

Processamento Digital de Sinais

MÓDULO 6

FFT - Transformada Rápida de Fourier

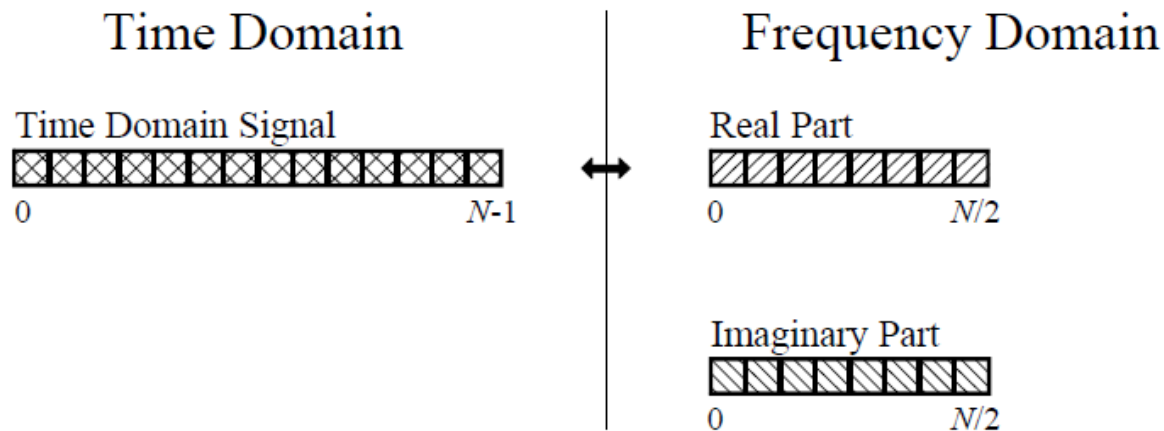
Gustavo Luís F. Vicente

Transformada Rápida de Fourier

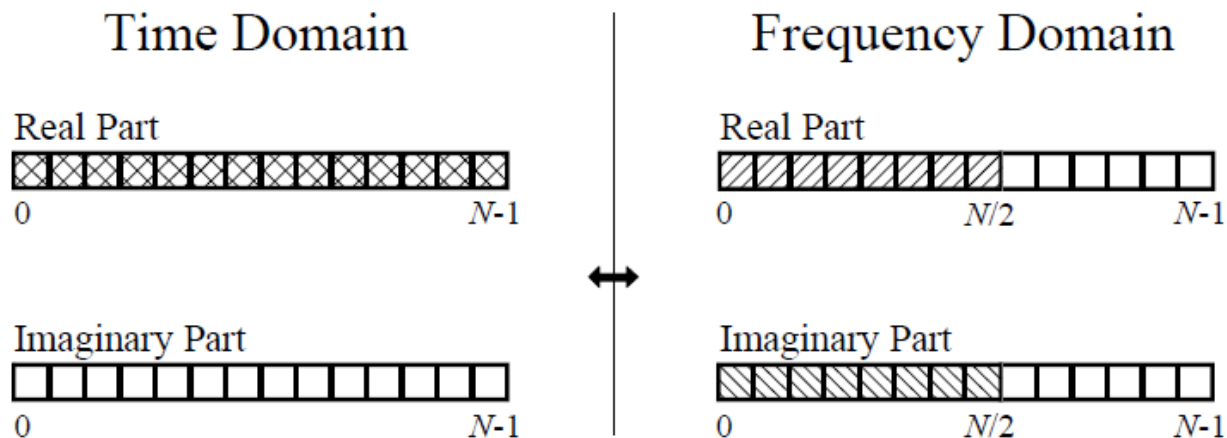
- Introdução
 - Karl Friedrich Gauss – século 19 (não tinha um computador)
 - Cooley & Tukey – 1965
 - Baseada na DFT Complexa
 - Centenas de vezes mais rápida que o método básico de cálculo da DFT
 - Podemos calcular a DFT Real a partir da DFT Complexa
 - Temos de saber como transferir os dados entre as duas versões de DFT...

