Journal of the Brazilian Computer Society, 202X, XX:1, doi: 10.5753/jbcs.202X.XXXXXX

Metodos de Identificação de Arestas de Ponte

Vitor Oliveira [**Pontifical Catholic University of Minas Gerais** | ***vitor.lucio.0916@gmail.com***]
João Vítor Scarlatelli [**Pontifical Catholic University of Minas Gerais** | ***jvitorfreitas2004@gmail.com***]
Ana Maria Rafael [**Pontifical Catholic University of Minas Gerais** | ***amrrafael@sga.pucminas.br***]
Nagib Borjaili [**Pontifical Catholic University of Minas Gerais** | ***nagibverly@gmail.com***]
Yasmin Viegas [**Pontifical Catholic University of Minas Gerais** | ***yasminviegas98@gmail.com***]

Abstract. A identificação de pontes em grafos é um problema fundamental na teoria dos grafos, com aplicações em redes computacionais, otimização de rotas e análise de vulnerabilidades estruturais. Este relatório compara dois métodos para detectar essas arestas críticas: o método *Naive*, baseado na remoção e verificação da conectividade, e o método de *Tarjan*, que utiliza busca em profundidade (DFS) para identificar pontes de forma eficiente. A análise de complexidade mostra que o método *Naive* tem custo $O(V^4)$ em grafos densos, tornando-se inviável para grandes escalas, enquanto o método de *Tarjan* opera em $O(V^2)$, sendo significativamente mais eficiente. Os resultados reforçam a importância da escolha de algoritmos otimizados para aplicações em grafos densos.

Keywords: Grafos, Pontes, Vértices, Arestas, Conectividade, Complexidade

1 Introdução

O problema de determinar pontes em um grafo (também conhecidas como arestas de corte) é um dos desafios fundamentais na teoria dos grafos, tendo aplicações práticas em diversas áreas, como análise de redes, otimização de rotas e segurança de sistemas. Pontes são arestas críticas que, quando removidas, aumentam o número de componentes conexos do grafo, desconectando-o. Esse conceito é usado, por exemplo, para identificar vulnerabilidades em redes de computadores, projetar circuitos elétricos robustos ou até mesmo analisar redes sociais e ecológicas.

Além disso, a identificação de pontes está diretamente relacionada a problemas clássicos da teoria dos grafos, como a determinação de caminhos ou ciclos eulerianos. A eficiência na detecção dessas arestas auxilia na otimização do desempenho de algoritmos projetados para processar ou analisar grafos de grande escala.

Este relatório explora técnicas para a identificação de pontes em grafos, comparando dois métodos principais: o método **Naive** (ingênuo), que verifica a conectividade do grafo após a remoção de cada aresta, e o método baseado em **Tarjan [1974]**, que utiliza uma abordagem baseada em DFS (Busca em Profundidade), para identificar pontes diretamente. Além disso, o estudo avalia o desempenho desses métodos quando integrados ao algoritmo de Fleury [1883], analisando sua eficiência e aplicabilidade na resolução de problemas relacionados à identificação de ciclos eulerianos em grafos.

Ao analisar esses métodos, este trabalho busca não apenas apresentar suas implementações, mas também discutir seu custo/complexidade, contribuindo para uma compreensão mais aprofundada desses métodos e do problema.

2 Metodologia

Para implementar os métodos baseados em **Naive** e **Tarjan**, no algortimo de Fleury, a estrutura de **lista de adjacência** foi utilizada em ambos os casos para representar os grafos. Uma lista de adjacência é uma coleção de listas ou vetores, em que cada vértice do grafo possui uma lista indicando os vértices aos quais está conectado por uma aresta.

Exemplo: $G = (V, E)$, $V = \{A, B, C, D\}$ e arestas $E = \{(A, B), (A, C), (B, D), (C, D)\}$. A representação desse grafo em lista de adjacência é dada pela tabela abaixo:

Vértice	Lista de Adjacência (Vizinhos)
A	B, C
B	A, D
C	A, D
D	B, C

Além da lista de adjacência, cada implementação possui métodos exclusivos para a identificação de pontes. A única funcionalidade comum entre ambas é o método de adição de arestas ao grafo, que garante a consistência da estrutura de dados durante a execução dos algoritmos.

