\,\mathsf{d}\,t \right) \right| \leqslant \\ \leqslant \left| \iint_{I\setminus D_k} \mathsf{J}\,\alpha(s)\,\mathsf{d}\,s \right| + \left| \iint_{J\setminus G_k} \mathsf{J}\,\beta(t)\,\mathsf{d}\,t \right| + \Bigg| \underbrace{\iint_{D_k} \mathsf{J}\,\alpha(s)\,\mathsf{d}\,s - \iint_{G_k} \mathsf{J}\,\beta(t)\,\mathsf{d}\,t}_{\substack{\| \\ 0, \\ \text{в силу (17.3.53)}}} \Bigg| \leqslant \\ \leqslant \max_{s\in I} |\,\mathsf{J}\,\alpha(s)| \cdot \mu(I\setminus D_k) + \max_{t\in J} |\,\mathsf{J}\,\beta(t)| \cdot \mu(J\setminus G_k) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0\end{aligned}$$

$\square$

◇ **17.3.3. Векторная площадь ориентированного параллелограмма.** Напомним, что выше в примере 17.3.2 мы определили ориентированный параллелограмм в X, как ориентированную поверхность $\mathbf{P}_b(a_1, a_2)$ с параметризацией

$$\alpha(u,v) = a_1 \cdot u + a_2 \cdot v + b; \quad (u,v) \in [0,1]^2,$$

где a_1, a_2, b – фиксированные векторы из X. Точка b называется *вершиной* этого параллелограмма, а векторы a_1, a_2 – его *направляющими*. Покажем, что

$$\overrightarrow{\mathsf{Area}}\big(\mathbf{P}_b(a_1,a_2)\big) = a_1 \vee a_2. \tag{17.3.54}$$

Действительно,

$$\mathsf{J}\,\alpha(u,v) = \nabla_1\alpha(u,v) \vee \nabla_2\alpha(u,v) = a_1 \vee a_2,$$

и поэтому

$$\overrightarrow{\mathsf{Area}}\big(\mathbf{P}_b(a_1,a_2)\big) = \int_0^1\int_0^1 \mathsf{J}\,\alpha(u,v)\,\mathsf{d}\,u\,\mathsf{d}\,v = \\ = \int_0^1\int_0^1 a_1 \vee a_2\,\mathsf{d}\,u\,\mathsf{d}\,v = a_1 \vee a_2.$$

Аддитивность векторной площади.

Теорема 17.3.7. *Если $\mathcal{T}$ – разбиение ориентированной поверхности $\mathbf{L}$, то сумма векторных длин компонент $\mathcal{T}$ равна векторной длине $\mathbf{L}$:*

$$\overrightarrow{\mathsf{Area}}(\mathbf{L}) = \sum_{\mathbf{T}\in\mathcal{T}} \overrightarrow{\mathsf{Area}}(\mathbf{T}) \tag{17.3.55}$$

Доказательство. Пусть $\alpha : I \to \mathbf{L}$ и $\beta_{\mathbf{T}} : J_{\mathbf{T}} \to \mathbf{T}$ – параметризации поверхностей $\mathbf{L}$ и $\mathbf{T} \in \mathcal{T}$, согласованные с их ориентациями, причем $\beta_{\mathbf{T}} : J_{\mathbf{T}} \to \mathbf{T}$ является разбиением параметризованной поверхности $\alpha : I \to \mathbf{L}$. По теореме 17.1.7(iii), каждый след $\alpha_{\mathbf{T}} = \alpha\big|_{\beta_{\mathbf{T}}}$ ориентированно эквивалентен $\beta_{\mathbf{T}}$, система следов $\alpha_{\mathbf{T}} = \alpha\big|_{\beta_{\mathbf{T}}}$, $\mathbf{T} \in \mathcal{T}$, образует разбиение поверхности α, а их области определения $I_{\mathbf{T}} = \mathsf{D}(\alpha_{\mathbf{T}}) = \alpha^{-1}(T)$ – разбиение области I.

$$\alpha_{\mathbf{T}} = \alpha\big|_{\beta_{\mathbf{T}}} \equiv \beta_{\mathbf{T}}, \qquad \alpha \equiv \bigsqcup_{\mathbf{T}\in\mathcal{T}} \alpha\big|_{\beta_{\mathbf{T}}}, \qquad I = \bigsqcup_{\mathbf{T}\in\mathcal{T}} I_{\mathbf{T}}.$$

Отсюда, прежде всего, по теореме 17.3.6 следует, что

$$\iint_{I_{\mathbf{T}}} \mathsf{J}\,\alpha(s)\;\mathsf{d}\,s = \overrightarrow{\mathsf{Area}}(T), \qquad \mathbf{T} \in \mathcal{T}$$

(потому что векторная площадь не зависит от выбора параметризации), и из этого уже мы получаем

$$\overrightarrow{\mathsf{Area}}(\mathbf{L}) = \iint_I \mathsf{J}\,\alpha(s)\;\mathsf{d}\,s = \sum_{\mathbf{T}\in\mathcal{T}} \iint_{I_{\mathbf{T}}} \mathsf{J}\,\alpha(s)\;\mathsf{d}\,s = \sum_{\mathbf{T}\in\mathcal{T}} \overrightarrow{\mathsf{Area}}(T)$$

□

Связь между скалярной и векторной площадью.

Теорема 17.3.8 (о связи скалярной и векторной длины)**.** *Скалярная длина всякой ориентированной поверхности $\mathbf{L}$ всегда мажорирует сумму модулей векторных длин элементов ее произвольного разбиения*

$$\mathbf{L} = \bigsqcup_{T\in\mathcal{T}} \mathbf{T} \quad \Longrightarrow \quad \sum_{\mathbf{T}\in\mathcal{T}} |\,\overrightarrow{\mathsf{Area}}(\mathbf{T})| \leqslant \mathsf{Area}(\mathbf{L}) \tag{17.3.56}$$

и является пределом этих сумм при измельчении этого разбиения:

$$\boxed{\mathsf{Area}(\mathbf{L}) = \lim_{\substack{\mathbf{L} = \bigsqcup_{\mathbf{T}\in\mathcal{T}} \mathbf{T} \\ \mathsf{diam}(\mathcal{T}) \to 0}} \sum_{\mathbf{T}\in\mathcal{T}} |\,\overrightarrow{\mathsf{Area}}(\mathbf{T})|} \tag{17.3.57}$$

– то есть для любой измельчающейся последовательности $\mathcal{T}_k$ разбиений поверхности $\mathbf{L}$

$$\mathbf{L} = \bigsqcup_{T\in\mathcal{T}_k} \mathbf{T}, \qquad \mathsf{diam}(\mathcal{T}_k) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

справедливо соотношение

$$\sum_{\mathbf{T}\in\mathcal{T}_k} |\,\overrightarrow{\mathsf{Area}}(\mathbf{T})| \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \mathsf{Area}(\mathbf{L})$$

Доказательство. Заметим сразу, что формула (17.3.56) следует из (17.3.52) и (17.2.25):

$$\sum_{\mathbf{T}\in\mathcal{T}} |\overrightarrow{\mathsf{Area}}(\mathbf{T})| \leqslant (17.3.52) \leqslant \sum_{\mathbf{T}\in\mathcal{T}} \mathsf{Area}(\mathbf{T}) = (17.2.25) = \mathsf{Area}(\mathbf{L})$$

1. Пусть теперь $\mathbf{L}$ – регулярная ориентированная поверхность, $\mathcal{T}$ – ее разбиение и $\alpha: I \to L$ – ее регулярная параметризация, согласованная с ориентацией. По свойству 1° разбиений поверхностей (с.1046), система компактов

$$I_{\mathbf{T}},\ \mathbf{T}\in\mathcal{T}$$

образует измеримое разбиение компакта I. По лемме 17.2.9, существует константа $H > 0$, такая что для любой подчиненной поверхности $M \subseteq L$ соответствующая ей область параметров

$$I_M = \{s \in I:\ \alpha(s) \in M\}$$

удовлетворяет неравенству (17.2.26):

$$\mathsf{diam}(I_M) \leqslant H \cdot \mathsf{diam}(M) \tag{17.3.58}$$

Кроме того, поскольку Якобиан $\mathsf{J}\,\alpha: I \to X$ – продолжается до гладкого отображения в окрестности компакта I, по теореме 15.3.1 он должен удовлетворять условию Липшица:

$$|\,\mathsf{J}\,\alpha(s) - \mathsf{J}\,\alpha(t)| \leqslant C \cdot |s-t|, \qquad s,t \in I \tag{17.3.59}$$

Отсюда получаем:

$$0 \leqslant \mathsf{Area}(\mathbf{L}) - \sum_{\mathbf{T}\in\mathcal{T}} |\overrightarrow{\mathsf{Area}}(\mathbf{T})| = \sum_{\mathbf{T}\in\mathcal{T}} \mathsf{Area}(\mathbf{T}) - \sum_{\mathbf{T}\in\mathcal{T}} |\overrightarrow{\mathsf{Area}}(\mathbf{T})| = \sum_{\mathbf{T}\in\mathcal{T}} \Big(\mathsf{Area}(\mathbf{T}) - |\overrightarrow{\mathsf{Area}}(\mathbf{T})|\Big) =$$
$$= \sum_{\mathbf{T}\in\mathcal{T}} \left(\int_{I_{\mathbf{T}}} |\,\mathsf{J}\,\alpha(s)|\,\mathsf{d}\,s - \left| \int_{I_{\mathbf{T}}} \mathsf{J}\,\alpha(s)\,\mathsf{d}\,s \right| \right) \leqslant (15.2.114) \leqslant \sum_{\mathbf{T}\in\mathcal{T}} 2C \cdot \mathsf{diam}(I_{\mathbf{T}}) \cdot \mu(I_{\mathbf{T}}) \leqslant (17.3.58) \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{\mathbf{T}\in\mathcal{T}} 2C \cdot H \cdot \mathsf{diam}(\mathbf{T}) \cdot \mu(I_{\mathbf{T}}) \leqslant 2C \cdot H \cdot \max_{\mathbf{T}\in\mathcal{T}} \mathsf{diam}(\mathbf{T}) \cdot \sum_{\mathbf{T}\in\mathcal{T}} \mu(I_{\mathbf{T}}) = 2C \cdot H \cdot \mathsf{diam}(\mathcal{T}) \cdot \mu(I)$$

Числа C, H и $\mu(I)$ не зависят от разбиения $\mathcal{T}$, поэтому, если диаметр $\mathcal{T}$ стремится к нулю, разность $\mathsf{Area}(\mathbf{L}) - \sum_{\mathbf{T}\in\mathcal{T}} |\overrightarrow{\mathsf{Area}}(\mathbf{T})|$ тоже уменьшается:

$$0 \leqslant \mathsf{Area}(\mathbf{L}) - \sum_{\mathbf{T}\in\mathcal{T}} |\overrightarrow{\mathsf{Area}}(\mathbf{T})| \leqslant 2C \cdot H \cdot \mathsf{diam}(\mathcal{T}) \cdot \mu(I) \underset{\mathsf{diam}(\mathcal{T})\to 0}{\longrightarrow} 0$$

2. Пусть теперь $\mathbf{L}$ – произвольная ориентированная поверхность. Зафиксируем $\varepsilon > 0$ и, пользуясь теоремой 17.2.7, выберем регулярную ориентированную поверхность $\mathbf{M}$, подчиненную $\mathbf{L}$, так, чтобы площадь $\mathbf{M}$ отличалась от площади $\mathbf{L}$ меньше, чем на $\frac{\varepsilon}{3}$:

$$\mathbf{M} \subseteq \mathbf{L}, \qquad \mathsf{Area}(\mathbf{L}) - \mathsf{Area}(\mathbf{M}) < \frac{\varepsilon}{3}$$

По свойству 2° на с.1046, найдется ориентированная поверхность $\mathbf{N}$, подчиненная $\mathbf{L}$, образующая с $\mathbf{M}$ разбиение $\mathbf{L}$:

$$\mathbf{L} \equiv \mathbf{M} \sqcup \mathbf{N}.$$

Ее площадь должна, конечно, удовлетворять неравенству

$$\mathsf{Area}(\mathbf{N}) = \mathsf{Area}(\mathbf{L}) - \mathsf{Area}(\mathbf{M}) < \frac{\varepsilon}{3} \tag{17.3.60}$$

Если $\mathbf{T}$ – какая-нибудь еще ориентированная поверхность, подчиненная $\mathbf{L}$, то в силу (17.3.48) и (17.3.55) получаем:

$$\mathbf{T} \equiv (\mathbf{T}\cap\mathbf{M}) \sqcup (\mathbf{T}\cap\mathbf{N})$$
$$\Downarrow$$
$$\overrightarrow{\mathsf{Area}}(\mathbf{T}) = \overrightarrow{\mathsf{Area}}(\mathbf{T}\cap\mathbf{M}) + \overrightarrow{\mathsf{Area}}(\mathbf{T}\cap\mathbf{N})$$
$$\Downarrow$$

$$\left| \left|\overrightarrow{\mathsf{Area}}(\mathbf{T})\right| - \left|\overrightarrow{\mathsf{Area}}(\mathbf{T}\cap\mathbf{M})\right| \right| \leqslant \left|\overrightarrow{\mathsf{Area}}(\mathbf{T}) - \overrightarrow{\mathsf{Area}}(\mathbf{T}\cap\mathbf{M})\right| = \left|\overrightarrow{\mathsf{Area}}(\mathbf{T}\cap\mathbf{N})\right| \tag{17.3.61}$$

Если теперь $\mathcal{T}_k$ – измельчающаяся последовательность разбиений поверхности $\mathbf{L}$ (существующая по теореме 17.3.4),

$$\mathbf{L} = \bigsqcup_{T\in\mathcal{T}_k} \mathbf{T}, \qquad \mathsf{diam}(\mathcal{T}_k) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

то, по свойству 3° на с.1046, система

$$\mathcal{T}_k \cap \mathbf{M} = \{\mathbf{T}\cap\mathbf{M};\ \mathbf{T}\in\mathcal{T}_k\}$$

будет измельчающейся последовательностью разбиений поверхности $\mathbf{M}$,

$$\mathbf{M} = \bigsqcup_{T\in\mathcal{T}_k} \mathbf{T}\cap\mathbf{M}, \qquad \mathsf{diam}(\mathcal{T}_k\cap\mathbf{M}) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

и, поскольку мы уже доказали формулу (17.3.57) для регулярных поверхностей, для $\mathbf{M}$ выполняется соотношение

$$\sum_{\mathbf{T}\in\mathcal{T}_k} \left|\overrightarrow{\mathsf{Area}}(\mathbf{T}\cap\mathbf{M})\right| \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \mathsf{Area}(\mathbf{M}).$$

В частности, для почти всех $k\in\mathbb{N}$ должно быть справедливо неравенство

$$\mathsf{Area}(\mathbf{M}) - \sum_{\mathbf{T}\in\mathcal{T}_k} \left|\overrightarrow{\mathsf{Area}}(\mathbf{T}\cap\mathbf{M})\right| < \frac{\varepsilon}{3} \tag{17.3.62}$$

Для таких k мы теперь получаем:

$$\left|\mathsf{Area}(\mathbf{L}) - \sum_{\mathbf{T}\in\mathcal{T}_k} |\overrightarrow{\mathsf{Area}}(\mathbf{T})|\right| = \left|\underbrace{\mathsf{Area}(\mathbf{N}) + \mathsf{Area}(\mathbf{M})}_{\substack{\| \\ \mathsf{Area}(\mathbf{L})}} - \sum_{\mathbf{T}\in\mathcal{T}_k} |\overrightarrow{\mathsf{Area}}(\mathbf{T})|\right| =$$

$$= \left|\mathsf{Area}(\mathbf{N}) + \mathsf{Area}(\mathbf{M}) \underbrace{- \sum_{\mathbf{T}\in\mathcal{T}_k} |\overrightarrow{\mathsf{Area}}(\mathbf{T}\cap\mathbf{M})| + \sum_{\mathbf{T}\in\mathcal{T}_k} |\overrightarrow{\mathsf{Area}}(\mathbf{T}\cap\mathbf{M})|}_{\substack{\| \\ 0}} - \sum_{\mathbf{T}\in\mathcal{T}_k} |\overrightarrow{\mathsf{Area}}(\mathbf{T})|\right| \leqslant$$

$$\leqslant \underbrace{\mathsf{Area}(\mathbf{N})}_{\substack{\wedge \\ \frac{\varepsilon}{3}}} + \underbrace{\left|\mathsf{Area}(\mathbf{M}) - \sum_{\mathbf{T}\in\mathcal{T}_k} |\overrightarrow{\mathsf{Area}}(\mathbf{T}\cap\mathbf{M})|\right|}_{\substack{\wedge \\ \frac{\varepsilon}{3}}} + \left|\sum_{\mathbf{T}\in\mathcal{T}_k} \Big(|\overrightarrow{\mathsf{Area}}(\mathbf{T}\cap\mathbf{M})| - |\overrightarrow{\mathsf{Area}}(\mathbf{T})|\Big)\right| <$$

$$< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \sum_{\mathbf{T}\in\mathcal{T}_k} \Big| |\overrightarrow{\mathsf{Area}}(\mathbf{T}\cap\mathbf{M})| - |\overrightarrow{\mathsf{Area}}(\mathbf{T})| \Big| \leqslant (17.3.61) \leqslant \frac{2\varepsilon}{3} + \sum_{\mathbf{T}\in\mathcal{T}_k} \Big|\overrightarrow{\mathsf{Area}}(\underbrace{\mathbf{T}\cap\mathbf{N}}_{\substack{\uparrow \\ \text{эти поверхности образуют} \\ \text{разбиение для } \mathbf{N}}})\Big| \leqslant$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{уже доказанная} \\ \text{формула (17.3.56)}}}{\leqslant} \frac{2\varepsilon}{3} + \mathsf{Area}(\mathbf{N}) < \frac{2\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

□

(c) Анизотропный интеграл по поверхности и дифференциальные формы степени 2

Некоторые физические величины (как, например, поток векторного поля через поверхность) представляют собой функционалы от поверхностей $\mathbf{L} \mapsto \varPhi(\mathbf{L})$, зависящие от их ориентации: если ориентацию поверхности поменять на противоположную, то значение величины (потока) изменится на противоположное,

$$\varPhi(\ominus\mathbf{L}) = -\varPhi(\mathbf{L}).$$

Понятно, что такие функционалы не могут описываться аксиомами изотропного интегрирования по поверхностям **(IIS-1)** и **(IIS-2)** на с. 1042. Но для них существует другая, очень похожая система аксиом, определяющая их свойства, это аксиомы **(UIS-1)** и **(UIS-2)**, которые мы приводим ниже на с.1057. Они описывают функционалы, зависящие от ориентации поверхностей, которые поэтому можно назвать анизотропными интегралами по поверхностям.

Дифференциальные формы степени 2. Пусть U – открытое множество в евклидовом пространстве X. *Дифференциальной формой степени 2* на U называется произвольное непарерывное отображение $\omega : U \to \Lambda_2(X)$ (со значениями в пространстве внешних форм степени 2).

Из теоремы 12.5.3 о строении внешних форм на X следует

Теорема 17.3.9 (о строении дифференциальных форм степени 2). *Пусть $a = (a_1, ..., a_n)$ – базис и U – открытое множество в евклидовом пространстве X. Тогда любая система непрерывных функций $\{\zeta_{i,j};\ 1 \leqslant i < j \leqslant n\}$ на U определяет дифференциальную форму ω степени 2 на U по формуле*

$$\omega(x)[p,q] = \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} \zeta_{i,j}(x) \cdot \left(\left[\frac{p}{e}\right]^i \cdot \left[\frac{q}{e}\right]^j - \left[\frac{p}{e}\right]^j \cdot \left[\frac{q}{e}\right]^i \right). \qquad x \in U,\ p,q \in X \tag{17.3.63}$$

И наоборот, всякой дифференциальной форме ω степени 2 на U соответствует единственная система непрерывных функций $\{\zeta_{i,j};\ 1 \leqslant i < j \leqslant n\}$ на U, для которой выполняется тождество (17.3.63).

◇ **17.3.4. Постоянная форма степени 2.** Всякая внешняя форма $\eta : X \times X \to \mathbb{R}$ определяет дифференциальную форму ω степени 2 на произвольном открытом множестве $U \subseteq X$ по формуле

$$\omega(x)[p,q\,] = \eta[p,q\,]$$

Такие формы называются *постоянными*. Понятно, что их характеристическое свойство состоит в том, что они не зависят от переменной $x \in U$:

$$\omega(x)[p,q\,] = \omega(x)[p,q\,], \qquad x,y \in U$$

◇ **17.3.5** (конкатенация двух дифференциальных форм степени 1)**.** Если η и θ – две дифференциальные формы степени 1 на открытом множестве $U \subseteq X$, то формула

$$(\eta \wedge \theta)(x)[p,q\,] = \det \begin{pmatrix} \eta(x)[p] & \eta(x)[q] \\ \theta(x)[p] & \theta(x)[q] \end{pmatrix}$$

определяет дифференциальную форму $\eta \wedge \theta$ степени 2 на U, называемую конкатенацией форм η и θ.

◇ **17.3.6** (точная форма степени 2)**.** Если ψ – дифференциальная форма степени 1 на открытом множестве $U \subseteq X$, то по теореме 16.3.9 она раскладывается в сумму

$$\psi = \sum_{i=1}^{n} \zeta_i \cdot \mathsf{d}\, x^{(i)}$$

Дифференциалом этой формы называется форма степени 2, определяемая равенством

$$\mathsf{d}\,\psi = \sum_{i=1}^{n} \mathsf{d}\,\zeta_i \wedge \mathsf{d}\, x^{(i)}$$

В разложении по базису (17.3.63) она принимает вид

$$\mathsf{d}\,\psi(x) = \sum_{i,j=1}^{n} (\nabla_i \zeta_j - \nabla_j \zeta_i) \cdot p^{(i)} \cdot q^{(j)}$$

Если дифференциальная форма ω степени 2 имеет вид

$$\omega = \mathsf{d}\,\psi$$

для некоторой формы ψ степени 1, то ω называется точной формой степени 2 на U.

