Universidade Federal Fluminense

ICEx

Métodos Numéricos II

Thadeu Penna

thadeupenna@id.uff.br

SUMÁRIO

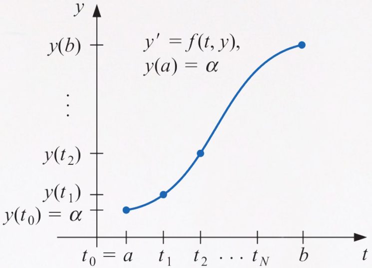
1. Problemas de Contorno

1.1 Diferenças finitas

2. Equações Diferenciais Parciais

Problemas de Contorno

Diferenças finitas



Substituir as derivadas por diferenças.

$$y'(x_i) = \frac{1}{2h}\left[y(x_{i+1}) - y(x_{i-1}))\right]$$

$$y''(x_i) = \frac{1}{h^2}\left[y(x_{i+1}) - 2y(x_i) + y(x_{i-1}))\right]$$

Substituir em

$$y'' = p(x)y' + q(x)y + r(x)$$

Dados $y(a) = \alpha$ e $y(b) = \beta$ e reagrupando

$$
\begin{aligned}
&-\left(1 + \frac{h}{2}p(x_i)\right)y(x_{i-1}) \\
&+\left(2 + h^2 q(x_i)\right)y(x_i) \\
&-\left(1 - \frac{h}{2}p(x_i)\right)y(x_{i+1}) \\
&\qquad = -h^2 r(x_i)
\end{aligned}
$$

Que é um sistema de N equações tridiagonal.

Sistema de Equações

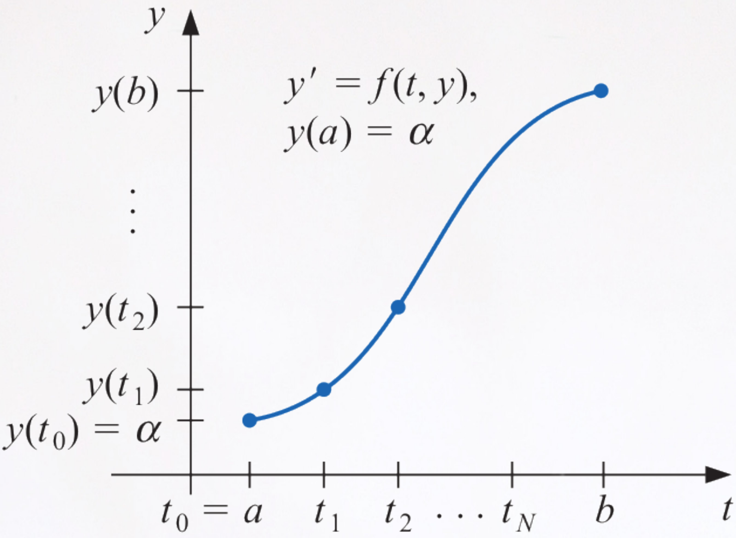
$$
\begin{bmatrix}
2 + h^2 q(x_1) & -1 + \frac{h}{2} p(x_1) & 0 & \dots & \dots & 0 \\
-1 - \frac{h}{2} p(x_2) & 2 + h^2 q(x_2) & -1 + \frac{h}{2} p(x_2) & \dots & \dots & 0 \\
0 & -1 - \frac{h}{2} p(x_3) & 2 + h^2 q(x_3) & -1 + \frac{h}{2} p(x_3) & \dots & 0 \\
0 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & -1 + \frac{h}{2} p(x_{N-1}) \\
0 & 0 & \ddots & \ddots & -1 - \frac{h}{2} p(x_N) & 2 + h^2 q(x_N)
\end{bmatrix}
$$

$$
\times \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -h^2 r(x_1) + \left(1 + \frac{h}{2} p(x_1)\right) y(x_0) \\ -h^2 r(x_2) \\ \vdots \\ -h^2 r(x_N) + \left(1 - \frac{h}{2} p(x_N)\right) y(x_{N+1}) \end{bmatrix}
$$

