Álgebra Linear 2022/2023

Exercícios para o Tema 1

Operações Com Matrizes

1. Considere as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},\ X = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix},\ X^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 6 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix},\ D = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix},\ E = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$F = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix},\ G = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix},\ H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 4 & 0 & 6 \end{bmatrix},\ I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},\ 0_{3\times 3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

   (a) Identifique as matrizes quadradas, triangulares superiores, triangulares inferiores, diagonais e escalares.

   (b) Calcule, quando possível, $A + X$, $A + D$, $2A + D$, $2(A + D)$, $2A + 2D$, $D + E$, $D + F$.

   (c) Verifique que $G = 2I_3$ e que $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = B$.

   (d) Determine uma matriz, Y, tal que $2A + 3Y - G = 0_{3\times 3}$.

2. Para as matrizes D e H do exercício anterior, verifique que $(DH)_{23}$ (o elemento da linha 2 e coluna 3 do produto, por essa ordem, das matrizes D e H) é igual a $\begin{bmatrix} 0 & 4 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix} = 30$.

   Qual o valor de $(DH)_{32}$? Calcule DH e HD.

3. Para as matrizes do exercício anterior, calcule, quando possível,
   AX, XA, X^TA, AX^T, DE, ED, XX^T, X^TX, AG, GA, AF, FA, AI_3, I_3A, D^2, H^2, F^2, F^3.

4. Diga qual a ordem pela qual se pode efectuar o produto destas três matrizes e, em seguida, calcule esse produto:
   $A = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$.

5. Sendo 1.1, 1.2, etc. representações decimais de números reais (que "por acaso" estão em posições muito convenientes na matriz que se segue), verifique que para quaisquer números a, b, c se tem

$$\begin{bmatrix} a & b & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1.1 & 1.2 & 1.3 \\ 2.1 & 2.2 & 2.3 \\ 3.1 & 3.2 & 3.3 \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 1.1 & 1.2 & 1.3 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 2.1 & 2.2 & 2.3 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 3.1 & 3.2 & 3.3 \end{bmatrix}$$

   e que $\begin{bmatrix} 1.1 & 1.2 & 1.3 \\ 2.1 & 2.2 & 2.3 \\ 3.1 & 3.2 & 3.3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 1.1 \\ 2.1 \\ 3.1 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 1.2 \\ 2.2 \\ 3.2 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 1.3 \\ 2.3 \\ 3.3 \end{bmatrix}$.

6. Calcule $\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1.1 & 1.2 & 1.3 \\ 2.1 & 2.2 & 2.3 \\ 3.1 & 3.2 & 3.3 \end{bmatrix}$.

7. Calcule $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1.1 & 1.2 & 1.3 \\ 2.1 & 2.2 & 2.3 \\ 3.1 & 3.2 & 3.3 \end{bmatrix}$.

8. Verifique que $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1.1 & 1.2 & 1.3 \\ 2.1 & 2.2 & 2.3 \\ 3.1 & 3.2 & 3.3 \end{bmatrix}$ não é igual a $\begin{bmatrix} 1.1 & 1.2 & 1.3 \\ 2.1 & 2.2 & 2.3 \\ 3.1 & 3.2 & 3.3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ e, portanto, **a multiplicação de matrizes não é comutativa** (ou, seja, ao contrário da multiplicação de números reais ou complexos, mudar a ordem dos factores pode mudar o resultado da multiplicação).

9. Para as matrizes $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ e $C = \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$ verifique que

   (a) $AB \neq BA$

   (b) $(A+B)(A-B) \neq A^2 - B^2$

   (c) $AB = 0$ (onde 0 representa, claro, a matriz $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$)

   (d) $BA = CA$, sendo $A \neq 0$ e $B \neq C$ (ou seja, para "cortar" um factor comum numa equação é preciso algo mais do que esse factor ser diferente de zero).