Интеграл от дифференциальной формы степени 2 вдоль кривой. Пусть нам дана некая дифференциальная форма $(x,p,q) \mapsto \omega(x)[p,q\,]$ степени 2 на открытом множестве U в евклидовом пространстве X, и пусть $\mathbf{L}$ – ориентированная поверхность в U. Рассмотрим произвольное ее разбиение $\mathcal{M}$

$$\mathbf{L} = \bigsqcup_{\mathbf{M}\in\mathcal{M}} \mathbf{M},$$

На каждом элементе $\mathbf{M}$ этого разбиения выберем точку

$$x_{\mathbf{M}} \in \mathbf{M}$$

Величину

$$\sum_{\mathbf{M}\in\mathcal{M}} \omega\big(x_{\mathbf{M}}\big)\Big[\overrightarrow{\mathsf{Area}}(\mathbf{M})\Big]$$

назовем *интегральной суммой формы* ω *на поверхности* $\mathbf{L}$.

Теорема 17.3.10. *При измельчении разбиения* $\mathcal{M}$ *интегральные суммы формы* ω *на поверхности* $\mathbf{L}$ *имеют предел*

$$\iint_{\mathbf{L}} \omega \underset{0\leftarrow \mathsf{diam}(\mathcal{M})}{\longleftarrow} \sum_{\mathbf{M}\in\mathcal{M}} \omega\big(x_{\mathbf{M}}\big)\Big[\overrightarrow{\mathsf{Area}}(\mathbf{M})\Big] \qquad \Big(\mathbf{L} = \bigsqcup_{\mathbf{M}\in\mathcal{M}} \mathbf{M}\Big) \tag{17.3.64}$$

называемый (анизотропным) интегралом дифференциальной формы ω *по поверхности* $\mathbf{L}$ *и вычисляемый по формуле*

$$\iint_{\mathbf{L}} \omega = \iint_I \omega(\alpha(t))[\mathsf{J}\,\alpha(t)]\,\mathsf{d}\,t = \iint_I \omega(\alpha(t))[\mathsf{d}\,\alpha(t)[e_1], \mathsf{d}\,\alpha(t)[e_2]]\,\mathsf{d}\,t, \tag{17.3.65}$$

где $\alpha : I \to \mathbf{L}$ *– произвольная параметризация* $\mathbf{L}$*, сохраняющая ориентацию, а* $e_1 = (1;0)$ *и* $e_2 = (0;1)$ *– векторы стандартного базиса в* $\mathbb{R}^2$.

! **17.3.7.** Формулу (17.3.64) следует понимать так, что для всякой измельчающейся последовательности $\mathcal{M}^k$ разбиений поверхности $\mathbf{L}$,

$$\mathbf{L} = \bigsqcup_{\mathbf{M}\in\mathcal{M}^k} \mathbf{M}, \qquad \mathsf{diam}(\mathcal{M}^k) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

и для любой системы выделенных точек

$$x^k_{\mathbf{M}} \in \mathbf{M} \in \mathcal{M}^k$$

справедливо соотношение

$$\iint_{\mathbf{L}} \omega \underset{\infty\leftarrow k}{\longleftarrow} \sum_{\mathbf{M}\in\mathcal{M}^k} \omega(x^k_{\mathbf{M}})\Big[\overrightarrow{\mathsf{Area}}(\mathbf{M})\Big]$$

Доказательство. Покажем, что интегральные суммы стремятся к числу $\iint_I \omega(\alpha(t))[\mathsf{J}\,\alpha(t)]\,\mathsf{d}\,t$.

По свойству 1^0 на с.1046, всякому разбиению поверхности $\mathbf{L}$

$$\mathbf{L} = \bigsqcup_{\mathbf{M}\in\mathcal{M}} \mathbf{M},$$

соответствует измеримое разбиение множества I

$$I_{\mathbf{M}} = \alpha^{-1}(\mathbf{M}), \quad \mathbf{M} \in \mathcal{M}$$

Отсюда получаем:

$$\left| \sum_{\mathbf{M}\in\mathcal{M}} \omega\big(x_{\mathbf{M}}\big)\Big[\underbrace{\overrightarrow{\mathsf{Area}}(\mathbf{M})}_{\substack{\| \\ (16.3.41) \\ \| \\ \iint_{I_{\mathbf{M}}} \mathsf{J}\,\alpha(t)\,\mathsf{d}\,t}}\Big] - \underbrace{\iint_I \omega\big(\alpha(t)\big)\Big[\mathsf{J}\,\alpha(t)\Big]\,\mathsf{d}\,t}_{\text{разбиваем на интегралы по } I_{\mathbf{M}}} \right| =$$

$$= \left| \sum_{\mathbf{M}\in\mathcal{M}} \omega\big(x_{\mathbf{M}}\big)\left[\iint_{I_{\mathbf{M}}} \mathsf{J}\,\alpha(t)\,\mathsf{d}\,t\right] - \sum_{\mathbf{M}\in\mathcal{M}} \iint_{I_{\mathbf{M}}} \omega\big(\alpha(t)\big)\Big[\mathsf{J}\,\alpha(t)\Big]\,\mathsf{d}\,t \right| = \begin{pmatrix}\text{выносим за скобку}\\ \text{знак суммы}\end{pmatrix} =$$

$$= \left| \sum_{\mathbf{M}\in\mathcal{M}} \left(\omega(\underbrace{x_{\mathbf{M}}}_{\substack{\uparrow \\ \text{не зависит} \\ \text{от } t}})\Big[\underbrace{\iint_{I_{\mathbf{M}}} \mathsf{J}\,\alpha(t)\,\mathsf{d}\,t}_{\substack{\text{знак интеграла} \\ \text{можно вынести} \\ \text{из-под аргумента,} \\ \text{поскольку } \omega(x)[p] \\ \text{– линейная форма} \\ \text{по аргументу } p \\ \text{при фиксированном } x}}\Big] - \iint_{I_{\mathbf{M}}} \omega\big(\alpha(t)\big)\Big[\mathsf{J}\,\alpha(t)\Big]\,\mathsf{d}\,t \right) \right| =$$

$$= \left| \sum_{\mathbf{M}\in\mathcal{M}} \left(\iint_{I_\mathbf{M}} \omega(x_\mathbf{M}) \Big[\mathsf{J}\,\alpha(t) \Big] \,\mathsf{d}\, t - \iint_{I_\mathbf{M}} \omega(\alpha(t)) \Big[\mathsf{J}\,\alpha(t) \Big] \,\mathsf{d}\, t \right) \right| =$$

$$= \left| \sum_{\mathbf{M}\in\mathcal{M}} \iint_{I_\mathbf{M}} \Big(\omega(x_\mathbf{M}) - \omega(\alpha(t)) \Big) [\mathsf{J}\,\alpha(t)] \,\mathsf{d}\, t \right| \leqslant \left(\begin{smallmatrix} \text{применяем формулу} \\ \left|\sum a_i\right| \leqslant \sum \left|a_i\right| \end{smallmatrix} \right) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{\mathbf{M}\in\mathcal{M}} \left| \iint_{I_\mathbf{M}} \Big(\omega(x_\mathbf{M}) - \omega(\alpha(t)) \Big) [\mathsf{J}\,\alpha(t)] \,\mathsf{d}\, t \right| \leqslant \left(\begin{smallmatrix} \text{применяем формулу} \\ \left|\iint h(t)\,\mathsf{d}\,t\right| \leqslant \iint \left|h(t)\right| \mathsf{d}\,t \end{smallmatrix} \right) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{\mathbf{M}\in\mathcal{M}} \iint_{I_\mathbf{M}} \left| \Big(\omega(x_\mathbf{M}) - \omega(\alpha(t)) \Big) [\mathsf{J}\,\alpha(t)] \right| \,\mathsf{d}\, t \leqslant \left(\begin{smallmatrix} \text{применяем формулу} \\ \left|\omega(x)[p]\right| \leqslant \left|\omega(x)\right| \cdot \left|p\right| \end{smallmatrix} \right) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{\mathbf{M}\in\mathcal{M}} \underbrace{\sup_{t\in I_\mathbf{M}} \Big| \omega(x_\mathbf{M}) - \omega(\alpha(t)) \Big|}_{\substack{\wedge\!\!| \\ \sup_{|x-y|\leqslant \mathsf{diam}(\mathcal{M})} \left|\omega(x)-\omega(y)\right|}} \cdot \underbrace{\iint_{I_\mathbf{M}} |\,\mathsf{J}\,\alpha(t)|\,\mathsf{d}\,t}_{\substack{\| \\ \mathsf{Area}(\mathbf{M})}} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{\mathbf{M}\in\mathcal{M}} \sup_{|x-y|\leqslant \mathsf{diam}(\mathcal{M})} \Big| \omega(x) - \omega(y) \Big| \cdot \mathsf{Area}(\mathbf{M}) =$$

$$= \sup_{|x-y|\leqslant \mathsf{diam}(\mathcal{M})} \Big| \omega(x) - \omega(y) \Big| \cdot \underbrace{\sum_{\mathbf{M}\in\mathcal{M}} \mathsf{Area}(\mathbf{M})}_{\substack{\| \\ \mathsf{Area}(\mathbf{L})}} = \underbrace{\sup_{|x-y|\leqslant \mathsf{diam}(\mathcal{M})} \Big| \omega(x) - \omega(y) \Big|}_{\substack{\downarrow \\ 0 \\ \text{при } \mathsf{diam}(\mathcal{M})\to 0 \\ \text{поскольку } \omega \text{ равномерно} \\ \text{непрерывна на компакте } L \\ \text{(теорема Кантора)}}} \cdot \mathsf{Area}(\mathbf{L}) \underset{\mathsf{diam}(\mathcal{M})\to 0}{\longrightarrow} 0$$

□

◇ **17.3.8. Интеграл от постоянной дифференциальной формы.** Из формулы (17.3.64) непосредственно следует, что интеграл от постоянной формы, определенной нами в примере 17.3.4,

$$\omega(x)[p,q\,] = \eta[p,q\,], \qquad p,q \in X$$

равен значению внешней формы η на векторной площади $\overrightarrow{\mathsf{Area}}(\mathbf{L})$ поверхности интегрирования:

$$\int_\mathbf{L} \omega = \eta\Big[\overrightarrow{\mathsf{Area}}(\mathbf{L})\Big]. \qquad (17.3.66)$$

◇ **17.3.9. Интеграл от дифференциальной формы по треугольнику.** Для всякой дифференциальной формы степени 2 и любого треугольника $\mathbf{L}$ найдется точка $x_\mathbf{L} \in \mathbf{L}$ такая, что

$$\int_\mathbf{L} \omega = \omega(x_\mathbf{L}) \left[\overrightarrow{\mathsf{Area}}(\mathbf{L})\right] \qquad (17.3.67)$$

Доказательство. Как всякую плоскую фигуру, треугольник $\mathbf{L}$ можно параметризовать так, чтобы производная этой параметризации была постоянна:

$$\alpha : I \to \mathbf{L} \qquad \mathsf{J}\,\alpha(s) = \mathsf{J}\,\alpha(t), \qquad s,t \in I$$

Теперь по формуле (17.3.65) получаем для некоторой точки $t_\mathbf{L} \in I$:

$$\int_\mathbf{L} \omega = \int_I \omega(\alpha(t))[\mathsf{J}\,\alpha(t)]\,\mathsf{d}\,t =$$
$$= \omega(\alpha(t_\mathbf{L}))\Big[\mathsf{J}\,\alpha(t_\mathbf{L})\Big] \cdot \mu(I) =$$
$$= \omega(\alpha(t_\mathbf{L}))\Big[\mathsf{J}\,\alpha(t_\mathbf{L}) \cdot \mu(I)\Big] =$$
$$= \omega(\alpha(t_\mathbf{L}))\Big[\int_I \mathsf{J}\,\alpha(t)\,\mathsf{d}\,t\Big] = \omega(\alpha(t_\mathbf{L}))\left[\overrightarrow{\mathsf{Area}}(\mathbf{L})\right]$$

Остается положить $x_\mathbf{L} = \alpha(t_\mathbf{L})$. □

Свойства анизотропного интеграла по поверхностям

1^0. **Линейность:** *если ψ и ω – две дифференциальные формы степени 2 на U и $\mathbf{L}$ – ориентированная поверхность в U, то для любых чисел $\lambda,\mu \in \mathbb{R}$*

$$\int_\mathbf{L} \{\lambda\cdot\psi(x) + \mu\cdot\omega(x)\}\,[\overrightarrow{\mathsf{Area}}(\mathsf{d}\,x)] = \lambda\cdot\int_\mathbf{L} \psi(x)[\overrightarrow{\mathsf{Area}}(\mathsf{d}\,x)] + \mu\cdot\int_\mathbf{L} \omega(x)[\overrightarrow{\mathsf{Area}}(\mathsf{d}\,x)] \quad (17.3.68)$$

2^0. **Аддитивность:** *если* $\mathbf{L} = \bigsqcup_{\mathbf{M}\in\mathcal{M}} \mathbf{M}$ *– ориентированное разбиение поверхности* $\mathbf{L}$, *то для любой дифференциальной формы* ω *степени 2 на* L

$$\int_{\mathbf{L}} \omega(x)[\overrightarrow{\mathsf{Area}}(\mathsf{d}\,x)] = \sum_{\mathbf{M}\in\mathcal{M}} \int_{\mathbf{M}} \omega(x)[\overrightarrow{\mathsf{Area}}(\mathsf{d}\,x)]. \tag{17.3.69}$$

3^0. **Оценка через скалярную площадь:** *если* ω *– дифференциальная форма степени 2 на поверхности* $\mathbf{L}$, *то*

$$\left|\int_{\mathbf{L}} \omega(x)[\overrightarrow{\mathsf{Area}}(\mathsf{d}\,x)]\right| \leqslant \max_{x\in\mathbf{L}} \left|\omega(x)\right| \cdot \mathsf{Area}(\mathbf{L}) \tag{17.3.70}$$

Доказательство. 1. Для разбиений $\mathcal{M}$ кривой $\mathbf{L}$ получаем:

$$\int_{\mathbf{L}} \{\lambda\cdot\psi(x)+\mu\cdot\omega(x)\}\,[\overrightarrow{\mathsf{Area}}(\mathsf{d}\,x)] \underset{0\leftarrow\mathsf{diam}\,\mathcal{M}}{\longleftarrow} \sum_{\mathbf{M}\in\mathcal{M}} \{\lambda\cdot\psi(x_{\mathbf{M}})+\mu\cdot\omega(x_{\mathbf{M}})\}\,[\overrightarrow{\mathsf{Area}}(\mathbf{M})] =$$
$$= \lambda\cdot\sum_{\mathbf{M}\in\mathcal{M}} \psi(x_{\mathbf{M}})[\overrightarrow{\mathsf{Area}}(\mathbf{M})] + \mu\cdot\sum_{\mathbf{M}\in\mathcal{M}} \omega(x_{\mathbf{M}})[\overrightarrow{\mathsf{Area}}(\mathbf{M})] \underset{\mathsf{diam}\,\mathcal{M}\to 0}{\longrightarrow}$$
$$\underset{\mathsf{diam}\,\mathcal{M}\to 0}{\longrightarrow} \lambda\cdot\int_{\mathbf{L}}\psi(x)[\overrightarrow{\mathsf{Area}}(\mathsf{d}\,x)] + \mu\cdot\int_{\mathbf{L}}\omega(x)[\overrightarrow{\mathsf{Area}}(\mathsf{d}\,x)]$$

2. Формулу (17.3.69) удобно доказать для частного случая, когда разбиение состоит из двух поверхностей, а затем она переносится на общий случай по индукции. Пусть

$$\mathbf{L} \equiv \mathbf{M}\sqcup\mathbf{N}.$$

Если $\mathcal{M}$ – разбиение поверхности $\mathbf{M}$, а $\mathcal{N}$ – разбиение поверхности $\mathbf{N}$, то объединение $\mathcal{M}\cup\mathcal{N}$ будет разбиением поверхности $\mathbf{L}$. Поэтому

$$\int_{\mathbf{L}} \omega(x)[\overrightarrow{\mathsf{Area}}(\mathsf{d}\,x)] \underset{0\leftarrow\mathsf{diam}(\mathcal{M}\cup\mathcal{N})}{\longleftarrow} \sum_{\mathbf{M}'\in\mathcal{M}} \omega(x_{\mathbf{M}'})[\overrightarrow{\mathsf{Area}}(\mathbf{M}')] + \sum_{\mathbf{N}'\in\mathcal{N}} \omega(x_{\mathbf{N}'})[\overrightarrow{\mathsf{Area}}(\mathbf{N}')] \underset{\mathsf{diam}(\mathcal{M}\cup\mathcal{N})\to 0}{\longrightarrow}$$
$$\underset{\mathsf{diam}(\mathcal{M}\cup\mathcal{N})\to 0}{\longrightarrow} \int_{\mathbf{M}} \omega(x)[\overrightarrow{\mathsf{Area}}(\mathsf{d}\,x)] + \int_{\mathbf{N}} \omega(x)[\overrightarrow{\mathsf{Area}}(\mathsf{d}\,x)].$$

3. Для разбиений $\mathcal{M}$ поверхности $\mathbf{L}$ получаем:

$$\left|\int_{\mathbf{L}} \omega(x)\Big[\overrightarrow{\mathsf{Area}}(\mathsf{d}\,x)\Big]\right| \underset{0\leftarrow\mathsf{diam}\,\mathcal{M}}{\longleftarrow} \left|\sum_{\mathbf{M}\in\mathcal{M}_n} \omega(x_{\mathbf{M}})\Big[\overrightarrow{\mathsf{Area}}(\mathbf{M})\Big]\right| \leqslant \sum_{\mathbf{M}\in\mathcal{M}_n} \left|\omega(x_{\mathbf{M}})\Big[\overrightarrow{\mathsf{Area}}(\mathbf{M})\Big]\right| \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{\mathbf{M}\in\mathcal{M}_n} \left|\omega(x_{\mathbf{M}})\right|\cdot\left|\overrightarrow{\mathsf{Area}}(\mathbf{M})\right| \leqslant \sum_{\mathbf{M}\in\mathcal{M}_n} \max_{x\in\mathbf{L}}|\omega(x)|\cdot\left|\overrightarrow{\mathsf{Area}}(\mathbf{M})\right| =$$
$$= \max_{x\in\mathbf{L}}|\omega(x)|\cdot\sum_{\mathbf{M}\in\mathcal{M}}\left|\overrightarrow{\mathsf{Area}}(\mathbf{M})\right| \underset{\mathsf{diam}\,\mathcal{M}\to 0}{\overset{(17.3.57)}{\longrightarrow}} \max_{x\in\mathbf{L}}\left|\omega(x)\right|\cdot\mathsf{Area}(\mathbf{L})$$

$\square$

Анизотропный интеграл, как функционал на поверхностях. Ниже нам понадобится следующее определение.

- Условимся говорить, что *последовательность ориентированных поверхностей* $\mathbf{L}_i$ *в* X *сходится к точке* $x\in X$, если соответствующие скалярные поверхности стремятся к x:

$$|\mathbf{L}_i| \underset{i\to\infty}{\longrightarrow} x. \tag{17.3.71}$$

  Это изображается соотношением

$$\mathbf{L}_i \underset{i\to\infty}{\longrightarrow} x.$$

Пусть U – открытое множество в X и ω – дифференциальная форма степени 2 на U. Для произвольной ориентированной поверхности $\mathbf{L}\subset U$ обозначив

$$\Omega(\mathbf{L}) = \iint_{\mathbf{L}} \omega(x)\Big[\overrightarrow{\mathsf{Area}}(\mathsf{d}\,x)\Big] \tag{17.3.72}$$

мы получим отображение $\mathbf{L}\mapsto\Omega(\mathbf{L})$, которое каждой ориентированной поверхности $\mathbf{L}\subset U$ ставит в соответствие число $\Omega(\mathbf{L})$. Отметим следующие свойства этого отображения.

(UIS-1) **Аддитивность по ориентированным поверхностям:** *если поверхности* $\mathbf{M}$ *и* $\mathbf{N}$ *образуют разбиение ориентированной поверхности* $\mathbf{L}$

$$\mathbf{L} \equiv \mathbf{M} \sqcup \mathbf{N},$$

то

$$\Omega(\mathbf{L}) = \Omega(\mathbf{M}) + \Omega(\mathbf{N})$$

(UIS-2) **Анизотропность:** *для всякой точки* $x \in U$ *существует внешняя форма* $\eta : X \times X \to \mathbb{R}$ *такая, что справедливо соотношение*

$$\Omega(\mathbf{L}) = \eta\big(\overrightarrow{\mathsf{Area}}(\mathbf{L})\big) + \underset{\mathbf{L}\to x}{\mathbf{o}}\big(\mathsf{Area}(\mathbf{L})\big) \tag{17.3.73}$$

которое надо понимать так: для любой последовательности $\mathbf{L}_i$ *ориентированных поверхностей, сходящихся к* x

$$\mathbf{L}_i \underset{i\to\infty}{\longrightarrow} x$$

справедливо соотношение

$$\Omega(\mathbf{L}_i) = \eta\big(\overrightarrow{\mathsf{Area}}(\mathbf{L}_i)\big) + \underset{i\to\infty}{\mathbf{o}}\big(\mathsf{Area}(\mathbf{L}_i)\big). \tag{17.3.74}$$

Доказательство. Утверждение **(UIS-1)** – просто переформулировка свойства аддитивности анизотропного интеграла (формула (17.3.69)), поэтому неочевидным здесь будет только утверждение **(UIS-2)**. Для точки $x \in X$ положим

$$\eta = \omega(x)$$

Тогда для любой последовательности поверхностей $\mathbf{L}_i$, сходящейся к x, мы получим

$$\frac{1}{\mathsf{Area}(\mathbf{L}_i)} \cdot \Bigg|\Omega(\mathbf{L}_i) - \underbrace{\eta[\overrightarrow{\mathsf{Area}}(\mathbf{L}_i)]}_{\substack{\| \ (17.3.66) \\ \iint_{\mathbf{L}_i} \eta[\overrightarrow{\mathsf{Area}}(\mathsf{d}\,y)]}}\Bigg| = \frac{1}{\mathsf{Area}(\mathbf{L}_i)} \cdot \left|\iint_{\mathbf{L}_i} \omega(y)[\overrightarrow{\mathsf{Area}}(\mathsf{d}\,y)] - \iint_{\mathbf{L}_i} \eta[\overrightarrow{\mathsf{Area}}(\mathsf{d}\,y)]\right| =$$

$$= \frac{1}{\mathsf{Area}(\mathbf{L}_i)} \cdot \left|\iint_{\mathbf{L}_i} \Big(\omega(y) - \eta\Big)[\overrightarrow{\mathsf{Area}}(\mathsf{d}\,y)]\right| \leqslant (17.3.70) \leqslant \frac{1}{\mathsf{Area}(\mathbf{L}_i)} \cdot \max_{y\in\mathbf{L}_i}\Big|\omega(y) - \eta\Big| \cdot \mathsf{Area}(\mathbf{L}_i) =$$

$$= \max_{y\in\mathbf{L}_i}\Big|\omega(y) - \eta\Big| = \max_{y\in\mathbf{L}_i}\Big|\omega(y) - \omega(x)\Big| \underset{i\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

(последнее соотношение следует из того, что $\omega : U \to \Lambda_2(X)$ – нерырывное отображение). Это доказывает (17.3.74). □

- Условия **(UIS-1)** и **(UIS-2)** называются *аксиомами анизотропного интеграла по поверхностям.* Как оказывается, они полностью определяют анизотропные интегралы, как функционалы от поверхностей:

Теорема 17.3.11. *Пусть* U *– открытое множество в* X *и пусть каждой ориентированной поверхности* $\mathbf{L} \subset U$ *поставлено в соответствие число* $\Omega(\mathbf{L})$ *так, что функционал* $\mathbf{L} \mapsto \Omega(\mathbf{L})$ *удовлетворяет условиям* **(UIS-1)** *и* **(UIS-2)**. *Тогда существует и единственна непрерывная дифференциальная форма* $\omega : U \to \Lambda_2(X)$ *такая, что*

$$\Omega(\mathbf{L}) = \iint_{\mathbf{L}} \omega(x)[\overrightarrow{\mathsf{Area}}(\mathsf{d}\,x)]. \tag{17.3.75}$$

для любой ориентированной кривой $\mathbf{L} \subseteq U$.

