Trabalho 01

Questão 01

1º) *Normalização da densidade de probabilidade e obtenção de A para $t \in [0, \infty)$.*

$$\int_0^\infty \rho(t)\, dt = 1 \Rightarrow \int_0^\infty A e^{-\lambda t}\, dt = 1$$

$$\Rightarrow A \left(\lim_{a \to \infty} \int_0^a e^{-\lambda t} dt \right) = 1$$

Essa integral representa uma distribuição exponencial.

Para $\lambda > 0$, fazemos uma substituição simples

$$\begin{cases} u = -\lambda t \\ du = -\lambda\, dt \end{cases}$$

donde vem:

$$-\frac{1}{\lambda} \lim_{a \to \infty} \int_0^a -\lambda\, e^{-\lambda t}\, dt = -\frac{1}{\lambda} \lim_{a \to \infty} \int_0^a e^u du$$

$$= -\frac{1}{\lambda} \left(\lim_{a \to \infty} e^{-\lambda t} - e^0 \right) = -\frac{1}{\lambda}(-1)$$

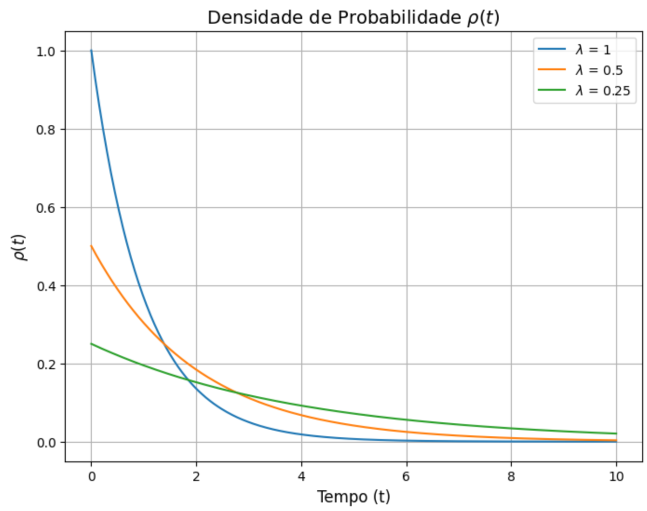
$$= \frac{1}{\lambda}$$

Assim:

$$\frac{A}{\lambda} = 1 \Rightarrow \boxed{A = \lambda}$$

2º) *Gráfico.*

```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# Definindo o tempo e os valores de lambda
t = np.linspace(0, 10, 400)
lambda_values = [1, 0.5, 0.25]

# Função rho(t) = lambda * exp(-lambda * t)
def rho(t, lam):
    return lam * np.exp(-lam * t)

# Plotando os gráficos para diferentes valores de lambda
plt.figure(figsize=(8, 6))

for lam in lambda_values:
    plt.plot(t, rho(t, lam), label=f'$\lambda$ = {lam}')

# Configurando o gráfico
plt.title(r'Densidade de Probabilidade $\rho(t)$', fontsize=14)
plt.xlabel('Tempo (t)', fontsize=12)
plt.ylabel(r'$\rho(t)$', fontsize=12)
plt.legend()
plt.grid(True)

# Exibindo o gráfico
plt.show()
```



3º) *Demonstração de $N_t = N_0 e^{-\lambda t}$.*

Notando que

$$\Pr(\text{decair}) + \Pr(\text{não decair}) = 1$$

temos:

$$\int_0^t \lambda e^{-\lambda t'} dt' + \frac{N_t}{N_0} = 1$$

Podemos calcular essa integral fazendo a substituição simples

$$\begin{cases} u = -\lambda t' \\ du = -\lambda dt' \end{cases}$$

donde vem:

$$-\int_0^t -\lambda e^{-\lambda t'} dt' = -\int_0^t e^u du = -e^{-\lambda t'} \Big|_0^t$$

$$= -e^{-\lambda t} - (-e^0) = 1 - e^{-\lambda t}$$

Assim:

$$\left(1 - e^{-\lambda t}\right) + \frac{N_t}{N_0} = 1 \Rightarrow \frac{N_t}{N_0} = e^{-\lambda t}$$

$$\therefore \boxed{N_t = N_0 e^{-\lambda t}}$$

como se queria.

