Modelos para Séries Temporais com Base na EGEDD

Distribuição Dagum Exponencial Generalizada Exponencializada

Apresentador: Vítor Bernardo Silveira Pereira
Orientador: Cleber Bisognin
Coorientadora: Laís Helen Loose

Motivação

- A indentificação de uma **distribuição** apropropriada é muito importante para a **análise estatística**;
- A distribuição Dagum, idealizada por Camilo Dagum, tem ganhado muita atenção na sua utilidade para modelagem de dados sobre a distribuição de renda e análise de confiabilidade.
- Distribuições baseadas na Dagum:
  - Distribuição exponenciada **Kumaraswamy-Dagum** (Silva et al., 2015);
  - Distribuição **Dagum Exponencial Generalizada Exponencializada** proposta em (Nasiru et al., 2019);
  - **Gompertz Generalizada**, proposta por El-Gohary et al. (2013), entre outros...

Motivação

- A indentificação de uma **distribuição** apropropriada é muito importante para a **análise estatística**;
- A distribuição Dagum, idealizada por Camilo Dagum, tem ganhado muita atenção na sua utilidade para modelagem de dados sobre a distribuição de renda e análise de confiabilidade.
- Distribuições baseadas na Dagum:
  - Distribuição exponenciada **Kumaraswamy-Dagum** (Silva et al., 2015);
  - Distribuição **Dagum Exponencial Generalizada Exponencializada** proposta em (Nasiru et al., 2019);
  - **Gompertz Generalizada**, proposta por El-Gohary et al. (2013), entre outros...

- Os modelos de **Regressão Linear Normal** e **Modelos Lineares Generalizados** possuem como pressuposto que a distribuição seja Normal ou pertença a família exponencial regular;

- Na prática, existem dados que não se adequam a distribuição normal ou distribuições pertecentes a familia exponencial, então nos últimos anos vêm sendo propostos **modelos alternativos**;

Motivação

- Nos novos modelos, tem-se uma reparametrização em termos da média ou quantil, para possibilitara interpretação dos parâmetros em termos de medidas de posição ou precisão;
- Com a reparametrização, uma estrutura de regressão é incluída para **modelar a média ou o quantil**, assim tendo a mesma abordagem dos MLG'S;

Motivação

- Nos novos modelos, tem-se uma reparametrização em termos da média ou quantil, para possibilitara interpretação dos parâmetros em termos de medidas de posição ou precisão;
- Com a reparametrização, uma estrutura de regressão é incluída para **modelar a média ou o quantil**, assim tendo a mesma abordagem dos MLG'S;
- Na **EGEDD**, no entanto, **não há forma fechada para média e variância**, desta forma reparametrizamos a distribuição em termos dos quantis;
- Em Séries Temporais, uma das abordagens mais usuais é a metodologia Box e Jenkins, no entanto também estão surgindo modelos alternativos, denominados de **modelos dinâmicos**;
- Assim a proposta do projeto, é **desenvolver um novo modelo (modelo dinâmico) com suporte nos reais**, baseando-se na EGEDD e na distrubuição Dagum;

Aplicações

- Principalmente na área da modelagem de dados de sobrevivência e em dados econômicos, como análise de confiabilidade, modelagem de renda pessoal e nacionais (micro e macroeconômico).

Augusto Dagum: Um dos maiores economistas e estatísticos latinos

Propriedades da EGED

Função de distribuição acumulada

$$F_Y(y) = 1 - \left\{1 - \left[1 - \left(1 - \left(1 + \alpha y^{-\delta}\right)^{-\sigma}\right)^{\gamma}\right]^{\eta}\right\}^{\lambda}$$

Propriedades da EGED

Função de distribuição acumulada

$$F_Y(y) = 1 - \left\{1 - \left[1 - \left(1 - \left(1 + \alpha y^{-\delta}\right)^{-\sigma}\right)^{\gamma}\right]^{\eta}\right\}^{\lambda}$$

