

Árvore-B Remoção

Organização e Recuperação de Dados
Profa. Valéria D. Feltrim

UEM – CTC – DIN

Relembrado...

- ❑ Propriedades de uma árvore-B de ordem m :
 - Toda página tem um máximo de m descendentes
 - **Toda página, exceto a raiz e as folhas, tem no mínimo $\lceil m/2 \rceil$ descendentes**
 - A raiz tem pelo menos dois descendentes (a menos que também seja uma folha)
 - Todas as folhas estão no mesmo nível
 - Uma página não-folha com k descendentes contém $k - 1$ chaves
 - **Uma página folha contém no mínimo $\lceil m/2 \rceil - 1$ chaves e no máximo $m - 1$ chaves**

Remoção em árvore-B

❑ Manutenção das propriedades da árvore-B

- Na inserção → inserção sempre nas folhas + divisão + promoção
- Na remoção → **remoção sempre nas folhas + redistribuição + concatenação**

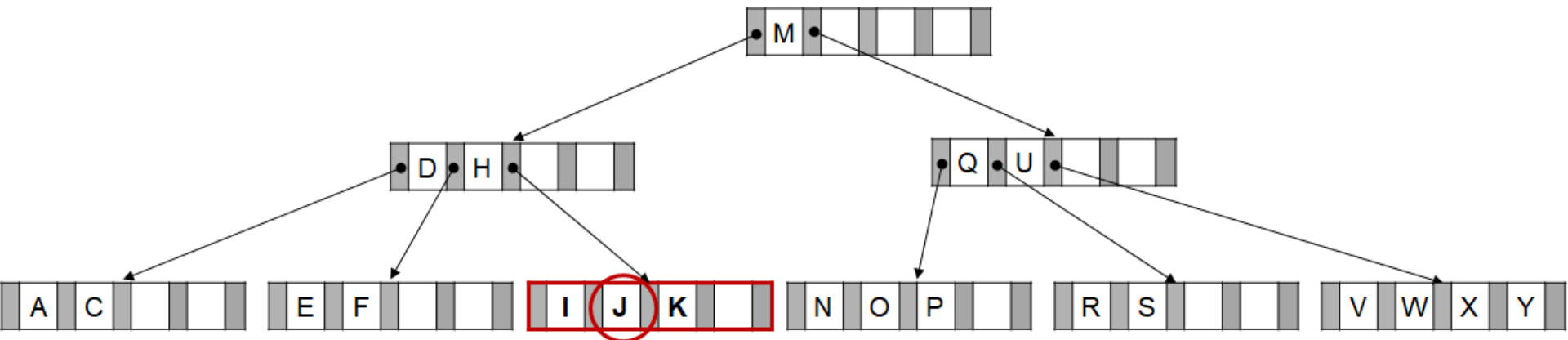
❑ Exemplo: diferentes situações resultantes de remoção

- Para uma árvore-B de ordem 5 ($m = 5$)
 - Máximo de chaves por página = 4 ($m - 1$)
 - Mínimo de chaves por página = 2 ($\lceil m/2 \rceil - 1$)
 - A única exceção é a página raiz, que pode conter apenas uma chave

Remoção em árvore-B

□ Caso 1

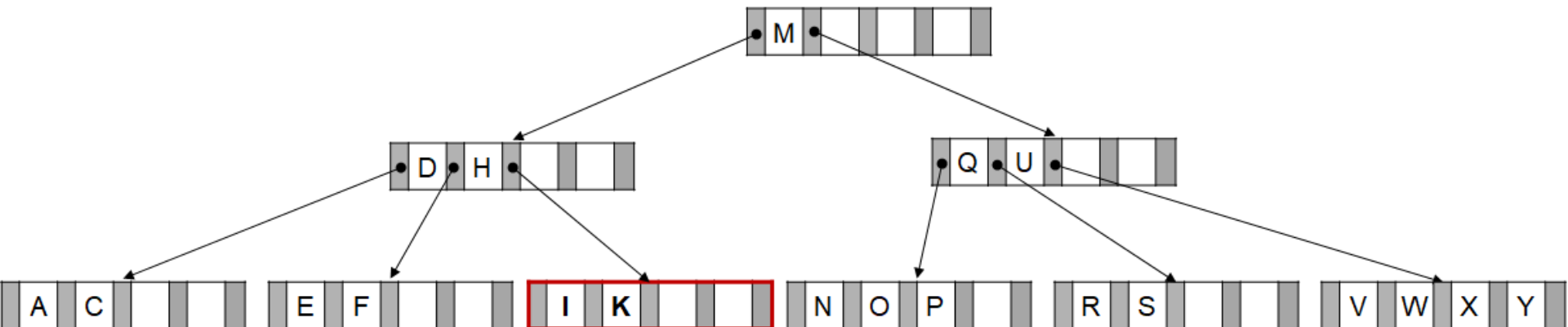
- É o caso mais simples
- A chave a ser removida está em uma folha e o número mínimo de chaves na página é respeitado após a remoção
- **Solução:** A chave é removida e a página é reorganizada
- Exemplo: Remoção da chave J



Remoção em árvore-B

□ Caso 1

- É o caso mais simples
- A chave a ser removida está em uma folha e o número mínimo de chaves na página é respeitado após a remoção
- **Solução:** A chave é removida e a página é reorganizada
- Exemplo: Remoção da chave J



Remoção em árvore-B

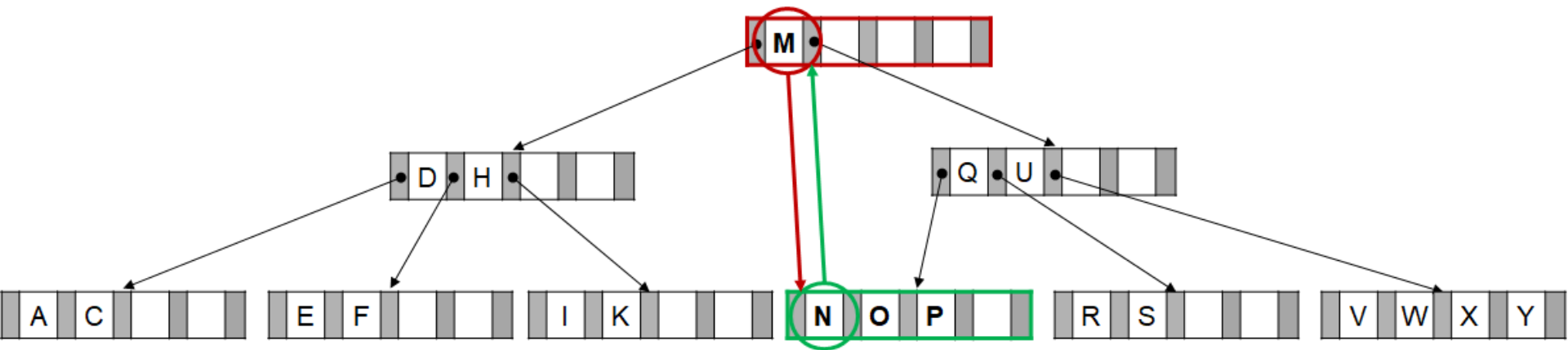
□ Caso 2

- Remoção de uma chave que não está em uma página folha
- **Solução:**
 - Sempre removemos de páginas folha
 - Se a chave a ser removida não está em uma folha, trocamos a chave com sua sucessora imediata, que sempre estará em uma página folha
 - A seguir, removemos a chave trocada da página folha

Remoção em árvore-B

❑ Caso 2

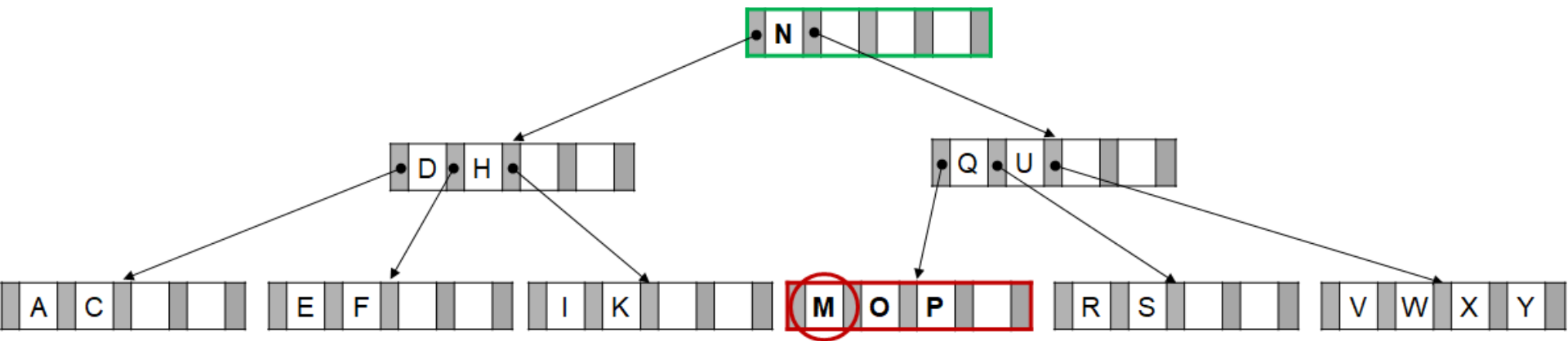
- Exemplo: Remoção da chave M – primeiro M é trocado com N, seu sucessor imediato



Remoção em árvore-B

❑ Caso 2

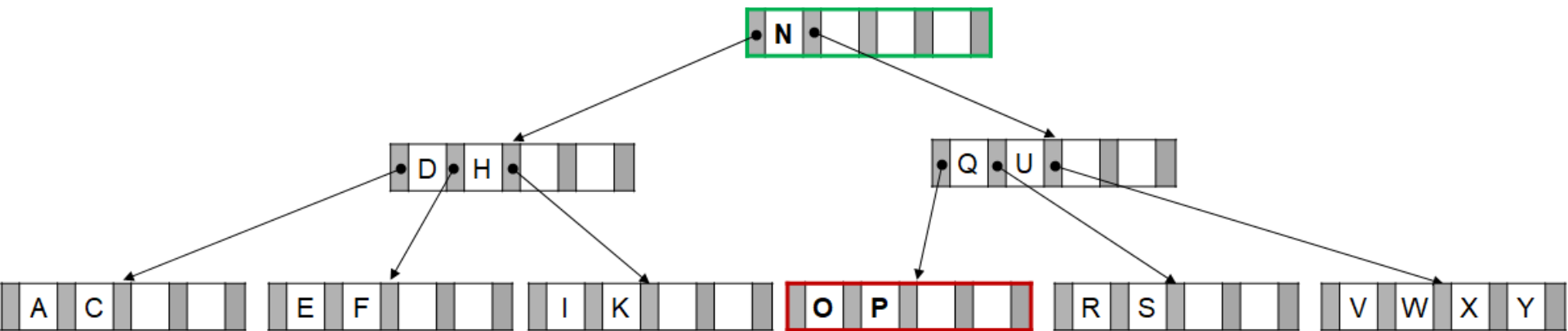
- Exemplo: Remoção da chave M – após a troca com o sucessor, o M é removido da folha



Remoção em árvore-B

❑ Caso 2

- Exemplo: Remoção da chave M – após a troca com o sucessor, o M é removido da folha



Remoção em árvore-B

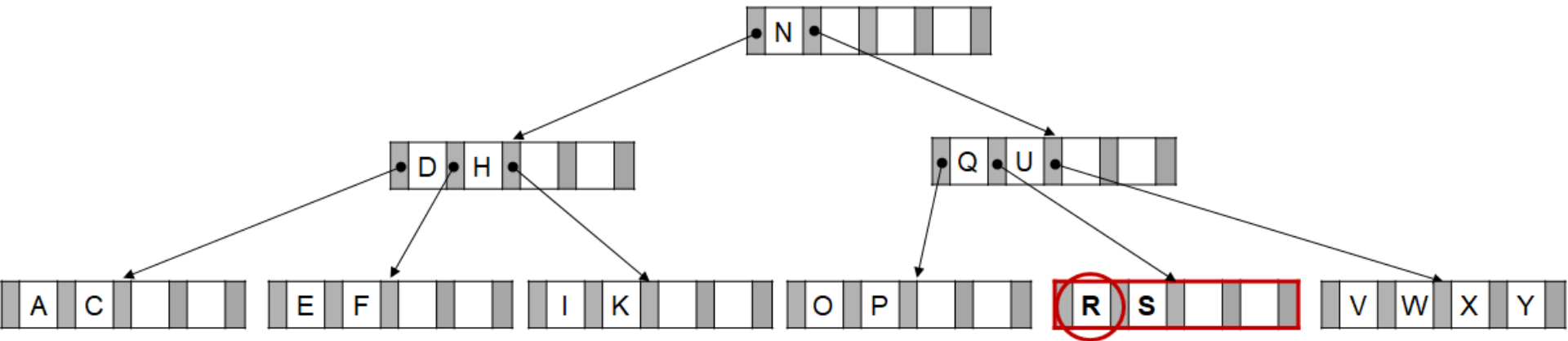
❑ Caso 3

- A remoção causa *underflow* na página (ela fica com menos chaves do que o mínimo permitido)
- **Solução:** Redistribuição de chaves com uma das irmãs
 - Procuramos uma página irmã imediata (mesmo pai e imediatamente à direita ou à esquerda) que contenha mais chaves que o mínimo: se existir, redistribuímos as chaves entre essas páginas
 - A redistribuição também provoca uma alteração na chave separadora que está no nó pai
 - O seu efeito é local: não se propaga para outros níveis da árvore

Remoção em árvore-B

□ Caso 3

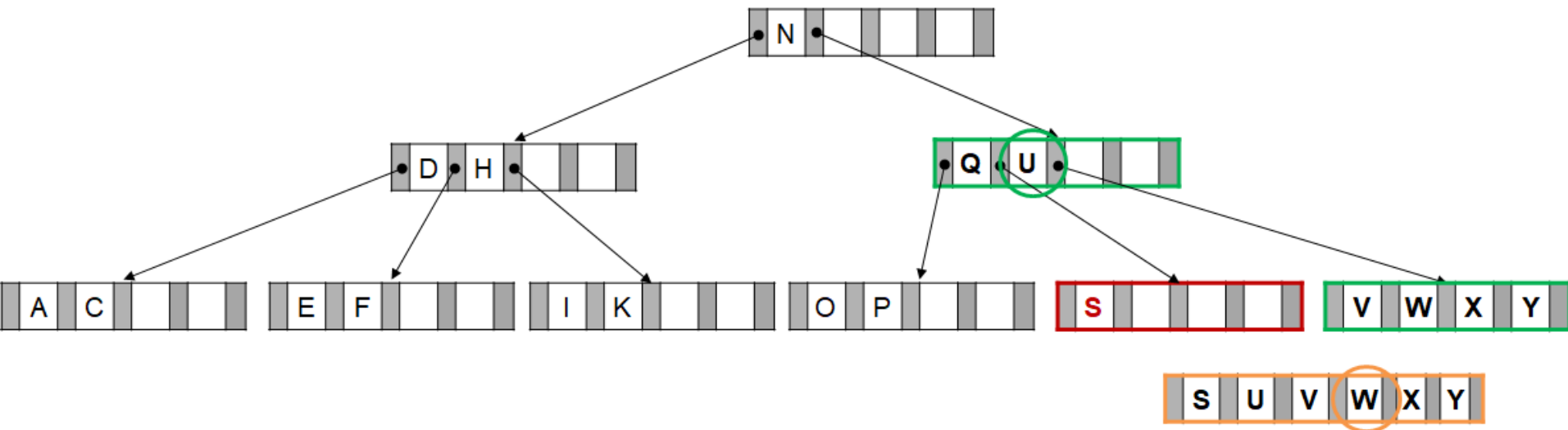
- Exemplo: Remoção da chave R – *underflow* na página filha esquerda da chave U



Remoção em árvore-B

❑ Caso 3

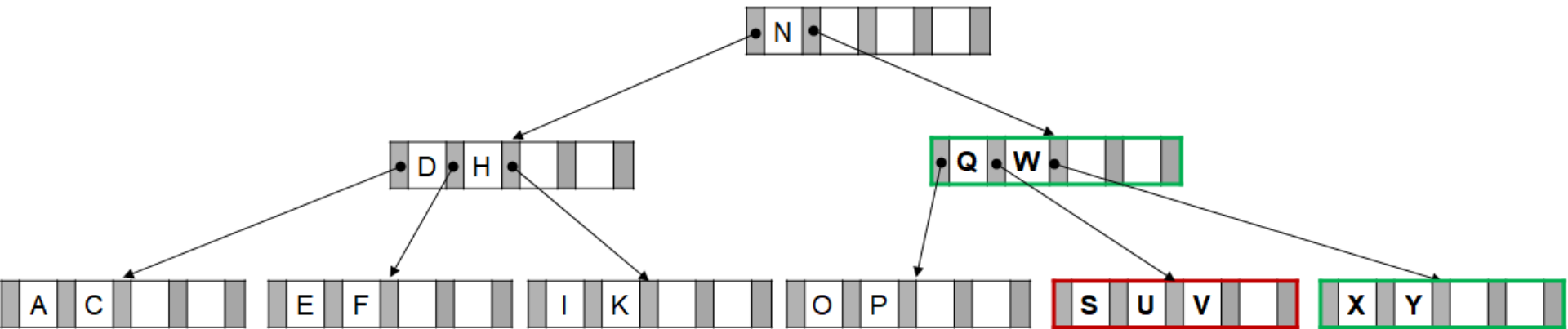
- Exemplo: Remoção da chave R – como a página irmã à direita tem mais chaves que o mínimo, redistribui-se com essa página
 - Note que a chave separadora que está no pai também se altera



Remoção em árvore-B

❑ Caso 3

- Exemplo: Remoção da chave R – como a página irmã à direita tem mais chaves que o mínimo, redistribui-se com essa página
 - Note que a chave separadora que está no pai também se altera



Remoção em árvore-B

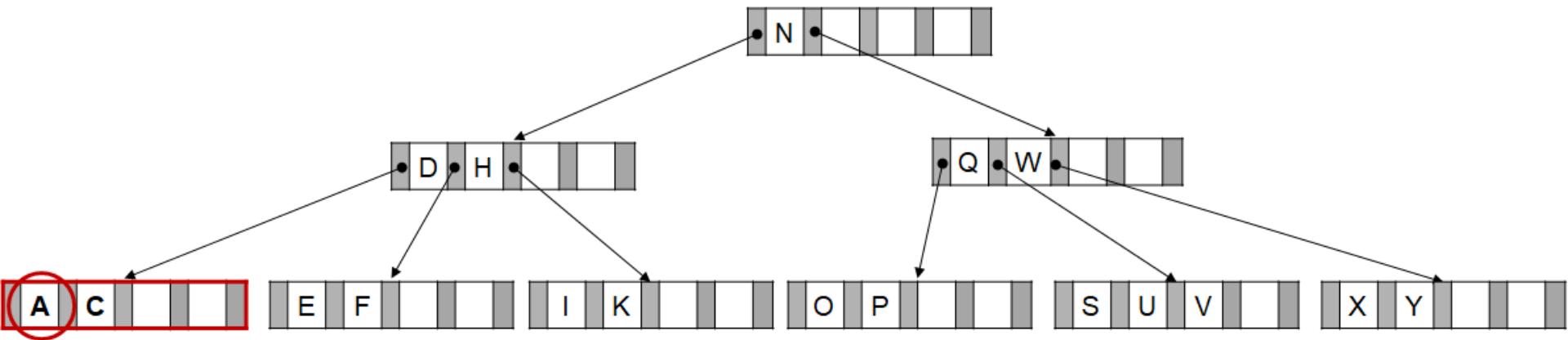
❑ Caso 4

- A remoção causa *underflow* nas páginas envolvidas e a redistribuição não pode ser aplicada
 - Não existem chaves suficientes para dividir entre as páginas irmãs
- **Solução:** Concatenação de páginas
 - Combinamos o conteúdo de duas páginas irmãs, juntamente com a chave da página pai, para formar uma única página
 - A concatenação é o inverso da divisão
 - Como consequência, pode ocorrer o *underflow* da página pai

