Risoluzione ODE, Corso di Analisi Matematica 2, Ingegneria Informatica, 2024

Vito Palmieri

2 luglio 2024

Indice

Formulario

1 ODE Lineari del Primo Ordine

Data un'ODE del tipo:

$$y' + a_0(x)y = g(x)$$

dove $a_0(x)$ e $g(x)$ sono funzioni continue, la soluzione generale dell'ODE è data da:

$$y(x) = e^{-A_0(x)} \left(c + \int g(x)e^{A_0(x)}\, \mathrm{d}x \right), \quad c \in \mathbb{R}$$

dove A_0 è primitiva di $a_0(x)$

Se la ODE è in forma normale ($y' = -a_0(x)y + g(x)$) allora invertiamo i segni per $A_0(x)$:

$$y(x) = e^{A_0(x)} \left(c + \int g(x)e^{-A_0(x)}\, \mathrm{d}x \right), \quad c \in \mathbb{R}$$

2 ODE Lineari Omogenee di Secondo Ordine e Superiore a Coefficienti Costanti

Data un'ODE del tipo:

$$y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0$$

dove $a_1(x)$ ed $a_0(x)$ sono costanti, chiamiamo equazione caratteristica della ODE l'equazione

$$\lambda^2 + a_1\lambda + a_0 = 0$$

dove l'esponente di λ è pari all'ordine di derivazione del corrispondente termine della ODE (chiaramente, nel caso di termine non derivato (eg. $a_0(x)y$) si considera come derivato 0 volte, per cui l'esponente di λ per il termine corrispondente sarà anch'esso 0, risultando $\lambda^0 = 1$).

A seconda del discriminante Δ le soluzioni della ODE saranno:

- $y(x) = c_1e^{\lambda_1 x} + c_2e^{\lambda_2 x}, \quad \text{se } \Delta > 0$
- $y(x) = c_1e^{\lambda x} + c_2xe^{\lambda x}, \quad \text{se } \Delta = 0$
- $y(x) = c_1e^{\alpha x}\cos(\beta x) + c_2e^{\alpha x}\sin(\beta x), \quad \text{se } \Delta < 0$

dove, i seguenti termini presenti nelle soluzioni date, sono le rispettive soluzioni dell'equazione caratteristica:

- λ_1, λ_2
- λ
- $\lambda = \alpha \pm i\beta$

Per ODE di grado superiore al secondo (ma sempre lineari, omogenee e a coefficienti costanti) valutiamo tutte le soluzioni dell'equazione caratteristica dell'ODE. Il seguante è un esempio.

Data l'ODE di sesto ordine:

$$y^{(6)} - 9y^{(5)} + 55y^{(4)} - 165y''' + 150y'' + 148y' - 232y = 0$$

La corrispondente equazione caratteristica è:

$$\lambda^6 - 9\lambda^5 + 55\lambda^4 - 165\lambda^3 + 150\lambda^2 + 148\lambda - 232 = 0$$

che può essere fattorizzata come:

$$(\lambda + 1)(\lambda - 2)^3(\lambda - 2 - 5i)(\lambda - 2 + 5i) = 0$$

e le sue soluzioni saranno $\lambda = -1$, $\lambda = 2$ con molteplicità algebrica pari a 3, e $\lambda = 2 \pm 5i$, dove $\alpha = 2$ e $\beta = 5$.

La soluzione generale dell'ODE sarà quindi:

$$\begin{aligned} y(x) \quad = \quad & c_1 e^{-x} + c_2 e^{2x} + c_3 x e^{2x} + c_4 x^2 e^{2x} \\ & + c_5 e^{2x} \cos(5x) + c_6 e^{2x} \sin(5x) \end{aligned} \quad , \quad c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6 \in \mathbb{R}$$

3 ODE Lineari Non Omogenee a Coefficienti Costanti e con Termini Noti Esponenziali, Polinomiali o Trigonometrici

In questa sezione consideriamo ODE di due categorie: quelle con termini noti dati da combinazioni di funzioni esponenziali e polinomiali, e quelle con termini noti dati da combinazioni di funzioni esponenziali, polinomiali e trigonometriche (esclusivamente seno e coseno).