4º) *Probabilidade de decair entre $t = 0$ até $t = \tau$.*

Temos que resolver:

$$\Pr\left(\text{decair entre } t = 0 \text{ e } t = \frac{1}{\lambda}\right) = \int_0^{1/\lambda} \lambda e^{-\lambda t'} dt'$$

$$= -e^{-\lambda t'} \Big|_0^{\frac{1}{\lambda}} = -e^{-\lambda\left(\frac{1}{\lambda}\right)} - \left(-e^{-\lambda \cdot 0}\right) = -e^{-1} + 1$$

$$\therefore \boxed{\Pr\left(\text{decair entre } t = 0 \text{ e } t = \frac{1}{\lambda}\right) = 1 - \frac{1}{e}}$$

5º) Átomos em $t = \tau$, para $N_0 = 10000$ átomos.

$$N_\tau = 10000 \cdot e^{-\lambda \cdot \left(\frac{1}{\lambda}\right)} = 10000 \cdot e^{-1} = \frac{10000}{e} \approx 3679$$

átomos.

6º) Átomos em $t = 2\tau$ para $N_0 = 10000$ átomos.

$$N_{2\tau} = 10000 \cdot e^{-\lambda \cdot \frac{2}{\lambda}} = 10000 \cdot e^{-2} = \frac{10000}{e^2} \approx 1353$$

átomos.

Questão 02

(*1ª parte*)

Pela Lei de Stefan-Boltzmann, temos:

$$\frac{P}{A} = \alpha T^4$$

onde P representa a potência e A a área.

Considerando o Sol como uma esfera perfeita, vem, sendo a área de uma esfera dada por $A_S = 4\pi r^2$:

$$P = 4\pi \left(\frac{d_S}{2}\right)^2 \alpha T^4 = \frac{dE_0}{dT}$$

onde E_0 é a energia de repouso (da teoria da relatividade restrita).

Assim:

$$\frac{d(m_0 c^2)}{dt} = \pi d_S^2 \alpha T^4$$

$$\frac{dm_0}{dt} = \frac{\pi d_S^2 \alpha T^4}{c^2}$$

isto é, a massa de repouso do Sol.

Substituindo os valores, vem:

$$\frac{dm_0}{dt} \approx \frac{3{,}14 \cdot (1{,}4 \times 10^9)^2 \cdot 5{,}67 \times 10^{-8} \cdot 5700^4}{(3 \times 10^8)^2} = \frac{3{,}14 \cdot 1{,}96 \times 10^{18} \cdot 5{,}67 \times 10^{-8} \cdot 1{,}055 \times 10^{15}}{9 \times 10^{16}} \approx 4{,}1 \times 10^9 \text{ kg/s}$$

$$\therefore \boxed{\frac{dm_0}{dt} \approx 4{,}1 \times 10^9 \text{ kg/s}}$$

(*2ª parte*) A massa perdida em 1 ano é dada por:

$$dm_0 = 4{,}1 \times 10^9 \ dt \Rightarrow m_0 = 4{,}1 \times 10^9 \ \cdot t$$

Como

$$1 \text{ ano} = 365 \text{ dias} \cdot \left(\frac{24\text{h}}{1 \text{ dia}}\right) \cdot \left(\frac{3600\text{s}}{1 \text{ dia}}\right) = 31536000 \text{ s} \approx 3{,}1536 \times 10^7 \text{ s}$$

vem:

$$\Rightarrow m_0 = 4{,}1 \times 10^9 \cdot (3{,}1536 \times 10^7) \approx 1{,}29 \times 10^{17} \text{ kg}$$

e a fração da massa de repouso perdida é:

$$\boxed{\frac{m_0}{m_S} = \frac{1{,}29 \times 10^{17}}{2 \times 10^{30}} \approx 6{,}5 \times 10^{-14}}$$

(*3ª parte*)

Para isso, basta calcular:

$$\frac{\text{massa do sol}}{\text{massa perdida por ano}} = \frac{2 \times 10^{30}}{1{,}29 \times 10^{17}} \approx 1{,}55 \times 10^{13}$$

anos.

Questão 03

Cálculo da energia do fóton:

$$E = \frac{hc}{\lambda} = \frac{(4{,}13 \times 10^{-15} \text{ eV} \cdot \text{s})\left(3 \times 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)}{200 \times 10^{-9} \text{ m}} = 0{,}06195 \times 10^2 \approx 6{,}2 \text{ eV}$$

Ocorre fotoemissão em ambos os metais, pois a energia é maior que a função trabalho de cada metal ($E > \tau_A$ e $E > \tau_B$).

Como a energia cinética máxima é dada por

$$E_C^{\text{max}} = h\nu - \tau$$

ela não depende da intensidade da fonte, então nenhum efeito irá ocorrer ao duplicar a intensidade. Porém há aumento no número de elétrons emitidos, pois há maior incidência de fótons e não existe atrasos de emissão.

