Trabalho II

1. Considere $\{|1\rangle, |2\rangle, |3\rangle\}$ sendo uma base ortonormal. O operador $S_{1,2}^{y} = -i|1\rangle\langle 2| + i|2\rangle\langle 1| + 0|3\rangle\langle 3|$ (que é uma das matrizes de Gell-Mann) pode ser utilizado para descrever um observável em Mecânica Quântica?

R:

Para poder descrever um observável, o operador precisa ser hermitiano. Assim:

$$S_{1,2}^{y} = S_{1,2}^{y\,\dagger} \Rightarrow (-i|1\rangle\langle 2| + i|2\rangle\langle 1| + 0|3\rangle\langle 3|)^{\dagger}$$
$$= i|2\rangle\langle 1| - i|1\rangle\langle 2| + 0|3\rangle\langle 3| = S_{1,2}^{y}$$

Logo, o operador pode descrever um observável.

2. Se medirmos $S_{1,2}^{y}$, quais são os valores que podemos obter no experimento? Quais são os estados que podem ser preparados medindo-se $S_{1,2}^{y}$?

R: Pelo Postulado das Medidas, os valores que podemos obter são dados pelos autovalores do operador.

Assim, vamos representar inicialmente o operador na forma matricial.

Aplicando o operador em cada vetor da base:

$$S_{1,2}^{y}\,|1\rangle = (-i|1\rangle\langle 2| + i|2\rangle\langle 1| + 0|3\rangle\langle 3|)\,|1\rangle = i|2\rangle$$

$$S_{1,2}^{y}|2\rangle = (-i|1\rangle\langle 2| + i|2\rangle\langle 1| + 0|3\rangle\langle 3|)|2\rangle = -i|1\rangle$$

$$S_{1,2}^{y}|3\rangle = (-i|1\rangle\langle 2| + i|2\rangle\langle 1| + 0|3\rangle\langle 3|)|3\rangle = 0$$

A matriz fica:

$$\begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(matriz λ_2 de Gell-Mann).

Cálculo dos autovalores:

$$\det\left(S_{1,2}^{y} - \lambda \mathbb{I}_n\right) = 0$$

$$\begin{vmatrix} -\lambda & -i & 0 \\ i & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

Usando o Teorema de Laplace na terceira coluna, vem:

$$\Rightarrow \lambda^2 - (-i^2) = 0 \Rightarrow \lambda^2 - 1 = 0 \Rightarrow \lambda^2 = 1$$

$$\lambda = \pm 1$$

O terceiro autovalor é $\lambda = 0$.

Assim, os valores que podemos obter no experimento é $\{-1, 0, 1\}$.

Determinação dos estados (autovetores do operador):

a) $\lambda = 1$:

$$\begin{pmatrix} -1 & -i & 0 \\ i & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -x - iy = 0 \\ ix - y = 0 \\ -z = 0 \end{cases} \Rightarrow (-iy, y, 0)$$

Tomando $y = 1$:

$$|\psi_1\rangle = -i|1\rangle + |2\rangle$$

Normalizando:

$$\boxed{|\psi_1\rangle = -\frac{i}{\sqrt{2}}|1\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|2\rangle}$$

b) $\lambda = -1$:

$$\begin{pmatrix} 1 & -i & 0 \\ i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x - iy = 0 \\ ix + y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow (iy, y, 0)$$

Tomando $y = 1$:

$$|\psi_2\rangle = i|1\rangle + |2\rangle$$

Normalizando:

$$\boxed{|\psi_2\rangle = \frac{i}{\sqrt{2}}|1\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|2\rangle}$$

c) $\lambda = 0$:

$$\begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -iy = 0 \\ ix = 0 \\ 0z = 0 \end{cases}$$

Nesse caso, z é livre e x e y são nulos. Para $z = 1$:

$$\boxed{|\psi_3\rangle = |3\rangle}$$

3. Para um sistema quântico com um observável $S_{1,2}^{x} = |1\rangle\langle 2| + |2\rangle\langle 1| + 0|3\rangle\langle 3|$, qual é a dimensão do espaço de Hilbert associado?

R: A dimensão do espaço é dada pelo número de vetores da base, nesse caso $\dim(S_{1,2}^{x}) = 3$.

4. Os observáveis $S_{1,2}^{x}$ e $S_{1,2}^{y}$ são compatíveis ou incompatíveis? Disserte sobre o significado da incompatibilidade quântica nesse contexto.

