



**MANUAL DO  
PROFESSOR**

**Manoel Paiva**

**MATEMÁTICA  
PAIVA**



# **Manoel Paiva**

Licenciado em Matemática pela Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras de Santo André.

Mestre em Educação Matemática pela Pontifícia Universidade Católica de São Paulo.

Professor em escolas particulares por 29 anos.

# **MATEMÁTICA PAIVA**

# **2**

**Ensino Médio**

**Componente curricular: MATEMÁTICA**

# **MANUAL DO PROFESSOR**

**3<sup>a</sup> edição**

São Paulo, 2015



**Coordenação editorial:** Fabio Martins de Leonardo, Mara Regina Garcia Gay  
**Edição de texto:** Débora Regina Yogui, Everton José Luciano, Marcos Gasparetto de Oliveira, Patrícia Nakata  
**Assistência editorial:** Adriana Soares Netto  
**Preparação do texto:** Renato da Rocha  
**Gerência de design e produção gráfica:** Sandra Botelho de Carvalho Homma  
**Coordenação de produção:** Everson de Paula  
**Supor te administrativo editorial:** Maria de Lourdes Rodrigues (coord.)  
**Coordenação de design e projetos visuais:** Marta Cerqueira Leite  
**Projeto gráfico:** Marta Cerqueira Leite, Otávio dos Santos, Rafael Mazzari  
**Capa:** Mariza de Souza Porto  
Foto: Micrografia de olho composto de inseto  
© Science Fiction/SuperStock/Glow Images  
**Coordenação de arte:** Wilson Gazzoni Agostinho  
**Edição de arte:** Denis Torquato  
**Editoração eletrônica:** Formato Comunicação Ltda.  
**Edição de infografia:** Luiz Iría, Priscilla Boffo, Otávio Cohen  
**Ilustrações de vinhetas:** Otávio dos Santos  
**Coordenação de revisão:** Adriana Bairrada  
**Revisão:** Alessandra Abramo Félix, Fernanda Marcelino, Rita de Cássia Sam, Vânia Bruno  
**Coordenação de pesquisa iconográfica:** Luciano Baneza Gabarron  
**Pesquisa iconográfica:** Carol Böck, Junior Rozzo  
**Coordenação de bureau:** Américo Jesus  
**Tratamento de imagens:** Denise Feitoza Maciel, Marina M. Buzzinaro, Rubens M. Rodrigues  
**Pré-impressão:** Alexandre Petreca, Everton L. de Oliveira, Fabio N. Precendo, Hélio P. de Souza Filho, Marcio H. Kamoto, Vitória Sousa  
**Coordenação de produção industrial:** Viviane Pavani  
**Impressão e acabamento:**

---

**Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)**  
(Câmara Brasileira do Livro, SP, Brasil)

Paiva, Manoel  
Matemática : Paiva / Manoel Paiva . —  
3. ed. — São Paulo : Moderna, 2015.  
  
Obra em 3 v.  
“Componente curricular : Matemática”.  
Bibliografia.  
  
1. Matemática (Ensino médio) I. Título.

15-01700

CDD-510.7

**Índices para catálogo sistemático:**  
1. Matemática : Ensino médio 510.7

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.  
Todos os direitos reservados

**EDITORA MODERNA LTDA.**  
Rua Padre Adelino, 758 - Belenzinho  
São Paulo - SP - Brasil - CEP 03303-904  
Vendas e Atendimento: Tel. (011) 2602-5510  
Fax (011) 2790-1501  
[www.moderna.com.br](http://www.moderna.com.br)  
2016  
Impresso no Brasil



# Conheça seu livro

Este livro foi elaborado para oferecer, de forma clara e objetiva, conteúdos matemáticos fundamentais para o Ensino Médio.

**5 Funções trigonométricas e resolução de triângulos**

**Discotecagem**

A música não pode parar

Lembre-se que é importante ter um bom senso musical ao trabalhar com trigonometria. Muitas das aplicações da trigonometria envolvem a resolução de triângulos. Mas, se você é DJ, por exemplo, precisa saber como aplicar a trigonometria para gerar efeitos sonoros. Aqui, vamos explorar como a trigonometria pode ser usada para gerar efeitos sonoros em um ambiente de DJ.

1. Ligue a sua máquina com 15 balaços a cada 10 segundos, e calcule o período de cada balaço.

2. Várias curvas entre cruzadas que mostram a variação de volume de cada balaço. Qual é a periodicidade de cada curva?

**Atividade**

1. Através de uma análise de áudio, calcule o valor de cada período de cada curva.

2. Várias curvas entre cruzadas que mostram a variação de volume de cada balaço. Qual é a periodicidade de cada curva?

A **abertura** estimula a reflexão sobre um problema contextualizado. Traz questões para avaliar os conhecimentos prévios ou que poderão ser resolvidas após o estudo do capítulo.

**PRÉ-REQUISITOS PARA O CAPÍTULO 5**

Base as atividades nos cálculos.

1. Copie a circunferência trigonométrica abaixo no caderno, completando cada por ordem numérica.

2. Observando a figura, calcule o valor de cada período das seguintes expressões:

3. Observando a figura, calcule o valor de cada período das seguintes expressões:

4. A figura mostra os triângulos ABC e ABD no círculo trigonométrico. Calcule a medida dos ângulos ABC e ABD.

5. Dado que  $\text{sen}(\theta) = \frac{\text{op}}{\text{hip}}$ , calcule o seno de  $\theta$ .

6. Dado que  $\text{sen}(\theta) = \frac{\text{op}}{\text{hip}}$ , qual é o valor de  $\theta$ ?

A seção **Pré-requisitos para o capítulo seguinte** propõe exercícios para rever conceitos importantes ao desenvolvimento do capítulo seguinte.

**Trabalhando em equipe**

Propõe uma equipe com alguns colegas e discutir as seções a seguir.

**ANÁLISE DA RESOLUÇÃO**

Compartilhe uma solução com alguns colegas e discutam as seções a seguir.

**Exercício**

Resolução

$\text{sen} 2x = \text{cos} x - 2 \cdot \text{sen} x \cdot \text{cos} x = \text{cos}^2 x - \text{sen}^2 x$

Dividindo por cos<sup>2</sup>x temos:

$2 \cdot \text{sen} x = 1 - \text{tg}^2 x$

Logo,  $x = \frac{\pi}{4}$  e  $\text{tg} x = \sqrt{3}$ , portanto,  $S = \frac{\sqrt{3}}{2}$ .

**MATEMÁTICA SEM FRONTEIRAS**

O teodolito

Você já deve ter visto em suas aulas de geografia de onde vêm os primeiros, célebres, barómetros, ou, até mesmo, termômetros? Acredita-se que o termômetro tenha sido inventado por Galileo Galilei, que é considerado o pai da ciência moderna. No entanto, o termômetro é resultado de um trabalho de muitos outros cientistas, entre os quais o francês Jean-Baptiste Joseph Fourier (1768-1830).

A seção **Trabalhando em equipe** propõe uma das principais competências exigidas pelo mundo moderno, que é saber trabalhar em equipe.

Dentro dessa seção temos dois itens: **Análise da resolução**, que possibilita a reflexão sobre erros comuns na resolução de exercícios, além de mostrar sua correção; e **Matemática sem fronteiras**, que traz textos interessantes, com situações que aplicam conceitos trabalhados no capítulo.

**Os Exercícios resolvidos** acompanham a teoria ajudando na compreensão dos conceitos.

**Os Exercícios propostos** têm o objetivo de verificar o aprendizado, propondo uma aplicação mais imediata dos conteúdos, além de algumas conexões com o cotidiano. A seção **Criando problemas** tem o objetivo de incentivar a elaboração de problemas.

**EXERCÍCIO RESOLVIDO**

Studo que  $\text{tg}(\theta) = \frac{\text{op}}{\text{adj}}$  e que  $30^\circ < \theta < 60^\circ$ .  
Resolução

Seja  $\theta = 30^\circ$  e  $\text{tg} \theta = \frac{\text{op}}{\text{adj}}$ .  
 $\text{tg} 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$  e  $\text{tg} \theta = \frac{\sqrt{3}}{3}$ .  
 $\text{tg} \theta = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \text{tg} \theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$ .  
Portanto, o valor de  $\theta$  é menor que  $30^\circ$ .

**EXERCÍCIOS PROPOSTOS**

1. Dado que  $\text{tg}(\theta) = \frac{\text{op}}{\text{adj}}$ , calcule o valor de  $\theta$ .

2. Para que a função  $y = \text{tg}(x)$  seja contínua em  $x = 0$ , é necessário que  $\lim_{x \rightarrow 0} \text{tg}(x) = \text{tg}(0)$ . Calcule  $\lim_{x \rightarrow 0} \text{tg}(x)$ .

3. Dado que  $\text{tg}(\theta) = \frac{\text{op}}{\text{adj}}$ , calcule o valor de  $\theta$ .

4. Dado que  $\text{tg}(\theta) = \frac{\text{op}}{\text{adj}}$ , qual é o valor de  $\theta$ ?

**criando problemas**

Inspirado no exercício proposto 5, elaborare e resolva um problema sobre a relação  $\text{tg} \theta = \frac{\text{op}}{\text{adj}}$  que envolve uma situação do cotidiano.

**Os Exercícios complementares** oferecem questões de aprofundamento dos assuntos abordados.

**EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES**

1. A cobertura de um prato é parte de um círculo com raio de 12 cm. Se a área da parte de círculo que é coberta é de 108 cm<sup>2</sup>, calcule a medida do ângulo central desse círculo.