10. Descubra uma matriz não nula, A, tal que $A^2 = 0$.

11. Sendo $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, calcule A^k e B^k para $k = 1, 2, 3, \ldots$

12. Determine todas as matrizes permutáveis com $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, ou seja, todas as matrizes, $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, tais que $A \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} A$.

13. Sendo A e B matrizes triangulares superiores, mostre que $(AB)_{ij} = 0$ se $i > j$ (ou seja, o produto AB é também uma matriz triangular superior).

Matrizes Invertíveis

14. Mostre que $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$ é a inversa da matriz $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ mas $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$ não é a inversa da matriz $\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$.

15. Mostre que:

   (a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{a} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ se $a \neq 0$.

(b) Se A é um matriz quadrada com uma linha só com zeros então, qualquer que seja B (com a mesma dimensão de A), a matriz AB tem uma linha só com zeros (e portanto A não é invertível pois será impossível obter $AB = I$).

(c) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

(d) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ b & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -b & 0 & 1 \end{bmatrix}$ para qualquer b em $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

(e) Se A é uma matriz 3×3 em que a terceira linha é múltipla da primeira então existe um número b tal que o produto de $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -b & 0 & 1 \end{bmatrix}$ por A (por esta ordem) tem terceira linha só com zeros (e portanto A não é invertível, pois o produto de matrizes invertíveis seria invertível).

16. Supondo que $a \neq 0$, calcule $\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ b & 0 & 1 \end{bmatrix} \right)^{-1}$

17. Considere a matriz $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$.

(a) Verifique que $P^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

NOTA: embora a definição obrigue a calcular dois produtos, porque a multiplicação de matrizes não é comutativa, no final do capítulo 1 do livro prova-se que, se A e B são duas matrizes quadradas com a mesma dimensão tais que $AB = I$, então também $BA = I$; isso significa que só é preciso verificar que $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

(b) Sendo $D = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$ e $A = PDP^{-1}$, calcule A e A^2 (repare que $A^2 = PDP^{-1}PDP^{-1}$).

(c) Calcule A^9.

18. Seja A uma matriz tal que $A^2 + \alpha A + \beta I = 0$, onde α e β são números (reais ou complexos), com $\beta \neq 0$. Mostre que A é invertível e indique a sua inversa.

19. Sendo A uma matriz quadrada tal que $A^4 = 0$, mostre que $(I_n - A)^{-1} = I_n + A + A^2 + A^3$.

20. Mostre que se A é invertível e $BA = CA$, então $B = C$.

21. Sejam A e B matrizes 2×2 invertíveis tais que

$B = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ e $(AB)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$

Determine A^{-1}.

Transposição E Conjugação De Matrizes

22. Complete a matriz $\begin{bmatrix} 0 & 4 & ? \\ ? & 0 & 5 \\ 3 & ? & ? \end{bmatrix}$ de forma a ficar

    (a) simétrica

    (b) hemi-simétrica

23. (Se tiver dificuldades com números complexos, leia o texto que está no fórum.)

    Complete a matriz $\begin{bmatrix} 0 & ? & 2+3i \\ 4 & 0 & 5 \\ ? & ? & i \end{bmatrix}$ de forma a ficar

    (a) hermítica

    (b) hemi-hermítica

24. Mostre que, para qualquer matriz, A, as matrizes AA^T e A^TA são quadradas e simétricas.

25. Uma matriz quadrada A diz-se **ortogonal** se $AA^T = I_n$. Mostre que o produto de matrizes ortogonais (com a mesma dimensão) é ainda uma matriz ortogonal.

Transformações E Matrizes Elementares

26. Seja A uma matriz 3×5. Determine as matrizes elementares que, multiplicadas por A (sendo A o factor que fica à direita), resultam em

    (a) Troca das linhas 1 e 3 na matriz A.

    (b) Multiplicação da linha 3 da matriz A por 6.

    (c) Substituição da linha 2 da matriz A pela soma da antiga linha 2 com a linha 1 multiplicada por 4.

    (d) Substituição da linha 2 da matriz A pela soma da antiga linha 2 com a linha 3 multiplicada por 4.

