Departamento de Matemática Pura e Aplicada

MAT 01353 – Cálculo e Geometria Analítica IA

Lista 4 – Derivadas e Regras de Derivação

1. Considere a função polinomial definida por $f(x) = x^3 + x^2 + kx - 1$. Determine o valor de k para que f tenha um único ponto de tangência horizontal.

2. Sabendo que a função f é tal que $f(1+h) - f(1) = h^5 - 3\,\text{sen}\,(h)$ para todo h, determine $f'(1)$.

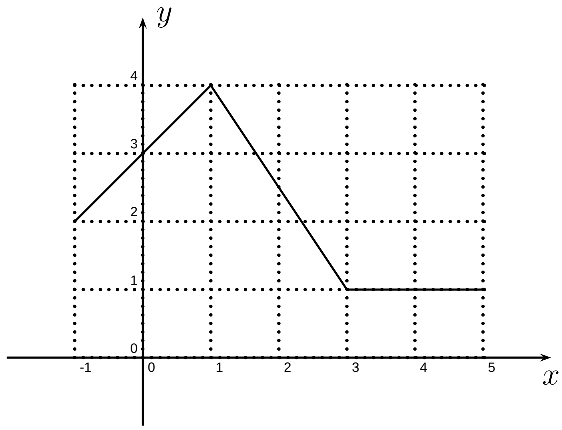
3. A equação da reta tangente ao gráfico de $y = f(x)$ no ponto de coordenada $x = -2$ é paralela a reta de equação $3y + 4x + 6 = 0$ e passa pela origem. Determine $f(-2)$ e $f'(-2)$.

4. Considere a função f, definida no intervalo $I = [-1, 5]$, dada pelo gráfico abaixo.

   1) A função f é contínua em $x = 1$? Justifique a resposta.

   2) A função f é diferenciável em $x = 1$? Justifique a resposta.

   3) Determine $f'(2)$.



5. Considere a função $f(x) = \dfrac{-x}{x^2+1}$ definida nos reais.

   a) Determine o valor da inclinação da reta tangente a $f(x)$ em $x = 1$.

   b) Dê a equação da reta tangente ao gráfico neste ponto.

6. **a)** Seja $f(x) = \left(\dfrac{x^2-1}{x^2+5}\right)^3$. Encontre todos os valores de x tais que $f'(x) = 0$.

   b) Seja $f(x) = x^2\sqrt{5-x^2}$. Calcule $f'(1)$.

c) Seja $f(x) = \dfrac{\sec(x)}{1+\tan(x)}$. Calcule $f\,'(\frac{\pi}{4})$.

d) Seja $f(x) = (x^3+2)^4\,\cos x$. Calcule $f\,'(0)$.

7. **a)** Seja $f(x) = \operatorname{sen} x$. Calcule $f^{\,(21)}(x)$.

b) Seja $f(x) = \operatorname{sen} x - \cos x$. Calcule $f\,'''(x)$.

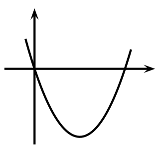
c) Seja $f(x) = 3 \operatorname{sen} x \cos x$. Calcule $f\,''(x)$.

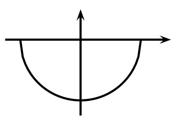
8. Determine a equação da reta tangente ao gráfico de $g(x) = \sqrt{5x^4+4}$ em $x = 1$.

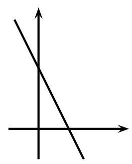
9. Considere a função f definida por $\quad f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x^2+2x-12}{x^2-4}, & x > 0,\ x \neq 2 \\ 0, & x = 2 \\ \sqrt{4-x}, & x < 0 \end{cases}$

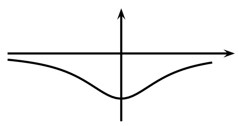
Determine uma equação para a reta tangente ao gráfico de f no ponto $P = (-5, f(-5))$.

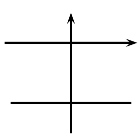
10. Combine o gráfico das funções mostradas em (A), (B), (C) e (D) com os de suas derivadas em (1), (2), (3) e (4).

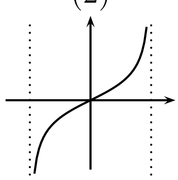

(A)

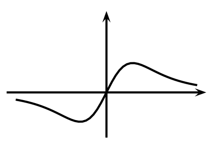

(B)

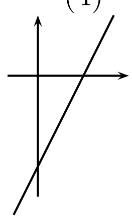

(C)


(D)

(1)


(2)


(3)


(4)


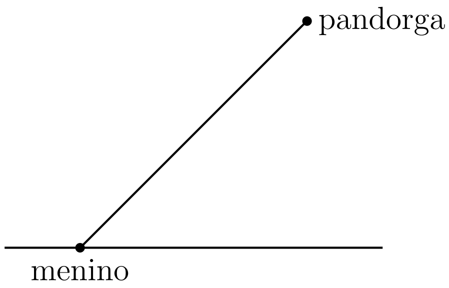
11. Um avião, voando em linha reta a uma altitude de 8 km com velocidade constante de 340 km/h, passou diretamente acima de um observador. Qual é a taxa de variação da distância entre o observador e o avião quando o avião está a 17 km do observador?

12. Gás escapa de um balão esférico à razão de $4m^3/h$. Determine a taxa de variação do raio quando sua medida é de 1m, indicando a unidade apropriada.

13. Uma partícula move-se ao longo da curva de equação $y = \sqrt{1 + x^3}$, no primeiro quadrante. Quando a partícula atinge o ponto $(2, 3)$, a coordenada y está crescendo a uma taxa de $4cm/s$. A que taxa estará variando a coordenada x do ponto naquele instante?

