Российская академия наук
Институт систем энергетики им. Л.А. Мелентьева СО РАН
Иркутский государственный университет

Российский научный фонд

Семинар с международным участием

НЕУСТОЙЧИВЫЕ ЗАДАЧИ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ

СБОРНИК ТЕЗИСОВ

15–19 августа 2022 г.
Иркутск

Иркутск
2022

УДК 517.977+517.983+517.988+517.63+519.642

Неустойчивые задачи вычислительной математики: Тезисы семинара с международным участием, Иркутск, 15–19 августа 2022 года. – Иркутск: ИГУ, 2022. – 42 с.

В данном сборнике представлены работы, посвященные различным классам обратных и некорректно поставленных задач: вырожденным и плохо обусловленным системам линейных алгебраических уравнений, интегральным уравнениям I рода, сингулярным системам обыкновенных дифференциальных уравнений и т.д.

Для научных работников, студентов и аспирантов, специализирующихся в соответствующих областях вычислительной математики.

Сборник подготовлен при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 22-21-00409)

Ответственные за выпуск: *д.т.н. Солодуша С.В.*
к.ф.-м.н. Маркова Е.В.

Russian Academy of Sciences (RAS)
Melentiev Energy Systems Institute, Siberian Branch of RAS
Irkutsk State University

Russian Science Foundation

ABSTRACTS OF

Seminar with international participation

Unstable problems of computational mathematics

August, 15–19, 2022
Irkutsk

Irkutsk
2022

Unstable problems of computational mathematics: Abstracts of the Seminar with international participation, August, 15–19, 2022, Irkutsk. Irkutsk: Irkutsk State University. – 2022. – 42 p.

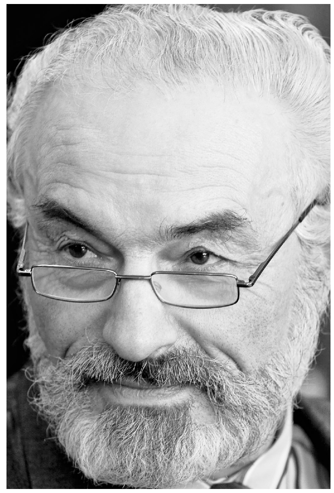
This collection presents papers devoted to various classes of inverse and ill-posed problems: degenerate and ill-conditioned systems of linear algebraic equations, integral equations of the first kind, singular systems of ordinary differential equations, etc.

For researchers, students and graduate students specializing in the relevant areas of computational mathematics.

Publication of the abstracts is supported by Russian Science Foundation (project 22-21-00409)

СОДЕРЖАНИЕ

Апарцин Анатолий Соломонович
(14.03.1942 – 05.07.2018)



Анатолий Соломонович родился 14 марта 1942 года в г. Хабаровске. Во время войны семья Апарциных переехала в г. Иркутск, где Анатолий Соломонович провел свое детство и юность. После окончания школы он поступил на физико-математический факультет Иркутского государственного университета им. А.А. Жданова. Закончив четвертый курс, как один из лучших студентов-математиков университета, Анатолий Соломонович был направлен на учебу на механико-математический факультет Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова и закончил его, получив диплом с отличием. По окончании учебы он был принят на работу в СЭИ СО АН (позже ИСЭМ СО РАН), где в дальнейшем возглавил лабораторию неустойчивых задач вычислительной математики.

Анатолий Соломонович является ярким последователем академика А.Н. Тихонова, область научных интересов его весьма широка – интегральные уравнения типа Вольтерра, некорректные задачи вычислительной математики. В ряде работ им разработана классификация слабо неустойчивых задач математической физики, предложен общий подход к построению методов регуляризации таких задач. Следует отметить статью 1972 г., на которую ссылаются до сих пор (Апарцин А. С., Бакушинский А.Б. Приближенное решение интегральных уравнений Вольтерра I рода методом квадратурных сумм // Дифференциальные и интегральные уравнения. 1972. Вып. 1. С. 248–258.). В ней установлено, что квадратурный метод правых прямоугольников решения интегрального уравнения Вольтерра I рода порождает регуляризующий алгоритм, если шаг сетки трактовать как параметр регуляризации, согласованный с мерой погрешности исходных данных. Апарциным развиты новые подходы, методы и алгоритмы решения неклассических интегральных уравнений Вольтерра I рода. В ряде работ Анатолия Соломоновича развита техника получения неулучшаемых оценок непрерывных решений линейных интегральных и разностных неравенств, которые лежат в основе исследования устойчивости n-мерного интегрального уравнения Вольтерра I рода и его сеточных аналогов. В терминах W-функции Ламберта им получены неулучшаемые оценки непрерывных решений некоторых нелинейных интегральных неравенств, играющих важную роль в теории полиномиальных интегральных уравнений типа Вольтерра.

Цикл работ Анатолия Соломоновича связан с моделированием динамических систем типа «черного ящика» с помощью интегро-степенных рядов (полиномов) Вольтерра. Он разработал способ идентификации ядер полиномов Вольтерра по информации об откликах динамической системы на тестовые возмущения, представляемые в виде линейной комбинации функций Хевисайда. При этом задача идентификации сводится к решению многомерных линейных неклассических уравнений Вольтерра I рода, допускающих явные формы обращения. Разработаны квадратурные методы численного решения подобных уравнений, обладающие саморегуляризующим свойством. Развитый математический аппарат успешно применяется в ИСЭМ СО РАН для моделирования динамики тепло- и электроэнергетических объектов.

Большая часть работ Анатолия Соломоновича связана с моделированием развивающихся систем с помощью интегральных уравнений Вольтерра I рода с переменными верхним и нижним пределами интегрирования. В его работах исследован вопрос корректности таких уравнений, предложены и теоретически обоснованы методы их численного решения. С помощью неклассического уравнения Вольтерра I рода была решена задача определения долгосрочных стратегий ввода электрических мощностей с учетом выбывания устаревшего оборудования ЭЭС России. Цикл совместных с коллегами работ Анатолия Соломоновича посвящен решению задачи оптимального управления сроками службы оборудования крупной ЭЭС. Для моделирования процессов старения и замены элементов развивающейся системы Апарциным введено тестовое интегральное уравнение Вольтерра I рода для n возрастных групп и рассмотрен вопрос корректности решения такого уравнения. Анализ устойчивости решения уравнения показал, что при степенном росте модуля коэффициента старшей возрастной группы решение с течением времени неизбежно становится неустойчивым.

Научные труды А.С. Апарцина по некорректным задачам получили признание среди специалистов в России и во всем мире. Многогранна и плодотворна была не только научная, но и педагогическая деятельность Анатолия Соломоновича. В родном ИГУ Анатолий Соломонович преподавал основные и специальные курсы на математическом факультете. Долгие годы он был организатором и председателем секции «Обратные и некорректные задачи прикладной математики» Байкальской международной школы-семинара «Методы оптимизации и их приложения». Его незаурядный талант организатора, настойчивость и доброе отношение воспитали достойную плеяду учеников. Анатолий Соломонович был ревностным хранителем математической культуры в научных трудах. Коллеги отмечают его добросовестность в работе, чуткое руководство и доброжелательное отношение.

Кроме того, Анатолий Соломонович был известен как сильный шахматный игрок и хранитель традиций шахматного клуба института. Еще он был неутомимым велосипедистом и заядлым рыбаком. Каждое лето отправлялся в одиночный поход на Байкал к озеру Фролиха.

Анатолий Соломонович ушел из жизни 5 июля 2018 г., но его энергия, увлечённость не перестаёт вдохновлять учеников и последователей, продолжающих дело его жизни. Светлая память об Анатолии Соломоновиче будет жить в наших сердцах.

ЗАДАЧА ЛОКАЛИЗАЦИИ ЛИНИЙ РАЗРЫВА ЗАШУМЛЕННОЙ ФУНКЦИИ: ИССЛЕДОВАНИЕ АЛГОРИТМОВ

А. Л. Агеев, Т. В. Антонова

Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН, Екатеринбург, Россия

e-mail: ageev@imm.uran.ru; tvantonova@imm.uran.ru

Рассматривается некорректно поставленная задача локализации (определения положения) линий разрыва функции двух переменных при условии, что вне линий разрыва функция гладкая, а в каждой точке на линии имеет разрыв первого рода. Проблемы такого рода возникают, например, при обработке изображений, когда границы объектов являются линиями разрыва функции-изображения. На объекте могут располагаться объекты различной природы: естественные и искусственные. Границы искусственных объектов обычно являются кусочно-гладкими. В то время как границы естественных объектов могут быть негладкими, в частности, фрактальными.

Для равномерной сетки с шагом τ предполагается, что в каждом узле известны средние значения на квадрате со стороной τ от возмущенной функции и возмущенная функция приближает точную функцию в пространстве $L_2(\mathbb{R}^2)$. Уровень возмущения δ считается известным. Легко видеть, что при таком типе возмущений задача локализации является некорректно поставленной, следовательно, для ее решения необходимо строить регуляризирующие алгоритмы.

Для решения рассматриваемой задачи на основе процедур усреднения конструируются глобальные дискретные алгоритмы приближения линий разрыва Γ подмножеством T^δ точек равномерной сетки [1–3]. Формулируются условия на точную функцию и строятся классы корректности, содержащие функции с линиями разрыва разных типов. Исследуется работа построенных алгоритмов на введенных классах (получаются оценки точности локализации и других важных характеристик методов).

Введем для множеств $U, V \subset \mathbb{R}^2$ меру близости множества U к множеству V:

$$\mu(U,V) = \sup_{(u_1,u_2)\in U} \inf_{(v_1,v_2)\in V} \sqrt{(u_1-v_1)^2+(u_2-v_2)^2}.$$

В работах [1–3] при условии, что точная функция принадлежит классу корректности, и при выборе параметра регуляризации порядка $O(\delta)$ получены оценки точности локализации линий разрыва Γ подмножеством T^δ точек равномерной сетки: величина $\mu(\Gamma, T^\delta)$ имеет порядок $O(\delta)$, величина $\mu(T^\delta, \Gamma)$ также имеет порядок $O(\delta)$, но с большей константой.

Построены примеры функций с разными типами линий разрыва (в т. ч. фрактальными), которые могут быть локализованы предложенными алгоритмами.

[1] Агеев А. Л., Антонова Т. В. К вопросу о глобальной локализации линий разрыва функции двух переменных // Тр. ин-та матем. и механики. 2018. Т. 24, № 2. С. 12–23.

[2] Агеев А. Л., Антонова Т. В. О локализации негладких линий разрыва функции двух переменных // Тр. ин-та матем. и механики. 2019. Т. 25, № 2. С. 12–23.

[3] Агеев А. Л., Антонова Т. В. Новые оценки точности методов локализации линий разрыва зашумленной функции // Сиб. журн. вычисл. математики. 2020. Т. 23, № 4. С. 351–363.

РЕГУЛЯРИЗУЮЩИЕ АЛГОРИТМЫ ДЛЯ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ С РЕШЕНИЕМ, СОДЕРЖАЩИМ РАЗЛИЧНЫЕ ТИПЫ ОСОБЕННОСТЕЙ

В. В. Беляев[1,2], В. В. Васин[1,2]

[1] *Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН, Екатеринбург, Россия*
[2] *Уральский федеральный университет имени первого Президента России Б. Н. Ельцина, Екатеринбург, Россия*
e-mail: beliaev_vv@mail.ru; vasin@imm.uran.ru

Исследуется некорректно поставленная задача в форме линейного уравнения

$$Au = f$$

на паре нормированных пространств U, F с непрерывным оператором A; правая часть задана приближенно элементом f_δ, $\|f - f_\delta\| \le \delta$.

В работе рассмотрен модифицированный метод регуляризации Тихонова при условии, что решение линейного операторного уравнения представимо в виде суммы двух компонент с различными свойствами гладкости.

В одномерном случае рассмотрена двухкомпонентная модификация метода Тихонова для двух постановок: 1) решение содержит разрывы и изломы, 2) решение содержит разрывы и гладкий фон. Доказаны теоремы о существовании нормального решения, сходимости приближенных решений.