2.1 Método Naive

Considerando um grafo não direcionado $G = (V, E)$, o método Naive segue uma abordagem de força bruta para identificar arestas de ponte. Sua implementação foi dividida em quatro etapas principais:

- **Listar todas as arestas**: Percorre a lista de adjacência para armazenar cada aresta única em um vetor, evitando duplicações em grafos não direcionados.
- **Remover aresta**: Remove temporariamente uma aresta E do grafo G.
- **Testar conectividade**: Realiza uma busca em largura (BFS) para verificar se o grafo permanece conexo após a remoção da aresta.
- **Adicionar aresta**: Reinsere a aresta no grafo para continuar a iteração com as arestas subsequentes.

O processo é repetido para cada aresta E do grafo G, exceto pela etapa de listagem, que é realizada apenas uma vez. Se o grafo deixar de ser conexo após a remoção de uma aresta, essa aresta é classificada como uma ponte.

2.1.1 Análise do Custo Computacional

Para analisar o custo do algoritmo, é necessário detalhar os métodos auxiliares utilizados:

- **Adicionar Arestas**: Adiciona uma aresta à lista de adjacência. *O(1)*.
- **Remover Arestas**: Remove uma aresta da lista de adjacência. *O(V)* no pior caso.
- **Teste de Conectividade**: Verifica a conectividade do grafo usando BFS. No pior caso (quando *G* é conexo), todos os vértices *V* e arestas *E* são percorridos. *O(V + E)*.
- **Identificar Pontes**: Executa o teste de conectividade para cada aresta. *O(E * (V + E))*.

O custo total do algoritmo Naive é dominado pela **identificação de pontes**, uma vez que todos os métodos auxiliares são executados dentro dela. O principal fator de custo é a busca em largura (BFS), que é realizada a cada remoção de aresta para verificar a conectividade do grafo. Como a BFS tem complexidade *O(V + E)* e é executada *E* vezes (uma vez para cada aresta), o custo total do algoritmo é *O(E * (V + E))*.

Além disso, a complexidade de **adicionar arestas** e **remover aresta** não são relevantes no cálculo do custo total, pois esses métodos têm custos muito menores em comparação com o custo dominante da BFS. Enquanto **adicionar arestas** tem complexidade *O(1)* e **remover arestas** tem complexidade *O(V)* no pior caso, o custo de **identificar pontes** *O(E * (V + E))* domina completamente a complexidade total do algoritmo.

2.2 Método de Tarjan

Considerando um grafo não direcionado *G = (V, E)*, o método de Tarjan utiliza uma abordagem baseada em **Busca em Profundidade** (DFS, Depth-First Search) para identificar arestas de ponte de forma eficiente. Diferentemente do método Naive, que verifica a conectividade do grafo após a remoção de cada aresta, o método de Tarjan identifica pontes em uma única passagem de DFS, aproveitando os conceitos de **tempo de descoberta** e ***low value*** (valor mínimo) para cada vértice.

O tempo de descoberta refere-se ao momento em que o vértice é visitado durante a busca em profundidade, iniciando-se em 0 para o primeiro vértice. Já o *low value* representa o ancestral mais antigo, excluindo o vértice pelo qual foi acessado (no caso de uma representação em árvore, seria o nó pai), associado ao vértice em visita. Esses conceitos permitem ao algoritmo determinar de forma eficiente se uma aresta é uma ponte, comparando os valores de tempo de descoberta e *low value* durante a execução da DFS.

A implementação do método de Tarjan foi dividida nas seguintes etapas principais:

- **Inicialização**: Para cada vértice do grafo, são inicializados os valores de tempo de descoberta, *low value* e um vetor de visitados.
- **DFS**: Durante a DFS, o algoritmo calcula o *low value* de cada vértice, que representa o menor tempo de descoberta alcançável a partir desse vértice. Se o *low value* de um vértice vizinho for maior que o tempo de descoberta do vértice atual, a aresta entre eles é classificada como uma ponte.

O método de Tarjan é executado em uma única passagem de DFS, o que resulta em uma complexidade computacional significativamente menor em comparação ao método Naive.

