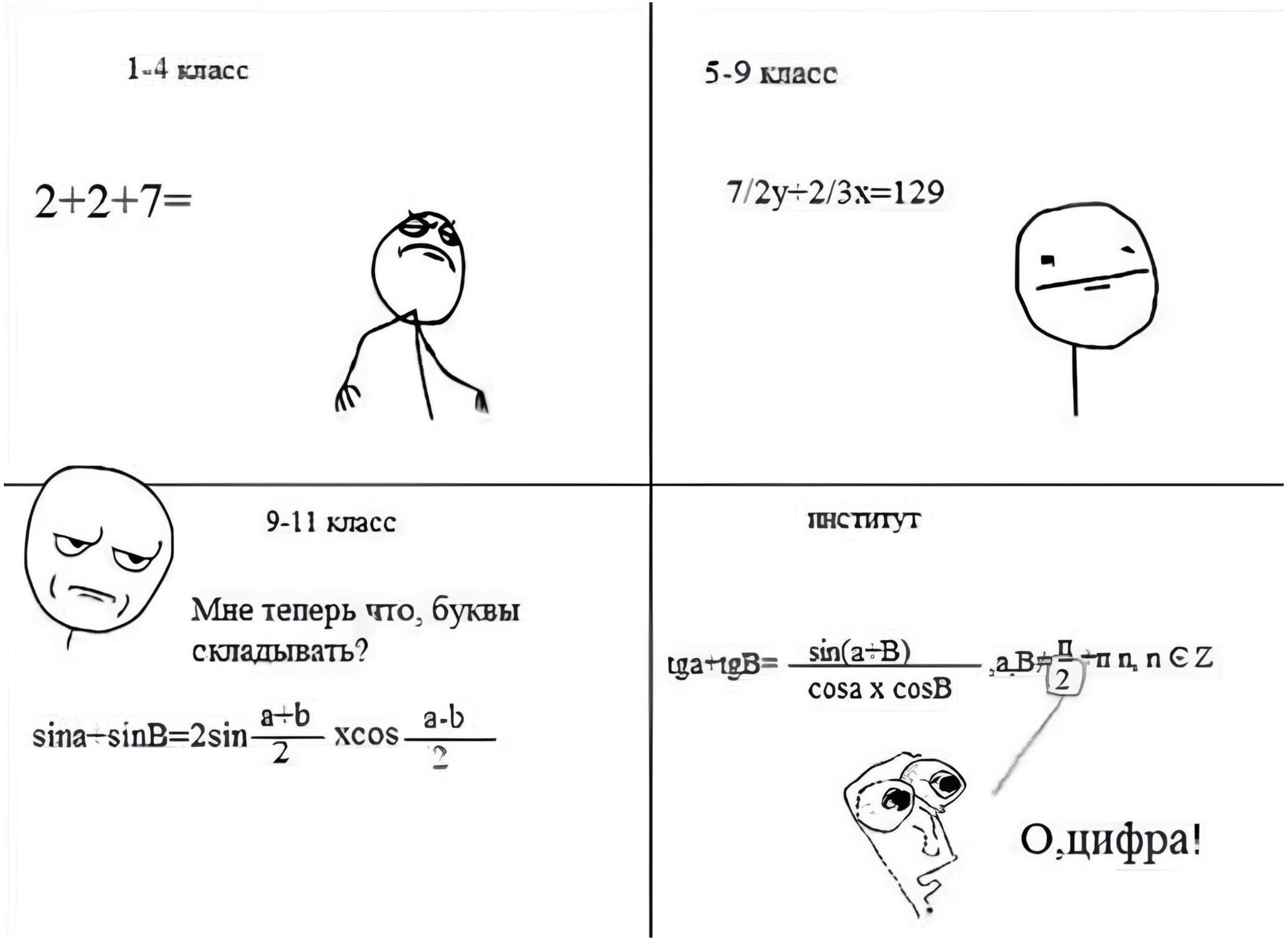
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Лекция №1

Числовые множества (часть 1)

ТОП-ИТ
ПРОГРАММИРУЕМ БУДУЩЕЕ



ТОП-ИТ

ПРОГРАММИРУЕМ БУДУЩЕЕ

Большинство математических утверждений формулируются в следующем виде:

ЕСЛИ A, ТО B

(«из A следует B»).

Здесь A и B – некоторые высказывания.

Высказывание A называется *достаточным условием* (для B),

Высказывание B называется *необходимым условием* (для A).