В многомерном случае рассмотрена двухкомпонентная модификация метода Тихонова, при условии, что решение содержит разрывы и гладкий фон, сначала при фиксированном параметре сглаживания обобщенной вариации, затем при стремлении этого параметра сглаживания к нулю. Доказаны теоремы о существовании нормального решения, сходимости регуляризующих алгоритмов, сходимости дискретных аппроксимаций регуляризованных компонент.

В качестве иллюстрации метода приведены результаты численных экспериментов решения уравнения Фредгольма I-го рода в одномерном и двумерном случаях. Рассматриваются примеры как с точными, так и с возмущенными исходными данными, когда решение разрывно, решение имеет разрывную производную. А также рассмотрены случаи с разделением решения на несколько компонент: компоненту с разрывами, компоненту с разрывами производной, гладкую компоненту.

[1] Belyaev V. V. Analysis of the modified Tikhonov method for solving a linear ill-posed problem with a solution containing continuous and discontinuous components // Eurasian J. Math. Comput. Appl. 2020. Vol. 8. Iss. 3. P. 4–11.

[2] Vasin V. V., Belyaev V. V. The Modified Tikhonov regularization method with the smoothed total variation // Eurasian J. Math. Comput. Appl. 2021. Vol. 9. Iss. 2. P. 88–100.

НЕПАРАМЕТРИЧЕСКАЯ ИДЕНТИФИКАЦИЯ ДИНАМИКИ ТЕПЛОЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ

В. А. Боева

Новосибирский государственный архитектурно-строительный университет (Сибстрин), Новосибирск, Россия
e-mail: v.boyeva@sibstrin.ru

Решаются задачи непараметрической идентификации переходных характеристик нелинейных стационарных теплоэнергетических объектов на основе экспериментальных исходных данных. На основе имеющихся имитационных моделей [1, 2] строятся аналитические модели типа «вход-выход» радиационного теплообменника в составе экспериментальной установки и конденсатора на участке пароводяного тракта энергоблока электростанции на основе квадратичного полинома Вольтерра [3]:

$$y(t) = \sum_{n=1}^{N} f_n(t), \tag{1}$$

$$\int_0^t K_1(s)x(t-s)ds + \int_0^t \int_0^t k_2(s_1, s_2)x(t-s_1)x(t-s_2)ds_1 ds_2 = y(t),\ t \in [0, T], \tag{2}$$

где $x(t)$, $y(t)$ – скалярные входной и выходной сигналы исследуемого объекта; K_n – его импульсные переходные функции (ИПФ), называемые ядрами Вольтерра. Задача непараметрической идентификации переходной характеристики нелинейного объекта заключается в нахождении оценки квадратичного ядра ряда Вольтерра $K_2(t, \omega)$ по зарегистрированным значениям выходного сигнала $f_2(t, \omega)$. Входной сигнал объекта $x(t)$ представлен линейной комбинацией скалярных ступенчатых функций Хэвисайда некоторой амплитуды (высоты) A [4]. Специфика исследуемых моделей заключается в том, что в качестве входных и выходных величин принимаются реальные физические параметры в отклонениях от начальных стационарных значений.

Редукция исходной задачи идентификации ядер Вольтерра к решению многомерных интегральных уравнений Вольтерра I рода допускает явные формулы обращения [3], требующие устойчивого вычисления производных второго порядка от эмпирических функций:

$$K_2(t, t-\omega) = K_2(t-\omega, t) = \frac{f''_{2t\omega}(t, \omega) + f''_{2\omega^2}(t, \omega)}{2},\ t, \omega \in \Delta_2,\ \Delta_2 = \{t, \omega : 0 \le \omega \le t \le T\}.$$

Устойчивое дифференцирование обеспечивается аппаратом сглаживающего бикубического сплайна (СБС). Разработан алгоритм идентификации квадратичного ядра ряда Вольтерра на основе СБС, учитывающий особенности практических задач идентификации. Формулируются краевые условия нового типа, позволяющие одновременно задавать комбинации различных классических краевых условий на границах построения сплайна. Вводятся понятия скалярного и векторного параметров сглаживания [5], рассчитывается коэффициент их эффективности на каждом этапе алгоритма. Модифицирован поиск оптимальных параметров сглаживания СБС по переменным t, ω при наличии/отсутствии априорной информации о числовых характеристиках шума измерений в дифференцируемом выходном сигнале $f_2(t, \omega)$. Рассматривается эффективность этапов предобработки зашумлённого сигнала $f_2(t, \omega)$ и постобработки идентифицированной оценки ядра $\hat{K}_2(t, \omega)$ с помощью двумерного локально-пространственного комбинированного фильтра.

Верификация построенных аналитических моделей и анализ эффективности численных методов проводится путём сравнения полученных характеристик с эталонными, в качестве которых принимаются характеристики имитационных моделей. Показано, что методическая ошибка предлагаемого алгоритма близка к нулю. Показано, что при наличии шума измерений в дифференцируемом выходном сигнале $f_2(t, \omega)$ уровней $\delta_\eta = 2 \div 14\%$ идентификация ядра $K_2(t, \omega)$ предлагаемым алгоритмом повышает точность искомой оценки ядра в среднем в два раза.

Работа продолжает исследования [5–7]. Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 22-21-00409).

[1] Солодуша С. В. К задаче моделирования динамики теплообменников квадратичными полиномами Вольтерра // Автоматика и телемеханика. 2014.№ 1. С. 105–114.

[2] Таиров Э. А., Логинов А. А., Чистяков В. Ф. Математическая модель, численные методы и программное обеспечение тренажера для энергоблока Иркутской ТЭЦ. Иркутск: СЭИ СО РАН, 1999. Препринт № 11. 43 с.

[3] Apartsin A. S. Nonclassical Volterra Integral Equations of the First Kind : Theory and Numerical Methods. VSP, Utrecht-Boston, 2003. 168 p.

[4] Apartsyn A. S. Mathematical modelling of the dynamic systems and objects with the help of the Volterra integral series // EPRI–SEI Joint Seminar. 1991. P. 117–132.

[5] Воскобойников Ю. Е., Боева В. А. Оценивание оптимальных скалярного и векторного параметров сглаживающего бикубического сплайна // Междунар. науч.-исследовательский журн. 2022. № 4 (118). Ч. 1. С. 31–39.

[6] Воскобойников Ю. Е., Боева В. А. Идентификация квадратичного ядра уравнения Вольтерра для моделирования нелинейных динамических систем // Системы анализа и обработки данных. 2022. Т. 85. № 1. С. 25–40.

[7] Воскобойников Ю. Е., Боева В. А. Устойчивый алгоритм вычисления смешанных производных в задачах непараметрической идентификации нелинейных систем // Современные наукоёмкие технологии. 2021. № 4. С. 25–29.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ КАК КЛАСС НЕКОРРЕКТНЫХ ЗАДАЧ

М. В. Булатов

Институт динамики систем и теории управления им. В.М. Матросова СО РАН, Иркутск, Россия
e-mail: mvbul@icc.ru

Доклад посвящен системам обыкновенных дифференциальных уравнений с тождественно вырожденной матрицей перед главной частью. Основное внимание уделено сложностям их исследования и численного анализа как класса некорректных задач.

Рассмотрены системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$A(t)x'(t) = f(x(t),t),\ t \in [0,1], \tag{1}$$

где $A(t)$ – $(n \times n)$-матрица, $f(x(t),t)$ – заданная n-мерная вектор-функция.

Предполагается, что

$$det A(t) \equiv 0 \tag{2}$$

и входные данные (1) обладают той гладкостью, которая необходима для проведения рассуждений.

Уравнения (1) с условием (2) принято называть дифференциально-алгебраическими уравнениями (ДАУ). Также предполагается, что заданы начальные условия

$$x(0) = x_0. \tag{3}$$

Приведены математические модели, которые описываются ДАУ (1). Подчеркнуто, что рассматриваемый класс задач относится к некорректным, т.е.

1) решение в классе достаточно гладких функций может не существовать;

2) решение может быть неединственным;

3) решение, даже если оно существует, неустойчиво к возмущениям входных данных.

Приведены иллюстративные примеры.

Дан исторический обзор по данной тематике и необходимые для дальнейшего изложения понятия и определения. Подчеркнуты принципиальные трудности, возникающие при создании численных методов решения задачи (1), (3) с условием (2).

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 22-11-00173.

ПОСТРОЕНИЕ И ИССЛЕДОВАНИЕ НЕКЛАССИЧЕСКИХ РАЗНОСТНЫХ СХЕМ ДЛЯ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВОЛЬТЕРРА II РОДА

М. В. Булатов[1], М. Н. Ботороева[2]

[1]*Институт динамики систем и теории управления им. В.М. Матросова СО РАН, Иркутск, Россия*
e-mail:mvbul@icc.ru
[2]*Иркутский государственный университет, Иркутск, Россия*
e-mail: botoroevamn@pi.isu.ru

При моделировании различных динамических систем и исследовании свойств вязкоупругих сред часто возникают нелинейные интегральные уравнения Вольтерра (ИУВ) II рода

$$x(t) = \int\limits_0^t F(t, s, x(s))ds + f(t), \quad 0 \le t \le 1 \tag{1}$$

или линейные ИУВ II рода, когда $F(t, s, x(t)) = K(t, s)x(t)$, которые при достаточно гладких входных данных $K(t, s)$ и $f(t)$ имеют единственное непрерывное решение $x(t)$.

Среди обширного списка публикаций, посвященных исследованию уравнений вида (1), можно выделить, например, труды [1–4]. Для численного решения ИУВ II рода предложено достаточное количество весьма эффективных методов: блочные методы, одношаговые методы типа Рунге-Кутта и их модификации, многошаговые методы и др. (см., например, монографии [3, 4]). Перечисленные методы можно условно разделить на явные и неявные методы.

Несмотря на то, что ИУВ II рода можно отнести к классу наиболее полно изученных интегральных уравнений, весьма актуальным остается вопрос построения численных методов для решения ИУВ II рода, содержащих быстро и медленно изменяющиеся компоненты (так называемые, жесткие уравнения). Реализация явных методов для таких уравнений требует выбора малого шага интегрирования. Использование неявных методов приводит к необходимости использования вспомогательного итерационного процесса для разрешения возникающих на каждом шаге интегрирования систем нелинейных уравнений.

В докладе будут предложены безытерационные неклассические разностные схемы для решения жестких ИУВ II рода и проведен анализ их устойчивости.

Работа выполнена при поддержке Российского научного Фонда (проект № 22-11-00173).

[1] Краснов М. Л. Интегральные уравнения: введение в теорию. М: Наука, 1975.

[2] Верлань А. Ф., Сизиков В. С. Интегральные уравнения: методы, алгоритмы, программы. Киев: Наукова думка, 1986.

[3] Linz P. Analytical and Numerical Methods for Volterra Equations. SIAM, Philadelphia, 1985.

[4] Brunner H., van der Houwen P. J. The numerical solution of Volterra Equations (CWI Monographs). North-Holland, Amsterdam: Elsevier Science Ltd, 1986.

О ПОСТРОЕНИИ МНОГОШАГОВЫХ МЕТОДОВ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

М. В. Булатов[1], О. С. Будникова[2]

[1]*Институт динамики систем и теории управления им. В.М. Матросова СО РАН, Иркутск, Россия*
e-mail:mvbul@icc.ru
[2]*Иркутский государственный университет, Иркутск, Россия*
e-mail: osbud@pi.isu.ru, osbud@mail.ru

В докладе рассматриваются системы дифференциальных уравнений второго порядка

$$A(t)x''(t) + B(t)x'(t) + C(t)x(t) = f(t), \quad 0 \leq t \leq 1, \tag{1}$$

где $A(t), B(t)$ и $C(t)$ – заданные $(n \times n)$ матрицы, а $f(t)$ и $x(t)$ – заданная и искомая n-мерные вектор-функции.

Начальные условия имеют следующий вид:

$$x(0) = x_0,\ x'(0) = x'_0. \tag{2}$$

Предполагается, что элементы входных данных обладают той степенью гладкости, которая необходима для проведения всех выкладок. Начальные условия (2) заданы корректно, а матрица $A(t)$ при старшей производной является тождественно вырожденной:

$$\det A(t) \equiv 0. \tag{3}$$

Задачу (1)–(2) с условием (3) принято называть дифференциально-алгебраическим уравнением (ДАУ) второго порядка.

