Física Geral

21048

Tema 1, parte 7/7

Orientações de resposta aos exercícios propostos

Livro de texto (Halliday), capítulos 9 e 10

Capítulo 9

Problema 2

O centro de massa de um sistema de partículas pontual é dado por (M é a massa total)

$$\vec{r}_{CM} = \frac{1}{M}\sum_i m_i \vec{r}_i$$

que, decomposto em componentes x e y, leva a

$$r_x^{CM} = \frac{1}{M}\sum_i m_i x_i \quad ; \quad r_y^{CM} = \frac{1}{M}\sum_i m_i y_i$$

Olhando à posição das várias massas na figura temos, a 2 alg.sig.,

$$r_x^{CM} = \frac{1}{(3{,}0 + 4{,}0 + 8{,}0)\text{ kg}} \cdot [(3{,}0\text{ kg}) \cdot (0\text{ m}) + (4{,}0\text{ kg}) \cdot (2\text{ m}) + (8{,}0\text{ kg}) \cdot (1\text{ m})] = 1{,}1\text{ m}$$

$$r_y^{CM} = \frac{1}{(3{,}0 + 4{,}0 + 8{,}0)\text{ kg}} \cdot [(3{,}0\text{ kg}) \cdot (0\text{ m}) + (4{,}0\text{ kg}) \cdot (1\text{ m}) + (8{,}0\text{ kg}) \cdot (2\text{ m})] = 1{,}3\text{ m}$$

Se m_3 aumentar o centro de massa tenderá a deslocar-se na sua direção, em ambos os eixos. Basta substituir p.ex. $m_3 = 20$ kg nas expressões para verificar isso. No limite em que m_3 é extremamente massivo, o centro de massa praticamente coincide com a posição dessa massa.

Problema 15

Na explosão apenas atuam forças internas. Assim, o momento linear[1] total do projétil mantém-se, ainda que este se divida em duas partes. Imediatamente antes da explosão o projétil tinha velocidade segundo x de

$$v_x = v_{0x} = \left(20\frac{\text{m}}{\text{s}}\right) \cdot \cos(60º) = 10\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

[1] A quantidade 'momento linear' é por vezes também designada de 'quantidade de movimento'.

Imediatamente após a explosão, atendendo à conservação do momento linear, a que os dois fragmentos têm a mesma massa e que um deles fica com velocidade nula (tanto em *x* como em *y*), temos

$$\Delta\vec{p} = 0 \Leftrightarrow \vec{p}_f = \vec{p}_i \Leftrightarrow m v_x^{\text{antes}} = \frac{m}{2} \cdot v_{1x}^{\text{depois}} + \frac{m}{2} \cdot v_{2x}^{\text{depois}} \Leftrightarrow 10\,\frac{\text{m}}{\text{s}} = \frac{1}{2} \cdot \left(0\,\frac{\text{m}}{\text{s}}\right) + \frac{1}{2} v_{2x}^{\text{depois}} \Leftrightarrow v_{2x}^{\text{depois}} = 20\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Para o eixo dos *yy* a velocidade é nula para ambos os fragmentos, novamente pela conservação de momento linear. No que se segue vamos precisar do instante da explosão, i.e. em que v_y se anula, que é

$$v_y = v_{0y} - gt \Leftrightarrow 0\text{ m} = \left(20\,\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)\text{sen}(60º) - \left(9{,}8\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right)t \Leftrightarrow t = 1{,}77\text{ s}$$

Fazendo a origem do referencial no local de tiro, a explosão acontece a uma altitude e posição horizontal de respetivamente

$$y_{max} = v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2 \Leftrightarrow y_{max} = \left(20\,\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)\text{sen}(60º)\cdot(1{,}77\text{ s}) - \left(4{,}9\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right)\cdot(1{,}77\text{ s})^2 = 15{,}3\text{ m}$$

$$x = x_0 + v_{0x}t \Leftrightarrow x = 0\text{ m} + \left(20\,\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)\cos(60º)\cdot(1{,}77\text{ s}) = 17{,}7\text{ m}$$