Transformada Rápida de Fourier

Real DFT



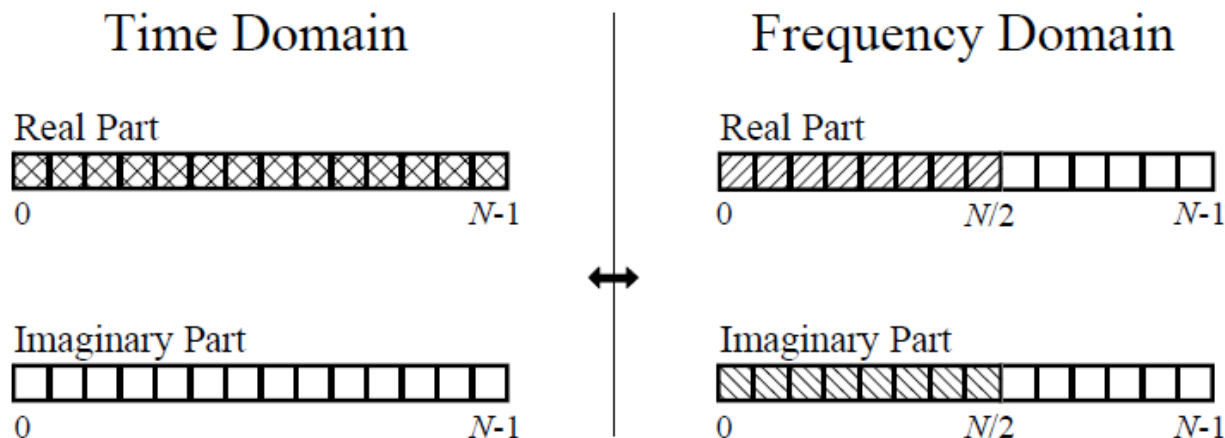
Complex DFT



Transformada Rápida de Fourier

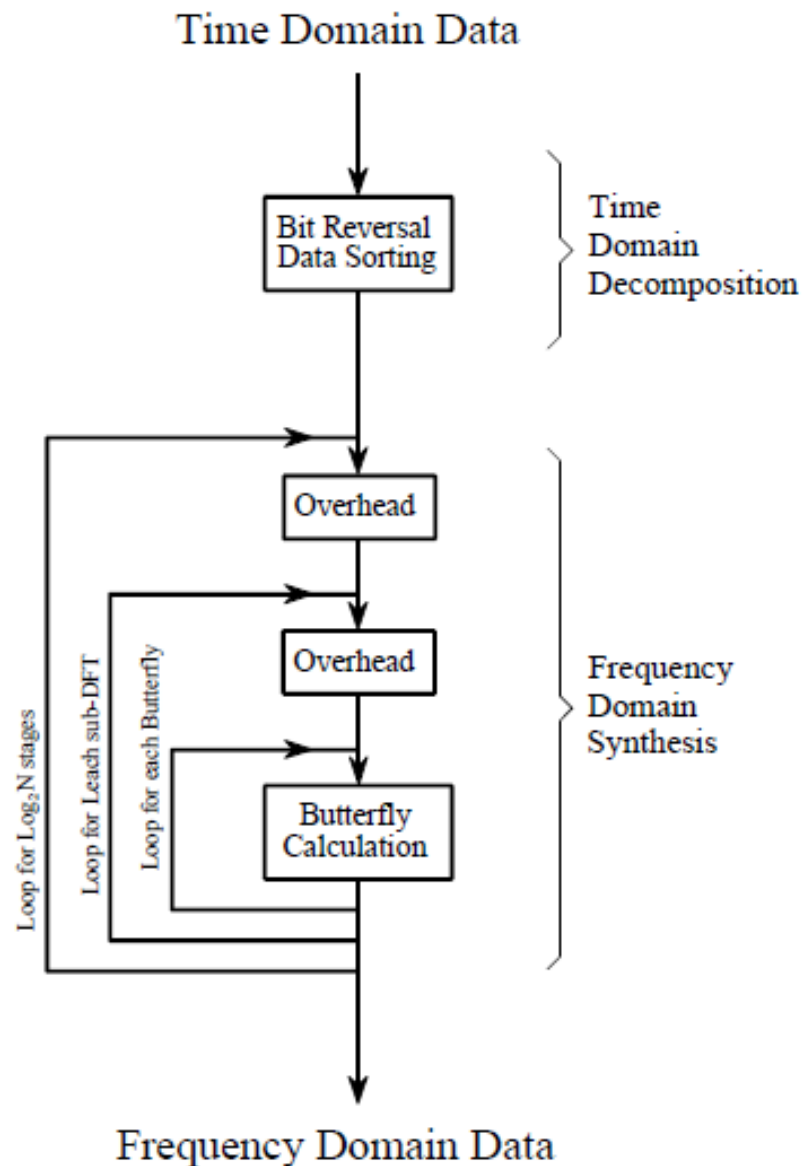
- Notação de números complexos
 - Os domínios do tempo e da frequência possuem UM sinal de N amostras, cada amostra é um número complexo, com parte real e parte imaginária
 - Ao calcular a FFT devemos ter em mente que cada ponto do sinal é um número complexo, representado por dois valores reais (desconsideramos i)

