# General Physics 2 Summary

Sunflower027

2025.11

# 1 矢量场

**向量运算**

$$\nabla(\varphi\psi)=\psi\nabla\varphi+\varphi\nabla\psi$$
$$\nabla\cdot(\varphi\vec{g})=\nabla\varphi\cdot\vec{g}+\varphi\nabla\cdot\vec{g}$$
$$\nabla\times(\varphi\vec{g})=\nabla\varphi\times\vec{g}+\varphi\nabla\times\vec{g}$$
$$\nabla\cdot(\vec{g}\times\vec{f})=(\nabla\times\vec{g})\cdot\vec{f}-\vec{g}\cdot(\nabla\times\vec{f})$$
$$\nabla\times(\vec{g}\times\vec{f})=(\vec{f}\cdot\nabla)\vec{g}-(\nabla\cdot\vec{g})\vec{f}+(\nabla\cdot\vec{f})\vec{g}-(\vec{g}\cdot\nabla)\vec{f}$$
$$\nabla\times(\nabla\times\vec{h})=\nabla(\nabla\cdot\vec{h})-\nabla^2\vec{h}$$
$$\vec{c}\times(\vec{a}\times\vec{b})=(\vec{c}\cdot\vec{b})\vec{a}-(\vec{c}\cdot\vec{a})\vec{b}$$
$$\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})=\vec{b}\cdot(\vec{c}\times\vec{a})=\vec{c}\cdot(\vec{a}\times\vec{a})$$

**无旋/无源场**

$$\nabla\times\vec{F}=0\implies\exists\varphi\, s.t.\vec{F}=\nabla\varphi \tag{1.0.1}$$

$$\nabla\cdot\vec{F}=0\implies\exists\vec{C}\, s.t.\vec{F}=\nabla\times\vec{C} \tag{1.0.2}$$

**积分**

$$flux=\int_{\partial\Omega}\vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{S}=\int_{\Omega}\nabla\cdot\vec{F}\mathrm{d}V \tag{1.0.3}$$

$$\begin{aligned}circulation&=\int_{\partial\Sigma}\vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{l}=\int_{\Sigma}(\nabla\times\vec{F})\cdot\mathrm{d}\vec{S}\\&=\int_S\sum(\frac{\partial f_y}{\partial z}-\frac{\partial f_z}{\partial y})dydz\end{aligned}$$

## 1.1 Maxwell equations

$$\nabla\cdot\vec{E}=\frac{\rho}{\varepsilon_0} \tag{1.1.1}$$

$$\nabla\times\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \tag{1.1.2}$$

$$\nabla\times\vec{B}=\frac{1}{c^2}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}+\frac{\vec{j}}{c^2\varepsilon_0} \tag{1.1.3}$$

$$\nabla\cdot\vec{B}=0 \tag{1.1.4}$$

# 2 静电学

## 2.1 basics

库仑定律

$$\vec{F}_1=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1q_2}{r_{12}^2}\hat{r}_{12} \tag{2.1.1}$$

电场

$$\vec{E}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\hat{r} \tag{2.1.2}$$

叠加原理

$$\vec{E}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V\frac{\rho\, dV_2}{r^2}\hat{r}$$
$$E_x=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V\frac{(\Delta x)\rho\, dV_2}{r^3}$$

电势

$$\vec{E}=-\nabla\varphi \tag{2.1.3}$$
$$\Delta\phi=-\int_\gamma\vec{E}\cdot d\vec{s}\quad\text{path free}$$

Gauss 定理：闭合面 $S$, 有

$$\int_S\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{S}=\frac{Q_{\text{内部}}}{\varepsilon_0} \tag{2.1.4}$$

$$\nabla\cdot\vec{E}=\frac{\rho}{\varepsilon_0} \tag{2.1.5}$$

examples. 均匀带电球体的场 (径向)

$$E(r)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\begin{cases}\frac{Q}{r^2}, & r>R_0\\ \frac{Qr}{R_0^3}, & r<R_0\end{cases} \tag{2.1.6}$$