27. Escrevendo-a como produto de matrizes elementares, determine uma matriz 3×3, A, tal que

    (a) $A \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b \\ 2a \\ c \end{bmatrix}$.

    (b) $A \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+2c \\ c \\ -b \end{bmatrix}$.

28. Identifique quais das seguintes matrizes são matrizes elementares e, para essas, determine as suas inversas.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, I_n.$$

29. A partir do exercício anterior calcule A^{-1}, sendo $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Formas De Escada E Característica De Uma Matriz

30. Indique quais das seguintes matrizes estão em forma de escada:

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

31. Indique uma matriz em forma de escada e equivalente por linhas a cada uma das seguintes matrizes:

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

32. Indique duas matrizes diferentes, em forma de escada, equivalentes por linhas a cada uma das seguintes matrizes:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

33. Indique quais das seguintes matrizes estão em forma de escada reduzida:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

34. Indique a matriz em forma de escada reduzida que é equivalente por linhas a cada uma das seguintes matrizes:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 4 & 6 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ -2 & -5 & 4 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ -2 & -5 & 4 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ -2 & -5 & 4 & 1 \end{bmatrix}.$$

35. Determine se são equivalentes por linhas as matrizes

   (a) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$.

   (b) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & -4 & -5 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$.

36. Mostre que as matrizes $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 2 & 6 & 2 \end{bmatrix}$ são equivalentes por linhas e indique uma matriz, C, tal que $B = CA$.

37. (a) Calcule a característica da matriz $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$.

   (b) Para que valores de α é que é igual a 3 a característica da matriz $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ \alpha & 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$?

Caracterização De Matrizes Invertíveis

38. Determine o conjunto dos valores de α e β que tornam invertível a matriz $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & \alpha+3 & 2 \\ 2 & 4 & \beta \end{bmatrix}$.

39. Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$

    (a) Calcule A^{-1} determinando a matriz em escada reduzida que é equivalente à matriz aumentada $\begin{bmatrix} A & I_2 \end{bmatrix}$

    (b) Observando as transformações elementares sobre linhas que utilizou na alínea anterior, escreva A^{-1} e A como produtos de matrizes elementares (recorde os exercícios 26 e 28).

40. Calcule a inversa da matriz $\begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -2 & -5 & 4 \end{bmatrix}$ (e compare com a resposta que deu ao exercício 34).

Sistemas De Equações Lineares

41. Sendo $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, mostre que $(1,0,2)$ é solução do sistema $AX = \begin{bmatrix} 7 \\ 2 \end{bmatrix}$. Existirão outras soluções para esse sistema?

42. Indique as equações do sistema $AX = B$, sabendo que $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}$ e que $(1,0,2)$ é solução desse sistema.

43. Sem os resolver, diga quais dos sistemas seguintes são equivalentes.

$$\begin{cases} x+y-3z=0 \\ 2x+y-z=1 \\ x-z=2 \end{cases} ; \quad \begin{cases} x+y-3z=0 \\ 2x+y-z=1 \end{cases} ; \quad \begin{cases} x+2z=1 \\ 2x+y-z=1 \\ x-z=2 \end{cases} .$$

44. Determine as soluções dos seguintes sistemas de equações lineares.

$$\begin{cases} x+y+2z=3 \\ 2y-z=4 \\ 3z=6 \end{cases} ; \quad \begin{cases} x-y+z=0 \\ x+2z=4 \\ z=1 \end{cases} ; \quad x+y-4z=0 \quad ; \quad \begin{cases} 2x-y=4 \\ y+2z=6 \end{cases} .$$

