باسمه تعالی

رضا لادی 40316956

تمارین سری 1
یادگیری ماشین

(1

I-آ) ضرب دو ماتریس $m\times n$ و $a\times b$ ابعادی بصورت زیر خواهد داشت: $(n \overset{\text{باید}}{=} a)$

$$C_{m\times n} \times D_{a\times b} = C_{m\times \cancel{n}} \times D_{\cancel{a}\times b} = E_{m\times b}$$

با توجه به اینکه $B_{4\times 2}$ , $A_{2\times 3}$ :

$$\underset{4\times 2}{B} \times \underset{2\times 3}{A} = C_{4\times 3}$$

$B^T_{2\times 4}$ , $\cancel{B^T_{2\times 4} \times A_{2\times 3}}$ , $\cancel{A^T_{3\times 2} \times B_{4\times 2}}$

ناممکن ناممکن

I-ب)

$$B^T = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{21} & b_{31} & b_{41} \\ b_{12} & b_{22} & b_{32} & b_{42} \end{bmatrix}$$

$$B \times A = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \\ b_{41} & b_{42} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} b_{11}a_{11}+b_{12}a_{21} & b_{11}a_{12}+b_{12}a_{22} & b_{11}a_{13}+b_{12}a_{23} \\ b_{21}a_{11}+b_{22}a_{21} & b_{21}a_{12}+b_{22}a_{22} & b_{21}a_{13}+b_{22}a_{23} \\ b_{31}a_{11}+b_{32}a_{21} & b_{31}a_{12}+b_{32}a_{22} & b_{31}a_{13}+b_{32}a_{23} \\ b_{41}a_{11}+b_{42}a_{21} & b_{41}a_{12}+b_{42}a_{22} & b_{41}a_{13}+b_{42}a_{23} \end{bmatrix}$$

(T - II

$$x^{(i)}_{1\times 2}\,\theta_{2\times 1} = \begin{bmatrix} x_1^{(i)} & x_2^{(i)} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix} = B_{1\times 1}$$

ابعاد

$$X_{n\times 2}\,\theta_{2\times 1} = \begin{bmatrix} x_1^{(1)} & x_2^{(1)} \\ \vdots & \vdots \\ x_1^{(n)} & x_2^{(n)} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix} = C_{n\times 1}$$

ابعاد

(ب - II

$$J = \sum_{i=1}^{n} \left( x^{(i)}\vec{\theta} - y^{(i)} \right)^2 = \sum_{i=1}^{n} \left( y - x\theta \right)^2 = \sum (y - X\theta)^T (y - x\theta)$$

$$\Rightarrow \nabla_\theta J = \frac{\partial}{\partial\theta} (y^T - \theta^T x^T)(y - x\theta)$$

$$= \frac{\partial}{\partial\theta} \left( y^T y - y^T x\theta - \theta^T x^T y + \theta^T x^T x\theta \right) = 0 - x^T y - x^T y + x^T x\theta + x^T x\theta$$

اسکالر

$$= -2x^T y + 2x^T x\theta$$

---

سؤال 2)

I-T) احتمالات بیزی تفسیری از احتمال می‌باشد که احتمال یک رویداد را

بر اساس دانش قبلی و شواهد جدید به روز رسانی میکنند. قضیه بیز به صورت

احتمال B به شرط A

زیر بیان میشود:

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)\,P(A)}{P(B)}$$

احتمال رویداد A

B " "

احتمال A به شرط B

(۲ - II

$$P(sick|+) = \frac{P(+|sick)\,P(sick)}{P(+)}$$

$$P(\text{سالم}) = 1 - P(sick) = 0.9999$$

مثبت شدن تست

$$P(+) = P(+|sick)\,P(sick) + P(+|\text{سالم})\,P(\text{سالم})$$

$$= (0.99 \times 0.0001) + (0.01 \times 0.9999) \simeq 0.010098$$

$$\longrightarrow P(sick|+) = \frac{0.99 \times 10^{-4}}{0.010098} \simeq 0.0098039 2156$$

گرد می‌کنیم

$$\simeq 0.0098$$

II- ب)

$$P(\text{سالم} \mid +) = 1 - 0.0098 = 0.9902$$

با فرض مستقل بودن آزمایش دوم از اول:

$$P(++ \mid \text{sick}) = P(+ \mid \text{sick}) = 0.9999$$

$$P(++ \mid \text{سالم}) = P(+ \mid \text{سالم}) = 0.0001$$

$$\Rightarrow P(\text{sick} \mid ++) = \frac{P(++ \mid \text{sick})\, P(\text{sick} \mid +)}{P(++ \mid \text{sick})\, P(\text{sick} \mid +) + P(++ \mid \text{سالم})\, P(\text{سالم} \mid +)}$$

$$\simeq \frac{0.00978902}{0.00988804} \approx 0.9899$$

II- ج)

$$P(\text{sick} \mid ++-) = \frac{P(++- \mid \text{sick})\, P(\text{sick} \mid ++)}{P(++- \mid \text{sick})\, P(\text{sick} \mid ++) + P(++- \mid \text{سالم})\, P(\text{سالم} \mid ++)}$$

دوباره با فرض مستقل بودن آزمایش ها:

$$P(++- \mid \text{sick}) = 0.999999$$

$$= P(- \mid \text{sick}) \quad , \quad P(++- \mid \text{سالم}) = 1 - 0.999999 = 10^{-6}$$

$$P(\text{sick} \mid ++-) = \frac{0.999999 \times 0.9899}{0.999999 \times 0.9899 + 10^{-6} \times (1-0.9899)} = 0.99999989$$

---

سوالات بخش های مربوط به کد زنی در Python

در صورت نیاز با کمک تابع print(" ") توضیح

داده شده است. همچنین کامنت گذاری ،

بخش بندی برای هر سؤال انجام شده است .