2.2.1 Análise do Custo Computacional

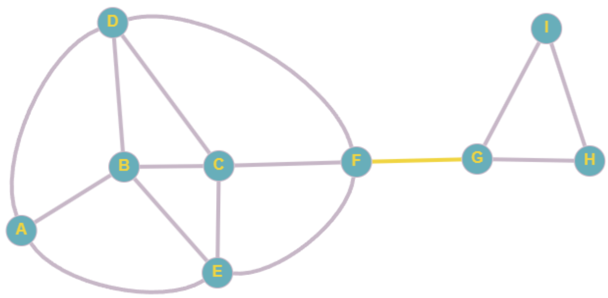
Para analisar o custo do algoritmo de Tarjan, é necessário detalhar os principais componentes:

- **DFS**: A busca em profundidade é realizada uma vez para cada componente conexo do grafo. No pior caso, todos os vértices (V) e arestas (E) são visitados. Complexidade: *O(V + E)*.
- **Cálculo do *low value***: Durante a DFS, o *low value* é calculado para cada vértice V, o que não adiciona custo adicional significativo, pois é feito em conjunto com a DFS.
- **Identificação de pontes**: A verificação de pontes é realizada em tempo constante *O(1)* para cada aresta durante a DFS.

O custo total do algoritmo de Tarjan é dominado pela DFS, resultando em uma complexidade de *O(V + E)*. Isso ocorre porque o algoritmo visita cada vértice e aresta uma única vez, sem a necessidade de repetir operações custosas, como no método Naive.

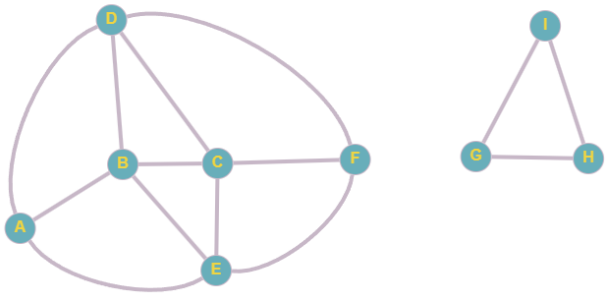
2.3 Visualização dos métodos

Utilizando o grafo *G=(V,E)*, não direcionado, ilustrado na figura abaixo, podemos exemplificar o funcionamento da detecção de pontes pelos métodos Naive e Tarjan. Neste caso, a aresta *(f, g)* é a única ponte presente no grafo:



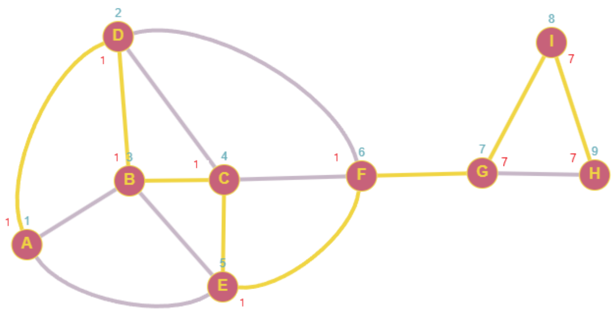
2.3.1 Naive

No método Naive, podemos observar que, em algum momento durante sua execução, a aresta *(f, g)* é removida do grafo. A partir disso, é realizada uma análise de conectividade em todo o grafo. Neste caso, como o número de componentes conexos aumenta, a aresta é identificada como uma ponte.



2.3.2 Tarjan

No método Tarjan, podemos observar que é realizada uma busca em profundidade, marcando os tempos de descoberta (em azul) e os *low values* (em vermelho). Durante a execução da busca, a aresta *(f, g)* é identificada como ponte, uma vez que o *low value* do vértice *g* é maior que o tempo de descoberta do vértice *f*.



3 Analise de custo e resultados

Nesta seção, avaliamos o impacto do custo computacional dos métodos *Naive* e *Tarjan* em grafos densos. Grafos densos são aqueles em que o número de arestas E é proporcional ao quadrado do número de vértices V, ou seja, $E \approx V^2$. Essa característica é comum em grafos completos ou em grafos com alta conectividade, onde a maioria dos vértices está interconectada.

- **Método Naive:** $O(E \cdot (V + E))$. Para grafos densos, $E \approx V^2$, então a complexidade se torna:

$$O(V^2 \cdot (V + V^2)) = O(V^4).$$

- **Método de Tarjan:** $O(V + E)$. Para grafos densos, $E \approx V^2$, então a complexidade se torna:

$$O(V + V^2) = O(V^2).$$

Considerando os caculos, na tabela a seguir é apresentado uma comparação dos tempos teóricos estimados para os métodos em grafos de diferentes tamanhos. Para os cálculos, foi considerada uma complexidade temporal em que cada operação básica leva 1 nanossegundo (ns). Os tempos foram calculados para grafos com $V = 100$, $V = 1.000$, $V = 10.000$ e $V = 100.000$ vértices, assumindo que o número de arestas E é proporcional a V^2 (grafos densos).

