Trabalho IV

1. Considere um quanton preparado no estado $|\psi_t\rangle = \int_{+\infty}^{+\infty} dx N e^{-i(kx-\omega t)}|x\rangle$, com $k, \omega \in \mathbb{R}$ e N é uma constante de normalização.

a) Qual é a função de onda correspondente na base de posição?

R: A função de onda é simplesmente:

$$|\psi_t\rangle = \int_{+\infty}^{+\infty} dx \underbrace{Ne^{-i(kx-\omega t)}}_{c_x} |x\rangle$$

$$\boxed{\psi_t(x) = \langle x|\psi_t\rangle = c_x = Ne^{-i(kx-\omega t)}}$$

b) Qual é a probabilidade de ao medir a posição (coordenada x) desse quanton, encontrarmos ele entre as posições $0m$ e $1m$?

R:

$$\int_0^1 |\psi_t(x)|^2 dx = \int_0^1 \left|Ne^{-(kx-\omega t)}\right|^2 dx = \int_0^1 |N|^2 dx$$

$$= |N|^2 \int_0^1 dx = |N|^2$$

c) Calcule o valor médio da componente x do momento linear desse quanton.

R:

$$\langle P_x\rangle_\psi = \int dx\, \psi_t^*(x) P_x^{\mathrm{op}} \psi_t(x)$$

Assumindo que a partícula pode estar em qualquer posição do espaço:

$$\Rightarrow \langle P_x\rangle_\psi = \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, \psi_t^*(x)(-i\hbar\, \partial_x)\psi_t(x)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, N^* e^{-i(kx-\omega t)}(-i\hbar)\frac{\partial}{\partial x}\left(Ne^{i(kx-\omega t)}\right)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, N^* e^{-i(kx-\omega t)}(-i\hbar)\left(ikNe^{i(kx-\omega t)}\right)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, \hbar k\, N^*N = \hbar k \int_{-\infty}^{+\infty} |N|^2\, dx$$

Da condição de normalização, temos que:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |N|^2\, dx = 1$$

Logo:

$$\boxed{\langle P_x\rangle_\psi = \hbar k}$$

2. Considere o operador de translação de momento linear como sendo $\mathfrak{T}(\delta p_j) = I + \frac{i}{\hbar} X_j \delta p_j$, cuja ação na base de momento linear, $|p_j\rangle$, é definida como $\mathfrak{T}(\delta p_j)|p_j\rangle \coloneqq |p_j + \delta p_j\rangle$, com δp_j sendo uma mudança infinitesimal de momento linear.

a) Verifique que $[P_j, \mathfrak{T}(\delta p_j)]|\psi\rangle = \delta p_j|\psi\rangle \therefore [P_j, \mathfrak{T}(\delta p_j)] = \delta p_j I$, em que $|\psi\rangle = \int dp_j\, \psi_{p_j}|p_j\rangle$ é um vetor de estado qualquer.

R:

$$[P_j, \mathfrak{T}(\delta p_j)]|\psi\rangle = \left(P_j\mathfrak{T}(\delta p_j) - \mathfrak{T}(\delta p_j)P_j\right)|\psi\rangle$$

$$= \left(P_j\left(I + \frac{i}{\hbar}X_j\delta p_j\right) - \left(I + \frac{i}{\hbar}X_j\delta p_j\right)P_j\right)|\psi\rangle$$

$$= \left((P_jI - IP_j) + P_j\left(\frac{i}{\hbar}X_j\delta p_j\right) - \left(\frac{i}{\hbar}X_j\delta p_j\right)P_j\right)|\psi\rangle$$

$$= \left(\underbrace{[P_j, I]}_{=0} + \frac{i}{\hbar}\underbrace{[P_j, X_j]}_{-i\hbar I}\delta p_j\right)|\psi\rangle$$

$$= \left(\frac{i}{\hbar}(-i\hbar I)\delta p_j\right)|\psi\rangle = I\delta p_j|\psi\rangle$$

$$= \delta p_j|\psi\rangle$$

e

$$[P_j, \mathfrak{T}(\delta p_j)]|\psi\rangle = I\delta p_j|\psi\rangle \Rightarrow [P_j, \mathfrak{T}(\delta p_j)] = \delta p_j I$$

c.q.d.

b) Considere também $[P_j, \mathfrak{T}(\delta p_j)]$, a partir de $\mathfrak{T}(\delta p_j) = I + \frac{i}{\hbar}X_j\delta p_j$ para mostrar que $[P_j, X_j] = -i\hbar I$.