2. Um círculo de raio 10 m é dividido em 120 arcos iguais. Calcule a medida de cada arco.

3. Um círculo de raio 10 m é dividido em 120 arcos iguais. Calcule a medida de cada arco.

4. Um círculo de raio 10 m é dividido em 120 arcos iguais. Calcule a medida de cada arco.

5. Um círculo de raio 10 m é dividido em 120 arcos iguais. Calcule a medida de cada arco.

6. Um círculo de raio 10 m é dividido em 120 arcos iguais. Calcule a medida de cada arco.

7. Um círculo de raio 10 m é dividido em 120 arcos iguais. Calcule a medida de cada arco.

8. Um círculo de raio 10 m é dividido em 120 arcos iguais. Calcule a medida de cada arco.

9. Um círculo de raio 10 m é dividido em 120 arcos iguais. Calcule a medida de cada arco.

10. Um círculo de raio 10 m é dividido em 120 arcos iguais. Calcule a medida de cada arco.

11. Um círculo de raio 10 m é dividido em 120 arcos iguais. Calcule a medida de cada arco.

12. Um círculo de raio 10 m é dividido em 120 arcos iguais. Calcule a medida de cada arco.

13. Um círculo de raio 10 m é dividido em 120 arcos iguais. Calcule a medida de cada arco.

14. Um círculo de raio 10 m é dividido em 120 arcos iguais. Calcule a medida de cada arco.

15. Um círculo de raio 10 m é dividido em 120 arcos iguais. Calcule a medida de cada arco.

16. Um círculo de raio 10 m é dividido em 120 arcos iguais. Calcule a medida de cada arco.

17. Um círculo de raio 10 m é dividido em 120 arcos iguais. Calcule a medida de cada arco.

18. Um círculo de raio 10 m é dividido em 120 arcos iguais. Calcule a medida de cada arco.

19. Um círculo de raio 10 m é dividido em 120 arcos iguais. Calcule a medida de cada arco.

20. Um círculo de raio 10 m é dividido em 120 arcos iguais. Calcule a medida de cada arco.

21. Um círculo de raio 10 m é dividido em 120 arcos iguais. Calcule a medida de cada arco.

22. Um círculo de raio 10 m é dividido em 120 arcos iguais. Calcule a medida de cada arco.

23. Um círculo de raio 10 m é dividido em 120 arcos iguais. Calcule a medida de cada arco.

24. Um círculo de raio 10 m é dividido em 120 arcos iguais. Calcule a medida de cada arco.

25. Um círculo de raio 10 m é dividido em 120 arcos iguais. Calcule a medida de cada arco.

26. Um círculo de raio 10 m é dividido em 120 arcos iguais. Calcule a medida de cada arco.

27. Um círculo de raio 10 m é dividido em 120 arcos iguais. Calcule a medida de cada arco.

28. Um círculo de raio 10 m é dividido em 120 arcos iguais. Calcule a medida de cada arco.

29. Um círculo de raio 10 m é dividido em 120 arcos iguais. Calcule a medida de cada arco.

30. Um círculo de raio 10 m é dividido em 120 arcos iguais. Calcule a medida de cada arco.

31. Um círculo de raio 10 m é dividido em 120 arcos iguais. Calcule a medida de cada arco.

32. Um círculo de raio 10 m é dividido em 120 arcos iguais. Calcule a medida de cada arco.

33. Um círculo de raio 10 m é dividido em 120 arcos iguais. Calcule a medida de cada arco.

34. Um círculo de raio 10 m é dividido em 120 arcos iguais. Calcule a medida de cada arco.

35. Um círculo de raio 10 m é dividido em 120 arcos iguais. Calcule a medida de cada arco.

36. Um círculo de raio 10 m é dividido em 120 arcos iguais. Calcule a medida de cada arco.

37. Um círculo de raio 10 m é dividido em 120 arcos iguais. Calcule a medida de cada arco.

38. Um círculo de raio 10 m é dividido em 120 arcos iguais. Calcule a medida de cada arco.

39. Um círculo de raio 10 m é dividido em 120 arcos iguais. Calcule a medida de cada arco.

40. Um círculo de raio 10 m é dividido em 120 arcos iguais. Calcule a medida de cada arco.

41. Um círculo de raio 10 m é dividido em 120 arcos iguais. Calcule a medida de cada arco.

42. Um círculo de raio 10 m é dividido em 120 arcos iguais. Calcule a medida de cada arco.

43. Um círculo de raio 10 m é dividido em 120 arcos iguais. Calcule a medida de cada arco.

44. Um círculo de raio 10 m é dividido em 120 arcos iguais. Calcule a medida de cada arco.

45. Um círculo de raio 10 m é dividido em 120 arcos iguais. Calcule a medida de cada arco.

46. Um círculo de raio 10 m é dividido em 120 arcos iguais. Calcule a medida de cada arco.

47. Um círculo de raio 10 m é dividido em 120 arcos iguais. Calcule a medida de cada arco.

48. Um círculo de raio 10 m é dividido em 120 arcos iguais. Calcule a medida de cada arco.

49. Um círculo de raio 10 m é dividido em 120 arcos iguais. Calcule a medida de cada arco.

50. Um círculo de raio 10 m é dividido em 120 arcos iguais. Calcule a medida de cada arco.

51. Um círculo de raio 10 m é dividido em 120 arcos iguais. Calcule a medida de cada arco.

52. Um círculo de raio 10 m é dividido em 120 arcos iguais. Calcule a medida de cada arco.

53. Um círculo de raio 10 m é dividido em 120 arcos iguais. Calcule a medida de cada arco.

54. Um círculo de raio 10 m é dividido em 120 arcos iguais. Calcule a medida de cada arco.

55. Um círculo de raio 10 m é dividido em 120 arcos iguais. Calcule a medida de cada arco.

56. Um círculo de raio 10 m é dividido em 120 arcos iguais. Calcule a medida de cada arco.

57. Um círculo de raio 10 m é dividido em 120 arcos iguais. Calcule a medida de cada arco.

58. Um círculo de raio 10 m é dividido em 120 arcos iguais. Calcule a medida de cada arco.

59. Um círculo de raio 10 m é dividido em 120 arcos iguais. Calcule a medida de cada arco.

60. Um círculo de raio 10 m é dividido em 120 arcos iguais. Calcule a medida de cada arco.

61. Um círculo de raio 10 m é dividido em 120 arcos iguais. Calcule a medida de cada arco.

62. Um círculo de raio 10 m é dividido em 120 arcos iguais. Calcule a medida de cada arco.

63. Um círculo de raio 10 m é dividido em 120 arcos iguais. Calcule a medida de cada arco.

64. Um círculo de raio 10 m é dividido em 120 arcos iguais. Calcule a medida de cada arco.

65. Um círculo de raio 10 m é dividido em 120 arcos iguais. Calcule a medida de cada arco.

66. Um círculo de raio 10 m é dividido em 120 arcos iguais. Calcule a medida de cada arco.

67. Um círculo de raio 10 m é dividido em 120 arcos iguais. Calcule a medida de cada arco.

68. Um círculo de raio 10 m é dividido em 120 arcos iguais. Calcule a medida de cada arco.

69. Um círculo de raio 10 m é dividido em 120 arcos iguais. Calcule a medida de cada arco.

70. Um círculo de raio 10 m é dividido em 120 arcos iguais. Calcule a medida de cada arco.

71. Um círculo de raio 10 m é dividido em 120 arcos iguais. Calcule a medida de cada arco.

72. Um círculo de raio 10 m é dividido em 120 arcos iguais. Calcule a medida de cada arco.

73. Um círculo de raio 10 m é dividido em 120 arcos iguais. Calcule a medida de cada arco.

74. Um círculo de raio 10 m é dividido em 120 arcos iguais. Calcule a medida de cada arco.

75. Um círculo de raio 10 m é dividido em 120 arcos iguais. Calcule a medida de cada arco.

76. Um círculo de raio 10 m é dividido em 120 arcos iguais. Calcule a medida de cada arco.

77. Um círculo de raio 10 m é dividido em 120 arcos iguais. Calcule a medida de cada arco.

78. Um círculo de raio 10 m é dividido em 120 arcos iguais. Calcule a medida de cada arco.

79. Um círculo de raio 10 m é dividido em 120 arcos iguais. Calcule a medida de cada arco.

80. Um círculo de raio 10 m é dividido em 120 arcos iguais. Calcule a medida de cada arco.

81. Um círculo de raio 10 m é dividido em 120 arcos iguais. Calcule a medida de cada arco.

82. Um círculo de raio 10 m é dividido em 120 arcos iguais. Calcule a medida de cada arco.

83. Um círculo de raio 10 m é dividido em 120 arcos iguais. Calcule a medida de cada arco.

84. Um círculo de raio 10 m é dividido em 120 arcos iguais. Calcule a medida de cada arco.

85. Um círculo de raio 10 m é dividido em 120 arcos iguais. Calcule a medida de cada arco.

86. Um círculo de raio 10 m é dividido em 120 arcos iguais. Calcule a medida de cada arco.

87. Um círculo de raio 10 m é dividido em 120 arcos iguais. Calcule a medida de cada arco.

88. Um círculo de raio 10 m é dividido em 120 arcos iguais. Calcule a medida de cada arco.

89. Um círculo de raio 10 m é dividido em 120 arcos iguais. Calcule a medida de cada arco.

90. Um círculo de raio 10 m é dividido em 120 arcos iguais. Calcule a medida de cada arco.

91. Um círculo de raio 10 m é dividido em 120 arcos iguais. Calcule a medida de cada arco.

92. Um círculo de raio 10 m é dividido em 120 arcos iguais. Calcule a medida de cada arco.

93. Um círculo de raio 10 m é dividido em 120 arcos iguais. Calcule a medida de cada arco.

94. Um círculo de raio 10 m é dividido em 120 arcos iguais. Calcule a medida de cada arco.

95. Um círculo de raio 10 m é dividido em 120 arcos iguais. Calcule a medida de cada arco.

96. Um círculo de raio 10 m é dividido em 120 arcos iguais. Calcule a medida de cada arco.

97. Um círculo de raio 10 m é dividido em 120 arcos iguais. Calcule a medida de cada arco.

98. Um círculo de raio 10 m é dividido em 120 arcos iguais. Calcule a medida de cada arco.

99. Um círculo de raio 10 m é dividido em 120 arcos iguais. Calcule a medida de cada arco.

100. Um círculo de raio 10 m é dividido em 120 arcos iguais. Calcule a medida de cada arco.

101. Um círculo de raio 10 m é dividido em 120 arcos iguais. Calcule a medida de cada arco.

102. Um círculo de raio 10 m é dividido em 120 arcos iguais. Calcule a medida de cada arco.

103. Um círculo de raio 10 m é dividido em 120 arcos iguais. Calcule a medida de cada arco.

104. Um círculo de raio 10 m é dividido em 120 arcos iguais. Calcule a medida de cada arco.

105. Um círculo de raio 10 m é dividido em 120 arcos iguais. Calcule a medida de cada arco.

106. Um círculo de raio 10 m é dividido em 120 arcos iguais. Calcule a medida de cada arco.

107. Um círculo de raio 10 m é dividido em 120 arcos iguais. Calcule a medida de cada arco.

108. Um círculo de raio 10 m é dividido em 120 arcos iguais. Calcule a medida de cada arco.

109. Um círculo de raio 10 m é dividido em 120 arcos iguais. Calcule a medida de cada arco.

110. Um círculo de raio 10 m é dividido em 120 arcos iguais. Calcule a medida de cada arco.

111. Um círculo de raio 10 m é dividido em 120 arcos iguais. Calcule a medida de cada arco.

112. Um círculo de raio 10 m é dividido em 120 arcos iguais. Calcule a medida de cada arco.

113. Um círculo de raio 10 m é dividido em 120 arcos iguais. Calcule a medida de cada arco.

114. Um círculo de raio 10 m é dividido em 120 arcos iguais. Calcule a medida de cada arco.

115. Um círculo de raio 10 m é dividido em 120 arcos iguais. Calcule a medida de cada arco.

116. Um círculo de raio 10 m é dividido em 120 arcos iguais. Calcule a medida de cada arco.

117. Um círculo de raio 10 m é dividido em 120 arcos iguais. Calcule a medida de cada arco.

118. Um círculo de raio 10 m é dividido em 120 arcos iguais. Calcule a medida de cada arco.

119. Um círculo de raio 10 m é dividido em 120 arcos iguais. Calcule a medida de cada arco.

120. Um círculo de raio 10 m é dividido em 120 arcos iguais. Calcule a medida de cada arco.

121. Um círculo de raio 10 m é dividido em 120 arcos iguais. Calcule a medida de cada arco.

122. Um círculo de raio 10 m é dividido em 120 arcos iguais. Calcule a medida de cada arco.

123. Um círculo de raio 10 m é dividido em 120 arcos iguais. Calcule a medida de cada arco.

124. Um círculo de raio 10 m é dividido em 120 arcos iguais. Calcule a medida de cada arco.

125. Um círculo de raio 10 m é dividido em 120 arcos iguais. Calcule a medida de cada arco.

126. Um círculo de raio 10 m é dividido em 120 arcos iguais. Calcule a medida de cada arco.

127. Um círculo de raio 10 m é dividido em 120 arcos iguais. Calcule a medida de cada arco.

128. Um círculo de raio 10 m é dividido em 120 arcos iguais. Calcule a medida de cada arco.

129. Um círculo de raio 10 m é dividido em 120 arcos iguais. Calcule a medida de cada arco.

130. Um círculo de raio 10 m é dividido em 120 arcos iguais. Calcule a medida de cada arco.

131. Um círculo de raio 10 m é dividido em 120 arcos iguais. Calcule a medida de cada arco.