Remoção em árvore-B

❑ Caso 4

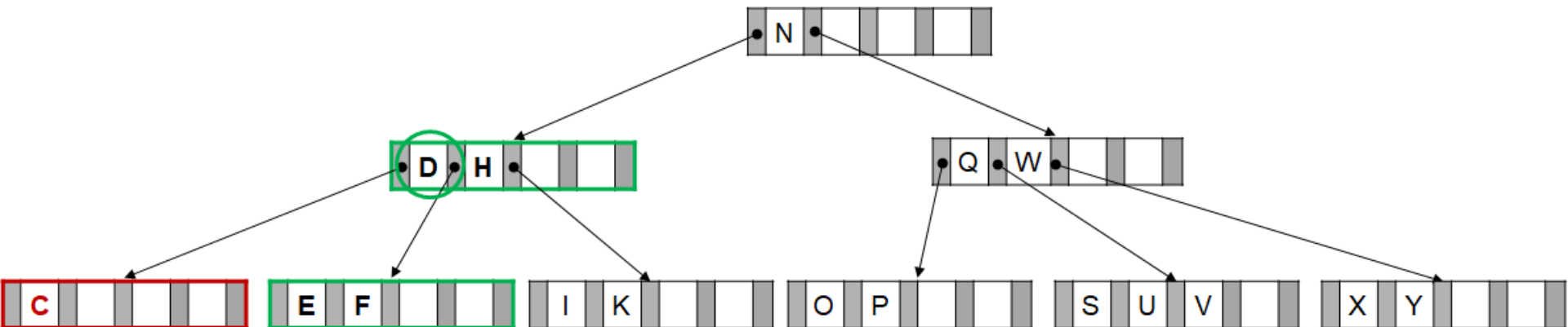
- Exemplo: Remoção da chave A – A única página irmã não tem chaves “extras” para emprestar, então ocorre a concatenação das duas páginas, juntamente com a chave separadora que está na página pai



Remoção em árvore-B

□ Caso 4

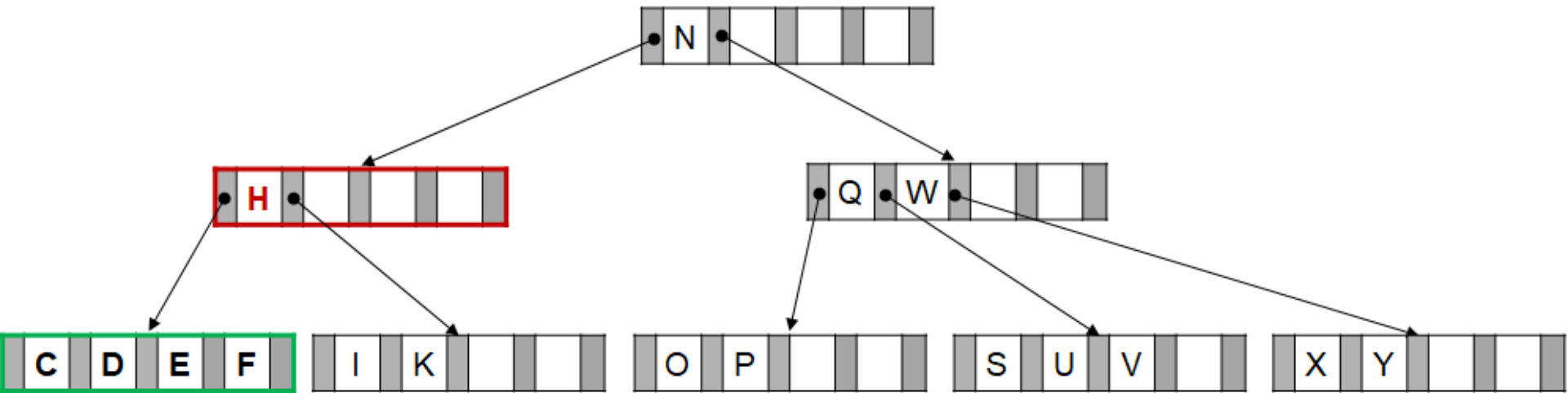
- Exemplo: Remoção da chave A – A única página irmã não tem chaves “extras” para emprestar, então ocorre a concatenação das duas páginas, juntamente com a chave separadora que está na página pai



Remoção em árvore-B

❑ Caso 4

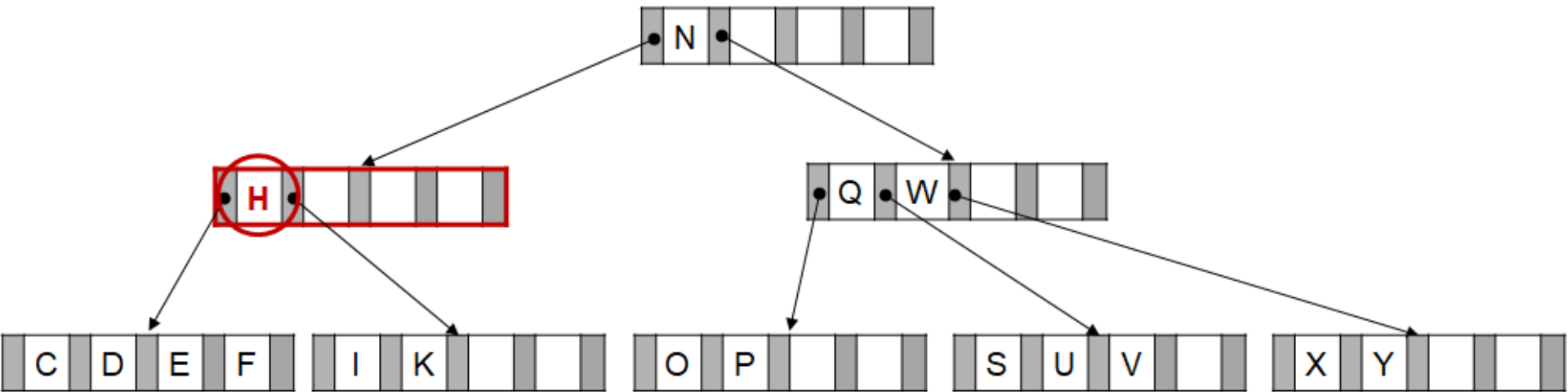
- Exemplo: Remoção da chave A – A única página irmã não tem chaves “extras” para emprestar, então ocorre a concatenação das duas páginas, juntamente com a chave separadora que está na página pai



Remoção em árvore-B

❑ Caso 5

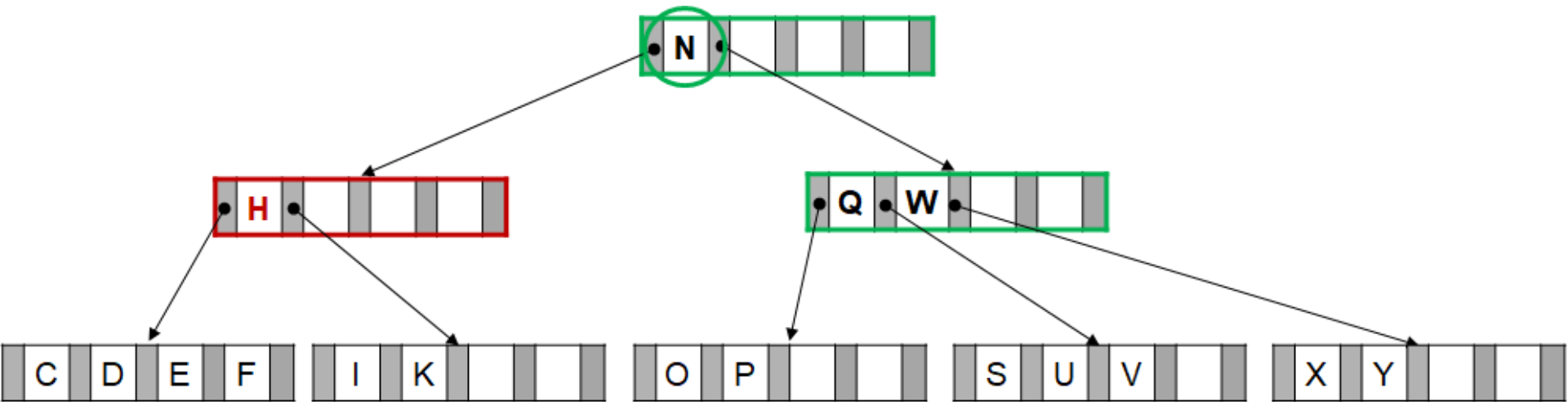
- O *underflow* da página folha se propaga para o pai
- **Solução:** Dependendo da ocupação das páginas irmãs, haverá redistribuição ou nova concatenação



Remoção em árvore-B

□ Caso 5

- Exemplo: Neste exemplo, será necessária uma nova concatenação, uma vez que a página irmã direita da página com *underflow* está com a ocupação mínima



Remoção em árvore-B

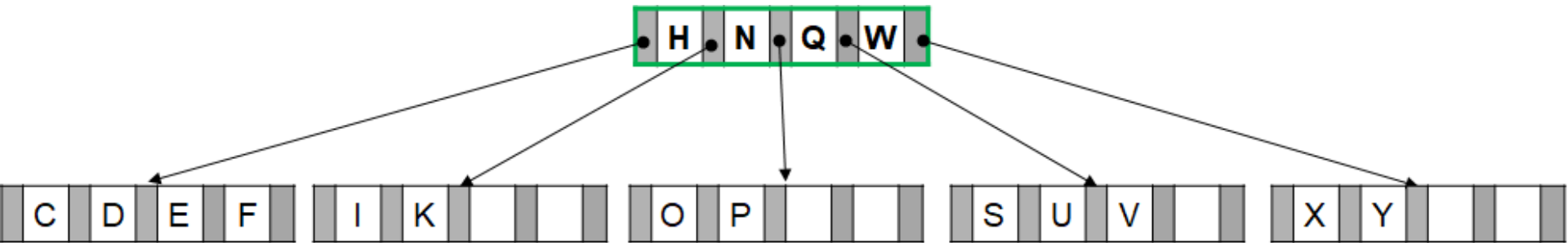
❑ Caso 6

- A concatenação das páginas filhas da página raiz absorve a sua única chave
- **Solução:** Diminuição da altura da árvore
 - A árvore passa a ter uma nova raiz
 - A raiz descartada fica disponível para reutilização

Remoção em árvore-B

❑ Caso 6

- Exemplo: Árvore-B resultante após as remoções dos casos anteriores



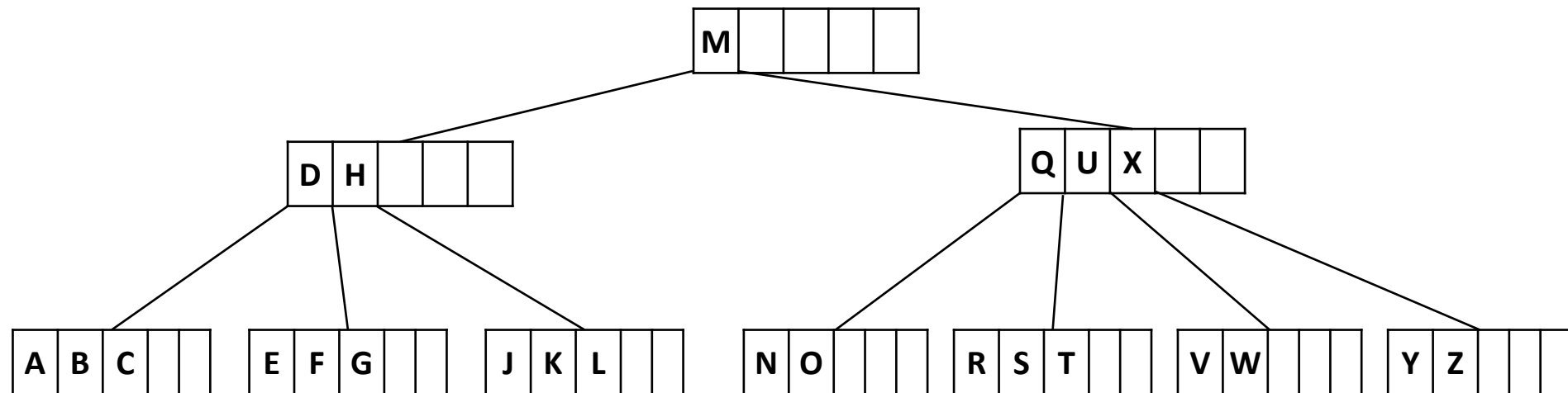
Remoção em árvore-B

- ❑ Passos para a remoção de uma chave em árvores-B
 1. Localize a chave
 2. Se a chave não estiver em uma folha, troque-a com sua sucessora imediata, que estará em uma folha
 3. Remova a chave da página folha
 4. Se a página mantiver o limite mínimo de chaves, termine
 5. Senão verifique as páginas irmãs imediatas à esquerda e à direita
 - a) Se uma delas tem mais chaves que o número mínimo, redistribua
 - b) Senão concatene a página com uma de suas irmãs
 6. Se ocorreu concatenação, repita os passos de 4 a 6 para a página pai
 7. Se a última chave da raiz foi removida, então a raiz passa a ser a página concatenada e a árvore diminui de altura

Exercício

- A partir da árvore-B de **ordem 6** dada abaixo, represente graficamente as árvores resultantes após a remoção de cada uma das seguintes chaves (nesta ordem):

L, D, G, A, T, X, N, R, H, W, Q, J, B, F, O, S, U, K, C, V



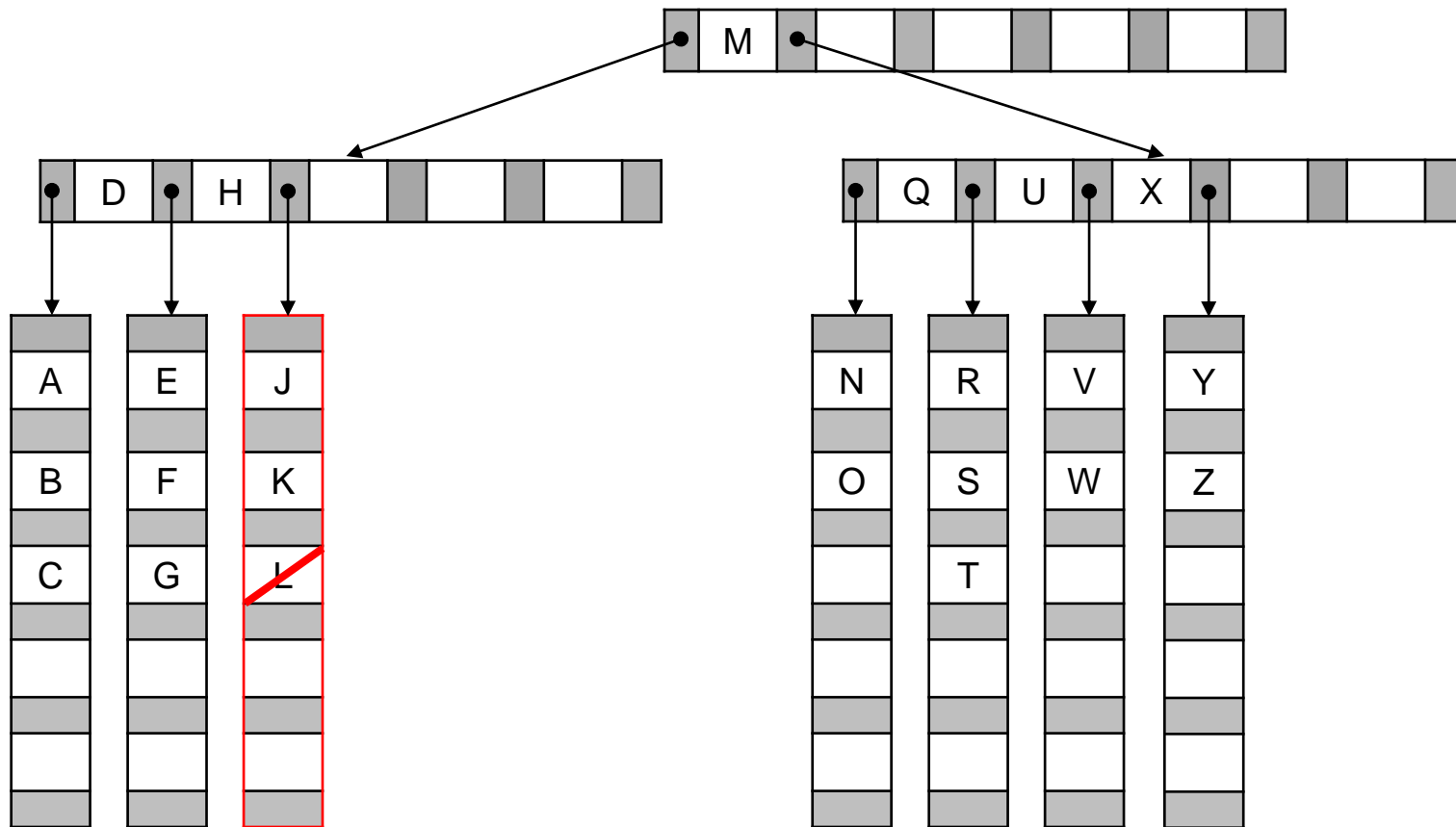
- Obs.: na redistribuição e na concatenação, vamos dar preferência à página irmã direita **quando for possível usar qualquer uma das duas irmãs**.