Под решением такой задачи будем понимать любую достаточно гладкую вектор-функцию, обращающую (1) в тождество и удовлетворяющую начальным условиям (2).

Конструирование численных алгоритмов для ДАУ второго порядка является нетривиальной задачей. В настоящее время разработка численных методов для выделенного класса задач основана на записи исходного ДАУ второго порядка в виде ДАУ первого порядка посредством введения новой вектор-функции [1], что влечет за собой увеличение размерности исходной задачи.

В докладе будет рассмотрен альтернативный подход к численному решению рассматриваемого класса задач. Указанный подход основан на переходе от ДАУ второго порядка к его интегральным аналогам – к системам интегро-дифференциальных уравнений или интегральных уравнений с тождественно вырожденной матрицей в главной части и построению для них многошаговых методов с применением специальной экстраполяции.

Работа выполнена при поддержке Российского научного Фонда (проект № 22-11-00173).

[1] Mehrmann V., Shi C. Transformation of high order linear differential-algebraic systems to first order// Numerical Algorithms. 2006. Vol. 42. P. 281-307.

ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ С АПРИОРНОЙ ИНФОРМАЦИЕЙ И ВЫСОКОТОЧНЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ

В. В. Васин

Институт математики и механики УрО РАН, Екатеринбург, Россия
Уральский федеральный университет, Екатеринбург, Россия
e-mail: vasin@imm.uran.ru

Рассмотрим некорректно поставленную обратную задачу в форме линейного или нелинейного операторного уравнения первого рода $Au = f$ на паре нормированных пространств U, F. Зададимся вопросом, возможно ли повысить точность приближенного решения уравнения на основе классических регуляризующих алгоритмов? По-видимому, единственный способ улучшить качество приближенного решения и повысить достоверность окончательного результата — привлечение всей имеющейся априорной информации о решении и ее учете в базовом регуляризующем алгоритме с помощью соответствующей его модификации. Это особенно важно в случае неединственннсти решения, поскольку без предварительной процедуры локализации искомого решения можно получить приближенное решение, не соответствующее физической реальности. В докладе обсуждаются различные способы учета априорных ограничений в алгоритме, в частности, наиболее общий, гибкий и экономичный метод фейеровских отображений при использовании базовых итерационных процессов [1, 2]. Необходимость учета априорных сведений о решении в алгоритме возникает также при восстановлении искомого решения, содержащего одновременно несколько типов особенностей, например, разрывы и изломы на фоне гладкого участка. В этой ситуации целесообразно привлекать многокомпонентный метод регуляризации Тихонова, в котором при условии, что решение допускает представление в виде суммы нескольких компонент, где каждая компонента имеет только один тип особенностей, стабилизатор строится в форме суммы функционалов, каждый из которых зависит от одной компоненты и учитывает особенность именно этой компоненты [3]. В докладе демонстрируются решения некоторых прикладных задач, в которых реализованы высокоточные алгоритмы [1, 4].

Работа выполнена при частичной поддержке РНФ (проект № 18-11-00024-П).

[1] Васин В. В., Агеев А. Л. Некорректные задачи с априорной информацией. Екатеринбург: УИФ «Наука», 1993.

[2] Васин В. В. Основы теории некорректных задач. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2020.

[3] Vasin V. V., Belyev V. V. The modified Tikhonov regularization method with the smoothed total variation the linear ill-posed problems for solving // Eurasion J. Math. Comput. Appl. 2021. Vol. 6. Issue 2. P. 88–100.

[4] Vasin V. V., Skorik G. G., Kuchuk F. A new technique for solving pressure-rate deconvolution problem in pressure transient testing // J. Eng. Math. 2016. Vol. 101. Issue 1. P. 189–200.

СГЛАЖИВАЮЩИЕ СПЛАЙНЫ В ЗАДАЧАХ НЕПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ ИДЕНТИФИКАЦИИ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Ю. Е. Воскобойников[1,2]

[1] *ФГБОУ ВО Новосибирский государственный архитектурно-строительный университет (Сибстрин), Новосибирск, Россия*
[2] *ФГБОУ ВО Новосибирский государственный технический университет, Новосибирск, Россия*
e-mail: voscob@mail.ru

При моделировании как линейных, так и нелинейных динамических систем часто используют интегральные модели «вход-выход», в качестве которых выступают интегральные уравнения Вольтерра I рода с разностным ядром. Задача непараметрической идентификации таких моделей заключается в оценивании таких ядер (или импульсных переходных функций системы) по результатам измерений входного и выходного сигналов идентифицируемой системы. Для решения задачи идентификации используют алгоритмы, включающие в себя производные от измеренных сигналов. В качестве иллюстрации этого положения приведем несколько схем идентификации с соответствующими алгоритмами вычисления ядер интегральных моделей.

Первоначально рассмотрим стационарную линейную систему, вход и выход которой определяется интегральным уравнением Вольтерра I рода с разностным ядром вида

$$\int\limits_0^t k(t-\tau)\varphi(\tau)d\tau = f(t),\ t\in[0,T], \tag{1}$$

где $\varphi(\tau)$, $f(t)$ – входной и выходной сигналы системы, $k(\tau)$ – ядро интегрального уравнения (1), оценивание которого является целью непараметрической идентификации. Если на вход системы в момент $t=0$ подается прямоугольный сигнал единичной амплитуды (функция Хэвисайда), то справедливо следующее равенство [1]:

$$k(t) = \frac{d}{dt} f_H(t) = f'_H(t),\ t\in[0,T], \tag{2}$$

где $f_H(t)$ – выход системы при таком входном воздействии. Если на вход идентифицируемой системы поступает сигнал произвольной формы, то $k(\tau)$ можно вычислить, решая следующее уравнение II рода [1]:

$$k(t) + \frac{1}{\varphi(0)}\int\limits_0^t \varphi'(t-\tau)k(\tau)d\tau = \frac{f'(t)}{\varphi(0)},\ t\in[0,T]. \tag{3}$$

Если для описания нелинейной системы используется ряд Вольтерра, ограниченный квадратичным членом, то связь между входным сигналом $\varphi(\tau)$ моделируемой стационарной системы и ее выходным сигналом $f(t)$ можно представить следующим интегральным соотношением [2]:

$$f(t) = \int\limits_0^t k_1(\tau)\varphi(t-\tau)d\tau + \int\limits_0^t\int\limits_0^t k_2(\tau,s)\varphi(t-\tau)\varphi(t-s)d\tau ds,\ t\in[0,T], \tag{4}$$

где $k_1(\tau)$, $k_2(\tau, s)$ – линейное и квадратичное ядра Вольтерра соответственно. Для оценивания квадратичного ядра можно использовать формулу [2]:

$$k_2(t-\nu, t) = \frac{f''_{2t\nu}(t,\nu) + f''_{2\nu^2}(t,\nu)}{2},\ 0 \le \nu \le t \le T, \qquad (5)$$

где $f_2(t, \nu)$ – выходной сигнал нелинейной подсистемы в (4).

Видно, что приведенные формулы (2), (3), (5) требуют устойчивого вычисления как обыкновенных, так и смешанных производных по зашумленным данным, что является некорректной задачей. Для устойчивого вычисления производных в работе используются сглаживающие кубические и бикубические сплайны. При этом решаются следующие задачи, вызывающие затруднения на практике:

• выбор и задание краевых условий;

• оценивание оптимальных значений параметров сглаживания кубических и бикубических сплайнов, как при известной дисперсии шума измерений, так и при неизвестной дисперсии.

Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ в рамках научного проекта № 22-21-00409.

[1] Воскобойников Ю. Е., Боева В. А. Алгоритмы непараметрической идентификации сложных технических систем // Научный вестник НГТУ. 2020. № 4. DOI: 10.17212/1814-1196-2020-4-47-64.

[2] Voskoboynikov Y., Solodusha S., Markova E., Antipina E., Boeva V. Identification of Quadratic Volterra Polynomials in the “Input–Output” Models of Nonlinear Systems // Mathematics. 2022. Vol. 10. P. 1836. https://doi.org/ 10.3390/math10111836.

ПРОБЛЕМА ВЕРИФИКАЦИИ ТЕОРИИ РЫНОЧНОГО СПРОСА

В. К. Горбунов

Ульяновский государственный университет, Ульяновск, Россия
e-mail: vkgorbunov@mail.ru

Проблема верификации базовой для экономической науки теории – теории рыночного спроса, в настоящее время начинается с того, что современная неоклассическая экономическая теория (Economics), составляющая основу экономического образования и исследований в большинстве стран мира, содержит нормативную (прескриптивную) математическую теорию индивидуального спроса, но не содержит позитивной (дескриптивной) теории рыночного спроса [1, Chs 1–4].

Теория индивидуального спроса выводится из модели максимизации функции полезности $u : E^n_+ \to R_+$ (E^n_+ – пространство товаров и услуг) на допустимом множестве, определяемом вектором цен $p \in E^{n*}_+$ – сопряжённое пространство, и бюджетом индивида w. Значение этой задачи в регулярном случае (однозначность, непрерывность и дифференцируемость по параметрам)

$$x(p, w) = arg \max \{u(x) : \langle p, x\rangle \le w, \;\; x \ge 0\} \tag{1}$$

называется функцией спроса.

Нереалистичность модели рыночного поведения людей (1) очевидна. Но современная Economics построена в строгих рамках *методологического индивидуализма*, согласно которому коллективный рыночный спрос должен формально определяться как сумма индивидуальных спросов вида (1). Формальная сторона невозможности реализации этой программы микрооснования макроэкономики (microfoundations of macroeconomics) хорошо известна [1, Ch. 1] и в [2, п. 1.4].

В моих работах последнего двадцатилетия, обобщённых в книге [2] и представленных в [3, 4], теория рыночного спроса разработана на основе пересмотра неоклассической теории индивидуального спроса в рамках общенаучной методологии, характеризуемой тремя качествами – объективность, доказательность и верифицируемость. Объективность подразумевает, что теория формируется на основе наблюдений основных характеристик реального объекта или явления. Реальный рыночный спрос представляется статистикой цен $p^t \in E^{n*}_+$ и количеств продаж $x^t \in E^n_+$ за отчетные периоды t:

$$\left\{p^t, x^t : t = \overline{0, T}.\right\} \tag{2}$$

Данные (2) определяют важный показатель социально-экономической динамики – совокупные потребительские расходы $e_t = \langle p^t, x^t\rangle$. Соответственно, вместо неизвестного бюджета обычно неизвестных потребителей w, в теории рыночного спроса может использоваться показатель расходов на данном рынке всех покупателей – *расходы* e, и рыночный спрос определяется этим фактором наряду с ценами:

$$x(p, e) = arg \max \{u(x) : \langle p, x\rangle \le e, \;\; x \ge 0\}\,. \tag{3}$$

Холистическая (целостная) теория рыночного спроса сохраняет формальную теорию индивидуального спроса, выводимую из аналогичной оптимизационной модели (1).

Верификация теории рыночного спроса, выводимой из модели (3), сводится к выяснению возможности рационализации статистики (2) коллективной функцией полезности

$u(\cdot)$. Это означает, что спрос (3), порождаемый некоторой функцией полезности, приближённо удовлетворяет данным (2). Степень приближения определяется по информации о погрешностях данных (2) или экспертно. Такая задача является обратной задачей теории рыночного спроса. Обратные задачи построения функций по конечному набору данных являются, как правило, некорректно поставленными и требуют регуляризации, т. е. перехода к корректным задачам, решения которых единственны и непрерывно зависят от вариаций исходных данных, аппроксимируя искомое решение. Эта процедура определяется спецификой исходной проблемы и дополнительной информацией о её решении и погрешностях данных.

Особенностью рассматриваемой задачи является неповторяемость процессов функционирования многопродуктовых потребительских рынков и, как следствие, отсутствие информации о погрешностях наблюдения их наблюдаемых показателей. При этом применение стандартных статистических методов является необоснованным [4]. В докладе будет представлен метод регуляризации, основанный на работах [5, 6] и непараметрическом анализе спроса С. Африата [7] и Х. Вэриана [8]. При этом в качестве специфической дополнительной информации используются аналитические (экономические) индексы цен и количеств потребления, вычисляемые в рамках модели (3) вариативно с содержательными свойствами “оптимистические”, “пессимистические”, “объективные” [9, 10].

