MAC0210 - Laboratório de Métodos Numéricos

EP1 - Relatório

I Parte 1: Método do ponto fixo

I.1 Introdução

Na implementação do método do ponto fixo, foram utilizadas três $g(x)$, sendo elas:

- $g_1(x) = ln(2x^2)$;
- $g_2(x) = \sqrt{\frac{e^x}{2}}$;
- $g_3(x) = -\sqrt{\frac{e^x}{2}}$.

Função g_1

Para obter g_1, foi feita a seguinte manipulação considerando $f(x) = 0$:

$$f(x) = e^x - 2x^2$$

$$e^x = 2x^2$$

$$ln(e^x) = ln(2x^2)$$

$$x = ln(2x^2)$$

Como $g(x)$ é a função que satisfaz $g(x) = x$, temos que $g_1(x) = ln(2x^2)$.

Convergência de g_1

Para verificar a convergência de g_1, foi feito o seguinte cálculo:

$$|g_1'(x)| = \left|\frac{4x}{2x^2}\right| = \frac{2}{|x|}$$

$$|g_1'(x)| < 1 \Leftrightarrow \frac{2}{|x|} < 1 \Leftrightarrow |x| > 2$$

$$|g_1'(x)| > 1 \Leftrightarrow \frac{2}{|x|} > 1 \Leftrightarrow |x| < 2$$

$$|g_1'(x)| = 1 \Leftrightarrow \frac{2}{|x|} = 1 \Leftrightarrow |x| = 2$$

$$\therefore g_1(x) \ converge \ para \ x \in (-\infty, -2) \cup (2, \infty)$$

Funções g_2 e g_3

Para obter g_2 e g_3, foi feita a seguinte manipulação considerando $f(x) = 0$:

$$f(x) = e^x - 2x^2$$

$$e^x = 2x^2$$
$$\frac{e^x}{2} = x^2$$
$$\pm\sqrt{\frac{e^x}{2}} = x$$

Como $g(x)$ é a função que satisfaz $g(x) = x$, temos que $g_2(x) = \sqrt{\frac{e^x}{2}}$ e $g_3(x) = -\sqrt{\frac{e^x}{2}}$.

Convergência de g_2 e g_3

Para verificar a convergência de g_2 e g_3, foi feito o seguinte cálculo:

$$|g_2'(x)| = \left|\frac{e^x}{4\sqrt{\frac{e^x}{2}}}\right|$$

$$|g_3'(x)| = \left|-\frac{e^x}{4\sqrt{\frac{e^x}{2}}}\right|$$

Agora, utilizando a vizualização do gráfico de $|g_2'(x)| = |g_3'(x)|$,

Figura 1: Gráfico de $|g_2'(x)| = |g_3'(x)|$

podemos ver que $|g_2'(x)| < 1$ para todo $x \leq 2$, logo:

$$g_2(x) \ e \ g_3(x) \ convergem \ para \ x \in (-\infty, 2)$$

I.2 Resultado e análise dos experimentos

fixed_point_ep1 foi compilado com:

```
$ gcc -o fixed_point_ep1 fixed_point_ep1.c -lm
```

e obetemos os seguintes resultados:

$\mathbf{x_0 = 0}$

```
$ ./fixed_point 0
x_0 = 0.00 nao converge para g1(x)
x*_2 = 1.488
x*_3 = -0.540
```

$\mathbf{x_0 = 1}$

```
$ ./fixed_point 1
x*_1 = 2.618
x*_2 = 1.488
x*_3 = -0.540
```

$\mathbf{x_0 = -1}$

```
$ ./fixed_point -1
x*_1 = 2.618
x*_2 = 1.488
x*_3 = -0.540
```

$\mathbf{x_0 = 12345}$

```
$ ./fixed_point 12345
x*_1 = 2.618
x_0 = 12345.00 nao converge para g2(x)
x*_3 = -0.540
```

$\mathbf{x_0 = -12345}$

```
$ ./fixed_point -12345
x*_1 = 2.618
x*_2 = 1.488
x*_3 = -0.540
```

II Parte 2: Método de Newton

II.1 Introdução

Na implementação do método de Newton, foi utilizado o método do ponto fixo com a $g(x)$ de Newton para encontrar as raizes para as quais cada um dos pontos no domínio $[l_1, u_1] \times [l_2, u_2]$ converge.

Como critérios de parada para as iterações do método, foram utilizados:

- **MAXK**: o número máximo de iterações $k = 45$;
- **TOL**: o erro de tolerância e^{-20}.

Para os casos que as iterações não convergem, os pontos recebem a cor preta, e dessa forma, com cada raiz recebendo uma cor, são formados fractais com as bacias de convergência de $f(x)$.