Exercício

Ordem $m = 6$
Ocupação mínima das
páginas: $\lceil m/2 \rceil - 1 = 2$

□ L, D, G, A, T, X, N, R, H, W, Q, J, B, F, O, S, U, K, C, V



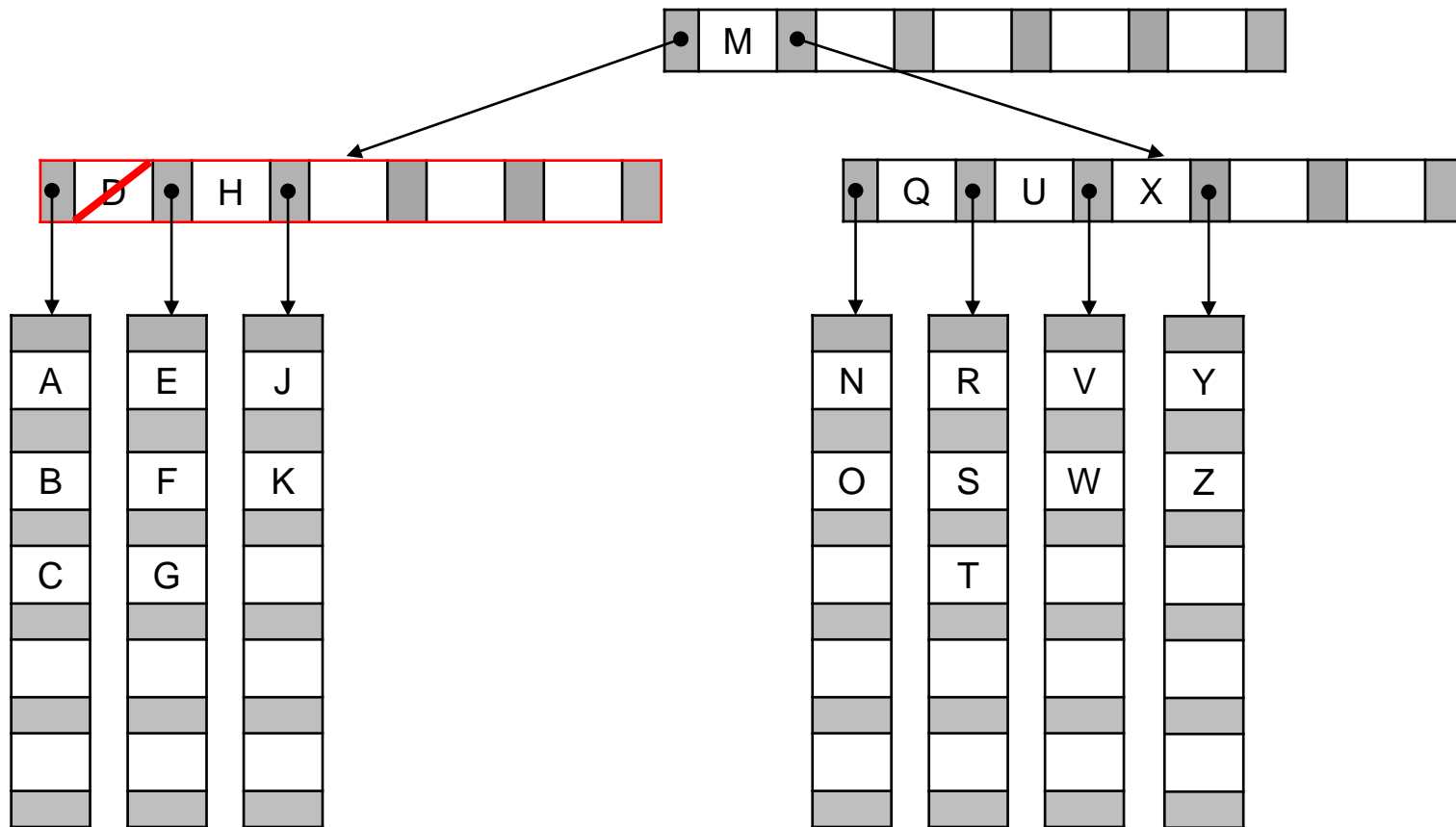
ABCDEFGHIJKLMNOPQRSTUVWXYZ

Exercício

Ordem $m = 6$

Ocupação mínima das páginas: $\lceil m/2 \rceil - 1 = 2$

□ **L**, **D**, G, A, T, X, N, R, H, W, Q, J, B, F, O, S, U, K, C, V



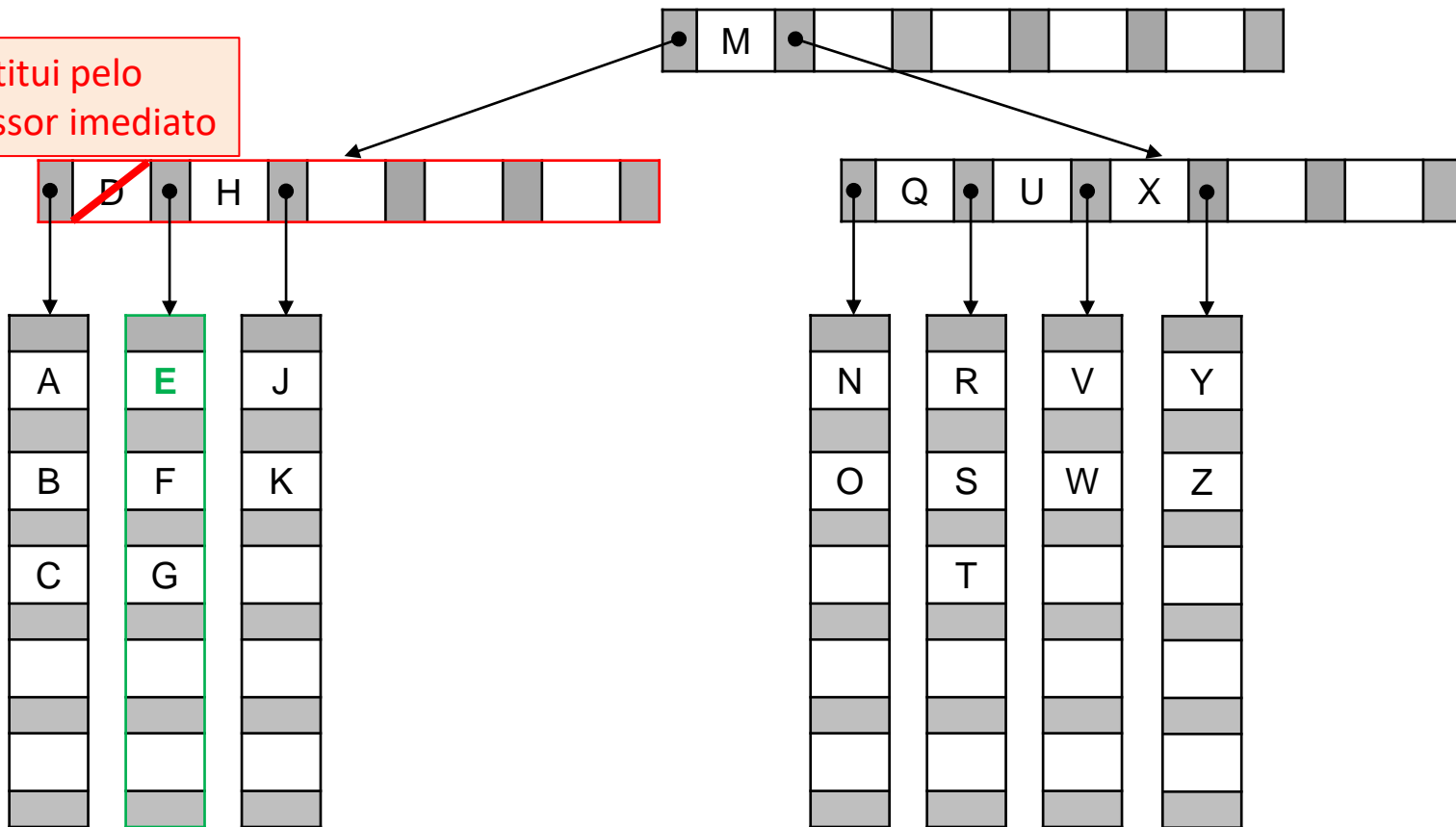
ABCDEFGHIJKLMNOPQRSTUVWXYZ

Exercício

Ordem $m = 6$
Ocupação mínima das
páginas: $\lceil m/2 \rceil - 1 = 2$

□ **L**, **D**, **G**, **A**, **T**, **X**, **N**, **R**, **H**, **W**, **Q**, **J**, **B**, **F**, **O**, **S**, **U**, **K**, **C**, **V**