132. Um círculo de raio 10 m é dividido em 120 arcos iguais. Calcule a medida de cada arco.

133. Um círculo de raio 10 m é dividido em 120 arcos iguais. Calcule a medida de cada arco.

134. Um círculo de raio 10 m é dividido em 120 arcos iguais. Calcule a medida de cada arco.

135. Um círculo de raio 10 m é dividido em 120 arcos iguais. Calcule a medida de cada arco.

136. Um círculo de raio 10 m é dividido em 120 arcos iguais. Calcule a medida de cada arco.

137. Um círculo de raio 10 m é dividido em 120 arcos iguais. Calcule a medida de cada arco.

138. Um círculo de raio 10 m é dividido em 120 arcos iguais. Calcule a medida de cada arco.

139. Um círculo de raio 10 m é dividido em 120 arcos iguais. Calcule a medida de cada arco.

140. Um círculo de raio 10 m é dividido em 120 arcos iguais. Calcule a medida de cada arco.

141. Um círculo de raio 10 m é dividido em 120 arcos iguais. Calcule a medida de cada arco.

142. Um círculo de raio 10 m é dividido em 120 arcos iguais. Calcule a medida de cada arco.

143. Um círculo de raio 10 m é dividido em 120 arcos iguais. Calcule a medida de cada arco.

144. Um círculo de raio 10 m é dividido em 120 arcos iguais. Calcule a medida de cada arco.

145. Um círculo de raio 10 m é dividido em 120 arcos iguais. Calcule a medida de cada arco.

146. Um círculo de raio 10 m é dividido em 120 arcos iguais. Calcule a medida de cada arco.

147. Um círculo de raio 10 m é dividido em 120 arcos iguais. Calcule a medida de cada arco.

148. Um círculo de raio 10 m é dividido em 120 arcos iguais. Calcule a medida de cada arco.

149. Um círculo de raio 10 m é dividido em 120 arcos iguais. Calcule a medida de cada arco.

150. Um círculo de raio 10 m é dividido em 120 arcos iguais. Calcule a medida de cada arco.

151. Um círculo de raio 10 m é dividido em 120 arcos iguais. Calcule a medida de cada arco.

152. Um círculo de raio 10 m é dividido em 120 arcos iguais. Calcule a medida de cada arco.

153. Um círculo de raio 10 m é dividido em 120 arcos iguais. Calcule a medida de cada arco.

154. Um círculo de raio 10 m é dividido em 120 arcos iguais. Calcule a medida de cada arco.

155. Um círculo de raio 10 m é dividido em 120 arcos iguais. Calcule a medida de cada arco.

156. Um círculo de raio 10 m é dividido em 120 arcos iguais. Calcule a medida de cada arco.

157. Um círculo de raio 10 m é dividido em 120 arcos iguais. Calcule a medida de cada arco.

158. Um círculo de raio 10 m é dividido em 120 arcos iguais. Calcule a medida de cada arco.

159. Um círculo de raio 10 m é dividido em 120 arcos iguais. Calcule a medida de cada arco.

160. Um círculo de raio 10 m é dividido em 120 arcos iguais. Calcule a medida de cada arco.

161. Um círculo de raio 10 m é dividido em 120 arcos iguais. Calcule a medida de cada arco.

162. Um círculo de raio 10 m é dividido em 120 arcos iguais. Calcule a medida de cada arco.

163. Um círculo de raio 10 m é dividido em 120 arcos iguais. Calcule a medida de cada arco.

164. Um círculo de raio 10 m é dividido em 120 arcos iguais. Calcule a medida de cada arco.

165. Um círculo de raio 10 m é dividido em 120 arcos iguais. Calcule a medida de cada arco.

166. Um círculo de raio 10 m é dividido em 120 arcos iguais. Calcule a medida de cada arco.

167. Um círculo de raio 10 m é dividido em 120 arcos iguais. Calcule a medida de cada arco.

168. Um círculo de raio 10 m é dividido em 120 arcos iguais. Calcule a medida de cada arco.

169. Um círculo de raio 10 m é dividido em 120 arcos iguais. Calcule a medida de cada arco.

170. Um círculo de raio 10 m é dividido em 120 arcos iguais. Calcule a medida de cada arco.

171. Um círculo de raio 10 m é dividido em 120 arcos iguais. Calcule a medida de cada arco.

172. Um círculo de raio 10 m é dividido em 120 arcos iguais. Calcule a medida de cada arco.

173. Um círculo de raio 10 m é dividido em 120 arcos iguais. Calcule a medida de cada arco.

174. Um círculo de raio 10 m é dividido em 120 arcos iguais. Calcule a medida de cada arco.

175. Um círculo de raio 10 m é dividido em 120 arcos iguais. Calcule a medida de cada arco.

176. Um círculo de raio 10 m é dividido em 120 arcos iguais. Calcule a medida de cada arco.

177. Um círculo de raio 10 m é dividido em 120 arcos iguais. Calcule a medida de cada arco.

178. Um círculo de raio 10 m é dividido em 120 arcos iguais. Calcule a medida de cada arco.

179. Um círculo de raio 10 m é dividido em 120 arcos iguais. Calcule a medida de cada arco.

180. Um círculo de raio 10 m é dividido em 120 arcos iguais. Calcule a medida de cada arco.

181. Um círculo de raio 10 m é dividido em 120 arcos iguais. Calcule a medida de cada arco.

182. Um círculo de raio 10 m é dividido em 120 arcos iguais. Calcule a medida de cada arco.

183. Um círculo de raio 10 m é dividido em 120 arcos iguais. Calcule a medida de cada arco.

184. Um círculo de raio 10 m é dividido em 120 arcos iguais. Calcule a medida de cada arco.

185. Um círculo de raio 10 m é dividido em 120 arcos iguais. Calcule a medida de cada arco.

186. Um círculo de raio 10 m é dividido em 120 arcos iguais. Calcule a medida de cada arco.

187. Um círculo de raio 10 m é dividido em 120 arcos iguais. Calcule a medida de cada arco.

188. Um círculo de raio 10 m é dividido em 120 arcos iguais. Calcule a medida de cada arco.

189. Um círculo de raio 10 m é dividido em 120 arcos iguais. Calcule a medida de cada arco.

190. Um círculo de raio 10 m é dividido em 120 arcos iguais. Calcule a medida de cada arco.

191. Um círculo de raio 10 m é dividido em 120 arcos iguais. Calcule a medida de cada arco.

192. Um círculo de raio 10 m é dividido em 120 arcos iguais. Calcule a medida de cada arco.

193. Um círculo de raio 10 m é dividido em 120 arcos iguais. Calcule a medida de cada arco.

194. Um círculo de raio 10 m é dividido em 120 arcos iguais. Calcule a medida de cada arco.

195. Um círculo de raio 10 m é dividido em 120 arcos iguais. Calcule a medida de cada arco.

196. Um círculo de raio 10 m é dividido em 120 arcos iguais. Calcule a medida de cada arco.

197. Um círculo de raio 10 m é dividido em 120 arcos iguais. Calcule a medida de cada arco.

198. Um círculo de raio 10 m é dividido em 120 arcos iguais. Calcule a medida de cada arco.

199. Um círculo de raio 10 m é dividido em 120 arcos iguais. Calcule a medida de cada arco.

200. Um círculo de raio 10 m é dividido em 120 arcos iguais. Calcule a medida de cada arco.

201. Um círculo de raio 10 m é dividido em 120 arcos iguais. Calcule a medida de cada arco.

202. Um círculo de raio 10 m é dividido em 120 arcos iguais. Calcule a medida de cada arco.

203. Um círculo de raio 10 m é dividido em 120 arcos iguais. Calcule a medida de cada arco.

204. Um círculo de raio 10 m é dividido em 120 arcos iguais. Calcule a medida de cada arco.

205. Um círculo de raio 10 m é dividido em 120 arcos iguais. Calcule a medida de cada arco.

206. Um círculo de raio 10 m é dividido em 120 arcos iguais. Calcule a medida de cada arco.

207. Um círculo de raio 10 m é dividido em 120 arcos iguais. Calcule a medida de cada arco.

208. Um círculo de raio 10 m é dividido em 120 arcos iguais. Calcule a medida de cada arco.

209. Um círculo de raio 10 m é dividido em 120 arcos iguais. Calcule a medida de cada arco.

210. Um círculo de raio 10 m é dividido em 120 arcos iguais. Calcule a medida de cada arco.

211. Um círculo de raio 10 m é dividido em 120 arcos iguais. Calcule a medida de cada arco.

212. Um círculo de raio 10 m é dividido em 120 arcos iguais. Calcule a medida de cada arco.

213. Um círculo de raio 10 m é dividido em 120 arcos iguais. Calcule a medida de cada arco.

214. Um círculo de raio 10 m é dividido em 120 arcos iguais. Calcule a medida de cada arco.

215. Um círculo de raio 10 m é dividido em 120 arcos iguais. Calcule a medida de cada arco.

216. Um círculo de raio 10 m é dividido em 120 arcos iguais. Calcule a medida de cada arco.

217. Um círculo de raio 10 m é dividido em 120 arcos iguais. Calcule a medida de cada arco.

218. Um círculo de raio 10 m é dividido em 120 arcos iguais. Calcule a medida de cada arco.



# Sumário

<b>Capítulo 1</b>	<b>Sequências</b>	<b>6</b>	<b>Capítulo 4</b>	<b>Outras razões trigonométricas e adição de arcos</b>	<b>81</b>
1	O conceito de sequência .....	7	1	Tangente de um arco trigonométrico .....	82
2	Lei de formação de uma sequência .....	9	2	Redução ao 1º quadrante .....	86
3	Progressão aritmética .....	12	3	Equações trigonométricas .....	88
4	Progressão geométrica .....	22	4	Secante, cossecante e cotangente .....	90
<b>■ Exercícios complementares</b>	.....	33	<b>5</b>	Seno, cosseno e tangente da soma de arcos .....	91
<b>■ Pré-requisitos para o Capítulo 2</b>	.....	35	<b>6</b>	Seno, cosseno e tangente do arco duplo .....	95
<b>■ Trabalhando em equipe</b>	.....	37	<b>■ Exercícios complementares</b>	.....	98
Análise da resolução .....	.....	37	<b>■ Pré-requisitos para o Capítulo 5</b>	.....	101
Matemática sem fronteiras .....	.....	38	<b>■ Trabalhando em equipe</b>	.....	102
 <b>Trigonometria no triângulo retângulo</b>					
<b>Capítulo 2</b>	<b>39</b>	<b>■ Análise da resolução</b>	.....	102	
1	A origem da Trigonometria .....	40	Matemática sem fronteiras .....	.....	102
2	Razões trigonométricas no triângulo retângulo .....	40	<b>■ Ciência e tecnologia</b>	.....	
<b>■ Exercícios complementares</b>	.....	50			
<b>■ Pré-requisitos para o Capítulo 3</b>	.....	51			
<b>■ Trabalhando em equipe</b>	.....	52			
Análise da resolução .....	.....	52			
Matemática sem fronteiras .....	.....	53			
 <b>Circunferência trigonométrica: seno e cosseno</b>					
<b>Capítulo 3</b>	<b>54</b>				
1	O radiano, unidade de medida de arco e de ângulo .....	55			
2	Circunferência trigonométrica .....	58			
3	Simetrias .....	63			
4	Seno e cosseno de um arco trigonométrico .....	65			
5	Redução ao 1º quadrante .....	68			
6	Relação fundamental da Trigonometria .....	71			
7	Equações trigonométricas .....	73			
<b>■ Exercícios complementares</b>	.....	77			
<b>■ Pré-requisitos para o Capítulo 4</b>	.....	79			
<b>■ Trabalhando em equipe</b>	.....	79			
Análise da resolução .....	.....	79			
Matemática sem fronteiras .....	.....	80			
<b>Capítulo 4</b>	<b>Outras razões trigonométricas e adição de arcos</b>	<b>81</b>	<b>■ Análise da resolução</b>	.....	102
1	Tangente de um arco trigonométrico .....	82	Matemática sem fronteiras .....	.....	102
2	Redução ao 1º quadrante .....	86	Ciência e tecnologia .....	.....	102
3	Equações trigonométricas .....	88			
4	Secante, cossecante e cotangente .....	90			
5	Seno, cosseno e tangente da soma de arcos .....	91			
6	Seno, cosseno e tangente do arco duplo .....	95			
<b>■ Exercícios complementares</b>	.....	98			
<b>■ Pré-requisitos para o Capítulo 5</b>	.....	101			
<b>■ Trabalhando em equipe</b>	.....	102			
Análise da resolução .....	.....	102			
Matemática sem fronteiras .....	.....	102			
<b>Capítulo 5</b>	<b>Funções trigonométricas e resolução de triângulos</b>	<b>104</b>			
1	Funções trigonométricas .....	106			
2	Gráfico da função $f(x) = \text{sen } x$ .....	107			
3	Gráfico da função $g(x) = \cos x$ .....	110			
4	Movimentos periódicos .....	113			
5	Resolução de triângulos .....	117			
6	Cálculo da área de um triângulo .....	122			
<b>■ Exercícios complementares</b>	.....	124			
<b>■ Pré-requisitos para o Capítulo 6</b>	.....	125			
<b>■ Trabalhando em equipe</b>	.....	126			
Análise da resolução .....	.....	126			
Matemática sem fronteiras .....	.....	126			
Ciência e tecnologia .....	.....	127			
<b>Capítulo 6</b>	<b>Os princípios da Análise combinatória</b>	<b>128</b>			
1	O que é Análise combinatória .....	130			
2	O princípio fundamental da contagem .....	130			
3	O princípio aditivo da contagem .....	134			
4	Fatorial .....	137			
<b>■ Exercícios complementares</b>	.....	140			
<b>■ Pré-requisitos para o Capítulo 7</b>	.....	142			
<b>■ Trabalhando em equipe</b>	.....	143			
Análise da resolução .....	.....	143			
Matemática sem fronteiras .....	.....	144			
Cibercultura .....	.....	145			