Например, A – «Углы вертикальны», B – «Углы равны». Тогда

ЕСЛИ углы вертикальны, ТО углы равны

Очевидно, что если справедливо утверждение

Е С Л И $\quad A, \quad$ Т О $\quad B,$

то **<u>вовсе не обязательно</u>** справедливо

Е С Л И $\quad B, \quad$ Т О $\quad A.$

Но иногда это возможно.

В этом случае A и B называются *необходимыми и достаточными условиями* друг для друга.

В этом случае утверждение обычно формулируется следующим образом:

A ТОГДА И ТОЛЬКО ТОГДА, КОГДА B

Множество – совокупность некоторых объектов, понимаемых как единое целое. Данные объекты называются **элементами множества**.

Отображение – некоторый закон или правило, которое каждому элементу одного множества ставит в соответствие некоторый элемент другого множества.

Если данные множества являются числовыми, то вместо слово отображение используют слово **функция**.

Математический анализ – один из основных разделов математики, изучающий переменные величины.

Более точно:

Математический анализ — это основных разделов математики, в котором изучаются свойства функций.

Поэтому прежде чем перейти к изучению функций, необходимо изучить числовые множества и зафиксировать их свойства.

НАТУРАЛЬНЫЕ ЧИСЛА

Определение 1.1.1. *Множество* X *называется индуктивным, если вместе с каждым элементом* $x \in X$ *ему принадлежит также элемент* $(x + 1)$.

Определение 1.1.2. *Множеством натуральных чисел называется наименьшее индуктивное множество, содержащее единицу. Множество натуральных чисел обозначают символом* $\mathbb{N}$.

Из определения следует, что $1 \in \mathbb{N}$, следовательно, $1 + 1 = 2 \in \mathbb{N}$, далее, $2 + 1 = 3 \in \mathbb{N}$,…

НАТУРАЛЬНЫЕ ЧИСЛА

Лемма 1.1.1. (Метод математической индукции). *Пусть* $A(n)$ *– некоторое утверждение. Тогда* $A(n)$ *– верно для каждого* $n \in \mathbb{N}$ *тогда и только тогда, когда одновременно выполнены два условия:*

1) $A(1)$ – *верно;*

2) для каждого $k \in \mathbb{N}$*, если из того, что утверждение* $A\,(k)$ – *верно, верно и утверждение* $A\,(k+1)$.

Доказательство. Необходимость. Если $A(n)$ –верно для каждого $n \in \mathbb{N}$, то выполнение условий 1) и 2) является очевидным.

Достаточность. Пусть $X = \{n \in \mathbb{N}\colon A(n) - \text{ верно}\}$, тогда $X \subseteq \mathbb{N}$. Тогда из 1) и 2) следует, что X – индуктивное множество. Поскольку множество натуральных чисел есть наименьшее индуктивное множество, то $X \supseteq \mathbb{N}$. Лемма доказана.

НАТУРАЛЬНЫЕ ЧИСЛА

Пример. Применяя метод математической индукции, доказать, что для каждого $n \in \mathbb{N}$ справедливо равенство

$$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

ЦЕЛЫЕ ЧИСЛА

Определение 1.1.3. *Множество*

$$\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup \{-1, -2, \ldots\} \cup \{0\}$$

называется множеством целых чисел.

РАЦИОНАЛЬНЫЕ ЧИСЛА

Определение 1.1.5. *Рациональным числом называется число представимое в виде отношения двух чисел* $q = \frac{m}{n}$, $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$. *Множество рациональных чисел обозначают символом* $\mathbb{Q}$.

Справедливы основные свойства.

I. Любые два рациональных числа p и q связаны одним и только одним из трех знаков $>, <$ или $=$, причем если $a > b$, то $b < a$.

Правило сравнения формулируется следующим образом:

- два неотрицательных рациональных числа $p = \frac{k}{s}$ и $q = \frac{m}{n}$, $k, m \in \mathbb{Z}$, $s, n \in \mathbb{N}$, связаны тем же знаком, что и два целых числа kn и ms;

- два неположительных рациональных числа p и q связаны тем же знаком, что и два неотрицательных числа $|q|$ и $|p|$;

- если p – неотрицательное, а q – отрицательное рациональное число, то $p > q$.

ТОП-ИТ
ПРОГРАММИРУЕМ БУДУЩЕЕ

РАЦИОНАЛЬНЫЕ ЧИСЛА

Справедливы основные свойства.