Substitui pelo
sucessor imediato

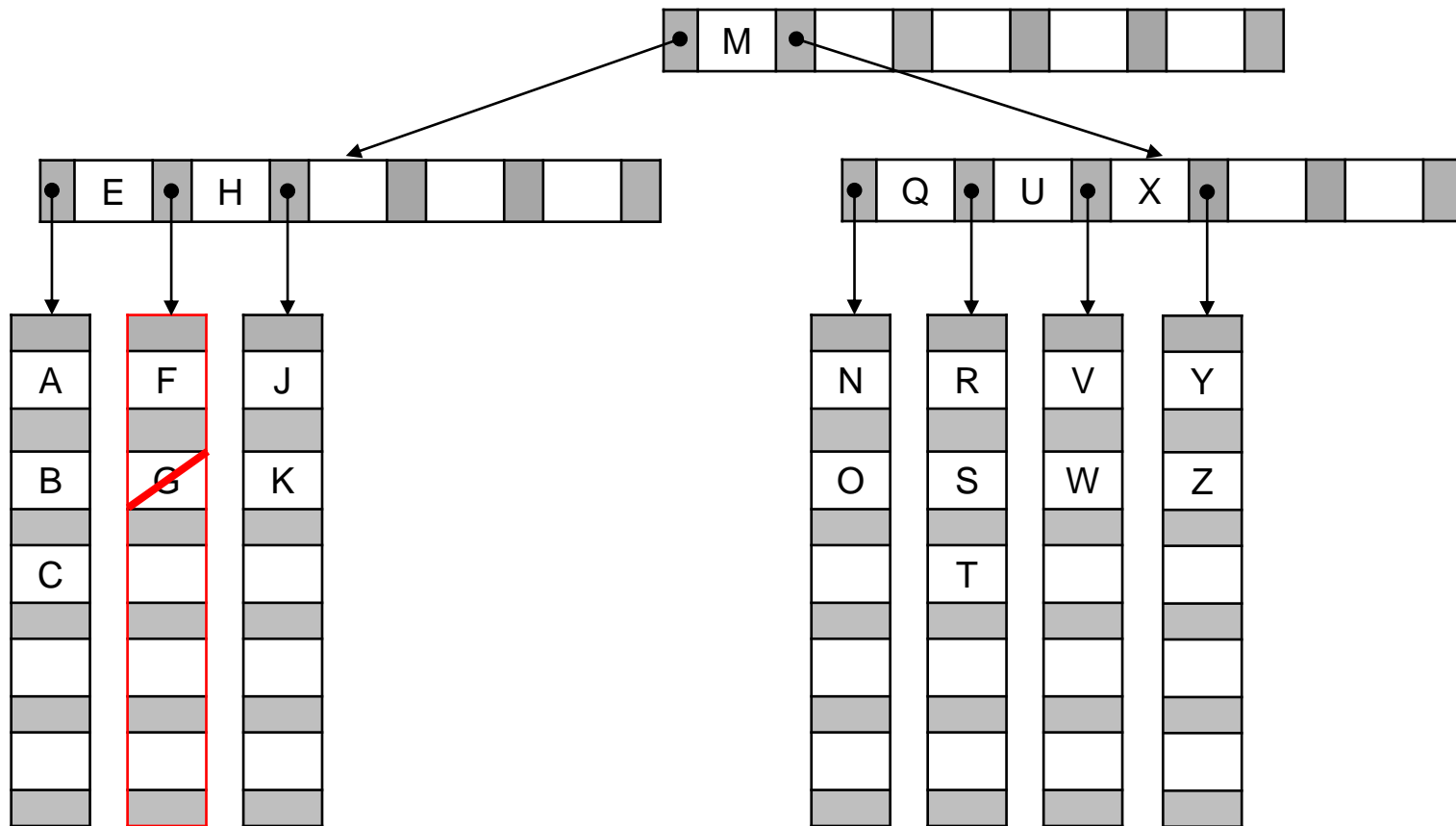


ABCDEFGHIJKLMNOPQRSTUVWXYZ

Exercício

Ordem $m = 6$
Ocupação mínima das
páginas: $\lceil m/2 \rceil - 1 = 2$

□ L, D, G, A, T, X, N, R, H, W, Q, J, B, F, O, S, U, K, C, V



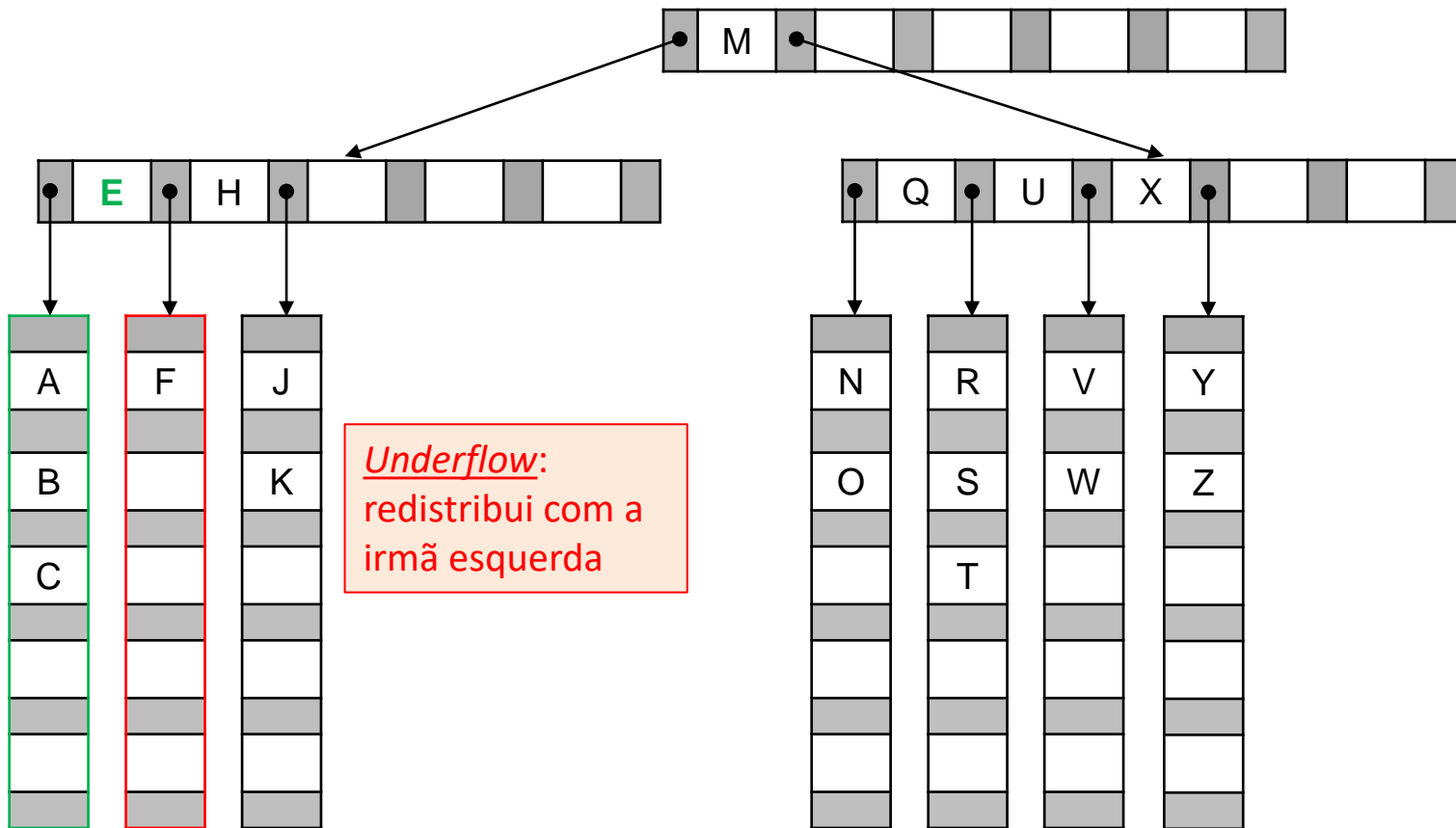
ABCDEFGHIJKLMNOPQRSTUVWXYZ

Exercício

Ordem $m = 6$

Ocupação mínima das páginas: $\lceil m/2 \rceil - 1 = 2$

□ L, D, G, A, T, X, N, R, H, W, Q, J, B, F, O, S, U, K, C, V

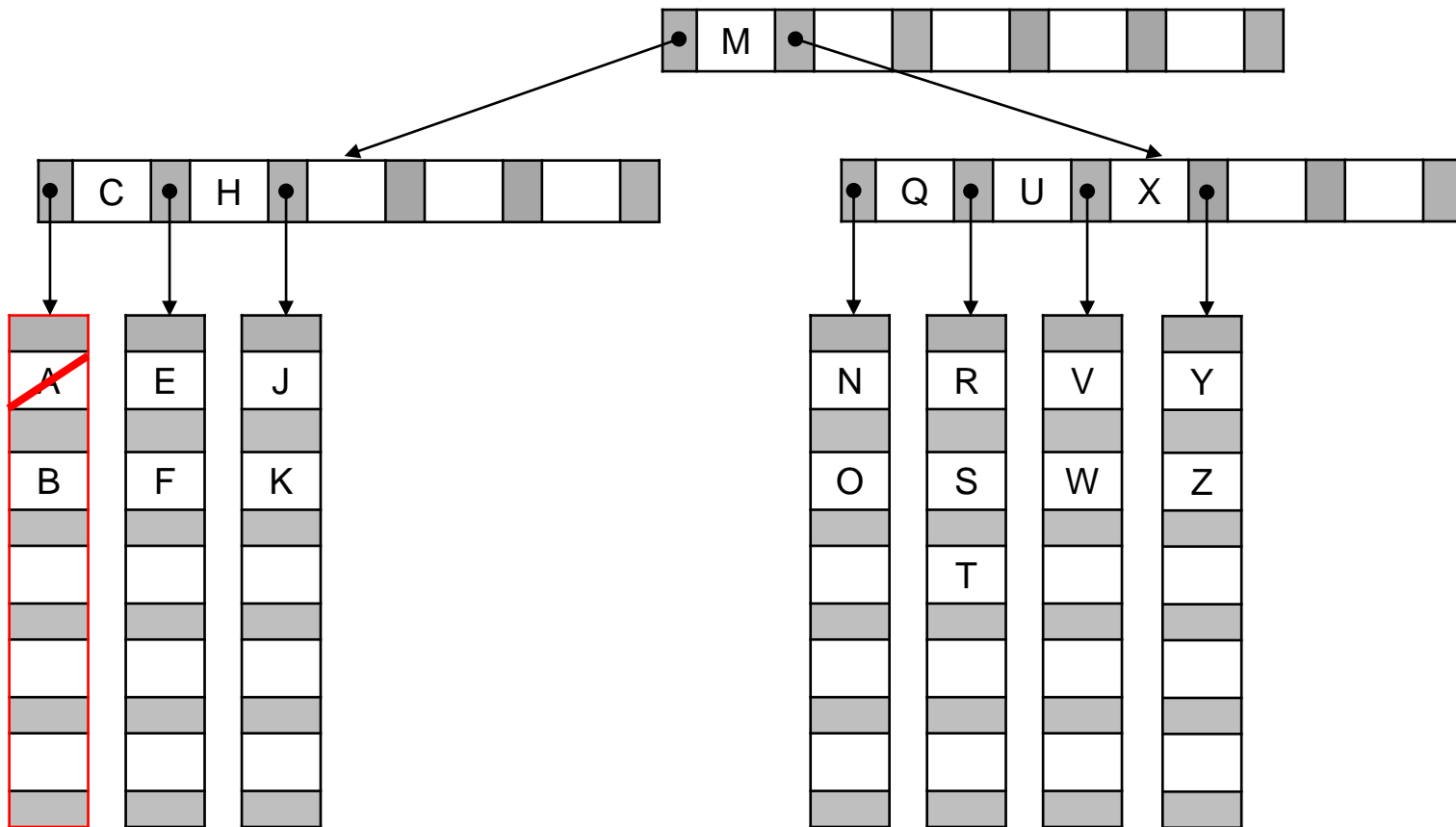


ABCDEFGHIJKLMNOPQRSTUVWXYZ

Exercício

Ordem $m = 6$
Ocupação mínima das
páginas: $\lceil m/2 \rceil - 1 = 2$

□ L, D, G, A, T, X, N, R, H, W, Q, J, B, F, O, S, U, K, C, V



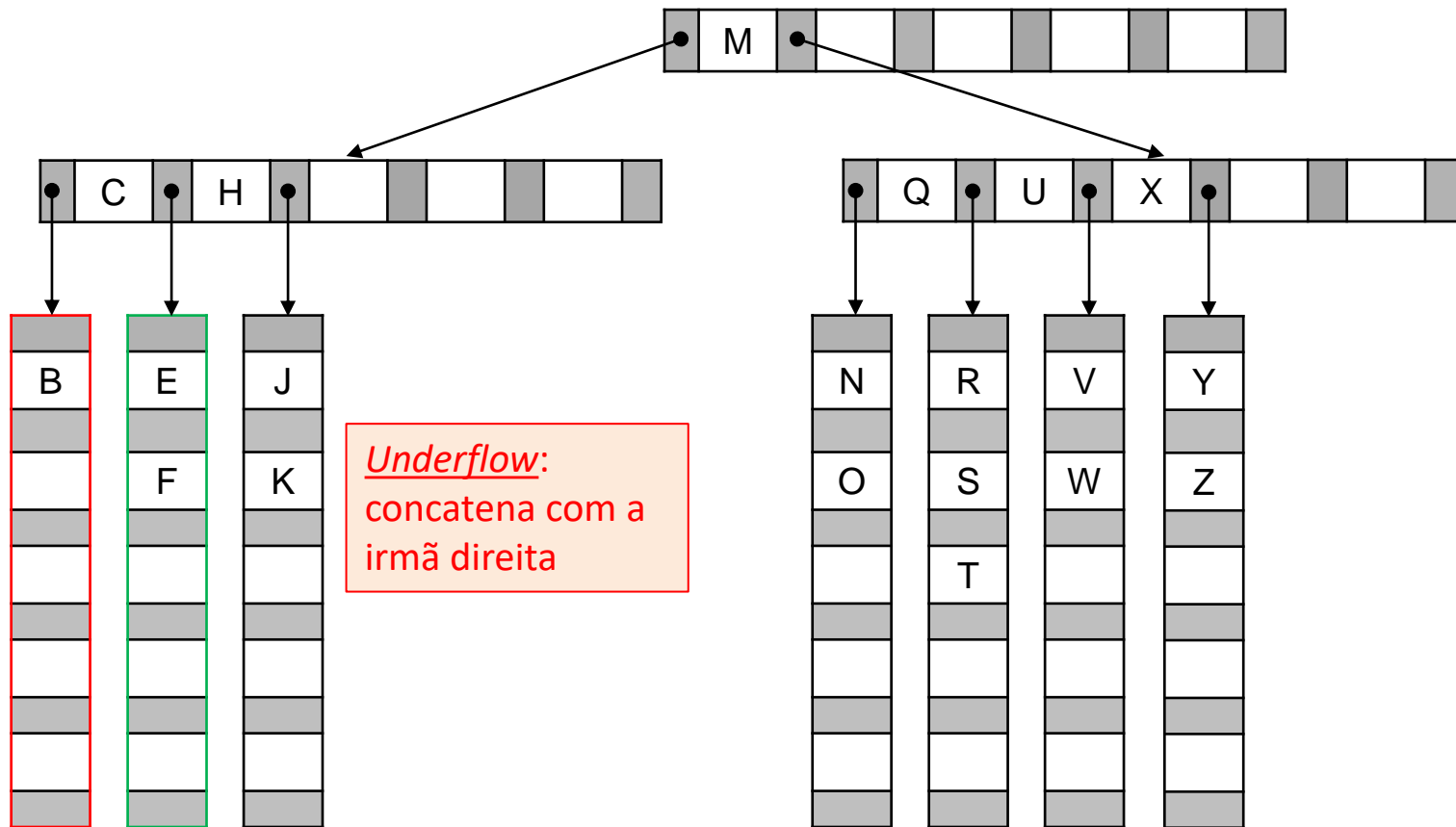
ABCDEFGHIJKLMNOPQRSTUVWXYZ

Exercício

Ordem $m = 6$

Ocupação mínima das
páginas: $\lceil m/2 \rceil - 1 = 2$

□ L, D, G, A, T, X, N, R, H, W, Q, J, B, F, O, S, U, K, C, V



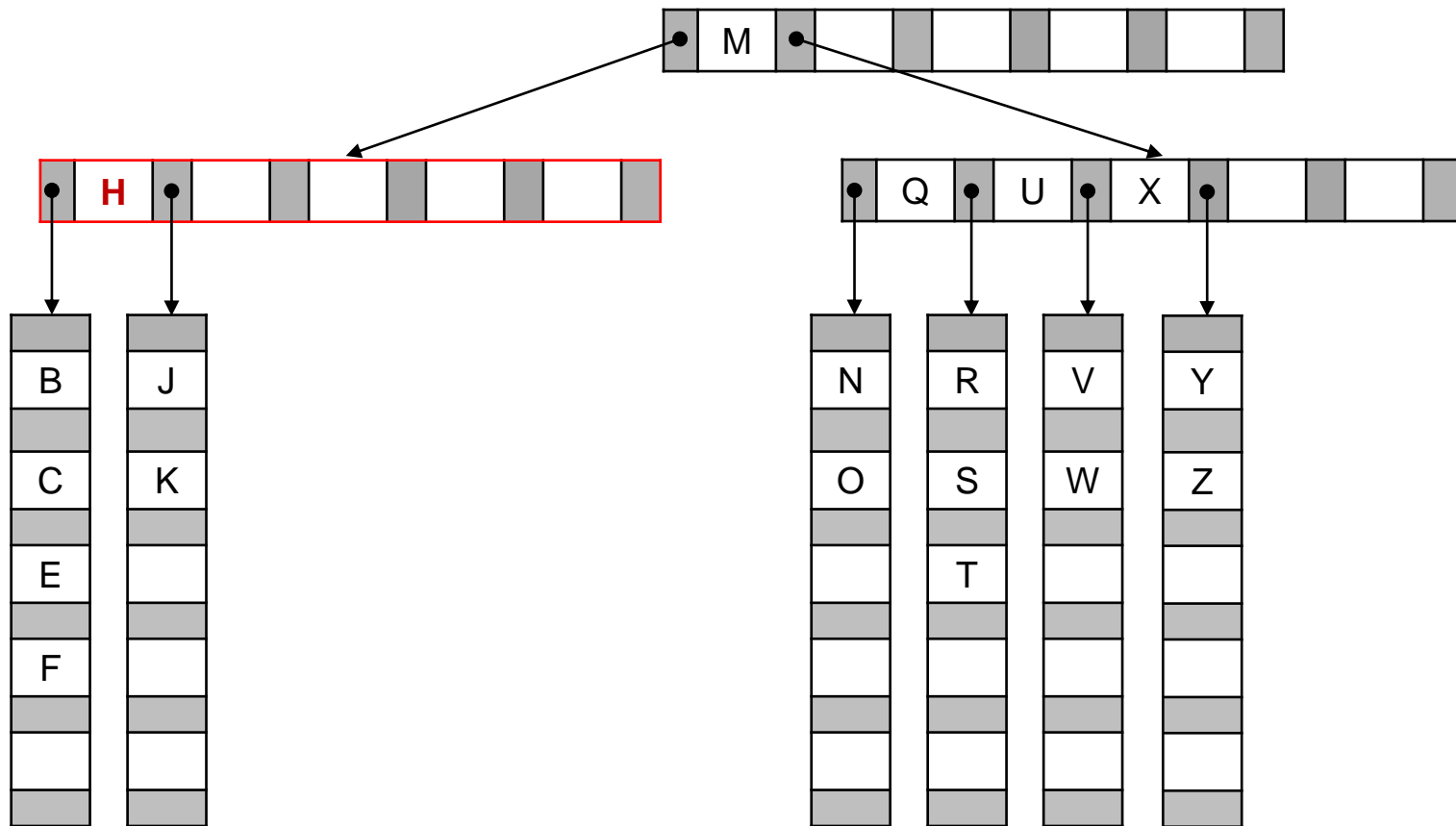
ABCDEFGHIJKLMNOPQRSTUVWXYZ

Exercício

Ordem $m = 6$

Ocupação mínima das
páginas: $\lceil m/2 \rceil - 1 = 2$

□ L, D, G, A, T, X, N, R, H, W, Q, J, B, F, O, S, U, K, C, V



ABCDEFGHIJKLMNOPQRSTUVWXYZ

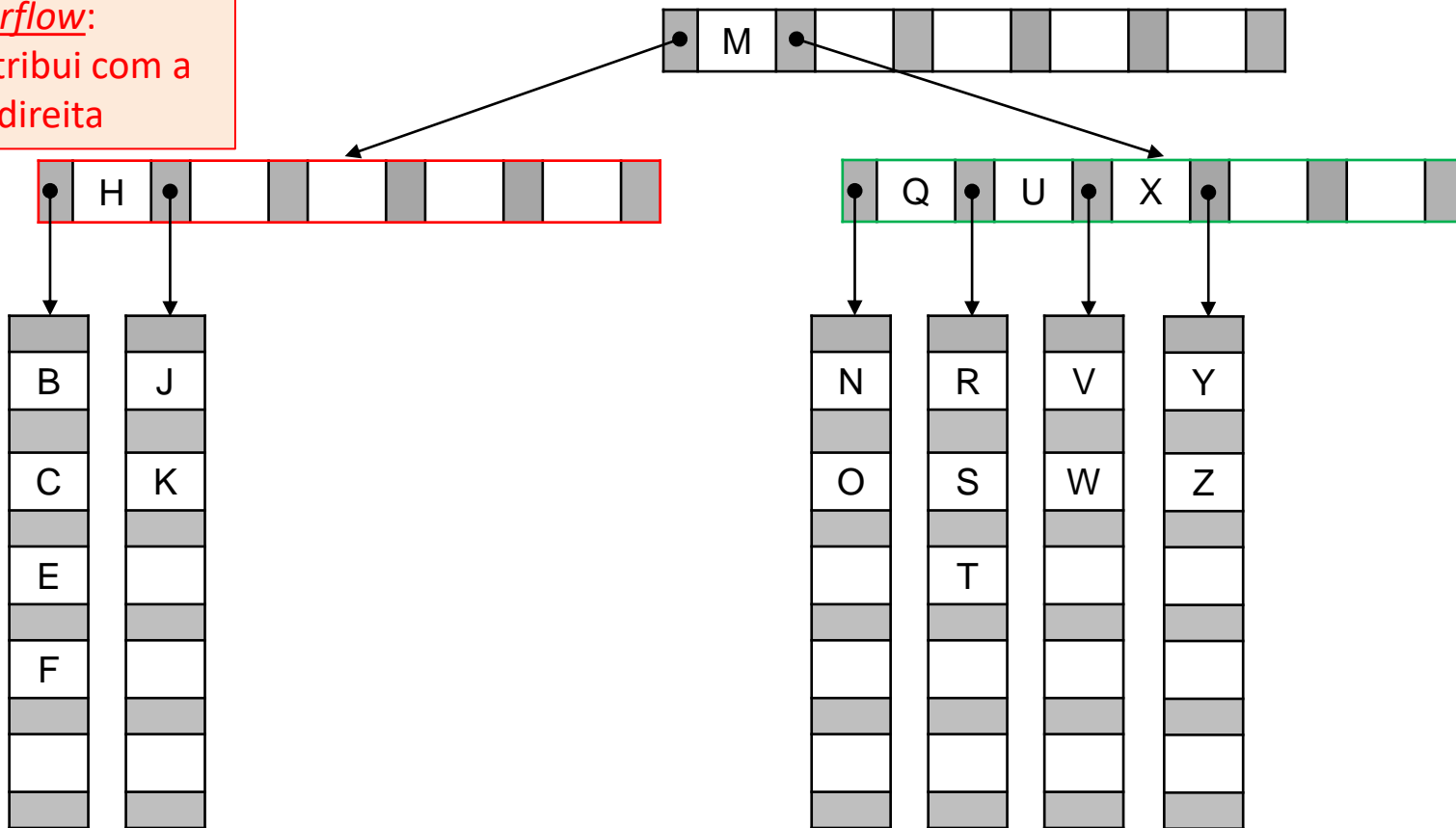
Exercício

Ordem $m = 6$

Ocupação mínima das
páginas: $\lceil m/2 \rceil - 1 = 2$

□ **L**, **D**, **G**, **A**, T, X, N, R, H, W, Q, J, B, F, O, S, U, K, C, V

Underflow:
redistribui com a
irmã direita

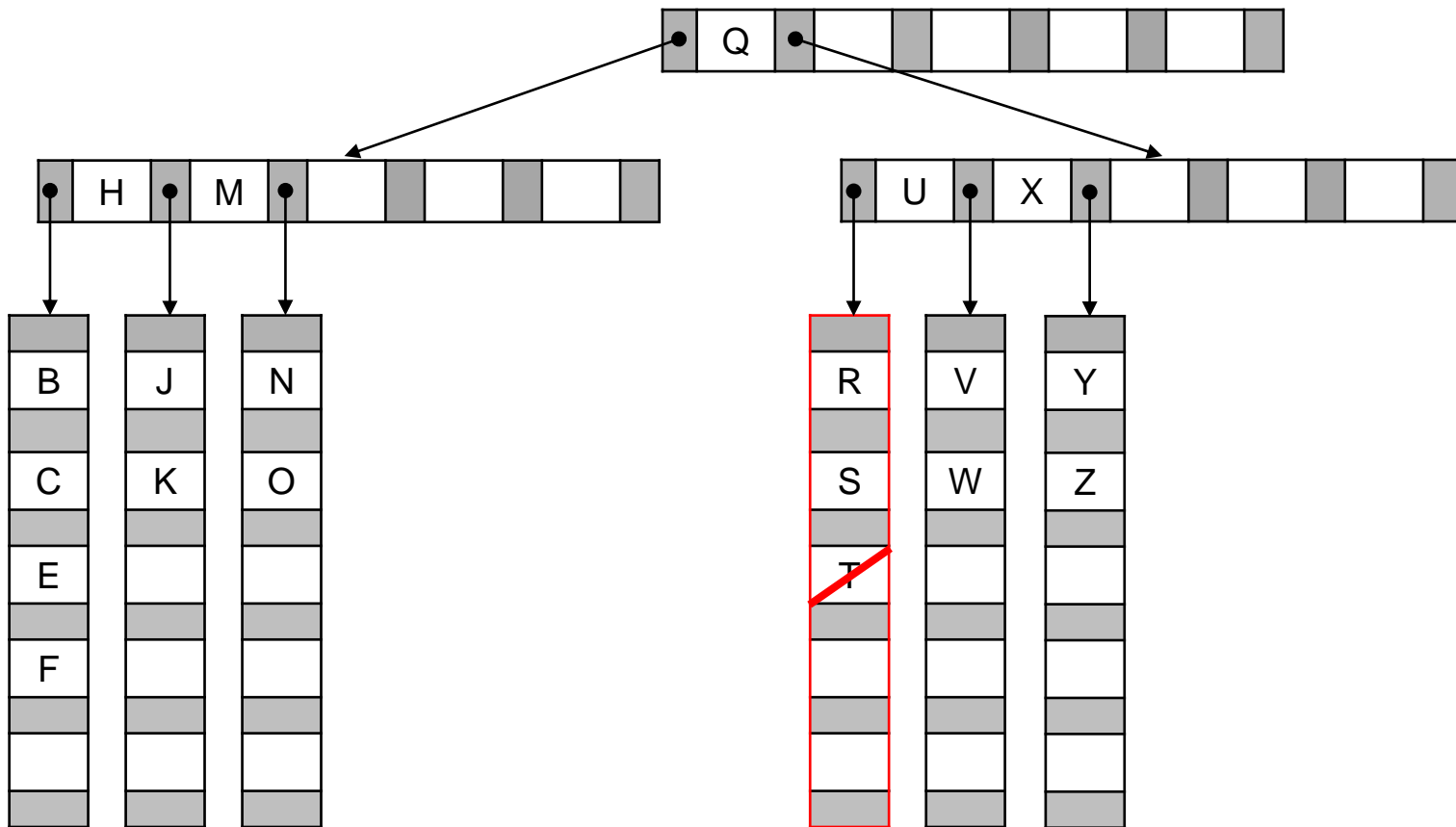


ABCDEFGHIJKLMNOPQRSTUVWXYZ

Exercício

Ordem $m = 6$
Ocupação mínima das
páginas: $\lceil m/2 \rceil - 1 = 2$

□ L, D, G, A, I, X, N, R, H, W, Q, J, B, F, O, S, U, K, C, V

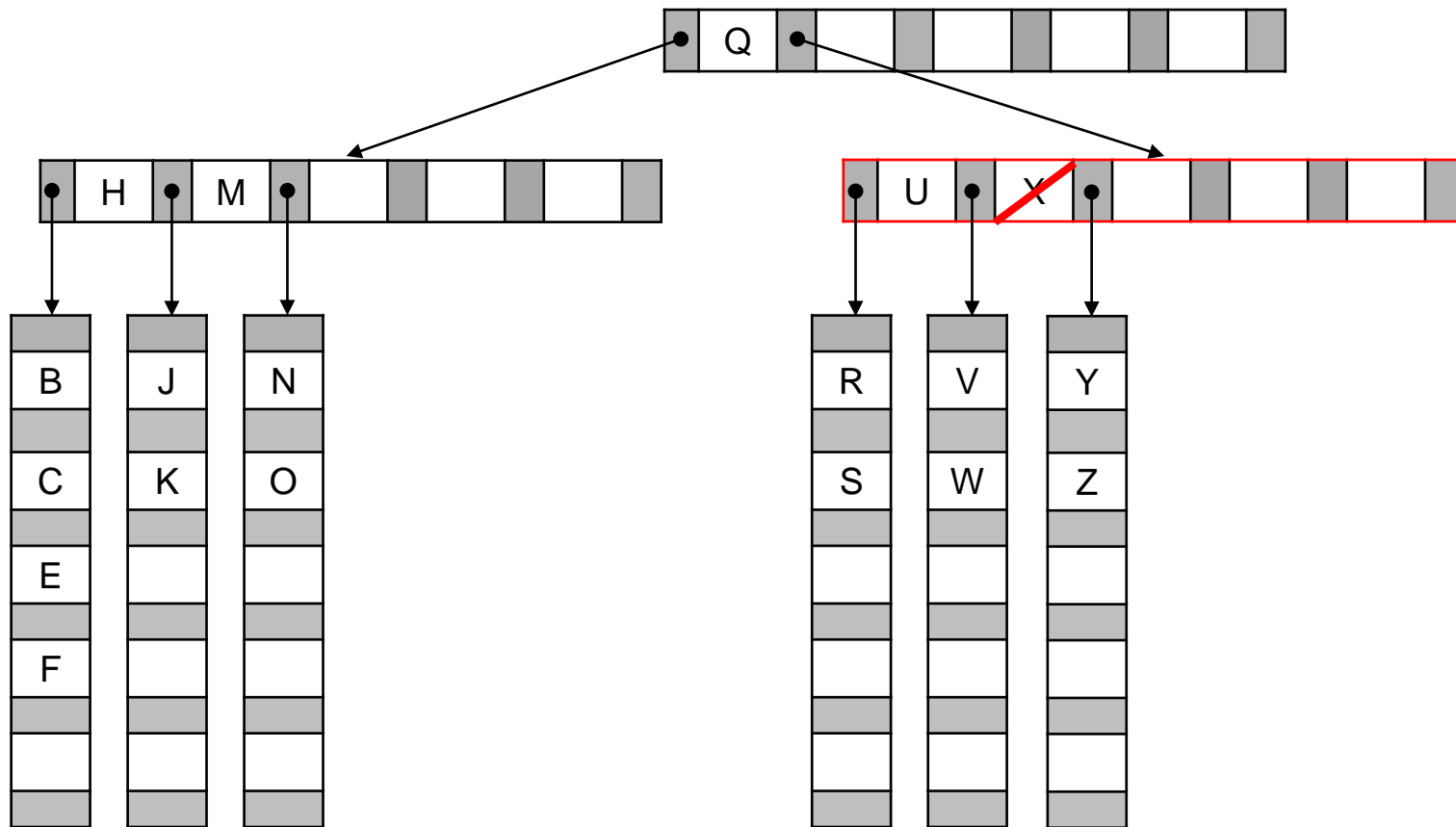


ABCDEFGHIJKLMNOPQRSTUVWXYZ

Exercício

Ordem $m = 6$
Ocupação mínima das
páginas: $\lceil m/2 \rceil - 1 = 2$

□ L, D, G, A, T, X, N, R, H, W, Q, J, B, F, O, S, U, K, C, V



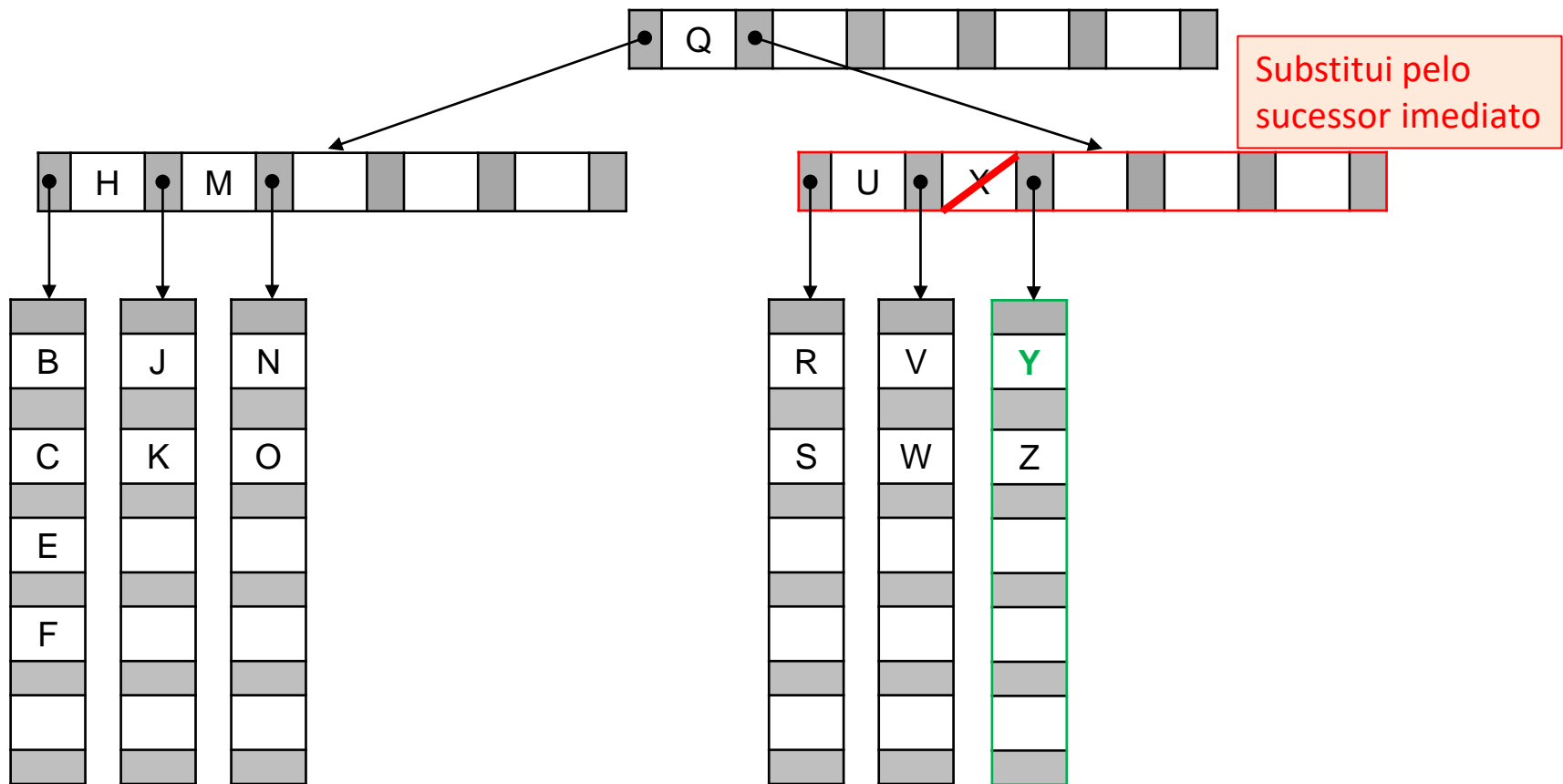
ABCDEFGHIJKLMNOPQRSTUVWXYZ

Exercício

Ordem $m = 6$

Ocupação mínima das páginas: $\lceil m/2 \rceil - 1 = 2$