[1] Mas-Colell A., Whinston M., Green J. Microeconomic Theory. New York: Oxford Univ. Press, 1995.

[2] Горбунов В. К. Потребительский спрос: Аналитическая теория и приложения. Ульяновск: УлГУ, 2015. http://www.rfbr.ru/rffi/ru/books/o_1945611.

[3] Gorbunov V. Market demand: a holistic theory and its verification // SSRN: 16 Nov 2021. https://ssrn.com/abstract=3963940 .

[4] Горбунов В. К. Особенности обратных задач моделирования экономики // Аналитические и численные методы моделирования естественно-научных и социальных проблем. Сб. статей по материалам XVI Международной научно-технической конференции. Пенза: Изд-во ПГУ, 2021. С. 14–21.

[5] Горбунов В. К. Релаксационно-штрафной метод и вырожденные экстремальные задачи // Доклады АН. 2001. Т. 377. № 5.

[6] Горбунов В. К. Регуляризация нелинейных некорректных задач с параметризованными данными // Нелинейный анализ и нелинейные дифференциальные уравнения / Ред. Треногин В.А. и Филиппов А.Ф. М.: Физматлит, 2003.

[7] Afriat S. N. The construction of utility functions from expenditure data // International Economic Review. 1967. Vol. 8. No 1. P. 67–77.

[8] Varian H. The nonparametric approach to demand analysis // Econometrica. 1982. Vol. 50. No 4. P. 945–973.

[9] Горбунов В. К., Козлова Л. А., Львов А. Г. К проблеме построения аналитических индексов рыночного спроса: вариативный подход // Вопросы статистики. 2020. Т. 27. № 3. С. 65–80.

[10] Горбунов В. К., Львов А. Г. Анализ потребительского спроса России, 2012–2017: двухэтапное построение аналитических индексов // Вопросы статистики. 2022. Т. 29. № 4.

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ МОДЕЛИ РАЗВИВАЮЩИХСЯ СИСТЕМ

Е. В. Маркова, И. В. Сидлер

Институт систем энергетики им. Л.А. Мелентьева СО РАН, Иркутск, Россия
e-mail: markova@isem.irk.ru; inna.sidler@mail.ru

Рассматриваются две интегральных модели развивающейся системы, описанные с помощью уравнения Вольтерра I рода. Одна из них соответствует случаю, когда развивающаяся система уже существует некоторое время и имеет предысторию. У другой системы момент ее возникновения совпадает с началом моделирования, так что предыстория отсутствует.

Ключевую роль в этих моделях играет интегральное уравнение Вольтерра I рода

$$\sum_{i=1}^{n} \int\limits_{a_i(t)}^{a_{i-1}(t)} K_i(t,s)x(s)ds = y(t), \quad t \in [0,T], \tag{1}$$

где $K_i(t,s)$ — непрерывный по t, s и непрерывно дифференцируемый по t в области $\Delta_i = \{t \in [0,T], s \in [a_i(t), a_{i-1}(t)]\}$ коэффициент эффективности функционирования элементов $x(s)$ i-й возрастной группы. Уравнение (1) можно трактовать как уравнение баланса между требуемым уровнем $y(t)$ развития системы, состоящей из элементов n возрастных групп, и возможностью его достижения.

Случай $a_i(0) < 0$, $i = 1, \ldots, n$, предполагает задание предыстории $x(t) = x_0(t)$, $t \in [a_n(0), 0)$. В частности, при $a_i(t) = t - T_i$, $0 < T_1 < \ldots < T_n$,

$$x(t) = x_0(t), \quad t \in [-T_n, 0).$$

Этот случай для $n = 3$ рассмотрен в [1, 2] применительно к проблеме построения долгосрочных стратегий развития электроэнергетической системы.

Случай $a_i(0) = 0$, $i = 1, \ldots, n$, соответствует совпадению моментов начала моделирования и возникновения самой системы. При этом предыстория отсутствует и при $t = 0$ $x(0) = 0$, так что все возрастные группы пусты [3].

Работа выполнена в рамках проекта государственного задания (№ FWEU-2021-0006) программы фундаментальных исследований РФ на 2021-2030 гг. с использованием ресурсов ЦКП "Высокотемпературный контур"(Минобрнауки России, проект № 13.ЦКП.21.0038).

[1] Апарцин А. С., Сидлер И. В. Применение неклассических уравнений Вольтерра I рода для моделирования развивающихся систем // Автоматика и телемеханика. 2013. № 6. С. 3-16.

[2] Труфанов В. В., Апарцин А. С., Маркова Е. В., Сидлер И. В. Интегральные модели для разработки стратегии технического перевооружения генерирующих мощностей // Электричество. 2017. № 3. С. 4-11.

[3] Markova E., Sidler I. On One Optimization Problem for the Age Structure of Power Plants Equipment // Communications in Computer and Information Science. 2021. Vol. 1476. P. 478-492. https://doi.org/10.1007/978-3-030-86433-0_33

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ СИСТЕМ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВОЛЬТЕРРА С ДРОБНЫМ ПОРЯДКОМ ИНТЕГРИРОВАНИЯ

И. Р. Муфтахов, Д. Н. Сидоров, Д. Н. Карамов

Институт систем энергетики им. Л.А. Мелентьева СО РАН, Иркутск, Россия
e-mail: ildar_sm@mail.ru; contact.dns@gmail.com; dmitriy.karamov@mail.ru

Уравнения Вольтерра могут применяться для решения многих актуальных прикладных задач в физике, экономике, теории управления и т.д. Особую роль такие уравнения играют в энергетике при решении задач функционирования энергетических систем и определения режимных показателей накопителей энергии. В данной работе рассматривается численный метод решения системы интегральных уравнений Вольтерра с дробным порядком интегрирования. Эффективность численной схемы показана на тестовых примерах.

В работе рассматривается линейная система вида

$$\int_0^t K(t,s)x(s)\,ds = f(t),\ \ 0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T,\ f(0) = 0, \tag{1}$$

где матричное ядро $K(t,s)$ имеет разрывы первого рода на кривых $s = \alpha_i(t)$, $i = 1,\dots,n-1$, т. е.

$$K(t,s) = \begin{cases} K_1(t,s),\ t,s \in D_1, \\ \ \dots\ \ \dots\dots\dots \\ K_n(t,s),\ t,s \in D_n, \end{cases} \tag{2}$$

$D_i = \{t,s \mid \alpha_{i-1}(t) < s < \alpha_i(t)\}$, $f(t) = (f_1(t),\dots,f_m(t))'$, $x(t) = (x_1(t),\dots,x_m(t))'$. Матрицы $K_i(t,s)$ — размерности $m \times m$ определены, непрерывны и имеют непрерывные производные по t в соответствующих областях $D_i = (s,t)|\alpha_{i-1}(t) < s < \alpha_i(t), i = \overline{1,n}$, $\alpha_0(t) = 0$, $\alpha_n(t) = t$. Функции $f_i(t), \alpha_i(t)$ имеют непрерывные производные, $0 < \alpha_1'(0) \leqslant \dots \leqslant \alpha_{n-1}'(0) < 1$, $f_i(0) = 0, \alpha_i(0) = 0$, $0 < \alpha_1(t) < \alpha_2(t) < \dots < \alpha_{n-1}(t) < t$ при $t \in (0,T]$. Предполагается, что каждая из матриц $K_i(t,s), i = 1,\dots,n$ имеет непрерывно дифференцируемое по t продолжение в область $0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T$. Теория систем интегральных уравнений Вольтерра первого рода с кусочно-непрерывными ядрами подробно изложена в работе [1]. В данной работе рассмотрен численный метод для решения (1) в случае дробного порядка интегрирования $\beta \geqslant 0$.

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ и Правительства Иркутской области в рамках научного проекта № 20-48-383004.

[1] Sidorov D. N. Solution to Systems of Volterra Integral Equations of the First Kind with Piecewise Continuous Kernels // Russian Mathematics. 2013. Vol. 57. P. 62–72.

[2] Tynda A., Sidorov D., Muftahov I. Numerical Analysis of Fractional Order Integral Dynamical Models with Piecewise Continuous Kernels // Bulletin of the South Ural State University Series Mathematical Modelling Programming and Computer Software. 2020. Vol. 13, no. 4. P. 60–67.

СПЕКТРАЛЬНЫЙ СПОСОБ ОЦЕНКИ ЯДРА ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ В ЗАДАЧЕ УСТРАНЕНИЯ НЕРАВНОМЕРНОГО СМАЗА ИЗОБРАЖЕНИЯ И ПОДАВЛЕНИЯ ЭФФЕКТА ГИББСА

В. С. Сизиков

Санкт-Петербургский Университет ИТМО, Санкт-Петербург, Россия
e-mail: sizikov2000@mail.ru

Аннотация. Задача устранения неравномерного смаза изображения описывается набором 1-мерных нестандартных интегральных уравнений (ИУ). Для оценки неравномерного смаза $\Delta(x)$ и, как следствие, оценки ядра ИУ (или функции рассеяния точки) предлагается "спектральный способ", повышающий точность решения ИУ и восстановления изображения. Может иметь место краевой и внутренний эффекты Гиббса. Для подавления краевого эффекта предлагается прием "размытия краев" изображения. Внутренний эффект подавляется смазыванием, выравниванием фона и регуляризацией.

Различными устройствами (фотоаппаратами, телескопами, томографами) регистрируются изображения объектов (людей, космических объектов). При этом изображение может быть искажено – смазано, зашумлено и т.д. Изображение может быть восстановлено путем решения интегральных уравнений (ИУ) [1]. Однако результат восстановления изображения зависит от точного знания неравномерного смаза $\Delta(x)$. На качество восстановления влияет также некорректность решения ИУ и возможный эффект Гиббса.

В данных тезисах рассматриваются вопросы устранения неравномерного $\Delta = \Delta(x)$ смазывания изображения, а также подавления эффекта Гиббса.

"Спектральный способ" оценки неравномерного смаза изображения. Рассмотрим сначала *прямую задачу* – моделирование неравномерного смазывания изображения:

$$g_y(x) = \frac{1}{\Delta(x)} \int_x^{x+\Delta(x)} w_y(\xi)\, d\xi, \tag{1}$$

где $\Delta(x)$ – неравномерный смаз изображения, x и ξ направлены вдоль смаза, а y – перпендикулярно смазу, w – точное заданное изображение, а g – смоделированное искаженное смазанное вдоль x изображение при каждом y, играющем роль параметра.

Обратная задача:

$$Aw_y \equiv \int_a^b h(x,\xi)\, w_y(\xi)\, d\xi = g_y(x), \qquad c \le x \le d, \tag{2}$$

где

$$h(x,\xi) = \begin{cases} 1/\Delta(x), & x \le \xi \le x + \Delta(x), \\ 0, & \text{иначе}. \end{cases} \tag{3}$$

Рассматриваем (2) как набор 1-мерных ИУ, в котором w – искомое неискаженное изображение, g – измеренное смазанное изображение, h – ядро ИУ (функция рассеяния точки – ФРТ). Для решения ИУ (2) нельзя применять ПФ, так как ИУ (2) не типа свертки. Применим метод квадратур, приводящий ИУ (2) к СЛАУ: $Aw_y = g_y$. Данную СЛАУ решаем методом регуляризации Тихонова:

$$w_{y\alpha} = (\alpha I + A^T A)^{-1} A^T g_y. \tag{4}$$

Рассмотрим далее предлагаемую методику на примере трех автомобилей (рис. 1), движущихся друг за другом с разными скоростями, в результате чего на изображении воспроизводятся разные смазы, например, $\Delta_1 = 15, \Delta_2 = 20, \Delta_3 = 25$ пк.

Рис. 1. Неравномерно смазанное изображение с размытием краев для подавления краевого эффекта Гиббса.