Questão 04

$$\oint p_q dq = nh$$

$$\Rightarrow \oint L d\theta = nh$$

como o momento angular $L = mvr$ é constante, temos:

$$\Rightarrow L \oint_0^{2\pi} d\theta = nh$$

$$2\pi L = nh$$

$$L = \frac{nh}{2\pi} = n\hbar$$

Questão 05

Energia cinética (em eV):

$$E_c = \frac{3}{2} \cdot \frac{k_B T}{1{,}6 \times 10^{-19}} = \frac{3}{2} \cdot \frac{1{,}38 \times 10^{-23} \cdot 300}{1{,}6 \times 10^{-19}}$$
$$\approx 0{,}036 \text{ eV}$$

O comprimento de onda de Compton é dado por:

$$\lambda_c = \frac{h}{m_n c} = \frac{6{,}626 \times 10^{-34}}{1{,}674 \times 10^{-27} \cdot 3{,}0 \times 10^{8}}$$
$$\approx 1{,}319 \times 10^{-15} \text{ m}$$

O comprimento de onda de De Broglie é dado por:

$$\lambda_d = \frac{h}{\sqrt{E_c 2 m_n}} =$$

$$= \frac{6{,}626 \times 10^{-34}}{\sqrt{\left(\frac{3}{2} \cdot 1{,}38 \times 10^{-23} \cdot 300\right) \cdot 2 \cdot 1{,}674 \times 10^{-27}}}$$

$$= \frac{6{,}626 \times 10^{-34}}{\sqrt{2079{,}108 \times 10^{-50}}} \approx \frac{6{,}626 \times 10^{-34}}{45{,}59 \times 10^{-25}}$$

$$\approx 0{,}1453 \times 10^{-9} = 1{,}453 \times 10^{-10} \text{ m}$$

Questão 06

Da equação:

$$E = h\nu$$

Pela relação

$$\sigma_E \cdot \sigma_t \approx \hbar$$

e, considerando $\nu = 1/t$, onde t é o período, vem:

$$\sigma_E \approx \hbar \cdot \sigma_\nu$$

e:

$$\sigma_E = h \cdot \sigma_\nu$$

Da equação:

$$\Delta E \Delta t = \frac{\hbar}{2}$$

temos:

$$\Delta E = \frac{\hbar}{2\Delta t} = \frac{6{,}6 \times 10^{-34}}{4 \cdot 3{,}14 \cdot 10^{-12}} = 5{,}25 \times 10^{-23}\, J$$

donde vem:

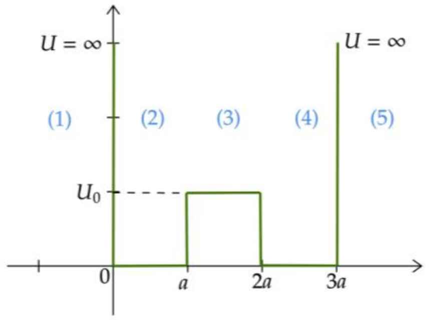
$$\sigma_\nu = \frac{\sigma_E}{h} = \frac{5{,}25 \times 10^{-23}}{6{,}6 \times 10^{-34}} = 7{,}95 \times 10^{10}\, Hz$$

Dado o comprimento de onda dos raios γ, da ordem de $10^{-11}\, m$, calculamos a frequência:

$$\nu = \frac{c}{\lambda} = \frac{3 \times 10^{8}}{10^{-11}} \approx 10^{19} \text{ Hz}$$

pela ordem de grandeza, temos que $10^{19} \gg 10^{10}$, o que implica que a incerteza na frequência dos fótons é pouco significativa comparado a frequência típica dos raios gama.

Questão 07



Eq. S. unidimensional independente do tempo:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi(x)+U(x)\psi(x)=E\psi(x)$$

a) *Região* (1), $x<0$, $U=\infty$:

$$\psi(x)=0$$

b) *Região* (2), $0<x<a$, $U=0$:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\psi(x)}{\partial x^2}=E\psi(x)$$

$$\Rightarrow\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\psi(x)}{\partial x^2}+E\psi(x)=0$$

Multiplicando a equação por $2m/\hbar^2$, vem:

$$\frac{\partial^2\psi(x)}{\partial x^2}+\left(\frac{2mE}{\hbar^2}\right)\psi(x)=0$$

Fazendo a substituição:

$$k_1=\frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$$

Temos:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi(x)+k_1^2\psi(x)=0$$

A solução dessa equação é dada por:

$$\boxed{\psi_1(x)=C_1e^{ik_1x}+C_2e^{-ik_1x}}$$

$$\boxed{\psi_1(x)=C_1'\cos(k_1x)+C_2'\sin(k_1x)}$$

c) *Região* (3), $a<x<2a$, $U=U_0$:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi(x)+U_0\psi(x)=E\psi(x)$$

$$\Rightarrow\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi(x)+(E-U_0)\psi(x)=0$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi(x)+\left(\frac{2m(E-U_0)}{\hbar^2}\right)\psi(x)=0$$

