

4)

$f(x) = \frac{1+x^2}{1+x}$ é sempre positiva para $0 \leq x \leq 1$ (Porquê?)

Logo a área buscada é:

$$\int_0^1 \frac{1+x^2}{1+x}$$

Encontrar primitiva para $\frac{1+x^2}{1+x}$ e depois substituir nos extremos $x = 1$ e $x = 0$ usando o teorema fund. do cálculo

$$\begin{array}{r}
 \cancel{x^2} + 1 \overline{) \cancel{x+1}} \\
 \underline{-\cancel{x^2} - x} \\
 -\cancel{x} + 1 \\
 \underline{+\cancel{x} + 1} \\
 2
 \end{array}$$

$$\Rightarrow 1+x^2 = (x+1)(x-1) + 2$$

$$\frac{1+x^2}{1+x} = \frac{(x+1)(x-1)+2}{1+x} = \frac{\cancel{(x+1)}(x-1)}{\cancel{1+x}} + \frac{2}{x+1} = x-1 + \frac{2}{x+1}$$

$$\begin{aligned}
 \text{logo} \quad \int \frac{1+x^2}{1+x} dx &= \int x-1 + \frac{2}{x+1} dx = \int x-1 dx + 2 \int \frac{1}{x+1} dx \\
 &= \frac{x^2}{2} - x + 2 \ln(x+1)
 \end{aligned}$$