Сжатие без учёта контекста. Арифметическое (интервальное) кодирование

Александра Игоревна Кононова

МИЭТ

3 ноября 2023 г. — актуальную версию можно найти на
https://gitlab.com/illinc/otik

О терминах

Символ — элемент качественной информации $a \in A$ (множество A — алфавит).

Текст — последовательность $m \in A^+$ таких элементов.

На практике для всех алгоритмов, где алфавит может быть произвольным, **символ кодирования = байт** (так как в большинстве ЭВМ байт 8-битен — это 00...FF), **исходный текст = любой бинарный файл,** сжатый текст — тоже бинарный файл:

- использование в программе для ЭВМ символов меньших, чем байт — неудобно;
- использование символов фиксированной разрядности бóльших, чем байт $\Longrightarrow$ слишком большой алфавит $\Longrightarrow$ объёмные структуры данных для восстановления.
- использование в качестве символа кодирования печатного символа ASCII или koi8r/cp1251/dos/iso/maccyrillic не позволяет рассматривать в качестве исходного текста произвольный файл и приводит к труднодиагностируемым ошибкам;
- использование печатного символа UTF-8 (144 697 символов Unicode в 2023 г.) — то же самое + проигрыш в объёме.

В книгах для наглядности используются обозначения $A, B, \ldots$ и т. п. (маленький алфавит + визуальное отличие символа от индекса или частоты), но в программе это всё равно байты!

Идея арифметического кодирования

1. сообщение $C = c_1 c_2 \dots c_n$ соответствует вещественному числу (точке) $z \in [0; 1)$;
2. точка z представляется в двоичной системе счисления.

Сколько бит требуется для полной записи $z \in [0; 1)$?

Сжатие:

1. z сохраняется **ровно** с той точностью, чтобы восстановить n символов C (цикл масштабирования);
2. при задании z учитываются частоты символов C.

   В данной главе моделью является источник без памяти, $p(\xi_j) = const$.

Арифметическое кодирование без сжатия

Строка D-ичного алфавита $C = c_1c_2c_3...$ — точка $z = \overline{0, c_1c_2c_3...}_D$.

Двоичные цифры (биты) $b_1b_2b_3...$ дробной части двоичной записи того же числа $z = \overline{0, b_1b_2b_3...}_2 = \overline{0, c_1c_2c_3...}_D$ — код строки C.

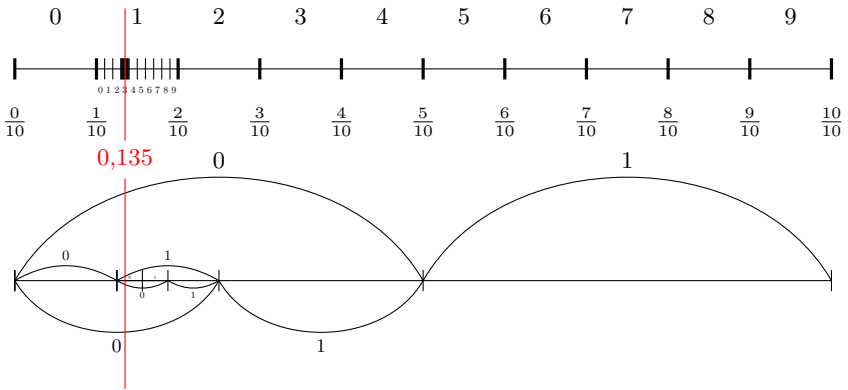
- Любое значение $z \in [0, 1)$ имеет **бесконечное** число цифр (часть их может быть 0) в любой СС;
  даже для конечного числа D-ичных цифр $\overline{0, c_1c_2c_3...c_n}_D$ двоичное представление может быть бесконечно длинным $\rightarrow$ **округление;**
- округление к ближайшему требует для корректного округления вычислить на одну цифру больше, чем надо $\rightarrow$ **округление к 0.**

Геометрическая интерпретация кодирования без сжатия

$0{,}135_{10} = 0{,}001(0001010001111010111 0)_2$ — конечное число цифр окр-ся к 0 до $0{,}134_{10}$

$0{,}135_{10} \sim$ { исходная длина (3 цифры); любое значение z из полуинтервала $\left[0{,}135; 0{,}136\right) = \left[0{,}135(0); 0{,}135(9)\right)$

Цифра D-ичного алфавита $c_1 c_2 c_3 \ldots$ — полуинтервал $\subseteq [0, 1)$

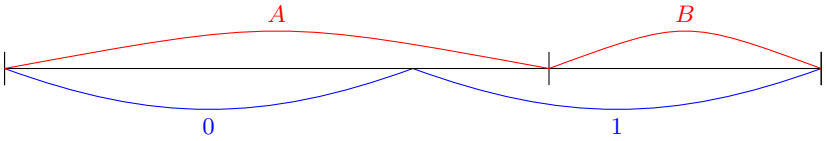


$0{,}0010001011_2 = 0{,}1357421875_{10} \approx 0{,}135_{10}$

Арифметическое сжатие (концепт)

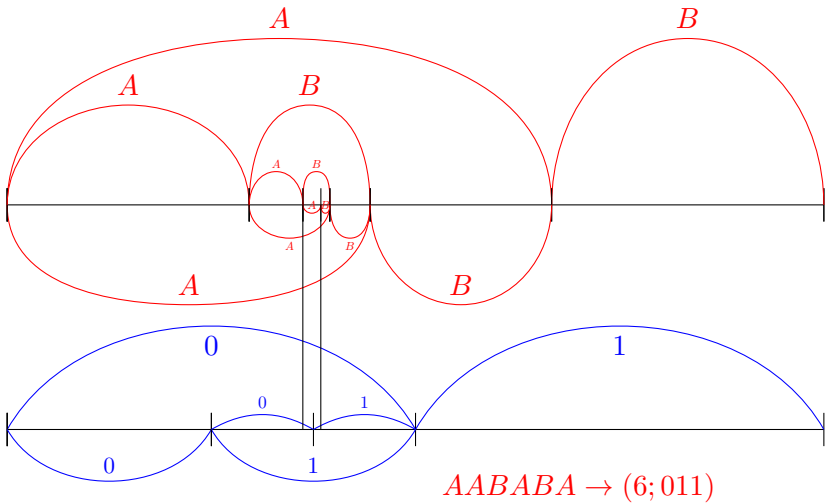
1. Бесконечная строка $c_1c_2...c_nc_{n+1}...$ символов T-ичного алфавита A соответствует вещественному числу (точке) бесконечной точности в диапазоне $[0,1)$.
   Соответствие аналогично позиционной системе счисления по основанию T, но диапазон разбивается на T **неравных частей пропорционально частотам символов.**
2. Конечная строка из n символов $c_1c_2...c_n$ — полуинтервал (ПИ) $[l_n,t_n) \subset ... \subset [l_1,t_1) \subset [0,1)$; каждая его точка соответствует бесконечной строке, начинающейся с $c_1c_2...c_n \implies$ выбирается $z \in [l_n,t_n)$ с самым коротким двоичным представлением.
3. Полученная точка z представляется в двоичной системе счисления: $z = 0{,}b_1b_2...b_m$.
   Исходное количество символов n + битовая строка $b_1b_2...b_m$ — код $c_1c_2...c_n$.