II. Существует правило, по которому любым двум рациональным числам p и q ставится в соответствие определенное рациональное число r, называемое их суммой и обозначаемое символом $r = p + q$.

Правило образования суммы рациональных чисел $p = \frac{k}{s}$ и $q = \frac{m}{n}$, $k, m \in \mathbb{Z}$, $s, n \in \mathbb{N}$, определяется формулой $\frac{k}{s} + \frac{m}{n} = \frac{kn+ms}{sn}$. операция нахождения суммы называется операцией сложения.

РАЦИОНАЛЬНЫЕ ЧИСЛА

III. Существует правило, по которому любым двум рациональным числам p и q ставится в соответствие определенное рациональное число r, называемое их произведением и обозначаемое символом $r = pq$.

Правило образования произведения рациональных чисел $p = \frac{k}{s}$ и $q = \frac{m}{n}$, $k, m \in \mathbb{Z}$, $s, n \in \mathbb{N}$, определяется формулой $\frac{k}{s} \cdot \frac{m}{n} = \frac{km}{sn}$. операция нахождения произведения называется операцией умножения.

ТОП-ИТ
ПРОГРАММИРУЕМ БУДУЩЕЕ

РАЦИОНАЛЬНЫЕ ЧИСЛА

А. Свойства правила сравнения

1^0 Из соотношений $p > q$ и $q > r$ вытекает соотношение $p > r$ (свойство транзитивности знака $>$); из соотношений $p = q$ и $q = r$ вытекает, что $p = r$ (свойство транзитивности знака $=$).

Б. Свойства правила сложения

2^0 $p + q = q + p$ (свойство коммутативности сложения);

3^0 $(p + q) + r = p + (q + r)$ (свойство ассоциативности сложения);

4^0 существует рациональное число 0 такое, что $p + 0 = p$ для любого числа $p \in \mathbb{Q}$ (существование нуля);

5^0 Для каждого числа $p \in \mathbb{Q}$ существует противоположное ему число $(-p)$ такое, что $p + (-p) = 0$ (существование противоположного элемента).

В. Свойства правила умножения

6^0 $pq = qp$ (свойство коммутативности умножения);

7^0 $(pq)r = p(qr)$ (свойство ассоциативности умножения);

8^0 существует рациональное число 1 такое, что $p \cdot 1 = p$ для любого числа $p \in \mathbb{Q}$ (существование единицы);

9^0 для каждого числа $p \in \mathbb{Q}$, отличного от нуля, существует обратное ему число p^{-1} такое, что $pp^{-1} = 1$ (существование обратного элемента).

РАЦИОНАЛЬНЫЕ ЧИСЛА

Б, В. Свойства связи правил сложения и умножения

10^0 $(p+q)r = pr + qr$ (свойство дистрибутивности умножения относительно сложения);

А, Б, В. Свойства связи правила сравнения с правилами сложения и умножения

11^0 из соотношения $p > q$ вытекает, что $p + r > q + r$;

12^0 из соотношения $p > q$ и $r > 0$ вытекает, что $pr > qr$.

Особое внимание обратим на последнее свойство:

13^0 каково бы ни было рациональное число p, можно число 1 повторить слагаемым столько раз, что полученная сумма превзойдет p.

СХЕМА ПОСТРОЕНИЯ ВЕЩЕСТВЕННЫХ ЧИСЕЛ

Определение 1.2.1. *Числа, которые не являются рациональными, называют иррациональными.*

Поставим себе задачей расширить область рациональных чисел, присоединив к ним иррациональные числа.

Вместе с тем покажем, что в расширенной области останутся справедливыми все известные свойства рациональных чисел, относящиеся к арифметическим действиям над ними и к сочетанию их с помощью знаков равенства и неравенства.

СХЕМА ПОСТРОЕНИЯ ВЕЩЕСТВЕННЫХ ЧИСЕЛ

Определение 1.2.2. *Два отрезка называются соизмеримыми, если отношение их длин выражается рациональным числом. В противном случае они называются несоизмеримыми (например, длина диагонали квадрата со стороной равной единице).*

Определение 1.2.3. *Числовой осью будем называть прямую, на которой выбраны определенная точка* O *, которую называют началом отсчета, масштабный отрезок* OM *(длину его считаем равной единице) и положительное направление (обычно от* O *к* M*).*

СХЕМА ПОСТРОЕНИЯ ВЕЩЕСТВЕННЫХ ЧИСЕЛ

Возникает вопрос: возможно ли поставить в соответствие каждой точке K на числовой оси некоторое число, которое бы выражало длину отрезка OK?