Se os observáveis são compatíveis, então $[S_{1,2}^{x}, S_{1,2}^{y}] = 0$. Pra isso, vamos obter a matriz de representação dos observáveis.

$$S_{1,2}^{y} = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Determinação da matriz $S_{1,2}^{x}$:

$$S_{1,2}^{x}|1\rangle = (|1\rangle\langle 2| + |2\rangle\langle 1| + 0|3\rangle\langle 3|)|1\rangle = |2\rangle$$

$$S_{1,2}^{x}|2\rangle = (|1\rangle\langle 2| + |2\rangle\langle 1| + 0|3\rangle\langle 3|)|2\rangle = |1\rangle$$

$$S_{1,2}^{x}|3\rangle = (|1\rangle\langle 2| + |2\rangle\langle 1| + 0|3\rangle\langle 3|)|3\rangle = 0$$

$$\therefore S_{1,2}^{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(matriz λ_1 de Gell-Mann).

Relação de comutação:

$$[S_{1,2}^{x}, S_{1,2}^{y}] = S_{1,2}^{x}S_{1,2}^{y} - S_{1,2}^{y}S_{1,2}^{x} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} i & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -i & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2i & 0 & 0 \\ 0 & -2i & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Assim, $S_{1,2}^{x}$ e $S_{1,2}^{y}$ não comutam e, portanto, devem ser incompatíveis.

Nesse caso, os operadores não devem, a princípio, compartilhar o mesmo conjunto de autovetores. Assim, ao medir $S_{1,2}^{x}$, medir $S_{1,2}^{y}$ e novamente $S_{1,2}^{x}$ pode não dar no mesmo resultado (como ocorreria para observáveis que comutam).

5. Considere um sistema quântico de 3 níveis com operador hamiltoniano

$$H = \hbar \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Calcule o operador de evolução temporal desse sistema.

R: Para o hamiltoniano independente do tempo, podemos escrever

$$U_t = e^{-iHt/\hbar} = \exp\left(-\frac{it}{\hbar}\hbar \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right)$$
$$= \exp\left(\begin{bmatrix} -it & 0 & 0 \\ 0 & it & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = A$$

Podemos agora fazer a expansão na série de Taylor, considerando que:

$$e^{A} = \mathbb{I} + A + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} + \cdots$$

Como a matriz é diagonal, podemos escrever de maneira direta:

$$e^{A} = \begin{bmatrix} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-it)^n}{n!} & 0 & 0 \\ 0 & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(it)^n}{n!} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-it} & 0 & 0 \\ 0 & e^{it} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \boxed{U_t = e^{A} = \begin{bmatrix} e^{-it} & 0 & 0 \\ 0 & e^{it} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}$$

6. Se o observável $S_{1,2}^{x}$ foi medido e o valor -1 foi obtido, qual é o estado preparado imediatamente depois da medida? Para essa preparação, considere o sistema sob a ação do operador hamiltoniano da questão 5 e calcule o estado evoluído por um tempo t.

R: Cálculo dos autovetores:

$$\det(S_{1,2}^{x} - \lambda \mathbb{I}_n) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\lambda^2 - 1 = 0 \Rightarrow \lambda = \pm 1$$

o terceiro autovalor será $\lambda = 0$.

Se foi medido o valor -1, então o estado preparado é:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow (-y, y, 0)$$

Tomando $y = -1$:

$$|\psi\rangle = |1\rangle - |2\rangle$$

Normalizando:

$$\boxed{|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|2\rangle}$$

Para o estado evoluído:

$$|\psi_t\rangle = U_t|\psi_0\rangle$$

$$\Rightarrow |\psi_t\rangle = \begin{pmatrix} e^{-it} & 0 & 0 \\ 0 & e^{it} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow |\psi_t\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} e^{-it} \\ -e^{it} \\ 0 \end{pmatrix} = \boxed{\frac{1}{\sqrt{2}}\left(e^{-it}|1\rangle - e^{it}|2\rangle\right)}$$

7. Para o estado evoluído da questão 6, quais são as probabilidades dos valores possíveis para medidas de $S_{1,2}^{y}$?

R: Inicialmente, vamos escrever $|\psi_t\rangle$ na base dos autovetores de $S_{1,2}^{y}$:

$$|\psi_t\rangle = c_1|\psi_1\rangle + c_2|\psi_2\rangle + c_3|\psi_3\rangle$$

Autovetores:

$$|\psi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle + \frac{i}{\sqrt{2}}|2\rangle$$

(tomando $y = i$ para o autovetor de $\lambda = 1$)

$$|\psi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle - \frac{i}{\sqrt{2}}|2\rangle$$

(tomando $y = -i$ para o autovetor de $\lambda = -1$)