<b>Agrupamentos e métodos</b>	
<b>Capítulo 7</b>	<b>146</b>
1 Classificação dos agrupamentos .....	147
2 Arranjos .....	148
3 Permutações .....	151
4 Combinação simples .....	158
■ Exercícios complementares .....	163
■ Pré-requisitos para o Capítulo 8 .....	165
■ Trabalhando em equipe .....	166
Análise da resolução .....	166
Matemática sem fronteiras .....	167
<b>Geometria de posição e poliedros</b>	
<b>Capítulo 8</b>	<b>168</b>
1 O que há além do plano? .....	169
2 O universo da Geometria .....	169
3 Posições relativas entre duas retas .....	171
4 Determinação de um plano .....	172
5 Posições relativas entre reta e plano .....	174
6 Posições relativas entre dois planos .....	176
7 Perpendicularidade .....	178
8 Projeção ortogonal sobre um plano .....	183
9 Ângulos no espaço .....	185
10 Poliedros .....	188
11 Poliedros regulares .....	192
■ Exercícios complementares .....	194
■ Pré-requisitos para o Capítulo 9 .....	197
<b>Indicação de leituras complementares .....</b>	<b>259</b>
<b>Apêndice .....</b>	<b>260</b>
<b>Respostas .....</b>	<b>270</b>
<b>Lista de siglas .....</b>	<b>286</b>
<b>Bibliografia .....</b>	<b>287</b>
<b>■ Trabalhando em equipe .....</b>	<b>197</b>
Análise da resolução .....	197
Matemática sem fronteiras .....	198
<b>Capítulo 9 Prisma e pirâmides</b>	<b>199</b>
1 Prisma .....	200
2 Paralelepípedo reto-retângulo .....	203
3 Cubo .....	208
4 Volume de um prisma .....	210
5 Pirâmide .....	214
■ Exercícios complementares .....	223
■ Pré-requisitos para o Capítulo 10 .....	227
■ Trabalhando em equipe .....	228
Análise da resolução .....	228
Matemática sem fronteiras .....	229
<b>Capítulo 10 Corpos redondos</b>	<b>230</b>
1 Introdução .....	232
2 Cilindro .....	232
3 Cone circular .....	238
4 Esfera .....	246
■ Exercícios complementares .....	255
■ Trabalhando em equipe .....	257
Análise da resolução .....	257
Matemática sem fronteiras .....	258

# Os princípios da Análise combinatória



## As piores senhas do mundo

Para acessar tudo o que se tem de importante na internet – seja o e-mail, seja o perfil no site de relacionamento, seja a conta do banco – é preciso ter uma senha secreta. Mas algumas senhas não são tão secretas assim.

### As 20 senhas mais fáceis

No fim de 2009, um hacker aproveitou um defeito em um site comercial e colocou na internet as senhas de 32 milhões de clientes da empresa, mostrando que as mesmas sequências apareciam milhares de vezes.

# PASSWORD

DANIEL

LOVELY

# PRINCESS

1234567

Isso é típico de quem tem preguiça: ter como senha a palavra "senha".

JESSICA

# 123456789

# 123456789

# 123456789

# 123456789

# 123456789

ASHLEY

MICHAEL

# 12345

QWERTY

MONKEY

ABC123

São as primeiras teclas do teclado. Usar caracteres de teclas vizinhas é uma estratégia que não engana ninguém.

Essa senha lidera a lista das mais fracas. Só no site invadido pelo hacker, era usada por mais de 290 mil pessoas.

# Iloveyou

Note que nenhuma dessas senhas contém caracteres especiais, como &?\*%.

## Além da teoria

Ver sugestões para o desenvolvimento do infográfico no *Suplemento com orientações para o professor*.

1. Você considera suas senhas seguras? **Resposta pessoal.**
2. De acordo com o infográfico, qual é o número aproximado de usuários que utilizam a senha 123456789?  $\approx 75.000$
3. Quantas senhas de três caracteres podemos formar com os caracteres %, \$ e @, sem repetição? **6**

### Esta lista de senhas também é um gráfico

A altura dos caracteres que representam cada senha é proporcional ao número de clientes que a usava.

200.000

20.000



NICOLE

ROCKYOU

12345678

654321

babygirl

A sétima sequência mais usada é o nome do site que teve sua segurança quebrada, ideia tão fraca quanto a de quem usa o próprio nome como senha – ou o nome da mãe, do cachorro etc.

## Como criar uma senha forte

### Use muitas letras

Usando todas as letras do teclado, uma senha com quinze caracteres é 5.429.503.678.976 vezes mais difícil de quebrar que uma senha com seis caracteres.

308.915.776 possibilidades

1.677.259.342.285.725.925.376 possibilidades

### Utilize maiúsculas, minúsculas, números e símbolos

Quanto maior for a variedade de caracteres da senha, mais difícil será quebrá-la.

Há 10.000.000.000 de senhas diferentes formadas por dez caracteres numéricos.



Com apenas letras minúsculas, existem 141.167.095.653.376 possibilidades de senhas com dez caracteres.

Com todo o teclado, incluindo maiúsculas, minúsculas e caracteres especiais, podem-se criar 53.861.511.409.489.970.176 senhas diferentes com dez caracteres.

### Use frases secretas

Escolha uma frase ou um trecho de música ou poema do qual você possa se lembrar.

Mais vale um pássaro na mão que dois voando  
+ VI 1 p\$\$rnMq2Vnd

Crie sua senha com um critério que você não esqueça, como dispensar as vogais, trocar determinadas palavras e letras por números e caracteres especiais etc.

+ VI1p\$\$rnMq2Vnd

Com quinze caracteres de todas as variedades, essa seria uma excelente senha, se ainda fosse secreta.

## 1 O que é Análise combinatória

Em qualquer ramo de atuação, a contagem faz parte do cotidiano das pessoas. Por isso, dedicamos este capítulo a seu estudo. Para entender a necessidade de estudarmos a contagem, tente responder às perguntas abaixo.



- Quantas placas diferentes de automóveis, formadas por três letras e quatro algarismos, podem existir?
- De quantas maneiras diferentes você pode escolher seis entre sessenta números em um jogo?
- Quantos números de telefone de oito dígitos podem existir?
- Em uma classe de quarenta alunos, quantas são as possíveis escolhas para dois representantes de sala?

Como você pode perceber, contar não é sempre um processo simples. Em muitas situações, contar unidades uma a uma, que é o processo elementar, mostra-se inviável, sendo necessário estabelecer métodos de contagem que permitam chegar aos resultados mais rapidamente. Obter esses métodos é o objetivo principal da **Análise combinatória**.

## 2 O princípio fundamental da contagem

A Análise combinatória é alicerçada no princípio fundamental da contagem, também conhecido como princípio multiplicativo da contagem. Intuitivamente, você já conhece esse princípio e já o aplica no cotidiano. Veja duas situações a seguir.

### Situação 1

Em determinada eleição realizada no Brasil, cada eleitor votou para presidente da República e para governador de seu estado. Suponha que havia três candidatos à presidência da República e dois candidatos ao governo do Maranhão. De quantas maneiras diferentes cada eleitor maranhense pôde votar nessa eleição, supondo que o voto não seja nulo nem em branco?

Indicando por  $P_1$ ,  $P_2$  e  $P_3$  os candidatos à presidência e por  $G_1$  e  $G_2$  os candidatos ao governo, as opções de cada eleitor maranhense podem ser resumidas na matriz destacada (em vermelho) a seguir:

		Governo	
		$G_1$	$G_2$
Presidência	$P_1$	$[P_1, G_1]$	$[P_1, G_2]$
	$P_2$	$[P_2, G_1]$	$[P_2, G_2]$
	$P_3$	$[P_3, G_1]$	$[P_3, G_2]$



**Nota:** Matriz é uma tabela retangular cujos elementos são dispostos em linhas e colunas.

Essa matriz, chamada de **matriz das possibilidades**, tem 3 linhas por 2 colunas; logo, seu número de elementos é dado pelo produto:

$$\underbrace{3}_{\substack{\text{número de} \\ \text{opções para} \\ \text{a presidência}}} \cdot \underbrace{2}_{\substack{\text{número de} \\ \text{opções para} \\ \text{o governo}}} = 6$$

Concluímos, então, que cada eleitor maranhense teve seis opções de voto.

Essa resolução nos ajuda a entender o princípio fundamental da contagem aplicado para dois experimentos:

Se um experimento  $E$  pode apresentar  $n$  resultados distintos e um experimento  $F$  pode apresentar  $k$  resultados distintos, então o número de resultados distintos que pode apresentar o experimento composto de  $E$  e  $F$ , nessa ordem, é dado pelo produto:  $n \cdot k$

### Situação 2

Considerando as hipóteses do problema anterior, imagine que, além de votar para presidente e governador, cada eleitor maranhense teve de votar também para prefeito. Admita que havia quatro candidatos à prefeitura da capital São Luís. De quantas maneiras diferentes cada eleitor pôde votar nessa eleição, supondo que o voto não seja nulo nem em branco?

Indicando por  $P_1, P_2$  e  $P_3$  os candidatos à presidência, por  $G_1$  e  $G_2$  os candidatos ao governo e por  $R_1, R_2, R_3$  e  $R_4$  os candidatos à prefeitura, as opções de cada eleitor são-luisense podem ser resumidas na matriz destacada (em vermelho) a seguir:

		Prefeitura			
		$R_1$	$R_2$	$R_3$	$R_4$
<b>(Presidência, Governo)</b>	$[P_1, G_1]$	$[P_1, G_1, R_1]$	$[P_1, G_1, R_2]$	$[P_1, G_1, R_3]$	$[P_1, G_1, R_4]$
	$[P_1, G_2]$	$[P_1, G_2, R_1]$	$[P_1, G_2, R_2]$	$[P_1, G_2, R_3]$	$[P_1, G_2, R_4]$
	$[P_2, G_1]$	$[P_2, G_1, R_1]$	$[P_2, G_1, R_2]$	$[P_2, G_1, R_3]$	$[P_2, G_1, R_4]$
	$[P_2, G_2]$	$[P_2, G_2, R_1]$	$[P_2, G_2, R_2]$	$[P_2, G_2, R_3]$	$[P_2, G_2, R_4]$
	$[P_3, G_1]$	$[P_3, G_1, R_1]$	$[P_3, G_1, R_2]$	$[P_3, G_1, R_3]$	$[P_3, G_1, R_4]$
	$[P_3, G_2]$	$[P_3, G_2, R_1]$	$[P_3, G_2, R_2]$	$[P_3, G_2, R_3]$	$[P_3, G_2, R_4]$

Essa matriz é formada por 6 linhas e 4 colunas; logo, seu número de elementos é dado pelo produto:

$$\underbrace{6}_{\substack{\text{número de} \\ \text{opções para} \\ \text{a presidência} \\ \text{e o governo}}} \cdot \underbrace{4}_{\substack{\text{número de} \\ \text{opções para} \\ \text{a prefeitura}}} = 24$$

Ou, ainda:

$$\underbrace{3}_{\substack{\text{número de} \\ \text{opções para} \\ \text{a presidência}}} \cdot \underbrace{2}_{\substack{\text{número de} \\ \text{opções para} \\ \text{o governo}}} \cdot \underbrace{4}_{\substack{\text{número de} \\ \text{opções para} \\ \text{a prefeitura}}} = 24$$

Concluímos, então, que cada eleitor teve 24 opções de voto.