Это число будем считать *положительным*, если точки K и M лежат по одну сторону от начала отсчета, и *отрицательным* – если по разные стороны от точки O.

СХЕМА ПОСТРОЕНИЯ ВЕЩЕСТВЕННЫХ ЧИСЕЛ

Можно точно сказать, что каждому рациональному числу на числовой прямой соответствует определенная точка.

На примере несоизмеримости длины диагонали квадрата (со стороной равной единице) с его стороной понятно, что не всем точкам числовой оси соответствуют рациональные числа.

Далее постараемся с помощью масштабного отрезка OM измерить любой отрезок числовой оси, и для этого нам нужно расширить область рациональных чисел такими числами, которые бы соответствовали всем без исключения точкам числовой оси.

СХЕМА ПОСТРОЕНИЯ ВЕЩЕСТВЕННЫХ ЧИСЕЛ

Определение 1.2.4. *Символ* $a = a_0, a_1 a_2, \dots, a_n, \dots,$ *где* $a_0 \in \mathbb{Z}$, $a_1 a_2, \dots, a_n, \dots \in \{0, \dots, 9\}$, *называется бесконечной десятичной дробью.*

Бесконечная десятичная дробь называется *периодической* тогда и только тогда, когда начиная с некоторого номера n группа цифр $a_n, \dots, a_{n+i}$ $(i \in \mathbb{N})$ или одна цифра повторяется. Эта группа цифр называется *периодом* дроби.

Например, $2{,}78134134134 \dots = 2{,}78(134)$ или $0{,}9999999 = 0,(9)$

Дробь вида $a_0, a_1 a_2 \dots a_{n-1}(9)$ называется *бесконечной десятичной дробью с девяткой в периоде*.

ТОП-ИТ
ПРОГРАММИРУЕМ БУДУЩЕЕ

СХЕМА ПОСТРОЕНИЯ ВЕЩЕСТВЕННЫХ ЧИСЕЛ

Пусть K – любая точка числовой оси, лежащая, как и точка M, правее начала координат. Выясним, сколько раз масштабный отрезок OM помещается в отрезок OK. Возможны два варианта:

1) OM укладывается в OK целое число a_0 раз без остатка. В этом случае число a_0 представляет собой точный результат измерения отрезка OK.

2) OM укладывается в OK целое число a_0 раз с некоторым *остатком* NK, меньшим OM. В этом случае целое число a_0 представляет собой приближенный результат измерения по недостатку с точностью до 1.

СХЕМА ПОСТРОЕНИЯ ВЕЩЕСТВЕННЫХ ЧИСЕЛ

Выясним теперь, сколько раз $\frac{1}{10}$ часть отрезка OM укладывается в остатке NK. И опять возможны два варианта:

1) $\frac{1}{10}$ часть отрезка OM укладывается в NK целое число a_1 раз без остатка. В этом случае число a_0, a_1 также представляет собой точный результат измерения отрезка OK.

2) $\frac{1}{10}$ часть отрезка OM укладывается NK целое число a_1 раз с некоторым *остатком* PK, меньшим $\frac{1}{10}$ части отрезка OM. В этом случае рациональное число a_0, a_1 представляет собой результат измерения по недостатку с точностью до $\frac{1}{10}$.

и так далее…

ТОП-ИТ
ПРОГРАММИРУЕМ БУДУЩЕЕ

СХЕМА ПОСТРОЕНИЯ ВЕЩЕСТВЕННЫХ ЧИСЕЛ

Продолжая неограниченно этот процесс, мы получим бесконечный набор рациональных чисел

$$a_0; \quad a_0, a_1; \quad a_0, a_1 a_2; \; \dots \; ; \quad a_0, a_1 a_2 \dots a_n \dots, \tag{1.2.1}$$

каждое из которых представляет собой результат измерения отрезка OK по недостатку с соответствующей степенью точности.

Любое из этих рациональных чисел можно представить посредством обрывания на соответствующем знаке бесконечной десятичной дроби

$$a_0, a_1 a_2 \dots a_n. \tag{1.2.2}$$

Итак, мы видим, что процесс измерения произвольного отрезка OK числовой оси с помощью масштабного отрезка OM приводит нас к рассмотрению чисел, представимых в виде бесконечных десятичных дробей.