Сжимаем текст $AABABA$. Вероятность символа A — $\frac{2}{3}$, B — $\frac{1}{3} \implies$ диапазон $[0;1)$ делится $2:1$.



1. Все строки — ПИ $[0,1)$: начинающиеся с A — ПИ $\left[0,\frac{2}{3}\right)$, начинающиеся с B — ПИ $\left[\frac{2}{3},1\right)$.
2. Строки $A...$ — ПИ $[l_1,t_1) = \left[0,\frac{2}{3}\right) \subseteq [0,1)$: вторая A $\left[0,\frac{4}{9}\right)$, вторая B $\left[\frac{4}{9},\frac{2}{3}\right)$ и т. д.

Геометрическая интерпретация арифметического сжатия



БАНАН $\to (5; 1101\,0111) \hookrightarrow$ 011_ac_samples/banan_realset_integerset.pdf

Длина арифметического кода (концепт; целочисленный длиннее)

Вероятности: в данной главе везде моделью является источник без памяти, $p(\xi_j) = const$

Для строки $C = c_1 c_2 ... c_n$ длина итогового ПИ $t_n - l_n = \Delta_n = p(c_1) \cdot p(c_2) \cdot ... \cdot p(c_n) = p(C)$

Если $\Delta_n \geqslant \dfrac{1}{2^k}$, то $\exists z \in [l_n, t_n)$ не более k двоичных разрядов после запятой (м. б. короче):

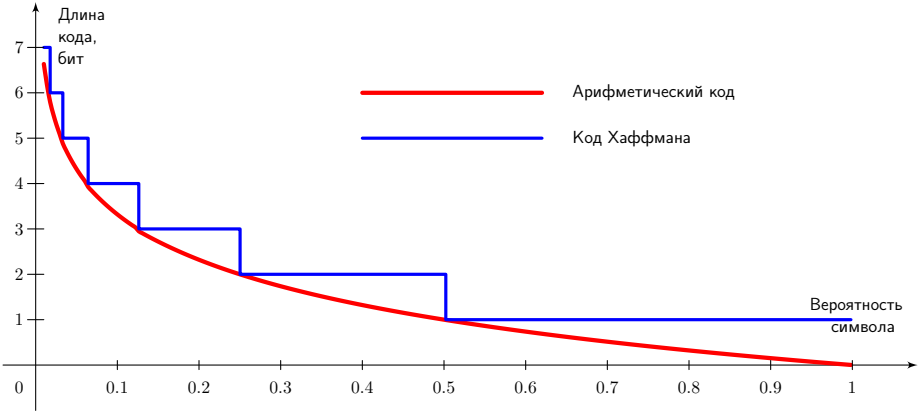
$\Big|code(C)\Big| \leqslant k = \left\lceil \log_2 \left(\dfrac{1}{\Delta_n} \right) \right\rceil = \left\lceil \log_2 \left(\dfrac{1}{p(C)} \right) \right\rceil = \Big\lceil I(C) \Big\rceil$ бит

Для $AABABA$: $\Delta_6 = \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{2}{3} = \dfrac{2^4}{3^6} \approx 0{,}02 \gtrsim 2^{-6} \implies$ длина кода $\leqslant 6$ бит

20 A и 10 B (30 символов): $\Delta_{30} = \dfrac{2^{30}}{3^{30}} \approx 2^{-27{,}5} \implies \leqslant 28$ бит

Начиная с какого m сообщение из $2m$ A и m B кодируется гарантированно короче $3m$ бит?

Сравнение с кодами Хаффмана (один символ)



Степень сжатия на типичных данных на 1-10% лучше кода Хаффмана.

Не увеличивает размера исходных данных в худшем случае.

Точность, необходимая для реализации концепта арифметического сжатия

Для концепта арифметического сжатия необходимо представлять все границы ПИ $[0,1) \supseteq [l_1,t_1) \supseteq \ldots \supseteq [l_n,t_n) \ni z$ (дроби со знаменателем D^n) **абсолютно точно.**

1. В двоичной СС конечно представимы только дроби со знаменателем 2^n, в десятичной — со знаменателем $2^n 5^k$ (так, непредставима $\frac{1}{3}$).
2. При округлении при кодировании и декодировании погрешность накапливается.
3. При использовании $float/double$ выполняется непредсказуемое округление + на ПИ $[0,1)$ используется 30/62 бит в целом и 23/52 бита мантиссы.

Целочисленная реализация арифметического сжатия — **интервальное кодирование:**

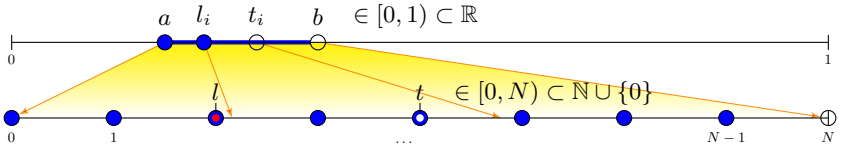
1. погрешность при декодировании должна накапливаться точно таким же образом, как при кодировании $\Longrightarrow$ исходную строку можно восстановить;
2. чем она больше, тем длиннее код $\Longleftrightarrow$ **код не совпадает с концептом,** хотя начало будет похожим;

в интервальном кодировании некоторый **фрагмент** $[a,b)$ вещественного ПИ $[0,1)$ изображается в виде целочисленного ПИ $[0,N)$; операции — целочисленные.

