Метод контурных токов

В методе контурных токов за неизвестные величины принимаются расчетные (контурные) токи, которые якобы протекают в каждом из независимых контуров. Таким образом, количество неизвестных токов и уравнений в системе равно числу независимых контуров цепи.

1) Расчет токов ветвей по методу контурных токов выполняют в следующем порядке:
2) Вычерчиваем принципиальную схему цепи и обозначаем все элементы.
3) Определяем все независимые контуры.
4) Произвольно задаемся направлением протекания контурных токов в каждом из независимых контуров (по часовой стрелке или против). Обозначаем эти токи. Для нумерации контурных токов можно использовать арабские сдвоенные цифры (I11, I22, I33 и т. д.) или римские цифры.

- По второму закону Кирхгофа (алгебраическая сумма падений напряжений на отдельных участках замкнутого контура равна алгебраической сумме ЭДС в этом контуре), относительно контурных токов, составляем уравнения для всех независимых контуров. При записи равенства считать, что направление обхода контура, для которого составляется уравнение, совпадает с направлением контурного тока данного контура. Следует учитывать и тот факт, что в смежных ветвях, принадлежащих двум контурам, протекают два контурных тока. Падение напряжения на потребителях в таких ветвях надо брать от каждого тока в отдельности.

- Решаем любым методом полученную систему относительно контурных токов и определяем их.
- Произвольно задаемся направлением реальных токов всех ветвей и обозначаем их. Маркировать реальные токи надо таким образом, чтобы не путать с контурными. Для нумерации реальных токов можно использовать одиночные арабские цифры (I1, I2, I3 и т. д.).
- Переходим от контурных токов к реальным, считая, что реальный ток ветви равен алгебраической сумме контурных токов, протекающих по данной ветви.

При алгебраическом суммировании без изменения знака берется контурный ток, направление которого совпадает с принятым направлением реального тока ветви. В противном случае контурный ток умножается на минус единицу.