Si può dimostrare che la soluzione di una qualsiasi ODE lineare non omogenea è data da:

$$V(x) = V_0(x) + V_p(x) \tag{1}$$

dove $V_0(x)$ è la soluzione dell'omogenea associata all'ODE e $V_p(x)$ è una qualsiasi soluzione particolare dell'ODE non omogenea.

3.1 Termine Noto Formato dal Prodotto di una Funzione Esponenziale e un Polinomio

Data un'ODE del tipo:

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}y' + a_n y = e^{\lambda_1 x} p_m(x)$$

dove $p_m(x)$ è un polinomio di grado m, e data l'equazione caratteristica dell'omogenea associata all'ODE:

$$P(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\lambda + a_n$$

se vale che $P(\lambda_1) \neq 0$ allora un integrale particolare dell'ODE sarà:

$$y_p(x) = e^{\lambda_1 x} q_m(x)$$

dove $q_m(x)$ è un polinomio generico di grado m del tipo $q_m(x) = a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \ldots + a_{m-1}x + a_m$.

Se invece vale che $P(\lambda_1) = 0$ e la sua molteplicità algebrica come soluzione è $ma(\lambda_1) = h$, allora un integrale particolare dell'ODE sarà:

$$y_p(x) = x^h e^{\lambda_1 x} q_m(x)$$

dove $q_m(x)$ è un polinomio generico simile a quello definito sopra.

3.2 Termine Noto Formato dal Prodotto di una Funzione Esponenziale con la Somma tra, un Polinomio per una Funzione Coseno, e un Polinomio per una Funzione Seno

Data un'ODE del tipo:

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}y' + a_n y = e^{\lambda_1 x}[p_m(x)\cos(\mu x) + r_k(x)\sin(\mu x)]$$

dove $p_m(x)$ e $r_k(x)$ sono due polinomi di grado, rispettivamente, m e k, e data l'equazione caratteristica dell'omogenea associata all'ODE:

$$P(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\lambda + a_n$$

se vale che $P(\lambda_1 \pm i\mu) \neq 0$ allora un integrale particolare dell'ODE sarà:

$$y_p(x) = e^{\lambda_1 x}[q_{\bar{m}}(x)\cos(\mu x) + s_{\bar{m}}(x)\sin(\mu x)], \quad \bar{m} = \max\{m, k\}$$

dove $q_{\bar{m}}(x)$ e $s_{\bar{m}}(x)$ sono due polinomi generici di grado $\bar{m}$ e del tipo:

$$q_{\bar{m}}(x) = a_0 x^{\bar{m}} + a_1 x^{\bar{m}-1} + \ldots + a_{\bar{m}-1}x + a_{\bar{m}}$$
$$s_{\bar{m}}(x) = b_0 x^{\bar{m}} + b_1 x^{\bar{m}-1} + \ldots + b_{\bar{m}-1}x + b_{\bar{m}}$$

È fondamentale tenere a mente che i coefficienti di $q_{\bar{m}}(x)$ e $s_{\bar{m}}(x)$ sono indipendenti tra loro.

Se invece vale che $P(\lambda_1 \pm i\mu) = 0$ e la sua molteplicità algebrica come soluzione è $ma(\lambda_1 \pm i\mu) = h$ (notare come due soluzioni complesse coniugate tra loro contano come una per la molteplicità), allora un integrale particolare dell'ODE sarà:

$$y_p(x) = x^h e^{\lambda_1 x}[q_{\bar{m}}(x)\cos(\mu x) + s_{\bar{m}}(x)\sin(\mu x)], \quad \bar{m} = \max\{m, k\}$$

dove $q_{\bar{m}}(x)$ e $s_{\bar{m}}(x)$ sono due polinomi generici simili a quelli definiti sopra.

4 ODE Lineari Non Omogenee con Termine Noto Generico (Metodo di Variazione delle Costanti)

Data un'ODE del tipo:

$$y'' + ay' + by = f(x) \tag{2}$$

dove a e b sono costanti ed $f(x)$ è una funzione continua, sia l'integrale generale della sua omogenea associata una funzione del tipo:

$$V_0(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

per determinare un integrale generale di (2) basta conoscere le due funzioni $y_1(x)$ e $y_2(x)$, purché esse siano linearmente indipendenti tra loro.