- Дифференциальная форма $\omega : U \to \Lambda_2(X)$ называется *анизотропной плотностью* функционала Ω по поверхностям.

Доказательство. По аксиоме **(UIS-2)**, всякой точке $x \in U$ соответствует внешняя форма $\eta \in \Lambda_2(X)$, удовлетворяющая соотношению (17.3.73). Положим $\omega(x) = \eta$ и убедимся, что это отображение обладает нужными свойствами.

1. Заметим, что из соотношения (17.3.73) сразу следует, что дифференциальная форма $\omega : U \to \Lambda_2(X)$ единственна. Действительно, для любой пары векторов $p, q \in X$ и любого числа $t \neq 0$ мы

можем рассмотреть ориентированный параллелограмм $\mathbf{P}_x(tp, tq)$ в X, для которого в силу (17.3.54) и (17.2.24),

$$\overrightarrow{\mathsf{Area}}\,\mathbf{P}_x(tp, tq) = tp \vee tq = t^2 \cdot p \vee q, \qquad \mathsf{Area}\,\mathbf{P}_x(tp, tq) = t^2 \cdot |p \vee q|.$$

Для такой поверхности мы получим:

$$\Omega\Big(\mathbf{P}_x(tp, tq)\Big) = \eta(tp, tq) + \underset{t\to 0}{\mathbf{o}}(t^2 \cdot |p \vee q|) \quad \Longrightarrow \quad \eta(p, q) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t^2} \cdot \Omega\Big(\mathbf{P}_x(tp, tq)\Big),$$

и видно, что $\omega(x) = \eta$ определяется однозначно по Ω.

2. Покажем далее, что отображение $\omega : U \to \Lambda_1(X)$ непрерывно. Возьмем какую-нибудь последовательность точек

$$x_i \underset{i\to\infty}{\longrightarrow} x$$

Зафиксируем $p, q \in X$, $p \neq 0$. Соотношение (17.3.74) справедливо в каждой точке множества U, в частности в каждой точке x_i, и если в качестве кривых взять ориентированные параллелограммы $\mathbf{L} = \mathbf{P}_{x_i}(tp, tq)$, $t > 0$:

$$\Omega\Big(\mathbf{P}_{x_i}(tp, tq)\Big) = \omega(x_i)[tp, tq] + \underset{t\to 0}{\mathbf{o}}(t^2) = t^2 \cdot \omega(x_i)[p, q] + t^2 \cdot \underset{t\to 0}{\mathbf{o}}(1).$$

Отсюда следует, что для всякого i можно выбрать $t_i > 0$ так, чтобы

$$t_i < \frac{1}{i}, \qquad \left| \frac{\Omega\Big(\mathbf{P}_{x_i}(t_i p, t_i q)\Big)}{t_i^2} - \omega(x_i)[p, q] \right| \leqslant \frac{1}{i} \tag{17.3.76}$$

Тогда мы получаем, что поверхности $\mathbf{L}_i = \mathbf{P}_{x_i}(t_i p, t_i q)$ стремятся к x, потому что

$$\rho(\mathbf{L}_i, x) \leqslant \rho(\mathbf{L}_i, x_i) + \rho(x_i, x) = t_i + \rho(x_i, x) < \frac{|p| + |q|}{i} + \rho(x_i, x) \underset{i\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

и значит в этой точке для них выполняется соотношение (17.3.74):

$$\Omega\Big(\mathbf{P}_{x_i}(t_i p, t_i q)\Big) = \omega(x)[t_i p, t_i q] + \underset{i\to\infty}{\mathbf{o}}(t_i^2) = t_i^2 \cdot \omega(x)[p, q] + t_i^2 \cdot \underset{t\to\infty}{\mathbf{o}}(1)$$

откуда

$$\frac{\Omega\Big(\mathbf{P}_{x_i}(t_i p, t_i q)\Big)}{t_i^2} \underset{i\to\infty}{\longrightarrow} \omega(x)[p, q]. \tag{17.3.77}$$

Теперь мы получаем:

$$|\omega(x_i)[p, q] - \omega(x)[p, q]| \leqslant \underbrace{\left| \omega(x_i)[p, q] - \frac{\Omega\Big(\mathbf{P}_{x_i}(t_i p, t_i q)\Big)}{t_i^2} \right|}_{\substack{\downarrow\ (17.3.76) \\ 0}} + \underbrace{\left| \frac{\Omega\Big(\mathbf{P}_{x_i}(t_i p, t_i q)\Big)}{t_i^2} - \omega(x)[p, q] \right|}_{\substack{\downarrow\ (17.3.77) \\ 0}} \underset{i\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

Это верно для любых $p, q \neq 0$. Отсюда следует, что

$$|\omega(x_i) - \omega(x)| \underset{i\to\infty}{\longrightarrow} 0. \tag{17.3.78}$$

3. Покажем, что для всякого компакта $K \subseteq U$ выполняется соотношение

$$\sup_{\substack{x,\,\mathbf{M}\,: \\ x \in \mathbf{M} \subseteq K, \\ \mathsf{diam}(M) \leqslant \varepsilon}} \left| \frac{\Omega(\mathbf{M}) - \omega(x)[\overrightarrow{\mathsf{Area}}(\mathbf{M})]}{\mathsf{Area}(\mathbf{M})} \right| \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} 0 \tag{17.3.79}$$

Это удобно делать от противного: предположим, что (17.3.79) не выполняется, то есть существует компакт $K \subseteq U$ и последовательность поверхностей $\mathbf{M}_i \subseteq K$ такая, что

$$\mathsf{diam}(\mathbf{M}_i) \underset{i\to\infty}{\longrightarrow} 0, \qquad \sup_{x \in \mathbf{M}_i} \left| \frac{\Omega(\mathbf{M}_i) - \omega(x)[\overrightarrow{\mathsf{Area}}(\mathbf{M}_i)]}{\mathsf{Area}(\mathbf{M}_i)} \right| \underset{i\to\infty}{\not\longrightarrow} 0$$

Переходя к подпоследовательности, можно считать, что последовательность во втором соотношении отделена от нуля неким числом $\delta > 0$:

$$\mathsf{diam}(\mathbf{M}_i) \underset{i\to\infty}{\longrightarrow} 0, \qquad \sup_{x\in\mathbf{M}_i} \left| \frac{\Omega(\mathbf{M}_i) - \omega(x)[\overrightarrow{\mathsf{Area}}(\mathbf{M}_i)]}{\mathsf{Area}(\mathbf{M}_i)} \right| > \delta > 0$$

Теперь можно выбрать последовательность $x_i \in \mathbf{M}_i$ такую, что

$$\left| \frac{\Omega(\mathbf{M}_i) - \omega(x_i)[\overrightarrow{\mathsf{Area}}(\mathbf{M}_i)]}{\mathsf{Area}(\mathbf{M}_i)} \right| > \delta > 0 \tag{17.3.80}$$

Последовательность x_i лежит в компакте K, поэтому она содержит сходящуюся подпоследовательность. Перейдя к ней, и переобозначив индексы, мы можем считать что сама последовательность x_i стремится к какому-то пределу $x \in K$:

$$x_i \underset{i\to\infty}{\longrightarrow} x$$

При этом, $x_i \in \mathbf{M}_i$, а диаметры $\mathbf{M}_i$ стремятся к нулю, значит,

$$\mathbf{M}_i \underset{i\to\infty}{\longrightarrow} x$$

откуда в силу (17.3.74),

$$\left| \frac{\Omega(\mathbf{M}_i) - \omega(x)[\overrightarrow{\mathsf{Area}}(\mathbf{M}_i)]}{\mathsf{Area}(\mathbf{M}_i)} \right| \underset{i\to\infty}{\longrightarrow} 0 \tag{17.3.81}$$

и значит,

$$\left| \frac{\Omega(\mathbf{M}_i) - \omega(x_i)[\overrightarrow{\mathsf{Area}}(\mathbf{M}_i)]}{\mathsf{Area}(\mathbf{M}_i)} \right| \leqslant \underbrace{\left| \frac{\Omega(\mathbf{M}_i) - \omega(x)[\overrightarrow{\mathsf{Area}}(\mathbf{M}_i)]}{\mathsf{Area}(\mathbf{M}_i)} \right|}_{\substack{\downarrow\ (17.3.81)\\ 0}} + \underbrace{\left| \frac{\omega(x)[\overrightarrow{\mathsf{Area}}(\mathbf{M}_i)] - \omega(x_i)[\overrightarrow{\mathsf{Area}}(\mathbf{M}_i)]}{\mathsf{Area}(\mathbf{M}_i)} \right|}_{\substack{\| \\ \left| \Big(\omega(x)-\omega(x_i)\Big) \left[\frac{\overrightarrow{\mathsf{Area}}(\mathbf{M}_i)}{\mathsf{Area}(\mathbf{M}_i)}\right] \right| \\ \wedge\!\!\mathbin{\backslash} \\ \left|\omega(x)-\omega(x_i)\right| \cdot \left|\frac{\overrightarrow{\mathsf{Area}}(\mathbf{M}_i)}{\mathsf{Area}(\mathbf{M}_i)}\right| \\ \wedge\!\!\mathbin{\backslash}\ (17.3.52) \\ \left|\omega(x)-\omega(x_i)\right| \\ \downarrow\ (17.3.78) \\ 0}} \underset{i\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

Мы получаем противоречие с (17.3.80).

4. Покажем, что интегральные суммы формы ω на поверхности $\mathbf{L}$ стремятся к числу $\Omega(\mathbf{L})$. Возьмем число $\varepsilon > 0$ и рассмотрим произвольное разбиение поверхности $\mathbf{L}$

$$\mathbf{L} = \bigsqcup_{\mathbf{M}\in\mathcal{M}} \mathbf{M}.$$

с диаметром $\mathsf{diam}(\mathcal{M}) \leqslant \varepsilon$. Для любых $x_{\mathbf{M}} \in \mathbf{M}$ мы получим:

$$\begin{aligned} &\left| \Omega(\mathbf{L}) - \sum_{\mathbf{M}\in\mathcal{M}} \omega(x_{\mathbf{M}})[\overrightarrow{\mathsf{Area}}(\mathbf{M})] \right| = \left| \sum_{\mathbf{M}\in\mathcal{M}} \Omega(\mathbf{M}) - \sum_{\mathbf{M}\in\mathcal{M}} \omega(x_{\mathbf{M}})[\overrightarrow{\mathsf{Area}}(\mathbf{M})] \right| = \\ &= \left| \sum_{\mathbf{M}\in\mathcal{M}} \Big(\Omega(\mathbf{M}) - \omega(x_{\mathbf{M}})[\overrightarrow{\mathsf{Area}}(\mathbf{M})] \Big) \right| \leqslant \sum_{\mathbf{M}\in\mathcal{M}} \left| \Omega(\mathbf{M}) - \omega(x_{\mathbf{M}})[\overrightarrow{\mathsf{Area}}(\mathbf{M})] \right| = \\ &= \sum_{\mathbf{M}\in\mathcal{M}} \left| \frac{\Omega(\mathbf{M}) - \omega(x_{\mathbf{M}})[\overrightarrow{\mathsf{Area}}(\mathbf{M})]}{\mathsf{Area}(\mathbf{M})} \right| \cdot \mathsf{Area}(\mathbf{M}) \leqslant \sup_{\substack{x,\mathbf{M}:\\ x\in\mathbf{M}\subseteq\mathbf{L},\\ \mathsf{diam}(M)\leqslant\varepsilon}} \left| \frac{\Omega(\mathbf{M}) - \omega(x)[\overrightarrow{\mathsf{Area}}(\mathbf{M})]}{\mathsf{Area}(\mathbf{M})} \right| \cdot \sum_{\mathbf{M}\in\mathcal{M}} \mathsf{Area}(\mathbf{M}) = \\ &= \underbrace{\sup_{\substack{x,\mathbf{M}:\\ x\in\mathbf{M}\subseteq\mathbf{L},\\ \mathsf{diam}(M)\leqslant\varepsilon}} \left| \frac{\Omega(\mathbf{M}) - \omega(x)[\overrightarrow{\mathsf{Area}}(\mathbf{M})]}{\mathsf{Area}(\mathbf{M})} \right|}_{\substack{\downarrow\ (17.3.79)\\ 0}} \cdot \mathsf{Area}(\mathbf{L}) \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} 0 \end{aligned}$$

$\square$

Глава 18

ТЕОРЕМА СТОКСА

§ 1 Дифференциальные формы

В предыдущих двух главах мы видели (теоремы 16.3.11 и 17.3.11), что дифференциальные формы степени 1 и 2 появляются в математике как плотности анизотропных интегралов по кривым и поверхностям. В этом параграфе мы обсудим обобщение этих конструкций, понятие дифференциальной формы произвольной степени. Оно определяется по аналогии[1]:

- Пусть U – открытое множество в евклидовом пространстве X. *Дифференциальной формой степени* k на U называется произвольное непрерывное отображение $\omega : U \to \Lambda_k(X)$ (со значениями в пространстве внешних форм степени k). Число k при этом обозначается
$$k = \deg \omega.$$
- Дифференциальная форма $\omega : U \to \Lambda_k(X)$ называется *гладкой*, если она является (бесконечно) гладким отображениям. Множество всех гладких дифференциальных форм степени k на U мы будем обозначать символом $\Omega_k(U)$.

◇ **18.1.1.** При $k = 0$ справедлив естественный изоморфизм
$$\Lambda_0(X) \cong \mathbb{R},$$
поэтому дифференциальная форма степени 0 представляет собой просто функцию на U
$$\omega : U \to \Lambda_0(X) \cong \mathbb{R}.$$

◇ **18.1.2.** Пусть $\eta_1, ..., \eta_k$ линейные функционалы на X. Их конкатенацию, которую мы определили выше формулой (12.5.229),
$$(\eta_1 \wedge \dots \wedge \eta_k)[p_1, \dots, p_k] := = \det \begin{pmatrix} \eta_1(p_1) & \dots & \eta_1(p_k) \\ \dots & \dots & \dots \\ \eta_k(p_1) & \dots & \eta_k(p_k) \end{pmatrix}$$
можно считать дифференциальной формой степени k, определенной на множестве $U = X$
$$\omega(x)[p_1, \dots, p_k] = (\eta_1 \wedge \dots \wedge \eta_k)[p_1, \dots, p_k], \quad x \in X, \ p_i \in X.$$

◇ **18.1.3.** Дифференциальная форма $\omega : U \to \Lambda_k(X)$ называется *постоянной*, если во всех точках она принимает одно и то же значение:
$$\forall x, y \in U \quad \omega(x) = \omega(y).$$

(a) Алгебраические свойства дифференциальных форм

Конкатенация дифференциальных форм. Напомним, что выше вормулой (12.5.240) мы определили ограничение строки $x = (x_1, ..., x_n)$ элементов векторного пространства X на подмножество $K \subseteq \{1, ..., n\}$,
$$x_K = (x_{\sigma(1)}, ..., x_{\sigma(k)}),$$

[1] Дифференциальные формы степени 1 и 2 были определены на страницах 1012 и 1053.

(здесь k – число элементов в K, а $\sigma : \{1, ..., k\} \to K$ возрастающая биекция, то есть нумерация элементов K по возрастанию). Кроме того формулой (12.5.255) мы определили конкатенацию внешних форм:

$$(\psi \wedge \omega)(x_1, ..., x_{k+l}) = \sum_{(K,L)\in C^{k,l}_{\{1,...,k+l\}}} \operatorname{sgn}(\tau_{K\lhd L}) \cdot \psi(x_K) \cdot \omega(x_L), \qquad x_i \in X$$

(здесь множества K, L образуют разбиение типа (k, l) множества $\{1, ..., k + l\}$, и суммирование ведется по всем таким разбиениям).

- Если $\psi : U \to \Lambda_k(X)$ и $\omega : U \to \Lambda_l(X)$ – две дифференциальные формы, то в каждой точке $x \in U$ их значения являются внешними формами $\psi(x) \in \Lambda_k(X)$, $\omega(x) \in \Lambda_l(X)$, поэтому определена их конкатенация $\psi(x) \wedge \omega(x) \in \Lambda_{k+l}(X)$. Когда x бегает по U мы получаем отображение
$$x \in U \mapsto \psi(x) \wedge \omega(x) \in \Lambda_{k+l}(X)$$
которое, конечно, будет дифференциальной формой на U. Эта дифференциальная форма называется *конкатенацией дифференциальных форм* $\psi : U \to \Lambda_k(X)$ и $\omega : U \to \Lambda_l(X)$ и обозначается символом $\psi \wedge \omega \in \Lambda_{k+l}(X)$. Понятно, что
$$(\psi \wedge \omega)(x) := \psi(x) \wedge \omega(x), \qquad x \in U. \tag{18.1.1}$$

Из теоремы 12.5.6 следуют

Свойства конкатенации дифференциальных форм:

1° **Конкатенация с формой степени 0** *совпадает с умножением на функцию:*
$$f \wedge \omega = f \cdot \omega, \qquad f \in \mathcal{C}^\infty(U), \quad \omega \in \Omega_l(U). \tag{18.1.2}$$

2° **Билинейность:**
$$f \cdot (\psi \wedge \omega) = (f \cdot \psi) \wedge \omega = \psi \wedge (f \cdot \omega), \qquad f \in \mathcal{C}^\infty(U),\ \psi \in \Omega_k(X),\ \omega \in \Omega_l(X). \tag{18.1.3}$$

3° **Антикоммутативность***:*
$$\psi \wedge \omega = (-1)^{\deg\psi\cdot\deg\omega} \omega \wedge \psi, \qquad \psi \in \Omega_k(U),\ \omega \in \Omega_l(U). \tag{18.1.4}$$
В частности, для дифференциальных форм степени 1
$$\eta \wedge \theta = -\theta \wedge \eta, \qquad \eta, \theta \in \Omega_1(U). \tag{18.1.5}$$

4° **Ассоциативность***:*
$$(\varphi \wedge \psi) \wedge \omega = \varphi \wedge (\psi \wedge \omega), \qquad \varphi \in \Omega_k(U),\ \psi \in \Omega_l(U),\ \wedge \in \Omega_m(U). \tag{18.1.6}$$

5° **Конкатенация форм степени 1***: Если $\eta_1, \dots, \eta_k$ – произвольная последовательность форм степени 1 на U, то*
$$(\eta_1 \wedge \dots \wedge \eta_k)(x_1, \dots, x_k) = \det \begin{pmatrix} \eta_1(x_1) & \dots & \eta_1(x_k) \\ \dots & \dots & \dots \\ \eta_k(x_1) & \dots & \eta_k(x_k) \end{pmatrix}, \qquad \eta_i \in \Omega_1(U) \tag{18.1.7}$$

Разложение дифференциальной формы по базису. Из теоремы 12.5.3 следует

Теорема 18.1.1. *Пусть $a = (a_1, ..., a_n)$ – базис в евклидовом пространстве X и $U \subseteq X$ – открытое множество и $k \in \mathbb{N}$ - число. Тогда любая система непрерывных функций $\{\zeta_K;\ K \subseteq \{1, ..., n\},\ \operatorname{card} K = k\}$ на U определяет дифференциальную форму ω степени k на U по формуле*

$$\omega(x) = \sum_{\substack{K \subseteq \{1,...,n\}:\\ \operatorname{card} K = k}} \zeta_K(x) \cdot \left[\frac{1}{a}\right]^K, \qquad x \in U \tag{18.1.8}$$

где $\left[\frac{1}{a}\right]^1, ..., \left[\frac{1}{a}\right]^n$ – сопряженный базис к базису $a = (a_1, ..., a_n)$ (суммирование ведется по всевозможным подмножествам $K \subseteq \{1, ..., n\}$ мощности k). И наоборот, если ω – дифференциальная форма степени k на U, то формулы

$$\zeta_K(x) = \omega(x)[a_K], \qquad x \in U, \tag{18.1.9}$$

определяют непрерывные функции на U, удовлетворяющие тожествам (18.1.8) *и* (18.1.10).

При этом

(i) *дифференциальная форма* ω *тогда и только тогда будет гладкой, когда функции* $\zeta_{i_1,...,i_k}$ *являются гладкими.*

(ii) *дифференциальная форма* ω *тогда и только тогда будет постоянной, когда функции* $\zeta_{i_1,...,i_k}$ *постоянны.*

! **18.1.4.** Формулы (18.1.8) и (18.1.11) в традиционном виде записываются так:

$$\omega(x)[p_1,...,p_k] = \sum_{i_1<...<i_k} \zeta_{i_1,...,i_k}(x)\cdot\det\begin{pmatrix} p_1^{i_1} & ... & p_k^{i_1} \\ ... & ... & ... \\ p_1^{i_k} & ... & p_k^{i_k}\end{pmatrix}, \qquad x\in U,\ p_s\in X, \tag{18.1.10}$$

$$\zeta_{i_1,...,i_k}(x) = \omega(x)[a_{i_1},...,a_{i_k}], \qquad x\in U, \tag{18.1.11}$$

где p_s^j – коэффициент разложения вектора p_s по базису $a=(a_1,...,a_n)$.