Метод контурных токов

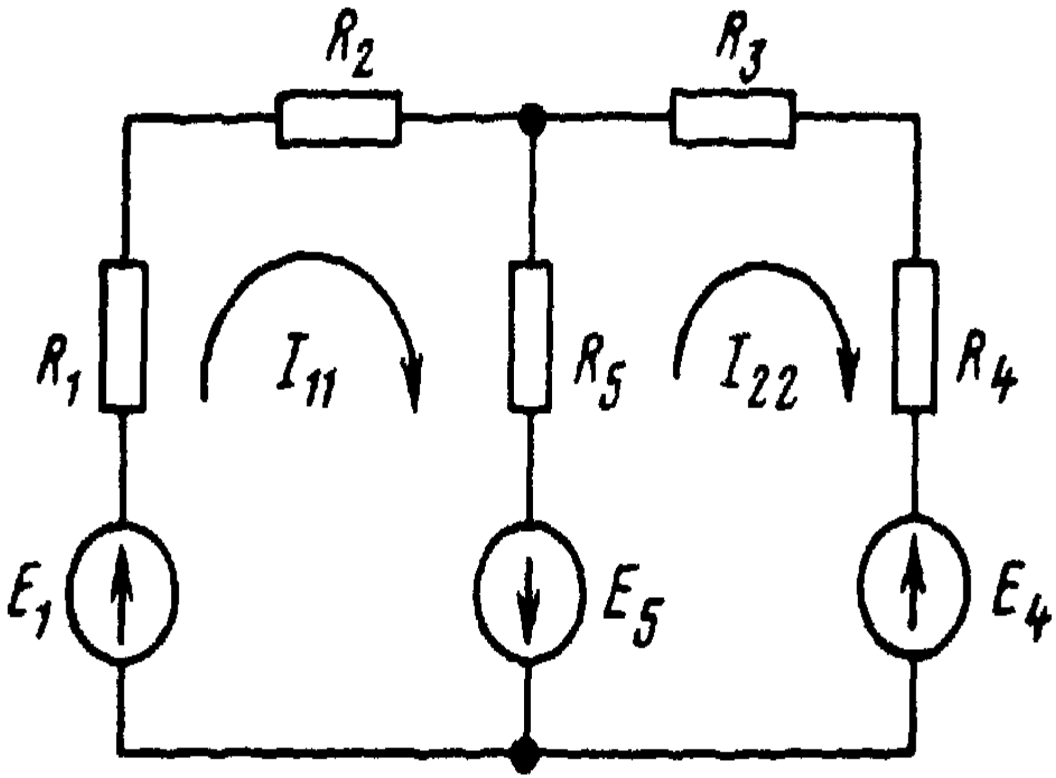

Рис. 2.12

Для первого контура

$$(R_1 + R_2)I_{11} + R_5(I_{11} - I_{22}) = E_1 + E_5 \qquad \text{(а)}$$

или

$$(R_1 + R_2 + R_5)I_{11} + (-R_5)I_{22} = E_1 + E_5. \qquad \text{(б)}$$

Для второго контура

$$-R_5(I_{11} - I_{22}) + (R_3 + R_4)I_{22} = -E_5 - E_4$$

или

$$(-R_5)I_{11} + (R_3 + R_4 + R_5)I_{22} = -E_4 - E_5.$$

В уравнении (б) множитель при токе I_{11}, являющийся суммой сопротивлений первого контура, обозначим через R_{11}, множитель при токе I_{22} (сопротивление смежной ветви, взятое со знаком минус) — через R_{12}.

Перепишем эти уравнения следующим образом:

$$\left.\begin{aligned} R_{11}I_{11} + R_{12}I_{22} = E_{11}; \\ R_{21}I_{11} + R_{22}I_{22} = E_{22}. \end{aligned}\right\} \qquad (2.4б)$$

Здесь

$$R_{11} = R_1 + R_2 + R_5; E_{11} = E_1 + E_5; R_{12} = R_{21} = -R_5; R_{22} = R_3 + \\ + R_4 + R_5; E_{22} = -E_4 - E_5,$$

где R_{11} — полное или собственное сопротивление первого контура; R_{12} — сопротивление смежной ветви между первым и вторым контурами, взятое со знаком минус; E_{11} — контурная ЭДС первого контура, равная алгебраической сумме ЭДС этого контура (в нее со знаком плюс входят те ЭДС, направления которых совпадают с направлением обхода контура); R_{22} — полное или собственное сопротивление второго контура; R_{21} — сопротивление смежной ветви между первым и вторым контурами, взятое со знаком минус; E_{22} — контурная ЭДС второго контура.

Если в схеме больше двух контуров, например три, то система уравнений выглядит следующим образом:

$$\left.\begin{aligned} R_{11}I_{11} + R_{12}I_{22} + R_{13}I_{33} = E_{11}; \\ R_{21}I_{11} + R_{22}I_{22} + R_{23}I_{33} = E_{22}; \\ R_{31}I_{11} + R_{32}I_{22} + R_{33}I_{33} = E_{33}, \end{aligned}\right\} \qquad (2.4в)$$

или в матричной форме

$$[R][I]=[E];$$

$$[R]=\begin{bmatrix} R_{11}R_{12}R_{13} \\ R_{21}R_{22}R_{23} \\ R_{31}R_{32}R_{33} \end{bmatrix};\ [I]=\begin{bmatrix} I_{11} \\ I_{22} \\ I_{33} \end{bmatrix};\ [E]=\begin{bmatrix} E_{11} \\ E_{22} \\ E_{33} \end{bmatrix}. \qquad (2.4г)$$

Рекомендуется для единообразия в знаках сопротивлений с разными индексами все контурные токи направлять в одну и ту же сторону, например по часовой стрелке.

Общее решение системы n уравнений относительно тока I_{kk}:

$$I_{kk} = E_{11}\frac{\Delta_{k1}}{\Delta} + E_{22}\frac{\Delta_{k2}}{\Delta} + E_{33}\frac{\Delta_{k3}}{\Delta} + \ldots + E_{nn}\frac{\Delta_{kn}}{\Delta}, \quad (2.5)$$

где

$$\Delta = \begin{vmatrix} R_{11}R_{12}R_{13}\ldots R_{1n} \\ R_{21}R_{22}R_{23}\ldots R_{2n} \\ R_{31}R_{32}R_{33}\ldots R_{3n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ R_{n1}R_{n2}R_{n3}\ldots R_{nn} \end{vmatrix}. \quad (2.6)$$

— определитель системы.