Un integrale particolare di (2) è dato dall'equazione:

$$V_p(x) = \gamma_1 y_1(x) + \gamma_2 y_2(x) \tag{3}$$

dove le derivate prime di γ_1 e γ_2 risolvono il sistema:

$$\begin{cases} \gamma_1'(x)y_1(x) - \gamma_2'(x)y_2(x) = 0 \\ \gamma_1'(x)y_1'(x) - \gamma_2'(x)y_2'(x) = f(x) \end{cases}$$

(essendo $y_1(x)$ e $y_2(x)$ linearmente indipendenti, il sistema rispetta il teorema di Cramer e ammette una soluzione unica).

Risolto il sistema integriamo le soluzioni per trovare γ_1 e γ_2, mettiamo poi i risultati in (3) e otteniamo $V_p(x)$. L'equazione generale dell'ODE sarà quindi data dalla (1).

5 ODE del Primo Ordine a Variabili Separabili

Data un'ODE del tipo:

$$y'(x) = f(x) \cdot g(y(x)) \tag{4}$$

dove $f(x)$ e $g(y(x))$ sono funzioni continue, per trovare la soluzione generale dell'ODE seguiamo questo procedimento (userò $g(y)$ per indicare $g(y(x))$ per comodità di scrittura):

1. Riscriviamo la derivata

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x) \cdot g(y)$$

2. "Separiamo" le variabili ai due membri dell'equazione

$$\frac{\mathrm{d}x}{g(y)} = f(x)\mathrm{d}x$$

   (a) se $g(y)$ può assumere 0 come valore dobbiamo controllare se ciononostante verifica la (4). Se questo è il caso, questa sarà una soluzione della ODE di cui dovremo tener conto alla fine.

3. Integriamo entrambi i membri dell'equazione

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{g(y)} = \int f(x)\mathrm{d}x$$

4. Avremo a sinistra una funzione di y e a destra una funzione di x. Questa è una soluzione implicita della ODE.

   (a) se vogliamo (ed è possibile per i domini delle funzioni) possiamo riscrivere tutta l'equazione in forma esplicita ricavando $y(x)$.

5. Mettiamo insieme le soluzioni trovate in 2.a e 4 per ottenere la soluzione generale della ODE.

6 Equazioni Differenziali di Bernoulli

Un'equazione differenziale di Bernoulli è un'equazione differenziale non lineare, non omogenea, e del primo ordine, nella forma:

$$y'(x) = a(x)y(x) + b(x)y^{\alpha}(x), \quad \alpha \in \mathbb{R} - \{0, 1\}$$

Per risolvere un'equazione di Bernoulli seguiamo questo procedimento:

1. Dividiamo tutto per $y^\alpha(x)$

$$\frac{y'(x)}{y^\alpha(x)} = a(x)\frac{y(x)}{y^\alpha(x)} + b(x)$$
$$\frac{y'(x)}{y^\alpha(x)} = a(x)y^{1-\alpha}(x) + b(x) \tag{5}$$

   (a) ci sono casi in cui alcuni valori possono non essere validi per il dominio della funzione trovata, i valori vanno controllati individualmente, questo avviene in maniera simile a come delineato al punto 2.a della sezione precedente.

2. Poniamo $y^{1-\alpha}(x) = z(x)$

3. Deriviamo entrambi i membri di $y^{1-\alpha}(x) = z(x)$

$$z'(x) = (1-\alpha)y^{-\alpha}(x)y'(x)$$
$$z'(x) = (1-\alpha)\frac{y'(x)}{y^\alpha(x)}$$
$$\frac{z'(x)}{1-\alpha} = \frac{y'(x)}{y^\alpha(x)}$$

4. Sostituiamo nella (5)

$$\frac{z'(x)}{1-\alpha} = a(x)z(x) + b(x)$$

5. Questa è una semplice non omogenea del primo ordine, la risolviamo e otteniamo $z(x)$

6. Sostituiamo $z(x)$ in $y^{1-\alpha}(x) = z(x)$ e otteniamo $y(x)$

7. Per completare la soluzione generale della ODE, mettiamo insieme le soluzioni trovate in 1.a e 6.

Alcune Spiegazioni Dettagliate

1 Categorizzazione

In questa sezione avremo a che fare con ODE lineari non omogenee a coefficienti costanti. Possiamo dividere questa categoria di equazioni differenziali in 3 sottocategorie, a seconda della somiglianza del termine noto $g(x)$ con le seguenti funzioni generiche:

- $e^{\bar{\lambda}x}p_m(x)$, dove $p_m(x)$ è un polinomio di grado m;
- $e^{\bar{\lambda}x}[p_m(x)\cos(\mu x) + r_k(x)\cos(\mu x)]$, dove $p_m(x)$ e $r_k(x)$ sono due polinomi rispettivamente di grado m ed k.
- La terza categoria comprende tutte le altre possibili forme di $g(x)$.