均匀带电直线

$$E=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r} \tag{2.1.7}$$

均匀带电平面

$$E=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \tag{2.1.8}$$

Circle:

$$E(x)=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{L}{(r^2+L^2)^{3/2}}\right)\text{（考虑分量）}$$

Annulus:

$$E_x=\frac{\sigma L}{2\varepsilon_0}(\frac{1}{\sqrt{{R_1}^2+L^2}}-\frac{1}{\sqrt{{R_2}^2+L^2}})$$

## 2.2 导体

静电平衡状态下，内部 $\rho = 0, \vec{E} = 0$, 全导体电势相同.

$$\vec{n} \cdot \vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \quad \vec{n} \times \vec{E} = 0$$

导体空腔：内部无电荷时，内表面无电荷

## 2.3 electric dipole

$+q, -q$ 电荷，间隔 $d$. 定义 $p = qd$, $\vec{p}$ 为 $-q$ 指向 $+q$ 的向量，大小为 $p$. 以两者中点为原点，有

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{r^3} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \vec{p} \cdot \nabla \left( \frac{1}{r} \right) \tag{2.3.1}$$

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \left( \frac{3(\vec{p} \cdot \vec{r})\vec{r}}{r^5} - \frac{\vec{p}}{r^3} \right) \tag{2.3.2}$$

## 2.4 uniqueness theorem

唯一性定理：闭合区域 $V$, 已知电荷分布 $\rho(\vec{x})$, 若在 $S = \partial V$ 上以下两者之一成立：

1. $\varphi|_S$ 给定
2. $\frac{\partial \varphi}{\partial n}\big|_S$ 给定
3. 导体所带电荷量确定

则 $V$ 内电场分布唯一确定。

证明主要利用 $\nabla^2 \varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$ 以及恒等式

$$\int_S u \nabla u \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \int_V \nabla \cdot (u \nabla u) \mathrm{d}V = \int_V (u \nabla^2 u + |\nabla u|^2) \mathrm{d}V. \tag{2.4.1}$$

唯一性定理与导体：闭合区域内有一些导体，若以上条件均满足且每个导体电荷量或者电势之一确定，则电场分布唯一。

## 2.5 image charge

image charge 不在希望求电场的空间中，且引入后导体边界面电势不变，从而可以忽视导体，认为整个空间是 Uniform 的。如此引入 image charge 后，导体外电场不变。

导体平面：对称位置放等量反号电荷

导体球：球外距离球心 $d$ 处有电荷 $q$, 则在连线上距离球心 $\frac{R^2}{d}$ 处放一个 $q' = -\frac{R}{d} q$ 的电荷，这两个电荷在球面上每一点产生电势为 0. 后可以根据球的电势或者带电量来在球心放置适量电荷。

point charge inside a spherical cavity - 直接就是 $q$ and $q'$, 无论外导体的带电量，因为内壁永远只产生 $-q$ 的电荷量

## 2.6 capacitor

两极板带电 $Q, -Q$, 面积 $A$, 距离 $d$，电荷全部集中在两个内表面（考虑两个无线平面）

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} = \frac{Q}{Ad} \tag{2.6.1}$$

$$V = Ed = \frac{Qd}{A\varepsilon_0}, C = \frac{Q}{V} = \frac{A\varepsilon_0}{d} \tag{2.6.2}$$

## 2.7 complex functions

$f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, analytic(解析/可导)。$f(x+yi) = U(x,y) + iV(x,y)$，$U, V$ 均可作为电势函数。取 $V$ 为电势，$U$ 的差为路径上电场的 flux，故 $U$ 的等值线为电场方向

$$E = -\nabla V = -\frac{\partial V}{\partial x} - i\frac{\partial V}{\partial y} = -\frac{\partial V}{\partial x} - i\frac{\partial U}{\partial x} = (-i)\bar{f}'(z)$$