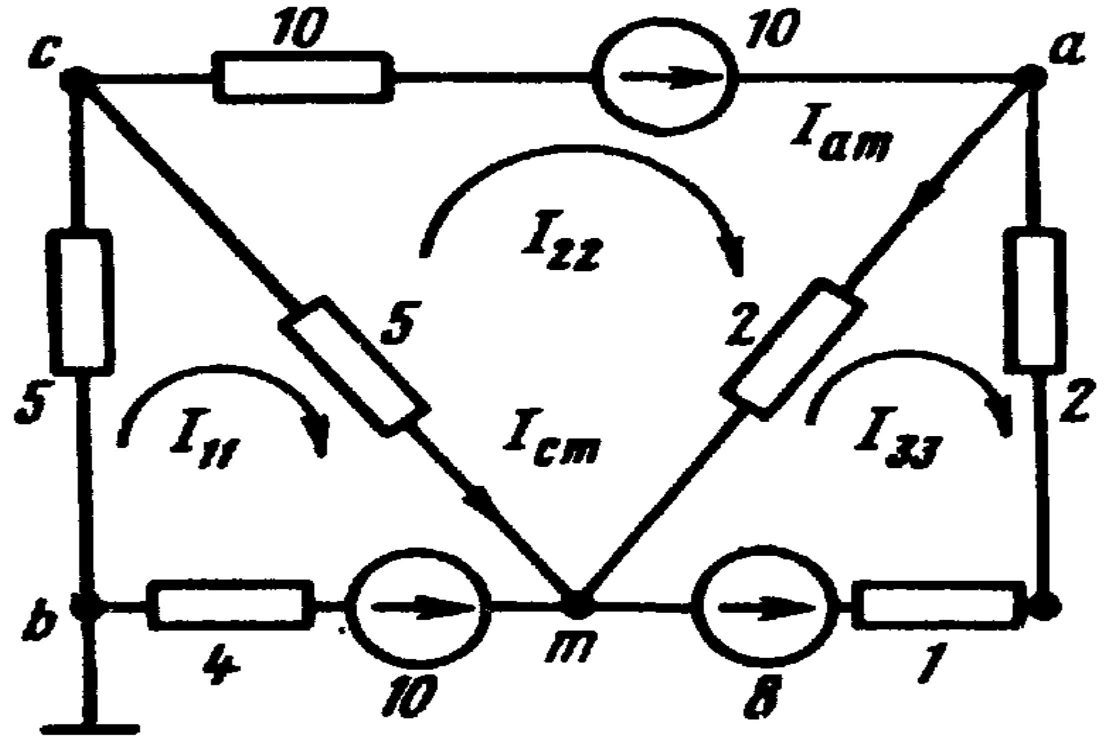

Рис. 2.13

Записываем систему уравнений:

$$
\begin{aligned}
14I_{11} - 5I_{22} \qquad\qquad &= -10; \\
-5I_{11} + 17I_{22} - 2I_{33} &= 10; \\
-2I_{22} + 5I_{33} &= -8.
\end{aligned}
$$

Определитель системы

$$\Delta = \begin{vmatrix} 14 & -5 & 0 \\ -5 & 17 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{vmatrix} = 1009.$$

Подсчитаем контурные токи

$$I_{11} = \frac{\begin{vmatrix} -10 & -5 & 0 \\ 10 & 17 & -2 \\ -8 & 2 & 5 \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{-640}{1009} = -0{,}634\,\mathrm{A};$$

$$I_{22} = 0{,}224\ \text{A};\ I_{33} = -1{,}51\ \text{A}.$$

Ток в ветви cm $I_{cm} = I_{11} - I_{22} = -0{,}634 - 0{,}224 = -0{,}86$ А.

Ток в ветви am $I_{am} = I_{22} - I_{33} = 0{,}224 + 1{,}51 = 1{,}734$ А.