2 Soluzione per $g(x)$ Simile ad $e^{\bar{\lambda}x}p_m(x)$

2.1 Operazioni Preliminari

Sappiamo che l'integrale generale di un'ODE lineare è dato da $V = V_0 + V_p$, dove:

- V è l'integrale generale dell'ODE
- V_0 è l'integrale generale dell'omogenea associata all'ODE
- V_p è un qualsiasi integrale particolare dell'ODE

Calcoliamo l'integrale generale dell'omogenea associata all'ODE, che prenderà la denominazione $y_0(x)$.

Nel farlo, ci troveremo quasi sicuramente a lavorare anche con l'equazione caratteristica dell'omogenea associata all'ODE, che denomineremo $P(\lambda)$ in quanto tornerà utile al passo successivo.

2.2 Calcolo del Valore di k (Esponente di x nella Formula Risolutiva)

Controlliamo se il nostro $\bar{\lambda}$ è soluzione di $P(\lambda)$[1].

[1] Chiaramente se abbiamo $g(x) = p_m(x)$, con il termine $e^{\bar{\lambda}x}$ assente, allora $\bar{\lambda} = 0$

Poniamo $P(\bar{\lambda}) = 0$. Questo ci permetterà di porre un parametro k uguale alla molteplicità algebrica di $\bar{\lambda}$ come soluzione.

Ad esempio, se $P(\bar{\lambda}) \neq 0$ (ossia $\bar{\lambda}$ non è soluzione), avremo $k = 0$.

Se invece avessimo un caso come $\bar{\lambda} = 3$ e $P(\lambda) = \lambda^2 - 6\lambda + 9 = (\lambda - 3)^2$, $\bar{\lambda}$ è soluzione con $m.a. = 2$, per cui $k = 2$.

2.3 Introduzione della Formula Risolutiva

La formula risolutiva che ci fornisce l'integrale particolare è $x^k e^{\bar{\lambda}x} q_m(x)$, dove:

- k è il valore che abbiamo trovato prima (ovviamente, per $k = 0$, $x^k = 1$);
- $q_m(x)$ è un polinomio generico di grado m (ad esempio per $m = 4$, $q_4(x) = ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$ oppure, per $m = 0$, avremmo $q_0(x) = a$).

2.4 Trovare il Valore dei Coefficienti dei Termini di $q_m(x)$

Per trovare il valore dei coefficienti del polinomio $q_m(x)$ consideriamo $A(x) = x^k e^{\bar{\lambda}x} q_m(x)$ come effettiva soluzione della nostra ODE. Di conseguenza, possiamo sostituire $A^{(n)}(x)$ al posto di ogni termine $y^{(n)}$. La soluzione avverrà quindi in questo modo:

a. Calcoliamo tutte le derivate di $A(x)$ fino alla derivata n-esima, dove n è l'ordine della ODE, sostituendo i risultati nel lato sinistro della nostra equazione iniziale.

b. Facendo un esempio per un generico caso di ODE di secondo ordine, avremo:
$$y'' + 2y' + 3y = g(x)$$
$$\Downarrow$$
$$A''(x) + 2A'(x) + 3A(x) = g(x)$$

c. Osserviamo che da entrambi i lati abbiamo un polinomio. Nel caso di $\bar{\lambda} \neq 0$ i polinomi saranno moltiplicati da $e^{\bar{\lambda}x}$. Essendo un'equazione, ciò che è a destra deve essere anche a sinistra.