Resultados

2.05	-0.921	0	0	0	0	0	0	0	-0.348
-1.08	2.05	-0.921	0	0	0	0	0	0	-0.0235
0	-1.08	2.05	-0.921	0	0	0	0	0	-0.022
0	0	-1.08	2.05	-0.921	0	0	0	0	-0.02
0	0	0	-1.08	2.05	-0.921	0	0	0	-0.0174
0	0	0	0	-1.08	2.05	-0.921	0	0	-0.0145
0	0	0	0	0	-1.08	2.05	-0.921	0	-0.0112
0	0	0	0	0	0	-1.08	2.05	-0.921	-0.00762
0	0	0	0	0	0	0	-1.08	2.05	-0.096

x	w	exato	erro
0.00	-0.3		
0.16	-0.31198	-0.31195	2.9e-05
0.31	-0.31626	-0.31622	4.1e-05
0.47	-0.31274	-0.3127	4.1e-05
0.63	-0.30151	-0.30148	3e-05
0.79	-0.28286	-0.28284	1.3e-05
0.94	-0.25723	-0.25724	6.7e-06
1.10	-0.22527	-0.2253	2.4e-05
1.26	-0.18778	-0.18781	3.3e-05
1.41	-0.14567	-0.1457	2.8e-05
1.57	-0.1		



y
$y(b)$
$y' = f(t, y),$
$y(a) = \alpha$
$y(t_2)$
$y(t_1)$
$y(t_0) = \alpha$
$t_0 = a$
t_1
$t_2 \ldots t_N$
b
t

Tarefa

Resolva o problema de contorno

$$y'' = y' + 2y + \cos x, \qquad 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}, \qquad y(0) = -0.3, \quad y(\frac{\pi}{2}) = -0.1$$

Defina as funções $p(x), q(x))$ e $r(x)$, mesmo que sejam simples. Isso vai facilitar modificar o programa para os próximos exercícios.

Use $N = 9$. Compare com o resultado exato e com o método de shooting.

$$y(x) = -\frac{1}{10}(\sin x + 3\cos x)$$

Equações Diferenciais Parciais

EDP

Um equação diferencial parcial ou equação de derivadas parciais (EDP) é uma equação envolvendo várias funções incógnita de várias variáveis independentes e dependente de suas derivadas.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = C\frac{\partial u}{\partial t}$$

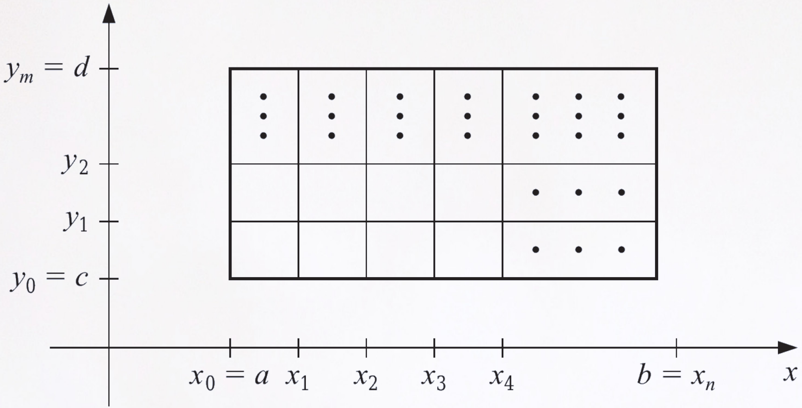
$$u_{xx} + u_{yy} = 0 \qquad \text{Laplace}$$

$$u_{xx} + u_{yy} = f(x, y) \qquad \text{Poisson}$$

$$u_t - \alpha^2 u_{xx} = 0 \qquad \text{Calor}$$

$$\alpha^2 u_{xx} - u_{tt} = 0 \qquad \text{Onda}$$

$$u_{xx} + V(x)u - u_t = 0 \qquad \text{Schrodinger}$$



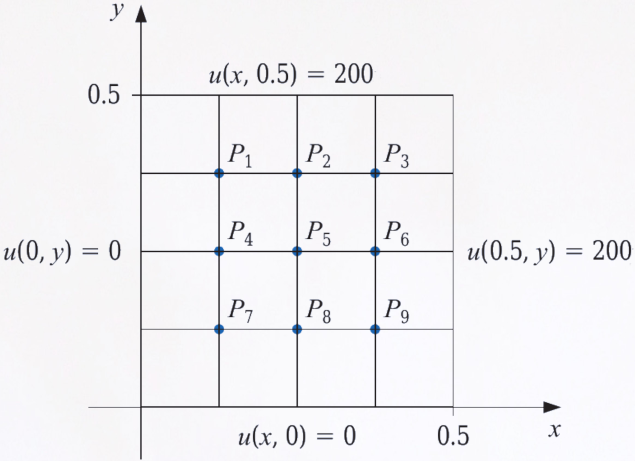
$y_m = d$
y_2
y_1
$y_0 = c$
$x_0 = a$
x_1
x_2
x_3
x_4
$b = x_n$
x

$$\frac{u(x_{i+1}, y_j) - 2u(x_i, y_j) + u(x_{i-1}, y_j)}{h^2} + \frac{u(x_i, y_{j+1}) - 2u(x_i, y_j) + u(x_i, y_{j-1})}{k^2} = f(x_i, y_i)$$