Далее для каждого смазанного изображения автомобиля $g(x, y)$ определим спектр Фурье по модулю $|G(\omega)|$. Разделим кусочно-равномерное смазанное изображение на 3 части g_1, g_2, g_3 и для каждой части рассчитаем спектр Фурье $|G|$ (рис. 2):

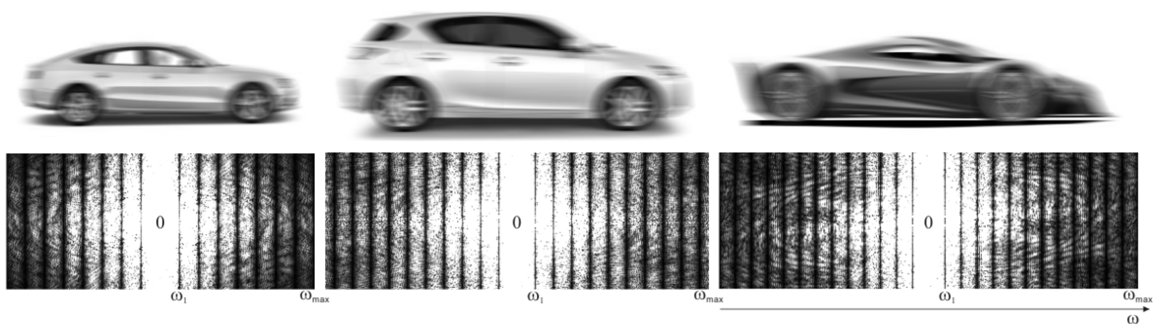


Рис. 2. Разделенные части g_1, g_2, g_3 (верхний ряд) и их спектры $|G|$.

По спектрам определим смазы (назовём это *способом раздельных спектров*) [2]:

$$\Delta = 2\,\frac{\omega_{\max}}{\omega_1}, \tag{5}$$

где ω_1 и $\omega_{\max}$ – первый и последний нули каждого спектра $G(\omega) = F(g)$. Получили (по нескольким замерам): $\Delta_1 = 14{,}95$, $\Delta_2 = 20{,}42$, $\Delta_3 = 24{,}99$.

Теперь, определив достаточно точно раздельные смазы Δ_1, Δ_2, Δ_3, а значит, зависимость $\Delta(x)$, решаем обратную задачу восстановления единого (без разделения) изображения согласно (2)–(5) методом квадратур и регуляризации Тихонова (см. на рис. 3 пассажира в левом автомобиле и колеса в каждом автомобиле):

Рис. 3. Восстановленное единое изображение 143×1307.

[1] Sizikov V., Dovgan A., Lavrov A. Eliminating nonuniform smearing and suppressing the Gibbs effect on reconstructed images // Computers. 2020. Vol. 9, № 30. P. 1–16.

[2] Сизиков В. С. Спектральный способ оценки функции рассеяния точки в задаче устранения искажений изображений // Оптический журнал. 2017. Т. 84. № 2. С. 36–44.
Sizikov V. S. Spectral method for estimating the point-spread function in the task of eliminating image distortions // Journal of Optical Technology. 2017. Vol. 84. № 2. C. 95–101.

О СВОЙСТВЕ САМОРЕГУЛЯРИЗАЦИИ ФДН-МЕТОДА ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Л. С. Соловарова

Институт динамики систем и теории управления им. В.М. Матросова СО РАН, Иркутск, Россия

e-mail: soleilu@mail.ru

Выделен класс линейных дифференциально-алгебраических уравнений с начальным условием. Этот класс имеет единственное непрерывно дифференцируемое решение, зависящее от производных правой части. Предполагается, что правая часть задана с известным уровнем погрешности. Показано, что ФДН-метод может порождать регуляризирующий алгоритм. Параметром регуляризации выступает шаг сетки, определенным образом связанный с возмущением правой части.

В докладе рассмотрена задача

$$A(t)x'(t) + B(t)x(t) = f(t),\ x(0) = a,\ t \in [0,1], \tag{1}$$

где $A(t)$, $B(t)$ – $(n \times n)$-матрицы, $f(t)$ и $x(t)$ заданная и искомая n-мерные вектор-функции соответственно. Предполагается, что элементы $A(t)$, $B(t)$ и $f(t)$ достаточно гладкие и $detA \equiv 0$. Такие задачи называются дифференциально-алгебраическими уравнениями (ДАУ). Предполагается, что исходные данные согласуются с правой частью.

ДАУ относятся к классу некорректных задач. Достаточно давно известно [1], что сама процедура дискретизации для некоторых некорректных (условно корректных) задач порождает регуляризирующий алгоритм, если шаг дискретизации, определенным образом связанный с уровнем возмущений входных данных.

Итак, зададим равномерную сетку на отрезке $[0,1]$ $t_i = ih$, $i = 0, 1, ..., N$, $h = 1/N$, и определим $A_i = A(t_i)$, $B_i = B(t_i)$, $f_i = f(t_i)$, $x_i \approx x(t_i)$.

Перепишем исходную задачу в виде [2]

$$(A(t)x(t))' + (B(t) - A'(t))x(t) = f(t). \tag{2}$$

Тогда ФДН-метод для (2) примет следующий вид [3]

$$\sum_{j=0}^{k} \rho_j A_{i+1-j} x_{i+1-j} + D_{i+1} x_{i+1} = h f_{i+1},\ i = k-1, k+1, ..., M-1, \tag{3}$$

где ρ_j – параметры метода, D_{i+1} рассчитывается по правилу: $D_{i+1} = hB_{i+1} - \sum\limits_{j=0}^{k} \rho_j A_{i+1-j}$.

Далее применим данный метод для возмущенной задачи

$$A(t)\tilde{x}'(t) + B(t)\tilde{x}(t) = \tilde{f}(t), \tilde{x}(0) = \tilde{a}, \tag{4}$$

$\left\|\tilde{f}_j(t) - f_j(t)\right\|_C \leq \delta$, $|\tilde{a}_j - a_j| \leq \delta$, $j = 1, 2, ..., n$, $f(t) = (f_1(t), f_2(t), ..., f_n(t))^\top$, $a = (a_1, a_2, ..., a_n)^\top$.

В докладе показано, что разностная схема (3) порождает саморегуляризирующий алгоритм для задачи (4). Приведены расчеты тестовых примеров.

[1] Апарцин А. С., Бакушинский А. Б. Приближенное решение интегральных уравнений Вольтерра 1 рода методом квадратурных сумм // Дифференциальные и интегральные уравнения. Иркутск: ИГУ, 1972. Вып. 1. С. 248–258.

[2] Булатов М. В., Ли Минг Гонг, Соловарова Л. С. О разностных схемах первого и второго порядков для дифференциально-алгебраических уравнений индекса не выше двух // Журнал вычисл. математики и матем. физики. 2010. Т. 50, № 11. С. 1909–1918.

[3] Bulatov M. V., Linh V. H., Solovarova L. S. On BDF-based multistep schemes for some classes of linear differential-algebraic equations of index at most 2 //Acta Mathematica Vietnamica. 2016. Vol. 41, no. 4. P. 1–16.

ИДЕНТИФИКАЦИЯ НЕСИММЕТРИЧНОГО ЯДРА ВОЛЬТЕРРА НА БАЗЕ МЕТОДА PRODUCT INTEGRATION

С. В. Солодуша[1], Е. Д. Антипина[1,2]

[1] *Институт систем энергетики им. Л.А. Мелентьева СО РАН, Иркутск, Россия*
e-mail: solodusha@isem.irk.ru
[2] *Иркутский государственный университет, Иркутск, Россия*
e-mail: kate19961231@gmail.com

В работе рассматривается способ идентификации $K(t,s)$ в

$$\int_0^t K(t,s)x(s)ds = f(t),\ t=[0,T], \tag{1}$$

с помощью кусочно-линейных тестовых сигналов

$$x(s)\equiv x_\nu(s)=\begin{cases} 0, & s\le 0,\\ \dfrac{s}{\nu}, & 0<s\le\nu,\\ 1, & \nu\le s.\end{cases} \tag{2}$$

Подстановка (2) в (1) приводит к

$$\int_0^\nu K(t,s)\frac{s}{\nu}ds+\int_\nu^t K(t,s)ds = g(t,\nu), \tag{3}$$

где $g(t,\nu)$ – отклик динамической системы на (2), $g(0,0)=0$, $K(t,s)$ – несимметричная на $\Delta=\{t,s:0\le s\le t\le T\}$ функция. Уравнение (3), к решению которого сводится задача непараметрической идентификации $K(t,s)$, впервые было рассмотрено в [1]. В [2] представлен алгоритм численного решения (3) на базе метода средних прямоугольников, который показал линейную скорость сходимости по h (h – шаг сетки).

В данной работе рассматривается численное решение (3) методом Product Integration (pi-метод) [3]. Введем равномерные сетки

$$t_i=ih,\ t_{j-\frac{1}{2}}=\left(j-\frac{1}{2}\right)h,\ j=\overline{1,i},\ i=\overline{1,n},\ n=\frac{T}{h}.$$

Согласно [3], апроксимация (1) может быть представлена в виде

$$\int_0^{ih} K(ih,s)x(s)ds=\sum_{l=1}^{i} x\left(\left(l-\frac{1}{2}\right)h\right)\int_{(l-1)h}^{lh} K(ih,s)ds,\ i=\overline{1,n}.$$

Применим pi-метод для приближенного решения (3). Тогда сеточный аналог (3) принимает вид следующей системы линейных алгебраических уравнений:

$$\frac{1}{j}\sum_{l=1}^{j}\left(l-\frac{1}{2}\right)m_{i,l}+\sum_{l=j+1}^{i} m_{i,l}=g(ih,jh), \tag{4}$$

где

$$m_{i,l} = \int\limits_{(l-1)h}^{lh} K(ih,s)ds.$$

Приведем пример применения (4). Пусть $\bar{K}(t,s) = t^2 s + s^3$, тогда

$$g(t,\nu) = \frac{3}{4}t^4 - \frac{1}{6}t^2\nu^2 - \frac{1}{20}\nu^4.$$

Решим систему (4) и найдем погрешность, рассчитанную по формуле

$$\varepsilon = \max_{i,l}\left| m_{i,l} - \int\limits_{(l-1)h}^{lh} \bar{K}(ih,s)ds \right|, l = \overline{1,i}, i = \overline{1,n}.$$

В табл. 1 представлены результаты вычисления погрешности ε для тестового примера.

Таблица 1: Погрешность сеточного решения

h	ε
0,25000	0,0462
0,12500	0,0112
0,06250	0,0027
0,03125	0,0007

Из таблицы видно, что pi-метод имеет порядок сходимости $\mathcal{O}(h^2)$ (с уменьшением шага h в два раза погрешность ε уменьшается в четыре раза).

Работа выполнена при поддержке гранта РНФ № 22-21-00409.

[1] Solodusha S. V. New Classes of Volterra Integral Equations of the First Kind Related to the Modeling of the Wind Turbine Dynamics // Proc. 2020 15th International Conference on Stability and Oscillations of Nonlinear Control Systems (Pyatnitskiy's Conference), STAB 2020, Moscow, Russia, 03–05 June 2020. Moscow, Russia: Institute of Electrical and Electronics Engineers Inc., 2020, pp. 1–3, doi: 10.1109/STAB49150.2020.9140662.

[2] Антипина Е. Д. Дискретизационный метод решения интегрального уравнения I рода типа Вольтерра // Труды конференции «Теория оптимального управления и приложения», Екатеринбург, 27 июня – 1 июля 2022 года. Екатеринбург: ИММ УрО РАН, 2022. (в печати)

[3] Linz P. Product integration method for Volterra integral equations of the first kind // BIT. 1971. Vol. 11. P. 413–421.

