

# Transients In Transmission Lines: A Finite-Difference Time-Domain Analysis

J. E. Oliveira, V. R. Leonardi and L. R. d. Souza

**Abstract**— This report has the objective of explaining and detailing the finite-difference time-domain (FDTD) algorithm and its use in the computational analysis of transient behavior of voltage and current waves in a lossless transmission line, particularly, with the use of the Octave program.

**Keywords**— Lossless transmission lines; FDTD algorithm; transients; Octave; voltage and current waves visualization; simulation.

## I. INTRODUÇÃO

**L**INHAS de transmissão são circuitos utilizados para a transmissão de sinais eletromagnéticos. Elas se tornam necessárias quando o comprimento das ondas transmitidas é curto o suficiente para que o comprimento da linha seja uma parcela relevante desse valor [1].

Transientes são eventos de curta duração causados por mudanças abruptas no estado do circuito. No caso das linhas de transmissão, transientes podem ocorrer quando uma nova carga é conectada ao circuito, quando um sinal aperiódico é injetado na ou se propaga através da linha, ou quando o gerador é ligado [2].

A análise feita nesse projeto se baseia no transiente gerado por sinais aperiódicos do tipo degrau. Para que seja computacionalmente possível tal análise, é necessário realizar uma discretização do sistema. O método FDTD permite transformar as equações do telegrafista (1) e (2) em diferenças finitas, criando uma malha de pontos discretos no espaço e no tempo que serão utilizados para os cálculos de  $v(z,t)$  e  $i(z,t)$ .

$$\frac{-\partial v(z,t)}{\partial z} = Ri(z,t) + L \frac{\partial i(z,t)}{\partial t} \quad (1)$$

$$\frac{-\partial i(z,t)}{\partial z} = Gv(z,t) + C \frac{\partial v(z,t)}{\partial t} \quad (2)$$

O programa criado permite o cálculo e a representação gráfica da tensão e corrente ao longo do comprimento da linha, para um dado tempo. Também é possível adquirir os valores para uma dada posição da linha ao longo do tempo. Finalmente, é possível uma visualização em forma de

animação, destacando a mudança dos valores ao longo do tempo e do comprimento da linha.

Foi escolhido o programa Octave, que é open source, para realizar a simulação, devido à facilidade da representação gráfica da tensão e corrente, além da útil ferramenta de criação de vídeos para ilustrar o comportamento em relação ao tempo.

## II. DADOS DA LINHA DE TRANSMISSÃO

Para a correta realização da simulação é preciso especificar as características da linha utilizada. Primeiramente, o sistema simulado é baseado no modelo de linha de transmissão na Fig. 1.

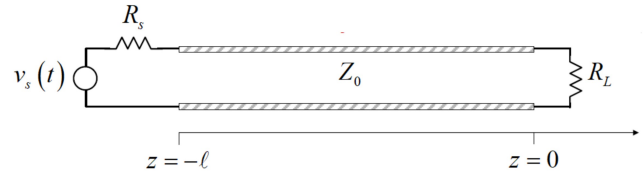


Figura 1. Modelo genérico de linha de transmissão[2].

Das especificações do projeto tem-se os seguintes valores:

$$Z_0 = 50 \Omega \quad R_s = 75 \Omega$$

Como é o caso de uma linha sem perdas, os parâmetros  $R$  e  $G$  podem ser considerados  $R = G = 0$ . Os parâmetros  $L$  e  $C$  da linha foram considerados os mesmos do cabo coaxial comercial RG58 [3] de impedância igual à especificada no projeto. Dessa forma,  $C = 101$  pF/m e  $L = 252$  nH/m. O comprimento total da linha foi considerado  $l = 1$  m. Em questão dos valores da fonte e da carga acoplados, foram feitos testes para 2 fontes de tensão:

$v_{s1} = 2u(t)$ ,  $v_{s2} = u(t) - u(t - \frac{l}{9c})$ , onde  $c$  é a velocidade da luz no vácuo e  $u(t)$  é a função degrau. Para cada uma das fontes foram testados 3 valores de carga:  $R_{L1} = 0$ ,  $R_{L2} = R_{L3} = 100 \Omega$ .

## III. ALGORITMO FDTD

Para a linha de transmissão sem perdas, as equações do telegrafista (1) e (2) podem ser simplificadas com  $R = G = 0$ , resultando nas equações (3) e (4).

$$\frac{-\partial v(z,t)}{\partial z} = L \frac{\partial i(z,t)}{\partial t} \quad (3)$$

<sup>1</sup>J. E. Oliveira, Universidade de São Paulo, São Carlos, São Paulo, Brasil, jeosvici@usp.br

V. R. Leonardi, Universidade de São Paulo, São Carlos, São Paulo, Brasil, vitorleonardi@usp.br

L. R. de Souza, Universidade de São Paulo, São Carlos, São Paulo, Brasil, leo\_souza@usp.br

Corresponding author: Julio Eiji Oliveira

$$\frac{-\partial i(z, t)}{\partial z} = C \frac{\partial v(z, t)}{\partial t} \quad (4)$$

A partir dessas equações pode-se aplicar o método FDTD para transformá-las em diferenças finitas e criar a malha dos pontos necessários.

