Universidade Federal Fluminense

ICEx

Métodos Numéricos II

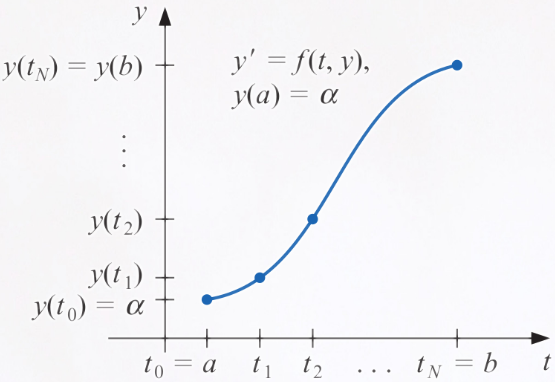
Thadeu Penna

thadeupenna@id.uff.br

Sumário

Problemas de Contorno

Problemas de contorno diferem dos problemas de condições iniciais. Agora, precisamos satisfazer as condições “iniciais” e “finais”.



$$y'(t) = f(y,t), \qquad a < t < b, \qquad y(a) = y_0, \qquad h = \frac{b-a}{N}$$

Solução do método de quarta ordem:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$
$$t_{n+1} = t_n + h$$

$$k_1 = f(t_n, y_n)$$
$$k_2 = f(t_n + 1/2h, y_n + 1/2h\, k_1)$$
$$k_3 = f(t_n + 1/2h, y_n + 1/2h\, k_2)$$
$$k_4 = f(t_n + h, y_n + h\, k_3)$$

Resolva $y' = 1 + (t-y)^2,\ 2 \leq t \leq 3,\ y(2) = 1$, com $N = 10$ pontos.
Compare com $y(t) = t + 1/(1-t)$

Runge-Kutta para EDO de Ordem mais Alta

$$y'' - 3y' + 2y = 6e^{-t}, \qquad 0 \leq t \leq 1, \qquad y(0) = y'(0) = 2$$

Compare com a solução exata:

$$y(t) = 2e^{2t} - e^{t} + e^{-t}.$$

Dica:

$$y'' - 3y' + 2y = 6e^{-t} \begin{cases} z = y' \\ z' = 3z - 2y + 6e^{-t} \end{cases}$$

Calcule os termos intermediários simultaneamente.

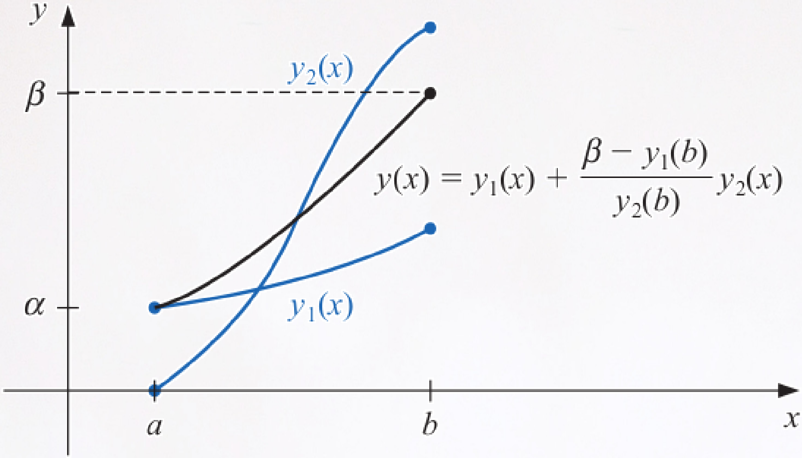
Estratégia para o programa geral.

- São L equações, de ordem M, ou seja $N = L \times M$ funções.
- Vamos precisar de $y, y', y'', ...y^M$ para cada equação. Podemos também guardar em vetores.
- Uma função para RK, com argumentos os vetores de função e vetores com as derivadas.

```
typedef double (*sistfunc)();
...

sistfunc equacoes[N]={f,g};

....

yt=rk(equacoes,y,t,h);
...

double rk(sistfunc func[],double y[M], ... {
```

- Os k's também serão vetores ($k_1[N], k_2[N], k_3N, k_4[N]$).
- Calcule cada vetor k_i, um de cada vez.
- Após o cálculo do vetor $k_i[N]$, atualize o vetor $y[M]$. É melhor usar um vetor auxiliar $ya[M]$ para isso, já que vamos precisar do vetor $y[M]$ original.
- Com todos os $k_i[M]$ calculados obtenha, finalmente, o novo vetor $y[M]$, equivalente ao y_{n+1}

Shooting Linear



Resolva o problema duas vezes com condições iniciais : $y_1(a) = \alpha$, $y_2(a) = 0$, $y_1'(a) = 0$, $y_2'(a) = 1$. Guarde os valores em vetores e só depois use a expressão acima para calcular a resposta geral.

Demonstração

Sejam

$$
\begin{aligned}
y'' &= p(x)y' + q(x)y + r(x) \qquad && a \leq x \leq b, \qquad && y(a) = \alpha, y'(a) = 0 \\
y'' &= p(x)y' + q(x)y && a \leq x \leq b, && y(a) = 0, y'(a) = 1
\end{aligned}
$$

Se $y_1(x)$ é solução da primeira e $y_2(x)$ é solução da segunda, então

$$
\begin{aligned}
y(x) &= y_1(x) + \frac{\beta - y_1(b)}{y_2(b)} y_2(x) \\
y'(x) &= y_1'(x) + \frac{\beta - y_1(b)}{y_2(b)} y_2'(x) \\
y''(x) &= y_1''(x) + \frac{\beta - y_1(b)}{y_2(b)} y_2''(x)
\end{aligned}
$$

é solução da primeira equação (prove).

Tarefa

Resolva o problema de contorno

$$y'' = y' + 2y + \cos x, \qquad 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}, \qquad y(0) = -0.3, \quad y(\frac{\pi}{2}) = -0.1$$

Faça

$$f2 = y' + 2y$$

e

$$f1 = f2 + \cos x$$

Use $N = 4$ e $N = 10$. Compare com o resultado exato

$$y(x) = -\frac{1}{10}(\sin x + 3\cos x)$$