d. Facendo un diverso esempio generico, se a destra avessimo un termine noto come $e^{2x}(x^3 + 4x^2)$ e a sinistra (come risultato della somma delle varie derivate di $A(x)$) $e^{2x}[(a+2b)x^3+(c-d)x^2+(b+c)x+(d+c+a)]^2$ (supponendo che $k=0$), sapendo che i coefficienti dei termini del polinomio devono essere identici per sostenere l'uguaglianza, formeremo un sistema, che nel caso dell'esempio sarà:

$$\begin{cases} a+2b=1 \\ c-d=4 \\ b+c=0 \\ d+c+a=0 \end{cases}$$

e. Risolvendo il sistema, otterremo quindi i valori dei coefficienti di $q_m(x)$ (che nel caso dell'esempio sono $a=\frac{5}{2}$, $b=-\frac{3}{4}$, $c=\frac{3}{4}$ e $d=-\frac{13}{4}$).

2.5 Integrale Generale dell'ODE

Possiamo quindi concludere che un integrale particolare dell'ODE è proprio $\bar{A}(x)=x^k e^{\bar{\lambda}x}\bar{q}_m(x)$, dove $\bar{q}_m(x)$ è il polinomio generico in cui sono stati però inseriti i valori dei coefficienti a, b, ecc.

Tornando alla formula $V=V_0+V_p$ possiamo quindi notiamo di avere a disposizione gli elementi per calcolare V, che sarà uguale a $y_0(x)+\bar{A}(x)$[3] e, genericamente, espresso con $y(x)$.

3 Soluzione per $g(x)$ Simile ad $e^{\bar{\lambda}x}[p_m(x)\cos{(\mu x)}+r_k(x)\cos{(\mu x)}]$

3.1 Operazioni Preliminari

Sappiamo che l'integrale generale di un'ODE lineare è dato da $V=V_0+V_p$, dove:

- V è l'integrale generale dell'ODE
- V_0 è l'integrale generale dell'omogenea associata all'ODE
- V_p è un qualsiasi integrale particolare dell'ODE

[2]Francamente non so se un risultato del genere sia possibile, l'esempio ha solo il fine di spiegare le meccaniche algebriche della soluzione

[3]Facendo questa operazione è importante ricordare di riportare anche il variare delle costanti di $y_0(x)$ in $\mathbb{R}$ (e.g. $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$)

Calcoliamo l'integrale generale dell'omogenea associata all'ODE, che prenderà la denominazione $y_0(x)$.

Nel farlo, ci troveremo quasi sicuramente a lavorare anche con l'equazione caratteristica dell'omogenea associata all'ODE, che denomineremo $P(\lambda)$ in quanto tornerà utile al passo successivo.

3.2 Calcolo del Valore di k (Esponente di x nella Formula Risolutiva)

Dobbiamo controllare se $\bar{\lambda} \pm \mu i$ è soluzione di $P(\lambda)$[1].

Poniamo $P(\bar{\lambda} \pm \mu i) = 0$. Questo ci permetterà di porre un parametro k uguale alla molteplicità algebrica di $\bar{\lambda} \pm \mu i$ come soluzione.

Ad esempio, se $P(\bar{\lambda} \pm \mu i) \neq 0$ (ossia $\bar{\lambda} \pm \mu i$ non è soluzione), avremo $k = 0$.

Considerando invece il caso in cui $\bar{\lambda} = 2$, $\mu = 1$ e $P(\lambda) = \lambda^2 - 4\lambda + 5 = 0$, dove $\bar{\lambda} \pm \mu i$ è soluzione dell'equazione, è importante considerare il fatto che, nonostante in questo caso avremmo a che fare con due soluzioni complesse coniugate, consideriamo comunque la $m.a. = 1$ (perché le singole soluzioni avrebbero proprio $m.a. = 1$), per cui avremo $k = 1$.

3.3 Introduzione della Formula Risolutiva

La formula risolutiva per l'integrale particolare è $x^k e^{\bar{\lambda} x}[q_{\overline{m}}(x) \cos{(\mu x)} + s_{\overline{m}}(x) \cos{(\mu x)}]$, dove:

- k è il valore che abbiamo trovato prima (ovviamente, per $k = 0$, $x^k = 1$);
- $\overline{m}$ è il grado più alto tra quello di $p_m(x)$ e $r_k(x)$ (in altre parole, $\overline{m} = \max{\{m, k\}}$);
- $q_{\overline{m}(x)}$ è un polinomio generico di grado $\overline{m}$ (ad esempio per $\overline{m} = 4$, $q_4(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ oppure, per $\overline{m} = 0$, avremmo $q_0(x) = a$);
- $s_{\overline{m}(x)}$ è un polinomio generico di grado $\overline{m}$ con coefficienti diversi da quelli di $q_{\overline{m}(x)}$.

