ГЛАВА 1.
ЧИСЛОВЫЕ МНОЖЕСТВА.

§ 1.1. Рациональные числа.

1.1.1. Определение натурального числа. Метод математической индукции.

Определение 1.1.1. *Множество X называется индуктивным, если вместе с каждым элементом $x \in X$ ему принадлежит также элемент $(x+1)$.*

Определение 1.1.2. *Множеством натуральных чисел называется наименьшее индуктивное множество, содержащее единицу. Множество натуральных чисел обозначают символом $\mathbb{N}$.*

Из определения следует, что $1 \in \mathbb{N}$, следовательно, $1+1=2 \in \mathbb{N}$, далее, $2+1=3 \in \mathbb{N}$,…

Лемма 1.1.1. (Метод математической индукции). *Пусть $A(n)-$ некоторое утверждение. Тогда $A(n)-$ верно для каждого $n \in \mathbb{N}$ тогда и только тогда, когда*

1) $A(1)-$ верно;

2) для каждого $k \in \mathbb{N}$, если из того, что утверждение $A(k)-$ верно, верно и утверждение $A(k+1)$.

Доказательство. Необходимость. Если $A(n)-$верно для каждого $n \in \mathbb{N}$, то выполнение условий 1) и 2) является очевидным.

Достаточность. Пусть $X=\{n \in \mathbb{N}: A(n)- \text{ верно}\}$, $X \subseteq \mathbb{N}$. Тогда из 1) и 2) следует, что $X-$ индуктивное множество. Поскольку множество натуральных чисел есть наименьшее индуктивное множество, то $X \supseteq \mathbb{N}$. Лемма доказана.

Пример. Применяя метод математической индукции, доказать, что для каждого $n \in \mathbb{N}$ справедливо равенство

$$1^2+2^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Доказательство. При $n=1$ равенство является очевидным.

Пусть при $n=k$ равенство также является верным. Проверим выполнение равенства при $n=k+1$, то есть необходимо проверить выполнение равенства

$$1^2+2^2+\cdots+k^2+(k+1)^2=\frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}.$$

Используя тот факт, что равенство верно при $n=k$, получаем

$$1^2+2^2+\cdots+k^2+(k+1)^2=\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}+(k+1)^2=$$
$$=\frac{k(k+1)(2k+1)+6(k+1)^2}{6}=\frac{(k+1)(2k^2+7k+6)}{6},$$

где $2k^2+7k+6=2(k+2)\left(k+\frac{3}{2}\right)$. Формула доказана.

Еще один пример на применение метода математической индукции продемонстрирован в следующем пункте.

1.1.2. Бином Ньютона. В настоящем пункте докажем еще одну полезную формулу: для любых чисел $a, b \in \mathbb{R}$ и для каждого $n \in \mathbb{N}$ справедливо равенство

$$(a+b)^n=\sum_{m=0}^{n} C_n^m a^{n-m} b^m, \qquad (1.1.1)$$

где $C_n^m=\frac{n![1]}{(n-m)!\,m!}$.

Доказательство. Для доказательства используем метод математической индукции изложенный в предыдущем пункте.

Пусть $n=1$. Тогда получаем

$$a+b=\sum_{m=0}^{1} C_1^m a^{1-m} b^m=C_1^0 a^1 b^0+C_1^1 a^0 b^1=a+b.$$

Для $n=1$ равенство (1.1.1) верно.

Будем считать, что для $n=k$ равенство (1.1.1) также является верным. Проверим выполнение равенства для $n=k+1$. В этом случае нам нужно доказать формулу