R:

$$[P_j, \mathfrak{T}(\delta p_j)] = P_j\mathfrak{T}(\delta p_j) - \mathfrak{T}(\delta p_j)P_j$$

$$= P_j\left(I + \frac{i}{\hbar}X_j\delta p_j\right) - \left(I + \frac{i}{\hbar}X_j\delta p_j\right)P_j$$

$$= (P_jI - IP_j) + P_j\left(\frac{i}{\hbar}X_j\delta p_j\right) - \left(\frac{i}{\hbar}X_j\delta p_j\right)P_j$$

$$[P_j, \mathfrak{T}(\delta p_j)] = \frac{i}{\hbar}[P_j, X_j]\delta p_j$$

Do item “a”, temos:

$$[P_j, \mathfrak{T}(\delta p_j)] = \delta p_j I = \frac{i}{\hbar}[P_j, X_j]\delta p_j$$

$$\Rightarrow [P_j, X_j] = \frac{\hbar I}{i} = -i\hbar I$$

c.q.d.

3. Usando que, na base do momento linear, a ação do operador posição é tal que $\langle p_j|X_j|\psi\rangle = -i\hbar\partial_{p_j}\langle p_j|\psi\rangle$ para qualquer estado $|\psi\rangle$ e aplicando a relação de completeza $I = \int dp_j|p_j\rangle\langle p_j|$, verifique que podemos escrever $\langle X_j^2\rangle_\psi = \int dp_j\psi(p_j)^*\left(-i\hbar\partial_{p_j}\right)^2\psi(p_j)$.

R:

$$\langle X_j^2\rangle_\psi = \langle\psi|X_j^2|\psi\rangle = \langle\psi|IX_jIX_j|\psi\rangle$$

$$= \langle\psi|\left(\int dp_j|p_j\rangle\langle p_j|\right)X_j\left(\int dp_k|p_k\rangle\langle p_k|\right)X_j|\psi\rangle$$

$$= \iint dp_jdp_k\,\langle\psi|p_j\rangle\langle p_j|X_j|p_k\rangle\langle p_k|X_j|\psi\rangle$$

$$= \iint dp_jdp_k\psi^*(p_j)\,\langle p_j|X_j|p_k\rangle\left(-i\hbar\partial_{p_k}\psi(p_k)\right)$$

$$= \int dp_j\psi^*(p_j)\,\langle p_j|X_j\left(\int dp_k(-i\hbar)\partial_{p_k}\psi(p_k)|p_k\rangle\right)$$

$$= \int dp_j\psi^*(p_j)\,(-i\hbar)\partial_{p_j}\left(\int dp_k(-i\hbar)\,\partial_{p_k}\psi(p_k)\,\langle p_j|p_k\rangle\right)$$

$$= \int dp_j\psi^*(p_j)\,(-i\hbar)\partial_{p_j}\int dp_k(-i\hbar)\,\partial_{p_k}\psi(p_k)\,\delta(p_j - p_k)$$

Pela propriedade:

$$\int da\,\delta(b-a)f(a) = f(b)$$

e pela paridade da δ, podemos escrever:

$$= \int dp_j\psi^*(p_j)\,(-i\hbar)^2\partial_{p_j}\left(\partial_{p_j}\psi(p_j)\right)$$

$$= \int dp_j\psi^*(p_j)\,(-i\hbar)^2\partial_{p_jp_j}\psi(p_j)$$

$$= \int dp_j\psi^*(p_j)\left(-i\hbar\partial_{p_j}\right)^2\psi(p_j)$$

c.q.d.

4. Considere o experimento de difração de quantons únicos por uma única fenda feita em uma barreira colada no plano xz. A fenda é feito de $z = -L/2$ a $z = L/2$ e em $y = 0$. A largura da fenda em x é considerada infinita. O movimento relevante será na direção y, e os efeitos de interferência serão observados para medidas da componente z da posição, para um certo valor de y. Dado que a função de onda na base da posição em $y = 0$ é

$$\psi(z) = \begin{cases} N = \text{constante para } z \in \left[-\frac{L}{2},\frac{L}{2}\right] \\ 0 \text{ para } z < -\frac{L}{2}, x > \frac{L}{2} \end{cases}$$

a) Determine N.

R: Pela condição de normalização:

$$\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}}|N|^2dz = 1$$

$$\Rightarrow |N|^2\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}}dz = 1$$

$$\Rightarrow |N|^2L = 1 \Rightarrow \boxed{N = \pm\sqrt{\frac{1}{L}}}$$

b) Calcule a função de onda correspondente na base do momento linear: $\psi(p_z)$.