Цифровой микроскоп Ньютона

Некоторый **фрагмент** $[a, b)$ вещественного полуинтервала (ПИ) $[0, 1)$ изображается в виде целочисленного ПИ $[0, N)$

$$[a, b) \to [0, N) \ \Big([l_i, t_i) \subseteq [a, b) \subseteq [0, 1)\Big) \qquad N >> 4D^2, \ \tfrac{N}{4} \in \mathbb{N}$$



Рассматриваем вместо настоящих l_i и t_i из $[0, 1)$ их изображения на $[0, N)$ (целые) — одной паре l_i и t_i могут соответствовать **разные** изображения l и t при рассмотрении разных $[a, b)$.

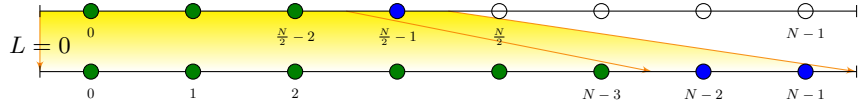
Вначале $[a, b) = [0, 1)$, потом каждый раз при возможности уменьшается вдвое, чтобы изображающий $[l_i, t_i)$ целочисленный ПИ $[l, t)$ не стал короче $\frac{N}{4}$.

Приближаем («микроскоп Ньютона») одну из половин $[a, b) \Longrightarrow$ новые изображения l и t масштабируются из старых изображений ($l_i, t_i \in \mathbb{R}$ недоступны).

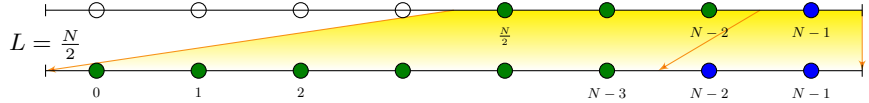
Масштабирование (нормализация) и биты двоичного представления

приближаем часть ПИ $\left[L, L+\frac{N}{2}\right)$ — изображаемый ПИ $[a,b)$ уменьшается вдвое, длины на изображении увеличиваются вдвое (масштабирование $x \to 2(x-L)$).

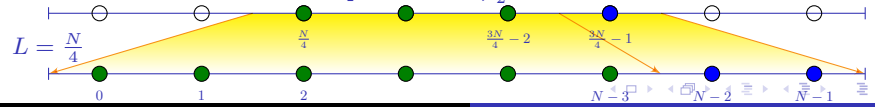
$[a,b) = \left[0, \frac{1}{2}\right) = [0{,}0;0{,}1)_2 = \left[0{,}0;0{,}0(1)\right)_2$: первый бит $z \in [l_i, t_i) \subseteq [a,b)$ всегда 0



$[a,b) = \left[\frac{1}{2}, 1\right) = [0{,}1;1{,}0)_2 = \left[0{,}1;0{,}1(1)\right)_2$: первый бит $z \in [a,b)$ всегда 1



$[a,b) = \left[\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right) = [0{,}01;0{,}11)_2 = \left[0{,}01;0{,}10(1)\right)_2$: второй бит $z \in [a,b)$ инверсен первому



Частота масштабирования

- Шаг масштабирования = бит выходного потока:
  1. простейший случай (размер выходного файла наименьший; медленно; рассматривается ниже) — масштабирование выполняется при любой возможности, **выходной поток битовый;**
  2. байтовый выходной поток — масштабирование откладывается (увеличивается выходной файл; быстрее; необходимо $N \gg 256D^2$).

- Реализовать кодирование более-менее длинного сообщения без масштабирования невозможно.

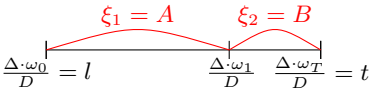
- Схема масштабирований при декодировании должна быть **точно такой же,** как и при кодировании — иначе декодированное не совпадёт с исходным. Также должны совпадать и ν_j ($\Longrightarrow$ D и ω_j), и N, и разрядность вычислений.

Величины и требования

Алфавит из T символов: $\xi_1, \xi_2, \dots \xi_T$, частоты $\nu_1, \nu_2, \dots \nu_T \in \mathbb{N}$,
сортируются по убыванию $\nu_1 \geqslant \nu_2 \geqslant \dots \geqslant \nu_T$.

Деление пропорционально ν_j: $\begin{cases} \omega_0 &= 0, \\ \dots & \\ \omega_j &= \omega_{j-1} + \nu_j, \\ \dots & \\ \omega_T &= \omega_{T-1} + \nu_T. \end{cases}$

$D = \omega_T = \sum\limits_j \nu_j$ — делитель, не обязательно 2^κ.



Изменение отрезка при чтении символа $c_i = \xi_j$: $\Delta = t - l$, $\begin{cases} l \to l + \frac{\Delta \cdot \omega_{j-1}}{D} \\ t \to l + \frac{\Delta \cdot \omega_j}{D} \end{cases}$

новый $[l, t)$ снова делится: в вещественном концепте — до исчерпания $c_1 c_2 \dots c_n$;
в целочисленной — пока не станет слишком маленьким (затем масштабирование).

Выбор N для кодирования: $N \vdots 4$ (для масштабирования);
расчёт без переполнения $\Longrightarrow$ ❶ $N \cdot D \leqslant \max(type)$;
$\Delta > \frac{N}{4}$ дважды делится на символы $\Longrightarrow$ ❷ $N \gg 4D^2$.
$\Longrightarrow$ огр. D
Выбор N для декодирования: деление на 2 всегда точно $\Longrightarrow$ ❸ $N = 2^\alpha$, $\alpha \gg 1$

Приведение частот

Для вычислений требуется T ненулевых частот в порядке убывания ($\nu_1 \geqslant \nu_2 \geqslant \ldots \geqslant \nu_T$, $\sum\limits_{j=1}^{T} \nu_j = D$);

но хранить, как и для Хаффмана, нужно частоты всех 2^k возможных символов (k-битных байтов):

$\vec{\nu} = \Big(\nu(0), \nu(1), ..., \nu(2^k-1)\Big)$, из них T ненулевых и $2^k - T$ нулевых; $\sum\limits_{j=0}^{2^k-1} \nu(j) = D$.

Из файла длины n символов $\overrightarrow{count} = \Big(count(0), count(1), ..., count(2^k-1)\Big)$; $\sum\limits_{j=0}^{2^k-1} count(j) = n$.

