Método do Ponto Fixo e Método de Newton

1. Considere a equação
$$x^2 = e^{x-1}.$$

   (a) Mostre que no intervalo $[-1, 0]$ esta equação tem uma e uma só solução x^*.

   Resolução

   Vamos mostrar isto usando o Teorema do ponto fixo. De facto
   $$x^2 = e^{x-1} \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{e^{x-1}}.$$

   Como $x^* < 0$, consideramos
   $$x = \underbrace{-\sqrt{e^{x-1}}}_{g(x)}$$

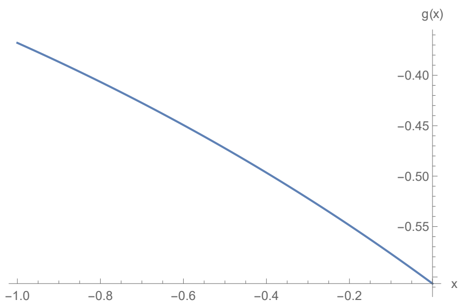
   e portanto mostrar que no intervalo $[-1, 0]$ a equação inicial tem uma e uma só solução, é equivalente a mostrar que nesse intervalo a equação $x = g(x)$ tem uma só solução, i.e., g tem um e um só ponto fixo no intervalo $[-1, 0]$. Obviamente, g é contínua no intervalo $[-1, 0]$ e pode mostrar-se que
   $$g([-1, 0]) \subset [-1, 0]. \tag{1}$$

   Como a função exponencial é estritamente crescente, temos:
   $$-1 \leq x \leq 0 \Rightarrow e^{-1-1} \leq e^{x-1} \leq e^{0-1}.$$

   Então, obtemos
   $$\sqrt{e^{-2}} \leq \sqrt{e^{x-1}} \leq \sqrt{e^{-1}} \Leftrightarrow -\sqrt{e^{-1}} \leq g(x) \leq -\sqrt{e^{-2}}, \ -1 \leq x \leq 0,$$

   ou seja,
   $$g([-1, 0]) = \left[\underbrace{-\sqrt{e^{-1}}}_{\approx -0.6}, \underbrace{-\sqrt{e^{-2}}}_{\approx -0.4}\right] \subset [-1, 0].$$

   Graficamente poderiamos verificar isto fazendo o gráfico da função g e constatando que este se encontra na região $[-1, 0] \times [-1, 0]$.



Por outro lado, a função

$$|g'(x)| = \left|-\frac{1}{2}\sqrt{e^{x-1}}\right| = \frac{1}{2}\sqrt{e^{x-1}}$$

é contínua e crescente em $[-1, 0]$ (basta ver que a sua derivada, é $\frac{1}{4}\sqrt{e^{x-1}} > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$) e portanto a função $|g'(x)|$ tem no intervalo $[-1, 0]$ um máximo, dado por $L = \frac{1}{2}\sqrt{e^{-1}} < 1$.

Então, o teorema do ponto fixo garante-nos que no intervalo $[-1, 0]$ a função g tem um e um só ponto fixo, ou seja, nesse intervalo, a equação $x^2 = e^{x-1}$ tem uma e uma só solução.

(b) Mostre que o esquema iterativo

$$x_{n+1} = -\sqrt{e^{x_n - 1}},\ n = 0, 1, 2, \ldots$$

converge para a solução da equação dada, $x^* \in [-1, 0]$, qualquer que seja a aproximação inicial $x_0 \in [-1, 0]$.

Resolução

O esquema referido corresponde ao método do ponto fixo, com a escolha da função de iteração:

$$g(x) = -\sqrt{e^{x-1}}.$$

Na resolução da alínea anterior, já vimos que com esta escolha estão satisfeitas as condições de aplicabilidade do método do ponto fixo. Este teorema, além de nos garantir a existência e unicidade de solução no intervalo, garante-nos também que o método iterativo converge para essa única solução, qualquer que seja a aproximação inicial x_0 considerada, neste caso, $\forall x_0 \in [-1, 0]$.

(c) Considerando $x_0 = -0.5$, efectue duas iterações pelo método dado na alínea anterior.

Resolução

Para $n = 0$ temos a 1ª iteração:

$$x_1 = g(x_0) = g(-0.5) = -\sqrt{e^{-0.5-1}} = -0.472367.$$

Fazendo $n = 1$ obtemos a 2ª iteração:

$$x_2 = g(x_1) = -0.478938.$$

(d) Compare os resultados obtidos pelo método dado na alínea (b), usando as seguintes aproximações iniciais: $x_0 = -1$, $x_0 = -0.5$ e $x_0 = 0$. Comente.

Resolução

Vamos usar o Matlab.

Na janela de comandos, executar a instrução: De seguida, na janela de comandos, executar

```
>> edit exercicio1
```

que automaticamente cria o ficheiro **exercicio1** no editor, com a extensão .m e que poderá ser guardado.