14. Um menino parado mantém uma pandorga a uma altura fixa de $12m$. O vento sopra horizontalmente, deslocando-a a uma velocidade de $5m/s$.

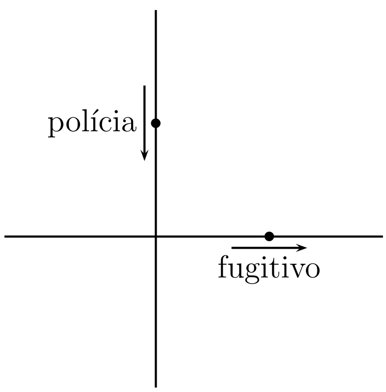
    Com que velocidade o menino solta a linha, quando a pandorga está a $20m$ dele? Indique as unidades na resposta.



15. Um tanque cônico tem uma altura de $3m$ e um raio de $2m$ no topo. Suponha que o tanque seja enchido de água a uma taxa de $2m^3/min$. A que velocidade sobe o nível da água quando estiver a $2m$?

16. Uma viatura de polícia, vindo do norte e aproximando-se de um cruzamento em ângulo reto, está perseguindo um carro que, no cruzamento, toma a direção leste.

    Quando a viatura está a $8km$ ao norte do cruzamento e o carro fugitivo a $6km$ a leste, o radar da polícia detecta que a distância entre a viatura e o fugitivo está aumentando a $23km/h$. Se a viatura está se deslocando a $80km/h$ no instante desta medida, qual é a velocidade do carro fugitivo neste instante? Indique as unidades na resposta.



Respostas

1. $k = 1/3$

2. $f'(1) = \lim_{h\to 0} \dfrac{f(1+h) - f(1)}{h} = -3.$

3. $f'(-2) = \dfrac{-4}{3}$ e $f(-2) = \dfrac{8}{3}$

4. 1) Sim, pois $\lim_{x\to 1} f(x) = 4 = f(1)$.
   2) Não, pois o gráfico da função possui um bico em $x = 1$.

   3) $f'(2) = \dfrac{-3}{2}$.

5. a) $f'(x) = \dfrac{-1+x^2}{(x^2+1)^2}$ e a inclinação da reta é $f'(1) = 0$.
   b) $y = -\dfrac{1}{2}$.

6. a) $f'(x) = 0$ só se $x = -1, 0$ ou 1.
   b) $f'(x) = 2x(5-x^2)^{1/2} - x^3(5-x^2)^{-1/2}$ e $f'(1) = \dfrac{7}{2}$.

   c) $f'(x) = \frac{\sec(x)(\tan(x)-1)}{(1+\tan(x))^2}$ e $f'(\dfrac{\pi}{4}) = 0$.

   d) $f'(x) = 12x^2(x^3+2)^3\cos(x) - (x^3+2)^4 \operatorname{sen}(x)$ e $f'(0) = 0$.

7. a) $21 = 5 * 4 + 1$ logo $f^{(21)}(x) = f'(x) = \cos(x)$.
   b) $f'''(x) = -\cos(x) - \operatorname{sen}(x)$.

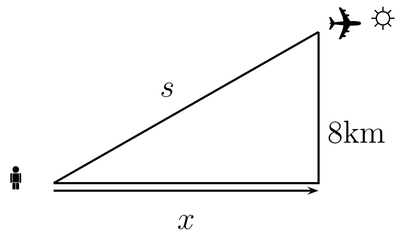
   c) $f''(x) = -12\operatorname{sen}(x)\cos(x)$.

8. $g'(x) = 10x^3(5x^4+4)^{-1/2}$ e a reta tangente é $y = \dfrac{10}{3}x - \dfrac{1}{3}$.

9. Na proximidade de $x = -5$ temos $f'(x) = \frac{-1}{2\sqrt{4-x}}$ e a reta tangente é $6y + x = 13$.

10. $A \to 4,\ \ B \to 2,\ \ C \to 1,\ \ D \to 3.$

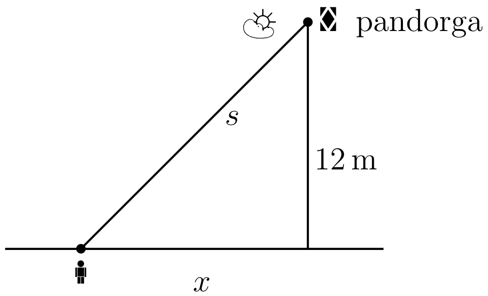
11. Usando o teorema de Pitágoras temos, $x^2+8^2 = s^2$ e aplicando o método para taxas relacionadas vem que $\frac{ds}{dt} = 300\,\text{km/h}$ é a taxa de variação da distância entre o avião e o observador.



12. Sendo r o raio do balão temos $\dfrac{dr}{dt} = -\dfrac{1}{\pi}\,\text{m/h}.$

13. $\dfrac{dx}{dt} = 2\,\text{cm/s}.$

14. Temos $\dfrac{ds}{dt} = 4\,\text{m/s}.$



15. Seja h a altura da água no tanque. Então o volume será $V = \frac{\pi r^2 h}{3}$ derivando em relação ao tempo e aplicando os dados obtemos $\dfrac{dh}{dt} = \dfrac{9}{8\pi}\,\text{m/min}.$

16. Usando o teorema de Pitágoras temos, $x^2+y^2 = s^2$ e aplicando o método para taxas relacionadas vem que $\frac{dx}{dt} = 145\,\text{km/h}$ é a velocidade do carro do fugitivo.