1. Для вычислений требуется $D^2 \ll \frac{N}{4} \implies$ частоты **обязательно** нормируются:
$\begin{cases} \nu(0) + \nu(1) + ... + \nu(2^k-1) \approx D_{\text{желаемое}}, \\ \nu(0) : \nu(1) : ... : \nu(2^k-1) \approx count(0) : count(1) : ... : count(2^k-1), \end{cases}$
$\nu(j) \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

2. Арифметическое/интервальное кодирование принципиально не может записать символ с $\nu_j = 0$ $\implies$ ненулевые частоты не должны переходить в нулевые:
$\nu(j) = 0 \Leftrightarrow count(j) = 0$.

Выбор $D_{\text{жел}}$

Пусть $\nu_1, \nu_2, \dots \nu_T \in \mathbb{N}$ (то есть ненулевые!), такие, что $\sum_{j=1}^{T} \nu_j = D$:

- чем меньше D, тем точнее вычисления $\Longrightarrow$ меньше размер сжатых данных;
- но при слишком малых D менее точны $\nu(i) : \nu(j) \approx count(i) : count(j)$ $\Longrightarrow$ модель не соответствует исходному файлу $\Longrightarrow$ больше размер сжатых данных.

1. Если $D < T$, такие $\nu_1, \nu_2, \dots \nu_T \in \mathbb{N}$ вообще невозможны.
2. Если $D = T$, то $(\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_T) = (1, 1, \dots, 1)$ $\Longrightarrow$ код фиксированной ширины.
3. Если $D = 2T$, при равных частотах $(\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_T) = (2, 2, \dots, 2)$; большие отклонения от $count(i) : count(j) = 1 : 1$ возможно отразить, малые нет.
   И т. д.: при равных частотах и $D = 4T$ $\vec{\nu} = (4, 4, \dots, 4)$, при $D = 8T$ $(8, 8, \dots, 8)$...

Для k-битного байта $T_{max} = 2^k$, в общем случае $D_{\text{жел}} \geqslant 8T_{max} = 8 \cdot 2^k = 2^{k+3}$.

Если частоты приведены к $\sum \nu_j = D_{\text{жел}} = 2^\kappa$, для записи ν_j достаточно κ бит ($\kappa > k$, более байта):

- либо $\exists i$: $\nu_i = 2^\kappa$ и $\forall j \neq i$: $\nu_j = 0$ $\Longrightarrow$ записывается $\nu_i = 1$ и $\nu_j = 0$ при $j \neq i$, $|code(c_1 c_2 ... c_n)| = 0$ бит (вырожденный случай);
- либо $\forall j$: $\nu_j < 2^\kappa$ $\Longrightarrow$ все ν_j записываются κ битами.

Приведение $\sum count(j) = n$ к $\sum \nu(j) = D_{\text{жел}}$

A Соотношения всех частот немного искажаются, $D_{\text{жел}} \geqslant T$:

$$x(j) = \begin{cases} 0, & count(j) = 0,\ (2^k - T) \text{ штук;} \\ \frac{(count(j)-1)\cdot(D_{\text{жел}}-T)}{n-T} + 1, & count(j) > 0,\ T \text{ штук;} \end{cases} \qquad \nu(j) = \text{round}_{\sum}\Big(x(j)\Big).$$

B Соотношения меньших искажаются сильнее, $D_{\text{жел}} \geqslant 4T$:

$$x(j) = \begin{cases} 0, & count(j) = 0; \\ 1, & 1 \leqslant count(j) < \frac{3n}{2D_{\text{жел}}},\ T_1 \text{ штук},\ \sum count = n_1; \\ \frac{count(j)\cdot(D_{\text{жел}}-T_1)}{n-n_1}, & count(j) \geqslant \frac{3n}{2D_{\text{жел}}}; \end{cases} \qquad \nu(j) = \text{round}_{\sum}\Big(x(j)\Big).$$

Если округлять к ближайшему, $\nu(j) = \text{round}\Big(x(j)\Big)$, то $\sum \nu(j) \approx D_{\text{жел}}$ — не обязательно точно.

$\text{round}_{\sum}$ **с сохранением суммы:** $\nu(j) = \lfloor x(j) \rfloor$, $\Delta_\nu = D_{\text{жел}} - \sum \nu(j)$ — целое и $\Delta_\nu = \sum \{x(j)\} \leqslant T$; Δ_ν раз ищем j с наибольшим $\{x(j)\}$ и заменяем $\nu(j) \to \nu(j) + 1$, $\{x(j)\} \to 0$; в итоге $\sum \nu(j) = D_{\text{жел}}$.

Целочисленное, $x(j)$ вида $\frac{u(j)\cdot D}{U}$: $\nu(j) = \left\lfloor \frac{u(j)\cdot D}{U} \right\rfloor$; вместо $0 \leqslant \{x(j)\} < 1$ целое $0 \leqslant (u(j) \cdot D)\%U < U$.

Приведение (A) и (B)

Пусть $D_{\text{жел}} = 2^6 = 64$ и $\overrightarrow{count} = (0, 3, 1, 46, 47, 1, 0, 2)$, $n = \sum count(j) = 100$; ненулевых частот $T = 6$, $y(j) = \lfloor x(j) \rfloor$, $r(j) \sim \{x(j)\}$, $\nu(j)$ округлены с сохранением суммы и $\widetilde{\nu}(j)$ к ближайшему.

Приведение (A): $D_{\text{жел}} - T = 58$, $n - T = 94$:

$$\begin{cases} count(j) = 0: & y(j) = 0, & r(j) = 0; \\ count(j) > 0: & y(j) = \left\lfloor \frac{(count(j)-1)\cdot(D_{\text{жел}}-T)}{n-T} \right\rfloor + 1, & r(j) = \Big((count(j)-1)\cdot(D_{\text{жел}}-T)\Big)\%\Big(n-T\Big). \end{cases}$$

Приведение (B): $\frac{3n}{2D_{\text{жел}}} \approx 2{,}3 \implies$ значений $1 \leqslant count(j) < \frac{3n}{2D_{\text{жел}}}$ в массиве $T_1 = 3$, их сумма $n_1 = 4$:

$$\begin{cases} count(j) = 0: & y(j) = 0, & r(j) = 0; \\ 1 \leqslant count(j) < \frac{3n}{2D_{\text{жел}}}: & y(j) = 1, & r(j) = 0; \\ \frac{3n}{2D_{\text{жел}}} \leqslant count(j): & y(j) = \left\lfloor \frac{count(j)\cdot(D_{\text{жел}}-T_1)}{n-n_1} \right\rfloor, & r(j) = \Big(count(j)\cdot(D_{\text{жел}}-T_1)\Big)\%\Big(n-n_1\Big). \end{cases}$$