Após a explosão o fragmento 2 entra em movimento de projétil, com posições segundo *x* e *y* dadas por, do exposto acima e reajustando o tempo para $t = 0$ s no momento da explosão,

$$\begin{cases} x = x_0 + v_{0x}t \\ y = y_0 + v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 17{,}7\text{ m} + \left(20\,\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)t \\ y = 15{,}3\text{ m} - \frac{1}{2}\left(9{,}8\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right)t^2 \end{cases}$$

O tempo de queda do fragmento 2 é então

$$0\text{ m} = 15{,}3\text{ m} - \frac{1}{2}\left(9{,}8\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right)t^2 \Leftrightarrow t = \sqrt{\frac{15{,}3\text{ m}}{4{,}9\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}}} = 1{,}77\text{ s}$$

E o fragmento estará em

$$x = 17{,}7\text{ m} + \left(20\,\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)\cdot(1{,}77\text{ s}) = 53{,}1\text{ m}\quad(53\text{ m})$$

Um alcance maior do que se não tivesse havido explosão. Nesse caso o projétil teria alcançado apenas 35,4 m.

Problema 18

Escolhendo o sentido do movimento antes do choque como positivo, o momento linear inicial da bola é

$$\vec{p}_i = m\vec{v}_i \Leftrightarrow \vec{p}_i = (0{,}70\text{ kg})\cdot\left(5{,}0\,\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)\hat{\mathbf{i}} = \left(3{,}5\,\frac{\text{kg.m}}{\text{s}}\right)\hat{\mathbf{i}}$$

Após o ricochete o momento linear é

$$\vec{p}_f = m\vec{v}_f \Leftrightarrow \vec{p}_f = (0{,}70\ \text{kg}) \cdot \left(-2{,}0\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)\hat{\mathbf{i}} = \left(-1{,}4\frac{\text{kg.m}}{\text{s}}\right)\hat{\mathbf{i}}$$

A variação de momento é pois

$$\Delta\vec{p} = \vec{p}_f - \vec{p}_i \Leftrightarrow \Delta\vec{p} = \left(-1{,}4\frac{\text{kg.m}}{\text{s}}\right)\hat{\mathbf{i}} - \left(3{,}5\frac{\text{kg.m}}{\text{s}}\right)\hat{\mathbf{i}} = \left(-4{,}9\frac{\text{kg.m}}{\text{s}}\right)\hat{\mathbf{i}}$$

E o módulo da variação é então 4,9 kg.m/s.

Problema 23

Para encontrar a velocidade final da bola basta aplicar o teorema do momento-impulso (livro de texto, p.228) $\vec{I} = \Delta\vec{p}$.[2] Dos valores e sentidos indicados no enunciado temos então

$$\vec{I} = \Delta\vec{p} \Leftrightarrow (-32,4\ \text{N.s})\ \hat{\mathbf{i}} = (0{,}40\ \text{kg}) \cdot \vec{v}_f - (0{,}40\ \text{kg}) \cdot \left(14\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)\hat{\mathbf{i}} \Leftrightarrow \vec{v}_f = -67\frac{\text{m}}{\text{s}}\ \hat{\mathbf{i}}$$

Velocidade final de módulo 67 m/s, sentido negativo dos *xx*.

A intensidade (ou módulo ou magnitude) média da força pode ser calculada da expressão 9-35 da p.228 do livro de texto:

$$I = F_{med}\Delta t \Leftrightarrow F_{med} = \frac{32{,}4\ \text{N.}s}{0{,}027\ \text{s}} = 1200\ \text{N}$$

Esta força atua no mesmo sentido do impulso, sentido negativo dos *xx*.