$$(a+b)^{k+1}=\sum_{m=0}^{k+1} C_{k+1}^m a^{k+1-m} b^m.$$

$$(a+b)^k(a+b)=\left(\sum_{m=0}^{k} C_k^m a^{k-m} b^m\right)(a+b)=$$

---

[1] $n!=1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot n$

$$= \sum_{m=0}^{k} C_k^m a^{k+1-m} b^m + \sum_{m=0}^{k} C_k^m a^{k-m} b^{m+1} = C_k^0 a^{k+1} b^0 + C_k^1 a^k b^1 + \dots +$$
$$+ C_k^k a^1 b^k + C_k^0 a^k b^1 + C_k^1 a^{k-1} b^2 + \dots + C_k^k a^0 b^{k+1} = C_k^0 a^{k+1} b^0 +$$
$$+ a^k b^1 (C_k^1 + C_k^0) + a^{k-1} b^2 (C_k^2 + C_k^1) + \dots + a^1 b^k \left(C_k^k + C_k^{k-1}\right) +$$
$$+ C_k^k a^0 b^{k+1} = a^{k+1} + \sum_{m=1}^{k} (C_k^m + C_k^{m-1}) a^{k-m+1} b^m + b^{k+1}.$$
Вычислим
$$C_k^m + C_k^{m-1} = \frac{k!}{m!\,(k-m)!} + \frac{k!}{(m-1)!\,(k-m+1)!} =$$
$$= \frac{k!\,(k-m+1) + k!\,m}{m!\,(k-m+1)!} = \frac{k!\,(k+1)}{m!\,(k-m+1)!} = \frac{(k+1)!}{m!\,(k-m+1)!} = C_{k+1}^m.$$
В итоге получаем
$$(a+b)^{k+1} = a^{k+1} + \sum_{m=1}^{k} C_{k+1}^m a^{k-m+1} b^m + b^{k+1} = \sum_{m=0}^{0} C_{k+1}^0 a^{k-m+1} b^m +$$
$$+ \sum_{m=1}^{k} C_{k+1}^m a^{k-m+1} b^m + \sum_{m=k+1}^{k+1} C_{k+1}^m a^{k-m+1} b^m = \sum_{m=0}^{k+1} C_{k+1}^m a^{k-m+1} b^m.$$
Что и требовалось доказать.

Определение 1.1.3. *Множество* $\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup \{-1, -2, \dots\} \cup \{0\}$ *называется множеством целых чисел.*

1.1.3. Определение рационального числа. Свойства рациональных чисел.

Определение 1.1.5. *Рациональным числом называется число представимое в виде отношения двух чисел* $q = \frac{m}{n}$, $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$. *Множество рациональных чисел обозначают символом* $\mathbb{Q}$.

Читателю уже знакомы из элементарного курса определения операций сложения и умножения рациональных чисел, правило сравнения этих чисел и их простейшие свойства. Здесь мы напомним основные свойства рациональных чисел, вытекающие из соответствующих свойств целых чисел.

Среди всех свойств рациональных чисел выделим три основных правила: правило сравнения и правила образования суммы и произведения:

I. Любые два рациональных числа p и q связаны одним и только одним из трех знаков $>, <$ или $=$, причем если $a > b$, то $b < a$. Другими словами, существует правило, называемое правилом сравнения, позволяющее установить, каким из указанных трех знаков связаны два данных рациональных числа. Правило сравнения формулируется следующим образом: два неотрицательных рациональных числа $p = \frac{k}{s}$ и $q = \frac{m}{n}$, $k, m \in \mathbb{Z}$, $s, n \in \mathbb{N}$, связаны тем же знаком, что и два целых числа kn и ms; два неположительных рациональных числа p и q связаны тем же знаком, что и два неотрицательных числа $|q|$ и $|p|$; если $p -$ неотрицательное, а $q -$ отрицательное рациональное число, то $p > q$.

II. Существует правило, по которому любым двум рациональным числам p и q ставится в соответствие определенное рациональное число r, называемое их суммой и обозначаемое символом $r = p + q$. Правило образования суммы рациональных чисел $p = \frac{k}{s}$ и $q = \frac{m}{n}$, $k, m \in \mathbb{Z}$, $s, n \in \mathbb{N}$, определяется формулой $\frac{k}{s} + \frac{m}{n} = \frac{kn+ms}{sn}$. Операция нахождения суммы называется операцией сложения.

III. Существует правило, по которому любым двум рациональным числам p и q ставится в соответствие определенное рациональное число r, называемое их произведением и обозначаемое символом $r = pq$. Правило образования произведения рациональных чисел $p = \frac{k}{s}$ и $q = \frac{m}{n}$, $k, m \in \mathbb{Z}$, $s, n \in \mathbb{N}$, определяется формулой $\frac{k}{s} \cdot \frac{m}{n} = \frac{km}{sn}$. Операция нахождения произведения называется операцией умножения.

Основные свойства, которым подчинены три перечисленных правила:

А. Свойства правила сравнения

1^0 Из соотношений $p > q$ и $q > r$ вытекает соотношение $p > r$ (свойство транзитивности знака $>$); из соотношений $p = q$ и $q = r$ вытекает, что $p = r$ (свойство транзитивности знака $=$).