R: Sabemos que as funções de onda na base de posição e de momento linear estão relacionadas pela transformada de Fourier:

$$\psi(p_z) = (2\pi\hbar)^{-1/2}\int_{-\infty}^{+\infty}\psi(z)e^{-ip_zz/\hbar}dz$$

Como $\psi(z) = 0$ fora do intervalo $\left[-\frac{L}{2},\frac{L}{2}\right]$, temos:

$$\psi(p_z) = (2\pi\hbar)^{-1/2}\int_{-L/2}^{+L/2}\psi(z)e^{-ip_zz/\hbar}dz$$

$$= (2\pi\hbar)^{-1/2}\int_{-L/2}^{+L/2}Ne^{-ip_zz/\hbar}dz$$

$$= \frac{N}{\sqrt{2\pi\hbar}}\int_{-L/2}^{+L/2}e^{-ip_zz/\hbar}dz$$

Para uma integral complexa, usamos:

$$\int e^{ikz}dz = \frac{1}{ik}e^{ikz}$$

Assim, para $k = -p_z/\hbar$:

$$\psi(p_z) = \frac{N}{\sqrt{2\pi\hbar}}\left(\frac{1}{i\left(-\frac{p_z}{\hbar}\right)}\right)\left[e^{i\left(-\frac{p_z}{\hbar}\right)z}\right]_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}}$$

$$\psi(p_z) = \frac{N}{\sqrt{2\pi\hbar}}\left(-\frac{\hbar}{ip_z}\right)\left(e^{-\frac{ipz}{\hbar}\left(\frac{L}{2}\right)} - e^{-\frac{ip_z}{\hbar}\left(\frac{L}{2}\right)}\right)$$

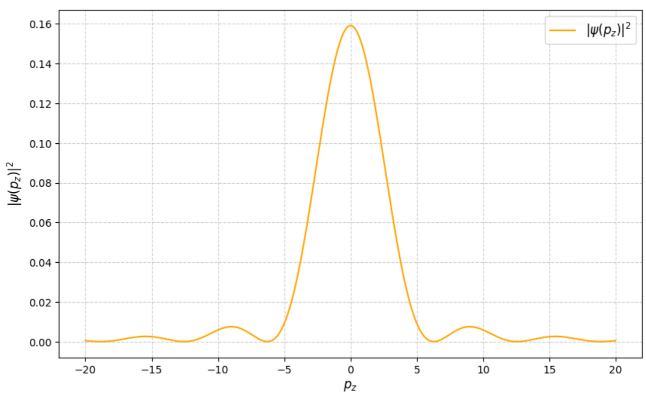
$$\psi(p_z) = \frac{i\hbar N}{\sqrt{2\pi\hbar}}\left(\cos\left(\frac{p_zL}{2\hbar}\right) - i\sin\left(\frac{p_zL}{2\hbar}\right) - \cos\left(\frac{p_zL}{2\hbar}\right) - i\sin\left(\frac{p_zL}{2\hbar}\right)\right)$$

$$\psi(p_z) = \frac{i\hbar N}{\sqrt{2\pi\hbar}}\left(-2i\sin\left(\frac{p_zL}{2\hbar}\right)\right) = \frac{\hbar N}{p_z\sqrt{2\pi\hbar}}2\sin\left(\frac{p_zL}{2\hbar}\right)$$

Substituindo $N = \sqrt{1/L}$, temos:

$$\boxed{\psi(p_z) = \frac{2\hbar}{p_z}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar L}}\right)\sin\left(\frac{p_zL}{2\hbar}\right)}$$

c) Cada valor p_z da componente z do momento linear do quanton livre estará diretamente associado a uma coordenada z onde o quanton poderá chegar na tela de detecção, que é colocada na coordenada y. Faça o gráfico da densidade de probabilidade $|\psi(p_z)|^2$. Compare esse gráfico com os gráficos de intensidade em experimentos de difração de ondas clássicas por uma única fenda.



O gráfico está de acordo com o que se observa no caso clássico, com um pico de probabilidade em $p_z = 0$ e picos menores nas simetrias do centro. Os valores mínimos são observados pra $\sin\left(\frac{p_zL}{2\hbar}\right) = 0$, quando ocorre interferência destrutiva. Também, para diferentes valores de L, quanto maior o valor de L, menor a incerteza do momento, e vice-versa.