Внешний дифференциал. Пусть U – открытое множество в евклидовом пространстве X, и $\omega : U \to \Lambda_k(X)$ – гладкая дифференциальная форма степени k. Поскольку это гладкое отображение, у него есть дифференциал, или производная по направлению, определенная формулой (14.2.123). В теории дифференциальных форм термин "дифференциал" имеет другой смысл, чем просто в теории гладких отображений, поэтому для объекта, о котором речь идет в формуле (14.2.123), мы будем использовать название *производная по направлению* и обозначать его соответствующе:

$$\partial_p\omega(x) = \lim_{t\to 0}\frac{\omega(x+tp)-\omega(x)}{t}, \qquad x\in U,\ p\in X.$$

Понятно, что для любых $x\in U$ и $p\in X$ объект $\partial_p\omega(x)$ представляет собой внешнюю форму степени k на X:

$$\partial_p\omega(x)\in\Lambda_k(X).$$

- *Внешним дифференциалом* (или просто *дифференциалом*) гладкой дифференциальной формы $\omega : U\to\Lambda_k(X)$ (степени k) называется дифференциальная форма $\mathsf{d}\,\omega : U\to\Lambda_{k+1}(X)$ (степени $k+1$), определяемая тождеством

$$\mathsf{d}\,\omega(x)(p_1,...,p_{k+1}) = \sum_{i=1}^{k+1}(-1)^{i-1}\cdot\partial_{p_i}\omega(x)(p_1,...,\widehat{p_i},...,p_{k+1}) =$$
$$= \sum_{i=1}^{k+1}(-1)^{i-1}\cdot\partial_{p_i}\omega(x)(p_{K\setminus\{i\}}), \qquad x\in U,\ p_i\in X, \tag{18.1.12}$$

– здесь символ $\widehat{p_i}$ означает, что в этом месте аргумент p_i опускается, а p_K было определено формулой (12.5.240).

Свойства дифференциала:

1^0. **Дифференциал от формы степени 0** *равен обычному дифференциалу функции:*

$$\mathsf{d}\,f(x)(p) = \partial_p f(x) = \lim_{t\to 0}\frac{f(x+tp)-f(x)}{t}. \tag{18.1.13}$$

2^0. **Дифференциал от постоянной формы** *равен нулю:*

$$\Big(\forall x,y \quad \omega(x)=\omega(y)\Big) \qquad\Longrightarrow\qquad \mathsf{d}\,\omega = 0. \tag{18.1.14}$$

3^0. **Линейность:**

$$\mathsf{d}(\alpha\cdot\omega+\beta\cdot\upsilon) = \alpha\cdot\mathsf{d}\,\omega+\beta\cdot\mathsf{d}\,\upsilon, \qquad \alpha,\beta\in\mathbb{R},\ \omega,\upsilon\in\varLambda_k(U) \tag{18.1.15}$$

4^0. **Действие дифференциала на базисное разложение:**

$$\mathsf{d}\left(\sum_{\operatorname{card}(K)=k}\omega_K\cdot\left[\frac{1}{a}\right]^K\right) = \sum_{\operatorname{card}(K)=k}\mathsf{d}\,\omega_K\wedge\left[\frac{1}{a}\right]^K \tag{18.1.16}$$

5^0. **Градуированное правило Лейбница:**

$$\mathsf{d}(\omega \wedge \upsilon) = (\mathsf{d}\,\omega) \wedge \upsilon + (-1)^{\deg \omega} \wedge (\mathsf{d}\,\upsilon), \qquad \omega \in \varLambda_k(U),\ \upsilon \in \varLambda_l(U) \tag{18.1.17}$$

6^0. **Гомологичность:**

$$\mathsf{d}(\mathsf{d}\,\omega) = 0, \qquad \omega \in \varLambda_k(U) \tag{18.1.18}$$

Доказательство. 1. Формула (18.1.13) следует напрямую из (18.1.12): в этом случае $k = 0$, и поэтому

$$\mathsf{d}\, f(x)(p_1) = \sum_{i=1}^{1} (-1)^{i-1} \cdot \partial_{p_1} f(x) = \partial_{p_1} f(x).$$

2. Если форма $\omega : U \to \Lambda_k(X)$ – постоянное отображение, то производная этого отображения $\partial_p \omega$ по любому направлению p будет нулевой, и поэтому в (18.1.12) после первого равенства будет нуль.

3. Линейность этой операции очевидна.

4. Для доказательства (18.1.16) рассмотрим далее случай, когда ω представляет произведение функции на постоянную форму:

$$\omega = f \cdot \varphi,$$

где $\varphi \in \Lambda_k(X)$. Покажем, что тогда

$$\mathsf{d}(f \cdot \varphi)(x)(p_1, ..., p_{k+1}) = \big(\mathsf{d}\, f(x) \wedge \varphi\big)(p_1, ..., p_{k+1}) \tag{18.1.19}$$

Действительно,

$$\mathsf{d}\,\omega(x)(p_1, ..., p_{k+1}) = \sum_{i=1}^{k+1} (-1)^{i-1} \cdot \partial_{p_i}(f \cdot \varphi)(x)(p_{L \setminus \{i\}}) = \sum_{i=1}^{k+1} (-1)^{i-1} \cdot \big(\partial_{p_i} f(x) \cdot \varphi\big)(p_{L \setminus \{i\}}) =$$
$$= \sum_{i=1}^{k+1} (-1)^{i-1} \cdot df(x)(p_i) \cdot \varphi(p_{L \setminus \{i\}}) = (12.5.255) = \big(\mathsf{d}\, f(x) \wedge \varphi\big)(p_1, ..., p_{k+1}).$$

Теперь получаем:

$$\mathsf{d}\left(\sum_{\operatorname{card}(K)=k} \omega_K \cdot \left[\frac{1}{a}\right]^K \right) = (18.1.15) = \sum_{\operatorname{card}(K)=k} \mathsf{d}\left(\omega_K \cdot \left[\frac{1}{a}\right]^K \right) = (18.1.19) = \sum_{\operatorname{card}(K)=k} \mathsf{d}\,\omega_K \wedge \left[\frac{1}{a}\right]^K.$$

5. Заметим сразу, что для случая форм нулевой степени правило Лейбница совпадает с тождеством (14.1.24), поскольку, как мы уже поняли в пункте 1, в этом случае дифференциал формы есть просто дифференциал функции:

$$\mathsf{d}(f \cdot g) = \mathsf{d}\, f \cdot g + f \cdot \mathsf{d}\, g. \tag{18.1.20}$$

Отсюда следует цепочка:

$$\mathsf{d}(\psi \wedge \omega) = \mathsf{d}\left(\sum_{\operatorname{card}(K)=k} \psi_K \cdot \left[\frac{1}{a}\right]^K \wedge \sum_{\operatorname{card}(L)=l} \omega_L \cdot \left[\frac{1}{a}\right]^L \right) =$$
$$= \mathsf{d} \sum_{\substack{\operatorname{card}(K)=k,\\ \operatorname{card}(L)=l}} \left(\psi_K \cdot \left[\frac{1}{a}\right]^K \wedge \omega_L \cdot \left[\frac{1}{a}\right]^L \right) = (18.1.15) = \sum_{\substack{\operatorname{card}(K)=k,\\ \operatorname{card}(L)=l}} \mathsf{d}\left(\psi_K \cdot \left[\frac{1}{a}\right]^K \wedge \omega_L \cdot \left[\frac{1}{a}\right]^L \right) =$$
$$= \sum_{\substack{\operatorname{card}(K)=k,\\ \operatorname{card}(L)=l}} \mathsf{d}\left(\psi_K \cdot \omega_L \cdot \left[\frac{1}{a}\right]^K \wedge \left[\frac{1}{a}\right]^L \right) = (18.1.19) = \sum_{\substack{\operatorname{card}(K)=k,\\ \operatorname{card}(L)=l}} \mathsf{d}(\psi_K \cdot \omega_L) \wedge \left[\frac{1}{a}\right]^K \wedge \left[\frac{1}{a}\right]^L =$$
$$= (18.1.20) = \sum_{\substack{\operatorname{card}(K)=k,\\ \operatorname{card}(L)=l}} (\mathsf{d}\,\psi_K \cdot \omega_L + \psi_K \cdot \mathsf{d}\,\omega_L) \wedge \left[\frac{1}{a}\right]^K \wedge \left[\frac{1}{a}\right]^L =$$

$$= \sum_{\substack{\mathrm{card}(K)=k,\\ \mathrm{card}(L)=l}} \underbrace{\mathsf{d}\,\psi_K\cdot\omega_L\wedge\left[\frac{1}{a}\right]^K\wedge\left[\frac{1}{a}\right]^L}_{\substack{\|\ (18.1.3)\\ \mathsf{d}\,\psi_K\wedge\omega_L\cdot\left[\frac{1}{a}\right]^K\wedge\left[\frac{1}{a}\right]^L\\ \|\ (18.1.3)\\ \mathsf{d}\,\psi_K\wedge\left[\frac{1}{a}\right]^K\wedge\omega_L\cdot\left[\frac{1}{a}\right]^L}} + \sum_{\substack{\mathrm{card}(K)=k,\\ \mathrm{card}(L)=l}} \psi_K\cdot\underbrace{\mathsf{d}\,\omega_L\wedge\left[\frac{1}{a}\right]^K}_{\substack{\|\ (12.5.252)\\ (-1)^{\deg\omega_L\cdot\deg\left[\frac{1}{a}\right]^K}\cdot\left[\frac{1}{a}\right]^K\wedge\mathsf{d}\,\omega_L\\ \|\\ (-1)^k\cdot\left[\frac{1}{a}\right]^K\wedge\mathsf{d}\,\omega_L}}\wedge\left[\frac{1}{a}\right]^L =$$

$$= \sum_{\substack{\mathrm{card}(K)=k,\\ \mathrm{card}(L)=l}} \mathsf{d}\,\psi_K\wedge\left[\frac{1}{a}\right]^K\wedge\omega_L\cdot\left[\frac{1}{a}\right]^L + (-1)^k\cdot\sum_{\substack{\mathrm{card}(K)=k,\\ \mathrm{card}(L)=l}} \psi_K\cdot\left[\frac{1}{a}\right]^K\wedge\mathsf{d}\,\omega_L\wedge\left[\frac{1}{a}\right]^L =$$

$$= \underbrace{\sum_{\mathrm{card}(K)=k}\mathsf{d}\,\psi_K\wedge\left[\frac{1}{a}\right]^K}_{\substack{\|(18.1.16)\\ \mathsf{d}\,\psi}}\wedge\underbrace{\sum_{\mathrm{card}(L)=l}\omega_L\cdot\left[\frac{1}{a}\right]^L}_{\substack{\|(18.1.8)\\ \omega}} + (-1)^k\cdot\underbrace{\sum_{\mathrm{card}(K)=k}\psi_K\cdot\left[\frac{1}{a}\right]^K}_{\substack{\|(18.1.8)\\ \psi}}\wedge\underbrace{\sum_{\mathrm{card}(L)=l}\mathsf{d}\,\omega_L\wedge\left[\frac{1}{a}\right]^L}_{\substack{\|(18.1.16)\\ \mathsf{d}\,\omega}} =$$

$$= \mathsf{d}\,\psi\wedge\omega + (-1)^k\cdot\psi\wedge\mathsf{d}\,\omega.$$

6. Гомологичность доказывается в два этапа. Сначала для форм степени 0:

$$\mathsf{d}\,\mathsf{d}\,f = 0 \tag{18.1.21}$$

Это вытекает из (14.1.22) и теоремы Шварца 14.1.8:

$$\mathsf{d}\,f = (14.1.22) = \sum_{i=1}^{n}\nabla_i f\cdot\left[\frac{1}{a}\right]^i \tag{18.1.22}$$

$$\Downarrow$$

$$\mathsf{d}\,\mathsf{d}\,f = \mathsf{d}\left(\sum_{j=1}^{n}\nabla_j f\cdot\left[\frac{1}{a}\right]^j\right) = (18.1.15) = \sum_{j=1}^{n}\mathsf{d}\left(\nabla_j f\cdot\left[\frac{1}{a}\right]^j\right) = (18.1.19) = \sum_{j=1}^{n}\mathsf{d}\,\nabla_j f\wedge\left[\frac{1}{a}\right]^j =$$

$$= (18.1.22) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\nabla_i\nabla_j f\cdot\left[\frac{1}{a}\right]^i\wedge\left[\frac{1}{a}\right]^j =$$

$$= \sum_{i<j}\nabla_i\nabla_j f\cdot\left[\frac{1}{a}\right]^i\wedge\left[\frac{1}{a}\right]^j + \underbrace{\sum_{i=j}\nabla_i\nabla_i f\cdot\left[\frac{1}{a}\right]^i\wedge\left[\frac{1}{a}\right]^i}_{\substack{\|\\ 0}} + \underbrace{\sum_{i>j}\nabla_i\nabla_j f\cdot\left[\frac{1}{a}\right]^i\wedge\left[\frac{1}{a}\right]^j}_{\text{поменяем местами } i \text{ и } j} =$$

$$= \sum_{i<j}\nabla_i\nabla_j f\cdot\left[\frac{1}{a}\right]^i\wedge\left[\frac{1}{a}\right]^j + \sum_{i<j}\underbrace{\nabla_j\nabla_i f}_{\substack{\|(14.1.30)\\ \nabla_i\nabla_j f}}\cdot\underbrace{\left[\frac{1}{a}\right]^j\wedge\left[\frac{1}{a}\right]^i}_{\substack{\|(12.5.253)\\ -\left[\frac{1}{a}\right]^i\wedge\left[\frac{1}{a}\right]^j}} =$$

$$= \sum_{i<j}\nabla_i\nabla_j f\cdot\left[\frac{1}{a}\right]^i\wedge\left[\frac{1}{a}\right]^j - \sum_{i<j}\nabla_i\nabla_j f\cdot\left[\frac{1}{a}\right]^i\wedge\left[\frac{1}{a}\right]^j = 0.$$

А затем в общем случае:

$$\mathsf{d}\,\mathsf{d}\left(\sum_{\mathrm{card}(K)=k}\omega_K\cdot\left[\frac{1}{a}\right]^K\right) = (18.1.16) = \mathsf{d}\left(\sum_{\mathrm{card}(K)=k}\mathsf{d}\,\omega_K\wedge\left[\frac{1}{a}\right]^K\right) = (18.1.15) =$$

$$= \sum_{\mathrm{card}(K)=k}\mathsf{d}\left(\mathsf{d}\,\omega_K\wedge\left[\frac{1}{a}\right]^K\right) = (18.1.17) = \sum_{\mathrm{card}(K)=k}\underbrace{\mathsf{d}\,\mathsf{d}\,\omega_K}_{\substack{\|\ (18.1.14)\\ 0}}\wedge\left[\frac{1}{a}\right]^K - \sum_{\mathrm{card}(K)=k}\mathsf{d}\,\omega_K\wedge\underbrace{\mathsf{d}\left(\left[\frac{1}{a}\right]^K\right)}_{\substack{\|\ (18.1.21)\\ 0}} = 0$$

$\square$

◇ **18.1.5.** Для формы степени 1 на $\mathbb{R}^2$

$$\omega = P \cdot \mathsf{d}\, x + Q \cdot \mathsf{d}\, y$$

дифференциалом будет форма степени 2

$$\mathsf{d}\, \omega = (-\nabla_2 P + \nabla_1 Q) \cdot \mathsf{d}\, x \wedge \mathsf{d}\, y.$$

Действительно,

$$\begin{aligned}\mathsf{d}\, \omega = \mathsf{d}(P \cdot \mathsf{d}\, x + Q \cdot \mathsf{d}\, y) = \mathsf{d}\, P \wedge \mathsf{d}\, x + \mathsf{d}\, Q \wedge \mathsf{d}\, y =\\ = (\nabla_1 P \cdot \mathsf{d}\, x + \nabla_2 P \cdot \mathsf{d}\, y) \wedge \mathsf{d}\, x +\\ + (\nabla_1 Q \cdot \mathsf{d}\, x + \nabla_2 Q \cdot \mathsf{d}\, y) \wedge \mathsf{d}\, y =\\ = \nabla_1 P \cdot \underbrace{\mathsf{d}\, x \wedge \mathsf{d}\, x}_{\substack{\parallel \\ 0}} + \nabla_2 P \cdot \underbrace{\mathsf{d}\, y \wedge \mathsf{d}\, x}_{\substack{\parallel \\ -\,\mathsf{d}\, x \wedge \mathsf{d}\, y}} +\\ + \nabla_1 Q \cdot \mathsf{d}\, x \wedge \mathsf{d}\, y + \nabla_2 Q \cdot \underbrace{\mathsf{d}\, y \wedge \mathsf{d}\, y}_{\substack{\parallel \\ 0}} =\\ = (-\nabla_2 P + \nabla_1 Q) \cdot \mathsf{d}\, x \wedge \mathsf{d}\, y.\end{aligned}$$

◇ **18.1.6.** Для формы степени 2 в пространстве $\mathbb{R}^3$

$$\omega = P\ \mathsf{d}\, y \wedge \mathsf{d}\, z + Q\ \mathsf{d}\, z \wedge \mathsf{d}\, x + R\ \mathsf{d}\, x \wedge \mathsf{d}\, y$$

дифференциалом будет форма степени 3

$$\mathsf{d}\, \omega = \Big(\nabla_1 P + \nabla_2 Q + \nabla_3 R\Big) \cdot \mathsf{d}\, x \wedge \mathsf{d}\, y \wedge \mathsf{d}\, z$$

- Дифференциальная форма ω на области U в X называется
  - — *замкнутой*, если ее дифференциал нулевой
  $$\mathsf{d}\, \omega = 0$$
  - — *точной*, если она является дифференциалом какой-то другой формы:
  $$\omega = \mathsf{d}\, \eta.$$

  Из тождества (18.1.18) следует, что *всякая точная форма замкнута.*

Теорема 18.1.2. *Всякая постоянная форма ω на X точна.*

Доказательство. По теореме 18.1.1 это достаточно доказать для форм вида

$$\omega = \mathsf{d}\, \xi_{i_1} \wedge ... \wedge \mathsf{d}\, \xi_{i_k}$$

Действительно, если положить

$$\eta = \xi_{i_1} \cdot \xi_{i_2} \wedge ... \wedge \mathsf{d}\, \xi_{i_k},$$

то мы получим

$$\mathsf{d}\, \eta = \mathsf{d}\, \xi_{i_1} \wedge \xi_{i_2} \wedge ... \wedge \mathsf{d}\, \xi_{i_k} = \omega.$$

□

Действие гладкого отображения на дифференциальную форму.

- Пусть X и Y – евколидовы пространства, $U \subseteq X$ и $V \subseteq Y$ – открытые множества в них, $\varphi : U \to V$ – гладкое отображение, и $\omega : V \to \Lambda_k(Y)$ – гладкая дифференциальная форма. Тогда определено отображение $\varphi^* \omega : U \to \Lambda_k(Y)$, действующее по формуле

  $$\varphi^* \omega(x)[p_1, ..., p_k] = \omega\big(\varphi(x)\big)\big[\,\mathsf{d}\, \varphi(x)[p_1], ..., \mathsf{d}\, \varphi(x)[p_k]\big] \qquad (18.1.23)$$

  будет, как легко понять, гладкой дифференциальной формой. Она называется *действием отображения φ на дифференциальную форму ω.*

Свойства действия отображения на форму:

1^0. **Выражение через Якобиан:** *на правильно ориентированном ортонормированном базисе e_i ориентированного евклидова пространства X действие отображения φ на форму ω совпадает с действием Якобиана этого отображения:*

$$(\varphi^* \omega)(x)[e_1, ..., e_k] := \mathsf{J}\, \varphi(x)\big[\omega(\varphi(x))\big] \qquad (18.1.24)$$

2^0. **Перестановочность с конкатенацией:**

$$\varphi^*(\psi \wedge \omega) = \varphi^* \psi \wedge \varphi^* \omega. \qquad (18.1.25)$$

3^0. **Перестановочность с дифференциалом:**

$$\varphi^*(\mathsf{d}\,\omega) = \mathsf{d}(\varphi^*\omega). \tag{18.1.26}$$

Здесь первые два свойства доказываются элементарно, а для доказательства третьего нам понадобится

Лемма 18.1.3. *Пусть A – коммутативная алгебра и $f : A^n \to A$ – отображение, действующее по формуле*

$$f(x_0, ..., x_{n-1}) = x_0 - x_1 + ... + (-1)^{n-1} \cdot x_{n-1} = \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i \cdot x_i. \tag{18.1.27}$$

Тогда для любой последовательности $x_0, x_1, ..., x_n \in A$ справедливо тождество

$$f\left(\sum_{i=0}^{n} (-1)^i \cdot (x_i \cdot x_0, ..., \widehat{x_i \cdot x_i}, ..., x_i \cdot x_n) \right) = 0 \tag{18.1.28}$$

где символ $\widehat{...}$ означает, что этот элемент выбрасывается из строки.

Доказательство. Это доказывается индукцией.