Б. Свойства правила сложения

2^0 $p + q = q + p$ (свойство коммутативности сложения);

3^0 $(p + q) + r = p + (q + r)$ (свойство ассоциативности сложения);

4^0 существует рациональное число 0 такое, что $p + 0 = p$ для любого числа $p \in \mathbb{Q}$ (существование нуля);

5^0для каждого числа $p \in \mathbb{Q}$ существует противоположное ему число $(-p)$ такое, что $p + (-p) = 0$ (существование противоположного элемента);

В. Свойства правила умножения

6^0 $pq = qp$ (свойство коммутативности умножения);

7^0 $(pq)r = p(qr)$ (свойство ассоциативности умножения);

8^0 существует рациональное число 1 такое, что $p \cdot 1 = p$ для любого числа $p \in \mathbb{Q}$ (существование единицы);

9^0 для каждого числа $p \in \mathbb{Q}$, отличного от нуля, существует обратное ему число p^{-1} такое, что $pp^{-1} = 1$ (существование обратного элемента);

Б, В Свойства связи правил сложения и умножения

10^0 $(p+q)r = pr + qr$ (свойство дистрибутивности умножения относительно сложения);

А, Б, В Свойства связи правила сравнения с правилами сложения и умножения

11^0 из соотношения $p > q$ вытекает, что $p + r > q + r$;

12^0 из соотношения $p > q$ и $r > 0$ вытекает, что $pr > qr$.

Особое внимание обратим на последнее свойство:

13^0 каково бы ни было рациональное число p, можно число 1 повторить слагаемым столько раз, что полученная сумма превзойдет p.

Перечисленные выше 13 свойств называют основными свойствами рациональных чисел, поскольку остальные алгебраические свойства этих чисел являются следствием вышеперечисленных. Здесь мы перечислим некоторые из них:

а) единственность нуля;

б) для каждого числа $p \in \mathbb{Q}$ противоположный элемент $(-p)$ единственен;

в) уравнение $p + x = q$ на множестве $\mathbb{Q}$ имеет и притом единственное решение $x = q + (-p)$;

г) единственность единицы;

д) для каждого ненулевого элемента $p \in \mathbb{Q}$ обратный элемент p^{-1} единственен;

е) уравнение $p \cdot x = q$ при $p \in \mathbb{Q}\backslash\{0\}$ на множестве $\mathbb{Q}$ имеет и притом единственное решение;

ж) для любого $p \in \mathbb{Q}$ $\quad p \cdot 0 = 0$;

з) если $pq = 0$, то $p = 0$ или $q = 0$;

и) для каждого $p \in \mathbb{Q}$ $\quad (-p) = (-1) \cdot p$;

к) для каждого $p \in \mathbb{Q}$ $\quad (-1) \cdot (-p) = p$;

л) для каждого $p \in \mathbb{Q}$ $\quad (-p) \cdot (-p) = p \cdot p$;

м) если $p > q$ и $r > t$, то $p + r > q + t$ $(p, q, r, t \in \mathbb{Q})$;

н) если $p < q$, то $p < \frac{p+q}{2} < q$.

Доказательство. а) Пусть $\bar{0}$ и $\bar{\bar{0}}$ − различные нули на множестве $\mathbb{Q}$. Тогда по определению нуля и в силу коммутативности сложения, получим

$$\bar{0} = \bar{0} + \bar{\bar{0}} = \bar{\bar{0}} + \bar{0} = \bar{\bar{0}};$$

в) для доказательства нужно просто проверить, будет ли решение $x = q + (-p)$ обращать уравнение $p + x = q$ в тождество. В силу коммутативности и ассоциативности сложения, существования нуля и противоположного элемента получаем

$$p + \big(q + (-p)\big) = p + \big((-p) + q\big) = \big(p + (-p)\big) + q = 0 + q = q;$$

н) в силу 12^0 при $r = \frac{1}{2}$ получаем $\frac{p}{2} < \frac{q}{2}$.

$$p = \frac{p}{2} + \frac{p}{2} < \frac{p}{2} + \frac{q}{2} = \frac{p+q}{2} < \frac{q}{2} + \frac{q}{2} = q.$$

Остальные свойства предлагается доказать читателю самостоятельно.