3.4 Trovare il Valore dei Coefficienti dei Termini di $q_{\overline{m}(x)}$ e $s_{\overline{m}(x)}$

Per trovare il valore dei coefficienti del polinomio $q_m(x)$ consideriamo $A(x) = x^k e^{\bar{\lambda}x}[q_{\overline{m}(x)} \cos(\mu x) + s_{\overline{m}(x)} \sin(\mu x)]$ come effettiva soluzione della nostra ODE. Di conseguenza, possiamo sostituire $A^{(n)}(x)$ al posto di ogni termine $y^{(n)}$. La soluzione avverrà quindi in questo modo:

a. Calcoliamo tutte le derivate di $A(x)$ fino alla derivata n-esima, dove n è l'ordine della ODE, sostituendo i risultati nel lato sinistro della nostra equazione iniziale.

b. Facendo un esempio per un generico caso di ODE di secondo ordine, avremo:
$$y'' + 2y' + 3y = g(x)$$
$$\Downarrow$$
$$A''(x) + 2A'(x) + 3A(x) = g(x)$$

c. Osserviamo che da entrambi i lati abbiamo un termine seno e un termine coseno entrambi moltiplicati per uno stesso $e^{\bar{\lambda}x}$ ed x^k (nel caso in cui $\bar{\lambda} \neq 0$ e $k \neq 0$), oltre che ad essere moltiplicati per un polinomio, che è spesso un valore costante, ma non necessariamente (e.g. $2\sin(3x)$ a destra è moltiplicato solo da 2, "polinomio" di grado 0). Trattandosi di un'equazione, ciò che è a destra deve essere anche a sinistra.

d. Facendo un diverso esempio generico, se a destra avessimo un termine noto come $2e^{2x} \sin(4x)$ e a sinistra (come risultato della somma delle varie derivate di $A(x)$) $e^{2x}[(-3b + 5a)\cos(4x) + (8a - 3b)\sin(4x)]^2$ (supponendo che $k = 0$), sapendo che i coefficienti di seno e coseno devono essere identici a destra e sinistra per sostenere l'uguaglianza, formeremo un sistema, che nel caso dell'esempio sarà:
$$\begin{cases} -3b + 5a = 0 \\ 8a - 3b = 2 \end{cases}$$

e. Risolvendo il sistema, otterremo quindi i valori dei coefficienti di $q_{\overline{m}(x)}$ e $s_{\overline{m}(x)}$ (che nel caso dell'esempio sono $a = \frac{2}{3}$ per $q_{\overline{m}(x)}$ e $b = \frac{10}{9}$ per $s_{\overline{m}(x)}$).

3.5 Integrale Generale dell'ODE

Possiamo quindi concludere che un integrale particolare dell'ODE è proprio $\bar{A}(x) = x^k e^{\bar{\lambda}x}[\bar{q}_{\overline{m}(x)} \cos(\mu x) + \bar{s}_{\overline{m}(x)} \sin(\mu x)]$, dove $\bar{q}_{\overline{m}(x)}$ e $\bar{s}_{\overline{m}(x)}$ sono i due polinomi generici in cui sono stati però inseriti i valori dei rispettivi coefficienti a, b, ecc.

Tornando alla formula $V = V_0 + V_p$, possiamo notare di avere a disposizione gli elementi per calcolare V, che sarà uguale a $y_0(x) + \bar{A}(x)^3$ e, genericamente, espresso con $y(x)$.

4 Soluzione per $g(x)$ Generico (Metodo di Variazione delle Costanti)

4.1 Operazioni Preliminari

Sappiamo che l'integrale generale di un'ODE lineare è dato da $V = V_0 + V_p$, dove:

- V è l'integrale generale dell'ODE
- V_0 è l'integrale generale dell'omogenea associata all'ODE
- V_p è un qualsiasi integrale particolare dell'ODE

Calcoliamo l'integrale generale dell'omogenea associata all'ODE, che prenderà la denominazione $y_0(x)$.