Essa resolução nos ajuda a entender o princípio fundamental da contagem aplicado para mais de dois experimentos:

Se os experimentos  $E_1, E_2, E_3, \dots, E_k$  podem apresentar  $n_1, n_2, n_3, \dots, n_k$  resultados distintos, respectivamente, então o número de resultados distintos que o experimento composto de  $E_1, E_2, E_3, \dots, E_k$  pode apresentar, nessa ordem, é dado pelo produto:  $n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdot \dots \cdot n_k$

Aplicando a linguagem dos conjuntos, esse princípio também pode ser enunciado da seguinte forma:

Sendo  $A_1, A_2, A_3, \dots, A_k$  conjuntos não vazios, o número de escolhas diferentes de um elemento de  $A_1$ , um de  $A_2$ , um de  $A_3$ , ... e um de  $A_k$ , nessa ordem, é dado pelo produto:  
 $n(A_1) \cdot n(A_2) \cdot n(A_3) \cdot \dots \cdot n(A_k)$

**Nota:**

O símbolo  $n(A)$  representa o número de elementos do conjunto  $A$ .



Por que no enunciado do princípio fundamental da contagem é destacada a ordem dos experimentos? *Ao aplicar o princípio fundamental da contagem, calculamos o número de sequências que podem ser formadas com os elementos disponíveis; portanto, consideramos a ordem desses elementos.*

## EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

- 1 Uma loja de roupas femininas vende quatro modelos de calça jeans. Cada calça pode ter uma das cores: preta, marrom ou azul.



Quantas opções de escolha terá uma consumidora interessada em comprar uma calça jeans nessa loja?

**Resolução**

Consideremos o esquema abaixo, em que cada casa (quadradinho) representa uma escolha da consumidora:

modelo	cor
--------	-----

Para a primeira casa, existem quatro possibilidades de escolha e, para a segunda, três possibilidades:

modelo	cor
4	3

Pelo princípio fundamental da contagem, o número de escolhas é dado pelo produto  $4 \cdot 3$ , ou seja, a consumidora tem 12 opções de escolha.

- 2 Quantos números naturais de três algarismos podem ser representados com os algarismos 2, 3, 4, 7, 8 e 9?

**Resolução**

No esquema a seguir, as casas, da esquerda para a direita, representam as centenas, as dezenas e as unidades, respectivamente.

centenas	dezenas	unidades
----------	---------	----------

Como não há restrição no enunciado, pode haver repetição de algarismos, ou seja, podemos considerar números como 477 e 999. Logo, para preencher cada uma das casas existem seis possibilidades de escolha, pois podemos preenchê-la com qualquer um dos algarismos 2, 3, 4, 7, 8 e 9.

centenas	dezenas	unidades
6	6	6

Logo, pelo princípio fundamental da contagem, o total de números que podem ser representados é dado pelo produto  $6 \cdot 6 \cdot 6$ . Ou seja, nas condições enunciadas, é possível representar 216 números.

- 3 Quantos números naturais de três algarismos distintos podem ser representados com os algarismos 2, 3, 4, 7, 8 e 9?

**Resolução**

No esquema abaixo, cada casa pode ser preenchida com um dos algarismos 2, 3, 4, 7, 8 ou 9, **sem repetição de algarismos**.

centenas	dezenas	unidades
----------	---------	----------

- O número de possibilidades de preenchimento da primeira casa é 6.
- O número de possibilidades de preenchimento da segunda casa é 5, pois um algarismo já foi usado na primeira casa e não pode ser repetido.
- O número de possibilidades de preenchimento da terceira casa é 4, pois os dois algarismos usados nas casas anteriores não podem ser repetidos.

centenas	dezenas	unidades
6	5	4

Logo, pelo princípio fundamental da contagem, o total de números que podem ser representados é dado pelo produto  $6 \cdot 5 \cdot 4$ . Ou seja, nas condições enunciadas, é possível representar 120 números.



No Ensino Fundamental, aprendi a calcular o número de divisores naturais de um número natural não nulo. Esse cálculo pode ser feito pelo princípio fundamental da contagem?

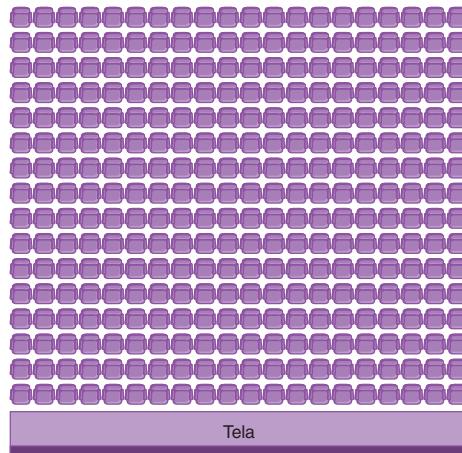
Portanto, há 6 possibilidades para  $m$  e 5 possibilidades para  $n$ . Assim, pelo princípio fundamental da contagem, multiplicando esses números de possibilidades,  $6 \cdot 5$ , obtemos o número de divisores naturais de 2.592. Concluímos, então, que o número 2.592 tem 30 divisores naturais.

## EXERCÍCIOS PROPOSTOS

Faça as atividades no caderno.

FAUSTINO

- 1 A figura abaixo representa as poltronas de um cinema, distribuídas em fileiras com o mesmo número de poltronas em cada uma.



Aplicando o princípio fundamental da contagem, responda aos itens a seguir.

- a) Quantas poltronas há nesse cinema? 320  
b) Em determinada sessão desse cinema, em que todos os ingressos foram vendidos, houve uma promoção: cada ingresso comprado dava direito a duas barras de chocolate. Qual o total de barras distribuídas aos espectadores nessa sessão? 640  
  
2 Em um ginásio de esportes, os lugares destinados aos espectadores são separados em quatro setores, com a mesma quantidade de cadeiras em cada um: azul, laranja, amarelo e verde. Em cada setor, cada cadeira é identificada por uma das 26 letras do alfabeto, seguida de um dos números naturais de 1 a 45. O bilhete de ingresso ao ginásio apresenta uma sequência com uma cor, uma letra e um número. Assim, por exemplo, a informação azul, G, 38 indica: setor azul, fila G, cadeira 38. Quantas cadeiras são destinadas aos espectadores se o total de cadeiras é igual ao total de possibilidades de identificação? 4.680  
  
3 Com os algarismos 1, 2, 3, 4, 5 e 6, determine:  
a) quantos números naturais de quatro algarismos podem ser representados; 1.296  
b) quantos números naturais de quatro algarismos distintos podem ser representados. 360  
  
4 Com o auxílio do esquema abaixo, respondam:



milhares centenas dezenas unidades

- a) Quantos números naturais de quatro algarismos podem ser representados com os algarismos 0, 4, 5, 7 e 9? (Sugestão: Lembrem-se de que, para o número ter quatro algarismos, o algarismo dos milhares não pode ser zero.) 500

- b) Quantos números naturais de quatro algarismos distintos podem ser representados com os algarismos 0, 4, 5, 7 e 9? 96

- 5 Com os algarismos 1, 3, 4, 5, 7 e 9:

- a) quantos números naturais pares de quatro algarismos podem ser representados? 216  
b) quantos números naturais pares de quatro algarismos distintos podem ser representados? 60

- 6 Doze equipes de voleibol disputam um campeonato. De quantas maneiras diferentes pode ocorrer a classificação das três primeiras colocadas, se não pode haver empate em nenhuma das colocações? 1.320

- 7 (Enem) Estima-se que haja, no Acre, 209 espécies de mamíferos, distribuídas conforme a tabela abaixo.

Grupos taxonômicos	Número de espécies
Artiodáctilos	4
Carnívoros	18
Cetáceos	2
Quirópteros	103
Lagomorfos	1
Marsupiais	16
Perissodáctilos	1
Primates	20
Roedores	33
Sirênios	1
Edentados	10
Total	209

T&C Amazônia, ano 1, n. 3, dez. 2003.

Deseja-se realizar um estudo comparativo entre três dessas espécies de mamíferos — uma do grupo Cetáceos, outra do grupo Primatas e a terceira do grupo Roedores. O número de conjuntos distintos que podem ser formados com essas espécies para esse estudo é igual a: alternativa a

- a) 1.320      c) 5.845      e) 7.245  
b) 2.090      d) 6.600

- 10** No Brasil, as placas de automóvel são formadas por uma sequência de três letras seguida de outra de quatro algarismos, como no exemplo:



RICARDO MARQUES/FUTURA PRESS

- a) Quantas placas diferentes podem ser formadas com as letras A, B, C e D e com os algarismos 1, 2, 3, 4 e 5? **40.000**

b) Quantas placas diferentes podem ser formadas com as letras A, B, C e D e com os algarismos 1, 2, 3, 4 e 5 sem repetir letra nem algarismo? **2.880**

c) Quantas placas diferentes podem ser formadas, com pelo menos um algarismo não nulo, empregando-se as 26 letras do alfabeto e os 10 algarismos do sistema decimal? **175.742.424**

Resolva os exercícios complementares 1 a 8.



## CRIANDO PROBLEMAS



Inspirando-se nos exercícios propostos 1 a 10, elaborem e resolvam um problema sobre o princípio multiplicativo da contagem que envolva uma situação do cotidiano.

**Resposta pessoal.**



CONECTADO

Estudamos o princípio fundamental da contagem a partir da **matriz das possibilidades**, porém há outras maneiras interessantes de estudá-lo. Uma delas utiliza um dispositivo chamado **diagrama de árvore**. Pesquise na internet a aplicação do diagrama de árvore no estudo do princípio fundamental da contagem e escreva um breve texto sobre o que você ler, acompanhado de exemplos. *Ver Suplemento com orientações para o professor.*

### 3 O princípio aditivo da contagem

Alguns resultados da teoria dos conjuntos têm importantes aplicações na Análise combinatória. Um deles é o cálculo do número de elementos da união de dois conjuntos finitos, que usaremos para resolver o problema proposto a seguir.

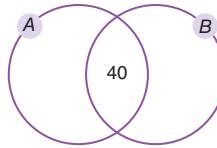
Uma pesquisa feita com um grupo de internautas, sobre os sites de vendas A e B, revelou que, dos entrevistados:

- todos conhecem pelo menos um dos dois sites;
  - 40 conhecem os dois sites;
  - 82 conhecem o site A;
  - 64 conhecem o site B.

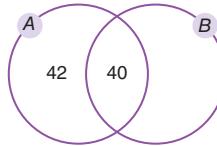
Quantas pessoas foram entrevistadas?

Usando diagramas, indicaremos por  $A$  e  $B$  os conjuntos das pessoas que conhecem os sites  $A$  e  $B$ , respectivamente.

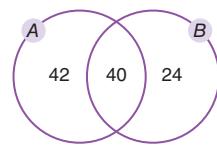
- Como 40 pessoas conhecem os dois sites, para nos orientar, vamos escrever o número 40 na intersecção dos conjuntos  $A$  e  $B$ :



- Sabemos que 82 pessoas conhecem o site  $A$ , e 40 delas já estão indicadas na intersecção dos conjuntos  $A$  e  $B$ . Logo, faltam 42 pessoas para completar o conjunto  $A$ :



- Como 64 pessoas conhecem o site  $B$  e 40 delas já estão indicadas na intersecção de  $A$  e  $B$ , concluímos que faltam 24 pessoas para completar o conjunto  $B$ :



Finalmente, como todos os entrevistados conhecem pelo menos um dos sites, concluímos que o número de pessoas entrevistadas é:  $42 + 40 + 24 = 106$

Note que o número total de entrevistados **não** corresponde à soma do número de pessoas que conhecem o site  $A$  (82) com o número de pessoas que conhecem o site  $B$  (64), pois, nessa soma, as pessoas que conhecem os dois sites estão sendo contadas duas vezes.

Por isso, o total de pessoas entrevistadas poderia ser calculado adicionando-se o número de elementos de  $A$  ao número de elementos de  $B$  e subtraindo-se dessa soma o número de elementos da intersecção de  $A$  e  $B$ , ou seja:  $82 + 64 - 40 = 106$

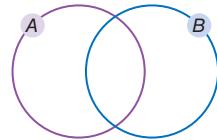
Esse exemplo ajuda a entender o seguinte teorema:

Sendo  $A$  e  $B$  conjuntos finitos, o número de elementos da **união** de  $A$  e  $B$  é dado por:

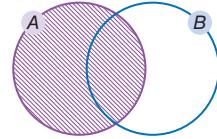
$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

O símbolo  $n(\ )$  representa o número de elementos do conjunto indicado entre parênteses.