§ 1.2. Схема построения множества вещественных чисел

Из школьного курса математики читателю хорошо знакомы рациональные числа и вышеупомянутые свойства этих чисел. Но уже элементарная математика приводит к потребности расширения этой числовой области. Действительно, среди рациональных чисел часто не существует корней даже из натуральных чисел, например, число $\sqrt{2}$, то есть нет такого рационального числа $q = \frac{m}{n}$ (где $m, n \in \mathbb{N}$), квадрат которой был бы равен 2. Докажем это. Предположим противное, то есть, что существует такая дробь $\frac{m}{n}$, что $\left(\frac{m}{n}\right)^2 = 2$. Можно считать, что эта дробь несократима. Так как $m^2 = 2n^2$, следовательно m − четное число, то есть $m = 2k$, $k \in \mathbb{Z}$. Тогда $4k^2 = 2n^2$, следовательно $2k^2 = n^2$, значит n − тоже четное число. Получается, что дробь $\frac{m}{n}$ является сократимой, что противоречит предположению о несократимости дроби $\frac{m}{n}$. Получили противоречие. Следовательно, число $\sqrt{2}$ вообще нельзя представить в виде рационального числа.

Определение 1.2.1. *Числа, которые не являются рациональными, называют иррациональными.*

Кроме того, что далеко не всегда существует корня даже из натурального числа, если бы мы остались в области одних лишь рациональных чисел, то в геометрии не все отрезки могли бы быть снабжены длинами. Например, рассмотрим квадрат со стороной равной единице. Его диагональ не может иметь длину равную рациональному числу $q = \frac{m}{n}$, поскольку, в противном случае, по теореме Пифагора, квадрат этой длины был бы равен 2, что, как мы уже показали, невозможно.

В этом параграфе поставим себе задачей расширить область рациональных чисел, присоединив к ним иррациональные числа. Вместе с тем покажем, что в расширенной области останутся справедливыми все известные свойства рациональных чисел, относящиеся к арифметическим действиям над ними и к сочетанию их с помощью знаков равенства и неравенства.

1.2.1. Измерение отрезков числовой оси. Представление вещественного числа бесконечной десятичной дробью.

Определение 1.2.2. *Два отрезка называются соизмеримыми, если отношение их длин выражается рациональным числом. В противном случае они называются несоизмеримыми (например, длина диагонали квадрата со стороной равной единице).*

Определение 1.2.3. *Числовой осью будем называть прямую, на которой выбраны определенная точка O, которую называют началом отсчета, масштабный отрезок OM (длину его считаем равной единице) и положительное направление (обычно от O к M).*

Возникает вопрос: возможно ли поставить в соответствие каждой точке K на числовой оси некоторое число, которое бы выражало длину отрезка OK. Это число будем считать положительным, если точки K и M лежат по одну сторону от начала отсчета, и отрицательным – если по разные стороны от точки O.

В дальнейшем каждый отрезок OK числовой оси попробуем измерить с помощью масштабного отрезка OM. Можно точно сказать, что каждому рациональному числу на числовой прямой соответствует определенная точка. Действительно, можно построить отрезок, длина которого составляет $n-$ю часть отрезка OM. Следовательно, мы можем построить отрезок AB, длина которого относится к длине масштабного отрезка OM, как $\frac{m}{n}$, где $m, n \in \mathbb{N}$. Будем считать, что точка M лежит правее точки O, отложим отрезок AB вправо и влево от точки O, получим точки K_1 и K_2 соответствующие рациональным числам $\frac{m}{n}$ и $\left(-\frac{m}{n}\right)$.

На примере несоизмеримости длины диагонали квадрата (со стороной равной единице) с его стороной понятно, что не всем точкам числовой оси соответствуют рациональные числа. Далее постараемся с помощью масштабного отрезка OM измерить любой отрезок числовой оси, для этого нам нужно расширить область рациональных чисел такими числами, которые бы соответствовали всем без исключения точкам числовой оси. В этом нам поможет специальный процесс измерения отрезка OK числовой оси, который позволяет поставить в соответствие любой точке K числовой оси некоторую вполне определенную бесконечную десятичную дробь.

Определение 1.2.4. *Символ $a = a_0, a_1 a_2, \dots, a_n, \dots$, где $a_0 \in \mathbb{Z}$, $a_1 a_2, \dots, a_n, \dots \in \{0, \dots, 9\}$, называется бесконечной десятичной дробью.*

Бесконечная десятичная дробь называется периодической тогда и только тогда, когда начиная с некоторого номера n группа цифр $a_n, \dots, a_{n+i}$ $(i \in \mathbb{N})$ или одна цифра повторяется. Эта группа цифр называется периодом дроби. Например, $2{,}78134134134\dots$ или $0{,}9999999\dots$Видно, что у первой дроби, начиная с третьего знака после запятой, группа цифр «134» повторяется и эту дробь можно записать в виде $2{,}78(134)$. У второй же дроби уже с первого знака начинает повторяться одна и та же цифра 9, в этом случае дробь можно записать так $0,(9)$. Дробь вида $a_0, a_1 a_2 \dots a_{n-1}(9)$ называется бесконечной десятичной дробью с девяткой в периоде.