45. Dos sistemas seguintes, indique os impossíveis (isto é, que não têm nenhuma solução) e resolva os restantes.

$$\text{(a)} \begin{cases} x+2z=0 \\ -x+y+3z=2 \\ 2x-y-z=-2 \end{cases} ; \qquad \text{(b)} \begin{cases} x+2z=0 \\ -x+y+3z=2 \\ 2x-y-z=2 \end{cases} ;$$

$$\text{(c)} \begin{cases} x+2z=0 \\ -x+y+3z=0 \\ 2x-y-z=0 \end{cases} ; \qquad \text{(d)} \begin{cases} x+y+2z=1 \\ -x-y+z=-1 \\ 2x-y+z=4 \\ 2x-y+4z=4 \end{cases} ;$$

$$\text{(e)} \begin{cases} 4x_1+3x_2+2x_3=1 \\ x_1+3x_2+5x_3=1 \\ 3x_1+6x_2+9x_3=2 \end{cases} ; \qquad \text{(f)} \begin{cases} x_1+2x_2+x_3+x_4=0 \\ -x_3+x_4=1 \\ -x_1-2x_2+2x_3=1 \end{cases} .$$

46. Determine os valores de α (número real) para os quais o sistema

$$\begin{cases} \alpha x + y = 1 \\ x + \alpha y = 1 \end{cases}$$

(a) não tem solução (ou seja, é impossível);

(b) tem exactamente uma solução (ou seja, é possível determinado);

(c) tem uma infinidade de soluções (ou seja, é possível indeterminado).

47. Sendo $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix}$ e $B = 2\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + 4\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$, determine uma solução do sistema $AX = B$.

Existem outras soluções?

48. (a) Mostre que a solução do sistema $\begin{bmatrix} -3 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ aparece na última coluna da matriz em forma de escada reduzida equivalente por linhas à matriz aumentada do sistema, $\begin{bmatrix} -3 & 2 & -1 & | & 1 \\ 2 & 0 & -2 & | & 0 \\ -1 & 1 & 1 & | & 0 \end{bmatrix}$.

(Nota: isto acontece com qualquer sistema possível determinado.)

(b) Mostre que as soluções dos sistemas $\begin{bmatrix} -3 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} -3 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

aparecem nas duas últimas colunas da matriz em forma de escada reduzida equivalente por linhas à matriz $\begin{bmatrix} -3 & 2 & -1 & | & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -2 & | & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & | & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

(c) Tendo em conta os resultados das alíneas anteriores, determine a inversa da matriz $\begin{bmatrix} -3 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

(d) Utilize a matriz obtida na alínea anterior para resolver o sistema

$$\begin{cases} -3x + 2y - z = \alpha \\ 2x - 2z = \beta \\ -x + y + z = \gamma \end{cases}, \quad \text{onde } \alpha,\ \beta,\ \gamma \in \mathbb{R}.$$

49. Determine a inversa da matriz $\begin{bmatrix} i & 1 \\ 2 & i \end{bmatrix}$ (releia o pequeno texto que está no fórum sobre números complexos).

Soluções:

OPERAÇÕES COM MATRIZES:

1. (a) Quadradas: $A,\ D,\ F,\ G,\ H,\ I_3,\ 0_{3\times 3}$.
Triangulares superiores: $D,\ F,\ G,\ I_3,\ 0_{3\times 3}$.
Triangulares inferiores: $F,\ G,\ H,\ I_3,\ 0_{3\times 3}$.
Diagonais: $F,\ G,\ I_3,\ 0_{3\times 3}$.
Escalares: $G,\ I_3,\ 0_{3\times 3}$.

(b) $A+D=\begin{bmatrix}2&3&4\\1&5&6\\0&0&6\end{bmatrix}$, $2A+D=\begin{bmatrix}3&4&5\\2&6&7\\0&0&6\end{bmatrix}$, $2A+2D=\begin{bmatrix}4&6&8\\2&10&12\\0&0&12\end{bmatrix}$, $2(A+D)=2A+2D$, $D+F=\begin{bmatrix}2&2&3\\0&8&5\\0&0&12\end{bmatrix}$.

(d) $Y=\begin{bmatrix}0&-\frac{2}{3}&-\frac{2}{3}\\-\frac{2}{3}&0&-\frac{2}{3}\\0&0&\frac{2}{3}\end{bmatrix}$.