Complex DFT



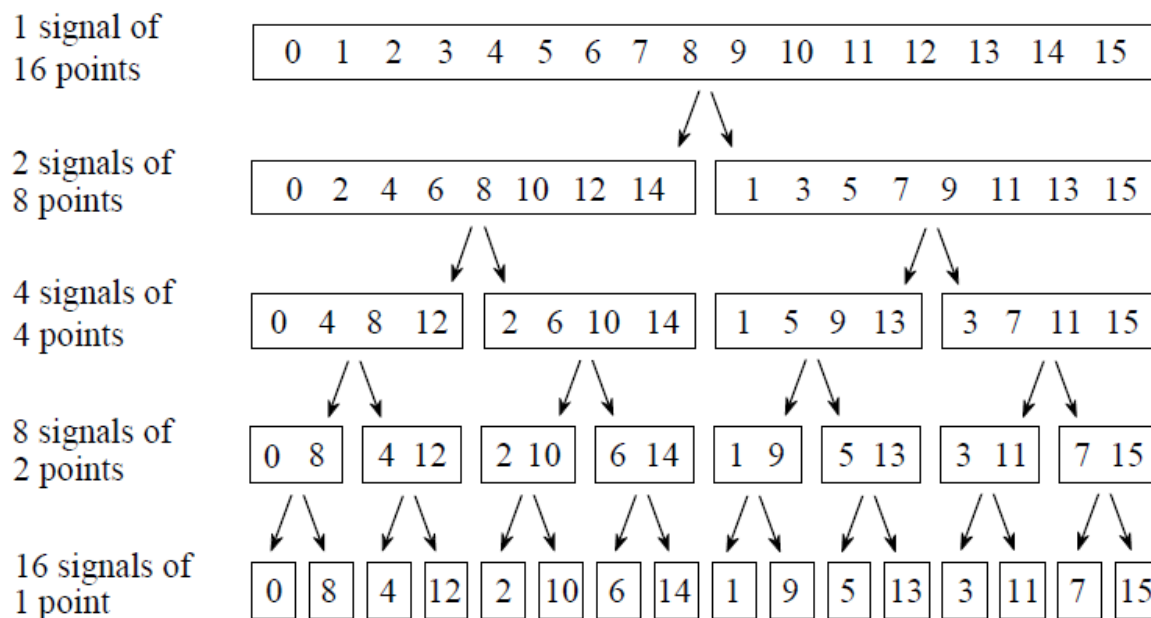
Transformada Rápida de Fourier

- Operação básica da FFT
 - Decompõe um sinal no tempo de N pontos em N sinais no tempo de um ponto cada
 - Calcula a DFT dos N sinais, gerando um espectro de N frequências
 - Sintetiza o espectro de frequências único, a partir as N frequências geradas pela DFT



Transformada Rápida de Fourier

- PASSO1: Decomposição de um sinal de 16 pontos em 16 sinais de um ponto
 - Obs.: Decomposição entrelaçada (amostras pares e ímpares)
 - Número de passos da decomposição: $\log_2 N$



Transformada Rápida de Fourier

- Detalhe: a FFT reordena os pontos do sinal de acordo com a ordem reversa de bits de suas posições

Ordem Normal		Ordem Reversa de Bits	
<i>Decimal</i>	<i>Binary</i>	<i>Decimal</i>	<i>Binary</i>
0	0000	0	0000
1	0001	8	1000
2	0010	4	0100
3	0011	12	1100
4	0100	2	0010
5	0101	10	1010
6	0110	6	0110
7	0111	14	1110
8	1000	1	0001
9	1001	9	1001
10	1010	5	0101
11	1011	13	1101
12	1100	3	0011
13	1101	11	1011
14	1110	7	0111
15	1111	15	1111