## 2.8 examples

**plasma oscillation** 等离子体，几乎电中性，由 ions(正电)+electrons(负电) 构成。受到扰动时，电子被推离原位，形成局部正电局部负电（正电 ions 质量大，受影响小）。产生恢复电场，如此反复形成 oscillation. 电子数密度 $n_0$, plasma frequency

$$\omega_p = \sqrt{\frac{q_e^2 n_0}{m_e \varepsilon_0}} \tag{2.8.1}$$

**Colloidal particles**

$$\begin{aligned} \rho &= q_e (n_+ - n_-) \\ &= q_e n_0 \left( e^{-q_e \varphi(x)/kT} - e^{q_e \varphi(x)/kT} \right) \\ &= -2n_0 q_e^2 \varphi(x)/kT \end{aligned}$$

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} = \frac{2n_0 q_e^2}{\varepsilon_0 kT} \phi(x)$$

$$\phi = \frac{D\sigma}{\epsilon_0} e^{x/D}, D = \sqrt{\frac{\epsilon_0 kT}{2n_0 q_e^2}}$$

if $n_0 \uparrow$ then $D \downarrow, \phi \downarrow$ 静电（排斥）长程力变为短程力，范德华力（吸引）占据主导，产生沉淀

**electric field of a grid** 足够远的地方形成均匀电场

$$\varphi_n = F_n(z) \cos \frac{2\pi n x}{a} \quad n = 1, 2, 3, \ldots, \quad \varphi = \sum \varphi_n$$

$$\varphi(x, z) = \underbrace{C - E_0 z}_{\text{均匀项}} + \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-n\pi z/a} \cos\left(\frac{2n\pi x}{a}\right)}_{\text{衰减项}}$$

## 2.9 静电能

两个电荷的 electrostatic energy: work to bring them together (from infinity)

$$U = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 r_{12}} \tag{2.9.1}$$

electrostatc energy for a charge system:

$$U = \frac{1}{2}\sum_i q_i \varphi_i \tag{2.9.2}$$

$\varphi_i$: 除 $q_i$ 外，其余 charge 在 $q_i$ 处产生的电势（规定无穷远处电势为 0）

连续情形：

$$U = \frac{1}{2}\int \varphi \mathrm{d}q \tag{2.9.3}$$

同时有导体和点电荷时的静电能：（点电荷自能不考虑）

$$U = \frac{1}{2}\left(\sum_i \varphi_i Q_i + \sum_j \varphi'_j q_j\right) \tag{2.9.4}$$

导体电荷量 $Q_i$, $\varphi_i$ 为该导体在此体系下具有的电势。点电荷 $q_j$, $\varphi'_j$ 为 $q_j$ 之外的带电体、电荷在此处产生的电势。

电场与电能

$$U = \frac{\varepsilon_0}{2}\int_\Omega E^2 \mathrm{d}V \tag{2.9.5}$$

$$U = U_{self} + U_{inter}$$

自能：

$$U_{ball} = \frac{3}{5}\frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 R}, U_{sphere} = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0 R}$$

电容:

$$U = \frac{1}{2}CV^2$$

## 2.10 dielectric & polarization

极化率越高，介质内部电场越小，导体有无穷介电常数。注意 $P, D, \sigma$ 有相同的量纲。

$$\rho_{\mathrm{pol}} = -\nabla\cdot\mathbf{P}, \sigma_{pol} = \vec{P}\cdot\vec{n}$$

$$P = (\epsilon_r - 1)\epsilon_0 E, \quad D = \epsilon_r\epsilon_0 E$$

$$\nabla\cdot D = \nabla\cdot(\epsilon_r\varepsilon_0 E) = \rho_{\mathrm{free}}$$

$$\nabla\cdot E = \frac{\rho_{\mathrm{free}} + \rho_{\mathrm{pol}}}{\epsilon_0}$$

$$E_{1\tau} = E_{2\tau}, E_{1n} - E_{2n} = \frac{\sigma_f + \sigma_p}{\epsilon_0}, D_{1n} - D_{2n} = \sigma_f$$

唯一性定理要求：$\nabla^2\phi = -\frac{q}{\epsilon_i}$，满足电势的边界条件，满足介质的边界条件