Também podemos interpretar esse teorema com o auxílio de um diagrama:

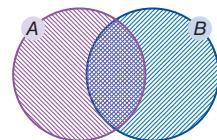


Para contar os elementos de  $A \cup B$ , vamos primeiro considerar os elementos de  $A$ :



A região hachurada representa os elementos do conjunto  $A$ .

Em seguida, contamos os elementos de  $B$ :



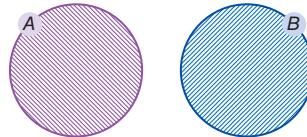
A região hachurada em azul representa os elementos do conjunto  $B$ .

Observe que a intersecção de  $A$  e  $B$  foi contada **duas vezes**: uma vez quando contamos os elementos de  $A$ , e outra vez ao contarmos os elementos de  $B$ . Para corrigir esse “erro”, devemos subtrair da contagem o número de elementos de  $A \cap B$ , isto é:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

**Nota:**

Se  $A$  e  $B$  são conjuntos **disjuntos**, isto é,  $A \cap B = \emptyset$ , temos:



Então:  $n(A \cup B) = n(A) + n(B)$

## EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

- 4** Mensalmente, um colégio oferece aos alunos duas palestras para orientação profissional. No mês passado, a primeira foi sobre Estatística, e a segunda, sobre Economia. Todos os alunos de uma classe assistiram a pelo menos uma das palestras e, entre eles, 18 assistiram à primeira, 23 assistiram à segunda e 8 assistiram às duas palestras. Quantos alunos há nessa classe?

**Resolução**

Sendo:

- $A$  o conjunto dos alunos que assistiram à primeira palestra, então  $n(A) = 18$ ;
- $B$  o conjunto dos alunos que assistiram à segunda palestra, então  $n(B) = 23$ ;
- $A \cap B$  o conjunto dos alunos que assistiram às duas palestras, então  $n(A \cap B) = 8$ .

O conjunto  $A \cup B$  é definido por:

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ ou } x \in B\}$$

Assim,  $A \cup B$  é o conjunto dos alunos que assistiram à primeira **ou** à segunda palestra, isto é, todos os alunos da classe. Pelo teorema anterior, esse total é dado por:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

$$\therefore n(A \cup B) = 18 + 23 - 8 = 33$$

Logo, a classe é formada por 33 alunos.

- 5** Quantos números naturais de três ou quatro algarismos distintos podem ser formados com os algarismos 4, 5, 6, 7, 8 e 9?

**Resolução**

Sendo  $A$  o conjunto dos números naturais de três algarismos distintos formados pelos algarismos 4, 5, 6, 7, 8 e 9, calculamos  $n(A)$ :

$$n(A) = 6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$$

Sendo  $B$  o conjunto dos números naturais de quatro algarismos distintos formados pelos algarismos 4, 5, 6, 7, 8 e 9, calculamos  $n(B)$ :

$$n(B) = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 360$$

Para concluir, devemos calcular o número de elementos que pertencem a  $A$  **ou** a  $B$ , ou seja,  $n(A \cup B)$ . Como  $A$  e  $B$  são disjuntos, isto é,  $A \cap B = \emptyset$ , temos:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B)$$

$$\therefore n(A \cup B) = 120 + 360 = 480$$

Logo, podem ser formados 480 números nas condições enunciadas.

## EXERCÍCIOS PROPOSTOS

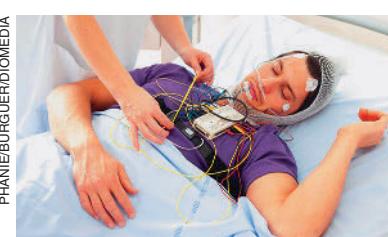
Faça as atividades no caderno.

- 11** Faça o que se pede.

- a) Dois conjuntos,  $A$  e  $B$ , são tais que  $n(A) = 18$ ,  $n(B) = 15$  e  $n(A \cap B) = 6$ . Determine o número de elementos de  $A \cup B$ . **27**
- b) Dois conjuntos,  $C$  e  $D$ , são tais que  $n(C \cup D) = 28$ ,  $n(C) = 17$  e  $n(D) = 20$ . Determine o número de elementos de  $C \cap D$ . **9**

- 12** No Brasil, as placas dos veículos são formadas por sequências de 3 letras seguidas de 4 algarismos. Dispondo das letras A, B, C, D, E, F e U e dos algarismos 1, 2, 3, 4, 5 e 6, determine o número de placas que podem ser confeccionadas de modo que as 3 letras sejam vogais ou que as 3 sejam consoantes. **117.936**

- 13** Um instituto de medicina do sono realizou um estudo com uma amostra de 80 moradores de grandes centros urbanos. A pesquisa revelou que 56 deles dormiam menos de quatro horas por noite e 28 dormiam mais de duas horas por noite. Quantas pessoas da amostra dormiam mais de duas e menos de quatro horas por noite? **4**



Homem passando por exame de polissonografia, que pode revelar disfunções como apneia do sono, ronco, insônia, hipersonia etc.

**14** Calcule a quantidade de números naturais compreendidos entre 300 e 3.000 que podemos representar utilizando somente os algarismos 1, 2, 3, 5, 7 e 8, de modo que não figurem algarismos repetidos em um mesmo número. **200**  
*(Sugestão: Separe a resolução em dois casos.)*

**15** Quantos números naturais maiores que 4.500 e de quatro algarismos distintos podemos representar com os algarismos 2, 3, 4, 5, 6 e 7? **216**

**16** Quantos números naturais pares, de quatro algarismos distintos, podem ser formados com os algarismos 0, 1, 2, 4, 5, 7 e 9? **320**

**17** (Ufes) Em um grupo de 60 mulheres e 40 homens existem exatamente 25 mulheres e 12 homens que tocam algum instrumento musical. De quantas maneiras podemos formar uma dupla de um homem e uma mulher de modo que pelo menos uma das pessoas da dupla toque algum instrumento? **alternativa d**

- a) 300
- b) 720
- c) 1.000
- d) 1.420
- e) 1.720

Resolva os *exercícios complementares 9 a 12.*

## CRIANDO PROBLEMAS

 Inspirando-se nos exercícios propostos 12, 13 e 17, elaborem e resolvam um problema sobre o princípio aditivo da contagem que envolva uma situação do cotidiano.

**Resposta pessoal.**

## 4 Fatorial

Como vimos nos exercícios anteriores, a multiplicação de números naturais consecutivos é muito frequente na Análise combinatória, e algumas dessas multiplicações envolvem muitos fatores. Por exemplo, a quantidade de números naturais de sete algarismos distintos que podem ser formados com os sete algarismos 1, 3, 4, 5, 6, 8 e 9 é dada por:

$$7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

Para simplificar as operações com expressões desse tipo, adotaremos o símbolo  $n!$ , que indica o produto dos números naturais consecutivos  $n, n - 1, n - 2, \dots, 1$ , com  $n \geq 2$ . No nosso exemplo, temos:

$$7! = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

Essa notação ajuda muito em problemas que envolvem cálculos trabalhosos, porque permite simplificar expressões e apresentar resoluções extensas de maneira abreviada. Definimos:

Seja  $n$  um número natural, com  $n \geq 2$ . Define-se o **fatorial de  $n$** , representado por  $n!$ , como o produto dos números naturais consecutivos  $n, n - 1, n - 2, \dots, 1$ . Isto é:

$$n! = n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \dots \cdot 1$$

O símbolo  $n!$  é lido como “ $n$  factorial” ou “factorial de  $n$ ”.

### Exemplos

- a)  $2! = 2 \cdot 1 = 2$
- b)  $3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$
- c)  $4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$
- d)  $5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$

### Propriedade fundamental dos fatoriais

Na igualdade  $6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ , observamos que o produto  $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$  pode ser substituído por  $5!$  e, portanto:

$$6! = 6 \cdot \underbrace{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}_{5!} \Rightarrow 6! = 6 \cdot 5!$$

Podemos generalizar esse resultado para qualquer número natural  $n$ , com  $n \geq 3$ , da seguinte maneira:

$$n! = n \cdot (n - 1)!$$

Essa propriedade é conhecida como **propriedade fundamental dos fatoriais**.

### Exemplos

a)  $9! = 9 \cdot 8!$   
b)  $10! = 10 \cdot 9!$

c)  $10! = 10 \cdot 9 \cdot 8!$   
d)  $10! = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7!$

### Extensão da definição de fatorial

É necessário definir fatorial de zero ( $0!$ ) e fatorial de um ( $1!$ ), pois zero e um também fazem parte de contagens. Para garantir a coerência entre as definições desses “novos” fatoriais e a definição de fatorial de um número natural maior que 1, vamos admitir que possa ser ampliada a validade da propriedade fundamental dos fatoriais, que, por enquanto, foi restrita para  $n$  natural, com  $n \geq 3$ :

$$n! = n \cdot (n - 1)!$$

- Para definir  $1!$  de modo que a propriedade continue válida, devemos admitir, para  $n = 2$ :

$$2! = 2 \cdot (2 - 1)! \Rightarrow 2! = 2 \cdot 1!$$

Como  $2! = 2 \cdot 1$ , concluímos que:

$$2 \cdot 1 = 2 \cdot 1! \Rightarrow 1 = 1!$$

Assim, a propriedade fundamental dos fatoriais poderá ser aplicada para  $n = 2$  se definirmos:

$$1! = 1$$

- Analogamente, para definir  $0!$  de modo que a propriedade fundamental continue válida, devemos admitir, para  $n = 1$ :

$$\begin{aligned} 1! &= 1 \cdot (1 - 1)! \Rightarrow 1! = 1 \cdot 0! \\ 1 &= 1 \cdot 0! \Rightarrow 1 = 0! \end{aligned}$$

Como já definimos  $1! = 1$ , concluímos que a propriedade fundamental dos fatoriais pode ser aplicada para  $n = 1$  sob a definição:

$$0! = 1$$

Com essas duas “novas” definições,  $1! = 1$  e  $0! = 1$ , admitimos que a propriedade fundamental dos fatoriais pode ser aplicada para qualquer número natural não nulo  $n$ .

## EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

- 6 Simplificar as frações:

a)  $\frac{10!}{9!}$     b)  $\frac{8!}{10!}$     c)  $\frac{10! \cdot 4!}{8! \cdot 6!}$     d)  $\frac{n!}{(n-2)!}$     e)  $\frac{(n-3)!}{(n-1)!}$

### Resolução

a)  $\frac{10!}{9!} = \frac{10 \cdot 9!}{9!} = 10$

b)  $\frac{8!}{10!} = \frac{8!}{10 \cdot 9 \cdot 8!} = \frac{1}{10 \cdot 9} = \frac{1}{90}$

c)  $\frac{10! \cdot 4!}{8! \cdot 6!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8! \cdot 4!}{8! \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4!} = \frac{90}{30} = 3$

- d) Vamos decompor em fatores decrescentes o maior entre os fatoriais apresentados na fração.

Como  $n! > (n-2)!$ , para qualquer número natural  $n$ , com  $n \geq 2$ , decompomos  $n!$ :

$$\frac{n!}{(n-2)!} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2)!}{(n-2)!} = n^2 - n$$

- e) Vamos decompor em fatores decrescentes o maior entre os fatoriais  $(n-1)!$  e  $(n-3)!$ .

Observando que  $(n-1)! > (n-3)!$ , para qualquer número natural  $n$ , com  $n \geq 3$ , decompomos  $(n-1)!$ :

$$\frac{(n-3)!}{(n-1)!} = \frac{(n-3)!}{(n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3)!} = \frac{1}{n^2 - 3n + 2}$$

- 7** Resolver a equação  $\frac{(n+1)!}{(n-1)!} = 20$ .

#### Resolução

Para simplificar a fração, vamos decompor em fatores decrescentes o maior entre os fatoriais:

$$\frac{(n+1)!}{(n-1)!} = 20 \Rightarrow \frac{(n+1) \cdot n \cdot (n-1)!}{(n-1)!} = 20$$

$$\therefore n^2 + n - 20 = 0$$

Resolvendo essa equação, encontramos  $n = 4$  ou  $n = -5$ .

#### Verificação

Lembramos que só se define factorial para número natural. Assim, devemos verificar se, para esses valores de  $n$ , existem os fatoriais apresentados na equação.