Na rede quadrada, a equação de Laplace fica

$$4u_{ij} - u_{i+1,j} - u_{i-1,j} - u_{i,j-1} - u_{i,j+1} = 0$$

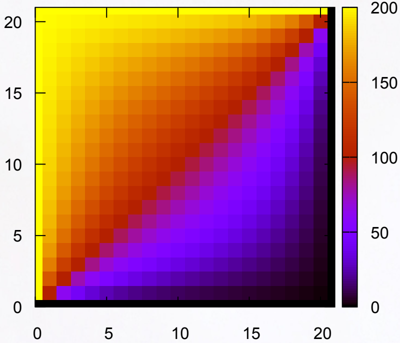
Faça uma rede 21x21 com 5000 iterações



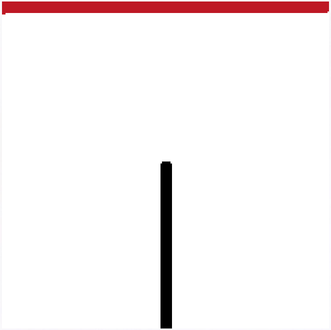
LAPLACE

No gnuplot

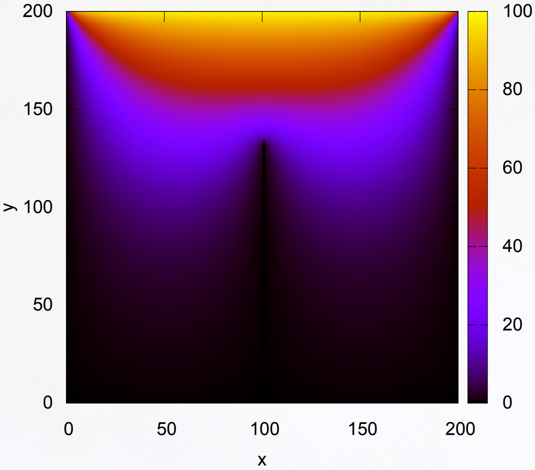
```
> set view map
> set xrange[0:21]
> splot "saida.dat"matrix with image
```



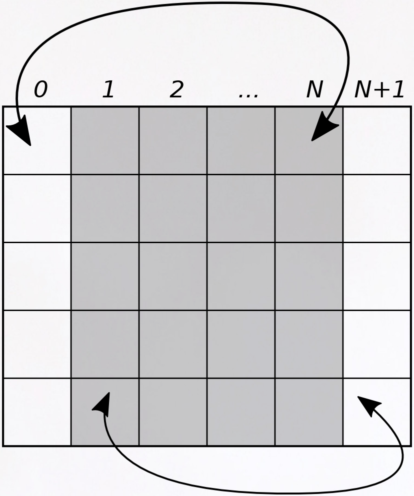
Crie uma matriz auxiliar com apenas 0's e 1's. Use esta matriz para decidir que pontos vai atualizar.
Para uma matriz 200x200, considere o potencial zero, exceto na linha de cima, onde o potencial vale 100. Considere uma linha vertical, partindo da metade linha de baixo até metade do quadrado. O potencial da linha também é zero.



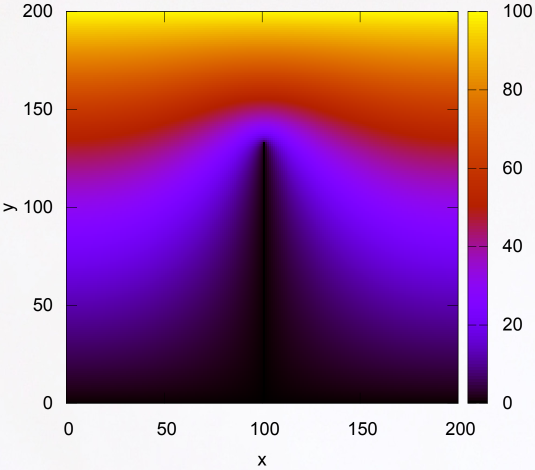
Aparecem resultados indesejados na borda. É um para-raios dentro de uma caixa.