II.2 Funções e resultados

newton_ep1 foi compilado com:

```
$ gcc -o newton_ep1 newton_ep1.c -lm
```

As figuras foram plotadas com os comandos:

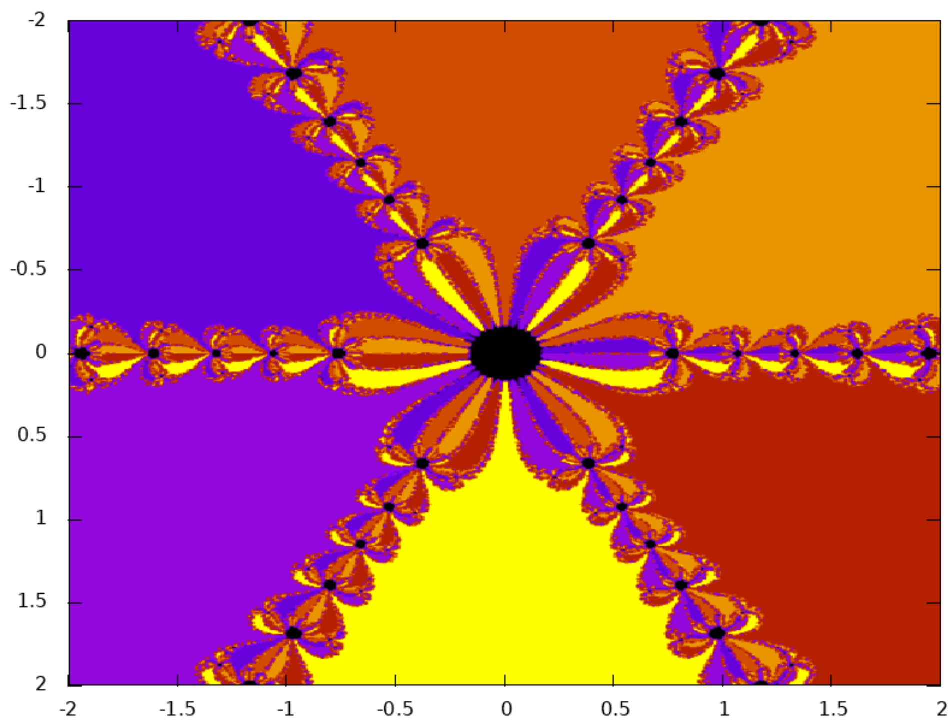
```
$ gnuplot
gnuplot> set terminal png size 950,750
gnuplot> set pm3d map
gnuplot> unset colorbox
gnuplot> set yrange [] reverse
gnuplot> set output 'roots.png'
gnuplot> splot "output.txt" u 2:1:3
```

$\mathbf{f(x) = x^6 - 1}$

```
$ ./newton_ep1 -2 -2 2 2 633 500
z* = -0.50-0.87i
z* = 0.50-0.87i
z* = 0.50+0.87i
z* = -1.00-0.00i
z* = -0.50+0.87i
z* = 1.00-0.00i
```

A figura gerada está dividida em 6 grandes regiões, cada uma com uma cor diferente, que representam as bacias de convergência de cada uma das raízes de $f(x)$.

Os pontos de encontro entre as "pétalas" do fractal são os pontos onde $f(x)$ não convergiu para uma raiz devido às condições de parada ou pontos nos quais $f'(x) = 0$.