No editor, e no ficheiro **exercicio1**, escrever o seguinte conjunto de instruções:

```
function exercicio1(x0,k)
% x0 -> aproximacao inicial
% k -> nº de iteracoes
for j=1:k
    xn=-sqrt(exp(x0-1))
    x0=xn;
end
end
```

Para efectuarmos, p.e. 3 iterações, partindo da aproximação inicial $x_0 = -0.5$, voltamos à janela de comandos e executamos o comando

```
>> exercicio1(-0.5,3)
```

Obtemos assim o output:

```
xn =

  -0.472366552741015


xn =

  -0.478938407051494


xn =

  -0.477367233129309
```

Se pretendermos efectuar 3 iterações partindo da aproximação inicial $x0 = -1$, fazemos

```
>> exercicio1(-1,3)
```

Para comparar os resultados para as três aproximações diferentes, faça 30 iterações, dando as seguintes instruções:

```
>> exercicio1(-1,30)
```

```
>> exercicio1(-1,30)
```

```
>> exercicio1(-1,30)
```

2. Considere a equação

$$x = \arccos x.$$

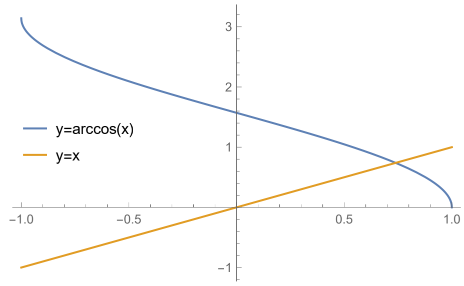
(a) Mostre que a equação tem uma e uma só solução real e que esta se encontra no intervalo $[0.6, 0.8]$.

Resolução

Em primeiro lugar, notemos que

$$x = \arccos x \Leftrightarrow \underbrace{x - \arccos x}_{f(x)} = 0,$$

e que o domínio de f é $D_f = [-1, 1]$. Então, no domínio de f, determinar os zeros de f é equivalente a determinar os pontos de intersecção das funções $y = x$ e $y = \arccos x$. Vejamos o gráfico destas duas funções:



Além disso, f é contínua no intervalo $[-1, 1]$ e em particular em $[0.6, 0.8]$. Como $f(0.6) = -0.327295 < 0$ e $f(0.8) = 0.156499$, então pelo Teorema de Bolzano, podemos garantir pelo menos um zero de f no intervalo $[0.6, 0.8]$.

Além disso,

$$f'(x) = 1 + \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} > 0, \ x \in [0, 1[, \tag{2}$$

pelo que f é estritamente crescente no deu domínio, pelo que terá no máximo um zero. Podemos então concluir que existe um e um só zero de f que se encontra no intervalo $[0.6, 0.8]$.

(b) Use o método de Newton para determinar um valor aproximado da solução (pare de iterar quando o módulo da diferença entre duas aproximações sucessivas fornecidas pelo método for inferior a 10^{-8}).

Resolução

Recordemos que a escolha da aproximação inicial é muito importante para garantimos a convergência do método para a solução desejada. Além disso, devemos também garantir que $f'(x)$ nunca se anula no intervalo onde se encontra a solução. Isto já foi feito em (2). Vejamos então como escolher adequadamente a aproximação inicial x_0.

$$f''(x) = \frac{x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}} > 0, \forall x \in [0.6, 0.8].$$

Como sabemos, x_0 deve ser escolhida de forma a ser satisfeita a condição

$$f(x_0)f''(x) > 0, \forall x \in [0.6, 0.8],$$

pelo que x_0 poderá ser qualquer elemento de $[0.6, 0.8]$ tal que $f(x_0) > 0$. $x_0 = 0.8$ satisfaz esta condição, logo poderá ser usado como aproximação inicial do método.

A fórmula de recorrência do método de Newton é:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)},\ n = 0, 1, \ldots,$$

e assim obtemos:

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 0.8 - \frac{f(0.8)}{f'(0.8)} = 0.741313.$$

Como

$$|x_1 - x_0| = |0.741313 - 0.8| = 0.058687 > 10^{-8}$$

devemos calcular nova iteração:

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = 0.739088,$$

e porque

$$|x_2 - x_1| = 0.058687 > 10^{-8} = 0.002225 > 10^{-8},$$

ainda vamos ter que continuar a iterar.

Vamos usar o Matlab para obtermos as restantes iterações necessárias.

No editor, criar um ficheiro com o nome **ex2** com o seguinte conjunto de comandos:

```
function sol=ex2(x0,tol)
% xo -> aproximacao inicial
% tol: |x_{n+1}-x_n| < tol
format long
erro=1;
function y=f(x) %funcao f
  y=x-acos(x);
end
function dy=df(x) %funcao derivada de f
  dy=1+(1-x^2)^(-1/2);
end
while erro>=tol
    xn=x0-(f(x0))/(df(x0))
    erro=abs(xn-x0);
    x0=xn;
end
end
```

De seguida, na janela de comandos, executar

```
>> ex2(0.8,10^(-8))
```