MAP2212 - Laboratório de Computação e Simulação

Relatório - EP01

Vítor Garcia Comissoli - 11810411

1 Introdução

O objetivo deste EP é a estimação de π por meio da proporcionalidade de um número **n** de pontos uniformemente obtidos baseado se estão "dentro" e "fora" de uma circunferência de raio 1, inscrita em um quadrado de lado 2 centrado na origem, de modo que a estimativa para π obitida tenha um erro de, no máximo, 0.05% de π, com 95% de confiança, ou seja, que fique dento do Intervalo de Confiança $[\pi \cdot (1 - 0.0005), \pi \cdot (1 + 0.0005)]$ com $\gamma = 0.95$.

Vale ressaltar também que, neste EP, deve-se tratar o valor de π como desconhecido, então todas as contas devem ser realizadas com um estimador qualquer para π ($\hat{\pi}$).

2 Discussão Teórica

Primeiramente, foi necessário descobrir o valor de **n** (número de loopings realizados pela função "for in range") para que a estimativa de π se encontre dentro do intervalo de confiança dado acima com $\gamma = 0.95$

Para isso, foi utilizada a aproximação assintótica da Binomial(n,$\frac{\pi}{4}$) para uma Normal(0,1). Disso temos que a fórmula para a obtenção de **n** pode ser dada por:

$$n \geq \frac{z_\gamma 2 \cdot \sigma^2}{\epsilon^2} \Leftrightarrow \frac{z_\gamma \cdot \sigma}{\sqrt{n}} \leq \epsilon$$

Como temos um $\gamma = 0.95$, tomamos pela tabela da normal que $z_\gamma = 1.96$

Temos que $\epsilon = \pi \cdot 0.0005$. Como o programa calcula apenas a área do primeiro quadrande e depois a multiplica por quatro, podemos dizer que o erro no quadrante se dá por:

$$\frac{|\hat{\pi} - \pi|}{4} \leq 0.0005 \cdot \frac{\hat{\pi}}{4}$$

Disso, dizemos que o erro experimental a ser usado na fórmula da aproximação assintótica se dá por $\epsilon = 0.0005 \cdot \frac{\hat{\pi}}{4}$, sendo $\hat{\pi}$ um estimador para π que será calculado mais tarde.

Se tratando de σ^2, como este tende a variância de uma bernoulli, podemos ultilizar $\sigma^2 = p(1-p)$, que no caso que está sendo analizado, se dá por $\sigma^2 = \frac{\hat{\pi}}{4}(1-\frac{\hat{\pi}}{4})$, sendo $\hat{\pi}$ o mesmo estimador utilizado para a obtenção de ϵ.

Pela fórmula de ϵ dada acima temos intuitivamente que, quanto menor for o valor de $\hat{\pi}$ maior será o valor de n, ou seja, se tomarmos um valor para $\hat{\pi}$ que seja menor que π obteremos um n que chegaria a um intervalo de confiança ainda mais preciso que o que foi solicitado. Dessa forma, podemos utilizar $\hat{\pi} = 3$ desde que provemos que $3 \leq \pi$.

Para provar que $3 \leq \pi$ tomemos o hexágono inscrito à circunferência de raio 1 centrada na origem. Ao dividir este hexágono em 6 partes iguais ficamos com 6 triângulos cujos 3 ângulos são iguas a $\frac{\pi}{3}$. Disso temos que os 6 triângulos são equiláteros, e como sabemos que dois de seus lados são iguais ao raio da circunferência $= 1$, temos que todos os lados são $= 1$. Dessa forma sabemos que o perímetro desse hexágono será igual a 6. Sabemos, pela definição, que o perímetro da circunferência $= 2\pi r = 2\pi \cdot 1 = 2\pi$. Assim temos que:

Perímetro do Hexágono $\leq$ Perímetro da Circunferência $\Leftrightarrow 6 \leq 2\pi \Leftrightarrow 3 \leq \pi$