Nel farlo, ci troveremo un integrale nella forma $y_0(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ (per ODE di secondo ordine), per via delle formule risolutive di ODE lineari omogenee a coefficienti costanti, dove $y_1(x)$ e $y_2(x)$ sono polinomi, seni e coseni, esponenziali, o combinazioni lineari dei tre.

4.2 Troviamo un Possibile Integrale Particolare di $g(x)$

Una funzione del tipo $y_p(x) = c_1(x)y_1(x) + c_2(x)y_2(x)$ è un integrale particolare dell'ODE, purché:

- Le funzioni $y_1(x)$ e $y_2(x)$ siano integrali particolari dell'omogenea associata all'ODE e siano linearmente indipendenti tra loro;
- $c_1(x)$ e $c_2(x)$ siano due funzioni tali che le loro derivate prime risolvano il sistema:
$$\begin{cases} c_1'(x)y_1(x) + c_2'(x)y_2(x) = 0 \\ c_1'(x)y_1'(x) + c_2'(x)y_2'(x) = g(x) \end{cases}$$

4.3 Troviamo il Valore di $c_1(x)$ e $c_2(x)$

Per trovare le due funzioni dovremo risolvere il sistema prima citato, trovando il valore di $c_1'(x)$ e $c_2'(x)$. Chiaramente, si può lavorare a seconda delle proprie preferenze: sostituzione, riduzione, metodo di Cramer, ecc.

Fatto ciò, si dovrà calcolare l'integrale indefinito dei due risultati trovati. Ad esempio, trovandoci davanti a $c_1'(x) = 4x^2$ e $c_2'(x) = 3x$, volendo trovare i corrispondenti $c_1(x)$ e $c_2(x)$, dovremo svolgere le operazioni $c_1(x) = \int c_1'(x)\ dx$ e $c_2(x) = \int c_2'(x)\ dx$, che avranno per risultato, in questo esempio, $c_1(x) = \frac{4}{3}x^3 + k_1,\ k_1 \in \mathbb{R}$ e $c_2(x) = \frac{3}{2}x^2 + k_2,\ k_2 \in \mathbb{R}$.

Per semplicità, nella vasta maggior parte dei casi, assegniamo alle costanti di integrazione il valore di 0.

4.4 Calcoliamo l'Integrale Generale

Possiamo quindi concludere che un integrale particolare dell'ODE è proprio $y_p(x) = c_1(x)y_1(x) + c_2(x)y_2(x)$.

Tornando alla formula $V = V_0 + V_p$, possiamo notare di avere a disposizione gli elementi per calcolare V, che sarà uguale a $y_0(x) + y_p(x)$[3] e, genericamente, espresso con $y(x)$.

5 Considerazioni Finali

Dato un caso in cui $g(x)$ sia una combinazione di categorie di soluzione, ad esempio $g(x) = x^2 + e^{2x}\sin(4x)$, che mette insieme le prime due categorie presentate, la risoluzione avverrà trattando le diverse categorie come termini noti di due diverse equazioni differenziali. Ad esempio, posta una ODE come $y'' + 2y' - 4y = x^2 + e^{2x}\sin(4x)$, risolveremo trattando separatamente $y'' + 2y' - 4y = x^2$ e $y'' + 2y' - 4y = e^{2x}\sin(4x)$.

Il risultato della ODE iniziale sarà dato dalla somma tra l'integrale generale dell'omogenea associata ad essa e gli integrali particolari delle due ODE che abbiamo ricavato da quella iniziale. Quindi, posta $y_0(x)$ come integrale generale dell'omogenea associata, $y_{p1}(x)$ come integrale particolare di $y'' + 2y' - 4y = x^2$, e $y_{p2}(x)$ come integrale particolare di $y'' + 2y' - 4y = e^{2x}\sin(4x)$, l'integrale generale di $y'' + 2y' - 4y = x^2 + e^{2x}\sin(4x)$ sarà $y(x) = y_0(x) + y_{p1}(x) + y_{p2}(x)$.

Ultimo aspetto da tenere in considerazione è il fatto che, per la seconda categoria, il coefficiente μ deve essere uguale sia per il seno che per il coseno, altrimenti è necessario trattare l'ODE come nel caso appena presentato $(y(x) = y_0(x) + y_{p1}(x) + y_{p2}(x))$.