Suporte

$$y > 0$$

Propriedades da EGED

Função de distribuição acumulada

$$F_Y(y) = 1 - \left\{1 - \left[1 - \left(1 - \left(1 + \alpha y^{-\delta}\right)^{-\sigma}\right)^{\gamma}\right]^{\eta}\right\}^{\lambda}$$

Suporte

$$y > 0$$

Paramêtros

$$\alpha, \sigma, \lambda, \delta, \eta, \gamma > 0$$

Propriedades da EGED

Função de distribuição acumulada

$$F_Y(y) = 1 - \left\{1 - \left[1 - \left(1 - \left(1 + \alpha y^{-\delta}\right)^{-\sigma}\right)^{\gamma}\right]^{\eta}\right\}^{\lambda}$$

Suporte

$$y > 0$$

Paramêtros

$$\alpha, \sigma, \lambda, \delta, \eta, \gamma > 0$$

Os parâmetros $\sigma, \lambda, \delta, \eta, \gamma$ são parâmetros de forma e o parâmetro α é de escala.

Função Quantílica

$$Q_Y(\tau) = \left\{ \frac{1}{\alpha} \left[\left(1 - \left(1 - \left(1 - (1-\tau)^{\frac{1}{\lambda}} \right)^{\frac{1}{\eta}} \right)^{\frac{1}{\gamma}} \right)^{-\frac{1}{\sigma}} - 1 \right] \right\}^{-\frac{1}{\delta}}, \text{ onde } \quad \tau \in (0,1).$$

Função densidade de probabilidade

$$f_Y(y) = \frac{\alpha\sigma\lambda\delta\eta\gamma\left(1+\alpha y^{-\delta}\right)^{-\sigma-1}\left[1-\left(1+\alpha y^{-\delta}\right)^{-\sigma}\right]^{\gamma-1}}{y^{\delta+1}\left\{1-\left[1-\left(1-\left(1+\alpha y^{-\delta}\right)^{-\sigma}\right)^{\gamma}\right]^{\eta}\right\}^{1-\lambda}}$$

$$*[1-(1-(1+\alpha y^{-\delta})^{-\sigma})^{\gamma}]^{\eta-1}$$

Submodelos da EGEDD

Distribuição	α	λ	σ	δ	η	γ
EGDD	α	1	σ	δ	η	γ
DD	α	1	σ	δ	1	1
EGEBD	1	λ	σ	δ	η	γ
DB	1	1	σ	δ	1	1
EGBD	1	1	σ	δ	η	γ
EGEFD	α	λ	1	δ	η	γ
EGFD	α	1	1	δ	η	γ
FD	α	1	1	δ	1	1

Notamos que existes parâmetros melhores para fazer as reparametrizações, sem perder a generalidade da EGED como o δ.

Reparametrizações

$$\mu = \left\{ \frac{1}{\alpha} \left[\left(1 - \left(1 - \left(1 - (1 - \tau)^{\frac{1}{\lambda}} \right)^{\frac{1}{\eta}} \right)^{\frac{1}{\gamma}} \right)^{-\frac{1}{\sigma}} - 1 \right] \right\}^{-\frac{1}{\delta}}$$

Reparametrizações

$$\mu = \left\{ \frac{1}{\alpha} \left[\left(1 - \left(1 - \left(1 - (1-\tau)^{\frac{1}{\lambda}} \right)^{\frac{1}{\eta}} \right)^{\frac{1}{\gamma}} \right)^{-\frac{1}{\sigma}} - 1 \right] \right\}^{-\frac{1}{\delta}}$$

Repametrização por α

$$\alpha = \frac{1}{\mu^{-\delta}} \left\{ \frac{1}{\alpha} \left[\left(1 - \left(1 - \left(1 - 0,5^{\frac{1}{\lambda}} \right)^{\frac{1}{c}} \right)^{\frac{1}{d}} \right)^{-\frac{1}{\sigma}} - 1 \right] \right\}.$$

Reparametrizações

$$\mu = \left\{ \frac{1}{\alpha} \left[\left(1 - \left(1 - \left(1 - (1-\tau)^{\frac{1}{\lambda}} \right)^{\frac{1}{\eta}} \right)^{\frac{1}{\gamma}} \right)^{-\frac{1}{\sigma}} - 1 \right] \right\}^{-\frac{1}{\delta}}$$