□ L, D, G, A, T, X, N, R, H, W, Q, J, B, F, O, S, U, K, C, V

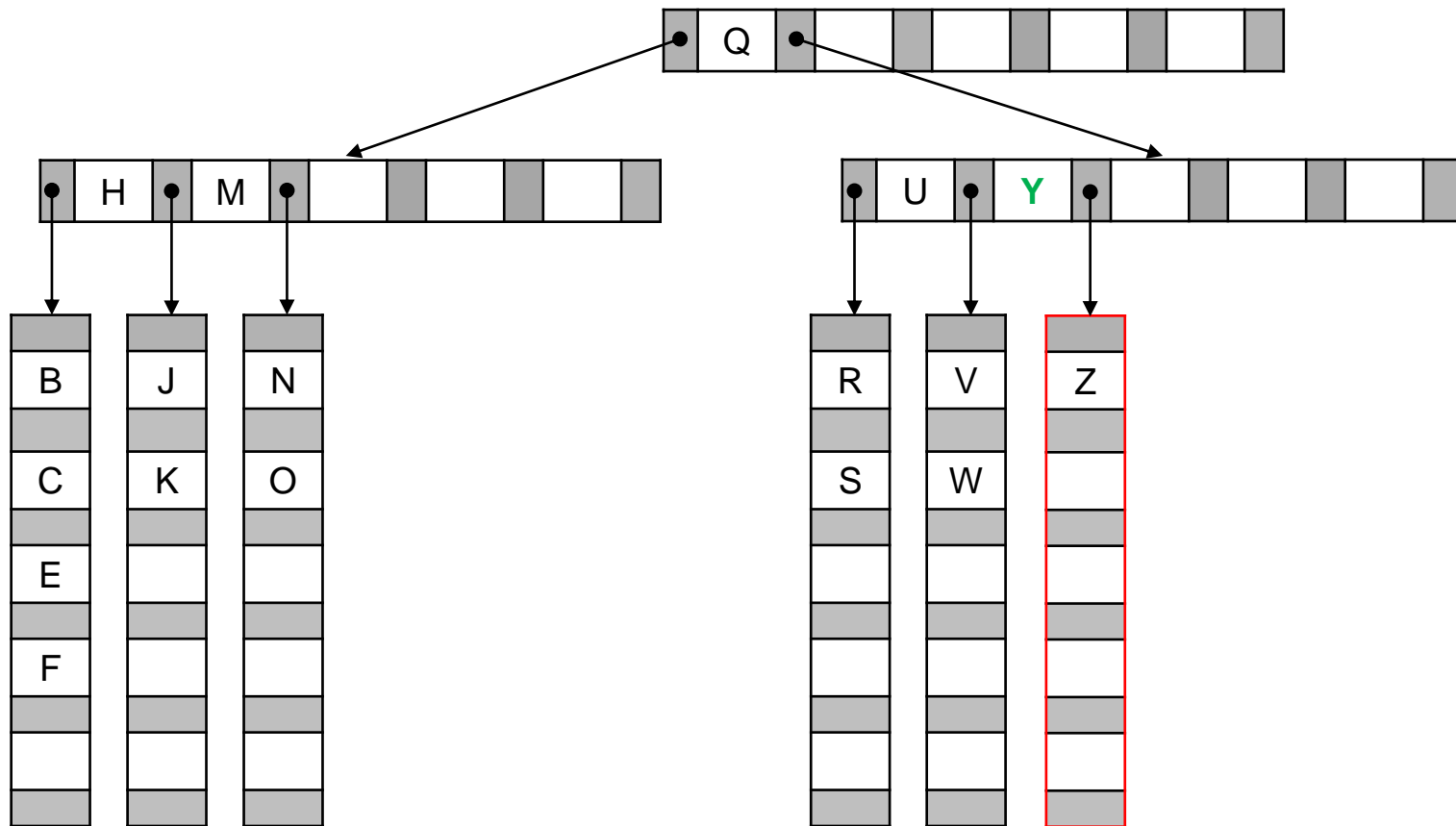


ABCDEFGHIJKLMNOPQRSTUVWXYZ

Exercício

Ordem $m = 6$
Ocupação mínima das
páginas: $\lceil m/2 \rceil - 1 = 2$

□ L, D, G, A, T, X, N, R, H, W, Q, J, B, F, O, S, U, K, C, V



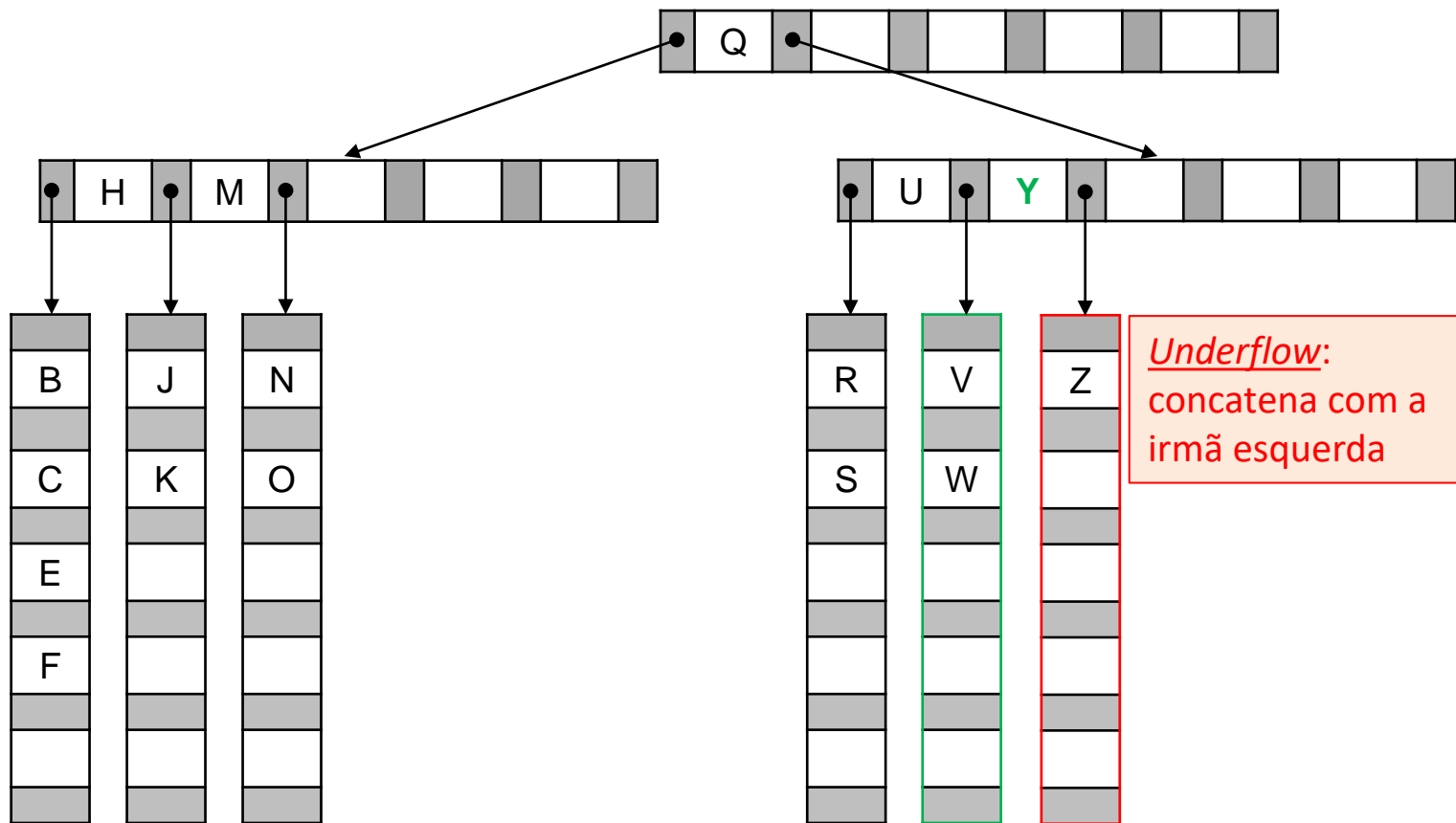
ABCDEFGHIJKLMNOPQRSTUVWXYZ

Exercício

Ordem $m = 6$

Ocupação mínima das
páginas: $\lceil m/2 \rceil - 1 = 2$

□ L, D, G, A, T, X, N, R, H, W, Q, J, B, F, O, S, U, K, C, V



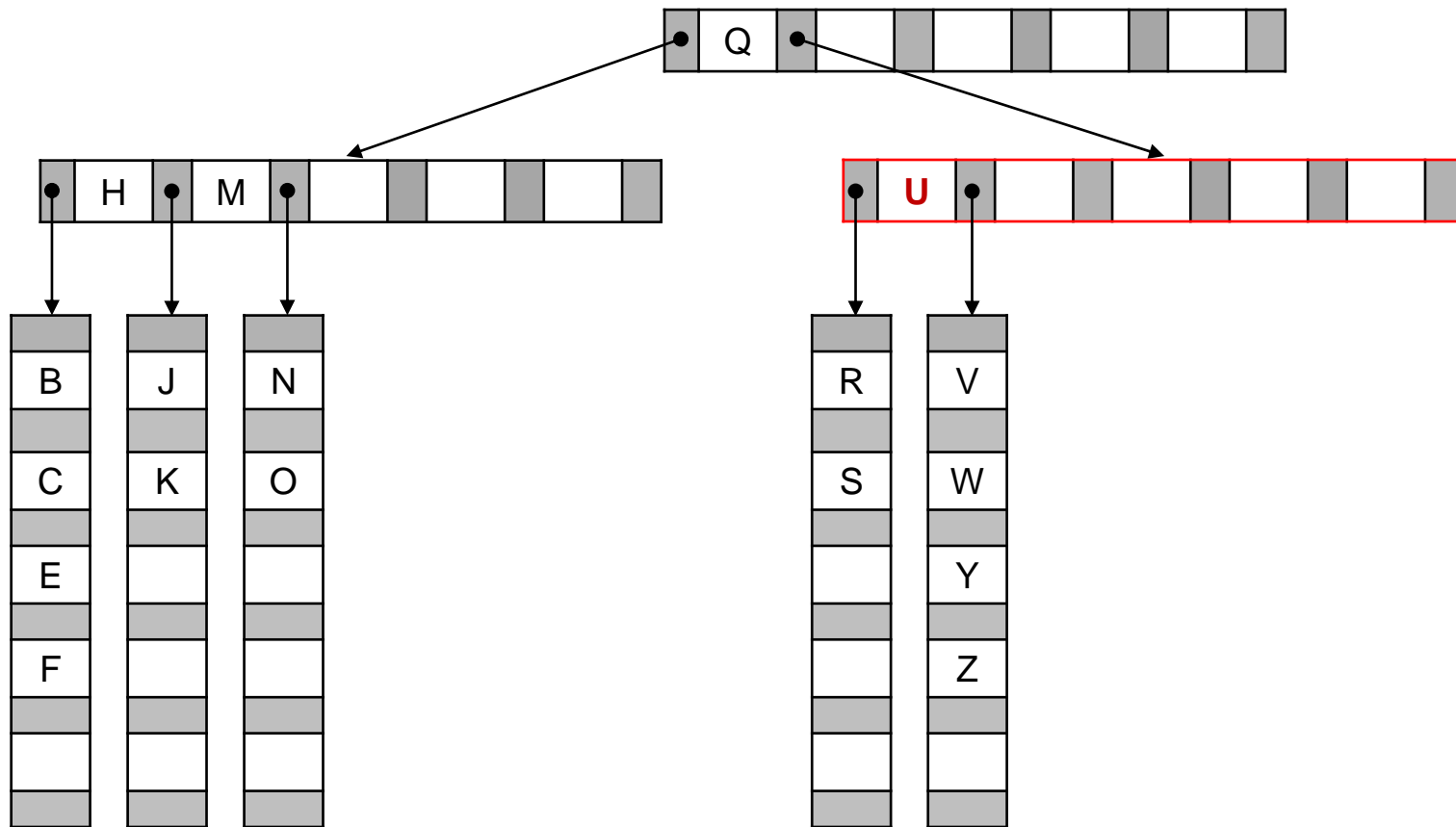
ABCDEFGHIJKLMNOPQRSTUVWXYZ

Exercício

Ordem $m = 6$

Ocupação mínima das páginas: $\lceil m/2 \rceil - 1 = 2$

❑ L, D, G, A, T, X, N, R, H, W, Q, J, B, F, O, S, U, K, C, V



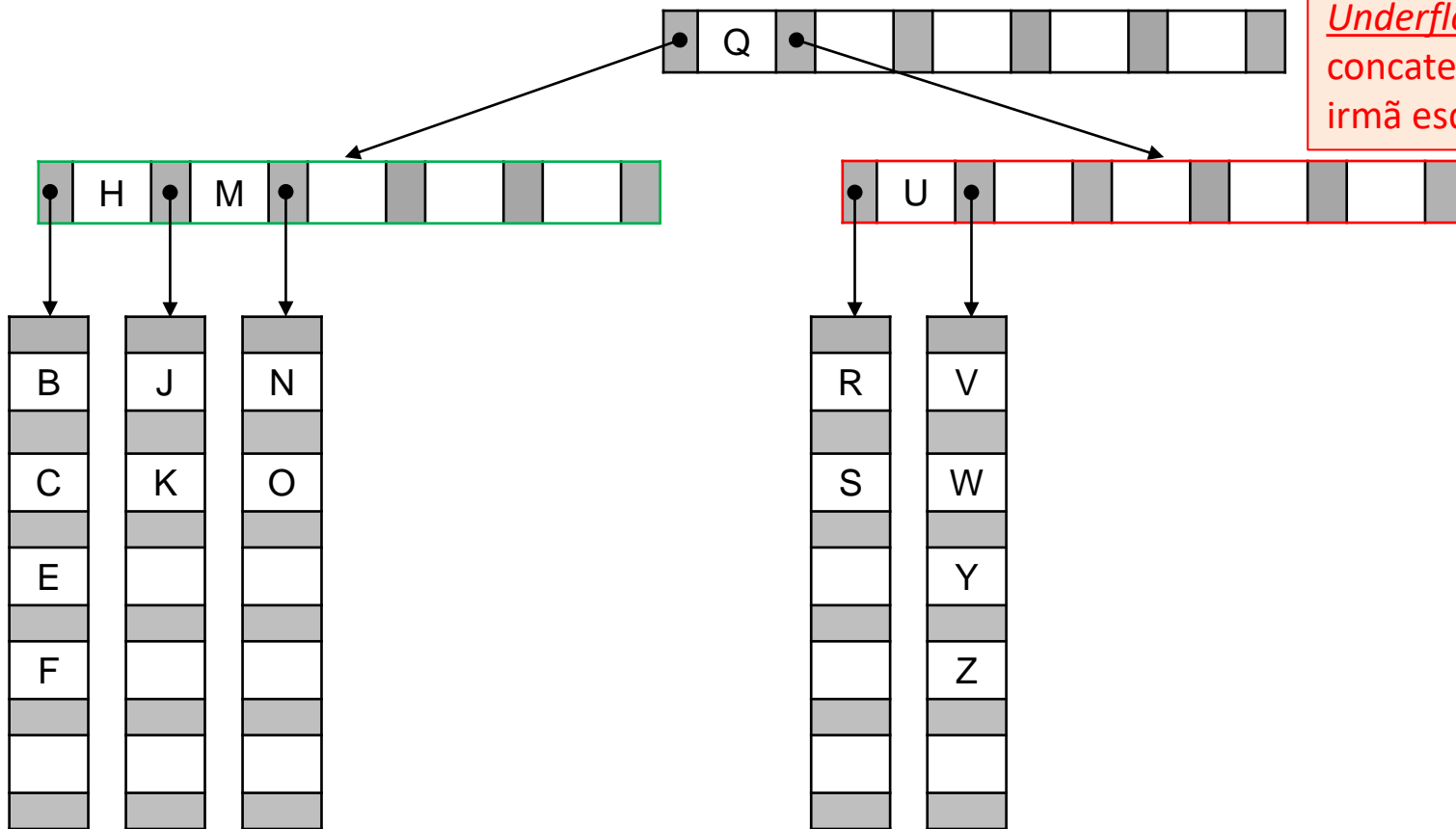
ABCDEFGHIJKLMNOPQRSTUVWXYZ

Exercício

Ordem $m = 6$

Ocupação mínima das páginas: $\lceil m/2 \rceil - 1 = 2$

□ L, D, G, A, T, X, N, R, H, W, Q, J, B, F, O, S, U, K, C, V



Underflow:
concatena com a
irmã esquerda

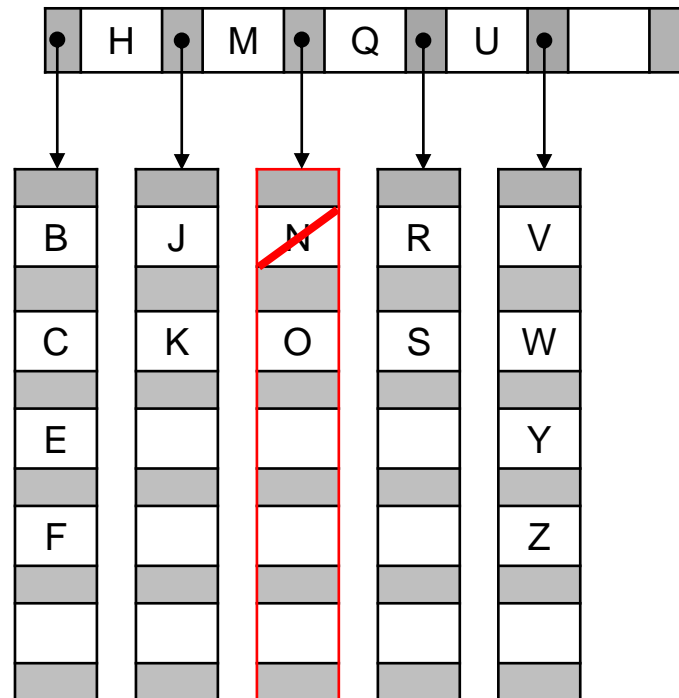
ABCDEFGHIJKLMNOPQRSTUVWXYZ

Exercício

Ordem $m = 6$

Ocupação mínima das
páginas: $\lceil m/2 \rceil - 1 = 2$

□ L, D, G, A, T, X, N, R, H, W, Q, J, B, F, O, S, U, K, C, V



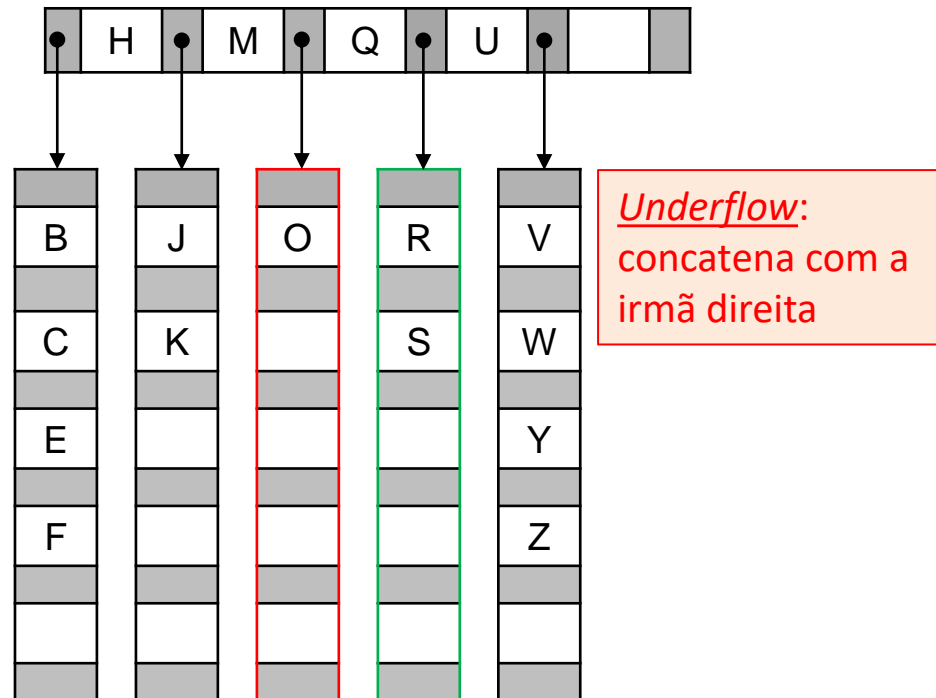
ABCDEFGHIJKLMNOPQRSTUVWXYZ

Exercício

Ordem $m = 6$

Ocupação mínima das
páginas: $\lceil m/2 \rceil - 1 = 2$

□ L, D, G, A, T, X, N, R, H, W, Q, J, B, F, O, S, U, K, C, V



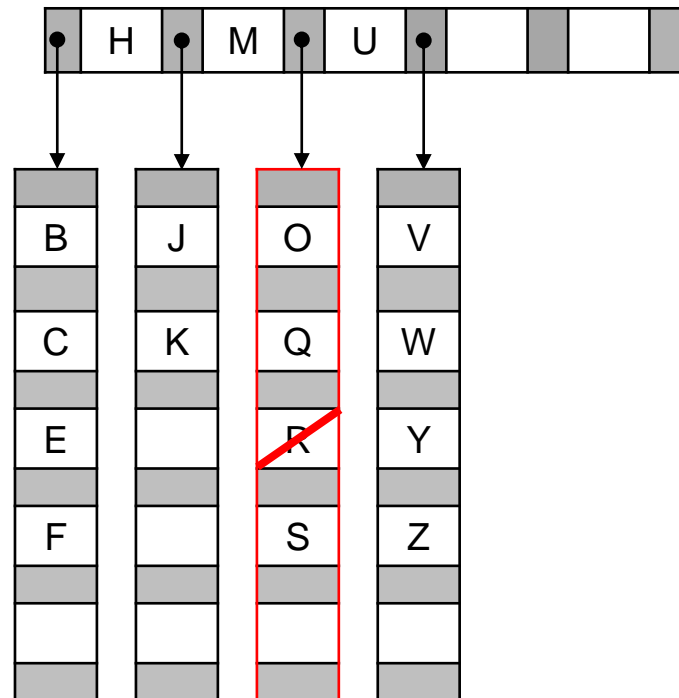
ABCDEFGHIJKLMNOPQRSTUVWXYZ

Exercício

Ordem $m = 6$

Ocupação mínima das
páginas: $\lceil m/2 \rceil - 1 = 2$

□ L, D, G, A, T, X, N, R, H, W, Q, J, B, F, O, S, U, K, C, V



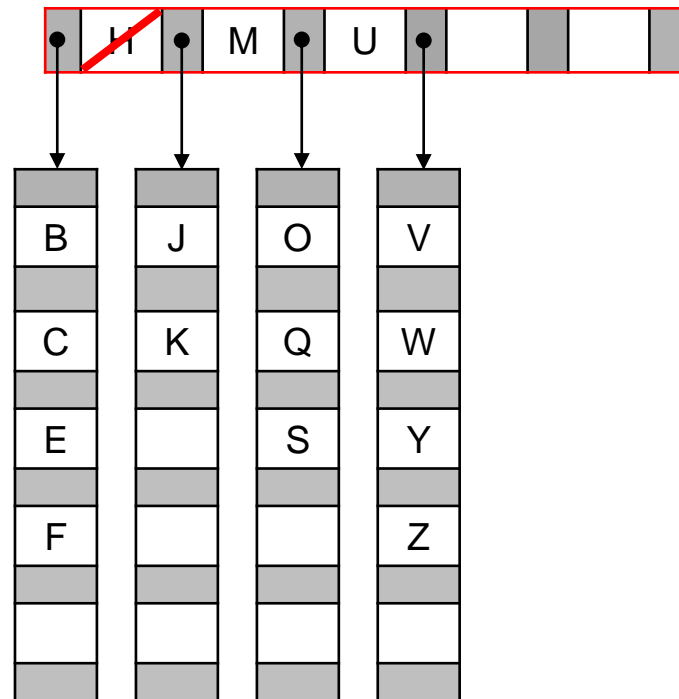
ABCDEFGHIJKLMNOPQRSTUVWXYZ

Exercício

Ordem $m = 6$

Ocupação mínima das
páginas: $\lceil m/2 \rceil - 1 = 2$

□ L, D, G, A, T, X, N, R, H, W, Q, J, B, F, O, S, U, K, C, V



ABCDEFGHIJKLMNOPQRSTUVWXYZ

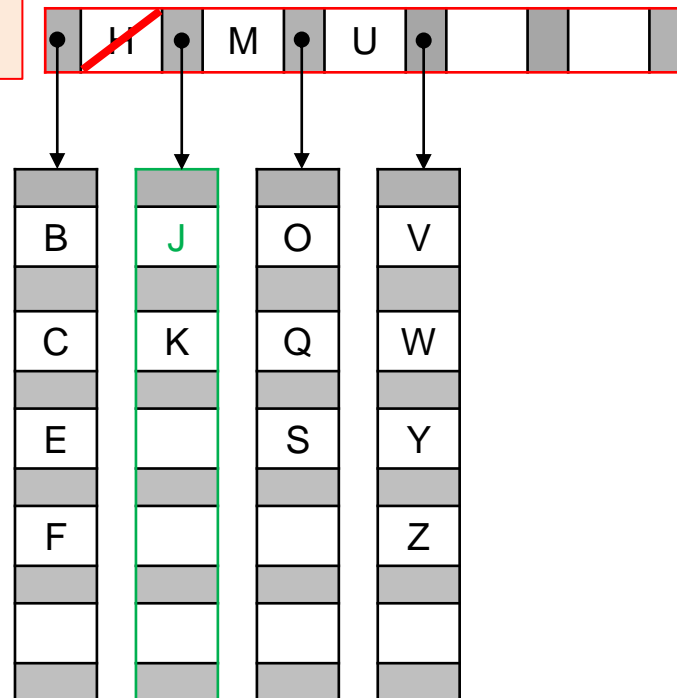
Exercício

Ordem $m = 6$

Ocupação mínima das