ТОП-ИТ
ПРОГРАММИРУЕМ БУДУЩЕЕ

СХЕМА ПОСТРОЕНИЯ ВЕЩЕСТВЕННЫХ ЧИСЕЛ

Определение 1.2.5. *Числа, которые можно представить в виде бесконечных десятичных дробей, будем называть вещественными числами. Множество вещественных чисел (или их еще называют действительными числами) обозначается символом* $\mathbb{R}$.

СРАВНЕНИЕ ВЕЩЕСТВЕННЫХ ЧИСЕЛ

Пусть

$$a = \pm a_0, a_1 a_2 \dots a_n \dots \qquad (1.2.3)$$

$$b = \pm b_0, b_1 b_2 \dots b_n \dots, \qquad (1.2.4)$$

где из двух знаков берется какой-то один.

Два вещественных числа (1.2.3) и (1.2.4) называются *равными*, если они имеют одинаковые знаки и выполняются равенства

$$a_0 = b_0, \qquad a_1 = b_1, \qquad a_2 = b_2, \dots$$

СРАВНЕНИЕ ВЕЩЕСТВЕННЫХ ЧИСЕЛ

Пусть даны два неравных вещественных числа a и b. Определим в каком случае $(a > b)$, а в каком – $(a < b)$.

Случай 1. $a, b \geq 0$. Так как $a \neq b$, то нарушается хотя бы одно из равенств $a_0 = b_0, a_1 = b_1, \ldots$ Обозначим через k наименьший из номеров n, для которого нарушается равенство $a_n = b_n$. Тогда будем считать, что

$a > b$, если $a_k > b_k$ и $a < b$, если $a_k < b_k$.

Случай 2. Если $a \geq 0, b < 0$, то, конечно, $a > b$.

Случай 3. $a, b < 0$. Будем называть модулем вещественного числа a неотрицательное вещественное число, которое обозначается символом $|a|$ и равно бесконечной десятичной дроби, представляющей число a, взятой со знаком «+».

Если $a, b < 0$, то будем считать, что $a > b$, если $|a| < |b|$, и $a < b$, если $|a| > |b|$.

ТОП-ИТ
ПРОГРАММИРУЕМ БУДУЩЕЕ

ПРИБЛИЖЕНИЕ ВЕЩЕСТВЕННОГО ЧИСЛА РАЦИОНАЛЬНЫМИ

Лемма 1.2.1. *Для каждого вещественного числа a и для любого положительного рационального числа ε существуют таких два рациональных числа q_1 и q_2, что $q_1 \leq a \leq q_2$, причем $q_2 - q_1 < \varepsilon$.*

Доказательство. Пусть a – произвольное неотрицательное вещественное число и представимо в виде бесконечной десятичной дроби

$$a = a_0, a_1 a_2 \dots a_n \dots$$

Оборвем эту дробь на n –м знаке после запятой, получим рациональное число $a_0, a_1 a_2 \dots a_n$. Увеличим полученное число на $\frac{1}{10^n}$, получим другое рациональное число $a_0, a_1 a_2 \dots a_n + \frac{1}{10^n}$. По правилу сравнения установим, что для каждого номера n справедливы неравенства:

$$a_0, a_1 a_2 \dots a_n \leq a \leq a_0, a_1 a_2 \dots a_n + \frac{1}{10^n}. \qquad (1.2.5)$$

Неравенство $(1.2.5)$ означает, что вещественное число a заключено между двумя рациональными числами, разница между которыми $\frac{1}{10^n}$ для любого натурального n.

ПРИБЛИЖЕНИЕ ВЕЩЕСТВЕННОГО ЧИСЛА РАЦИОНАЛЬНЫМИ

Покажем, что для любого наперед заданного положительно рационального числа ε, начиная с некоторого номера n, справедливо неравенство

$$\frac{1}{10^n} < \varepsilon.$$

Действительно, насколько бы мало ни было положительное рациональное число ε, существует лишь конечное число натуральных чисел таких, что $10^n \leq \frac{1}{\varepsilon}$ или $\frac{1}{10^n} \geq \varepsilon$. Получается, что для всех остальных номеров n (до бесконечности) справедливо обратное неравенство $\frac{1}{10^n} < \varepsilon$. Лемма доказана.

Единственное, что в жизни пригодилось из геометрии, это фраза: «Что и требовалось доказать».