Repametrização por α

$$\alpha = \frac{1}{\mu^{-\delta}} \left\{ \frac{1}{\alpha} \left[\left(1 - \left(1 - \left(1 - 0,5^{\frac{1}{\lambda}} \right)^{\frac{1}{c}} \right)^{\frac{1}{d}} \right)^{-\frac{1}{\sigma}} - 1 \right] \right\}.$$

Reparametrização por δ

$$\delta = -\frac{1}{\log(\mu)} \log \left\{ \frac{1}{\alpha} \left[\left(1 - \left(1 - \left(1 - (1-\tau)^{\frac{1}{\lambda}} \right)^{\frac{1}{\eta}} \right)^{\frac{1}{\gamma}} \right)^{-\frac{1}{\sigma}} - 1 \right] \right\}$$

Regressão Dagum

Incluindo a estrutura de regressão pelo quantil, por:

$$g(\mu_t) = x_t^\top \boldsymbol{\beta} = \sum_{j=1}^{k} x_{tj}\boldsymbol{\beta} = \eta_t, \quad t = 1, \ldots, n,$$

$$com \quad \boldsymbol{\beta} = (\beta_1, \ldots, \beta_k)^\top$$

Regressão Dagum

Incluindo a estrutura de regressão pelo quantil, por:

$$g(\mu_t) = x_t^\top \boldsymbol{\beta} = \sum_{j=1}^{k} x_{tj} \boldsymbol{\beta} = \eta_t, \quad t = 1, \ldots, n,$$

$$com \quad \boldsymbol{\beta} = (\beta_1, \ldots, \beta_k)^\top$$

Função de ligação

Necessita ser contínua e duas vezes diferenciável, logo a nossa função de ligação é $g(\mu_t) = \log(\mu_t)$, então temos:

$$\mu_t = \exp\left(x_t{}^\top \boldsymbol{\beta}\right) = \exp(\eta_t)$$

Assim, ficaremos com o vetor de parâmetros, sendo:

$$\boldsymbol{\theta} = (\alpha, \sigma, \lambda, \eta, \gamma, \boldsymbol{\beta}^\top)^\top$$

Em que μ_t é o quantil da observação y_t no tempo t.

Modelo DARMA(p,q)

Modelo geral para μ_t:

$$g(\mu_t) = x_t^\top \boldsymbol{\beta} + u_t$$

Sabendo que pela estrutura ARMA temos uma relação que inclui o componente u_t:

$$u_t = \frac{\phi(B)}{\theta(B)} \epsilon_t$$

Modelo DARMA(p,q)

Modelo geral para μ_t:

$$g(\mu_t) = x_t^\top \boldsymbol{\beta} + u_t$$

Sabendo que pela estrutura ARMA temos uma relação que inclui o componente u_t:

$$u_t = \frac{\phi(B)}{\theta(B)} \epsilon_t$$

$$g(\mu_t) = x_t^\top \boldsymbol{\beta} + \frac{\phi(B)}{\theta(B)} \epsilon_t$$

Onde:

$$\phi(Z) = -\sum_{i=0}^{p} \phi_i z^i, \quad \theta(Z) = -\sum_{j=0}^{q} \theta_i z^i$$

Desenvolvendo um pouco algebricamente, conseguimos:

$$\phi(B)(g(\mu_t) - x_t^\top \boldsymbol{\beta}) = \phi(B)\epsilon_t$$

$$\left(1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2, \ldots, \phi_p B^p\right)\left(g\left(\mu_t\right) - x_t^\top\right) = \phi\left(B\right)\epsilon_t$$

Desenvolvendo um pouco algebricamente, conseguimos:

$$\phi(B)(g(\mu_t) - x_t^\top \boldsymbol{\beta}) = \phi(B)\epsilon_t$$

$$\left(1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2, \ldots, \phi_p B^p\right)\left(g\left(\mu_t\right) - x_t^\top\right) = \phi\left(B\right)\epsilon_t$$