Теперь вернемся к схеме построения множества чисел, которые соответствуют всем точкам числовой оси.

Пусть $K -$ любая точка числовой оси, лежащая, как и точка M, правее начала координат. Выясним, сколько раз масштабный отрезок OM помещается в отрезок OK. Возможны два варианта:
1) OM укладывается в OK целое число a_0 раз с некоторым остатком NK, меньшим OM. В этом случае целое число a_0 представляет собой приближенный результат измерения по недостатку с точностью до 1.
2) OM укладывается в OK целое число $a_0 + 1$ раз без остатка. В этом случае число a_0 также представляет собой приближенный результат измерения по недостатку с точностью до 1, так как отрезок OM укладывается в отрезок OK a_0 раз с остатком $NK = OM$.

Выясним теперь, сколько раз $\frac{1}{10}$ часть отрезка OM укладывается в остатке NK. И опять возможны два варианта:
1) $\frac{1}{10}$ часть отрезка OM укладывается NK целое число a_1 раз с некоторым остатком PK, меньшим $\frac{1}{10}$ части отрезка OM. В этом случае рациональное число a_0, a_1 представляет собой результат измерения по недостатку с точностью до $\frac{1}{10}$.

2) $\frac{1}{10}$ часть отрезка OM укладывается в NK целое число $a_1 + 1$ раз без остатка. В этом случае число a_0, a_1 также представляет собой приближенный результат измерения по недостатку с точностью до $\frac{1}{10}$, так как $\frac{1}{10}$ отрезка OM укладывается в отрезок NK a_1 раз с остатком $PK = \frac{1}{10}OM$.

Продолжая неограниченно этот процесс, мы получим бесконечный набор рациональных чисел

$$a_0;\ a_0, a_1;\ a_0, a_1a_2;\ \dots;\ a_0, a_1a_2 \dots a_n \dots, \tag{1.2.1}$$

каждое из которых представляет собой результат измерения отрезка OK по недостатку с соответствующей степенью точности. Любое из этих рациональных чисел можно представить посредством обрывания на соответствующем знаке бесконечной десятичной дроби

$$a_0, a_1a_2 \dots a_n \dots \tag{1.2.2}$$

Итак, мы видим, что процесс измерения произвольного отрезка OK числовой оси с помощью масштабного отрезка OM приводит нас к рассмотрению чисел, представимых в виде бесконечных десятичных дробей. Вместе с тем, каждая бесконечная десятичная дробь (1.2.2) полностью характеризуется бесконечным набором (1.2.1) рациональных чисел, приближающих эту дробь.

Определение 1.2.5. *Числа, которые можно представить в виде бесконечных десятичных дробей, будем называть вещественными числами. Множество вещественных чисел (или их еще называют действительными числами) обозначается символом* $\mathbb{R}$.

1.2.2. Сравнение вещественных чисел.

Для начала договоримся об определенной форме записи тех рациональных чисел, которые можно представить в виде конечных десятичных дробей. Такие числа можно записать двумя способами с помощью бесконечных десятичных дробей. Например, рациональное число $\frac{1}{2} = 0{,}5$ можно записать так:

1) $\frac{1}{2} = 0{,}49999 \dots$. или 2) $\frac{1}{2} = 0{,}50000 \dots$.

В общем же случае рациональное число $a_0, a_1a_2 \dots a_n$, где $a_n \neq 0$, можно записать следующими способами: 1) в виде $a_0, a_1a_2 \dots a_{n-1}999 \dots$; 2) в виде $a_0, a_1a_2 \dots a_n000 \dots$ При сравнении бесконечных десятичных дробей будем пользоваться первой записью, то есть мы не будем использовать бесконечные десятичные дроби, все десятичные знаки которых, начиная с некоторого места, равны нулю (конечно, кроме дроби 0,000…).

Пусть

$$a = \pm a_0, a_1a_2 \dots a_n \dots \tag{1.2.3}$$
$$b = \pm b_0, b_1b_2 \dots b_n \dots, \tag{1.2.4}$$

где из двух знаков берется какой-то один.

Два вещественных числа (1.2.3) и (1.2.4) называются равными, если они имеют одинаковые знаки и выполняются равенства

$$a_0 = b_0, \qquad a_1 = b_1, \quad a_2 = b_2, \dots$$

Пусть даны два неравных вещественных числа a и b. Определим в каком случае $(a > b)$, а в каком – $(a < b)$.