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ИНТЕГРАЛЬНОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ С РАЗРЫВНЫМИ ЯДРАМИ

А. Н. Тында[1], Д. Н. Сидоров[2,3]

[1]*Пензенский государственный университет, кафедра высшей и прикладной математики, Пенза, Россия*
e-mail: tyndaan@mail.ru
[2]*Институт систем энергетики им. Л.А. Мелентьева СО РАН, Иркутск, Россия*
[3]*Иркутский национальный исследовательский университет, Иркутск, Россия*
e-mail: dsidorov@isem.irk.ru

Работа посвящена численному исследованию интегральных динамических модели, в основе которых лежат интегральные уравнения Вольтерра I рода с ядрами, терпящими разрывы на множестве гладких кривых. Речь идет об уравнениях вида

$$\int_0^t K(t,s)x(s)ds = g(t),\ \ 0 \le s \le t \le T,\ g(0) = 0, \tag{1}$$

где ядро $K(t,s)$ представимо в форме

$$K(t,s) = \begin{cases} K_1(t,s),\ t,s \in m_1, \\ \ldots\ \ldots\ldots\ldots \\ K_n(t,s),\ t,s \in m_n, \end{cases} \tag{2}$$

Здесь $m_i = \{t,s \mid \alpha_{i-1}(t) < s < \alpha_i(t)\}$, $\alpha_0(t) = 0,\ \alpha_n(t) = t,\ i = \overline{1,n},\ \alpha_i(t),\ g(t) \in \mathcal{C}^1_{[0,T]}$, функции $K_i(t,s)$ имеют непрерывные производные по переменной t при $(t,s) \in cl(m_i)$, $K_n(t,t) \neq 0$, $\alpha_i(0) = 0$, $0 < \alpha_1(t) < \alpha_2(t) < \ldots < \alpha_{n-1}(t) < t$, функции $\alpha_1(t), \ldots, \alpha_{n-1}(t)$ монотонно возрастают и $0 < \alpha_1'(0) \le \ldots \le \alpha_{n-1}'(0) < 1$, а $cl(m_i)$ — замыкание множества m_i.

Такие слабо регулярные уравнения Вольтерра первого рода с кусочно-непрерывными ядрами были впервые классифицированы Д.Н. Сидоровым [1] и А. Лоренци [2] и активно изучались многими авторами в течение последнего десятилетия. Здесь читатели могут обратиться к [3] и источникам в этой монографии. Операторным уравнениям Вольтерра первого рода с разрывнами ядрами посвящены работы Н.А. Сидорова и Д.Н. Сидорова [4]. Такие модели Вольтерра находят применение при моделировании различных динамических процессов, включая системы накопителей энергии [5, 6], такие модели, а также вопросы численного решения таких интегральных уравнений и их систем подробно рассмотрены в диссертации И.Р. Муфтахова [7].

Новая задача.
Классическая постановка задачи для модели (1)-(2) заключается в определении $x(t)$ при известных остальных компонентах. Однако ряд естественных приложений модели (1)–(2) на практике приводит обратной задаче, заключающейся в определении линий разрыва $\alpha_i(t)$. При такой постановке уравнение (1) трактуется уже как нелинейное интегральное уравнение с неизвестными пределами интегрирования, численное исследование которого представляет математически более сложную задачу. Сложность дискретизации в первую очередь связана с аппроксимацией интегралов при неизвестных длинах отрезков интегрирования.

Модели, описываемые интегральными уравнениями с неизвестными пределами интегрирования, берут свое начало в работах В.М. Глушкова [8], их экономические приложения исследуются в работах N. Hritonenko и Yu. Yatsenko (см, напр., [9]), ряд прямых и итерационных численных методов А.Н. Тындой предложен в [10, 11].

В настоящей работе для обратной задачи (1)–(2) в случае $n = 2$ предлагается прямой метод дискретизации первого порядка точности с апостериорной верификацией вычислений.

[1] Sidorov D. N. On parametric families of solutions of Volterra integral equations of the first kind with piecewise smooth kernel // Diff. Equat. 2013. Vol. 49. P. 210–216. DOI: 10.1134/S0012266113020079

[2] Lorenzi A. Operator equations of the first kind and integro-differential equations of degenerate type in Banach spaces and applications of integro-differential PDE's // Eurasian Journal of Mathematical and Computer Applications. 2013. Vol. 1. Iss. 2. P. 50–75.

[3] Sidorov D. Integral Dynamical Models: Singularities, Signals And Control, In:L. O. Chua, ed. World Scientific Series on Nonlinear Sciences Series A: Vol. 87, Singapore: World Scientific Press, 2015.

[4] Sidorov N. A., Sidorov D. N. On the solvability of a class of Volterra operator equations of the first kind with piecewise continuous kernels // Math. Notes. 2014. Vol. 96. P. 811–826. DOI: 10.1134/S0001434614110170

[5] Sidorov D., Panasetsky D., Tomin N., Karamov D., Zhukov A., Muftahov I., Dreglea A., Liu F., Li Y. Toward Zero-Emission Hybrid AC/DC Power Systems with Renewable Energy Sources and Storages: A Case Study from Lake Baikal Region // Energies. 2020. Vol. 13. P. 1226. DOI: 10.3390/en13051226

[6] Sidorov D., Tynda A., Muftahov I., Dreglea A., Liu F. Nonlinear Systems of Volterra Equations with Piecewise Smooth Kernels: Numerical Solution and Application for Power Systems Operation // Mathematics. 2020. Vol. 8. P. 1257. DOI: 10.3390/math8081257

[7] Муфтахов И. Р. Модели Вольтерра накопителей энергии в системах с возобновляемой генерацией: численные методы и приложения: автореф. дис. … канд. тех. наук. Иркутск, 2022. 19 с.

[8] Глушков В. М., Иванов В. В., Яненко В. М. Моделирование развивающихся систем. М.: Наука, 1983. 352 с.

[9] Yatsenko Yu. Volterra integral equations with unknown delay time // Methods and Applications of Analysis. 1995. Vol. 2 (4). P. 408–419.

[10] Tynda A. N. Iterative numerical method for integral models of a nonlinear dynamical system with unknown delay. PAMM. 2009. Vol. 9. Iss. 1. P. 591–592.

[11] Tynda A. N. On the direct numerical methods for systems of integral equations with nonlinear delays // PAMM. 2008. Vol. 8. Iss. 1. P. 10857–10858.

Посвящается светлой памяти профессора Анатолия Соломоновича Апарцина

ТЕОРИЯ И ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ВЫРОЖДЕННЫХ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВОЛЬТЕРРА И ФРЕДГОЛЬМА

В. Ф. Чистяков

Институт динамики систем и теории упарвления им. В.М. Матросова СО РАН, Иркутск, Россия
e-mail: elena.chistyakova@icc.ru

Начиная с 70-х годов XX столетия, при анализе сложных природных и технических процессов часто встречаются их математические модели в виде систем, включающих в себя взаимосвязанные обыкновенные дифференциальные уравнения различных порядков, алгебраические (конечные) уравнения, интегральные уравнения Вольтерра и Фредгольма I и II рода. Эти системы можно записать в линейном случае в виде равенств

$$(\mathcal{S}_{m,l} + \lambda\Phi)u = f, \quad \mathcal{S}_{m,l} = \Lambda_m + \mathcal{V} + \Theta_l, \tag{1}$$

где

$$\Lambda_m y = \sum_{j=0}^{m} A_j(t) \left(\frac{d}{dt}\right)^j y,\ m \geq 0, \quad \Theta_l y = \sum_{j=0}^{l} B_j(t) y^{(j)}(\alpha), \quad l \geq 0,$$

$$\mathcal{V}y = \int\limits_{\alpha}^{t} \mathcal{K}(t,s)y(s)ds, \quad \Phi y = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \mathrm{K}(t,s)y(s)ds,$$

$t \in T = [\alpha, \beta] \subset \mathbf{R}^1$, $y^{(j)}(\alpha) = (\frac{d}{dt})^j y(t)|_{t=\alpha}$, λ — параметр (в общем случае комплексный), $A_j(t),\ B_j(t), \mathcal{K}(t,s),\ \mathrm{K}(t,s)$ — $(\nu \times n)$-матрицы, определенные на T и $T \times T$ соответственно, $u \equiv u(t)$ и $f \equiv f(t)$ — искомая и известная вектор-функции, $y \equiv y(t)$ — некоторая вектор-функция требуемой гладкости, с дополнительным условием

$$\operatorname{rank} A_m(t) < \min\{\nu, n\}\ \forall t \in T, \tag{2}$$

которое эквивалентно в случае $\nu = n$ равенству $\det A_m(t) = 0\ \forall t \in T$. Системы (1) называются: *замкнутыми*, если число уравнений равно числу компонент искомой вектор-функции ($\nu = n$), *переопределенными*, если $\nu > n$, и *недоопределенными*, если $\nu < n$.

В 80-х годах XX века было установлено, что формула обращения операторов систем

$$\Lambda_1 v = A_1(t)(dv/dt) + A_0(t)v = f,\ (\Lambda_0 + \mathcal{V})w = A_0(t)w + \int\limits_{\alpha}^{t} \mathcal{K}(t,s)w(s)ds = f,\ t \in T,$$

удовлетворяющих условию (2), при определенных предположениях содержит интегро-дифференциальный оператор (ИДО) с тождественно вырожденной матрицей на T при старшей производной f (см., например, [2]). Такой ИДО можно трактовать как левый обратный оператор к операторам $\Lambda_1,\ (\Lambda_0 + \mathcal{V})$. Это стало, помимо задач моделирования, дополнительным стимулом для изучения вырожденных систем интегро-дифференциальных уравнений вида (1). Большую роль при изучении систем вида (1) играет информация о свойствах их частных случаев

$$\Lambda_m x := \sum_{i=0}^{m} A_i(t)x^{(i)}(t) = f(t), \quad (\Lambda_0 + \mathcal{V})y := A_0(t)y(t) + \int\limits_{\alpha}^{t} \mathcal{K}(t,s)y(s)ds = \varphi(t),$$

$$(\Lambda_0 + \lambda\Phi)z := A_0(t)z(t) + \lambda\int\limits_{\alpha}^{\beta} \mathrm{K}(t,s)z(s)ds = \phi(t),$$

$$\mathcal{V}y := \int\limits_{\alpha}^{t} \mathcal{K}(t,s)y(s)ds = \varphi(t), \;\; \Phi z := \int\limits_{\alpha}^{\beta} \mathrm{K}z(s)ds = \phi(t), \;\; t \in T,$$

где $t \in T, \;\; x, y, z \equiv x(t), y(t), z(t)$ — искомые и $f(t), \varphi(t), \phi(t)$ — заданные вектор-функции. Частные случаи систем (1), удовлетворяющие условию (2), называются дифференциально-алгебраическими уравнениями и интегро-алгебраическими уравнениями. Построение численных методов решения краевых задач для систем (1) и их частных случаев базируется на общей схеме метода наименьших квадратов.

Доклад содержит изложение основных результатов большого цикла работ [1–9].

[1] Чистяков В. Ф. О сингулярных системах обыкновенных дифференциальных уравнений и их интегральных аналогах // Функции Ляпунова и их применения. Новосибирск: Наука, 1987. С. 231–239.

[2] Бояринцев Ю. Е., Данилов В. А., Логинов А. А., Чистяков В. Ф. Численные методы решения сингулярных систем. Отв. ред. О. В. Васильев; АН СССР, Сиб. отд-ние, Иркут. ВЦ. Новосибирск: Наука, Сиб. отд-ние, 1989.

[3] Чистяков В. Ф. Алгебро-дифференциальные операторы с конечномерным ядром. Новосибирск: Наука. Сибирская издательская фирма РАН, 1996.

[4] Бояринцев Ю. Е., Чистяков В. Ф. Алгебро-дифференциальные системы. Методы решения и исследования. Новосибирск: Наука, 1998.

[5] Чистяков В. Ф. О разрешимости систем интегральных уравнений Вольтерра 4 рода. I // Дифференц. уравнения. 2002. Т. 38. № 5. С. 698–707.

[6] Чистяков В. Ф. О разрешимости линейных интегро-алгебраических уравнений и численных методах их решения // Сиб. матем. журнал. 2013. Т. 54. № 4. С. 932–946.

[7] Чистяков В. Ф., Чистякова Е. В. Линейные дифференциально-алгебраические уравнения с возмущениями в виде интегральных операторов Вольтерры // Дифференц. уравнения. 2017. Т. 53. № 10. С. 1309–1320.

[8] Chistyakov V. F., Chistyakova E. V. On some properties of the Fredholm-type integral algebraic equations // Mathematical Methods in the Applied Sciences. Special Issue on Integral Equations and their Applications, 2020.