2. $(DH)_{32}=0$, $DH=\begin{bmatrix}17&6&18\\28&12&30\\24&0&36\end{bmatrix}$, $HD=\begin{bmatrix}1&2&3\\2&16&21\\4&8&48\end{bmatrix}$.

3. $AX=\begin{bmatrix}6\\6\\0\end{bmatrix}$, $X^TA=\begin{bmatrix}3&3&3\end{bmatrix}$, $ED=\begin{bmatrix}1&10&31\\0&16&50\\0&0&36\\0&0&0\end{bmatrix}$, $XX^T=\begin{bmatrix}1&2&3\\2&4&6\\3&6&9\end{bmatrix}$, $X^TX=\begin{bmatrix}14\end{bmatrix}$,

$AG=\begin{bmatrix}2&2&2\\2&2&2\\0&0&0\end{bmatrix}$, $GA=\begin{bmatrix}2&2&2\\2&2&2\\0&0&0\end{bmatrix}$, $AF=\begin{bmatrix}1&4&6\\1&4&6\\0&0&0\end{bmatrix}$, $FA=\begin{bmatrix}1&1&1\\4&4&4\\0&0&0\end{bmatrix}$, $AI_3=A$, $I_3A=A$,

$D^2=\begin{bmatrix}1&10&31\\0&16&50\\0&0&36\end{bmatrix}$, $H^2=\begin{bmatrix}1&0&0\\8&9&0\\28&0&36\end{bmatrix}$, $F^2=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&16&0\\0&0&36\end{bmatrix}$, $F^3=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&4^3&0\\0&0&6^3\end{bmatrix}$.

4. $CBA=\begin{bmatrix}11\\7\end{bmatrix}$.

6. $\begin{bmatrix}3.3&3.6&3.9\\2.1&2.2&2.3\\3.1&3.2&3.3\end{bmatrix}$.

7. $\begin{bmatrix}1.1&1.2&1.3\\2.1&2.2&2.3\\3.3+3.1&3.6+3.2&3.9+3.3\end{bmatrix}$.

10. $\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}$ ou $\begin{bmatrix}1&1\\-1&-1\end{bmatrix}$, por exemplo (coloque mais alguns exemplos no fórum).

11. $A^k=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&2^k&0\\0&0&3^k\end{bmatrix}$, $B^2=\begin{bmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$, $B^k=0_{3\times 3}$ se $k\geq 3$.

12. Todas as matrizes do tipo $\begin{bmatrix}\alpha&\beta\\0&\alpha\end{bmatrix}$ (ou seja, $c=0$, $a=d$ e b pode ser qualquer).

MATRIZES INVERTÍVEIS

16. $\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\b&0&1\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&a&0\\0&0&1\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\-b&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&\frac{1}{a}&0\\0&0&1\end{bmatrix}$.

17.(b) $A=\begin{bmatrix}2&1\\-2&5\end{bmatrix}$, $A=\begin{bmatrix}2&7\\-14&23\end{bmatrix}$.

17.(c) $A^9=\begin{bmatrix}2\times 3^9-4^9&4^9-3^9\\2\times 3^9-2\times 4^9&2\times 4^9-3^9\end{bmatrix}$.

21. $A^{-1}=\begin{bmatrix}2&2\\4&2\end{bmatrix}$.

TRANSPOSIÇÃO E CONJUGAÇÃO DE MATRIZES

22.(a) $\begin{bmatrix}0&4&3\\4&0&5\\3&5&\alpha\end{bmatrix}$ (α qualquer número real ou complexo).

22.(b) $\begin{bmatrix} 0 & 4 & -3 \\ -4 & 0 & 5 \\ 3 & -5 & 0 \end{bmatrix}$.

23.(a) Impossível, na diagonal principal há elementos que não são números reais.

23.(b) $\begin{bmatrix} 0 & -4 & 2+3i \\ 4 & 0 & 5 \\ -2+3i & -5 & i \end{bmatrix}$.

TRANSFORMAÇÕES E MATRIZES ELEMENTARES

26.(a) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

26.(b) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$.