(A)

j	0	1	2	3	4	5	6	7	$\sum$ / Δ_ν
$r_A(j)$	0	22	0	72	36	0	0	58	
$y_A(j)$	0	2	1	28	29	1	0	1	62 (2)
$\nu_A(j)$	0	2	1	29	29	1	0	2	64
$\widetilde{\nu_A}(j)$	0	2	1	29	29	1	0	2	64

(B)

j	0	1	2	3	4	5	6	7	$\sum$ / Δ_ν
$r_B(j)$	0	87	0	22	83	0	0	0	
$y_B(j)$	0	1	1	29	29	1	0	1	62 (2)
$\nu_B(j)$	0	2	1	29	30	1	0	1	64
$\widetilde{\nu_B}(j)$	0	2	1	29	30	1	0	1	64

Приведение (А): $Max \to \sum$

$D_{\text{жел}} = 64$ и $\overrightarrow{count} = (0, 45, 30, 46, 47, 30, 0, 40)$, $n = \sum count(j) = 238_{10} = 356_8$, ненулевых $T = 6$.

1. Непосредственное (А) $\overrightarrow{count} \to \vec{\nu}$:

j	0	1	2	3	4	5	6	7	$\sum$
$r(j)$	0	0	58	58	116	58	0	174	
$y(j)$	0	12	8	12	12	8	0	10	62 ($\Delta_y = 2$)
$\nu(j)$	0	12	8	12	13	8	0	11	64
$\widetilde{\nu}(j)$	0	12	8	12	13	8	0	11	64

Разрядность $\nu(j)$ больше байта $\Longrightarrow$ массив частот объёмнее, чем для Хаффмана.

2. Вначале для записи в файл (А) $\overrightarrow{count}$ к однобайтовым $\vec{u}$: $\vec{u} = (0, 7, 5, 7, 7, 5, 0, 6)$, $\sum u(j) = 37$;

затем (А) $\vec{u} \to \vec{\nu}$:

j	0	1	2	3	4	5	6	7	$\sum$
$r(j)$	0	7	15	7	7	15	0	11	
$y(j)$	0	12	8	12	12	8	0	10	62 ($\Delta_y = 2$)
$\nu(j)$	0	12	9	12	12	9	0	10	64
$\widetilde{\nu}(j)$	0	12	8	12	12	8	0	10	62

В файл: $\underbrace{0356}_{n}$, $\underbrace{07577506}_{\vec{u}}$ и код по $\vec{\nu} = (0, 12, 9, 12, 12, 9, 0, 10)$ (или по $\widetilde{\vec{\nu}}$ — как реализовано).

Две перенормировки $\Longrightarrow$ модель хуже подходит файлу $\Longrightarrow$ больше размер; для 8-битного байта менее выражено, но на некоторых файлах код Хаффмана эффективнее целочисленной реализации АС.

Задачи для семинаров и вопросы

1. Найдите возможные пары $N = 2^\alpha$ и $D_{\text{жел}} = 2^\kappa$ для алфавита из октетов (8-битных байтов IBM PC), $T_{\max} = 2^8 = 256$ и а) 32-битной арифметики (все пары), б) 64-битной арифметики (граничные).
2. Оцените максимально возможное $\frac{\nu_{\max}}{\nu_{\min}}$ для октетов и $D_{\text{жел}} \in \{2T, 4T, 8T, 16T\}$.
3. Рассчитайте $\vec{\nu}$ при равных частотах, а также максимально возможное $\frac{\nu_{\max}}{\nu_{\min}}$ для октетов и $D_{\text{жел}} = 2^{16}$.

---

4. Пусть байт=октет, а $D_{\text{жел}} = 2^{12} = 16T_{\max}$. В общем случае для $\nu(j)$ требуется полтора октета, но во многих случаях достаточно одного: примерно равные частоты всех байтов — $\nu \approx \frac{2^{12}}{256} = 16$; печатных ASCII-символов $\frac{2^{12}}{95} \approx 40$ для ненулевых; строчной латиницы $\frac{2^{12}}{25} \approx 160$ для ненулевых.

   Как без дополнительных служебных полей понять при чтении массива из 256 октетов с младшими частями $\nu(j)$ — достаточно их или позже должны следовать $\frac{4}{8} \cdot 256 = 128$ октетов с 256 4-битными старшими частями $\nu(j)$?

   Реализуемо ли предложенное для $D_{\text{жел}} = 2^{11}$ или 2^{10}?

5. Как выгоднее сохранять частоты октетов — 8-разрядными ($\max \nu_j = 2^8 - 1$) с перенормировкой перед расчётом или готовыми κ-разрядными ($\sum \nu_j = 2^\kappa$, $\kappa > 8$)? Обоснуйте ответ.

Сжатие ♢ БАНАН ↪ 011_ac_samples/banan_realset_integerset.pdf

Входной поток: символы $C = c_1 c_2 \dots c_n$, выходной — биты $B = b_1 b_2 b_3 \dots b_m$

0. $l = 0, t = N$, бит зарезервировано $\beta = 0$, позиция символа $i = 0$
1. чтение $(++i)$ символа $C \to c_i = \xi_j$: $\Delta = t - l$, $\begin{cases} l \to l + \frac{\Delta \cdot \omega_{j-1}}{D}, \\ t \to l + \frac{\Delta \cdot \omega_j}{D}; \end{cases}$ авост при $t = l$.
2. масштабирование l, t: $\begin{cases} l \to 2(l - L) \\ t \to 2(t - L) \end{cases}$ и запись бита b, пока возможно (м. б. неск.):
   $\left[\frac{b \cdot N}{2}, \frac{(b+1) \cdot N}{2}\right), b \in \{0, 1\} \to [0, N)$ и запись $b \to B$ $\left(b \underbrace{\overline{b}\overline{b}\dots\overline{b}}_{\beta} \to B,\ \beta \to 0\right)$
   $\left[\frac{N}{4}, \frac{3N}{4}\right) \to [0, N)$ и $++\beta$
3. если достигнуто $i = n$ — запись $1 \to B$ $\left(1 \underbrace{00\dots0}_{\beta} \to B\right)$ и завершение;
   иначе переход к шагу 1

---

1. Полученное $z \in [0, 1)$ соответствует **бесконечно длинной строке** $c_1 c_2 \dots c_n c_{n+1} c_{n+2} \dots \to$ необходимо сохранить исходную длину n.
2. Поточный вариант — ν_j и ω_j пересчитываются.