páginas: $\lceil m/2 \rceil - 1 = 2$

□ L, D, G, A, T, X, N, R, H, W, Q, J, B, F, O, S, U, K, C, V

Substitui pelo
sucessor imediato



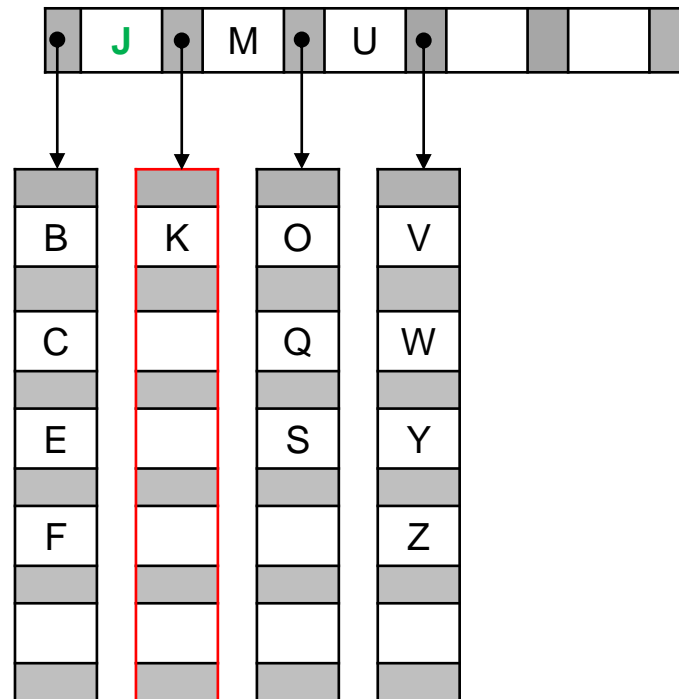
ABCDEFGHIJKLMNOPQRSTUVWXYZ

Exercício

Ordem $m = 6$

Ocupação mínima das
páginas: $\lceil m/2 \rceil - 1 = 2$

□ L, D, G, A, T, X, N, R, H, W, Q, J, B, F, O, S, U, K, C, V



ABCDEFGHIJKLMNOPQRSTUVWXYZ

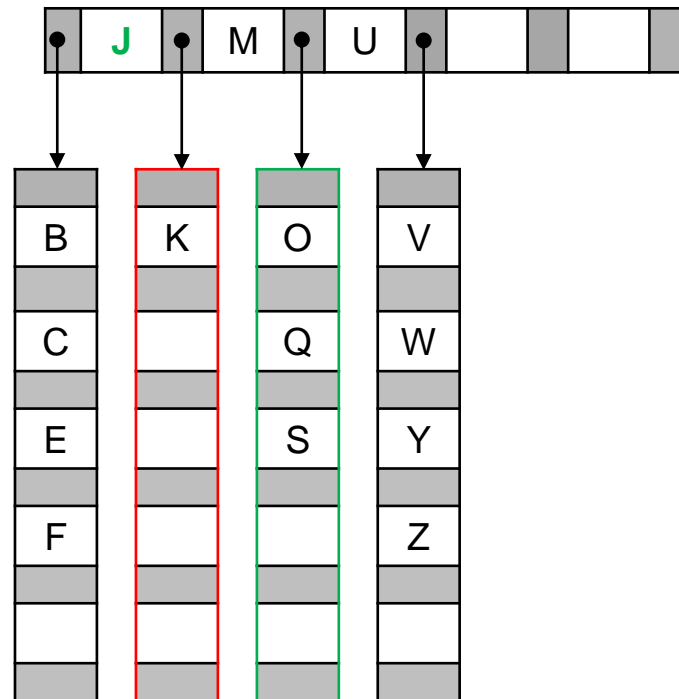
Exercício

Ordem $m = 6$

Ocupação mínima das
páginas: $\lceil m/2 \rceil - 1 = 2$

□ L, D, G, A, T, X, N, R, H, W, Q, J, B, F, O, S, U, K, C, V

Underflow:
redistribui com a
irmã direita



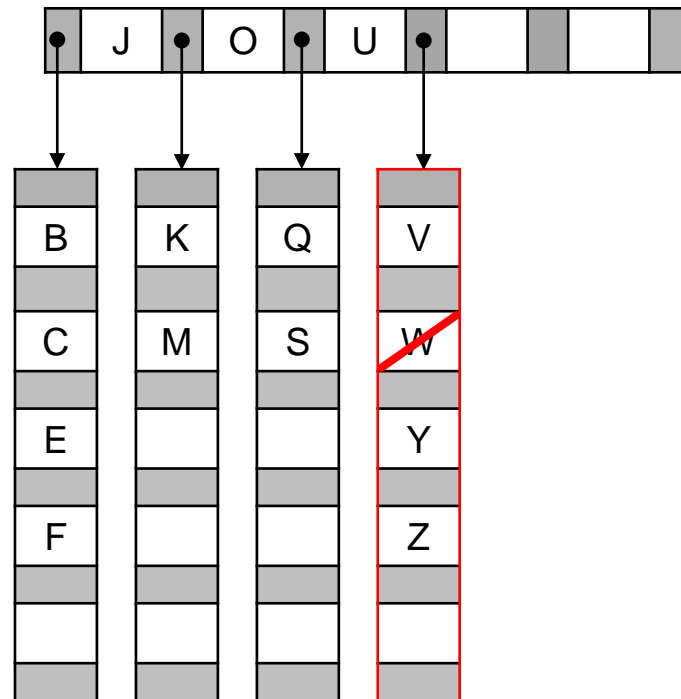
ABCDEFGHIJKLMNOPQRSTUVWXYZ

Exercício

Ordem $m = 6$

Ocupação mínima das
páginas: $\lceil m/2 \rceil - 1 = 2$

□ L, D, G, A, T, X, N, R, H, W, Q, J, B, F, O, S, U, K, C, V



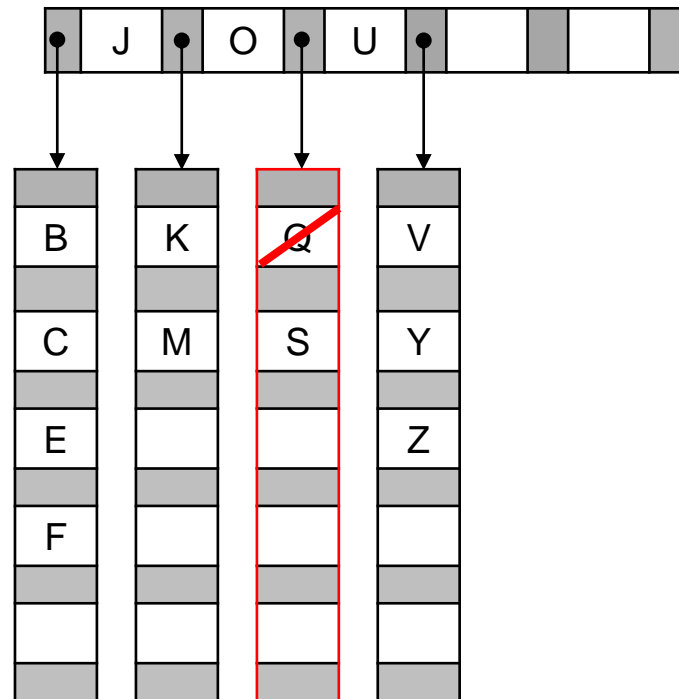
ABCDEFGHIJKLMNOPQRSTUVWXYZ

Exercício

Ordem $m = 6$

Ocupação mínima das
páginas: $\lceil m/2 \rceil - 1 = 2$

□ L, D, G, A, T, X, N, R, H, W, Q, J, B, F, O, S, U, K, C, V



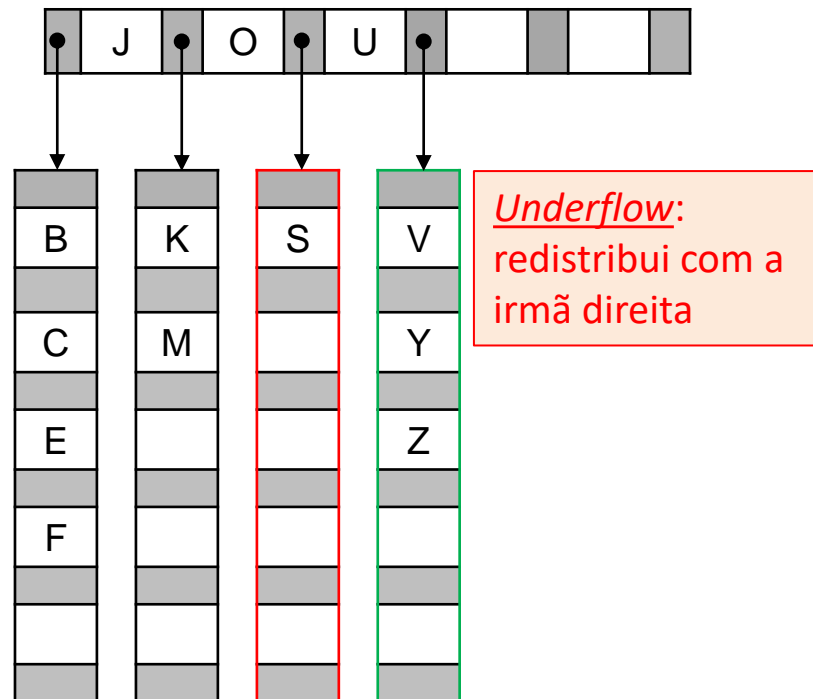
ABCDEFGHIJKLMNOPQRSTUVWXYZ

Exercício

Ordem $m = 6$

Ocupação mínima das
páginas: $\lceil m/2 \rceil - 1 = 2$

□ L, D, G, A, T, X, N, R, H, W, Q, J, B, F, O, S, U, K, C, V



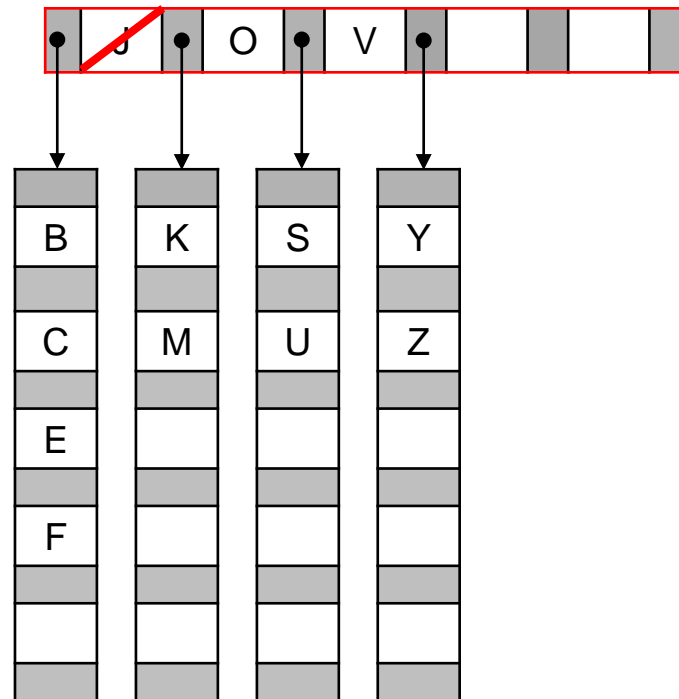
ABCDEFGHIJKLMNOPQRSTUVWXYZ

Exercício

Ordem $m = 6$

Ocupação mínima das
páginas: $\lceil m/2 \rceil - 1 = 2$

□ L, D, G, A, T, X, N, R, H, W, Q, J, B, F, O, S, U, K, C, V



ABCDEFGHIJKLMNOPQRSTUVWXYZ

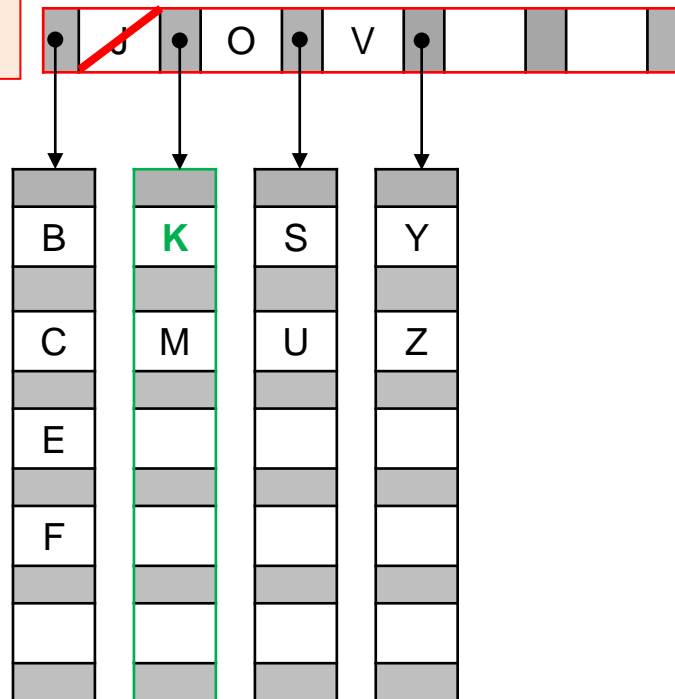
Exercício

Ordem $m = 6$

Ocupação mínima das
páginas: $\lceil m/2 \rceil - 1 = 2$

❑ L, D, G, A, T, X, N, R, H, W, Q, J, B, F, O, S, U, K, C, V

Substitui pelo
sucessor imediato



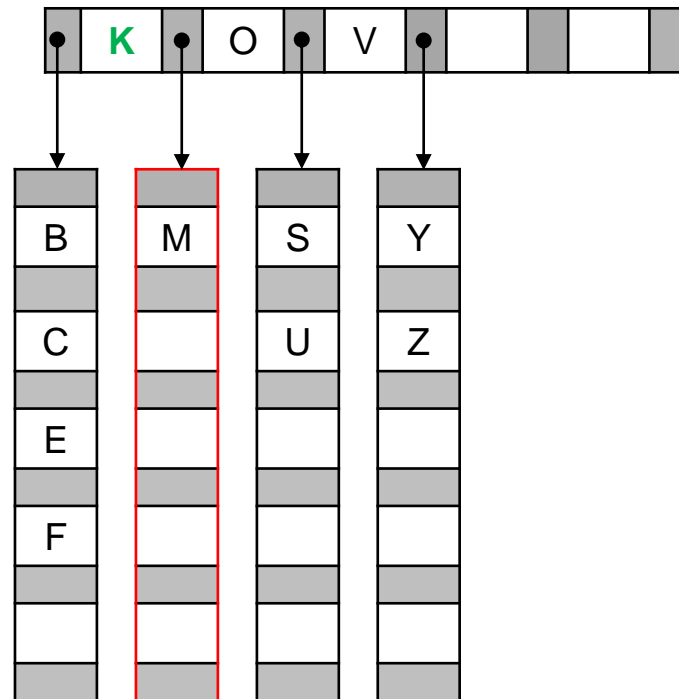
ABCDEFGHIJKLMNOPQRSTUVWXYZ

Exercício

Ordem $m = 6$

Ocupação mínima das
páginas: $\lceil m/2 \rceil - 1 = 2$

□ L, D, G, A, T, X, N, R, H, W, Q, J, B, F, O, S, U, K, C, V