1. При $n = 1$ мы получаем тождество

$$f(x_0 \cdot x_1 - x + 1 \cdot x_0) = f(0) = 0.$$

2. Предположим, что это верно при $n = k$:

$$f\left(\sum_{i=0}^{k} (-1)^i \cdot (x_i \cdot x_0, ..., \widehat{x_i \cdot x_i}, ..., x_i \cdot x_k) \right) = 0 \tag{18.1.29}$$

3. Тогда для $n = k + 1$ мы получим:

$$f\left(\sum_{i=0}^{k+1} (-1)^i \cdot (x_i \cdot x_0, ..., \widehat{x_i \cdot x_i}, ..., x_i \cdot x_k, x_i \cdot x_{k+1}) \right) =$$

$$= f\left(\sum_{i=0}^{k} (-1)^i \cdot (x_i \cdot x_0, ..., \widehat{x_i \cdot x_i}, ..., x_i \cdot x_k, x_i \cdot x_{k+1}) + (-1)^{k+1} \cdot (x_{k+1} \cdot x_0, ..., x_{k+1} \cdot x_k) \right) =$$

$$= f\left(\sum_{i=0}^{k} (-1)^i \cdot (x_i \cdot x_0, ..., \widehat{x_i \cdot x_i}, ..., x_i \cdot x_k, 0) + \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \cdot (0, ..., 0, x_i \cdot x_{k+1}) + \right.$$

$$\left. + (-1)^{k+1} \cdot (x_{k+1} \cdot x_0, ..., x_{k+1} \cdot x_k) \right) =$$

$$= \underbrace{f\left(\sum_{i=0}^{k} (-1)^i \cdot (x_i \cdot x_0, ..., \widehat{x_i \cdot x_i}, ..., x_i \cdot x_k, 0) \right)}_{\substack{\| \ (18.1.29) \\ 0}} + f\left(\sum_{i=0}^{k} (-1)^i \cdot (0, ..., 0, x_i \cdot x_{k+1}) \right) +$$

$$+ f\Big((-1)^{k+1} \cdot (x_{k+1} \cdot x_0, ..., x_{k+1} \cdot x_k) \Big) =$$

$$= \underbrace{f\left(0, ..., 0, \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \cdot x_i \cdot x_{k+1} \right)}_{\text{строка длины } k+1} + (-1)^{k+1} \cdot f\underbrace{(x_{k+1} \cdot x_0, ..., x_{k+1} \cdot x_k)}_{\text{строка длины } k+1} = (18.1.27) =$$

$$= (-1)^k \cdot \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \cdot x_i \cdot x_{k+1} + (-1)^{k+1} \cdot \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \cdot x_{k+1} \cdot x_i =$$

$$= (-1)^k \cdot \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \cdot x_i \cdot x_{k+1} + (-1)^k \cdot \sum_{i=0}^{k} (-1)^{i+1} \cdot x_{k+1} \cdot x_i =$$

$$= (-1)^k \cdot \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \cdot \Big(x_i \cdot x_{k+1} - x_{k+1} \cdot x_i \Big) = 0$$

$\square$

Доказательство свойств $1^\circ - 2^\circ$. 1. Равенство (18.1.24) очевидно:

$$\varphi^*\omega(x)[e_1,...,e_k] = \omega\big(\varphi(x)\big)\big[\,\mathsf{d}\,\varphi(x)[e_1],...,\mathsf{d}\,\varphi(x)[e_k]\big] = \mathsf{d}\,\varphi(x)[e_1]\vee...\vee\mathsf{d}\,\varphi(x)[e_k]\Big[\omega\big(\varphi(x)\big)\Big] =$$
$$= \vee_k\,\mathsf{d}\,\varphi(x)[e_1\vee...\vee e_k]\Big[\omega\big(\varphi(x)\big)\Big] = (14.2.135) = \mathsf{J}\,\varphi(x)\Big[\omega\big(\varphi(x)\big)\Big]$$

2. Равенство (18.1.25) тоже:

$$\varphi^*(\psi\wedge\omega)(x)[p_1,...,p_m] =$$
$$= \sum_{(K,L)\in C^{k,l}_{\{1,...,k+l\}}} \operatorname{sgn}(\tau_{K\triangleleft L})\cdot\psi\big(\varphi(x)\big)\Big[\,\mathsf{d}\,\varphi(x)[p_{\sigma(1)}],...,\mathsf{d}\,\varphi(x)[p_{\sigma(k)}]\Big]\cdot$$
$$\cdot\,\omega\big(\varphi(x)\big)\Big[\,\mathsf{d}\,\varphi(x)[p_{\sigma(k+1)}],...,\mathsf{d}\,\varphi(x)[p_{\sigma(k+l)}]\Big] =$$
$$= (\varphi^*\psi\wedge\varphi^*\omega)(x)[p_1,...,p_m]$$

– здесь $\sigma = K\triangleleft L$ – отображение склейки, определенное диаграммой (12.1.36) (и удовлетворяющее условиям (12.1.37) и (12.1.38)).

3. Перейдем к (18.1.26). Сначала заметим такое тождество:

$$\sum_{i=0}^{k}(-1)^i\cdot\omega\big(\varphi(x)\big)\big[\partial_{p_i}\,\mathsf{d}\,\varphi(x)[p_0],...,\partial_{p_i}\,\widehat{\mathsf{d}\,\varphi(x)}[p_i],...,\partial_{p_i}\,\mathsf{d}\,\varphi(x)[p_k]\big] = 0. \tag{18.1.30}$$

Оно доказывается так:

$$\sum_{i=0}^{k}(-1)^i\cdot\omega\big(\varphi(x)\big)\big[\partial_{p_i}\,\mathsf{d}\,\varphi(x)[p_0],...,\partial_{p_i}\,\widehat{\mathsf{d}\,\varphi(x)}[p_i],...,\partial_{p_i}\,\mathsf{d}\,\varphi(x)[p_k]\big] =$$
$$= \sum_{i=0}^{k}(-1)^i\cdot\omega\big(\varphi(x)\big)\big[\partial_{p_i}\partial_{p_0}\varphi(x),...,\partial_{p_i}\widehat{\partial_{p_i}\varphi}(x),...,\partial_{p_i}\partial_{p_k}\varphi(x)\big] =$$
$$= \omega\big(\varphi(x)\big)\Big[\sum_{i=0}^{k}(-1)^i\cdot\big(\partial_{p_i}\partial_{p_0}\varphi(x),...,\partial_{p_i}\widehat{\partial_{p_i}\varphi}(x),...,\partial_{p_i}\partial_{p_k}\varphi(x)\big)\Big] =$$
$$= \omega\big(\varphi(x)\big)\Big[\sum_{i=0}^{k}(-1)^i\cdot\big(\partial_{p_i}\partial_{p_0},...,\widehat{\partial_{p_i}\partial_{p_i}},...,\partial_{p_i}\partial_{p_k}\big)(\varphi)(x)\Big] =$$
$$= \omega\big(\varphi(x)\big)\bigg[\Big\{\sum_{i=0}^{k}(-1)^i\cdot\big(\partial_{p_i}\partial_{p_0},...,\widehat{\partial_{p_i}\partial_{p_i}},...,\partial_{p_i}\partial_{p_k}\big)\Big\}(\varphi)(x)\bigg] \tag{18.1.31}$$

Рассмотрим отдельно выражение в фигурных скобках:

$$\sum_{i=0}^{k}(-1)^i\cdot\big(\partial_{p_i}\partial_{p_0},...,\widehat{\partial_{p_i}\partial_{p_i}},...,\partial_{p_i}\partial_{p_k}\big) \tag{18.1.32}$$

Это линейная комбинация строк из алгебры операторов. Любые два оперетора ∂_{p_i} и ∂_{p_j} коммутируют, поэтому мы можем считать, что к ним применима лемма 18.1.3. Это можно понимать так, что в строке (18.1.32) элементы линейно зависимы. Как следствие, в строке,

$$\sum_{i=0}^{k}(-1)^i\cdot\big(\partial_{p_i}\partial_{p_0},...,\widehat{\partial_{p_i}\partial_{p_i}},...,\partial_{p_i}\partial_{p_k}\big)(\varphi),$$

получаеющейся как действие строки (18.1.32) на отображение φ, элементы также линейно зависимы. Значит, в строке

$$\sum_{i=0}^{k}(-1)^i\cdot\big(\partial_{p_i}\partial_{p_0}\varphi(x),...,\partial_{p_i}\widehat{\partial_{p_i}\varphi}(x),...,\partial_{p_i}\partial_{p_k}\varphi(x)\big) = \sum_{i=0}^{k}(-1)^i\cdot\big(\partial_{p_i}\partial_{p_0},...,\widehat{\partial_{p_i}\partial_{p_i}},...,\partial_{p_i}\partial_{p_k}\big)(\varphi)(x)$$

элементы также должны быть линейно зависимы. Но эта строка стоит в аргументе внешней формы $\omega(\varphi(x))$ в третьей строке цеповки (18.1.31). Значит, значение этой формы на такой строке должно быть нулевым:

$$\omega\big(\varphi(x)\big)\Big[\sum_{i=0}^{k}(-1)^i\cdot\big(\partial_{p_i}\partial_{p_0}\varphi(x),...,\partial_{p_i}\widehat{\partial_{p_i}\varphi}(x),...,\partial_{p_i}\partial_{p_k}\varphi(x)\big)\Big]=0.$$

Это доказывает (18.1.30).

Далее пусть $k=\dim X$, тогда[2]:

$$\begin{aligned}
\partial_q\varphi^*\omega(x)[p_K] &= \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\left\{\varphi^*\omega(x+tq)[p_K]-\varphi^*\omega(x)[p_K]\right\}= \\
&= \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\Big\{\omega\big(\varphi(x+tq)\big)\big[\mathsf{d}\,\varphi(x+tq)^k[p_K]\big]-\omega\big(\varphi(x)\big)\big[\mathsf{d}\,\varphi(x)^k[p_K]\big]\Big\}= \\
&= \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\Big\{\omega\big(\varphi(x+tq)\big)\big[\mathsf{d}\,\varphi(x+tq)^k[p_K]\big]-\omega\big(\varphi(x)\big)\big[\mathsf{d}\,\varphi(x+tq)^k[p_K]\big]+ \\
&\qquad +\omega\big(\varphi(x)\big)\big[\mathsf{d}\,\varphi(x+tq)^k[p_K]\big]-\omega\big(\varphi(x)\big)\big[\mathsf{d}\,\varphi(x)^k[p_K]\big]\Big\}= \\
&= \partial_{\mathsf{d}\,\varphi(x)[q]}\omega\big(\varphi(x)\big)\big[\mathsf{d}\,\varphi(x)^k[p_K]\big]+\omega\big(\varphi(x)\big)\big[\partial_q\,\mathsf{d}\,\varphi(x)^k[p_K]\big]
\end{aligned}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{aligned}
\mathsf{d}(\varphi^*\omega)(x)[p_0,...,p_k] &= \sum_{i=0}^{k}(-1)^i\cdot\partial_{p_i}\varphi^*\omega(x)[p_{K\setminus\{i\}}]= \\
&= \underbrace{\sum_{i=0}^{k}(-1)^i\cdot\partial_{\mathsf{d}\,\varphi(x)[p_i]}\omega\big(\varphi(x)\big)\big[\mathsf{d}\,\varphi(x)^n[p_{K\setminus\{i\}}]\big]}_{\substack{\| \ (18.1.12) \\ \mathsf{d}\,\omega(\varphi(x))\,[\,\mathsf{d}\,\varphi(x)^n[p_K]] \\ \| \ (18.1.23) \\ \varphi^*(\mathsf{d}\,\omega)(x)[p_K]}}+\underbrace{\sum_{i=0}^{k}(-1)^i\cdot\omega\big(\varphi(x)\big)\big[\partial_{p_i}\,\mathsf{d}\,\varphi(x)^n[p_{K\setminus\{i\}}]\big]}_{\substack{\| \\ \sum_{i=0}^k(-1)^i\cdot\omega(\varphi(x))\,[\partial_{p_i}\,\mathsf{d}\,\varphi(x)[p_0],...,\partial_{p_i}\,\widehat{\mathsf{d}\,\varphi(x)}[p_i],...,\partial_{p_i}\,\mathsf{d}\,\varphi(x)[p_k]] \\ \| \ (18.1.30) \\ 0}}= \\
&= \varphi^*(\mathsf{d}\,\omega)(x)[p_K]
\end{aligned}$$

□

(b) Интегрирование дифференциальных форм

Гиперповерхности, их объем и ориентированный объем. Понятие гиперповерхности обобщает понятия кривой и поверхности на случай большего числа переменных. Система определений и основных утверждений для него повторяет те, что приводились в главах 16 и 17, с очевидными изменениями.

- *Параметризованной гиперповерхностью* размерности k в евклидовом пространстве X называется всякое полурегулярное (в смысле определения стр.953) отображение размерности k в X, то есть бесконечно гладкое отображение $\alpha : I \to X$, где I – измеримый по Жордану компакт в пространстве $\mathbb{R}^k$, удовлетворяющее следующим условиям:

  C1 (стабильность почти всюду): дифференциал $\alpha : I \to X$ инъективен всюду на внутренности I, кроме, может быть, подмножества жордановой меры нуль в I:

  $$\mu\Big\{x\in\mathsf{Int}(I):\quad \exists p\in\mathbb{R}^k\setminus\{0\}\quad \mathsf{d}\,\alpha(x)[p]=0\Big\}=0,$$

  $$\left(\mathsf{d}\,\alpha(x)[p]:=\lim_{t\to 0}\frac{\alpha(x+tp)-\alpha(x)}{t}\right)$$

  по теореме 14.2.12 это эквивалентно тому, что Якобиан отображения α ненулевой всюду на внутренности I, кроме быть может, множества жордановой меры нуль:

  $$\mu\Big\{x\in\mathsf{Int}(I):\quad \mathsf{J}\,\alpha(x)=0\Big\}=0. \tag{18.1.33}$$

[2]Обозначения $\omega(p_K)$ и $A^k(x_K)$ были определены выше формулой (12.5.241) и (12.5.243).

C2 (инъективность почти всюду): отображение $\alpha : I \to X$ инъективно всюду, кроме, может быть, подмножества жордановой меры нуль в I:

$$\mu\Big\{s \in I : \quad \exists t \in I \quad s \neq t \quad \& \quad \alpha(s) = \alpha(t)\Big\} = 0$$

- Параметризованная гиперповерхность $\alpha : I \to X$ называется
  - *регулярной*, если она является регулярным отображением, то есть условия C1 и C2 можно усилить до условий

    C1* (стабильность): $\alpha : I \to X$ обладает гладким продолжением $\tilde{\alpha} : U \to X$ в некоторую окрестность U компакта I, у которого дифференциал невырожден всюду на I:

    $$\forall x \in I \quad \forall p \in \mathbb{R}^k \setminus \{0\} \qquad \mathsf{d}\,\tilde{\alpha}(x)[p] \neq 0$$

    или, что то же самое, Якобиан отображения $\tilde{\alpha}$ ненулевой всюду на I:

    $$\mu\Big\{x \in I : \quad \mathsf{J}\,\tilde{\alpha}(x) = 0\Big\} = 0. \tag{18.1.34}$$

    C2* (инъективность): отображение $\alpha : I \to X$ всюду инъективно:

    $$\forall s, t \in I \quad s \neq t \quad \Longrightarrow \quad \alpha(s) \neq \alpha(t)$$

  - *вырожденной*, если α является вырожденным полурегулярным отображением, то есть I имеет нулевую жорданову меру:

    $$\mu(I) = 0$$

- Множество $L \subseteq X$ мы называем *скалярной гиперповерхностью*, или просто *гиперповерхностью*, если оно является образом некоторой параметризованной гиперповерхности $\alpha : I \to X$:
  $$L = \mathsf{R}(\alpha).$$
  При этом отображение α называется *параметризацией* поверхности L.
- Гиперповерхность L называется
  - *регулярной*, если она допускает регулярную параметризацию $\alpha : I \to L$ (то есть можно ее представить как образ регулярной параметризованной поверхности $\alpha : I \to X$),
  - *вырожденной*, если она допускает вырожденную параметризацию $\alpha : I \to L$ (то есть если ее можно представить как образ вырожденной параметризованной поверхности $\alpha : I \to X$; при этом в силу следствия 15.3.13, любая другая параметризация $\beta : J \to X$ множества L также будет вырожденной параметризованной поверхностью).
  - *связной*, если L является связным множеством.
- *Объем* гиперповерхности L в X, $n \geqslant k$, определяется как интеграл от модуля Якобиана какой-нибудь параметризации $\alpha : I \to L$ гиперповерхности L:

$$\mathsf{Vol}(L) = \iint_I \mathsf{J}\,\alpha(s)\;\mathsf{d}\,s = \iint_I \mathsf{d}\,\tilde{\alpha}(s)[e_1] \vee .. \vee \mathsf{d}\,\tilde{\alpha}(s)[e_k]\;\mathsf{d}\,s \tag{18.1.35}$$

Теорема 18.1.4. *Объем* $\mathsf{Vol}(L)$ *гиперповерхности* L *не зависит от выбора ее параметризации* $\alpha : I \to L$.

Теорема 18.1.5. *Все возможные параметризации данной гиперповерхности* L *делятся на классы* $\{P_i\}$, *в каждом из которых любые два представителя одинаково ориентированы:*

1) *если* $\alpha, \beta \in P_i$, *то* $\alpha \equiv \beta$,
2) *если* $\alpha \in P_i \neq P_j \ni \beta$ *то* $\alpha \not\equiv \beta$.

! **18.1.7.** Как и в случае с кривыми и поверхностями, у определенной таким образом гиперповерхности число классов эквивалентности параметризаций может быть больше двух.

Выбрать какую-нибудь ориентацию на гиперповерхности L – значит выбрать какой-нибудь из классов P_i, и объявить, что все параметризации, лежащие в этом классе имеют ориентацию, согласованную с выбранной ориентацией нашей гиперповерхности L. Это то же самое, что выбрать какую-нибудь параметризацию α гиперповерхности L, и сказать, что все параметризации β, одинаково ориентированные с α считаются согласованными с ориентацией L.

- Гиперповерхность L с выбранной на ней ориентацией называется *ориентированной гиперповерхностью.* Мы будем обозначать ориентированные гиперповерхности жирными буквами, $\mathbf{L}$, $\mathbf{T}$, и т.д., чтобы не путать их с неориентированными. Если параметризация $\alpha : I \to L$ принадлежит выбранному классу P_i (то есть имеет ориентацию, согласованную с выбранной) ориентаций на L, то мы записываем это так:

$$\alpha : I \to \mathbf{L}$$

Если $\mathbf{L}$ – ориентированная гиперповерхность, то та же гиперповерхность L без ориентации называется *носителем* ориентированной поверхности $\mathbf{L}$ и обозначается $|\mathbf{L}|$:

$$L = |\mathbf{L}|$$

- *Векторный объем* ориентированной гиперповерхности $\mathbf{S}$ в X, $n \geqslant 2$, определяется как (векторный) интеграл от Якобиана какой-нибудь параметризации $\alpha : I \to \mathbf{S}$ гиперповерхности $\mathbf{S}$, согласованной с ее ориентацией:

$$\overrightarrow{\mathsf{Vol}}(\mathbf{S}) = \iint_I \mathsf{J}\,\alpha(s)\ \mathsf{d}\,s = \iint_I \mathsf{d}\,\tilde{\alpha}(s)[e_1] \vee .. \vee \mathsf{d}\,\tilde{\alpha}(s)[e_k]\ \mathsf{d}\,s \tag{18.1.36}$$

Теорема 18.1.6. *Векторный объем $\overrightarrow{\mathsf{Vol}}(\mathbf{L})$ ориентированной гиперповерхности $\mathbf{L}$ не зависит от выбора ее параметризации $\alpha : I \to \mathbf{L}$, согласованной с ее ориентацией, и по модулю не превосходит площади этой поверхности:*

$$|\overrightarrow{\mathsf{Vol}}(\mathbf{L})| \leqslant \mathsf{Vol}(\mathbf{L}) \tag{18.1.37}$$

Разбиение гиперповерхности. Как и для случае кривых и поверхностей, для гиперповерхностей определено понятие разбиения. Сначала вводится понятие несущественно пересекающихся параметризованных гиперповерхностей.

Пусть нам даны две параметризованные гиперповерхности $\alpha : I \to X$ и $\beta : J \to X$. Будем говорить, что они *пересекаются несущественно*, и обозначать это записью

$$\alpha \pitchfork \beta,$$

если выполняются следующие два эквивалентных условия:

(a) след $\beta\big|_\alpha$ гиперповерхности α в гиперповерхности β есть вырожденная параметризованная гиперповерхность:
$$\mu\Big(\mathsf{D}(\beta\big|_\alpha)\Big) = \mu\Big(\beta^{-1}\big(\alpha(I)\big)\Big) = 0.$$

(b) след $\alpha\big|_\beta$ гиперповерхности β в гиперповерхности α есть вырожденная параметризованная гиперповерхность;
$$\mu\Big(\mathsf{D}(\alpha\big|_\beta)\Big) = \mu\Big(\alpha^{-1}\big(\beta(J)\big)\Big) = 0.$$

Затем определяется разбиение параметризованной гиперповерхности.

Говорят, что параметризованные гиперповерхности $\beta_1, ..., \beta_m$ образуют *(ориентированное) разбиение* параметризованной гипеповерхности α и обозначают это формулой

$$\alpha \equiv \beta_1 \sqcup ... \sqcup \beta_m,$$

или формулой

$$\alpha \equiv \bigsqcup_{i=1}^{m} \beta_i, \tag{18.1.38}$$

если

P1: каждая гиперповерхность β_i (ориентированно) подчинена гиперповерхности α, P2: ниперповерхности $\beta_1, ..., \beta_m$ попарно несущественно пересекаются:

$$\forall i \neq j \qquad \beta_i \pitchfork \beta_j$$

P3: объединение их образов совпадает с образом α:

$$\mathsf{R}(\alpha) = \mathsf{R}(\beta_1) \cup ... \cup \mathsf{R}(\beta_m)$$

После этого определяется разбиение ориентированной гиперповерхности.

