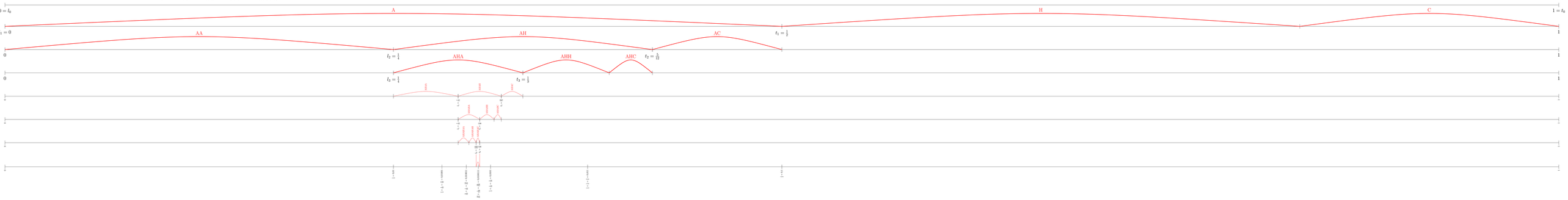
Геометрическая интерпретация арифметического кодирования сообщения $C = \text{АНАНАС}$. Все величины вещественные; расчёты абсолютно точные.

Алфавит $A = \{\text{A}, \text{H}, \text{C}\}$ упорядочен по убыванию частот $\nu = \{\frac{3}{6}, \frac{2}{6}, \frac{1}{6}\}$ (при совпадении частот использовался бы изначальный алфавитный порядок).

Начальный рабочий полуинтервал $[l_0, t_0) = [0, 1)$.

На шаге i предыдущий полуинтервал $[l_{i-1}, t_{i-1})$ разбивается на три (по числу символов алфавита) части, длины которых пропорциональны частотам символов. В соответствии с символом c_i сообщения из этих частей выбирается следующий полуинтервал $[l_i, t_i) \subseteq [l_{i-1}, t_{i-1})$: $[l_i, t_i) = \begin{cases} [l_{i-1}, \quad l_{i-1} + \frac{3}{6}\Delta_{i-1}), & c_i = \text{A}, \\ [l_{i-1} + \frac{3}{6}\Delta_{i-1}, \ l_{i-1} + (\frac{3}{6} + \frac{2}{6})\,\Delta_{i-1}) \ = \ [l_{i-1} + \frac{3}{6}\Delta_{i-1}, \ l_{i-1} + \frac{5}{6}\Delta_{i-1}), & c_i = \text{H}, \ \text{где } \Delta_{i-1} = t_{i-1} - l_{i-1}. \\ [l_{i-1} + \frac{5}{6}\Delta_{i-1}, \ l_{i-1} + (\frac{5}{6} + \frac{1}{6})\,\Delta_{i-1}) \ = \ [l_{i-1} + \frac{5}{6}\Delta_{i-1}, \ t_{i-1}), & c_i = \text{C}, \end{cases}$

Получаем последовательность полуинтервалов: $\underset{\text{A}}{[0,1)} \supseteq \underset{\text{AH}}{[l_1,t_1)} \supseteq \underset{\text{AHA}}{[l_2,t_2)} \supseteq \underset{\text{AHAH}}{[l_3,t_3)} \supseteq \underset{\text{AHAHA}}{[l_4,t_4)} \supseteq \underset{\text{AHAHAC}}{[l_5,t_5)} \supseteq [l_6,t_6)$. ($l_i \in \mathbb{R}, t_i \in \mathbb{R}$). В последнем полуинтервале $[l_6, t_6)$ выбирается точка $z \in [l_6, t_6)$ такая, что её двоичное представление конечно (и самое короткое из всех точек $[l_6, t_6)$): здесь $z = 0{,}0100111$. Дробная часть z (биты 0100111) — код сообщения z.