ABCDEFGHIJKLMNOPQRSTUVWXYZ

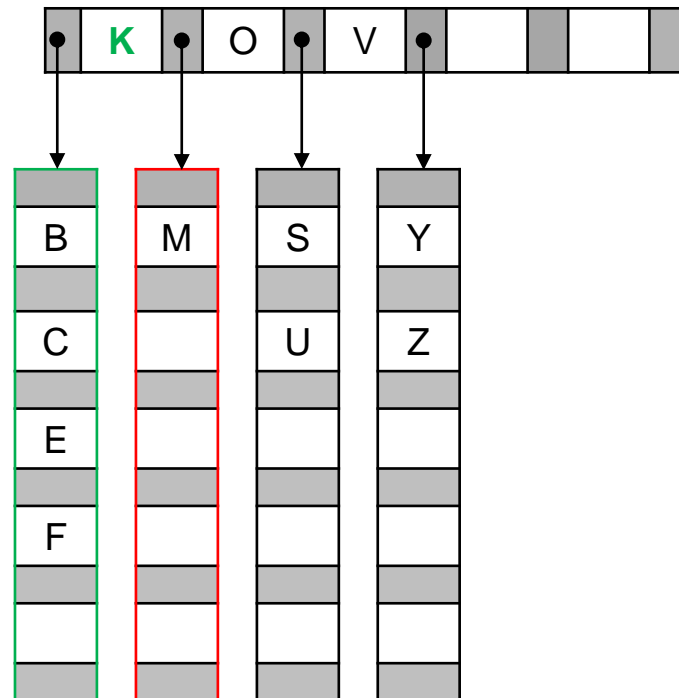
Exercício

Ordem $m = 6$

Ocupação mínima das
páginas: $\lceil m/2 \rceil - 1 = 2$

□ L, D, G, A, T, X, N, R, H, W, Q, J, B, F, O, S, U, K, C, V

Underflow:
redistribui com a
irmã esquerda



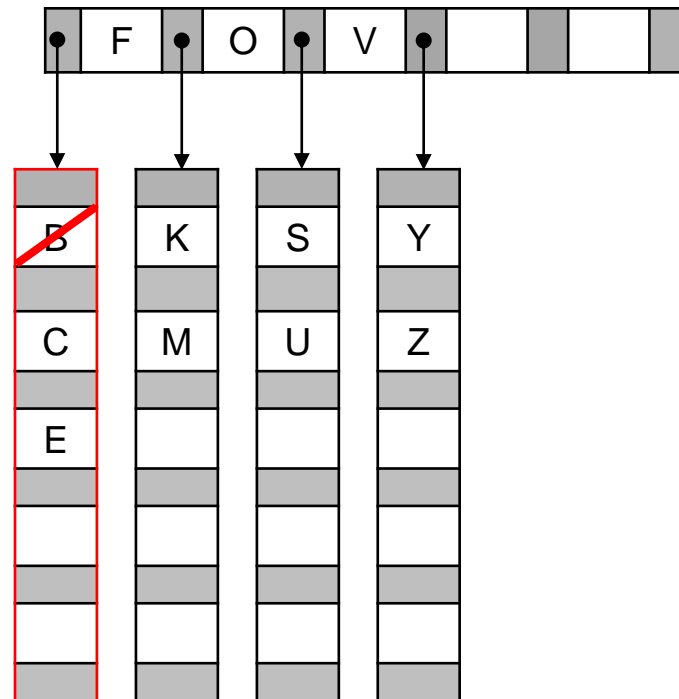
ABCDEFGHIJKLMNOPQRSTUVWXYZ

Exercício

Ordem $m = 6$

Ocupação mínima das
páginas: $\lceil m/2 \rceil - 1 = 2$

□ L, D, G, A, T, X, N, R, H, W, Q, J, B, F, O, S, U, K, C, V



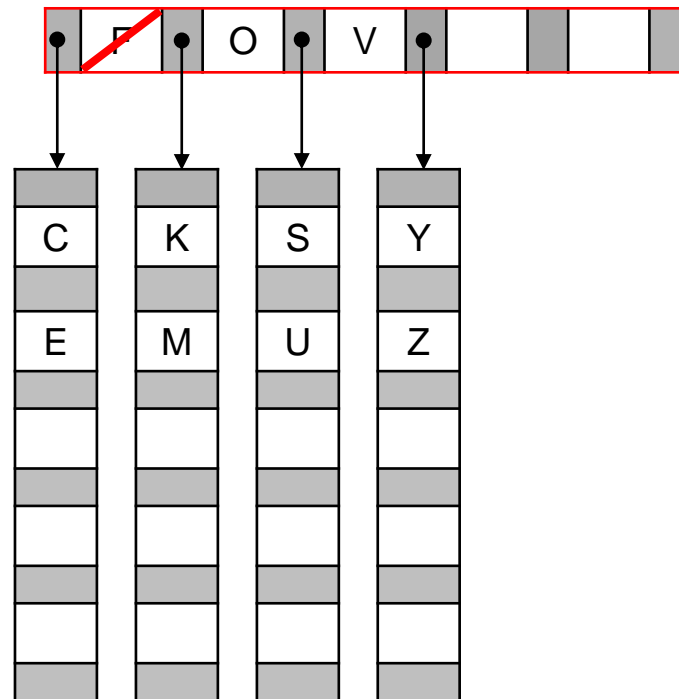
ABCDEFGHIJKLMNOPQRSTUVWXYZ

Exercício

Ordem $m = 6$

Ocupação mínima das
páginas: $\lceil m/2 \rceil - 1 = 2$

□ L, D, G, A, T, X, N, R, H, W, Q, J, B, E, O, S, U, K, C, V



ABCDEFGHIJKLMNOPQRSTUVWXYZ

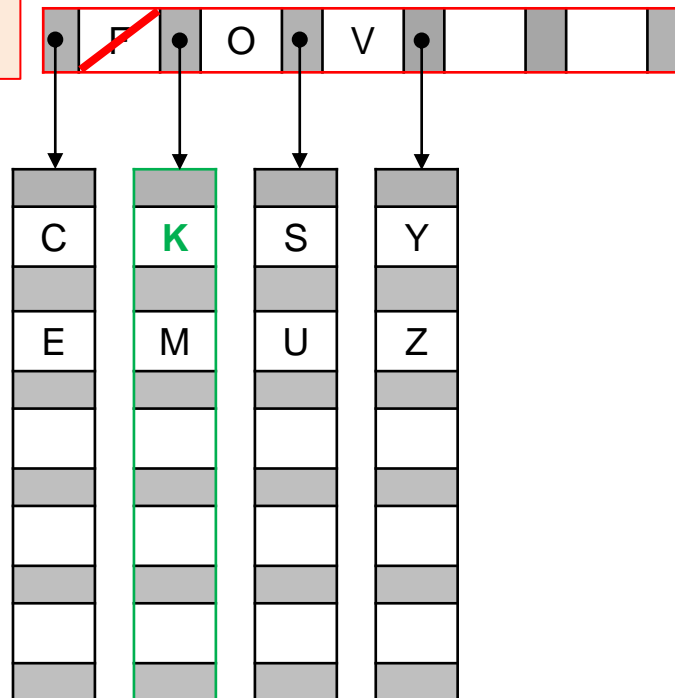
Exercício

Ordem $m = 6$

Ocupação mínima das
páginas: $\lceil m/2 \rceil - 1 = 2$

□ L, D, G, A, T, X, N, R, H, W, Q, J, B, E, O, S, U, K, C, V

Substitui pelo
sucessor imediato



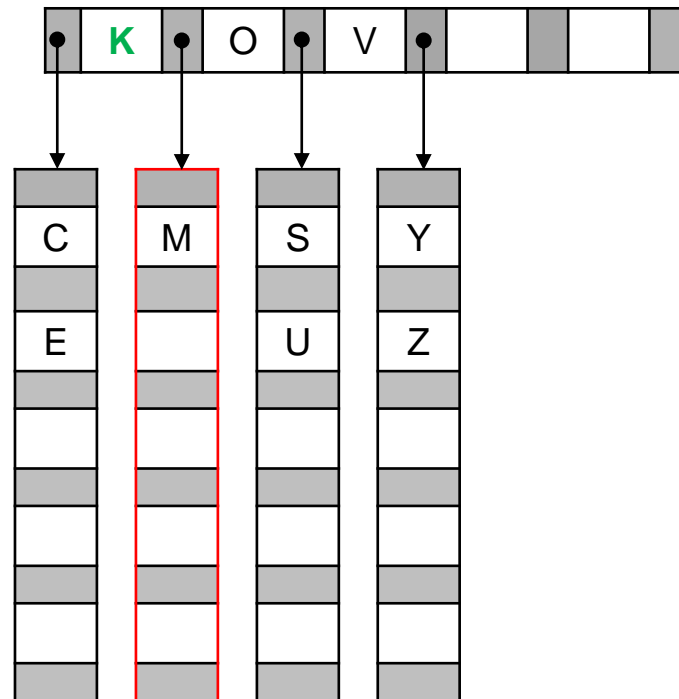
ABCDEFGHIJKLMNOPQRSTUVWXYZ

Exercício

Ordem $m = 6$

Ocupação mínima das
páginas: $\lceil m/2 \rceil - 1 = 2$

□ L, D, G, A, T, X, N, R, H, W, Q, J, B, E, O, S, U, K, C, V



ABCDEFGHIJKLMNOPQRSTUVWXYZ

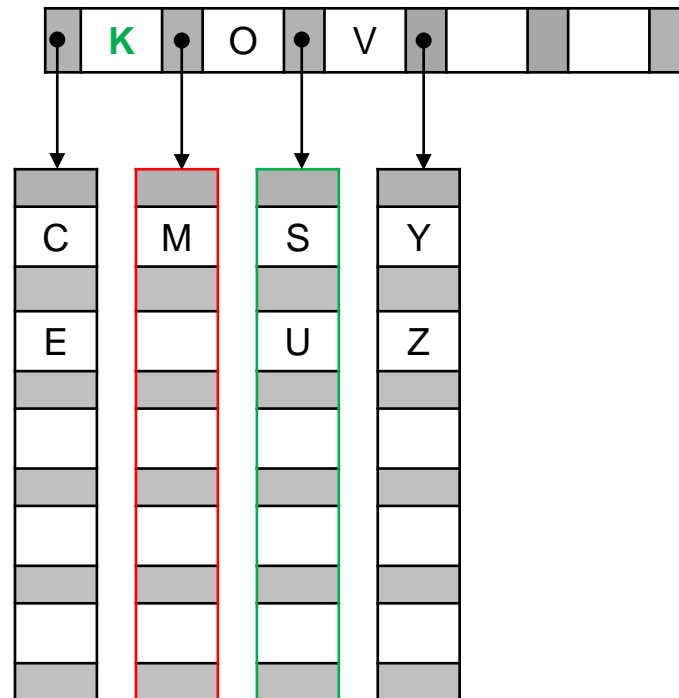
Exercício

Ordem $m = 6$

Ocupação mínima das
páginas: $\lceil m/2 \rceil - 1 = 2$

□ L, D, G, A, T, X, N, R, H, W, Q, J, B, E, O, S, U, K, C, V

Underflow:
concatena com a
irmã direita



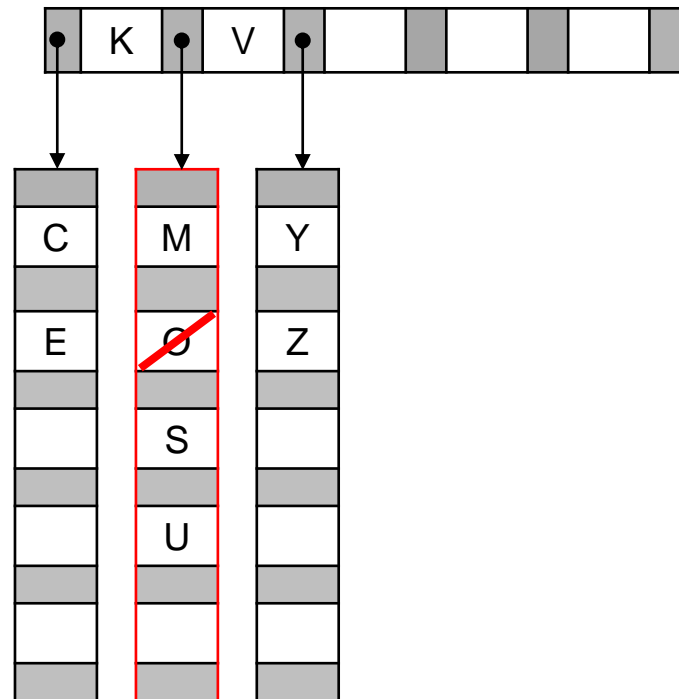
ABCDEFGHIJKLMNOPQRSTUVWXYZ

Exercício

Ordem $m = 6$

Ocupação mínima das
páginas: $\lceil m/2 \rceil - 1 = 2$

□ L, D, G, A, T, X, N, R, H, W, Q, J, B, F, O, S, U, K, C, V



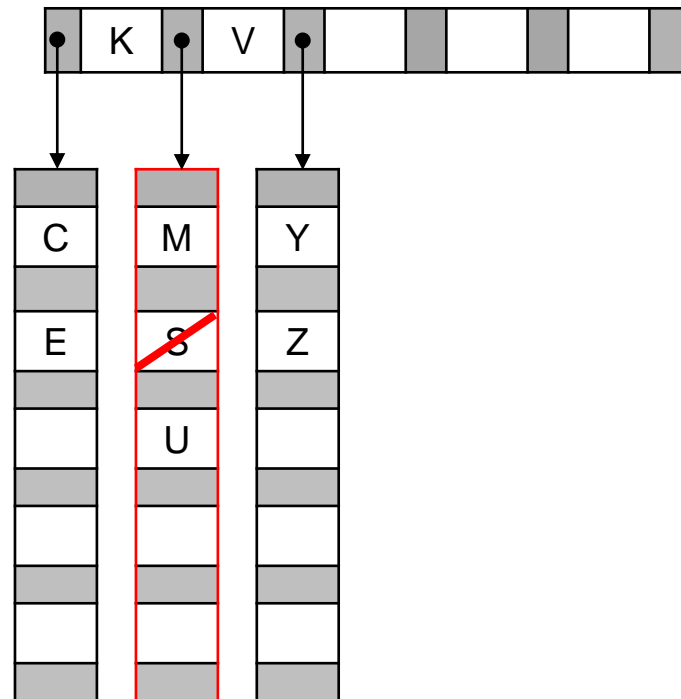
ABCDEFGHIJKLMNOPQRSTUVWXYZ

Exercício

Ordem $m = 6$

Ocupação mínima das
páginas: $\lceil m/2 \rceil - 1 = 2$

□ L, D, G, A, T, X, N, R, H, W, Q, J, B, F, O, S, U, K, C, V



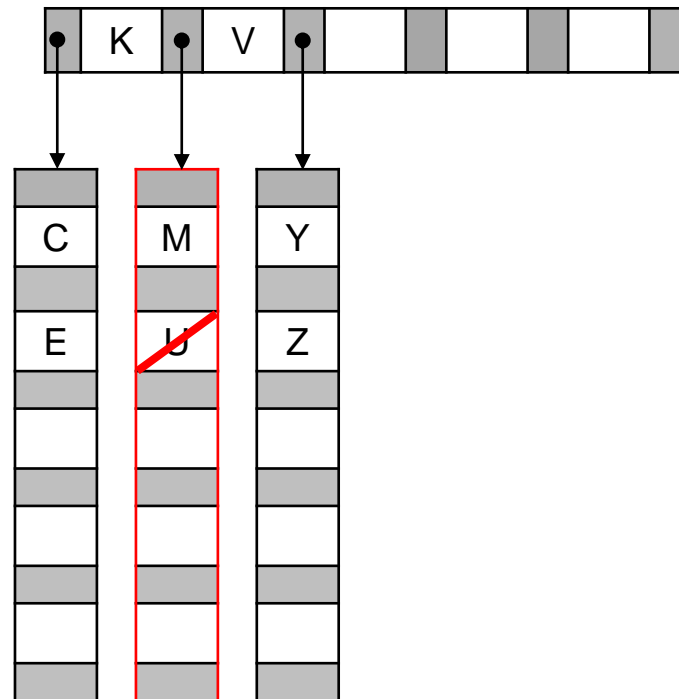
ABCDEFGHIJKLMNOPQRSTUVWXYZ

Exercício

Ordem $m = 6$

Ocupação mínima das