Пусть $\mathcal{T}$ обозначает конечное множество ориентированных гиперповерхностей. Говорят, что $\mathcal{T}$ является *разбиением ориентированной гиперповерхности* $\mathbf{L}$, и записывают это формулой

$$\mathbf{L} \equiv \bigsqcup_{\mathbf{T} \in \mathcal{T}} \mathbf{T}$$

если выполняются следующие эквивалентные условия:

(a) существует параметризация α гиперповерхности $\mathbf{L}$, согласованная с ориентацией $\mathbf{L}$, и параметризации $\beta_{\mathbf{T}}$ гиперповерхностей $\mathbf{T} \in \mathcal{T}$, согласованные с ориентациями $\mathbf{T}$, такие, что система $\{\beta_{\mathbf{T}};\ \mathbf{T} \in \mathcal{T}\}$ является разбиением параметризованной гиперповерхности α

$$\alpha \equiv \bigsqcup_{\mathbf{T} \in \mathcal{T}} \beta_{\mathbf{T}}$$

(b) для любой параметризации α гиперповерхности $\mathbf{L}$, согласованной с ориентацией $\mathbf{L}$, и любых параметризаций $\beta_{\mathbf{T}}$ гиперповерхностей $\mathbf{T} \in \mathcal{T}$, согласованных с ориентациями $\mathbf{T}$, система $\{\beta_{\mathbf{T}};\ \mathbf{T} \in \mathcal{T}\}$ является разбиением параметризованной гиперповерхности α

$$\alpha \equiv \bigsqcup_{\mathbf{T} \in \mathcal{T}} \beta_{\mathbf{T}}$$

Интеграл от дифференциальной формы. Интеграл от дифференциальной формы степени k по ориентированной гиперповерхности $\mathbf{L}$ размерности k в X, $k \leqslant n$, задается формулой, аналогичной (16.3.55) и (17.3.65):

$$\int_{\mathbf{L}} \omega := \int_I \mathsf{J}\, \alpha(t) \big[\omega(\alpha(t))\big]\, \mathsf{d}\, t = \int_I \omega(\alpha(t)) \langle \mathsf{d}\, \alpha(t)\langle e_1\rangle, ..., \mathsf{d}\, \alpha(t)\langle e_k\rangle\rangle\, \mathsf{d}\, t, \tag{18.1.39}$$

где $e_1, ..., e_k$ – стандартный базис пространства $\mathbb{R}^k$. В важном частном случае, когда размерности $\mathbf{L}$ и объемлющего пространства X совпадают, $k = n$, а отображение $\alpha : I \to X$ представляет собой теоретико-множественное вложение, область I саму по себе можно считать гиперповерхностью, и для нее эта формула приобретает вид

$$\int_I \omega := \int_I \omega(t)\langle e_1, ..., e_k\rangle\, \mathsf{d}\, t, \tag{18.1.40}$$

◇ **18.1.8.** Интеграл от постоянной дифференциальной формы ω по ориентированной гиперповерхности $\mathbf{L}$ равен действию формы ω на ориентированный объем $\mathbf{L}$:

$$\int_{\mathbf{L}} \omega = \omega(x)\langle \overrightarrow{\mathsf{Vol}}(\mathbf{L})\rangle \tag{18.1.41}$$

Свойства интеграла от дифференциальной формы:

1^0. *Для всякой параметризованной гиперповерхности $\sigma : D \to X$ справедлива формула:*

$$\int_{\sigma(D)} \omega = \int_D \sigma^* \omega \tag{18.1.42}$$

2^0. **Аддитивность:** *интеграл от суммы и разности дифференциальных форм равен сумме и разности интегралов:*

$$\int_{\mathbf{S}} (\psi + \omega) = \int_{\mathbf{S}} \psi + \int_{\mathbf{S}} \omega, \qquad \int_{\mathbf{S}} (\psi - \omega) = \int_{\mathbf{S}} \psi - \int_{\mathbf{S}} \omega \tag{18.1.43}$$

Доказательство. Здесь второе утверждение очевидно, а первое доказывается цепочкой

$$\int_{\sigma(D)} \omega = (18.1.39) = \int_D \omega(\sigma(t))\langle \mathsf{d}\,\sigma(t)\langle e_1\rangle, ..., \mathsf{d}\,\sigma(t)\langle e_k\rangle\rangle\, \mathsf{d}\,t = (18.1.23) =$$

$$= \int_D (\sigma^*\omega)(t)\langle e_1, ..., e_k\rangle\, \mathsf{d}\,t = (18.1.40) = \int_D \sigma^*\omega$$

□

Составные гиперповерхности и преобразование гиперповерхностей. *Составной ориентированной гиперповерхностью* размерности n мы будем называть произвольное конечное множество $\mathcal{M}$ гиперповерхностей размерности n $\mathbf{T} \in \mathcal{M}$, а ее носителем $|\mathcal{M}|$ – объединение носителей ее элементов:

$$|\mathcal{M}| = \bigcup_{\mathbf{T}\in\mathcal{M}} |\mathbf{T}|. \tag{18.1.44}$$

Интегралом от дифференциальной формы ω степени n по составной поверхности $\mathcal{M}$ мы называем сумму интегралов от ее элементов:

$$\int_{\mathcal{M}} \omega = \sum_{\mathbf{T}\in\mathcal{M}} \int_{\mathbf{T}} \omega. \tag{18.1.45}$$

Может случиться (это не всегда бывает), что существует некая ориентированная гиперповерхность $\mathbf{M}$, интеграл по которой от любой дифференциальной формы ω степени n совпадает с интегралом по составной поверхности $\mathcal{M}$,

$$\int_{\mathcal{M}} \omega = \int_{\mathbf{M}} \omega,$$

тогда мы будем говорить, что составная ориентированная гиперповерхность $\mathcal{M}$ *эквивалентна* ориентированной гиперповерхности $\mathbf{M}$.

Если тем же свойством обладает какая-то составная ориентированная гиперповерхность $\mathcal{M}'$, то

$$\int_{\mathcal{M}} \omega = \int_{\mathcal{M}'} \omega,$$

тогда мы говорим, что составные ориентированные гиперповерхности $\mathcal{M}$ и $\mathcal{M}'$ *эквивалентны.*

Пусть X и Y – евклидовы пространства и пусть $\varphi : X \hookrightarrow Y$ – гладкое отображение, и $\mathbf{L} \subseteq \mathsf{D}(\varphi)$ – гиперповерхность размерности n.

- Если при какой-то (и тогда при любой) параметризации $\alpha : I \to \mathbf{L}$ композиция $\varphi\circ\alpha : I \to Y$ нестабильна всюду,

$$\forall s \in I \;\; \mathsf{J}(\varphi\circ\alpha)(s) = 0, \tag{18.1.46}$$

  то мы говорим, что *отображение φ вырождено на гиперповерхности* $\mathbf{L}$.

Лемма 18.1.7. *Пусть $\varphi : X \hookrightarrow Y$ – гладкое отображение евклидовых пространств, вырожденное на ориентированной гиперповерхности $\mathbf{L} \subseteq \mathsf{D}(\varphi)$ размерности n. Тогда образ $\varphi(|\mathbf{L}|)$ носителя гиперповерхности $\mathbf{L}$ является носителем некоей вырожденной ориентированной гиперповерхности $\varphi(\mathbf{L})$ размерности n, и для всякой дифференциальной формы ω степени n на $\varphi(\mathbf{L})$ справедливо равенство*

$$\int_{\varphi(\mathbf{L})} \omega = 0 = \int_{\mathbf{L}} \varphi^*\omega \tag{18.1.47}$$

Доказательство. При какой-то параметризации $\alpha : I \to \mathbf{L}$ композиция $\varphi\circ\alpha : I \to Y$ должна быть нестабильна всюду,

$$\forall s \in I \;\; \mathsf{J}(\varphi\circ\alpha)(s) = 0. \tag{18.1.48}$$

Отсюда следует, что образ

$$\varphi(|\mathbf{L}|) = \varphi(\alpha(I))$$

совпадает с образом границы $\mathsf{Fr}(I)$ множества I при отображении $\varphi\circ\alpha$:

$$\varphi(|\mathbf{L}|) = \varphi\big(\alpha(I)\big) = \varphi\Big(\alpha\big(\mathsf{Fr}(I)\big)\Big).$$

Как следствие, можно считать, что множество $\varphi(|\mathbf{L}|)$ параметризовано отображением $(\varphi\circ\alpha)|_{\mathsf{Fr}(I)}$: $\mathsf{Fr}(I)\to\varphi(|\mathbf{L}|)$. Поскольку область определения $\mathsf{Fr}(I)$ имеет нулевую меру Жордана, мы можем считать, что $\varphi(|\mathbf{L}|)$ — вырожденная параметризованная гиперповерхность. Обозначим ее $\varphi(\mathbf{L})$. Тогда для всякой формы ω мы получим

$$\int_{\varphi(\mathbf{L})}\omega=0=\int_I \underbrace{\mathsf{J}\,\alpha(t)}_{\substack{\| \, (18.1.48)\\ 0}}\left[\varphi^*\omega(\alpha(t))\right]\mathsf{d}\,t=(18.1.39)=\int_{\mathbf{L}}\varphi^*\omega$$

□

- Если при какой-то (и тогда при любой) параметризации $\alpha:I\to\mathbf{L}$ композиция $\varphi\circ\alpha:I\to Y$ является параметризованной полурегулярной гиперповерхностью, то мы говорим, что *отображение φ полурегулярно на гиперповерхности* $\mathbf{L}$.

Лемма 18.1.8. *Пусть $\varphi:X\hookrightarrow Y$ – гладкое отображение евклидовых пространств, полурегулярное на ориентированной гиперповерхности $\mathbf{L}\subseteq\mathsf{D}(\varphi)$ размерности n. Тогда образ $\varphi(|\mathbf{L}|)$ носителя гиперповерхности $\mathbf{L}$ является носителем некоей вырожденной ориентированной гиперповерхности $\varphi(\mathbf{L})$ размерности n такой, что для всякой дифференциальной формы ω степени n на $\varphi(\mathbf{L})$ справедливо равенство*

$$\int_{\varphi(\mathbf{L})}\omega=\int_{\mathbf{L}}\varphi^*\omega \tag{18.1.49}$$

Доказательство. Пусть $\alpha:I\to\mathbf{L}$ – параметризация, для которой композиция $\varphi\circ\alpha:I\to Y$ является параметризованной полурегулярной гиперповерхностью. Тогда образ этого отображения $\varphi\big(\alpha(I)\big)=\varphi(\mathbf{L})$ сразу наделяется структурой ориентированной гиперповерхности. Обозначим ее $\varphi(\mathbf{L})$. Тогда для всякой формы ω мы получим

$$\begin{aligned}\int_{\varphi(\mathbf{L})}\omega&=(18.1.39)=\int_I \mathsf{J}\left((\varphi\circ\alpha)(t)\right)\Big[\omega\big((\varphi\circ\alpha)(t)\big)\Big]\mathsf{d}\,t=\\&=\int_I\omega((\varphi\circ\alpha)(t)))\big[\,\mathsf{d}(\varphi\circ\alpha)(t)[e_1],...,\mathsf{d}(\varphi\circ\alpha)(t))[e_n]\big]\,\mathsf{d}\,t=(14.2.133)=\\&=\int_I\omega\Big(\varphi\big(\alpha(t)\big)\Big)\Big[\,\mathsf{d}\,\varphi(\alpha(t))\big[\,\mathsf{d}\,\alpha(t)[e_1]\big],...,\mathsf{d}\,\varphi(\alpha(t))\big[\,\mathsf{d}\,\alpha(t)[e_n]\big]\Big]\,\mathsf{d}\,t=(18.1.23)=\\&=\int_I\varphi^*\omega\big(\alpha(t)\big)\big[\,\mathsf{d}\,\alpha(t)[e_1],...,\mathsf{d}\,\alpha(t)[e_n]\big]\,\mathsf{d}\,t=\int_{\mathbf{L}}\varphi^*\omega\end{aligned}$$

□

- Пусть существует разбиение $\mathcal{T}$ ориентированной гиперповерхности $\mathbf{L}$

$$\mathbf{L}\equiv\bigsqcup_{\mathbf{T}\in\mathcal{T}}\mathbf{T}$$

  на каждой компоненте которого $\mathbf{T}$ отображение φ либо вырождено, либо полурегулярно. Тогда мы говорим, что *отображение φ квазирегулярно на гиперповерхности* $\mathbf{L}$.

Лемма 18.1.9. *Пусть $\varphi:X\hookrightarrow Y$ – гладкое отображение евклидовых пространств, квазирегулярное на ориентированной гиперповерхности $\mathbf{L}\subseteq\mathsf{D}(\varphi)$ размерности n. Тогда образ $\varphi(|\mathbf{L}|)$ носителя гиперповерхности $\mathbf{L}$ является носителем некоей составной ориентированной гиперповерхности $\mathcal{M}$ размерности n, такой, что для всякой дифференциальной формы ω степени n на $\varphi(|\mathbf{L}|)$ справедливо равенство*

$$\int_{\mathcal{M}}\omega=\int_{\mathbf{L}}\varphi^*\omega \tag{18.1.50}$$

Доказательство. Пусть $\mathcal{T}$ – разбиение ориентированной гиперповерхности $\mathbf{L}$

$$\mathbf{L}\equiv\bigsqcup_{\mathbf{T}\in\mathcal{T}}\mathbf{T} \tag{18.1.51}$$

на каждой компоненте которого $\mathbf{T}$ отображение φ вырождено или полурегулярно. Тогда по леммам 18.1.7 и 18.1.8, каждая гиперповерхность $\mathbf{T}$ превращается в гиперповерхность $\varphi(\mathbf{T})$, для которой будет справедлива формула (18.1.49). Обозначим символом $\mathcal{M}$ систему ориентированных гиперповерхностей $\varphi(\mathbf{T})$, $\mathbf{T}\in\mathcal{T}$. Это будет составная ориентированная гиперповерхность в Y. Для нее мы получим:

$$\int_{\mathcal{M}}\omega=(18.1.45)=\sum_{\mathbf{T}\in\mathcal{T}}\int_{\varphi(\mathbf{T})}\omega=(18.1.49)=\sum_{\mathbf{T}\in\mathcal{T}}\int_{\mathbf{T}}\varphi^*\omega=(18.1.51)=\int_{\mathbf{L}}\varphi^*\omega.$$

□

- Понятно, что составная кривая $\mathcal{M}$ в лемме 18.1.9 определяется с точностью до эквивалентности составных гиперповерхностей. Если (дополнительно к тому, что φ квазирегулярно на $\mathbf{L}$) существует ориентированная гиперповерхность $\mathbf{M}$, эквивалентная составной ориентированной гиперповерхности $\mathcal{M}$, то есть такая, что

$$\int_{\mathcal{M}}\omega=\int_{\mathbf{M}}\omega, \tag{18.1.52}$$

для всякой формы ω степени n на $|\mathbf{M}|$, то мы будем обозначать эту гиперповерхность $\mathbf{M}$ символом $\varphi(\mathbf{L})$ и называть ее *образом* ориентированной гиперповерхности $\mathbf{L}$ при квазирегулярном отображении φ, а само отображение φ – *преобразованием гиперповерхности* $\mathbf{L}$ *в составную гиперповерхность* $\varphi(\mathbf{L})$. Обозначаться это будет записью

$$\varphi:\mathbf{L}\rightsquigarrow\varphi(\mathbf{L}).$$

Теорема 18.1.10. *Пусть $\varphi: X\hookrightarrow Y$ – гладкое отображение евклидовых пространств, преобразующее ориентированную гиперповерхность $\mathbf{L}\subseteq \mathsf{D}(\varphi)$ размерности n в ориентированную гиперповерхность $\varphi(\mathbf{L})$ (той же размерности n),*

$$\varphi:\mathbf{L}\rightsquigarrow\varphi(\mathbf{L}).$$

Тогда для всякой дифференциальной формы ω степени n на $\varphi(|\mathbf{L}|)$ справедливо равенство

$$\int_{\varphi(\mathbf{L})}\omega=\int_{\mathbf{L}}\varphi^*\omega \tag{18.1.53}$$

Доказательство. Здесь просто применяются формулы (18.1.50) и (18.1.52):

$$\int_{\varphi(\mathbf{L})}\omega=(18.1.52)=\int_{\mathcal{M}}\omega=(18.1.50)=\int_{\mathbf{L}}\varphi^*\omega.$$

□

§ 2 Формулы Грина, Стокса и Гаусса-Остроградского

Вспомним формулу Ньютона-Лейбница (7.3.131), обсуждавшуюся в главе 8, и считающуюся главным инструментом Анализа. Ее можно записать в виде

$$\int_a^b f'(x)\,\mathsf{d}\,x=f(b)-f(a),$$

где f – произвольная гладкая функция на отрезке $[a,b]$.

Это равенство естественно обобщается на многомерный случай до следующей формулы:

$$\int_{\mathbf{L}}\mathsf{d}\,\omega=\int_{\partial\mathbf{L}}\omega, \tag{18.2.54}$$

В ней ω – дифференциальная форма степени m на открытом множестве $U\subseteq X$ ($m+1\leqslant n$), а $\mathbf{L}\subseteq U$ – гиперповерхность размерности $m+1$, а $\partial\mathbf{L}$ – гиперповерхность размерности m, называемая краем гиперповерхности $\mathbf{L}$ (аккуратные определения мы приведем ниже). В наиболее важных частных частных случаях равенство (18.2.54) имеет следующие специальные названия:

— при $m=1$ и $n=2$ его называют формулой Грина;

— при $m=1$ и $n=3$ – формулой Стокса;

— при $m=2$ и $n=3$ – формулой Гаусса-Остроградского.

А в самом общем виде его называют (опять) *формулой Стокса.* В этом параграфе мы обсуждаем все эти результаты.

(a) Ориентация области

Полурегулярные области.

- Условимся компактную область D в евклидовом пространстве X размерности n называть *полурегулярной*, если ее граница $\mathsf{Fr}\,D$ является скалярной гиперповерхностью в X (то есть является образом некоторой параметризованной гиперповерхности в соответствии с определением на с.1069) размерности $k = n - 1$.

Теорема 18.2.1. *Всякая полурегулярная область D в ориентированном евклидовом пространстве X является измеримым по Жордану компактом в X.*

Доказательство. Граница $\mathsf{Fr}(D)$ области D является образом $\alpha(I)$ некоего полурегулярного отображения $\alpha : I \to X$, определенного на множестве I в пространстве $\mathbb{R}^{n-1}$ размерности, на единицу меньшей, чем размерность n пространства X. Значит по теореме Сарда 15.3.6, множество $\mathsf{Fr}(D) = \alpha(I)$ должно иметь нулевую жорданову меру. Это и означает, что D измеримо по Жордану. □

Теорема 18.2.2 (о выпрямлении границы полурегулярной области)**.** *Пусть D – полурегулярная область в евклидовом пространстве X размерности n, и $\alpha : \mathbb{R}^{n-1} \hookrightarrow \mathsf{Fr}\,D$ – параметризация ее границы $\mathsf{Fr}\,D$. Тогда для всякого регулярного параметра*[3] *$r \in \mathsf{D}_{\mathsf{reg}}(\alpha)$ существуют два открытых множества $V \subseteq \mathbb{R}^n$ и $U \subseteq X$ и диффеоморфизм $\varphi : V \to U$ со следующими свойствами:*

(i) *множество V является открытым шаром в $\mathbb{R}^n$ с центром в точке $(r, 0)$, а множество $W = \{s \in \mathbb{R}^{n-1} : \ (s, 0) \in V\}$ является открытым шаром в $\mathbb{R}^{n-1}$, содержащим точку r и содержащимся в $\mathsf{D}_{\mathsf{reg}}(\alpha)$:*
$$r \in W \subseteq \mathsf{D}_{\mathsf{reg}}(\alpha) \tag{18.2.55}$$

(ii) *справедливо тождество*
$$\varphi(s, 0) = \alpha(s), \qquad s \in W \tag{18.2.56}$$

(iii) *множество $\mathsf{Fr}(D) \cap U$ является образом множества*
$$V_0 = V \cap \{(s, 0); \ s \in \mathbb{R}\} = W \times \{0\}$$
при отображении φ:
$$\mathsf{Fr}(D) \cap U = \varphi(V_0) = \alpha(W) \tag{18.2.57}$$

(iv) *множество $\mathsf{Int}(D) \cap U$ является образом какого-то из множеств*
$$V_+ = V \cap \{(s, t) \in \mathbb{R}^2; \ t > 0\}, \qquad V_- = V \cap \{(s, t) \in \mathbb{R}^2; \ t < 0\}$$
при отображении φ:
$$\mathsf{Int}(D) \cap U = \varphi(V_+) \qquad \bigvee \qquad \mathsf{Int}(D) \cap U = \varphi(V_-). \tag{18.2.58}$$

Доказательство. Поскольку $r \in \mathsf{D}(\alpha)$ – регулярный параметр, он должен быть внутренней точкой в $\mathsf{D}(\alpha)$, и производная отображения α в этой точке должна быть ненулевой:
$$r \in \mathsf{Int}(\mathsf{D}(\alpha)), \qquad \alpha'(r) \neq 0.$$

Это значит, что мы можем применить лемму 14.2.17, согласно которой существует линейное инъективное отображение $\theta : \mathbb{R} \to X$, такое, что $(r, 0)$ будет точкой стабильности отображения
$$\varphi : \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R} \hookrightarrow X, \qquad \varphi(s, t) = \alpha(t) + \theta(u), \qquad s \in \mathsf{D}_{\mathsf{reg}}(\alpha) \subseteq \mathbb{R}^{n-1}, \ t \in \mathbb{R}.$$

После этого мы применяем теорему о локальном обратном отображении 14.2.13: существуют открытые множества $V \subseteq \mathbb{R}^2$ и $W \subseteq X$ такие, что $z = \alpha(r) = \varphi(r, 0) \in V$, и φ является диффеоморфизмом между V и W.

Затем небольшими корректировками, уменьшая при необходимости V и U, мы можем добиться выполнения условий (i)-(iv).

1. Прежде всего, в качестве V можно выбрать шар с центром в точке $(r, 0)$ (достаточно малого радиуса). Тогда множество $W = \{s \in \mathbb{R} : \ (s, 0) \in V\}$ будет открытым интервалом и автоматически будет удовлетворять включению (18.2.55).

[3] Понятие регулярного параметра было определено на с.949.

2. Тождество (18.2.56) сразу следует из определения φ.

3. Для того, чтобы выполнялось (18.2.57), нужно, чтобы множество U не пересекалось ни с какими другими частями границы $\mathsf{Fr}(D)$, кроме той ее части, которая представляет собой $\alpha(W)$. Чтобы этого добиться, нужно выбросить из U замкнутое множество $\alpha(\mathsf{D}(\alpha)\setminus W)$: мы получим некое открытое множество

$$U' = U \setminus \alpha(\mathsf{D}(\alpha)\setminus W).$$

Поскольку все точки $s \in W$ – регулярные параметры, у них нет парных точек в $\mathsf{D}(\alpha)\setminus W$:

$$\nexists\ s' \in \mathsf{D}(\alpha)\setminus W: \qquad \alpha(s) = \alpha(s').$$

Это означает, что при такой процедуре множество $\alpha(W)$ из U не выбрасывается, и поэтому

$$\alpha(W) \subseteq U'.$$

Если теперь положить

$$V' = \varphi^{-1}(U'),$$

то мы получим, что φ является диффеоморфизмом между открытыми множествами V' и U', причем U' уже будет пересекаться с $\mathsf{Fr}(D) = \alpha(\mathsf{D}(\alpha))$ только по множеству $\alpha(W)$. После этого нужно выбрать какой-нибудь открытый шар V'' с центром в точке $(r,0)$, содержащийся в V', положить $U'' = \varphi(V'')$, и заменить V на V'' и U на U''.