Problema 42

Novamente, como na explosão apenas atuam forças internas, basta-nos aplicar a conservação do momento linear. Identificando norte com +*y* e este com +*x* e notando que '30º norte do leste' significa 30º com o eixo horizontal positivo dos *xx* temos

$$\Delta\vec{p} = 0 \Leftrightarrow \vec{p}_f = \vec{p}_i \Leftrightarrow (2{,}0\ \text{kg}) \cdot \left(3{,}0\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)\hat{\mathbf{j}} + (2{,}0\ \text{kg}) \cdot \left[\left(5{,}0\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)\cos(30º)\hat{\mathbf{i}} + \left(5{,}0\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)\text{sen}(30º)\hat{\mathbf{j}}\right]$$
$$= (4{,}0\ \text{kg}) \cdot \vec{v}_i \Leftrightarrow \vec{v}_i = \left(2{,}17\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)\hat{\mathbf{i}} + \left(2{,}75\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)\hat{\mathbf{j}}$$

A rapidez (i.e. módulo da velocidade instantânea) é então de $v_f = \left|\vec{v}_f\right| = \sqrt{\left(2{,}17\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2 + \left(2{,}75\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2} = 3{,}5\frac{\text{m}}{\text{s}}$.

[2] O livro de texto usa a letra J para impulso, i.e. escreve $\vec{J}$ e não $\vec{I}$.

Problema 49

A rapidez de embate da bala pode ser encontrada aplicando a conservação de energia mecânica na subida do pêndulo e a conservação de momento linear no embate. Designando i e f como os instantes imediatamente antes e após o embate e 'topo' como a situação de altura máxima do pêndulo, temos

$$E_m^{\text{topo}} = E_{mf} \Leftrightarrow E_{pg}^{\text{topo}} = E_{cf} \Leftrightarrow (m_{\text{bala}} + m_{\text{pend}}) \cdot gh_{max} = \frac{1}{2}(m_{\text{bala}} + m_{\text{pend}})v_f^2 \Leftrightarrow v_f = \sqrt{2gh_{\text{max}}}$$
$$= 1{,}534\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Inserindo este resultado na expressão da conservação do momento segundo o eixo do movimento da bala, $\Delta p = 0$, temos

$$\Delta p = 0 \Leftrightarrow p_f = p_i \Leftrightarrow m_{\text{bala}} v_i = (m_{\text{bala}} + m_{\text{pend}}) \cdot v_f \Leftrightarrow v_i = \frac{2{,}0\text{ kg} + 0{,}010\text{ kg}}{0{,}010\text{ kg}} \cdot \left(1{,}534\,\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)$$
$$= 308\,\frac{\text{m}}{\text{s}} \quad \left(310\,\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)$$

Em km/h são cerca de 1100 km/h.

Problema 61

Na colisão o momento linear conserva-se. Sendo a colisão elástica, também a energia cinética se conserva e podemos construir um sistema de duas equações e duas incógnitas. Segundo a direção do movimento temos então

$$\begin{cases} \Delta p = 0 \\ \Delta E_c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m_1 v_{1i} = m_1 v_{1f} + m_2 v_{2f} \\ \frac{1}{2} m_1 v_{1i}^2 = \frac{1}{2} m_1 v_{1f}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2f}^2 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} (0{,}34\text{ kg}) \cdot \left(1{,}2\,\frac{\text{m}}{\text{s}}\right) = (0{,}34\text{ kg}) \cdot \left(0{,}66\,\frac{\text{m}}{\text{s}}\right) + m_2 v_{2f} \\ \frac{1}{2}(0{,}34\text{ kg}) \cdot \left(1{,}2\,\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2 = \frac{1}{2}(0{,}34\text{ kg}) \cdot \left(0{,}66\,\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2 + + \frac{1}{2} m_2 v_{2f}^2 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left(0{,}408\,\frac{\text{kg. m}}{\text{s}}\right) = \left(0{,}2244\,\frac{\text{kg. m}}{\text{s}}\right) + m_2 v_{2f} \\ 0{,}245\text{ J} = 0{,}074\text{ J} + \frac{1}{2} m_2 v_{2f}^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m_2 v_{2f} = \left(0{,}184\,\frac{\text{kg. m}}{\text{s}}\right) \\ m_2 v_{2f}^2 = 0{,}342\text{ J} \end{cases}$$