Случай 1. $a, b \geq 0$. Так как $a \neq b$, то нарушается хотя бы одно из равенств $a_0 = b_0, a_1 = b_1, \dots$ Обозначим через k наименьший из номеров n, для которого нарушается равенство $a_n = b_n$. Тогда будем считать, что $a > b$, если $a_k > b_k$ и $a < b$, если $a_k < b_k$.

Случай 2. Если $a \geq 0$, $b < 0$, то, конечно, $a > b$.

Случай 3. $a, b < 0$. Будем называть модулем вещественного числа a неотрицательное вещественное число, которое обозначается символом $|a|$ и равно бесконечной десятичной дроби, представляющей число a, взятой со знаком «+».

Если $a, b < 0$, то будем считать, что $a > b$, если $|a| < |b|$, и $a < b$, если $|a| > |b|$.

Убедимся, что правило сравнения вещественных чисел обладает свойством 1^0, сформулированного в п. 1.1.3. То есть покажем, что если a, b и $c -$ произвольные вещественные числа и если $a > b$ и $b > c$, то $a > c$ (свойство транзитивности знака $>$). Для доказательства рассмотрим три возможных случая:

1) Пусть $c \geq 0$. Тогда по правилу сравнения вещественных чисел следует, что $b > 0$ и $a > 0$. Пусть $a = a_0, a_1a_2 \dots a_n \dots$, $b = b_0, b_1b_2 \dots b_n \dots$, $c = c_0, c_1c_2 \dots c_n \dots$ Через k обозначим наименьший из номеров n, для которых нарушается равенство $a_n = b_n$, а через s наименьший из номеров n, для которых нарушается равенство $b_n = c_n$ (т.е., $b_0 = c_0, b_1 = c_1, \dots, b_{s-1} = c_{s-1}, b_s > c_s$). Тогда, если через p обозначить наименьший из номеров k и s, то будут справедливы соотношения $a_0 = c_0, a_1 = c_1, \dots, a_{p-1} = c_{p-1}, a_p > c_p$, а это значит, что $a > c$.

2) Пусть $c < 0, a \geq 0$. Тогда равенство $a > c$ будет очевидным при любом b.

3) Теперь пусть $a, b, c < 0$. Так как $a > b$ и $b > c$, то $|b| > |a|$ и $|c| >> |b|$. Но тогда, в силу рассмотренного выше случая трех положительных чисел следует, что $|c| > |a|$, а следовательно, $a > c$.

1.2.3. Приближение вещественного числа рациональными числами.

В дальнейшем мы убедимся, что любое вещественное число можно приблизить рациональным числом с любой степенью точности.

Лемма 1.2.1. *Для каждого вещественного числа a и для любого положительного рационального числа ε существуют таких два рациональных числа q_1 и q_2, что $q_1 \leq a \leq q_2$, причем $q_2 - q_1 < \varepsilon$.*

Доказательство. Пусть a − произвольное неотрицательное вещественное число и представимо в виде бесконечной десятичной дроби

$$a = a_0, a_1 a_2 \dots a_n \dots$$

Оборвем эту дробь на n −м знаке после запятой, получим рациональное число $a_0, a_1 a_2 \dots a_n$. Увеличим полученное число на $\frac{1}{10^n}$, получим другое рациональное число $a_0, a_1 a_2 \dots a_n + \frac{1}{10^n}$. По правилу сравнения установим, что для каждого номера n справедливы неравенства:

$$a_0, a_1 a_2 \dots a_n \le a \le a_0, a_1 a_2 \dots a_n + \frac{1}{10^n}. \qquad (1.2.5)$$

Неравенство (1.2.5) означает, что вещественное число a заключено между двумя рациональными числами, разница между которыми $\frac{1}{10^n}$ для любого натурального n.

Покажем, что для любого наперед заданного положительно рационального числа ε, начиная с некоторого номера n, справедливо неравенство

$$\frac{1}{10^n} < \varepsilon.$$

Действительно, насколько бы мало ни было положительное рациональное число ε, существует лишь конечное число натуральных чисел таких, что $10^n \le \frac{1}{\varepsilon}$ или $\frac{1}{10^n} \ge \varepsilon$. Получается, что для всех остальных номеров n (до бесконечности) справедливо обратное неравенство $\frac{1}{10^n} < \varepsilon$. Лемма доказана.