Para  $n = 4$ , temos:

$$\frac{(4+1)!}{(4-1)!} = 20 \Rightarrow \frac{5!}{3!} = 20$$

Como ambos os fatoriais existem ( $5!$  e  $3!$ ), concluímos que  $4$  é raiz da equação.

Para  $n = -5$ , temos:

$$\frac{(-5+1)!}{(-5-1)!} = 20 \Rightarrow \frac{(-4)!}{(-6)!} = 20 \text{ (absurdo!)}$$

Como não existem os fatoriais  $(-4)!$  e  $(-6)!$ , concluímos que  $-5$  não é raiz da equação.

Logo:  $S = \{4\}$

## EXERCÍCIOS PROPOSTOS

Faça as atividades no caderno.

- 18** Calcule:

a)  $7!$  **5.040**

c)  $4! - 2!$  **22**

b)  $3! \cdot 2!$  **12**

d)  $\frac{0!}{3!} \frac{1}{6}$

- 19** Classifique no caderno em verdadeira ou falsa cada uma das afirmações a seguir.

a)  $3! + 2! = 5!$  **falsa**

b)  $3! \cdot 2! = 6!$  **falsa**

c)  $4! + 4! = 2 \cdot 4!$  **verdadeira**

d)  $n! = n(n-1)(n-2)!$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$  e  $n \geq 2$  **verdadeira**

e)  $n! = n(n-1)(n-2)!$ , para todo  $n \in \mathbb{N}^*$  **falsa**

- 20** Simplifique as frações.

a)  $\frac{6!}{3!}$  **120**

c)  $\frac{n!}{(n-1)!}$   **$n$**

b)  $\frac{5! \cdot 8!}{4! \cdot 7!}$  **40**

d)  $\frac{n!}{(n+2)!}$   **$\frac{1}{n^2 + 3n + 2}$**

- 21** Resolva as equações.

a)  $\frac{(n+2)!}{n!} = 12$   **$S = \{2\}$**

b)  $\frac{(n-2)!}{(n-1)!} = \frac{1}{5}$   **$S = \{6\}$**

c)  $\frac{(n+1)! + n!}{(n+2)!} = \frac{1}{28}$   **$S = \{27\}$**

- 22** Determine o número  $n$  tal que  $n! = 2^8 \cdot 3^4 \cdot 5^2 \cdot 7$ .  **$n = 10$**

- 23** Com  $n$  consoantes distintas e as vogais A, E, I e O, pretende-se formar uma sequência que contenha todas essas letras, sem repeti-las, e na qual o primeiro e o último elementos sejam vogais. O total de sequências diferentes que podem ser formadas é: **alternativa d**

a)  $(n-2)!$       c)  $n!$       e)  $6(n-3)!$

b)  $2(n-4)!$       d)  $12(n+2)!$

Resolva os exercícios complementares 13 a 15.



## MENTES BRILHANTES

### O problema básico da telefonia

Nos primeiros anos do século XX, o matemático dinamarquês Agner Krarup Erlang, quando trabalhava na central telefônica de Copenhague, resolveu um importante problema relacionado ao desempenho de centrais telefônicas. Erlang estimou o provável percentual de ligações que

não se completariam em função do congestionamento da central. A conclusão de Erlang foi a de que esse percentual era dado, aproximadamente, por:

$$c = \frac{\frac{d^L}{L!}}{1 + \frac{d}{1!} + \frac{d^2}{2!} + \frac{d^3}{3!} + \dots + \frac{d^L}{L!}}$$

em que:

- $L$  era o número de canais disponibilizados pela central aos usuários;
- $d$  era a demanda da central, expressa em horas de ligações solicitadas a cada hora. Por exemplo, se a central tivesse 50 canais e cada canal recebesse, em média, 4 ligações por hora, e cada ligação demorasse, em média, 3 minutos, em cada hora seriam demandados  $50 \cdot 4 \cdot 3$  minutos de ligações, ou seja, 600 minutos ou, ainda, 10 horas; assim, a demanda  $d$  seria 10 horas de ligações a cada hora;
- $c$  era o provável percentual de chamadas que não seriam completadas por causa do congestionamento da central.

Os resultados dos estudos de Erlang ainda são utilizados em projetos de centrais telefônicas.

Lembre-se:  
Não escreva no livro!

Faça as atividades no caderno.

## EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES

**1** (Enem) O diretor de uma escola convidou os 280 alunos de terceiro ano a participarem de uma brincadeira. Suponha que existem 5 objetos e 6 personagens numa casa de 9 cômodos; um dos personagens esconde um dos objetos em um dos cômodos da casa. O objetivo da brincadeira é adivinhar qual objeto foi escondido por qual personagem e em qual cômodo da casa o objeto foi escondido.

Todos os alunos decidiram participar. A cada vez um aluno é sorteado e dá a sua resposta. As respostas devem ser sempre distintas das anteriores, e um mesmo aluno não pode ser sorteado mais de uma vez. Se a resposta do aluno estiver correta, ele é declarado vencedor e a brincadeira é encerrada.

O diretor sabe que algum aluno acertará a resposta porque há: **alternativa a**

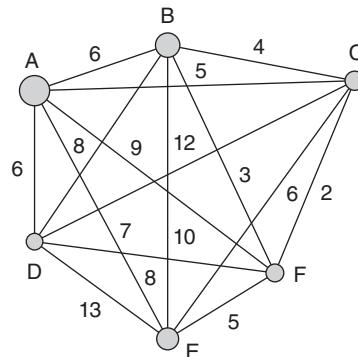
- 10 alunos a mais do que possíveis respostas distintas.
- 20 alunos a mais do que possíveis respostas distintas.
- 119 alunos a mais do que possíveis respostas distintas.
- 260 alunos a mais do que possíveis respostas distintas.
- 270 alunos a mais do que possíveis respostas distintas.

**2** Suponha que o número da linha dos telefones celulares de um estado fosse composto de oito dígitos e que o primeiro da esquerda só pudesse ser um dos dígitos 5, 6, 7, 8 ou 9, não havendo nenhuma restrição para os demais dígitos. Para aumentar o número de linhas, decidiu-se que o número de cada linha passaria a ter nove dígitos e que o primeiro da esquerda seria o dígito 9, não havendo nenhuma restrição para os demais dígitos.

- Qual seria o número máximo possível de linhas antes do acréscimo do nono dígito? **50.000.000**
- Qual seria o número máximo de linhas após o acréscimo do nono dígito? **100.000.000**

**3** Uma urna contém seis bolas de cores diferentes entre si, sendo uma delas vermelha. Retiram-se quatro bolas dessa urna, uma de cada vez e sem reposição. Considerando a ordem de retirada, quantas sequências de cores são possíveis de modo que a primeira bola retirada não seja vermelha? **300**

**4** (Enem) João mora na cidade A e precisa visitar cinco clientes, localizados em cidades diferentes da sua. Cada trajeto possível pode ser representado por uma sequência de 7 letras. Por exemplo, o trajeto ABCDEFA informa que ele sairá da cidade A, visitando as cidades B, C, D, E e F, nesta ordem, voltando para a cidade A. Além disso, o número indicado entre as letras informa o custo do deslocamento entre as cidades. A figura mostra o custo de deslocamento entre cada uma das cidades.



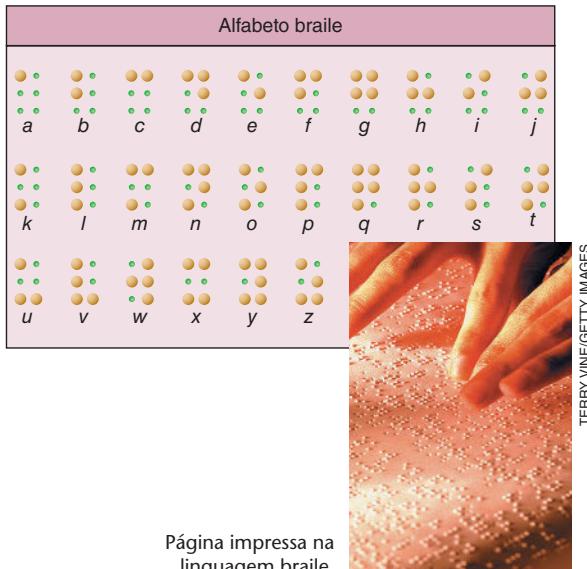
FAUSTINO

Como João quer economizar, ele precisa determinar qual o trajeto de menor custo para visitar os cinco clientes. Examinando a figura, percebe que precisa considerar somente parte das sequências, pois os trajetos ABCDEFA e AFEDCBA têm o mesmo custo.

Ele gasta 1 min 30 s para examinar uma sequência e descartar sua simétrica, conforme apresentado. O tempo mínimo necessário para João verificar todas as sequências possíveis no problema é de: **alternativa b**

- 60 min
- 90 min
- 120 min
- 180 min
- 360 min

- 5** Na escrita braile, cada caractere (letra, algarismo, sinal de pontuação etc.) é representado em uma célula retangular na qual há de 1 a 6 pontos em alto-relevo, distribuídos em três linhas e duas colunas, conforme mostra a figura a seguir, que representa as 26 letras do alfabeto.



Página impressa na linguagem braile.

Qual é o número total de caracteres que podem ser representados no sistema braile? **63**

(Dica: Lembre-se de que nesse sistema os seis pontos em baixo-relevo não representam um caractere.)

- 6** Em nosso dia a dia utilizamos senhas em várias situações, como em contas de *e-mail*, em cartões de crédito, em *sites* de compras etc. Uma senha é uma sequência de caracteres numéricos, literais ou especiais como %, &, ;, # etc., ou uma mescla deles.

Na abertura deste capítulo, vimos que algumas senhas são “mais fortes” do que outras, isto é, são mais difíceis de ser desvendadas por pessoas que não as conhecem. A “força” da senha depende do número de caracteres e do tipo de caractere utilizado.

Suponham que o teclado de um computador apresente 68 caracteres, representados por letras, algarismos e outros caracteres especiais, conforme mostra a figura.



Para comprar um *smartphone* em um *site*, cada uma das amigas, Jéssica e Fernanda, deve formar uma senha com 6 caracteres. Jéssica pretende escolher, aleatoriamente, 6 caracteres distintos no teclado acima. Já Fernanda pretende escolher, aleatoriamente, 6 caracteres entre as letras e os algarismos desse teclado, não necessariamente distintos. Elas usarão apenas letras minúsculas.

- a) Quantas senhas diferentes Jéssica pode formar?  
**78.806.407.680 senhas**
- b) Quantas senhas diferentes Fernanda pode formar?  
**2.176.782.336 senhas**

- c) Suponham que senhas que têm pelo menos um caractere especial são “mais fortes” do que qualquer senha formada apenas por letras e algarismos. Das senhas que podem ser formadas por Jéssica, quantas são “mais fortes” que as de Fernanda? **77.403.997.440 senhas**

- 7** Em uma prova de atletismo, disputada por nove corredores, os três primeiros colocados serão classificados para a próxima fase do torneio, não sendo admitido empate. Sabendo que apenas quatro brasileiros participam dessa prova e considerando apenas os três primeiros colocados, quantos resultados possíveis classificam pelo menos um brasileiro para a próxima fase? **444**

- 8** (Uespi) Num debate entre candidatos a governador de certo estado compareceram 7 candidatos, sendo 4 homens e 3 mulheres. A organização do evento resolveu que os candidatos ficariam lado a lado, numa disposição não circular e que os homens não ficariam juntos um do outro e sim em posição alternada com as mulheres. Para isso, em cada um dos sete locais a serem ocupados pelos candidatos, foi colocado o nome do seu respectivo ocupante. Nessas condições é correto afirmar que o número de maneiras diferentes de esses candidatos serem arrumados em seus respectivos locais no debate é de:

**alternativa d**

- a) 121      c) 136      e) 169  
b) 124      d) 144

- 9** Trinta pacientes hipertensos submeteram-se a um teste de esforço. Ao final do teste, o médico assinalou ao lado do nome de cada um, em uma lista, a letra *S* ou a letra *D* ou a sequência *SD*, conforme o paciente tenha apresentado variação acentuada na pressão sistólica ou diastólica ou nas duas, respectivamente. Sabendo que todos os pacientes tiveram uma dessas classificações e que foram assinaladas 18 letras *S* e 20 letras *D*, quantos pacientes tiveram a classificação *SD*? **8**