26.(c) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

26.(c) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

27.(a) Por exemplo, $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

27.(b) Por exemplo, $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

28. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$,

$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$,

$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$,

$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$,

$(I_n)^{-1} = I_n$.

29. $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

30. 2ª, 4ª e 5ª matrizes.

31. Por exemplo, $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

32. Por exemplo, $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

33. 3ª, 4ª e 5ª matrizes.

34. $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & \frac{9}{2} \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$.

35.(a) Não.

35.(b) Sim.

36. Por exemplo, $B = \left(\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} =$
$\left(\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} A =$
$\left(\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} A.$

Assim, $B = \begin{bmatrix} -1 & \frac{1}{2} \\ 2 & 1 \end{bmatrix} A.$

NOTA: $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ é a única matriz em f.e.r. equivalente por linhas a A e a B, mas a sequência de transformações elementares que levam A (ou B) a essa matriz não é única, pelo que há vários produtos diferentes de matrizes que podem aparecer (no entanto C será sempre igual).

37.(a) 3.

37.(b) Para $\alpha \neq 2$.

38. A matriz é invertível se e só se $\alpha \neq -1$ e $\beta \neq 2$. (Se $\alpha = -1$ ou $\beta = 2$ a matriz não é invertível.)

39.(a) $A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ -1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$.

39.(b) Por exemplo, tem-se $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} A = I$, logo $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ e $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$.

40. $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \end{bmatrix}$, onde as colunas são as colunas da direita obtidas no exercício 34.

41. Basta verificar que $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 2 \end{bmatrix}$. E há mais soluções, porque a característica da matriz do sistema é inferior ao número de incógnitas e o sistema não é impossível.

42. $\begin{cases} x + 2y + 3z = 7 \\ \quad 2x + \ \ y = 2 \\ \qquad 2y - z = -2 \end{cases}$

43. O primeiro e o terceiro (a primeira equação do terceiro é a diferença entre as duas primeiras equações do primeiro).

44. $(x, y, z) = (-4, 3, 2)$; $(x, y, z) = (2, 3, 1)$; $(x, y, z) = (a, b, \frac{1}{4}(a + b))$, a, b podem ser quaisquer; $(x, y, z) = (5 - a, 6 - 2a, a)$, a qualquer.
NOTA: há várias maneiras diferentes de descrever o (mesmo) conjunto das soluções para os dois últimos sistemas.

45.(a) $(x, y, z) = (-2a, 2 - 5a, a)$ (a qualquer).

45.(b) Sistema impossível.

45.(c) $(x, y, z) = (-2a, -5a, a)$ (a qualquer).

45.(d) $(x, y, z) = (\frac{5}{3}, -\frac{2}{3}, 0)$.

45.(e) $(x, y, z) = (a, \frac{1}{3} - 2a, a)$ (a qualquer).

45.(f) $(x, y, z) = (-1 - 2a, a, 0, 1)$ (a qualquer).

46. Impossível se $\alpha = -1$, possível indeterminado se $\alpha = 1$, possível determinado nos restantes casos.

47. Não era necessário fazer nenhum cálculo para ver que uma solução é $X = (2, 3, 4)$. Existem mais soluções, pois a matriz A não é invertível (e portanto o sistema, sendo possível, é indeterminado).

48.(c) $\left(\begin{bmatrix} -3 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \right)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{-1}{4} & \frac{3}{8} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{-1}{4} & \frac{-1}{8} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$, sendo as colunas desta matriz iguais às soluções das alíneas (a) e (b).

48(d) A solução do sistema é $\begin{bmatrix} \frac{-1}{4} & \frac{3}{8} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{-1}{4} & \frac{-1}{8} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{4}\alpha + \frac{3}{8}\beta + \frac{1}{2}\gamma \\ \frac{1}{2}\beta + \gamma \\ -\frac{1}{4}\alpha - \frac{1}{8}\beta + \frac{1}{2}\gamma \end{bmatrix}$.

49. $\begin{bmatrix} \frac{-i}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{-i}{3} \end{bmatrix}$