Nesse caso,

$$c_1 = \langle\psi_1|\psi_t\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(\langle 1| - i\langle 2|)\frac{1}{\sqrt{2}}\left(e^{-it}|1\rangle - e^{it}|2\rangle\right)$$
$$= \frac{1}{2}\left(e^{-it} + e^{it}\right) = \cos t$$

$$c_2 = \langle\psi_2|\psi_t\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(\langle 1| + i\langle 2|)\frac{1}{\sqrt{2}}\left(e^{-it}|1\rangle\right.$$
$$\left. - e^{it}|2\rangle\right) = \frac{1}{2}\left(e^{-it} - e^{it}\right) = -i\sin t$$

$$\therefore |\psi_t\rangle = \cos t\,|\psi_1\rangle - i\sin t\,|\psi_2\rangle$$

Probabilidades:

a) $\lambda = 1$:

$$\Pr(\lambda = 1) = |c_1|^2 = \cos^2(t)$$

b) $\lambda = -1$:

$$\Pr(\lambda = -1) = |c_2|^2 = \sin^2(t)$$

c) $\lambda = 0$:

$$\Pr(\lambda = 0) = |c_3|^2 = 0$$

8. Para o estado inicial $|\psi_0\rangle = |x_-\rangle$, calcule o valor médio de $S_{1,2}^{y}$ no instante de tempo t na representação de Schrödinger.

R: Dado $|x_-\rangle$ como um autovetor de σ_x, podemos escrever, na base ortonormal $\{|1\rangle, |2\rangle, |3\rangle\}$,

$$|x_-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|2\rangle$$

Aplicando o operador evolução temporal a esse estado (questão 5):

$$|\psi_t\rangle = \begin{pmatrix} e^{-it} & 0 & 0 \\ 0 & e^{it} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} e^{-it} \\ -e^{it} \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(e^{-it}|1\rangle - e^{it}|2\rangle\right)$$

Valor médio:

$$\langle S_{1,2}^{y}\rangle = \langle\psi_t|S_{1,2}^{y}|\psi_t\rangle =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(e^{it}\langle 1| - e^{-it}\langle 2|\right)(-i|1\rangle\langle 2| + i|2\rangle\langle 1|$$
$$+ 0|3\rangle\langle 3|)\frac{1}{\sqrt{2}}\left(e^{-it}|1\rangle - e^{it}|2\rangle\right)$$
$$= \frac{1}{2}$$

9. Usando o operador evolução temporal evoluído no tempo da questão 5, obtenha $S_{1,2}^{y}(t)$ na representação de Heisenberg.

R:

Um observável na representação de Heisenberg fica escrito na forma:

$$U_H(t) = U^{\dagger}AU$$

Nesse caso:

$S^y_{1,2}(t)$

$$= \begin{pmatrix} e^{-it} & 0 & 0 \\ 0 & e^{it} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^\dagger \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-it} & 0 & 0 \\ 0 & e^{it} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} e^{it} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-it} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-it} & 0 & 0 \\ 0 & e^{it} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -ie^{it} & 0 \\ ie^{-it} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-it} & 0 & 0 \\ 0 & e^{it} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -ie^{it}e^{it} & 0 \\ ie^{-it}e^{-it} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -ie^{2it} & 0 \\ ie^{-2it} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

10. Usando o hamiltoniano da questão 5, obtenha $S^y_{1,2}(t)$ resolvendo a equação de movimento de Heisenberg.

R: A equação o movimento é dado por:

$$i\hbar \frac{\partial A_H(t)}{\partial t} = [A_H, H]$$

$$i\hbar \frac{\partial S^y_{1,2}(t)}{\partial t} = [S^y_{1,2}, H]$$

Calculando o comutador:

$$[S^y_{1,2} H] = S^y_{1,2} H - H S^y_{1,2}$$

$$= \hbar \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \hbar \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \hbar \begin{pmatrix} 0 & i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \hbar \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \hbar \begin{pmatrix} 0 & 2i & 0 \\ 2i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Disso vem:

$$i\hbar \frac{\partial S^y_{1,2}(t)}{\partial t} = \hbar \begin{pmatrix} 0 & 2i & 0 \\ 2i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial S^y_{1,2}(t)}{\partial t} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow S^y_{1,2}(t) = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 2t - i & 0 \\ 2t + i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

R: Aqui, o operador deve evoluir com o tempo. Nesse caso, pela questão 9,

$$S^y_{1,2}(t) = \begin{pmatrix} 0 & -ie^{2it} & 0 \\ ie^{-2it} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

O valor médio fica:

$$\langle S^y_{1,2}(t) \rangle = \langle \psi_0 | S^y_{1,2}(t) | \psi_0 \rangle$$

$$= \frac{1}{2} (\langle 1| - \langle 2|) \begin{pmatrix} 0 & -ie^{2it} & 0 \\ ie^{-2it} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} (|1\rangle - |2\rangle)$$

$$= \frac{1}{2} (\langle 1| - \langle 2|) \big(-ie^{2it} |1\rangle\langle 2| + ie^{-2it} |2\rangle\langle 1| + 0 |3\rangle\langle 3| \big) (|1\rangle - |2\rangle)$$

$$= \sin(2t)$$