Até chegar no:

Modelo final ARMA:

$$g(\mu_t) = \sum_{p=1}^{n} \phi_p(g(\mu_t) - x_t^\top \boldsymbol{\beta}) + \phi(B)\epsilon_t + x_t^\top \beta$$

Estimação dos parâmetros

- A estimação dos parâmetros será realizada através de Estimadores de Máxima Verossimilhança (EMV) e a máxima L_q-verossimilhança (ML_qE), com o vetor de parâmetros:

$$\boldsymbol{\theta} = (\alpha, \sigma, \gamma, \eta, \lambda, \delta)$$

Estimação dos parâmetros

- A estimação dos parâmetros será realizada através de Estimadores de Máxima Verossimilhança (EMV) e a máxima L_q-verossimilhança (ML_qE), com o vetor de parâmetros:

$$\boldsymbol{\theta} = (\alpha, \sigma, \gamma, \eta, \lambda, \delta)$$

Função de log-verossimilhança:

$$\ell_t(\boldsymbol{\theta}, y_t) = \log(\alpha\delta\sigma\gamma\eta\lambda) - (\delta+1)\log(y_t) - (\sigma+1)\log(z_t) + (\gamma-1)\log\left(1 - z_t^{-\sigma}\right)$$

$$+(\eta-1)\log\left[1-\left(1-z_t^{-\sigma}\right)^{\gamma}\right] + (\lambda-1)\log\left\{1-\left[1-\left(1-z_t^{-\sigma}\right)^{\gamma}\right]^{\eta}\right\}$$

Estimação dos parâmetros

Estimador

- Para encontramos o EMV, só precisamos derivar $\ell_t(\boldsymbol{\theta}, y_t)$ e iguala-la a zero, no nosso caso teremos dificuldades algébrica, então usaremos métodos computacionais, como a derivada a baixo:

$$\frac{\partial l}{\partial \sigma} = \frac{n}{\sigma} - \sum_{i=0}^{n} log(z_i) + (\gamma - 1) \sum_{i=0}^{n} \frac{z_i^{-\sigma} log(z_i)}{1 - z_i^{-\sigma}}$$

$$-(\eta - 1) \sum_{i=0}^{n} \frac{\gamma z_i{}^{-\sigma}(1 - z_i^{-\sigma})^{\gamma-1} log(z_i)}{1 - (1 - z_i^{-\sigma})^{\gamma}}$$

Estimação dos parâmetros

Estimador

- Para encontramos o EMV, só precisamos derivar $\ell_t(\boldsymbol{\theta}, y_t)$ e iguala-la a zero, no nosso caso teremos dificuldades algébrica, então usaremos métodos computacionais, como a derivada a baixo:

$$\frac{\partial l}{\partial \sigma} = \frac{n}{\sigma} - \sum_{i=0}^{n} log(z_i) + (\gamma - 1) \sum_{i=0}^{n} \frac{{z_i}^{-\sigma} log(z_i)}{1 - {z_i}^{-\sigma}}$$

$$-(\eta - 1) \sum_{i=0}^{n} \frac{\gamma {z_i}^{-\sigma} (1 - {z_i}^{-\sigma})^{\gamma - 1} log(z_i)}{1 - (1 - {z_i}^{-\sigma})^{\gamma}}$$