[9] Chistyakova E. V., Chistyakov V. F. Solution of differential algebraic equations with the Fredholm operator by the least squares method // Applied Numerical Mathematics. 2020. Vol. 149. P. 43–51.

О НЕКОТОРЫХ ОСОБЕННОСТЯХ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА С ОСОБЫМИ ТОЧКАМИ

Е. В. Чистякова, В. Ф. Чистяков

Институт динамики систем и теории управления им. В.М. Матросова СО РАН, Иркутск, Россия

e-mail: elena.chistyakova@icc.ru; chist@icc.ru

В докладе изучается система обыкновенных дифференциальных уравнений вида

$$\sum_{i=0}^{k} A_i(t)x^{(i)}(t) = f(t),\ t \in T = [\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}^1, \tag{1}$$

где $A_i(t) - (m \times n)$-матрицы, $x(t)$ — искомая вектор-функция, $f(t)$ — заданная вектор-функция,; $x^{(i)}(t) = (d/dt)^i x(t),\ x^{(0)}(t) = x(t)$. Предполагается, что входные данные системы (1) достаточно гладкие, при этом выполнено условие

$$\det A_k(t) = 0\ \forall t \in T, \tag{2}$$

Системы вида (1), удовлетворяющие условию (2), как правило называются дифференциально-алгебраическими уравнениями (ДАУ).

ДАУ во многом отличаются от систем ОДУ, и поиск их особых точек — не всегда тривиальная задача. В частности, точки изменения ранга матрицы $A_k(t)$ не всегда совпадают с особыми точками. В докладе мы используем методики исследования, изложенные для ДАУ в работах [1, 2]. Обсуждаются условия разрешимости ДАУ (1) при наличии особых точек на отрезке T и возможности численного решения таких систем.

[1] Чистяков В. Ф. Алгебро-дифференциальные операторы с конечномерным ядром. Новосибирск : Наука. Сибирская издательская фирма РАН, 1996.

[2] Chistyakov V. F., Chistyakova E. V. Evaluation of the index and singular points of linear differential-algebraic equations of higher order // Journal of Mathematical Sciences. 2018. Vol. 231. Iss. 6. P. 827–845.

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ ТЕПЛОПЕРЕНОСА С ПОМОЩЬЮ УРАВНЕНИЙ ВОЛЬТЕРРА

Н. М. Япарова

Южно-Уральский государственный университет (НИУ), Челябинск, Россия
e-mail: iaparovanm@susu.ru

Работа посвящена разработке единого подхода к построению численных методов решения обратной граничной задачи теплопроводности и задачи идентификации внутреннего теплового источника, возникающих при определении нестационарных внутренних температурных полей в объекте, подвергаемом внешнему тепловому воздействию. Математическая модель процесса теплопереноса в объекте имеет следующий вид

$$c\rho\frac{\partial u}{\partial t} = \lambda\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + F(t), \quad x \in (0,\ell), \quad t \in (0,T), \tag{1}$$

$$u(0,t) = \varphi(t), \quad u_x(0,t) = g(t), \qquad t \in [0,T], \tag{2}$$

$$u(x,0) = U, \quad x \in [0,\ell]. \tag{3}$$

В обратной граничной задаче, связанной с определение внутренних нестационарных температурных полей, требуется найти неизвестную граничную функцию $u(\ell,t) = \psi(t)$. В задаче идентификации внутреннего источника требуется при дополнительно известной $\psi(t) = u(\ell,t)$ найти функцию источника $F(t)$. при условии, что вместо точных значений $\varphi_0(t)$, $g_0(t)$ известны приближения $\varphi_\delta(t)$, $g_\delta(t)$ и уровень δ такие, что $\max\{\|\varphi_0 - \varphi_\delta\|, \|g_0 - g_\delta\|\} < \delta$.

В настоящее время создан единый подхода к построению интегральных моделей теплопереноса, позволяющих находить неизвестную функцию $u(\ell,t) = \psi(t)$ или идентифицировать функцию внутреннего теплового источника [1, 2]. Построение моделей включает последовательное применение прямого и обратного преобразований Лапласа, элементов операционного исчисления и регуляризирующих операторов. В результате исходные задачи сводятся к интегральным уравнениям Вольтерра, характеризующих явную зависимость искомых функций от граничных функций. Для численного решения полученных уравнений разработаны вычислительные схемы, основанные на использовании квадратурных формул с фиксированным шагом дискретизации и аддитивным стабилизирующим функционалом. Следуя идеям, предложенным в [3], для решения обратной граничной задачи теплопроводности с нулевой функцией внутреннего источника, разработан метод, обладающий эффектом саморегуляризации [4].

Работа выполнена при поддержке Минобрнауки Челябинской области в рамках регионального гранта «Методы регуляризации при обработке зашумленных данных в многоканальных измерительных системах» (проект № 20-48-740022 р-а-Челябинск).

[1] Yaparov N. Numerical methods for solving a boundary-value inverse heat conduction problem // Inverse Problems in Science and Engineering. 2014. Vol. 22, № 5. pp. 832-847.

[2] Япарова Н. М. Метод решения обратной задачи идентификации функции источника с использованием преобразования Лапласа // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия: Вычислительная математика и информатика. 2016. Т. 5. № 3. С. 20–35.

[3] Апарцин А. С. Применении различных квадратурных формул для приближенного решения интегральных уравнений Вольтерра I рода методом квадратурных сумм // Дифференциальные и интегральные уравнения. Иркутск: ИГУ, 1973. С. 107–116.

[4] Солодуша С. В., Япарова Н. М. Численное решение обратной граничной задачи теплопроводности с помощью уравнений Вольтерра I рода // Сибирский журнал вычислительной математики. 2015. Т. 18, № 3. С. 267–274.

ON THE UNIQUENESS OF SOLUTIONS OF VOLTERRA LINEAR EQUATIONS OF THE FIRST KIND ON THE SEMIAXIS

A. Asanov[1], Z. A. Kadenova[2], D. Bekeshova[2]

[1]*Kyrgyz-Turkish Manas University, Bishkek, Kyrgyzstan, Department of Mathematics*
e-mail: avyt.asanov@manas.edu.kg
[2]*Institute of Mathematics of NAS of the Kyrgyz Republic, Bishkek, Kyrgyzstan*
e-mail: kadenova71@mail.ru; bekeshova.d @mail.ru

Abstract. In the present article the theorem about uniqueness of Fredholm linear integral equations of the first kind on the semi axis, with method of nonnegative quadratic forms and functional analysis methods.

Key words: Fredholm linear inteqral equations, first kind, the semiaxis, uniqueness of solutions.

1. Introduction

Many problems of the theory of integral equations of the first kind were studied in [1–15]. But fundamental results for Fredholm integral equations of the first kind were obtained in [11, 12], where regularizing operators in the sence of M.M. Lavrent'ev were constructed. Rezults on non-classical Volterra integral equations of the first kind can be found in [1]. In [2, 6], problems of regularization, uniqueness and existence of solutions for Volterra integral and operator equations of the first kind are studied. In [13], for linear Volterra integral equations of the first and the third kind with smooth kernel, the existence of multiparameter family of solutions was proved. In [4, 5], on the basis of theory of Volterra integral equations of the first kind, various inverse problems were studied. In [8],uniqueness theorems were proved and reqularizing operators in the sense of Lavrent'ev were constructed for systems of linear Fredholm integral equations of the third kind. In [10], problems of uniqueness and stability of solutions for linear integral equations of the first kind with two independent variables were investigated. In [3, 9], based on a new approach, the existence and uniquenes of solutions of Fredholm integral equations and the system linear Fredholm integral equations of the third kinds were studied. In [15], uniqueness theorems were proved for the linear Fredholm integral equations of the first kind in the axis.

In the prezent paper, on the basis of the method of integral transformation, uniqueness theorems for the new class of linear Volterra integral equations of the first kind in the semiaxis were proved.

2. The linear Volterra integral equations of the first kind

Consider the linear Volterra integral equations of the first kind

$$Ku \equiv \int\limits_{-\infty}^{t} H(t,s)u(s)ds = f(t), t \in (-\infty, a], \tag{1}$$

where the $u(t)$ is the desired function on $(-\infty, a]$, the given function $f(t)$ is the continuous on $(-\infty, a]$,

$$\int\limits_{-\infty}^{a}\int\limits_{-\infty}^{t} |H(t,s)|^2 \, dsdt < \infty,$$

the given function $H(t,s)$ is continuous on the domain

$$G = (t,s) : -\infty < s \leq t \leq a.$$

Let $C(-\infty,a]$ denote the space of all functions continuous on $(-\infty,a]$. Here $C(G)$ denote the space of all functions continuous on G.

Assume that the following conditions are satisfied:

(i) $H(t,s), H'_t(t,s), H'_s(t,s),\ H''_{ts}(t,s) \in C(G),\ \alpha(t) = \lim\limits_{s\to-\infty} H(t,s),\ t \in (-\infty,a],\ \alpha(a) \geq 0,$ $\alpha(t) \in C(-\infty,a],\ \alpha'(t) \leq 0$ for all $t \in (-\infty,a],\ H''_{ts}(s,t) \leq 0$ for all $(t,s) \in G,\ \alpha'(t) \in L_1(-\infty,a],\ \beta(s) = H'_s(a,s) \geq 0$ for all $s \in (-\infty,a],\ \beta(s) \in C(-\infty,a] \bigcap L_1(-\infty,a];$

(ii) $\sup\limits_{(t,s)\in G} |H(t,s)| \leq l < \infty,\ \sup\limits_{t\in(-\infty,\alpha]} \int\limits_{-\infty}^{t} |H'_s(t,s)|\, ds \leq l_1 < \infty,\ H''_{ts}(t,s) \in L_1(G),$ $\sup\limits_{t\in[s,a]} |H'_s(t,s)| \leq \gamma(s) \in L_1(-\infty,a];$

(ii) at least one of the following three conditions holds:

1) $\alpha'(t) < 0$ for almost $t \in (-\infty,a]$;
2) $\beta(s) > 0$ for almost all $s \in (-\infty,a]$;
3) $H''_{ts}(t,s) < 0$ for almost all $(t,s) \in G$.

Theorem. *Let conditions (i), (ii) and (iii) be satisfied. Then the solution of the integral equation (1) is unique in $L_1(-\infty,a]$.*

Proof. Let $u(t) \in L_1(-\infty,a]$ be a solution of the integral equation (1). Multiplying both sides of the equation (1) by $u(t)$ and integrating over the domain $(-\infty,a]$, we obtain

$$\int\limits_{-\infty}^{a}\int\limits_{-\infty}^{t} H(t,s)u(s)dsu(t)dt = \int\limits_{-\infty}^{a} f(t)u(t)dt. \tag{2}$$

We shall introduce the notation

$$z(t,s) = \int\limits_{s}^{t} u(\nu)d\nu, (t,s) \in G. \tag{3}$$

Then from (3), we obtain

$$d_s z(t,s) = -u(s)ds, z(t,s)u(t)dt = \frac{1}{2} d_t(z^2(t,s)). \tag{4}$$

Let us transform the integral on the left hand of the identity (2). Taking into account (3), (4) and integrating by parts, we have

$$\int\limits_{-\infty}^{a}\int\limits_{-\infty}^{t} H(t,s)u(s)u(t)dsdt = \int\limits_{-\infty}^{a} \alpha(t)z(t,-\infty)u(t)dt + \int\limits_{-\infty}^{a}\int\limits_{-\infty}^{t} H'_s(t,s)z(t,s)u(t)dsdt.$$

Hence, applying Dirichlet's formula, we obtain

$$\int_{-\infty}^{a}\int_{-\infty}^{t} H(t,s)u(s)u(t)dsdt = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{a}\alpha(t)d_t(z^2(t,-\infty))+$$

$$+\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{a}\left[\int_{s}^{a} H'_s(t,s)d_t(z^2(t,s))\right]ds = \frac{1}{2}\alpha(a)z^2(a,-\infty) - \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{a}\alpha'(t)z^2(t,-\infty)dt+ \tag{5}$$

$$+\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{a}\beta(s)z^2(a,s)ds - \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{a}\int_{s}^{a} H'_{ts}(t,s)z^2(t,s)dtds.$$

Taking into account (2) and applying Dirichlet s formula from (5), we have

$$\frac{1}{2}\alpha(a)z^2(a,-\infty) - \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{a}\alpha'(t)z^2(t,-\infty)dt + \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{a}\beta(s)z^2(a,s)ds-$$

$$-\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{a}\int_{-\infty}^{t} H''_{ts}(t,s)z^2(t,s)dsdt = \int_{-\infty}^{a} f(t)u(t)dt. \tag{6}$$

Suppose that $f(t) = 0$ for $t \in (-\infty, a]$. Then, taking into account conditions (i), (ii) and (iii), we see that (6) implies

$$\int_{-\infty}^{t} u(\tau)d\tau = 0, t \in (-\infty, a] or \int_{s}^{a} u(\tau)d\tau = 0, s \in (-\infty, a]$$

or

$$\int_{s}^{t} u(\tau)d\tau = 0, (t,s) \in G.$$

Therefore, $u(t) = 0$ for all $t \in (-\infty, a]$. The theorem is proved.