Распаковка

Символов — n, входной поток — биты $B = b_1 b_2 b_3 \dots b_m 000 \dots$,
выходной поток — символы $C = c_1 c_2 \dots c_n$.

0. $l = \lambda = 0, t = \tau = N$, № бита $k = 0$, № символа $i = 0$
1. чтение $(++k)$ бита $B \to b_k$: $\delta = \tau - \lambda$, $\begin{cases} \lambda \to \lambda + \frac{\delta \cdot b_k}{2}, \\ \tau \to \lambda + \frac{\delta \cdot (b_k + 1)}{2}. \end{cases}$
2. получение и запись символа, если возможно: $\Delta = t - l$, $j \in \{1, \dots, T\}$

$$\exists j\colon [\lambda, \tau) \subseteq \left[l + \tfrac{\Delta \cdot \omega_{j-1}}{D},\ l + \tfrac{\Delta \cdot \omega_j}{D} \right) \quad \Longrightarrow \quad ++i,\ \xi_j \to C,\ \begin{cases} l \to l + \frac{\Delta \cdot \omega_{j-1}}{D} \\ t \to l + \frac{\Delta \cdot \omega_j}{D} \end{cases}$$

3. масштабирование l, λ, τ, t, пока возможно (м. б. несколько раз):
$[l, t) \subseteq [L, L + \frac{N}{2}) \Longrightarrow [L, L + \frac{N}{2}) \to [0, N)$ (не влияет на выходной поток);
когда уже невозможно — переход к шагу 2
4. если достигнуто $i = n$ — завершение, иначе переход к шагу 1

$N = 2^\alpha \implies$ чтение бита точно $\implies$ на шаге 1 читаем сразу несколько бит (при $k = 0$ читаем α бит), чтобы получить ПИ вида $[\lambda, \lambda + 1)$.

Полуинтервалы и отрезки

Выше в целочисленной реализации рабочий диапазон рассматривался как **полуинтервал** $[l, t),\ l \leqslant z < t$,
где t — **невключаемая** верхняя граница.

Тот же самый диапазон можно представить
как **отрезок** $[l, h],\ l \leqslant z \leqslant h$,
где $h = t - 1$ — **включаемая** верхняя граница.

Реализовать кодирование и декодирование можно как для полуинтервалов $[l, t)/[\lambda, \tau)$, так и для отрезков $[l, h]/[\lambda, \chi]$, но **все** соотношения будут различаться (см. следующий лист)!

Основные соотношения для t и h

$$[l,t)=[l,h] \iff h=t-1 \iff t=h+1$$

Полуинтервал $[l,t)$, $l \leqslant z < t$	Отрезок $[l,h]$, $l \leqslant z \leqslant h$
Длина	
$\Delta = t-l$ $\qquad \delta = \tau - \lambda$	$\Delta = h-l+1$ $\qquad \delta = \chi - \lambda + 1$
Чтение символа ξ_j или бита b	
$\begin{cases} l & \to & l + \frac{\Delta\cdot\omega_{j-1}}{D}, \\ t & \to & l + \frac{\Delta\cdot\omega_j}{D}, \end{cases}$ авост при $t=l$	$\begin{cases} l & \to & l + \frac{\Delta\cdot\omega_{j-1}}{D}, \\ h & \to & l + \frac{\Delta\cdot\omega_j}{D} - 1, \end{cases}$ авост при $h<l$
$\begin{cases} \lambda & \to & \lambda + \frac{\delta\cdot b}{2} \\ \tau & \to & \lambda + \frac{\delta\cdot(b+1)}{2} \end{cases}$	$\begin{cases} \lambda & \to & \lambda + \frac{\delta\cdot b}{2} \\ \chi & \to & \lambda + \frac{\delta\cdot(b+1)}{2} - 1 \end{cases}$
Масштабирование $\left[L, L+\frac{N}{2}\right) \to [0,N)$, $L \in \left\{0, \frac{N}{4}, \frac{N}{2}\right\}$	
$[l,t) \subseteq \left[L, L+\frac{N}{2}\right) \iff \begin{cases} L \leqslant l \\ t \leqslant L + \frac{N}{2} \end{cases}$	$[l,h] \subseteq \left[L, L+\frac{N}{2}\right) \iff \begin{cases} L \leqslant l \\ h < L + \frac{N}{2} \end{cases}$
$\begin{cases} l & \to & 2(l-L) \\ t & \to & 2(t-L) \end{cases}$	$\begin{cases} l & \to & 2(l-L) \\ h & \to & 2(h-L)+1 \end{cases}$
	$2t-1 = 2(h+1)-1 = 2h+1$

Д. Ватолин, целочисленный цикл (отрезки)

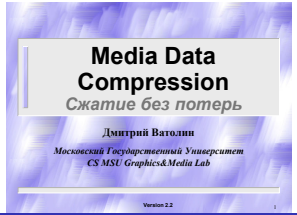
```
1  l[0] = 0; h[0] = 65535; i = 0; delitel = b[c_last];
2  First_qtr = (h[0] + 1)/4; Half = First_qtr*2; Third_qtr = First_qtr*3;
3  bits_to_follow = 0; // масштабирований [First_qtr; Third_qtr)
4  while (not DataFile.EOF()) {
5    c = DataFile.ReadSymbol(); i++; // Кодируемый символ
6    j = IndexForSymbol(c);          // и его номер в алфавите
7    l[i] = l[i-1] + b[j-1]*(h[i-1] - l[i-1] + 1)/delitel;
8    h[i] = l[i-1] +   b[j]*(h[i-1] - l[i-1] + 1)/delitel - 1;
9    for(;;) {                    // Варианты масштабирования
10     if (h[i] < Half)           // [l; h] лежит в [0; Half)
11       bits_plus_follow(0);
12     else if (l[i] >= Half) {  // [l; h] лежит в [Half, max)
13       bits_plus_follow(1);
14       l[i] -= Half; h[i] -= Half;
15     }
16     else if ((l[i] >= First_qtr) && (h[i] < Third_qtr)) {
17       bits_to_follow++;
18       l[i] -= First_qtr; h[i] -= First_qtr;
19     } else break;
20     l[i] += l[i]; h[i] += h[i] + 1; // масштабирование *2
21   }
22 }
```

Д. Ватолин, целочисленный цикл (отрезки), запись бита (bits_plus_follow)

```
1 void bits_plus_follow (int bit)
2 {
3   CompressedFile.WriteBit(bit);
4   for(; bits_to_follow > 0; bits_to_follow--)
5     CompressedFile.WriteBit(!bit);
6 }
```

`bits_to_follow` $= \beta$ — количество масштабирований из средней половины $\left[\frac{1}{4}; \frac{3}{4}\right) \to \left[0; 1\right)$ подряд

Дмитрий Ватолин, МГУ,
Media data compression.
Сжатие без потерь



Спасибо за внимание!