páginas: $\lceil m/2 \rceil - 1 = 2$

□ L, D, G, A, T, X, N, R, H, W, Q, J, B, F, O, S, U, K, C, V



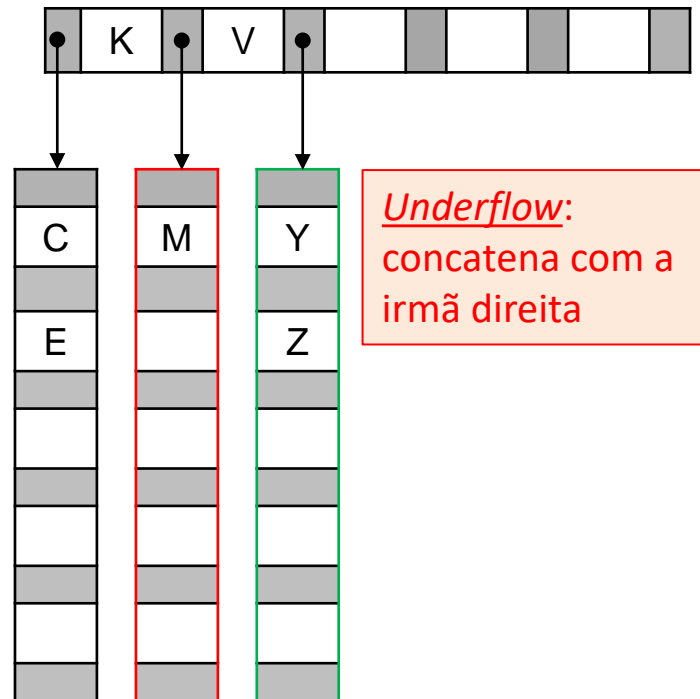
ABCDEFGHIJKLMNOPQRSTUVWXYZ

Exercício

Ordem $m = 6$

Ocupação mínima das
páginas: $\lceil m/2 \rceil - 1 = 2$

□ L, D, G, A, T, X, N, R, H, W, Q, J, B, F, O, S, U, K, C, V



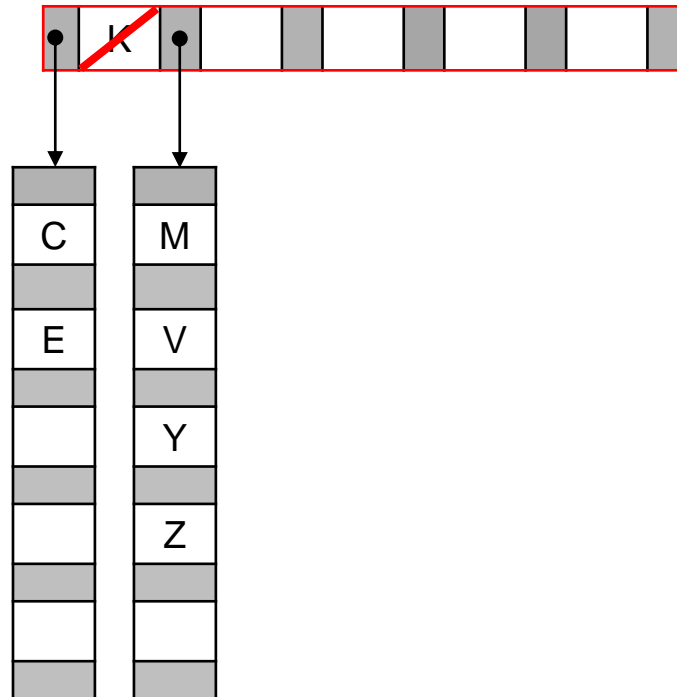
ABCDEFGHIJKLMNOPQRSTUVWXYZ

Exercício

Ordem $m = 6$

Ocupação mínima das
páginas: $\lceil m/2 \rceil - 1 = 2$

□ L, D, G, A, T, X, N, R, H, W, Q, J, B, F, O, S, U, K, C, V



ABCDEFGHIJKLMNOPQRSTUVWXYZ

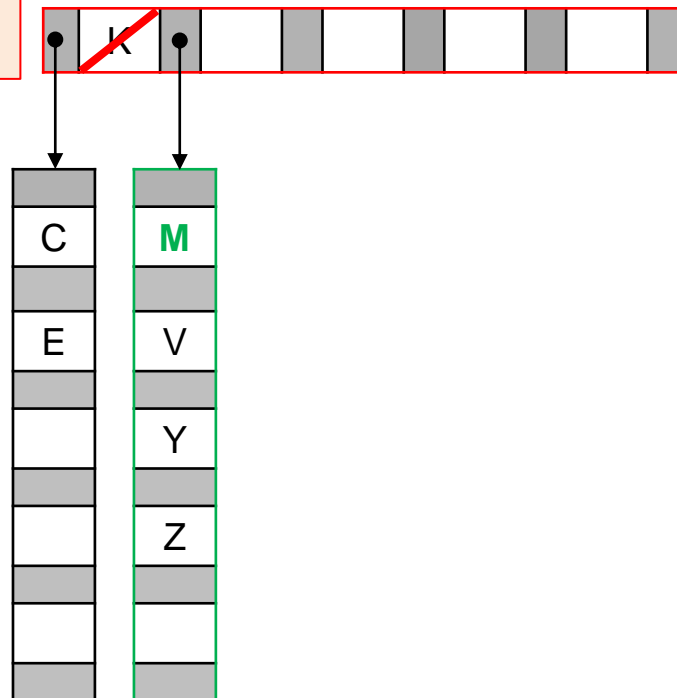
Exercício

Ordem $m = 6$

Ocupação mínima das
páginas: $\lceil m/2 \rceil - 1 = 2$

□ L, D, G, A, T, X, N, R, H, W, Q, J, B, F, O, S, U, K, C, V

Substitui pelo
sucessor imediato



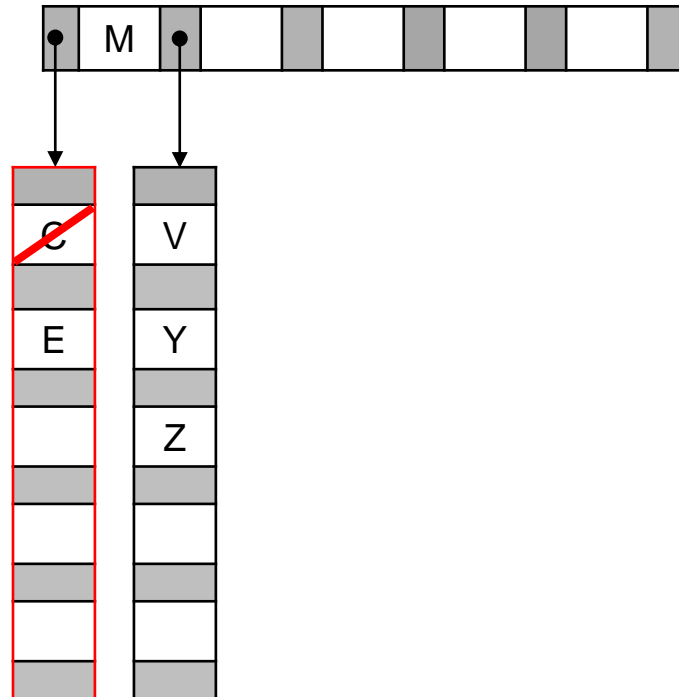
ABCDEFGHIJKLMNOPQRSTUVWXYZ

Exercício

Ordem $m = 6$

Ocupação mínima das
páginas: $\lceil m/2 \rceil - 1 = 2$

□ L, D, G, A, T, X, N, R, H, W, Q, J, B, F, O, S, U, K, C, V



ABCDEFGHIJKLMNOPQRSTUVWXYZ

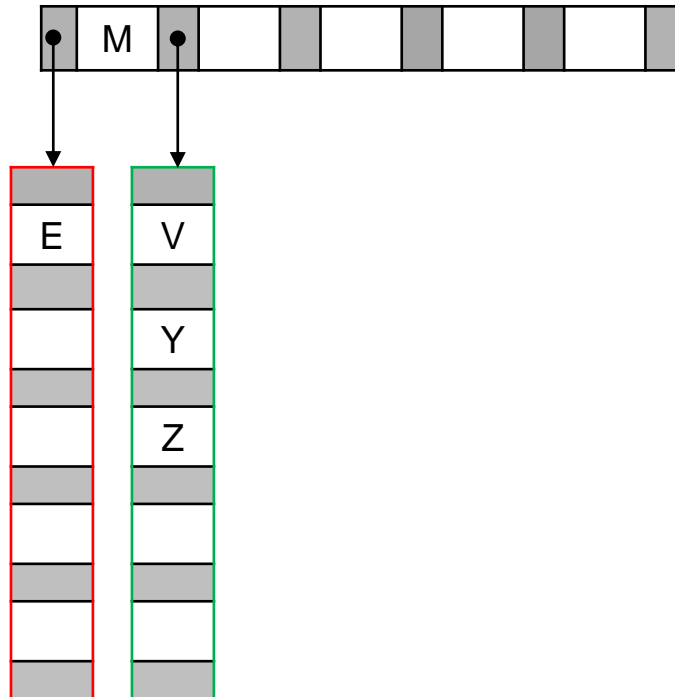
Exercício

Ordem $m = 6$

Ocupação mínima das
páginas: $\lceil m/2 \rceil - 1 = 2$

□ L, D, G, A, T, X, N, R, H, W, Q, J, B, F, O, S, U, K, C, V

Underflow:
redistribui com a
irmã direita



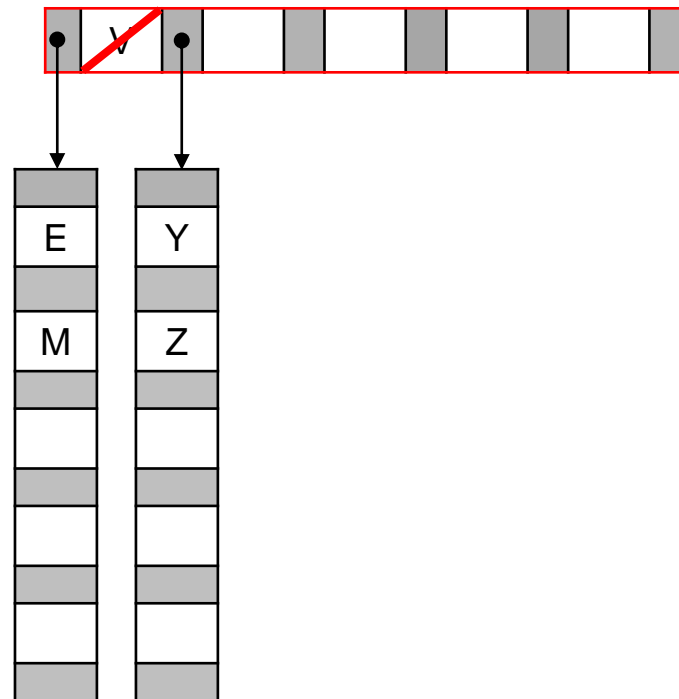
ABCDEFGHIJKLMNOPQRSTUVWXYZ

Exercício

Ordem $m = 6$

Ocupação mínima das
páginas: $\lceil m/2 \rceil - 1 = 2$

□ L, D, G, A, T, X, N, R, H, W, Q, J, B, F, O, S, U, K, C, V



ABCDEFGHIJKLMNOPQRSTUVWXYZ

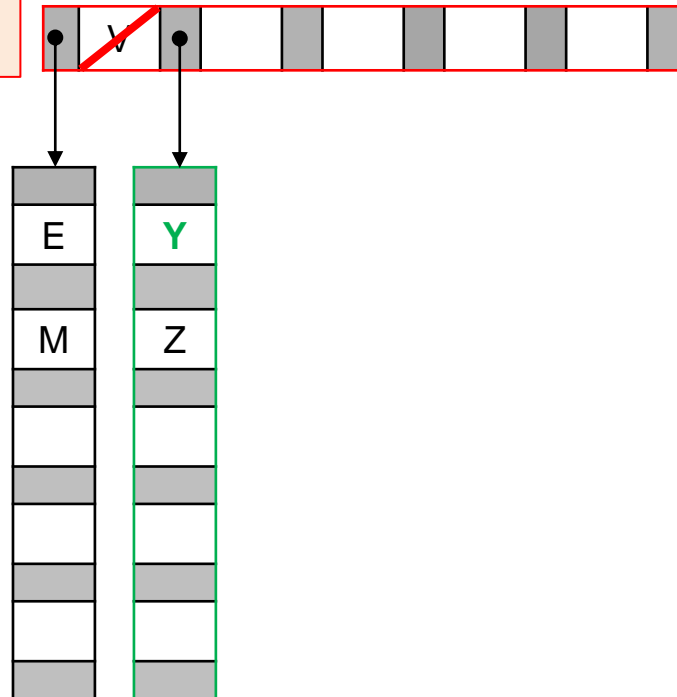
Exercício

Ordem $m = 6$

Ocupação mínima das
páginas: $\lceil m/2 \rceil - 1 = 2$

■ L, D, G, A, T, X, N, R, H, W, Q, J, B, F, O, S, U, K, C, V

Substitui pelo
sucessor imediato



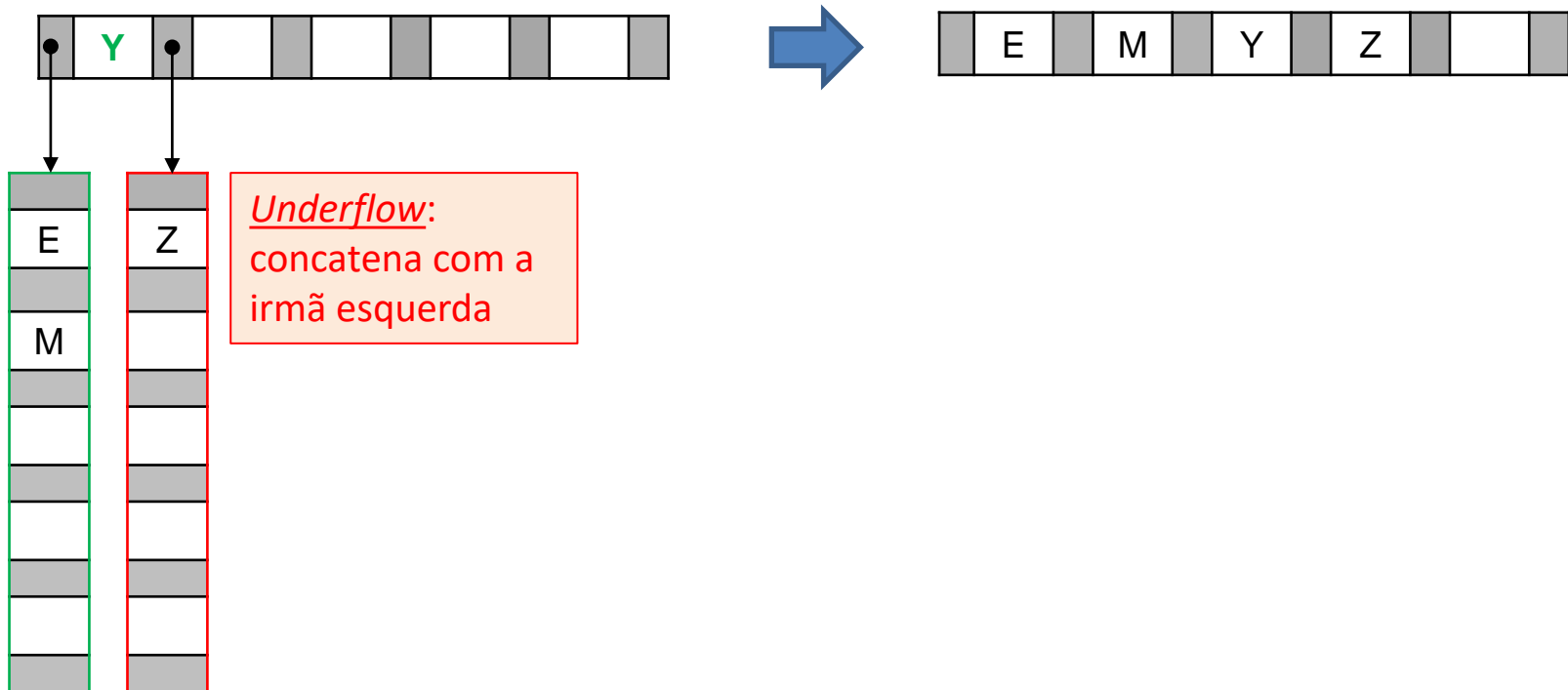
ABCDEFGHIJKLMNOPQRSTUVWXYZ

Exercício

Ordem $m = 6$

Ocupação mínima das
páginas: $\lceil m/2 \rceil - 1 = 2$

□ L, D, G, A, T, X, N, R, H, W, Q, J, B, F, O, S, U, K, C, V



ABCDEFGHIJKLMNOPQRSTUVWXYZ