Example. Consider the integral equation

$$\int_{-\infty}^{t} H(t,s)u(s)ds = f(t), t \in (-\infty, 0], \tag{7}$$

where

$$H(t,s) = -\frac{c}{a(b-a)}\left[e^{bt}e^{a(t-s)} - \frac{2b}{a+b}e^{as}\right] + \frac{cd}{a+b}(e^{bt}-2),$$
$$(t,s) \in G = (t,s); \quad -\infty < s \le t \le 0, \tag{8}$$

a, b, c and d are real parameters, $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$, $d > 0$, $a \ne b$. Then from (8) we have

$$H'_t(t,s) = -\frac{c}{a}e^{bt}e^{-a(t-s)} + \frac{cd}{a}e^{bt}, \ (t,s) \in G, \tag{9}$$

$$H'_s(t,s) = -\frac{c}{b-a}\left[e^{bt}e^{-a(t-s)} - \frac{2b}{a+b}e^{as}\right],\ (t,s)\in G, \tag{10}$$

$$H'_{ts}(t,s) = -ce^{bt}e^{-a(t-s)},\ (t,s)\in G, \tag{11}$$

$$a(t) = \lim_{s\to-\infty} H(t,s) = 0,\ \alpha'(t) = 0,\ t\in(-\infty,0], \tag{12}$$

$$\beta(s) = H'_s(0,s) = \frac{c}{a+b}e^{as},\ s\in(-\infty,0]. \tag{13}$$

From (8) and (10), we obtain

$$l \le \frac{c}{|b-a|a}\left(1+\frac{2b}{a+b}\right) + \frac{2c|d|}{ab}, \tag{14}$$

$$l_1 \le \frac{c(a+3b)}{|b-a|a(a+b)}, \tag{15}$$

$$\gamma(s) = \frac{c}{|b-a|}\left[e^{bs} + \frac{2b}{a+b}e^{as}\right],\ s\in(-\infty,0]. \tag{16}$$

Then taking into account (8)–(16), we can verity that conditions (i), (ii) and (iii) are satisfied for the integral equation (7). Therefore, the solution of the integral equation (7) is unique in the space $L_1(-\infty,0]$.

[1] Apartsyn A. S. *Nonclassical linear Volterra equations of the first kind.* VSP, Utrecht, The Netherlands, 2003.

[2] Asanov A. *Regularization, uniqueness and existence of solutions of Volterra equations of the first kind.* VSP, Utrecht, The Netherlands, 1998.

[3] Asanov A., Matanova K. B., Asanov R. A. A class of linear and nonlinear Fredholm integral equations of the third kind. *Kuwait J. Sci.*, 2017, vol. 44(1), pp. 17–28.

[4] Bukhgeim A. L. *Volterra equations and inverse problems.* VSP, Utrecht, The Netherlands, 1999.

[5] Denisov A. M. *Elements of the theory of inverse problems.* VSP, Utrecht, The Netherlands, 1999.

[6] Imanaliev M. I., Asanov A. Solutions of system of nonlinear Volterra integral equations of the first kind. *Soviet. Math. Dokl.*, 1989, vol. 309, no. 5, pp. 1052–1055.

[7] Imanaliev M. I., Asanov A. Solutions of systems of Volterra nonlinear integral equations of the third kind. *Doklady Mathematics*, 2007, vol. 76, pp. 490–493.

[8] Imanaliev M. I., Asanov A. Solutions of system of Fredholm linear integral equations of the third kind. *Doklady Matematics*, 2010, vol. 81, pp. 115–118.

[9] Imanaliev M. I., Asanov A., Asanov R. A. Solutions to systems of Linear Fredholm Integral Equations of the Third kind with Multipoint Singularities. *Doklady Mathematics*, 2017, vol. 95, no. 3, pp. 235–239.

[10] Imanaliev M. I., Asanov A., Kadenova Z. A. A Class of Linear Integral Equations of the First Kind with Two Independent Variables. *Doklady Mathematics*, 2014, vol. 89, no. 1, pp. 98–102.

[11] Lavrent'ev M. M. The integral equations of the first kind. *Doklady Akademii Nayk*, 1959, vol. 127, pp. 31–33.

[12] Lavrent'ev M. M., Romanov V. G., Shishatskii S. P. *Ill-Posed problems of mathematical physics and analysis*. Providence R.I., American Mathematical Society, 1986.

[13] Magnitskii N. A. Volterra linear integral equations of the first and third kinds. *Zhurnal vychislitel'noi matematiki i matematicheckoi fiziki*, 1979, vol. 19, pp. 970–989.

[14] Shishatskii S. P., Asanov A., Atamanov E. R. *Uniqueness Problems for degenerating equations and nonclassical problems*. VSP, Utrecht, The Netherlands, 2001.

[15] Asanov Avyt, Orozmamatova Jypar. About Uniqueness of Solutions of Fredholm Linear Integral Equations of the First Kind in the Axis. *Filoma*, 2019, vol. 33, no. 5, pp. 1329–1333.

DYNAMICAL CONTROL OF ACCURACY ON SINC-COLLOCATION METHOD FOR SOLVING FUZZY VOLTERRA INTEGRAL EQUATIONS WITH DISCONTINUOUS KERNEL

S. Noeiaghdam[1,2], **D. Sidorov**[1,3]

[1] *Industrial Mathematics Laboratory, Baikal School of BRICS, Irkutsk National Research Technical University, Irkutsk, Russia*
[2] *Department of Applied Mathematics and Programming, South Ural State University, Chelyabinsk, Russia*
e-mail: snoei@istu.edu; noiagdams@susu.ru
[3] *Melentiev Energy Systems Institute of Siberian Branch of Russian Academy of Science, Irkutsk, Russia*
e-mail: sidorovdn@istu.edu

There are many phenomena in the world that can be modelled in the form of mathematical problems such as bio-mathematical models, energy supply-demand model and others. They can help us to analyse and predict the phenomena using the mathematical methods, deep learning and big data. Such Volterra models that contain past information are called *hereditary* systems. Recently, many authors modelized the load leveling problem arising in the energy storages of the powering systems in the form of the linear and non-linear Volterra integral equation (VIE) with discontinuous kernel. They have been focused on solving this problem by numerical and semi-analytical methods [1].

The main purpose of this work is to validate the numerical solution of fuzzy Volterra integral equation (IE) with discontinuous kernel by applying the Sinc-collocation method (S-CM) based on the double exponential (DE) and single exponential (SE) decay.

Let $\widetilde{v}(z) = (v^{(1)}(z), v^{(2)}(z), v^{(3)}(z))$ and $\widetilde{x}(z) = (x^{(1)}(z), x^{(2)}(z), x^{(3)}(z))$ are triangular fuzzy functions on $[a, b]$. The second kind fuzzy Volterra IE with discontinuous kernel is presented as

$$\tilde{v}(z) = \tilde{x}(z) \oplus \sum_{j=1}^{m'} \int_{\beta_{j-1}(z)}^{\beta_j(z)} H_j(z,y)\tilde{v}(y)dy, \quad a \le z, y \le b, \tag{1}$$

where

$$0 =: \beta_0(z) < \beta_1(z) < ... < \beta_{m'-1}(z) < \beta_{m'}(z) := z, \quad for\ z \in (0,T),$$

and $\beta_j(0) = 0$. Also, $\forall z \in J = [0,T]$ we assume that $\tilde{x}(z)$ is bounded and $H_j(z,y)$ is discontinuous along continuous curves $\beta_j(t),\ j = 0, 1, \cdots, m'$. Eq. (1) can be written as

$$v^{(p)}(z) = x^{(p)}(z) + \sum_{j=1}^{m'} \int_{\beta_{j-1}(z)}^{\beta_j(z)} H_j(z,y)v^{(p)}(y)dy, \quad a \le z, y \le b, \quad p = 1, 2, 3. \tag{2}$$

This study is based on discrete stochastic arithmetic (DSA) which is able to validate the results with optimal solution and rely the proposed algorithm in comparison with the floating-point arithmetic (FPA). In order to achieve this goal, the fuzzy CESTAC[1] method and the CADNA[2] library are applied.

[1] Controle et Estimation Stochastique des Arrondis de Calculs
[2] Control of Accuracy and Debugging for Numerical Applications

Definition. *The number of common significant digits between two real numbers θ and η is shown by $C_{\theta,\eta}$ and is estimated as*

$$\begin{cases} C_{\theta,\eta} = \log_{10}\left|\dfrac{\theta+\eta}{2(\theta-\eta)}\right| = \log_{10}\left|\dfrac{\theta}{\theta-\eta} - \dfrac{1}{2}\right|, \qquad \theta \neq \eta, \\ \\ C_{\theta,\theta} = +\infty. \end{cases} \tag{3}$$

Theorem 1. *Let*

$$\widetilde{v}(z) = (v^{(1)}(z), v^{(2)}(z), v^{(3)}(z)),$$

be the exact solution and

$$\widetilde{v}_J^{DE}(z) = (v_J^{(1),DE}(z), v_J^{(2),DE}(z), v_J^{(3),DE}(z)),$$

be the J-th order numerical solution of Eq. (2) which is produced by DE in the S-CM. Then, for arbitrary $z \in [a,b]$, we get

$$C_{v^{(p)}(z), v_J^{(p),DE}(z)} - C_{v_{J+1}^{(p),DE}(z), v_J^{(p),DE}(z)} = \log_{10}\left|1 + \mathcal{O}\left(\exp\left(\frac{-\pi d}{\log_{10}(\frac{2d(J+1)}{\alpha})}\right)\right)\right|. \tag{4}$$

Theorem 2. *Let $\widetilde{v}(z) = (v^{(1)}(z), v^{(2)}(z), v^{(3)}(z))$ be the exact solution and*

$$\widetilde{v}_J^{SE}(z) = (v_J^{(1),SE}(z), v_J^{(2),SE}(z), v_J^{(3),SE}(z)),$$

be the J-th order numerical solution of Eq. (2) which is produced by SE in the S-CM. Then for arbitrary value of $z \in [a,b]$,

$$C_{v^{(p)}(z), v_J^{(p),SE}(z)} - C_{v_{J+1}^{(p),SE}(z), v_J^{(p),SE}(z)} = \mathcal{O}\left(\log_{10}(J+1)\sqrt{J}\exp\left(-\sqrt{\pi d\alpha J}\right)\right). \tag{5}$$

The accuracy of the S-CM in both SE and DE cases is discussed. Also, two numerical algorithms based on the S-CM in SE and DE decays by applying the fuzzy CESTAC method and CADNA library are presented. The termination criterion in each algorithm is based on the Hausdorff distance to be an informatical zero. By solving some examples, not only the optimal approximation and the optimal iteration of the S-CM can be found but also similar to the non-fuzzy case, it is shown that the DE precision is more accurate with faster convergence rate than the SE.

This work was supported by RSF grant No. 22-29-01619.

[1] Tynda A. N., Noeiaghdam S., Sidorov D. N. Polynomial Spline Collocation Method for Solving Weakly Regular Volterra Integral Equations of the First Kind. *The Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics*, 2022, vol. 39, pp. 62–79. https://doi.org/10.26516/1997-7670.2022.39.62