МИЭТ
www.miet.ru

Александра Игоревна Кононова
illinc@mail.ru
gitlab.com/illinc/raspisanie

Нормировка на точную сумму

При $D = 2^\kappa$ вычисления точнее $\Longrightarrow$ либо код немного короче, либо ~~$D^2 < \frac{N}{4}$ вместо $\ll$~~:
нужно найти $\vec{\nu}$ с $\sum \nu(j) = D_{\text{жел}}$, где $D_{\text{жел}} = 2^\kappa \geqslant 2^{k+2}$ определено на этапе разработки алгоритма;
$\overrightarrow{count} = \Big(count(0), count(1), ..., count(2^k - 1)\Big)$, $\sum count(j) = n$ — из исходного файла.

1. Если $n = D_{\text{жел}}$, приведение не требуется: $\nu(j) = count(j)$ для всех.

2. Если $n < D_{\text{жел}}$: для $count(j) = 0$ записываем $\nu(j) = 0$;
осталось T штук ненулевых частот $count(j) \geqslant 1$:
   - рассчитываем нецелые $x(j) = \frac{count(j)}{n} \cdot D_{\text{жел}} > count(j) \geqslant 1$; $\quad \sum x(j) = D_{\text{жел}}$;
   - округляем $x(j)$ до целых с сохранением суммы: $\nu(j) = \text{round}_\sum \Big(x(j)\Big)$.

   Нулевые $count(j) = 0$ можно и по общему правилу: $x(j) = \frac{count(j)}{n} \cdot D_{\text{жел}} = 0$ — целые $\Longrightarrow$ $\nu(j) = 0$.

3. Если $n > D_{\text{жел}}$, то может быть $x(j) = \frac{count(j)}{n} \cdot D_{\text{жел}} < 1$ $\Longrightarrow$ дополнительное искажение.
Как и для нормировки на максимум (для Хаффмана), есть два способа:
   - искажение всех соотношений $\nu(i) : \nu(j) \approx count(i) : count(j)$ понемногу (A);
   - более точное $\nu(i) : \nu(j) \approx count(i) : count(j)$ для больши́х частот, а для малых $\nu(i) : \nu(j) = 1 : 1$ (B).

Округление с сохранением суммы

Здесь и далее $z(j) = round_{\sum}\big(x(j)\big)$ — округление **набора** значений с сохранением суммы:

есть T штук нецелых $x(j)$ с целой суммой $\sum x(j) = D$, необходимо получить T штук целых $z(j)$

- точно сохранив сумму: $\sum z(j) = D$;
- максимально сохранив значения: $z(j) \approx x(j)$.

---

1. $y(j) = \lfloor x(j) \rfloor$ (округляем все значения вниз);
2. $\Delta_y = D_{\text{жел}} - \sum y(j)$ (рассчитываем, сколько не хватает до D); Δ_y целое; $\Delta_y = \sum\{x(j)\} \leqslant T$;
3. упорядочиваем значения по убыванию дробной части исходных $\{x(j)\}$:
   - для первых Δ_y штук $z(j) = y(j) + 1$ ($x(j)$ с самыми большими дробными частями округляем вверх);
   - для остальных $z(j) = y(j)$ (остальные — с меньшими дробными частями — округляем вниз).

(Альтернативный 3 без пересортировок: Δ_y раз ищем j с наибольшим $\{x(j)\}$
и заменяем $y(j) \to y(j) + 1$, $\{x(j)\} \to 0$; после завершения Δ_y замен полагаем $z(j) = y(j)$).

Полученные таким образом $z(j)$: • целые; • $z(j) \approx x(j)$; • $\sum z(j) = \sum y(j) + \Delta_y = D$;

- если $\forall j$: $x(j) \geqslant a$ для какого-либо $a \in \mathbb{Z}$, то и $\forall j$: $z(j) \geqslant a$;
- если среди $x(j)$ есть R штук целых — все они сохранят значение при округлении: $z(j) = x(j)$.

Целочисл., $x(j)$ вида $\frac{u(j)\cdot D}{U}$: сразу $y(j) = \left\lfloor \frac{u(j)\cdot D}{U} \right\rfloor$; вместо $0 \leqslant \{x(j)\} < 1$ целое $0 \leqslant (u(j)\cdot D)\%U < U$

(А) $\sum count(j) = n$ к $\sum \nu(j) = D_{\text{жел}} \geqslant T$, искажение всех частот

Приведение (А) — аналогично $\operatorname{round}\left(\frac{count(i)-1}{\max(count)-1} \cdot (Max-1)\right) + 1$ для нормировки на максимум:

1. Для $count(j) = 0$ записываем $\nu(j) = 0 \implies$ осталось $T \leqslant 2^k$ ненулевых значений:
   - $count(j) \geqslant 1$, $\sum count(j) = n$;
   - необходимо привести к $\nu(j) \geqslant 1$ с суммой $\sum \nu(j) = D_{\text{жел}}$.
2. Рассмотрим значения $u(j) = count(j) - 1$, тогда $u(j) \geqslant 0$, $\sum u(j) = \sum(count(j) - 1) = n - T$;
   будем приводить к $\theta(j) = \nu(j) - 1$, $\theta(j) \geqslant 0$, $\sum \theta(j) = \sum(\nu(j) - 1) = D_{\text{жел}} - T$:

$$x(j) = \tfrac{u(j)}{n-T} \cdot (D_{\text{жел}} - T) \qquad \Longrightarrow \qquad \theta(j) = \operatorname{round}_{\sum}\Big(x(j)\Big) \qquad \Longrightarrow \qquad \nu(j) = \theta(j) + 1.$$

Так как $\operatorname{round}_{\sum}$ проще реализовать на массиве «без дыр», а целочисленные значения сохраняются:

1. $$x(j) = \begin{cases} 0, & count(j) = 0,\ (2^k - T) \text{ штук}, \\ \frac{(count(j)-1)\cdot(D_{\text{жел}}-T)}{n-T} + 1, & count(j) > 0,\ T \text{ штук}; \end{cases}$$
2. $\nu(j) = \operatorname{round}_{\sum}\Big(x(j)\Big)$.