Defini-se então um espaçamento fixo  $\Delta z$  no espaço e  $\Delta t$  no tempo, de tal modo que os pontos da malha podem ser descritos como:

$$z_k = k \Delta z \quad \text{e} \quad t_n = n \Delta t$$

Onde  $1 \leq k \leq K, 1 \leq n \leq N$

Em seguida, aproxima-se o valor da derivada de tensão no espaço por uma diferença finita central:

$$\frac{\partial v(z, t)}{\partial z} \approx \frac{v(z + \Delta z, t) - v(z - \Delta z, t)}{2 \Delta z} \quad (5)$$

Utilizando uma notação mais conveniente para a tensão, tal que  $v(z_k, t_n) = v_k^n$ , temos:

$$\frac{\partial}{\partial z} v_k^n \approx \frac{v_{k+1}^n - v_{k-1}^n}{2 \Delta z} \quad (6)$$

De maneira similar, aplicando uma diferença finita no tempo, para a corrente temos:

$$\frac{\partial}{\partial t} i_k^n \approx \frac{i_k^{n+1} - i_k^{n-1}}{2 \Delta t} \quad (7)$$

É possível melhorar a precisão sem custo adicional de computação ao tomar-se meio passos entre cada ponto. Assim:

$$\frac{\partial}{\partial z} v_k^n \approx \frac{v_{k+1/2}^n - v_{k-1/2}^n}{\Delta z} \quad (8)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} i_k^n \approx \frac{i_k^{n+1/2} - i_k^{n-1/2}}{\Delta t} \quad (9)$$

Utilizando as equações (8) e (9) nas equações (3) e (4) tem-se a aproximação numérica das equações do telegrafista que pode ser usada para o cálculo computacional:

$$-\frac{v_{k+1/2}^n - v_{k-1/2}^n}{\Delta z} = L \frac{i_k^{n+1/2} - i_k^{n-1/2}}{\Delta t} \quad (10)$$

$$-\frac{i_{k+1}^{n+1/2} - i_k^{n+1/2}}{\Delta t} = C \frac{v_{k+1/2}^{n+1} - v_{k+1/2}^n}{\Delta z} \quad (11)$$

O algoritmo FDTD consiste em encontrar o valor futuro de corrente e tensão a partir de valores passados conhecidos, então, rearranjando (10) e (11) tem-se como encontrar os valores futuros :

$$i_k^{n+1/2} = \frac{\Delta z}{\Delta t L} (v_{k+1/2}^n - v_{k-1/2}^n) + i_k^{n-1/2} \quad (12)$$

$$v_{k+1/2}^{n+1} = \frac{\Delta t}{\Delta z C} (i_{k+1}^{n+1/2} - i_k^{n+1/2}) + v_{k+1/2}^n \quad (13)$$

#### IV. ESTABILIDADE

Na simulação do algoritmo é preciso tomar cuidado com a estabilidade do sistema: a escolha de valores impróprios de  $\Delta x$  e  $\Delta t$  podem levar os resultados a divergirem, criando erros. Sendo assim, é necessário definir os valores que permitirão manter o sistema estável.

#### AGRADECIMENTOS

Agradecemos à cloroquina

#### REFERÊNCIAS //TODO organizar corretamente

- [1] [https://en.wikipedia.org/wiki/Transmission\\_line](https://en.wikipedia.org/wiki/Transmission_line)
- [2] PDF do projeto. 2020
- [3] <https://secureservercdn.net/198.71.233.64/0f2.b28.myftpupload.com/wp-content/uploads/2018/08/RG58.pdf>
- [1] "Transmission line," *Wikipedia*. May 03, 2020, Accessed: May 19, 2020. [Online]. Available: [https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Transmission\\_line&oldid=954668391](https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Transmission_line&oldid=954668391).
- [2] "Cabos Coaxiais 50 OHMS," *AFDatalink*. <https://www.afdatalink.com.br/produtos/1-telecomunicacoes-2/cabos-coaxiais-50-ohms/> (accessed May 19, 2020).
- [3] L. Sevgi and C. Uluisik, "A MATLAB-based transmission-line virtual tool: finite-difference time-domain reflectometer," *IEEE Antennas Propagation Magazine*, vol. 48, no. 1, pp. 141–145, Feb. 2006, doi: 10.1109/MAP.2006.1645595.