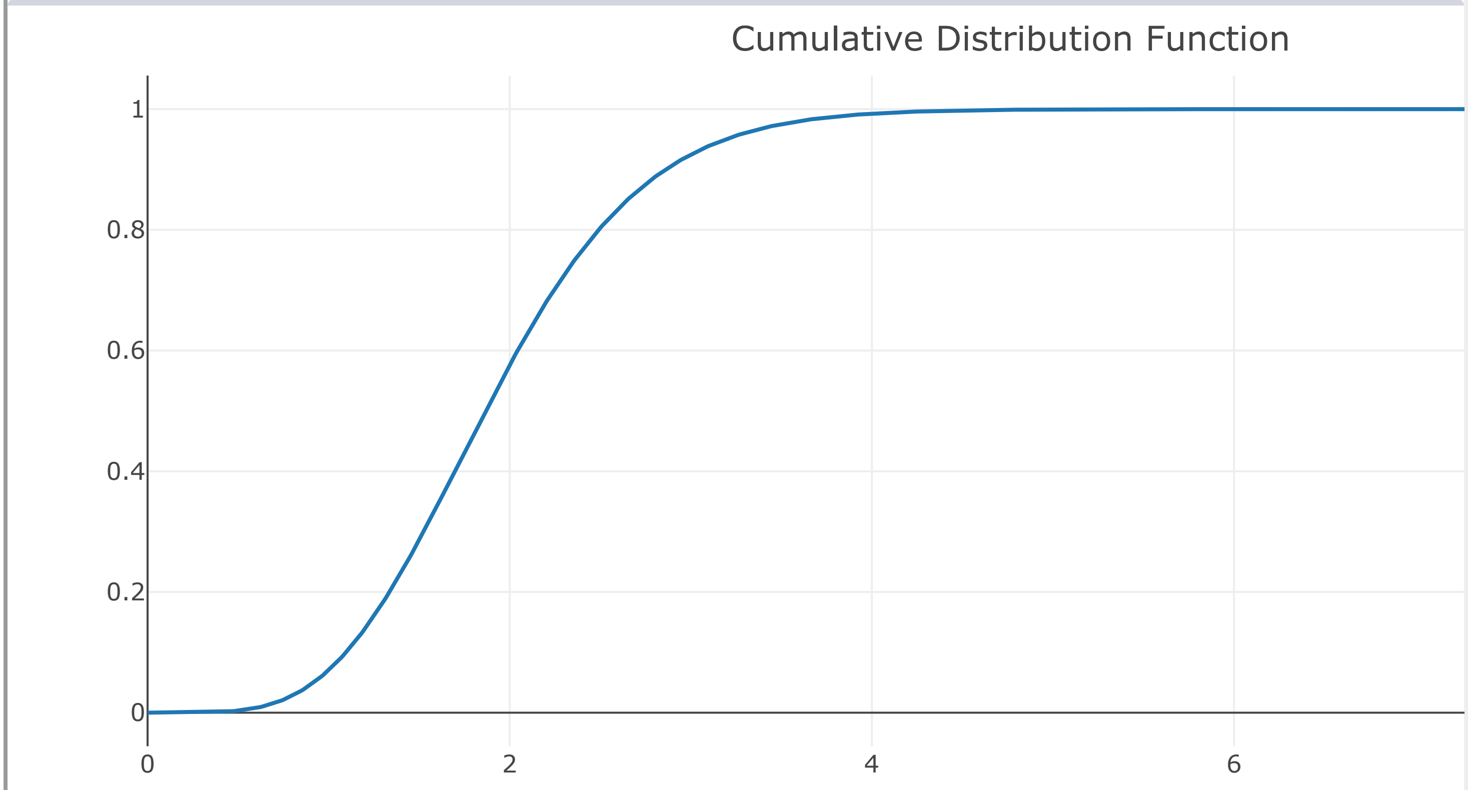
Reparametrização

- Para colocar a estrutura de regressão, temos que utilizar a reparametrizão, por exemplo para δ, assim o vetor de parâmetros fica:

$$\boldsymbol{\theta} = (\alpha, \sigma, \gamma, \eta, \lambda, \boldsymbol{\beta}^{\top}).$$

Outros Procedimentos Estatísticos:

- Construção de testes de hipótese para verificar distribuição dos dados, verificando se é para a EGEDD ou um submodleo;
- Utilização de métodos númericos para execução de simulações (Newton-Rapson, Gosolnp com os métodos CG, BFGS e L-BFGS-B);
- Utilização de Simulações de Monte Carlo para estimação de parâmetros e análise de diagnósticos dos modelos;
- Desenvolvimento de Intervalos de Confiança e testes de hipóteses baseados na distribuição assintótica dos EMV's;
- Utilização dos estimadores de Entropia Extensiva;
- Aplicação a dados reais.



Cumulative Distribution Function
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
0
2
4
6