Tendo provado que $3 \leq \pi$, tomemos $\hat{\pi} = 3$

Agora, tendo todos os valores, podemos encontrar o valor de n desejado utilizando a fórmula da aproximação assintótica para uma Normal(0,1) já apresentada acima. Temos então:

$$\frac{z_\gamma \cdot \sigma}{\sqrt{n}} \leq \epsilon \Leftrightarrow \frac{1.96 \cdot \sqrt{\frac{3}{4}(1-\frac{3}{4})}}{\sqrt{n}} \leq 0.0005 \cdot \frac{3}{4}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{n} \geq \frac{1.96 \cdot \sqrt{\frac{3}{16}}}{0.000375} \Leftrightarrow \sqrt{n} \geq 2263 \Leftrightarrow n \geq 5121169$$

Temos assim, que o valor de **n** a ser colocado no programa para satisfazer as condições impostas pelo enunciado deve ser igual a 5121169.

3 Discussão do Código

A função "estima-pi" desenvolvida se dá por:

"dentro = 0" $\leftarrow$ inicialização do contador "dentro", que no final do programa conterá a quantidade de pontos que se encontram dentro do primeiro quadrante da circunferência.

"n = 5121169" $\leftarrow$ valor de **n** obtido teoricamente (como demostrado acima), que servirá de range para o loop.

"for i in range (n):" $\leftarrow$ um loop que vai de 0 à n-1 onde uma coordenada (X,Y) vai ser uniformemente sorteada e, caso esteja dentro do primeiro quadrante do círculo, será somada ao valor de "dentro".

"x = random.uniform(0,1)" e **"y = random.uniform(0,1)"** $\leftarrow$ são os valores sorteados para a coordenada (X,Y) no i-ésimo momento do loop.

"z = (x2 + y**2)**(1/2)"** $\leftarrow$ encontra z, a hipotenusa do triângulo retângulo de catetos x e y.

"if z $\prec$= 1:" $\leftarrow$ testa se z está dentro do primeiro quadrante do círculo, testando se o valor de z é ≤ 1, já que o raio da circunferência é 1.

"dentro += 1" $\leftarrow$ Se z está dentro do primeiro quadrante da circunferência ($z \leq 1$), o contador "dentro" recebe +1.

"pi = 4*(dentro/n)"$\leftarrow$ Estima a área do primeiro quadrante ao dividir a quanidade de pontos dentro do círculo pela quantidade total de pontos, e depois multiplica por 4 para obter a estimativa da área da circunferência inteira.

"return pi"$\leftarrow$ retorna a estimativa para π obtida pela função "estima-pi".

4 Resultado

O teste dos resultados foi realizado pela criação de uma função main() que chama a função estima-pi **n** vezes e imprime a razão das estimativas para π que se encontram dentro do intevalo de confiança sobre o número total de estimativas realizadas.

Para $n = 100$, essa razão foi de 0.97, com média $\mu = 3.141682$. O tempo gasto para um loop de $n = 100$ foi de, aproximadamente, 730.53 segundos (12.18 min).

Já para um $n = 500$, a razão obtida foi de 0.966, com média $\mu = 3.141564$. O tempo gasto para um loop de $n = 500$ foi de, aproximadamente, 3660.89 segundos (61.01 min).

Ambos os valores apresentados acima mostram-se coerentes aos parâmetros de acurácia $\gamma = 0.95$ e $\epsilon = \pi \cdot 0.0005$, estipulados pelo enunciado do EP.

Com isso podemos concluir que o resultado obtido foi dentro do esperado.

5 Conclusão

Pode-se concluir que o programa atingiu os objetivos que lhe foram propostos, já que os valores obtidos pelos testes acima se mostraram coerentes com aquilo que era esperado pela parte teórica (obtenção de **n**), e com aquilo que foi solicitado no enunciado do EP.