Substituindo a 1ª equação na 2ª temos

$$\begin{cases} m_2 v_{2f} = \left(0{,}184\,\frac{\text{kg. m}}{\text{s}}\right) \\ (m_2 v_{2f}) \cdot v_{2f} = 0{,}342\text{ J} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} --- \\ \left(0{,}184\,\frac{\text{kg. m}}{\text{s}}\right) \cdot v_{2f} = 0{,}342\text{ J} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} --- \\ v_{2f} = \dfrac{0{,}342\text{ J}}{\left(0{,}184\,\frac{\text{kg. m}}{\text{s}}\right)} = 1{,}86\,\frac{\text{m}}{\text{s}} \end{cases}$$

Substituindo este valor de volta na 1ª equação obtemos finalmente todas as quantidades pedidas:

$$\begin{cases} m_2 \cdot \left(1{,}86\,\frac{\text{m}}{\text{s}}\right) = \left(0{,}184\,\frac{\text{kg. m}}{\text{s}}\right) \\ v_{2f} = 1{,}86\,\frac{\text{m}}{\text{s}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m_2 = 0{,}099\text{ kg} \quad (0{,}10\text{ kg}) \\ v_{2f} = 1{,}86\,\frac{\text{m}}{\text{s}} \quad \left(1{,}9\,\frac{\text{m}}{\text{s}}\right) \end{cases}$$

Capítulo 10

Problema 1

Passando os comprimentos às unidades SI temos

$$v = \frac{85\ \text{mi}}{1\ \text{h}} = \frac{85 \cdot (1610\ \text{m})}{3600\ \text{s}} = 38\,\frac{\text{m}}{\text{s}} \quad ; \quad t_{\text{voo}} = \frac{\Delta x}{v} = \frac{60\ \text{pés}}{38\,\frac{\text{m}}{\text{s}}} = \frac{60 \cdot (0{,}3048\ \text{m})}{38\,\frac{\text{m}}{\text{s}}} = 0{,}481\ \text{s}$$

Durante este tempo a bola realiza então

$$\Delta\theta = \omega t = \left(1800\,\frac{\text{rot}}{\text{m}}\right) \cdot (0{,}481\ \text{s}) = \frac{1800\ \text{rot}}{60\ \text{s}} \cdot (0{,}481\ \text{s}) = 14{,}44\ \text{rot} \quad (14\ \text{rot})$$

Problema 10

Trata-se de um problema elementar de movimento circular uniformemente variado (MCUV). As expressões da posição, velocidade e aceleração angular vêm descritas na tabela 10-1 do livro de texto, p.266, e são semelhantes às do MRUV:

$$\begin{cases} \theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2 \\ \omega = \omega_0 + \alpha t \\ \alpha = cte \end{cases}$$

Passando 2ª expressão a minutos tiramos a aceleração angular pretendida:

$$3000\ \text{rpm} = 1200\ \text{rpm} + \alpha \cdot (12\ \text{s}) \Leftrightarrow \alpha = \frac{1800\ \text{rpm}}{0{,}2\ \text{min}} = 9000\ \text{rot/min}^2$$

Da 1ª expressão obtemos as rotações executadas, que são, nas unidades 1 rotação e minuto,

$$\Delta\theta = (1200\ \text{rpm}) \cdot (0{,}2\ \text{min}) + \frac{1}{2}\left(9000\,\frac{\text{rot}}{\text{min}^2}\right) \cdot (0{,}2\ \text{min})^2 = 420\ \text{rot}$$

Problema 23

A nave está em movimento circular uniforme (MCU). Em unidades SI temos

$$R = 3220\ \text{km} = 3{,}22 \times 10^6\ \text{m} \quad ; \quad v = \frac{29\,000\ \text{km}}{1\ \text{h}} = \frac{29\,000 \cdot (1000\ \text{m})}{3600\ \text{s}} = 8056\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

A velocidade angular e aceleração radial são então

$$v = \omega R \Leftrightarrow \omega = \frac{v}{R} = \frac{8056\,\frac{\text{m}}{\text{s}}}{3{,}22 \times 10^6\ \text{m}} = 2{,}5 \times 10^{-3}\,\frac{\text{rad}}{\text{s}} \quad ; \quad a_r = \frac{v^2}{R} = \frac{\left(8056\,\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2}{3{,}22 \times 10^6\ \text{m}} = 20{,}2\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

A aceleração tangencial é nula porque num MCU o módulo da velocidade não se altera; apenas a *direção* da mesma.