4. Предположим, что условия (i)-(iii) уже выполнены. Чтобы добиться (18.2.58), зафиксируем шар V' с центром в $(r,0)$ но меньшим диаметром, чем у V, так, чтобы замыкание V' лежало в V:

$$\overline{V'} \subseteq V.$$

Пусть V'_0 – горизонтальное сечение шара V':

$$V'_0 = V' \cap \{(s,0);\ s \in \mathbb{R}^{n-1}\}$$

Рассмотрим теперь открытое множество $\mathsf{Int}\,D$. Пересекаясь с U оно дает открытое множество $\mathsf{Int}\,D \cap U$. Его граница, пересекаясь с U', есть пересечение границы $\mathsf{Int}\,D$ с U', поэтому

$$\mathsf{Fr}(\mathsf{Int}\,D \cap U) \cap U' = \mathsf{Fr}(\mathsf{Int}\,D) \cap U' = \mathsf{Fr}(D) \cap U' = \varphi(V'_0)$$

Это значит, что множество $\mathsf{Int}\,D \cap U$ отражается в V как некое открытое множество $\varphi^{-1}(\mathsf{Int}\,D \cap U)$, граница которого в пересечении с шаром V' представляет собой горизонтальное сечение V'_0 этого шара. Понятно, что множество $\varphi^{-1}(\mathsf{Int}\,D \cap U)$ пересекаясь с V' должно давать либо верхний, либо нижний полушар. Это и есть условия (18.2.58), только с подставленным V' вместо V. □

Ориентированные области.

- Пусть D – область в евклидовом пространстве X. Мы будем говорить, что полурегулярная кривая $\beta : [0,1] \to X$ *на невырожденном начальном отрезке проходит по области* D, если существует $\varepsilon > 0$ такой что
$$\beta([0,\varepsilon]) \subseteq D.$$
- Пусть X – двумерное ориентированное евклидово пространство, $\alpha : I \to X$ – полурегулярная кривая, $r \in \mathsf{D}_{\mathsf{reg}}(\alpha)$ – ее регулярный параметр и $x = \alpha(r)$ – соответствующая точка ее носителя. Условимся говорить, что полурегулярная *кривая* $\beta : [0,1] \to X$ *положительно трансверсальна гиперповерхности* α *в точке* x, если выполняются следующие два условия:
  - (a) кривая β выходит из точки x:
  $$\beta(0) = x;$$
  - (b) Якобиан (или, эквивалентно, производная) кривой β в точке 0 (ненулевая и) образует в конкатенации[4] с Якобианом гиперповерхности α в точке r положительно ориентированный[5] поливектор в X:
  $$\mathsf{J}\,\alpha(r) \vee \beta'(0) > 0.$$
- По аналогии определяется *кривая* $\beta : [0,1] \to X$ *отрицательно трансверсальная гиперповерхности* α *в точке* x: здесь условие (b) заменяется условием
  - (b') Якобиан (производная) кривой β в точке 0 (ненулевая и) образует в конкатенации с Якобианом гиперповерхности α в точке r отрицательно ориентированный[6]

[4]Напомним, что конкатенация поливекторов была определена в теореме 12.5.10.
[5]Положительно ориентированные бивекторы были определены на с.752.
[6]Отрицательно ориентированные бивекторы были определены на с.752.

поливектор в X:

$$\mathsf{J}\,\alpha(r)\vee\beta'(0)<0.$$

Теорема 18.2.3. *Пусть D – полурегулярная область в ориентированном евклидовом пространстве X, $\alpha : I \to \mathsf{Fr}\,D$ – параметризация ее границы $\mathsf{Fr}\,D$, $r \in \mathsf{D}_{\mathsf{reg}}(\alpha)$ – регулярный параметр и $x=\alpha(r)$. Тогда следующие условия эквивалентны:*

- (i) *существует кривая $\beta : [0,1] \to X$, положительно трансверсальная гиперповерхности α в точке x, и на невырожденном начальном отрезке проходящая по области D;*
- (ii) *любая кривая $\beta : [0,1] \to X$, положительно трансверсальная гиперповерхности α в точке x, на невырожденном начальном отрезке проходит по области D;*
- (iii) *существует параметризованный отрезок[7] $[x,y]$ $y \in X$, положительно трансверсальный гиперповерхности α в точке x, и на невырожденном начальном отрезке проходящий по области D;*
- (iv) *любой параметризованный отрезок $[x,y]$ $y \in X$, положительно трансверсальный гиперповерхности α в точке x, на невырожденном начальном отрезке проходит по области D.*

- Пусть D – полурегулярная область в ориентированном евклидовом пространстве X, и $\alpha : I \to \mathsf{Fr}\,D$ – параметризация ее границы $\mathsf{Fr}\,D$. Будем говорить, что гиперповерхность α *обходит область D в положительном направлении*, если для любого регулярного параметра $r \in \mathsf{D}_{\mathsf{reg}}(\alpha)$ выполняются условия (i)-(iv) теоремы 18.2.3.

Доказательство. Здесь нужно немного усложнить рассуждения теоремы 18.2.2. Рассмотрим диффеоморфизм $\varphi : V \to U$ с описанными там свойствами:

$$\varphi : \mathbb{R}^{n-1}\times\mathbb{R} \hookrightarrow X, \qquad \varphi(s,t)=\alpha(t)+\theta(u), \qquad (s,t)\in V\subseteq X.$$

Тот факт, что $(s,0)$ является точкой стабильности этого отображения, означает, что его Якобиан отличен от нуля:

$$\mathsf{J}\,\varphi(s,0)\neq 0.$$

Если он отрицателен, то, заменив θ на $-\theta$, мы можем сделать так, чтобы он стал положительным. Поэтому можно считать, что

$$\mathsf{J}\,\varphi(s,0)>0. \tag{18.2.59}$$

Затем нужно построить V и U как в теореме 18.2.2, но, при необходимости, уменьшить V так, чтобы неравенство (18.2.59) распространялось на все это множество:

$$\mathsf{J}\,\varphi(x)>0, \qquad x\in V. \tag{18.2.60}$$

После этого каждое из условий (i)-(iv) будет эквивалентно тому, что в альтернативе (18.2.58) выполняется первое утверждение:

$$\mathsf{Int}(D)\cap U=\varphi(V_+).$$

□

Двойственное утверждение доказывается аналогично:

Теорема 18.2.4. *Пусть D – полурегулярная область в ориентированном евклидовом пространстве X, $\alpha : I \to \mathsf{Fr}\,D$ – параметризация ее границы $\mathsf{Fr}\,D$, $r \in \mathsf{D}_{\mathsf{reg}}(\alpha)$ – регулярный параметр и $x=\alpha(r)$. Тогда следующие условия эквивалентны:*

- (i) *существует кривая $\beta : [0,1] \to X$, отрицательно трансверсальная гиперповерхности α в точке x, и на невырожденном начальном отрезке проходящая по области D;*
- (ii) *любая кривая $\beta : [0,1] \to X$, отрицательно трансверсальная гиперповерхности α в точке x, на невырожденном начальном отрезке проходит по области D;*
- (iii) *существует параметризованный отрезок $[x,y]$ $y \in X$, отрицательно трансверсальный гиперповерхности α в точке x, и на невырожденном начальном отрезке проходящий по области D;*

[7] Параметризованный отрезок был определен на с.979.

(iv) *любой параметризованный отрезок $[x, y]$ $y \in X$, отрицательно трансверсальный гиперповерхности α в точке x, на невырожденном начальном отрезке проходит по области D.*

- Пусть D – полурегулярная область в двумерном ориентированном евклидовом пространстве X, и $\alpha : I \to \mathsf{Fr}\, D$ – параметризация ее границы $\mathsf{Fr}\, D$. Будем говорить, что кривая α *обходит область D в отрицательном направлении*, если для любого регулярного параметра $r \in \mathsf{D}_{\mathsf{reg}}(\alpha)$ выполняются условия (i)-(iv) теоремы 18.2.4.

Из теоремы о функции перехода 16.1.2 сразу следует

Теорема 18.2.5. *Пусть $\alpha : I \to \mathsf{Fr}(D)$ и $\beta : J \to \mathsf{Fr}(D)$ – две сонаправленные параметризованные кривые, параметризующие границу $\mathsf{Fr}(D)$ области D в двумерном ориентированном векторном пространстве X, тогда*

— *если α обходит D в положительном направлении, то и β обходит D в положительном направлении, и наоборот,*

— *если α обходит D в отрицательном направлении, то и β обходит D в отрицательном направлении.*

- Пусть D – полурегулярная область в ориентированном евклидовом пространстве X, причем

  1) на границе $\mathsf{Fr}\, D$ области D, как на гиперповерхности, задана ориентация, превращающая $\mathsf{Fr}\, D$ в носитель некоей параметризованной гиперповерхности
  $$\mathsf{Fr}(D) = \mathsf{R}(\mathbf{L}),$$

  2) какая-нибудь (и тогда, по теореме 18.2.5, любая) параметризация $\alpha : I \to \mathbf{L}$, согласованная с ориентацией гиперповерхности $\mathbf{L}$, обходит область D в положительном (соответственно, отрицательном) направлении.

  Тогда область D называется *положительно* (соответственно, *отрицательно*) *ориентированной областью в X*, а гиперповерхность $\mathbf{L}$ – ее краем, и обозначается это так:
  $$\partial D = \mathbf{L}$$

  Как следствие, *параметризацией края ∂D* обыкновенной области D называется всякая параметризация $\alpha : I \to \partial D$ ориентированной гиперповерхности $\partial D = \mathbf{L}$, согласованная с ее ориентацией. Понятно, что носитель края D совпадает с границей области D:
  $$\mathsf{R}(\partial D) = \mathsf{Fr}(D)$$

- Область D в X называется *ориентируемой*, если существует ориентированная гиперповерхность $\mathbf{L}$ с этими свойствами.

Теорема 18.2.6. *Пусть D – положительно ориентированная область в ориентированном евклидовом пространстве X и $\alpha : I \to \partial D$ – параметризация ее края. Тогда для всякого регулярного параметра $r \in I$ найдется параллелепипед P в $\mathbb{R}^{n-1}$, число $h > 0$ и регулярное отображение $\tau : T \to X$, где $T = P \times [0, h]$, со следующими свойствами:*

(i) *параллелепипед P содержит r как внутреннюю точку и содержится в компакте I:*
$$r \in \mathsf{Int}\, P \subseteq P \subseteq I. \tag{18.2.61}$$

(ii) *ограничение $\tau\Big|_{[a,b]\times\{0\}}$ отображения τ на нижнее ребро $P \times \{0\}$ параллелепипеда $T = P \times [0, h]$ совпадает с α:*
$$\tau(s, 0) = \alpha(s), \qquad t \in P; \tag{18.2.62}$$

(iii) *образ $Q = \tau(T)$ отображения τ содержится в D:*
$$Q = \tau(T) \subseteq D; \tag{18.2.63}$$

(iv) *Якобиан отображения τ всюду положителен,*
$$\mathsf{J}\, \tau(x) > 0, \qquad x \in T; \tag{18.2.64}$$

(v) *найдется открытое множество $U \subseteq X$, содержащее точку $z = \alpha(r)$, такое, что*

$$D \cap U = Q \cap U, \tag{18.2.65}$$

и, как следствие,

$$\mathsf{Fr}(D) \cap U = \mathsf{Fr}(Q) \cap U. \tag{18.2.66}$$

Доказательство. Построим как в теореме 18.2.3 шар V с центром в точке $(r, 0)$ и диффеоморфизм $\varphi : V \to U$ с положительным Якобианом

$$\mathsf{J}\,\varphi(x) > 0, \qquad x \in V$$

так, чтобы часть области $\mathsf{Int}\, D$, пересекающаяся с U, была образом верхней половинки круга V:

$$\mathsf{Int}(D) \cap U = \varphi(V_+), \qquad V_+ = V \cap \{(s,t) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R};\ t > 0\}.$$

Тогда произвольный прямоугольник $T = P \times [0,h] \subseteq V$ с $r \in \mathsf{Int}(P)$ будет обладать свойствами (i)-(v). □

(b) Формулы Стокса

Формула Грина. Пусть U – открытое множество на плоскости $\mathbb{R}^2$ и

$$\omega(x,y) = P(x,y)\ \mathsf{d}\,x + Q(x,y)\ \mathsf{d}\,y$$

– дифференциальная форма степени 1 на U. Напомним, что ее дифференциалом будет форма степени 2

$$\mathsf{d}\,\omega(x,y) = (\nabla_1 Q(x,y) - \nabla_2 P(x,y)) \cdot \mathsf{d}\,x \wedge \mathsf{d}\,y, \qquad (x,y) \in U$$

Теорема 18.2.7 (Грин)**.** *Пусть D – положительно ориентированная область в $\mathbb{R}^2$. Для любой дифференциальной формы ω степени 1 на D справедлива формула, которую принято называть* формулой Грина*:*

$$\boxed{\oint_{\partial D} \omega = \int_D \mathsf{d}\,\omega} \tag{18.2.67}$$

В координатной записи она выглядит так:

$$\boxed{\oint_{\partial D} P(x,y)\ \mathsf{d}\,x + Q(x,y)\ \mathsf{d}\,y = \iint_D (\nabla_1 Q(x,y) - \nabla_2 P(x,y))\,\mathsf{d}\,x\,\mathsf{d}\,y} \tag{18.2.68}$$

Напомним, что на с.893 мы условились символом $\mathsf{E}_k(S)$ обозначать объединение инцидентных клеток двоичной сетки ранга k для S. Если еще раз применить эту операцию к множеству $\mathsf{E}_k(S)$, то мы получим множество $\mathsf{E}_k\big(\mathsf{E}_k(S)\big)$, являющееся объединением инцидентных клеток двоичной сетки ранга k для $\mathsf{E}_k(S)$. В следующих двух леммах нас будут интересовать свойства этого множества. Заметим сразу, что меры множеств $\mathsf{E}_k(S)$ и $\mathsf{E}_k\big(\mathsf{E}_k(S)\big)$ связаны неравенством

$$\mu\Big(\mathsf{E}_k\big(\mathsf{E}_k(S)\big)\Big) \leqslant 9\mu\big(\mathsf{E}_k(S)\big), \tag{18.2.69}$$

потому что всякая клетка Q нашей сетки имеет ровно 9 инцидентных ей клеток на плоскости $\mathbb{R}^2$ (и значит, переход ко второму инцидентному клеточному множеству может увеличить площадь не более чем в 9 раз).

Лемма 18.2.8. *Если S – вырожденная кривая в $\mathbb{R}^2$, то мера множества $\mathsf{E}_k\big(\mathsf{E}_k(S)\big)$ в $\mathbb{R}^2$ асимптотически оценивается соотношением*

$$\mu\Big(\mathsf{E}_k\big(\mathsf{E}_k(S)\big)\Big) = \underset{k\to\infty}{\mathbf{o}}\Big(\frac{1}{2^k}\Big), \tag{18.2.70}$$

или, что то же самое, соотношением

$$2^k \cdot \mu\Big(\mathsf{E}_k\big(\mathsf{E}_k(S)\big)\Big) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0 \tag{18.2.71}$$

Доказательство. В силу неравенства (18.2.69), нам достаточно доказать более простое соотношение

$$2^k \cdot \mu\big(\,\mathsf{E}_k(S)\big) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0 \tag{18.2.72}$$

Рассмотрим какую-нибудь параметризацию $\alpha : I \to S$ кривой S, в которой, в силу следствия 15.3.13, множество I должно иметь нулевую жорданову меру

$$\mu(I) = 0.$$

И пусть C – константа Липшица для отображения $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$.

Зафиксируем $k \in \mathbb{N}$ и обозначим $h = \frac{1}{2^k}$. Рассмотрим в $\mathbb{R}$ тоже двоичную сетку ранга k и пусть $J_1, ..., J_p$ – система двоичных клеток, инцидентных I:

$$I \subseteq J_1 \cup ... \cup J_p$$

(число p, понятно, зависит от h и поэтому от k). При отображении α образ каждого отрезка J_r имеет диаметр, не больший $C \cdot h$:

$$\mathsf{diam}\,\alpha(J_r) \leqslant C \cdot \mathsf{diam}\,J_r = C \cdot h$$

Отсюда следует, что каждое множество $\alpha(J_r)$ пересекается с не более чем $(C+2)^2$ клетками нашей трансверсальной сетки в $\mathbb{R}^2$ (потому что $\alpha(J_r)$ содержится в некотором квадрате со стороной $C \cdot h$):

$$\operatorname{card}\{Q : \ Q \cap \alpha(J_r) \neq \varnothing\} \leqslant (C+2)^2$$

Из этого мы получаем оценку (18.2.72):

$$2^k \cdot \mu\Big(\,\mathsf{E}_k(S)\Big) \leqslant 2^k \cdot \sum_{l=1}^{p} \sum_{Q:\ Q\cap\alpha(J_r)\neq\varnothing} \mu(Q) \leqslant 2^k \cdot \sum_{l=1}^{p} (C+2)^2 \cdot \frac{1}{4^k} = (C+2)^2 \cdot \frac{p}{2^k} =$$

$$= (C+2)^2 \cdot \sum_{l=1}^{p} \mu(J_r) = (C+2)^2 \cdot \mu\Big(\,\mathsf{E}_k(I)\Big) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

□

Лемма 18.2.9. *Пусть S – компакт в $\mathbb{R}^2$. Тогда найдется последовательность функций $\varphi_k \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2)$ со следующими свойствами:*

- *(i)* $0 \leqslant \varphi_k \leqslant 1$,
- *(ii)* $\varphi_k(x) = 1$ *в некоторой окрестности* U_k *множества* S,
- *(iii)* $\varphi_k(x) = 0$ *на множестве* $\mathbb{R}^2 \setminus \mathsf{E}_k\left(\mathsf{E}_k(S)\right)$,
- *(iv)* *дифференциалы функций* φ_k *удовлетворяют следующей оценке:*

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^2} |\mathsf{d}\,\varphi_k(x)| \leqslant C \cdot 2^k, \tag{18.2.73}$$

где $C > 0$ – константа, не зависящая от k.

Доказательство. Зафиксируем сначала какую-нибудь бесконечно гладкую функцию $\eta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ со следующими свойствами:

$$0 \leqslant \eta \leqslant 1, \qquad \eta(t) = \begin{cases} 1, & t \in [0,1] \\ 0, & t \notin \left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right) \end{cases}$$

Для всякой функции $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ обозначим через $T_m f$ ее сдвиг на число $m \in \mathbb{Z}$,

$$T_m f(x) = f(x-m), \qquad x \in \mathbb{R},$$

и заметим, что каждая функция $T_m\eta$, $m \in \mathbb{Z}$, равна единице на отрезке $[m, m+1]$, и что в окрестности $U_{\frac{1}{2}}(x)$ каждой фиксированной точки $x \in \mathbb{R}$ среди функций $\{T_m\eta;\ m \in \mathbb{Z}\}$ не более трех будут отличны от нуля:

$$T_m\eta\Big|_{[m,m+1]} = 1, \qquad \operatorname{card}\{m \in \mathbb{Z} : T_m\eta\Big|_{U_{\frac{1}{2}}(x)} \neq 0\} \leqslant 3. \tag{18.2.74}$$

Рассмотрим далее функцию $\zeta : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, определенную равенством

$$\zeta(x,y) = \eta(x) \cdot \eta(y)$$

Из (18.2.74) следует, что если ее сдвигать на векторы целочисленной решетки $\mathbb{Z}^2$, то, во-первых, каждая функция $T_{(m,n)}\zeta$, $m,n \in \mathbb{Z}$, равна единице на квадрате $[m,m+1]\times[n,n+1]$, и, во-вторых, из получающихся функций $\{T_{(m,n)}\zeta;\ m,n \in \mathbb{Z}\}$ в некоторой окрестности U каждой точки $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ отлично от нуля будет не более 9:

$$T_{(m,n)}\zeta\Big|_{[m,m+1]\times[n,n+1]} = 1, \qquad \operatorname{card}\{(m,n) \in \mathbb{Z}^2 : T_{(m,n)}\zeta\Big|_U \ne 0\} \leqslant 9. \tag{18.2.75}$$

Положим теперь

$$\zeta_k(x,y) = \zeta(2^k x, 2^k y) = \eta(2^k x)\cdot \eta(2^k y)$$

и для всякой клетки Q двоичной сетки ранга k обозначим через ζ_k^Q сдвиг функции ζ_k на вектор (m,n), где $m = \min_{(x,y)\in Q} x$, $n = \min_{(x,y)\in Q} y$:

$$\zeta_k^Q = T_{(m,n)}\zeta_k$$

Из (18.2.75) следует теперь, что на каждой клетке Q функция ζ_k^Q будет тождественной единицей, и в некоторой окрестности U каждой точки $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ отлично от нуля будет не более 9 функций вида ζ_k^Q:

$$\zeta_k^Q\Big|_Q = 1, \qquad \operatorname{card}\{(m,n) \in \mathbb{Z}^2 : \zeta_k^Q\Big|_U \ne 0\} \leqslant 9. \tag{18.2.76}$$

Отсюда в свою очередь следует, что корректно определена функция

$$\psi_k = \sum_Q \zeta_k^Q$$

(где суммирование берется по всем клеткам Q двоичной сетки ранга k), причем, эта функция ψ_k будет гладкой (потому что локально она представляет собой сумму не более 9 гладких функций). Вдобавок, из условий (18.2.76) следует, что ψ_k удовлетворяет оценке:

$$1 \leqslant \psi_k \leqslant 9 \tag{18.2.77}$$

Покажем теперь, что функции

$$\varphi_k = \frac{\sum_{Q\subseteq \mathsf{E}_k(S)} \zeta_k^Q}{\psi_k}$$

обладают нужными нам свойствами (в числителе суммирование берется по всем клеткам Q, инцидентным множеству S).