Número de Vértices (V)	**Método Naive ($O(V^4)$)**	**Método de Tarjan ($O(V^2)$)**
100	100 ms	$0,01$ ms
1.000	$16,67$ minutos	1 ms
10.000	$115,74$ dias	100 ms
100.000	$3,17$ milhões de anos	10 segundos

Table 1. Tempos teóricos de Naive e Tarjan.

Como esperado, o método Naive, com complexidade $O(V^4)$, cresce rapidamente e se torna inviável para grafos grandes, chegando a tempos astronômicos para $V = 100.000$. Por outro lado, o método de Tarjan, com complexidade $O(V^2)$, apresenta um crescimento significativamente mais lento, permanecendo computacionalmente viável mesmo para valores altos de V. Essa diferença evidencia a importância de algoritmos mais eficientes para o processamento de grafos densos.

4 Conclusão

Este relatório explorou dois métodos para a identificação de arestas de ponte em grafos: o método Naive e o método proposto por Tarjan [1974]. Por meio da implementação e análise dessas abordagens, foi possível demonstrar a eficácia e a eficiência na identificação de pontes, utilizando o algoritmo apresentado por Fleury [1883].

O método Naive possui uma implementação mais simples e direta, o que facilita sua visualização e interpretação. No entanto, essa simplicidade tem um custo em termos de desempenho, uma vez que sua lógica básica resulta em uma grande repetição de operações. Consequentemente, sua ordem de complexidade chega a $O(V^4)$ em grafos mais densos, o que o torna menos eficiente.

Por outro lado, o método de Tarjan, embora apresente uma implementação mais complexa, oferece uma eficiência significativamente superior à do método Naive. Isso ocorre porque suas operações são otimizadas, exigindo apenas uma única passagem por todo o grafo. Essa característica reduz drasticamente o custo computacional, resultando em uma complexidade muito mais favorável, $O(V^2)$, em grafos densos. No entanto, a correção do método de Tarjan, quando integrado ao algoritmo de Fleury, não é estável. Isso se deve ao fato de que, durante a execução do algoritmo de Fleury, ocorre a remoção de arestas, e, com isso, outras arestas podem se tornar pontes. Consequentemente, as pontes previamente identificadas pelo Tarjan podem não ser suficientes para garantir a corretude do caminho euleriano formado. A única forma de garantir essa corretude seria executar o método de Tarjan novamente a cada remoção de aresta, o que, na prática, o tornaria equivalente ao método Naive, tanto em custo computacional quanto em raciocínio.

Em síntese, a escolha entre o método Naive e o método de Tarjan depende do contexto de aplicação e dos requisitos de desempenho. Enquanto o método Naive se destaca por sua simplicidade e precisão, o método de Tarjan oferece uma solução mais robusta e eficiente para grafos de maior densidade. No entanto, é importante ressaltar que, ao integrar o método de Tarjan ao algoritmo de Fleury, sua corretude pode ser comprometida devido à dinâmica de remoção de arestas, que pode transformar outras arestas em pontes durante a execução. Portanto, para cenários que demandam alta performance e não envolvem a remoção dinâmica de arestas, o método de Tarjan é claramente a abordagem mais vantajosa. Esta análise reforça a importância de se considerar tanto a clareza quanto a eficiência e a estabilidade na seleção de algoritmos para problemas complexos, como a identificação de arestas de ponte em grafos

5 Divisão de Tarefas

- **Vitor Lúcio:** Documentação e formatação do trabalho;
- **Nagib Borjaili:** Implementação do método Naive;
- **João Vítor Scarlatelli e Yasmin Viegas:** Implementação do método Tarjan;
- **Ana Maria Rafael:** Implementação do algoritmo de Fleury utilizando os métodos Tarjan e Naive.

References

M. Fleury. Deux problèmes de géométrie de situation. 1883.

R. Endre Tarjan. A note on finding the bridges of a graph. 1974.