Fazendo

$$k_2=\frac{\sqrt{2m(E-U_0)}}{\hbar^2},k_2\in\mathbb{R}\ (\text{pois } U_0<E)$$

vem:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi(x)+k_2^2\psi(x)=0$$

que tem solução:

$$\boxed{\psi_2(x)=C_3e^{ik_2x}+C_4e^{-ik_2x}}$$

$$\boxed{\psi_2(x)=C_3'\cos(k_2x)+C_4'\sin(k_2x)}$$

d) Região (4), $2a<x<3a$, $U=0$:

Caso idêntico à região (2), com solução:

$$\boxed{\psi_3(x)=C_5e^{ik_1x}+C_6e^{-ik_1x}}$$

$$\boxed{\psi_3(x)=C_5'\cos(k_1x)+C_6\sin(k_1x)}$$

e) Região (5), $x>3a$, $U=\infty$:

$$\psi(x)=0$$

Como condições de contorno, temos o seguinte:

a) $\psi_1(0)=0=\psi_3(3a)$.
b) Continuidade de $\psi(x)$ e das derivadas:

$$\begin{cases}\psi_1(a)=\psi_2(a)\\ \left.\dfrac{d\psi_1(x)}{dx}\right|_{x=a}=\left.\dfrac{d\psi_2(x)}{dx}\right|_{x=a}\end{cases}$$

$$\begin{cases}\psi_2(2a)=\psi_3(2a)\\ \left.\dfrac{d\psi_2(x)}{dx}\right|_{x=2a}=\left.\dfrac{d\psi_3(x)}{dx}\right|_{x=2a}\end{cases}$$

Assim, dadas as equações

$$\begin{cases}\psi_1(x)=C_1'\cos(k_1x)+C_2'\sin(k_1x)\\ \psi_2(x)=C_3'\cos(k_2x)+C_4'\sin(k_2x)\\ \psi_3(x)=C_5'\cos(k_1x)+C_6'\sin(k_1x)\end{cases}$$

Podemos aplicar as condições de contorno:

$$\psi_1(0)=C_1'\cos(0)+C_2'\sin(0)\Rightarrow\boxed{C_1'=0}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\psi_1(x)=C_2'\sin(k_1x)\\ \psi_2(x)=C_3'\cos(k_2x)+C_4'\sin(k_2x)\\ \psi_3(x)=C_5'\cos(k_1x)+C_6'\sin(k_1x)\end{cases}$$

$$\psi_3(3a)=\boxed{C_5'\cos(3ak_1)+C_6'\sin(3ak_1)=0}$$

$$\psi_1(a)=C_2'\sin(k_1a)=\psi_2(a)$$
$$=C_3'\cos(k_2a)+C_4'\sin(k_2a)$$

$$\Rightarrow\boxed{C_2'\sin(k_1a)=C_3'\cos(k_2a)+C_4'\sin(k_2a)}$$

$$\psi_1'(a)=\psi_2'(a)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow C_2' \cos(k_1 a) \cdot k_1 = -C_3' \sin(k_2 a) \cdot k_2 + C_4' \cos(k_2 a) \cdot k_2$$

$$\Rightarrow \boxed{C_2' k_1 \cos(k_1 a) = k_2 (C_4' \cos(k_2 a) - C_3' \sin(k_2 a))}$$

$$\psi_2(2a) = \psi_3(2a)$$

$$\boxed{\begin{gathered} C_3' \cos(2ak_2) + C_4' \sin(2ak_2) = \\ C_5' \cos(2ak_1) + C_6' \sin(2ak_1) \end{gathered}}$$

$$\psi_2'(2a) = \psi_3'(2a)$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{gathered} -C_3' \sin(2ak_2) k_2 + C_4' \cos(2ak_2)\, k_2 = \\ -C_5' \sin(2ak_1)\, k_1 + C_6' \cos(2ak_1)\, k_1 \end{gathered}}$$

Resumindo as equações:

$$\begin{cases} C_1' = 0 \\ C_5' \cos(3ak_1) + C_6' \sin(3ak_1) = 0 \\ C_2' \sin(k_1 a) = C_3' \cos(k_2 a) + C_4' \sin(k_2 a) \\ C_2' k_1 \cos(k_1 a) = k_2 (C_4' \cos(k_2 a) - C_3' \sin(k_2 a)) \\ C_3' \cos(2ak_2) + C_4' \sin(2ak_2) = \\ C_5' \cos(2ak_1) + C_6' \sin(2ak_1) \\ -C_3' \sin(2ak_2) k_2 + C_4' \cos(2ak_2)\, k_2 = \\ -C_5' \sin(2ak_1)\, k_1 + C_6' \cos(2ak_1)\, k_1 \end{cases}$$

Não foi encontrado solução (não trivial) para o sistema acima.