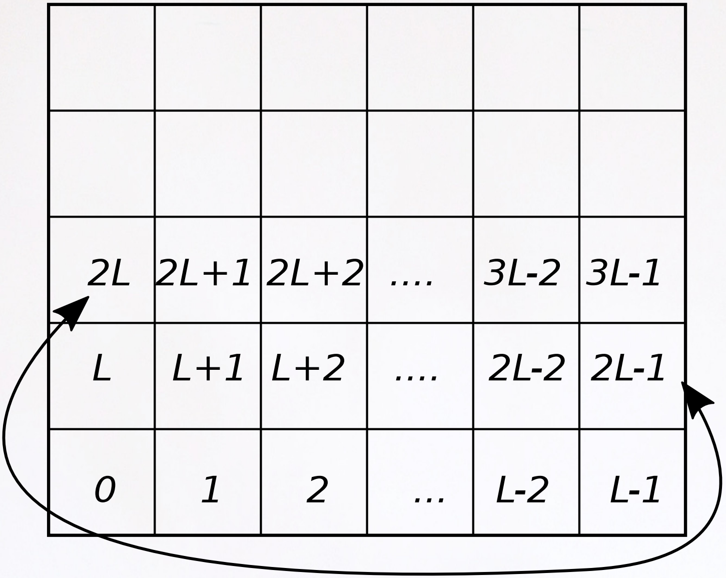
Condições periódicas de contorno

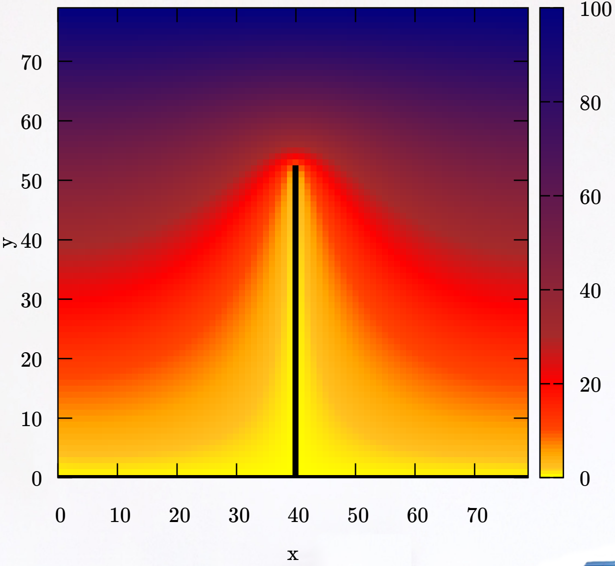


Resultado



Condições periódicas de contorno helicoidais

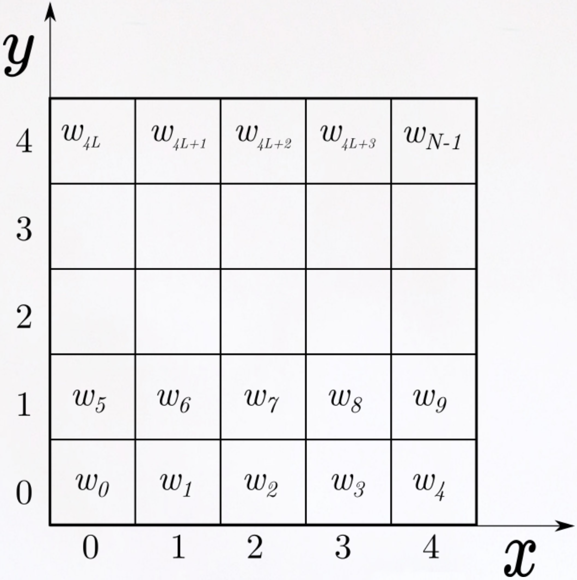



y
x
0
10
20
30
40
50
60
70
0
10
20
30
40
50
60
70
0
20
40
60
80
100

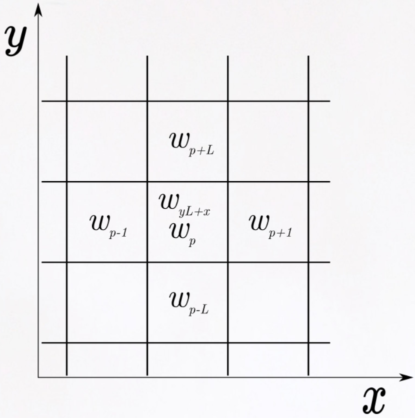
```
set view map
set xlabel "x"
set ylabel "y"
set palette defined ( 0 "black", 0.0001 "yellow", .2 "gol
                      .5 "orange", 1 "orange-red", 2 "red
                      3 "brown",8 "royalblue",  10 "navy"
set cbrange[0:100]
set size square
splot [0:50][0:50] "saida.dat" matrix with image

show colornames
```