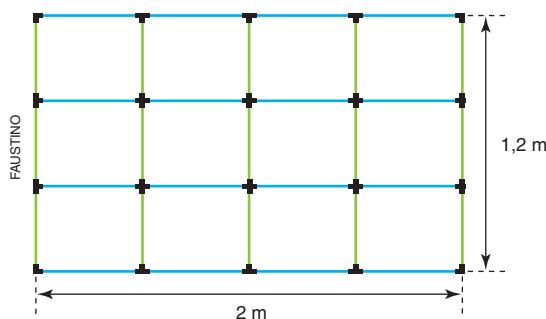
- 10** (UFBA) Para abrir um cofre eletrônico deve-se digitar uma sequência formada por quatro algarismos distintos, sendo o valor do primeiro o triplo do valor do segundo. Uma pessoa que desconhece essa sequência pretende abrir o cofre. O maior número possível de sequências que ela deve digitar é: **alternativa e**

- a) 170      d) 280  
b) 240      e) 168  
c) 180

- 11** No Brasil, as placas de automóvel são formadas por três letras seguidas de quatro algarismos. Considerando que se disponha apenas das letras A, B, C, D e E e dos algarismos 1, 2, 3, 4, 5 e 6, determine o número de placas diferentes que podem ser confeccionadas de modo que seja usada apenas uma vogal entre as letras e não seja permitida a repetição de letra nem de algarismo. **12.960**

**12**

- (Uerj) Uma grade retangular é montada com 15 tubos de 40 cm na posição vertical e com 16 tubos de 50 cm na horizontal. Para esse tipo de montagem, são utilizados encaixes nas extremidades dos tubos, como ilustrado abaixo:



Se a altura de uma grade como essa é igual ao comprimento de  $x$  tubos, e a largura equivale ao comprimento de  $y$  tubos, a expressão que representa o número total de tubos usados é:

- a)  $x^2 + y^2 + x + y - 1$       c)  $xy + 2x + 2y$  alternativa d  
 b)  $xy + x + y + 1$       d)  $2xy + x + y$

**13**

- (FURRN) O conjunto solução da equação

$$\frac{(x+2)!}{3! \cdot x!} = \frac{x!}{(x-1)!}$$

é: alternativa a

- a)  $\{1, 2\}$       b)  $\{0, 3\}$       c)  $\{1, 3\}$       d)  $\{2, 3\}$       e)  $\{0, 2\}$

**14**

- (FEI-SP) Se  $(n+4)! + (n+3)! = 15(n+2)!$ , então:

- a)  $n = 4$       c)  $n = 2$       e)  $n = 0$  alternativa e  
 b)  $n = 3$       d)  $n = 1$

**15**

- O hodômetro de um automóvel apresenta uma sequência de oito quadrinhos. Nos cinco primeiros é representado o número de quilômetros rodados e nos últimos é representado o número de metros rodados. Por exemplo, o registro:

0	1	2	7	5	0	3	4
---	---	---	---	---	---	---	---

indica 1.275,034 km.



Desde o momento em que esse veículo sai da fábrica com o hodômetro "zerado"

0	0	0	0	0	0	0	0
---	---	---	---	---	---	---	---

até o momento em que é registrada a marca

9	9	9	9	9	9	9	9
---	---	---	---	---	---	---	---

todos os quadrinhos apresentam os algarismos 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 ou 9. O total de números com pelo menos dois algarismos iguais que podem ser lidos nesse hodômetro é:

alternativa a

- a)  $10^8 - \frac{10!}{2}$       d)  $9 \cdot (10^7 - 9!)$   
 b)  $10!$       e)  $10^8$   
 c)  $9 \cdot 10^7$

## PRÉ-REQUISITOS PARA O CAPÍTULO 7

Faça as atividades no caderno.

Responda às questões a seguir, cuja finalidade é rever os principais conceitos necessários para o desenvolvimento da teoria e das atividades do Capítulo 7.

- 1** Qualquer produto de números naturais consecutivos e não nulos pode ser representado por meio de fatoriais. Por exemplo, para representar a expressão  $9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6$  por meio de fatoriais, basta multiplicar e ao mesmo tempo dividir a expressão por  $5!$ , obtendo:

$$9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5!}{5!} = \frac{9!}{5!}$$

Aplicando essa ideia, represente por meio de fatoriais os seguintes produtos:

- a)  $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot \frac{10!}{6!}$   
 b)  $n(n-1)(n-2)$ , em que  $n$  é um número natural maior que 2.  $\frac{n!}{(n-3)!}$

- 2** Calcule o valor da expressão  $\frac{n!}{(n-p)!}$  para:

- a)  $n = 5$  e  $p = 2$  20  
 b)  $n = 6$  e  $p = 3$  120

- 3** Calcule o valor da expressão  $\frac{n!}{p! \cdot (n-p)!}$  para:

- a)  $n = 7$  e  $p = 4$  35  
 b)  $n = 10$  e  $p = 8$  45

“Algo somente é impossível até que alguém duvide e acabe provando o contrário.”  
Albert Einstein, físico alemão, criador da teoria da relatividade.

Componha uma equipe com alguns colegas e discutam as seções a seguir.

## ANÁLISE DA RESOLUÇÃO

Ao calcular o número  $N$  de senhas que não podem ser formadas, o aluno cometeu um erro, pois a senha 2121 foi contada duas vezes: no primeiro e no terceiro casos. Observe:

Um aluno resolveu o exercício conforme a reprodução a seguir. Um erro foi cometido.

Apontem o erro e refaçam a resolução no caderno, corrigindo-a.

### Exercício

Um internauta pretende formar uma sequência de quatro algarismos, distintos ou não, escolhidos entre 1, 2, 3, 4 e 5, para adotar como senha de acesso a um arquivo pessoal. Como o dia 2 de janeiro é a data de seu aniversário, ele estabeleceu o critério de que a senha não pode apresentar os algarismos 2 e 1 juntos e nessa ordem, pois, segundo recomendações de criptógrafos, não é seguro adotar datas de aniversário em senhas. Quantas senhas distintas ele pode formar?

#### Resolução

1º) O total de senhas de quatro algarismos, sem levar em consideração a restrição, é:

1º algarismo	2º algarismo	3º algarismo	4º algarismo
Número de possibilidades	5	5	5

$5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 625$

Aqui foi considerada a possibilidade 21

2º) Temos três casos possíveis de senhas que não podem ser formadas (com 2 e 1 juntos, nesta ordem):

Assim, o número  $N$  de senhas que não podem ser formadas é dado por:  $N = 75 - 1 = 74$   
Logo, o número de senhas distintas que o internauta pode formar é:  $625 - 74 = 551$

- 2 e 1 nas duas primeiras posições:

$$1 \cdot 1 \cdot 5 \cdot 5 = 25 \quad \text{Número de possibilidades} \rightarrow$$

2	1	3º algarismo	4º algarismo
1	1	5	5

ou

- 2 e 1 na segunda e terceira posições:

$$5 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 5 = 25 \quad \text{Número de possibilidades} \rightarrow$$

1º algarismo	2	1	4º algarismo
5	1	1	5

ou

- 2 e 1 na terceira e quarta posições:

$$5 \cdot 5 \cdot 1 \cdot 1 = 25 \quad \text{Número de possibilidades} \rightarrow$$

1º algarismo	2º algarismo	2	1
5	5	1	1

Total de senhas que não podem ser usadas:  $25 + 25 + 25 = 75$

3º) Então, o número de senhas diferentes que o internauta pode formar é:  $625 - 75 = 550$

total

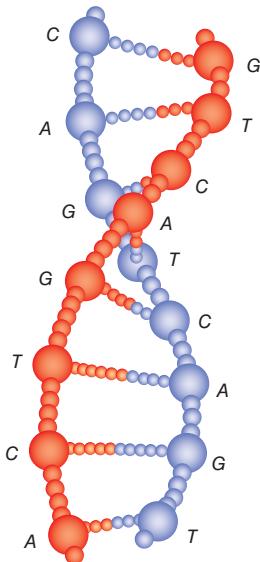
senhas que  
não podem  
ser usadas

## MATEMÁTICA SEM FRONTEIRAS

### O ácido desoxirribonucleico (DNA)

No século XIX, o cientista suíço Johann Friedrich Miescher isolou de um núcleo celular uma substância que denominou ácido nucleico. Mais tarde, no século XX, os cientistas Oswald Theodore Avery, Colin M. MacLeod e Maclyn MacCarty descobriram que um dos ácidos nucleicos, o DNA (ácido desoxirribonucleico), é o responsável pela transmissão da herança biológica entre os seres vivos, à exceção de muitos vírus, em que esse papel é desempenhado por outro ácido.

O DNA é uma molécula em forma de dupla-hélice que lembra uma escada torcida. Os “degraus” ligam bases nitrogenadas representadas por A (adenina), T (timina), C (citosina) e G (guanina). Esses “degraus”, chamados de pontes de hidrogênio, ligam as bases apenas do seguinte modo: A-T, T-A, C-G e G-C, como no fragmento de DNA representado no esquema abaixo.



FAUSTINO

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Essas ligações formam sequências de pares ordenados de bases, sem limite teórico de extensão. Cada uma dessas sequências determina a individualidade e as diferenças entre os seres vivos. A sequência do DNA é uma herança genética, ou seja, é transmitida de um organismo para seus descendentes.

Testes de paternidade, por exemplo, podem ser realizados por meio do DNA. Processos químicos permitem comparar a sequência do DNA de um suposto pai com a de um suposto filho. Como metade do DNA de uma pessoa é herdada do pai e a outra metade da mãe, se a sequência do suposto filho tem metade de seu DNA igual à do suposto pai, está provada a paternidade.

#### ATIVIDADES

Faça as atividades no caderno.

- O fragmento de DNA representado na figura acima pode ser descrito pela sequência de pares ordenados A-T, C-G, T-A, G-C, A-T, C-G, T-A, G-C. Sabendo que dois fragmentos de DNA são iguais se, e somente se, as sequências que o descrevem são iguais, determinem uma sequência que descreva um fragmento de DNA diferente do representado na figura acima. Resposta pessoal.
- Um cientista deseja sintetizar um fragmento de DNA com 8 pares ordenados de bases, de modo que dois pares consecutivos não sejam iguais, como o fragmento da figura acima. Quantos fragmentos diferentes podem ser obtidos? 8.748

## CIBERCULTURA

A escolha de uma senha e da técnica para memorizá-la pode causar problemas irreversíveis. Há algum tempo, foram criados *games* que estimulam o subconsciente da pessoa a memorizar senhas de até 30 caracteres sem que ela as conheça por completo. Aplicativos que embaralham e camuflam o cursor na tela do computador também foram desenvolvidos para confundir olhos bisbilhoteiros.

A inviolabilidade da comunicação entre pessoas, entre entidades civis ou militares e entre governos é um direito imprescindível. Mensagens secretas interceptadas e decifradas mudaram o rumo da história.

Agora, você e seus colegas de grupo pesquisarão formas e instrumentos criptográficos criados e usados ao longo da história até os dias de hoje.



Qual desses cursores é o verdadeiro?

### Justificativa

A segurança, pessoal ou de um sistema, e a garantia da privacidade são itens cada vez mais importantes, pois o mundo real vive no mundo virtual e este adentra e se confunde com aquele, exigindo a sofisticação das chaves de acesso.

### Objetivo

Busca de técnicas criptográficas e formas de elaboração e memorização de senhas.

### Apresentação

Painel com mensagem codificada ou senha, em cartaz ou mídia eletrônica, para ser decifrada em aula, por meio de alguma dica.

### Questões para pensar em grupo

1. O que é mais importante para a inviolabilidade de uma senha: a forma da sua elaboração ou seu resguardo? Ou ambos?
2. Uma senha pode ser elaborada com uma imagem?
3. Elaborar mensagem ou senha? Quais dicas devem ser elaboradas para decifrar a mensagem ou a senha, de modo que essas dicas não sejam nem inócuas e nem muito reveladoras?

### Organização do trabalho

- Escrevam as etapas necessárias para o desenvolvimento desse trabalho e as distribuam entre os componentes do grupo.
- Façam um cronograma para a realização do trabalho que contemple o prazo estabelecido.
- Não se esqueçam de indicar as fontes de pesquisa e a data de acesso.