«Целочисленная дробная часть» $r(j) = \{x(j)\} \cdot (n - T)$, $0 \leqslant r(j) < (n - T)$:

$$\begin{cases} count(j) = 0: & y(j) = 0, \qquad r(j) = 0; \\ count(j) > 0: & y(j) = \left\lfloor \frac{(count(j)-1)\cdot(D_{\text{жел}}-T)}{n-T} \right\rfloor + 1, \quad r(j) = \Big((count(j) - 1) \cdot (D_{\text{жел}} - T)\Big)\%\Big(n - T\Big). \end{cases}$$

Применимо и для $n \leqslant D_{\text{жел}}$, при этом $1 \to 1$; результат отличается от $\operatorname{round}_{\sum}\left(\frac{count(j)}{n} \cdot D_{\text{жел}}\right)$.

(В) $\sum count(j) = n$ к $\sum \nu(j) = D_{\text{жел}} \geqslant 4T$, все малые частоты в 1

Приведение (В) — аналогично $\operatorname{round}\left(\frac{count(i)}{\max(count)} \cdot Max\right)$: для больших $\nu(j) \approx \frac{count(j)}{n} \cdot D_{\text{жел}}$,

при $\frac{1}{2} < \frac{count(j)}{n} \cdot D_{\text{жел}} < \frac{3}{2}\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{n}{D_{\text{жел}}} < count(j) < \frac{3}{2} \cdot \frac{n}{D_{\text{жел}}}\right)$ $\nu(j) \approx 1$; при меньшем принудительно 1.

1. Для $count(j) = 0$ записываем $\nu(j) = 0 \implies$ осталось $T \leqslant 2^k$ ненулевых $count(j)$, $\sum count(j) = n$.
2. Для $1 \leqslant count(j) < \frac{3n}{2D_{\text{жел}}}$ записываем $\nu(j) = 1$ (пусть их $T_1 \leqslant T$ штук и $\sum count(j) = n_1 \leqslant n$).

   При этом $T_1 < T$ и $n_1 < n$ (если $T_1 = T$, то $n = \sum count(j) < \sum \frac{3n}{2D_{\text{жел}}} = T \cdot \frac{3n}{2D_{\text{жел}}}$, но $D_{\text{жел}} \geqslant 4T$).
3. Оставшиеся $T - T_1$ частот с $\sum count(j) = n - n_1$ приводим к $\sum \nu(j) = D_{\text{жел}} - T_1$.

$$x(j) = \begin{cases} 0, & count(j) = 0, \\ 1, & 1 \leqslant count(j) < \frac{3n}{2D_{\text{жел}}}, \\ \frac{count(j) \cdot (D_{\text{жел}} - T_1)}{n - n_1}, & count(j) \geqslant \frac{3n}{2D_{\text{жел}}}; \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad \nu(j) = \operatorname{round}_{\sum}\Big(x(j)\Big).$$

При $D_{\text{жел}} \geqslant 4T$ в третьем случае $\frac{count(j) \cdot (D_{\text{жел}} - T_1)}{n - n_1} > \frac{\frac{3n}{2D_{\text{жел}}} \cdot (D_{\text{жел}} - T)}{n} = \frac{3}{2} \cdot \left(1 - \frac{T}{D_{\text{жел}}}\right) \geqslant \frac{9}{8} > 1$.

Применимо и для $n \leqslant D_{\text{жел}}$, при этом $1 \to 1$; отличается от $\operatorname{round}_{\sum}\left(\frac{count(j)}{n} \cdot D_{\text{жел}}\right)$ и от (А).

Приведение (A) и (B): $n < D_{\text{жел}}$

Пусть $D_{\text{жел}} = 2^6 = 64$ и $\overrightarrow{count} = (0, 3, 1, 16, 17, 1, 0, 2)$, $n = \sum count(j) = 40$; ненулевых частот $T = 6$:

Приведение (A): $D_{\text{жел}} - T = 58$, $n - T = 34$:

$$\begin{cases} count(j) = 0: & y(j) = 0, \\ count(j) > 0: & y(j) = \left\lfloor \frac{(count(j)-1)\cdot(D_{\text{жел}}-T)}{n-T} \right\rfloor + 1, \end{cases} \quad r(j) = 0; \quad r(j) = \Big(\big(count(j)-1\big)\cdot(D_{\text{жел}}-T)\Big)\%\Big(n-T\Big).$$

j	0	1	2	3	4	5	6	7	$\sum$
$r(j)$	0	14	0	20	10	0	0	24	
$y(j)$	0	4	1	26	28	1	0	2	62
$\nu(j)$	0	4	1	27	28	1	0	3	64

$\Delta_y = D_{\text{жел}} - \sum y = 2$

Приведение (B): $\frac{3n}{2D_{\text{жел}}} \approx 0{,}9 \implies$ значений $1 \leqslant count(j) < \frac{3n}{2D_{\text{жел}}}$ нет, $T_1 = n_1 = 0$

$$\begin{cases} count(j) = 0: & y(j) = 0, & r(j) = 0; \\ 1 \leqslant count(j) < \frac{3n}{2D_{\text{жел}}}: & y(j) = 1, & r(j) = 0; \\ \frac{3n}{2D_{\text{жел}}} \leqslant count(j): & y(j) = \left\lfloor \frac{count(j)\cdot(D_{\text{жел}}-T_1)}{n-n_1} \right\rfloor, & r(j) = \Big(count(j)\cdot(D_{\text{жел}}-T_1)\Big)\%\Big(n-n_1\Big). \end{cases}$$

j	0	1	2	3	4	5	6	7	$\sum$
$r(j)$	0	32	24	24	8	24	0	8	
$y(j)$	0	4	1	25	27	1	0	3	61
$\nu(j)$	0	5	2	26	27	1	0	3	64

$\Delta_y = D_{\text{жел}} - \sum y = 3$