Problema 33

Aplicando $E_c^{\text{rot}} = \frac{1}{2}I\omega^2$ e passando ao SI de unidades (1 rot = 2π rad) temos simplesmente

$$24\,400\ \text{J} = \frac{1}{2}I\cdot\left(602\cdot\frac{2\pi}{60\ \text{s}}\right)^2 \Leftrightarrow I = 12{,}3\ \text{kg.m}^2$$

Problema 36

Calculemos o momento de inércia nos três casos, pela definição $I = \sum_i m_i r_i^2$. Recordemos que para efeitos desta definição $\vec{r}_i$ é o raio-vetor de desde o eixo de rotação até à partícula *i*. Temos então

$$I_{123} = \sum_{i=1,2,3} m_i r_i^2 = (10{,}0\ \text{g})\cdot(2{,}00\ \text{cm})^2 + (10{,}0\ \text{g})\cdot(4{,}00\ \text{cm})^2 + (10{,}0\ \text{g})\cdot(6{,}00\ \text{cm})^2 = 560\ \text{g.cm}^2$$

$$I_{23} = \sum_{i=2,3} m_i r_i^2 = (10{,}0\ \text{g})\cdot(4{,}00\ \text{cm})^2 + (10{,}0\ \text{g})\cdot(6{,}00\ \text{cm})^2 = 520\ \text{g.cm}^2$$

$$I_{12} = \sum_{i=1,2} m_i r_i^2 = (10{,}0\ \text{g})\cdot(2{,}00\ \text{cm})^2 + (10{,}0\ \text{g})\cdot(4{,}00\ \text{cm})^2 = 200\ \text{g.cm}^2$$

A retirada das partículas 1 e 3 implica diminuições para $520/560 = 93\%$ e $200/560 = 36\%$ do momento de inércia inicial, respetivamente. Isto corresponde a perdas de 7% e 64%.

De notar que o efeito é muito maior quando se retira a massa mais distante do eixo, apesar de esta ter a mesma massa de qualquer outra das partículas. É a sua posição em relação ao eixo que faz a diferença.

Problema 49

Um problema de simples aplicação de fórmulas. A aceleração angular média é então

$$\alpha_{med} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{(6{,}20-0)\,\frac{\text{rad}}{\text{s}}}{0{,}220\ \text{s}} = 28{,}2\,\frac{\text{rad}}{\text{s}^2}$$

e o momento de forças é, em média, de

$$\tau_{med} = I\alpha_{med} \Leftrightarrow \tau_{med} = (12{,}0\ \text{kg.m}^2)\cdot\left(28{,}2\,\frac{\text{rad}}{\text{s}^2}\right) = 338\ \text{N.m}$$

Problema 59

O momento de inércia de um aro massivo girando sobre um eixo central e perpendicular ao seu plano é (tabela 10-2, p.272) $I = MR^2$. No nosso caso temos $I = (32{,}0\ \text{kg}) \cdot (1{,}20\ \text{m})^2 = 46{,}1\ \text{kg.m}^2$. A energia cinética de rotação deste aro é então

$$E_c^{\text{rot}} = \frac{1}{2} I\omega^2 \Leftrightarrow E_c^{\text{rot}} = \frac{1}{2}(46{,}1\ \text{kg.m}^2) \cdot \left(280 \cdot \frac{2\pi}{60\ \text{s}}\right)^2 = 19{,}8\ \text{kJ}$$

O trabalho da travagem terá então de eliminar 19,8 kJ de energia cinética em 15,0 s, o que corresponde a uma potência de

$$P_{med} = \frac{W}{\Delta t} = \frac{19{,}8\ \text{kJ}}{15{,}0\ \text{s}} = 1{,}32\ \text{kW}$$