Cores no gnuplot:
https://www2.uni-hamburg.de/Wiss/FB/15/Sustainability/schneider/gnuplot/colors.htm
Paletas de cores:
https://github.com/Gnuplotting/gnuplot-palettes

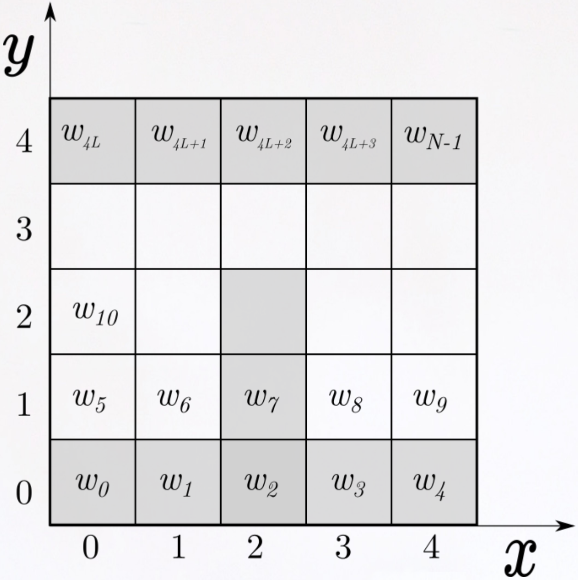


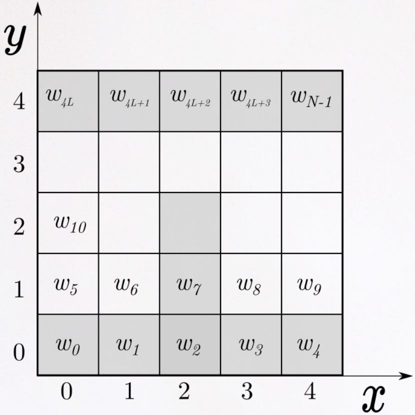
y
w_{4L} w_{4L+1} w_{4L+2} w_{4L+3} w_{N-1}
w_5 w_6 w_7 w_8 w_9
w_0 w_1 w_2 w_3 w_4
4
3
2
1
0
0 1 2 3 4
x



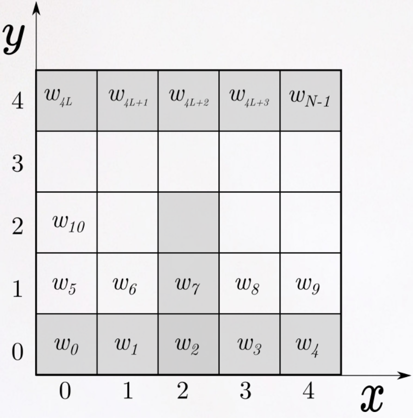
$$4w_p - w_{p+1} - w_{p-1} - w_{p+L} - w_{p-l} = 0$$

São $(L-2)x(L-2)$ equações assim, mas exigem análise especial nas bordas.


y
x
0
1
2
3
4
w_{4L}
w_{4L+1}
w_{4L+2}
w_{4L+3}
w_{N-1}
w_{10}
w_5
w_6
w_7
w_8
w_9
w_0
w_1
w_2
w_3
w_4



$$
\begin{array}{lr}
w_0 & = 0 \\
\quad w_1 & = 0 \\
\vdots \quad \vdots \; \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \; \vdots \quad \vdots \quad \vdots & = \vdots \\
\qquad\qquad w_7 & = 0 \\
\vdots \quad \vdots \; \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \; \vdots \quad \vdots \quad \vdots & = 0 \\
\cdots -w_{i-L} \cdots -w_{i-1} \; 4w_i \; -w_{i+1} \cdots -w_{i+L} \; \cdots & = 0 \\
\vdots \quad \vdots \; \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \; \vdots \quad \vdots \quad \vdots & = \vdots \\
w_{N-1} & = 100
\end{array}
$$



$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ \cdots & -1 & 4 & -1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} w_0 \\ w_1 \\ \vdots \\ w_i \\ \vdots \\ w_{N-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 100 \end{pmatrix}$$