Свойство (i) очевидно, свойство (ii) следует из того, что φ_k равно единице всюду на множестве $\mathsf{E}_k(S)$, и значит, на множестве $U = \operatorname{\mathsf{Int}} \mathsf{E}_k(S) \supseteq S$. Свойство (iii) следует из того, что каждая функция ζ_k^Q обнуляется на всех клетках, не инцидентных Q. Чтобы доказать (iv), обозначим

$$B = \max_{t\in\mathbb{R}} |\eta'(t)|\,.$$

Тогда в каждой точке производная функции ζ по каждой переменной будет не больше B, и мы получаем цепочку:

$$|\nabla_1\zeta| \leqslant B, \qquad |\nabla_2\zeta| \leqslant B$$

$$\Downarrow$$

$$\left|\nabla_1\zeta_k^Q\right| \leqslant 2^k\cdot B, \qquad \left|\nabla_1\zeta_k^Q\right| \leqslant 2^k\cdot B$$

$$\Downarrow$$

$$\left|\mathsf{d}\,\zeta_k^Q\right| \leqslant 2^k\cdot B\cdot\sqrt{2} \tag{18.2.78}$$

$$\Downarrow \quad {\scriptstyle (18.2.76)}$$

$$|\mathsf{d}\,\psi_k| \leqslant 2^k\cdot B\cdot\sqrt{2}\cdot 9, \tag{18.2.79}$$

$$\Downarrow$$

$$|\mathsf{d}\,\varphi_k| = \left|\mathsf{d}\left(\frac{\sum_{Q\subseteq \mathsf{E}_k(S)}\zeta_k^Q}{\psi_k}\right)\right| = \left|\frac{\mathsf{d}\left(\sum_{Q\subseteq \mathsf{E}_k(S)}\zeta_k^Q\right)\cdot\psi_k - \left(\sum_{Q\subseteq \mathsf{E}_k(S)}\zeta_k^Q\right)\cdot \mathsf{d}\,\psi_k}{(\psi_k)^2}\right| =$$

$$= \left|\frac{\left(\sum_{Q\subseteq \mathsf{E}_k(S)}\mathsf{d}\,\zeta_k^Q\right)\cdot\psi_k - \left(\sum_{Q\subseteq \mathsf{E}_k(S)}\zeta_k^Q\right)\cdot \mathsf{d}\,\psi_k}{(\psi_k)^2}\right| \leqslant \frac{\left|\sum_{Q\subseteq \mathsf{E}_k(S)}\mathsf{d}\,\zeta_k^Q\right|\cdot|\psi_k| + \left|\sum_{Q\subseteq \mathsf{E}_k(S)}\zeta_k^Q\right|\cdot|\mathsf{d}\,\psi_k|}{|\psi_k|^2} \leqslant$$

$$\leqslant (18.2.76) \leqslant \frac{9\cdot \overbrace{\left|\mathsf{d}\,\zeta_k^Q\right|}^{\substack{2^k B\sqrt{2}\\ (18.2.78)\ \vee}}\cdot \overbrace{|\psi_k|}^{\substack{9\\ \vee\ (18.2.77)}} + 9\cdot \overbrace{\left|\zeta_k^Q\right|}^{\substack{1\\ \vee}}\cdot \overbrace{|\mathsf{d}\,\psi_k|}^{\substack{2^k B 9\sqrt{2}\\ \vee\ (18.2.79)}}}{\underbrace{|\psi_k|^2}_{\substack{\vee\ (18.2.77)\\ 1}}} \leqslant 2^k\cdot B\cdot\sqrt{2}\cdot 9^2 + 2^k\cdot B\cdot\sqrt{2}\cdot 9^2 = 2^k\cdot B\cdot\sqrt{2}\cdot 162,$$

и для (18.2.73) остается положить $C = B\cdot\sqrt{2}\cdot 162$. □

Лемма 18.2.10. *Формула Грина* (18.2.67) *верна для случая, когда область D представляет собой прямоугольник со сторонами, параллельными осям координат:*

$$D: \quad \begin{cases} a\leqslant x\leqslant b\\ c\leqslant y\leqslant d\end{cases}$$

Доказательство. Обозначим через A,B,C,D вершины нашего прямоугольника:

Докажем теперь формулу (18.2.68) на $\mathcal{D}$ для дифференциальных форм вида $\omega(x,y) = Q(x,y)\ \mathsf{d}\,y$:

$$\int_{\partial D} Q(x,y)\ \mathsf{d}\,y = \underbrace{\int_{AB} Q(x,y)\ \mathsf{d}\,y}_{\substack{\parallel\\ 0}} + \underbrace{\int_{BC} Q(x,y)\ \mathsf{d}\,y}_{\substack{\parallel\\ \int_c^d Q(b,y)\ \mathsf{d}\,y}} + \underbrace{\int_{CD} Q(x,y)\ \mathsf{d}\,y}_{\substack{\parallel\\ 0}} + \underbrace{\int_{DA} Q(x,y)\ \mathsf{d}\,y}_{\substack{\parallel\\ -\int_c^d Q(a,y)\ \mathsf{d}\,y}} =$$

$$= \int_c^d \Big[Q(b,y) - Q(a,y)\Big]\ \mathsf{d}\,y = \int_c^d\int_a^b \nabla_1 Q(x,y)\ \mathsf{d}\,x\,\mathsf{d}\,y = \iint_{\mathsf{R}(D)} \nabla_1 Q(x,y)\ \mathsf{d}\,x\,\mathsf{d}\,y$$

Точно также (18.2.68) доказывается на $\mathcal{D}$ для дифференциальных форм вида $\omega(x,y) = P(x,y)\ \mathsf{d}\,x$:

$$\int_{\partial D} P(x,y)\ \mathsf{d}\,x = \underbrace{\int_{AB} P(x,y)\ \mathsf{d}\,x}_{\substack{\parallel\\ \int_a^b P(x,c)\ \mathsf{d}\,x}} + \underbrace{\int_{BC} P(x,y)\ \mathsf{d}\,x}_{\substack{\parallel\\ 0}} + \underbrace{\int_{CD} P(x,y)\ \mathsf{d}\,x}_{\substack{\parallel\\ -\int_a^b P(x,d)\ \mathsf{d}\,x}} + \underbrace{\int_{DA} P(x,y)\ \mathsf{d}\,x}_{\substack{\parallel\\ 0}} =$$

$$= -\int_a^b \Big[P(x,d) - P(x,c)\Big]\ \mathsf{d}\,x = -\int_a^b\int_c^d \nabla_2 P(x,y)\ \mathsf{d}\,y\,\mathsf{d}\,x = -\iint_{\mathsf{R}(D)} \nabla_2 P(x,y)\ \mathsf{d}\,x\,\mathsf{d}\,y$$

Теперь, складывая формулы для $\omega(x,y) = P(x,y)\ \mathsf{d}\,x$ и для $\omega(x,y) = Q(x,y)\ \mathsf{d}\,y$, получаем (18.2.68) на прямоугольнике $\mathcal{D}$:

$$\oint_{\partial D} P(x,y)\ \mathsf{d}\,x + Q(x,y)\ \mathsf{d}\,y = \int_{\partial D} P(x,y)\ \mathsf{d}\,x + \int_{\partial D} Q(x,y)\ \mathsf{d}\,y =$$

$$= -\iint_{\mathsf{R}(D)} \nabla_2 P(x,y)\ \mathsf{d}\,x\,\mathsf{d}\,y + \iint_{\mathsf{R}(D)} \nabla_1 Q(x,y)\ \mathsf{d}\,x\,\mathsf{d}\,y = \iint_{\mathsf{R}(\mathcal{D})} \left(\nabla_1 Q(x,y) - \nabla_2 P(x,y)\right)\mathsf{d}\,x\,\mathsf{d}\,y$$

□

Следствие 18.2.11. *Формула Грина* (18.2.67) *верна для случая, когда D представляет собой правильную область, то есть имеет вид*

$$D: \quad \begin{cases} a \leqslant x \leqslant b \\ f(x) \leqslant y \leqslant g(x) \end{cases}$$

где f и g – гладкие функции на отрезке $[a,b]$, причем

$$f(x) \leqslant g(x), \qquad x \in [a,b].$$

Доказательство. Отображение

$$\varphi(x,y) = \big(x, (1-y)\cdot f(x) + y\cdot g(x)\big)$$

преобразует прямоугольник $I = [a,b]\times[0,1]$ в область D:

$$\varphi : I \rightsquigarrow D,$$

а край I в край D:

$$\varphi : \partial I \rightsquigarrow \partial D.$$

Для прямоугольников мы уже доказали нашу формулу, поэтому возникает цепочка:

$$\int_{\partial D}\omega = \int_{\varphi(\partial I)}\omega = (18.1.53) = \int_{\partial I}\varphi^*\omega = (\text{Лемма } 18.2.10) =$$
$$= \int_I \mathsf{d}(\varphi^*\omega) = (18.1.26) = \int_I \varphi^*(\mathsf{d}\,\omega) = (18.1.49) = \int_D \mathsf{d}\,\omega.$$

□

Лемма 18.2.12. *Формула Грина* (18.2.67) *верна для случая, когда D – произвольная область, но при некоторой параметризации ее края $\alpha : I \to \partial D$ форма ω обнуляется в некоторой окрестности U сингулярного носителя $\mathsf{R}_{\mathsf{sing}}(\alpha)$ кривой α.*

Доказательство. В этом случае для каждой точки $x \in D \cap \operatorname{supp}\omega$ выберем положительно ориентированную область $Q_x \subseteq D$ и параметризацию $\tau_x : T_x \to Q_x$ и открытое множество U_x, содержащее x по следующим правилам:

— если x – внутренняя точка области D, то в качестве Q_x мы выбираем какой-нибудь прямоугольник с центром в x, содержащийся во внутренности D и имеющий стороны, параллельные осям координат, затем полагаем $U_x = \operatorname{Int} Q_x$, $T_x = Q_x$ а через τ_x обозначаем тождественное отображение

$$\tau_x(z) = z, \qquad z \in T_x = Q_x,$$

— если же x лежит на границе области D, то мы пользуемся теоремой 18.2.6: подбираем область Q, открытое множество U и параметризацию $\tau : T \to Q$ с описанными там свойствами, и затем приписываем каждому из этих обозначений нижний индекс x:

$$D_x = D, \qquad T_x = T, \qquad U_x = U, \qquad \tau_x = \tau.$$

Далее заметим, что множество $D \cap \operatorname{supp}\omega$ компактно, а открытые множества U_x его покрывают:

$$D \cap \operatorname{supp}\omega \subseteq \bigcup_{x \in D\cap \operatorname{supp}\omega} U_x.$$

Отсюда следует, что из семейства $\{U_x\}$ можно выбрать конечное подпокрытие, то есть существует конечная последовательность точек $x_1, ..., x_m$ такая, что

$$D \cap \operatorname{supp}\omega \subseteq \bigcup_{i=1}^m U_{x_i}.$$

Зафиксируем эту последовательность $x_1, ..., x_m$ и обозначим

$$U_i = U_{x_i}, \qquad D_i = D_{x_i}, \qquad T_i = T_{x_i}, \qquad \tau_i = \tau_{x_i}.$$

Воспользуемся далее теоремой 14.1.33 и подберем гладкое разбиение единицы $\theta_1, ..., \theta_m$, комбинаторно подчиненное покрытию $U_1, ..., U_m$ множества $U = U_1 \cup ... \cup U_m \supseteq D \cap \operatorname{\mathsf{supp}} \omega$. Положим

$$\omega_i = \theta_i \cdot \omega,$$

тогда

$$\omega = \sum_{i=1}^{m} \omega_i, \qquad \operatorname{\mathsf{supp}} \omega_i \subseteq U_i,$$

и, в частности, поэтому, с одной стороны,

$$\omega_i\big|_{\mathsf{Fr}(D)} = \omega_i\big|_{\mathsf{Fr}(Q_i)},$$

а с другой,

$$\operatorname{\mathsf{supp}} \mathsf{d}\,\omega_i \subseteq U_i,$$

и поэтому

$$\mathsf{d}\,\omega_i\big|_D = \omega_i\big|_{Q_i}.$$

Вместе это дает цепочку

$$\underbrace{\int_{\partial D} \omega_i = \int_{\partial Q_i} \omega_i}_{\substack{\uparrow \\ \omega_i|_{\mathsf{Fr}(D)} = \omega_i|_{\mathsf{Fr}(Q_i)}}} = (18.1.42) = \underbrace{\int_{\partial T_i} \tau^* \omega_i = \int_{T_i} \mathsf{d}(\tau^* \omega_i)}_{\substack{\uparrow \\ \text{уже доказано,} \\ \text{поскольку } T_i \text{ – прямоугольник}}} = (18.1.26) =$$

$$= \int_{T_i} \tau^*(\mathsf{d}\,\omega_i) = (18.1.42) = \underbrace{\int_{D_i} \mathsf{d}\,\omega_i = \int_D \mathsf{d}\,\omega_i}_{\substack{\uparrow \\ \mathsf{d}\,\omega_i|_{Q_i} = \mathsf{d}\,\omega_i|_D}},$$

из которой мы получаем:

$$\int_{\partial D} \omega = \int_{\partial D} \sum_{i=1}^{m} \omega_i = \sum_{i=1}^{m} \int_{\partial D} \omega_i = \sum_{i=1}^{m} \int_D \mathsf{d}\,\omega_i = \int_D \sum_{i=1}^{m} \mathsf{d}\,\omega_i = \int_D \mathsf{d} \left(\sum_{i=1}^{m} \omega_i \right) = \int_D \mathsf{d}\,\omega$$

□

Доказательство теоремы 18.2.7. Нам остается случай, когда и область D и форма ω произвольны. Рассмотрим какую-нибудь кривую $\alpha : I \to \partial D$, параметризующую край D, и обозначим через J и S соответственно сингулярную область параметров и сингулярный носитель:

$$J = \mathsf{D}_{\mathsf{sing}}(\alpha), \qquad S = \mathsf{R}_{\mathsf{sing}}(\alpha)$$

Поскольку α – полурегулярное отображение, множество J имеет нулевую меру Жордана, и значит S – вырожденная кривая. Построим для нее последовательность функций $\{\varphi_k\}$, описанную в лемме 18.2.9, и положим

$$\omega_k = (1 - \varphi_k) \cdot \omega.$$

Каждая функция φ_k тождественно равна единице в некоторой окрестности множества S, поэтому каждая форма ω_k обнуляется в этой окрестности. Как следствие, для форм ω_k формула Грина уже доказана:

$$\oint_{\partial D} \omega_k = \int_D \mathsf{d}\,\omega_k$$

Поэтому для общего случая остается доказать два предельных перехода:

$$\oint_{\partial D} (\omega_k - \omega) = \oint_{\partial D} \varphi_k \cdot \omega \underset{k \to \infty}{\longrightarrow} 0 \tag{18.2.80}$$

и

$$\int_D \mathsf{d}(\omega_k - \omega) = \int_D \mathsf{d}(\varphi_k \cdot \omega) \underset{k \to \infty}{\longrightarrow} 0 \tag{18.2.81}$$

Начнем с (18.2.80). Обозначим $J = \mathsf{D}_{\mathsf{sing}}(\alpha)$. Зафиксируем $\varepsilon > 0$ и, пользуясь свойством 4^0 на с.900, подберем открытое измеримое множество $U \subseteq \mathbb{R}$ со свойствами

$$J \subseteq U, \quad \mu(U) < \varepsilon.$$

Обозначим далее $J_k = \alpha^{-1}(\mathsf{E}_k(S))$, и заметим, что

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} J_k = \bigcap_{k=1}^{\infty} \alpha^{-1}\big(\mathsf{E}_k(S)\big) = \alpha^{-1}\Big(\bigcap_{k=1}^{\infty} \mathsf{E}_k(S)\Big) = \alpha^{-1}(S) = J$$

То есть, пользуясь терминологией главы 13, можно сказать, что компакты J_k стягиваются к компакту J. Значит, по теореме 13.3.9 почти все J_k содержатся в U:

$$\exists k_0 \in \mathbb{N} \qquad \forall k \geqslant k_0 \qquad J_k \subset U$$

Для таких k мы получаем:

$$\operatorname{supp} \varphi_k \circ \alpha \subseteq J_k \subset U,$$

поэтому, если обозначить $A = \max_{t \in I} \big|\omega(\alpha(t))\langle\alpha'(t)\rangle\big|$, то мы получим оценку, справедливую для почти всех k:

$$\left|\oint_{\partial D} \varphi_k \cdot \omega\right| = \left|\int_I \underbrace{\varphi_k(\alpha(t))}_{\substack{\parallel \\ 0, \\ \text{при } t \notin U}} \cdot \omega(\alpha(t))\langle\alpha'(t)\rangle \,\mathsf{d}\, t\right| = \left|\int_U \varphi_k(\alpha(t)) \cdot \omega(\alpha(t))\langle\alpha'(t)\rangle \,\mathsf{d}\, t\right| \leqslant$$

$$\leqslant \underbrace{\max_{t \in I} \big|\varphi_k\big(\alpha(t)\big)\big|}_{\substack{\wedge\!\!\!\backslash \\ 1}} \cdot \underbrace{\max_{t \in I} \Big|\omega(\alpha(t))\langle\alpha'(t)\rangle\Big|}_{\substack{\parallel \\ A}} \cdot \mu(U) < A \cdot \varepsilon.$$

Поскольку здесь число $\varepsilon > 0$ с самого начала выбиралось произвольно, это означает, что справедливо (18.2.80).

Теперь перейдем к (18.2.81):

$$\left|\int_D \mathsf{d}(\varphi_k \cdot \omega)\right| = \left|\int_D (\mathsf{d}\,\varphi_k) \wedge \omega + \int_D \varphi_k \cdot \mathsf{d}\,\omega\right| = \left|\int_{\mathsf{E}_k\big(\mathsf{E}_k(S)\big)} (\mathsf{d}\,\varphi_k) \wedge \omega + \int_{\mathsf{E}_k\big(\mathsf{E}_k(S)\big)} \varphi_k \cdot \mathsf{d}\,\omega\right| \leqslant$$

$$\leqslant \left|\int_{\mathsf{E}_k\big(\mathsf{E}_k(S)\big)} (\mathsf{d}\,\varphi_k) \wedge \omega\right| + \left|\int_{\mathsf{E}_k\big(\mathsf{E}_k(S)\big)} \varphi_k \cdot \mathsf{d}\,\omega\right| \leqslant$$

$$\leqslant \underbrace{\max_{x \in D} |\mathsf{d}\,\varphi_k(x)|}_{\substack{\wedge\!\!\!\backslash\ (18.2.73) \\ C \cdot 2^k}} \cdot \max_{x \in D} |\omega(x)| \cdot \mu(\mathsf{E}_k\big(\mathsf{E}_k(S)\big)) + \underbrace{\max_{x \in D} |\varphi_k(x)|}_{\substack{\wedge\!\!\!\backslash \\ 1}} \cdot \max_{x \in D} |\mathsf{d}\,\omega(x)| \cdot \mu(\mathsf{E}_k\big(\mathsf{E}_k(S)\big)) \leqslant$$

$$\leqslant C \cdot \max_{x \in D} |\omega(x)| \cdot \underbrace{2^k \cdot \mu(\mathsf{E}_k\big(\mathsf{E}_k(S)\big))}_{\substack{\downarrow\ (18.2.71) \\ 0}} + \max_{x \in D} |\mathsf{d}\,\omega(x)| \cdot \underbrace{\mu(\mathsf{E}_k\big(\mathsf{E}_k(S)\big))}_{\substack{\downarrow\ (18.2.71) \\ 0}} \underset{k \to \infty}{\longrightarrow} 0$$

□

Формула Стокса. Одно из следствий теоремы Грина 18.2.7 выглядит так:

Теорема 18.2.13 (Стокс). *Пусть $(D, \partial D)$ – положительно ориентированная область в $\mathbb{R}^2$, $\sigma : D \to X$ – параметризованная поверхность в X, квазирегулярная на крае ∂D. Тогда для любой дифференциальной формы ω степени 1 на $\sigma(D)$ справедлива формула, которую принято называть* формулой Стокса*:*

$$\boxed{\oint_{\sigma(\partial D)} \omega = \int_{\sigma(D)} \mathsf{d}\,\omega} \tag{18.2.82}$$

Доказательство.

$$\oint_{\sigma(\partial D)} \omega = (18.1.53) = \oint_{\partial D} \sigma^*\omega = (18.2.67) = \int_D \mathsf{d}(\sigma^*\omega) = (18.1.26) = \int_D \sigma^*(\mathsf{d}\,\omega) = (18.1.53) = \int_{\sigma(D)} \mathsf{d}\,\omega$$

□

Формула Гаусса-Остроградского. Пусть U – открытое множество в пространстве $\mathbb{R}^3$ и

$$\omega(x,y,z) = P(x,y,z)\ \mathsf{d}\,y \wedge \mathsf{d}\,z + Q(x,y,z)\ \mathsf{d}\,z \wedge \mathsf{d}\,x + R(x,y,z)\ \mathsf{d}\,x \wedge \mathsf{d}\,y$$

– дифференциальная форма степени 2 на U. Напомним, что ее дифференциалом будет форма степени 2

$$\mathsf{d}\,\omega(x,y,z) = (\nabla_1 P(x,y,z) + \nabla_2 Q(x,y,z) + \nabla_3 R(x,y,z)) \cdot \mathsf{d}\,x \wedge \mathsf{d}\,y \wedge \mathsf{d}\,z, \qquad (x,y,z) \in U$$

Функция

$$\operatorname{\mathsf{div}} \omega(x,y,z) = \nabla_1 P(x,y,z) + \nabla_2 Q(x,y,z) + \nabla_3 R(x,y,z), \qquad (x,y,z) \in U$$

называется *дивергенцией* дифференциальной формы ω.

Теорема 18.2.14 (Гаусс, Остроградский)**.** *Пусть D – положительно ориентированная область в $\mathbb{R}^3$. Для любой дифференциальной формы ω степени 2 на D справедлива формула, которую принято называть* формулой Гаусса-Остроградского*:*

$$\boxed{\iint_{\partial D} \omega = \iiint_D \mathsf{d}\,\omega} \tag{18.2.83}$$

В координатной записи она выглядит так:

$$\iint_{\partial D} P(x,y,z)\ \mathsf{d}\,y \wedge \mathsf{d}\,z + Q(x,y,z)\ \mathsf{d}\,z \wedge \mathsf{d}\,x + R(x,y,z)\ \mathsf{d}\,x \wedge \mathsf{d}\,y =$$

$$= \iint_D (\nabla_1 P(x,y,z) + \nabla_2 Q(x,y,z) + \nabla_3 R(x,y,z))\, \mathsf{d}\,x\, \mathsf{d}\,y \tag{18.2.84}$$

Доказательство с очевидными исправлениями повторяет доказательство теоремы Грина 18.2.7.

Оглавление