Método da bissecção

1. Considere a equação

$$x = \mathrm{e}^{-x}.$$

(a) Mostre que a equação dada tem uma e uma só solução real x^*.

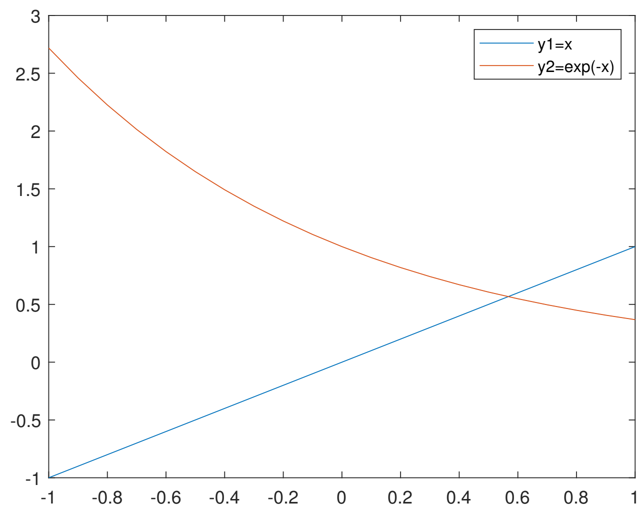
Resolução

Comecemos por esboçar os gráficos das funções $y_1 = x$ e $y_2 = \mathrm{e}^{-x}$, no intervalo $[-1, 1]$, usando o MatLab.

Com as instruções:

```
>> x=[-1:0.1:1];y1=x;y2=exp(-x);
>> plot(x,y1,x,y2);legend('y1=x','y2=exp(-x)')
```

obtemos o gráfico abaixo onde claramente vemos que existe um ponto de



interseção das duas funções y_1 e y_2 ou, equivalentemente, uma solução da equação dada.

Seja

$$f(x) = \mathrm{e}^{-x} - x.$$

Naturalmente, f é uma função contínua em $\mathbb{R}$, e portanto em particular é contínua em $[0, 1]$.

Como $f(0) = 1 > 0$ e $f(1) = \dfrac{1}{\mathrm{e}} - 1 < 0$, então o Teorema de Bolzano garante-nos a existência de pelo menos um zero de f no intervalo $]0, 1[$. Além disso, como:

$$f'(x) = -\mathrm{e}^{-x} - 1 < 0, \ \forall x \in \mathbb{R},$$

podemos concluir que aquele zero é o único zero de f.

(b) Partindo das aproximações iniciais $x_{-1} = 0$ e $x_0 = 1$, i.e., considerando como aproximações iniciais os extremos do intervalo $[0, 1]$, determine um valor aproximado de x^* efetuando 100 iterações pelo método da bissecção.

Resolução

Efetuemos a 1ª iteração que, no método da bissecção vai corresponder ao ponto médio do intervalo $[0, 1]$, i.e.,

$$x_1 = \frac{0 + 1}{2} = 0.5.$$

Para efetuarmos a 2ª iteração, temos que saber em que metade do intervalo $[0, 1]$ se encontra a solução pretendida, i.e., depois de partirmos ao meio o intervalo $[0, 1]$, precisamos de saber se a solução se encontra no intervalo $[0, 0.5]$ ou no intervalo $[0.5, 1]$. Como

$$f(0.5) = 0.11 > 0,$$

então, por aplicação do teorma de Bolzano, a solução terá que pertencer ao intervalo $[0.5, 1]$. Assim sendo, a 2ª iteração do método da bissecção corresponderá ao ponto médio deste intervalo, ou seja:

$$x_2 = 0.75.$$

Para o cálculo da 3ª iteração, precisamos de saber se a solução se encontra no intervalo $[0.5, 0.75]$ ou no intervalo $[0.75, 1]$, e por aí adiante.

Recorrendo ao MatLab, comecemos por definir a função f num script com o nome Ex1Bisseccao. Para tal, executemos na linha de comandos:

```
>> edit Ex1Bisseccao
```

que automaticamente cria um ficheiro com a extensão .m, no qual vamos definir a função f através das instruções:

```
function y=Ex1Bisseccao(x)
    y=exp(-x)-x
end
```

De seguida, vamos construir uma rotina que, partindo de duas aproximações iniciais a e b, efetue Nit iterações pelo método da bissecção.

```
>> edit MetBisseccao
```

No ficheiro MetBisseccao.m, escrevemos o seguinte conjunto de instruções:

```
function [sol] = MetBisseccao(a,b,Nit)
i=1;
valora=Ex1Bisseccao(a);
while i <= Nit
    sol=(a+b)/2;
    valorsol=Ex1Bisseccao(sol);
    i=i+1;
    if valora*valorsol > 0
        a=sol;
        valora=valorsol;
    else
        b=sol;
    end
end
```

Executando na linha de comandos, obtemos:

```
>> MetBisseccao(0,1,100)
```

```
ans =

    0.5671
```

ou seja, temos $x_{100} = 0.5671$.

(c) Determine um majorante para o erro cometido na alínea anterior.

Resolução

Sabemos que o erro cometido na aproximação da solução $x^* \in [a, b]$ de uma dada equação pelo método da bissecão ao fim de n iterações, satisfaz:

$$|x_n - x^*| \leq \frac{b-a}{2^n}.$$

Neste caso, como temos $a = 0$, $b = 1$ e fizemos 100 iterações, temos:

$$|x_{100} - x^*| \leq \frac{1}{2^{100}}.$$

(d) Sabendo que $x^* \in [0, 1]$ e usando no método da bissecção como aproximações iniciais os extremos deste intervalo, podemos saber à partida qual o nº mínimo de iterações necessárias para determinar um valor aproximado de x^* com um erro inferior a 10^{-3}? Justifique.

Resolução

Uma vez que

$$|x_n - x^*| \leq \frac{b-a}{2^n} = \frac{1}{2^n},$$

pretendemos determinar o menor valor de n que satifaz:

$$\frac{1}{2^n} < 10^{-3},$$

ou seja

$$2^n > 10^3 \Leftrightarrow n > \log_2 10^3 \Leftrightarrow n > 9.97.$$

Seriam então necessárias pelo menos 10 iterações.

2. Repita as alíneas do problema anterior, considerando a equação:

$$x + 1 + \arctan x = 0.$$