Геометрическая интерпретация целочисленной реализации арифметического кодирования сообщения $C = \text{АНАНАС}$ и соответствие целочисленных ℓ и $\mathfrak{t}$ точкам вещественного полуинтервала $[0, 1)$. Над осью — целочисленные изображения из $[0, N)$ (используется $N = 1024$). Под осью — вещественные значения из $[0, 1)$.

Бледно-синей широкой линией ▬ показана та часть $[Q_0, Q_N)$ вещественного полуинтервала $[0, 1)$, которая в данный момент изображается целочисленным полуинтервалом $[0, N)$. Спины цветом отмечены также биты, совпадающие для всех вещественных точек, изображаемых $[0, N)$.

Для удобства целочисленных расчётов вещественные накопленные частоты $\{0, \frac{3}{6}, \frac{5}{6}, 1\} = \{\frac{3}{6}, \frac{2}{6}, \frac{1}{6}, \frac{0}{6}\}$ заменены на совокупность целочисленных накопленных частот $\omega = \{0, 3, 5, 6\}$ и общего знаменателя (делителя) $D = 6$. Ненакопленные частоты символов также целочисленные: $\{\frac{3}{6}, \frac{2}{6}, \frac{1}{6}\} = \{\frac{3}{6}, \frac{2}{6}, \frac{1}{6}\} \Longrightarrow \nu = \{3, 2, 1\}$ $\left(\text{и } D = \sum_j \nu_j\right)$.

j	0	1	2	3
$\xi_j \in A$		A	H	C
$\nu_j \in \mathbb{N}$		3	2	1
$\omega_j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$	0	3	5	6

$D = \sum_{j=0}^{T} \nu_j = \omega_T = 6$, где $T = 3$ — размер алфавита; $\xi_1, \ldots \xi_T \in A$ — символы алфавита в порядке убывания частот ($a_1, \ldots a_T$ — они же в оригинальном алфавитном порядке); $\nu_1, \ldots \nu_T \in \mathbb{N}$ — целочисленные частоты (для больших файлов нормируются для экономии места в заголовке и достижения $N >> 4D^2$, но так, что если символ ξ_j встречается в файле хотя бы один раз, $\nu_j > 0$); $\omega_0, \omega_1, \ldots \omega_T \in \mathbb{N}$ — целочисленные накопленные частоты для расчёта границ символов: $\omega_0 = 0$, далее $\omega_j = \omega_{j-1} + \nu_j$.

$N = 1024 : \frac{N}{2} = 512, \frac{N}{4} = 256, \frac{3N}{4} = 768$

Целочисленные изображения ℓ и $\mathfrak{t}$ не являются *точечными* изображениями l_i и t_i вещественной реализации при $i > 1$ (погрешность накапливается), но при декодировании погрешность компенсируется (при $N = 2^n >> 4D^2$; N должно быть одно и то же про кодировании и декодировании).

Начальный рабочий целочисленный полуинтервал $[l, t) = [0, N)$, и вначале он соответствует вещественному $[0, 1)$.

На шаге i выполняется:

– сокращение полуинтервала с учётом символа $c_i = \xi_j$ (то есть порядковый номер символа в сообщении i, а номер этого же символа в переупорядоченном по убыванию частот алфавите j) — предыдущий полуинтервал $[l, t)$ разбивается на части, длины которых пропорциональны частотам символов, и выбирается j-я, границы которой могут быть рассчитаны по формулам:

$\Delta = t - l$, $\begin{cases} t \to l + \frac{3\omega_{j-1}}{D}, \\ t \to l + \frac{3\omega_j}{D}; \end{cases}$

– одно или несколько (или ни одного) *масштабирований* (увеличений масштаба) — изменений вещественных границ $[Q_0, Q_N)$ целочисленного изображения $[0, N)$. Размер $[Q_0, Q_N)$ при каждом масштабировании уменьшается вдвое; расстояния на его изображении $[0, N)$ — вдвое увеличиваются.