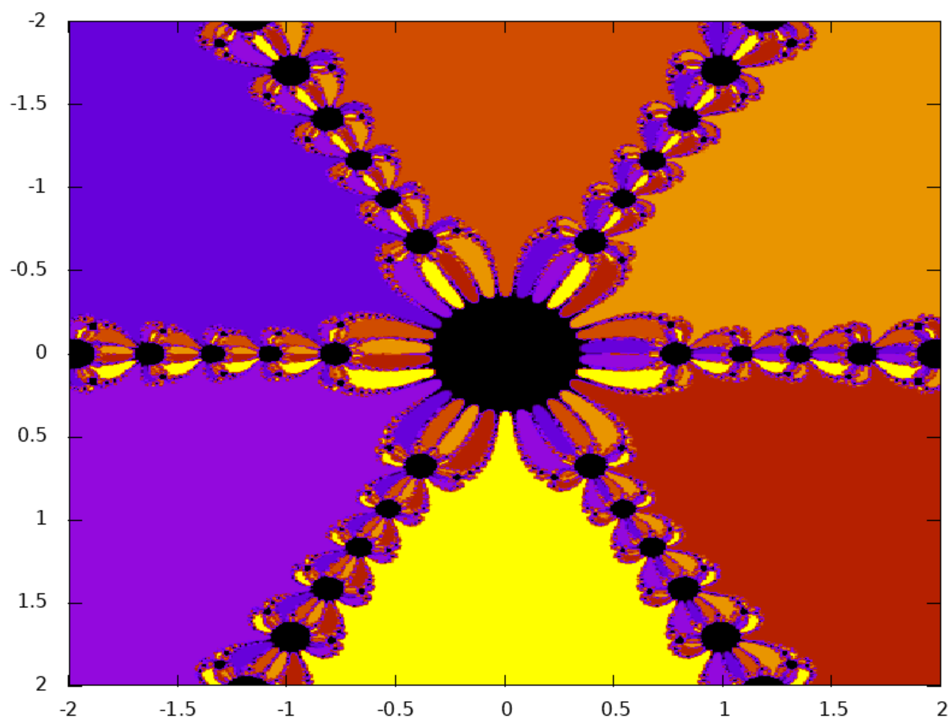


*$\mathbf{f(x) = x^6 - 1}$

```
$ ./newton_ep1 -2 -2 2 2 633 500
z* = -0.50-0.87i
z* = 0.50-0.87i
z* = 0.50+0.87i
z* = -1.00-0.00i
z* = -0.50+0.87i
z* = 1.00-0.00i
```

*Desta vez, utilizando **MAXK**= 25.

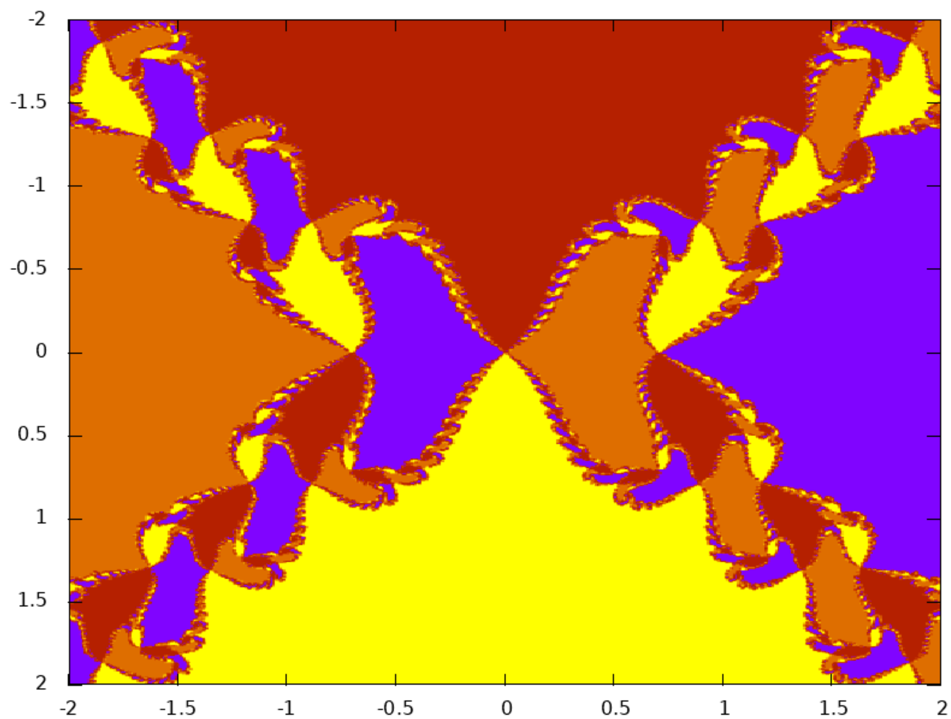
Podemos ver que o fractal gerado é o mesmo, porém com mais pontos que não convergem, aumentando o tamanho das "estrelas pretas" nos encontros das "pétalas".



$\mathbf{f(x) = x^4 + x^2 - 6}$

```
$ ./newton_ep1 -2 -2 2 2 633 500
z* = 0.00+1.73i
z* = -1.41-0.00i
z* = 0.00-1.73i
z* = 1.41-0.00i
```

A função x^4 produziria um fractal com 4 braços (como o exemplo anterior porém com 2 a menos), contudo, podemos ver que a adição de x^2 faz com que os braços sejam "puxados" para o eixo x.



$\mathbf{f(x) = x^6 + \frac{2}{x^2} - 11}$

```
$ ./newton_ep1 -15 -15 15 15 633 500
z* = -0.74-1.31i
z* = 1.47-0.00i
z* = -1.47+0.00i
z* = 0.74-1.31i
z* = -0.74+1.31i
z* = 0.43+0.00i
z* = 0.74+1.31i
z* = -0.43-0.00i
```

Podemos ver que a utilização de um domínio maior faz com que o fractal gerado seja ampliado.