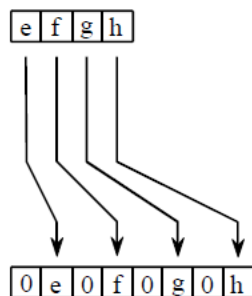
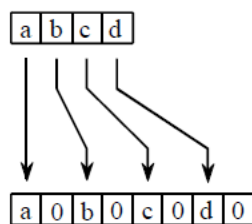
Transformada Rápida de Fourier

- PASSO 2: calcular o espectro de frequência de cada sinal de um ponto.
 - O espectro de frequência de um sinal de 1 ponto é *ele mesmo*
 - *Nada a fazer...*
 - Apenas considerar que agora os valores representam um espectro de frequência e não mais um sinal no domínio do tempo...

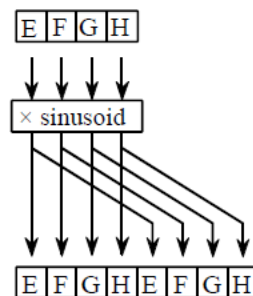
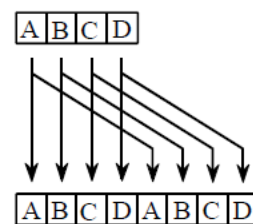
Transformada Rápida de Fourier

- PASSO 3: síntese do espectro de frequências
 - Intercalação de zeros entre amostras no tempo equivale à duplicação dos pontos em frequência
 - deslocamento de uma amostra no tempo equivale à multiplicação por uma senoide em frequência

Time Domain

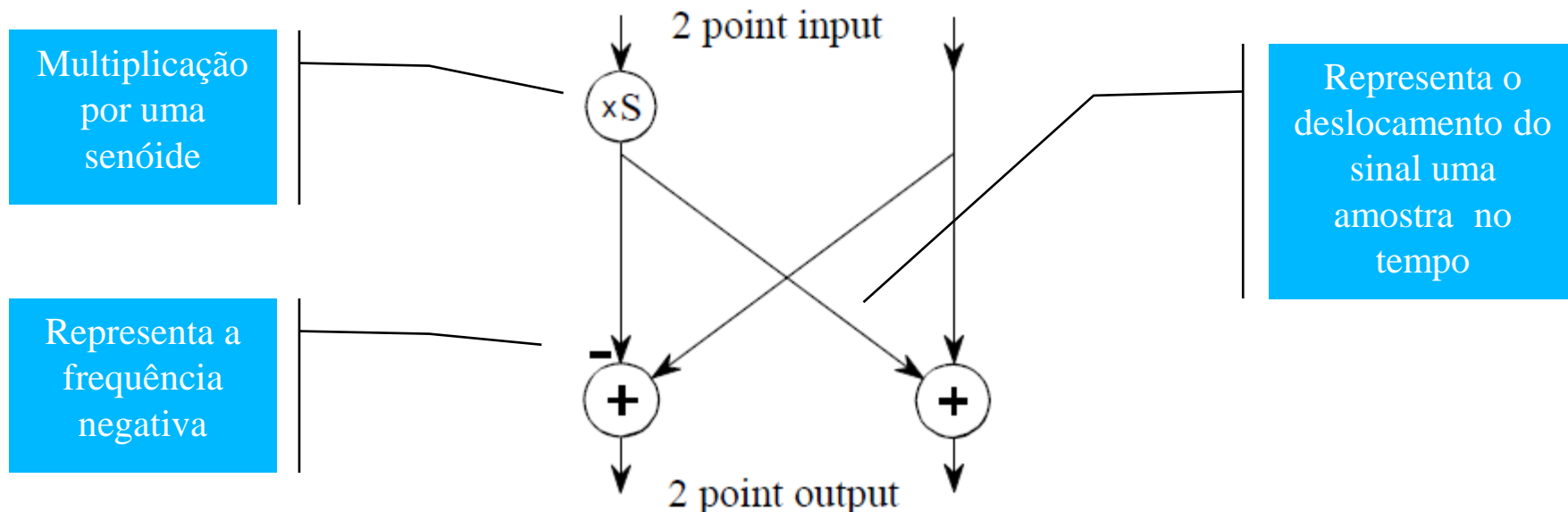


Frequency Domain



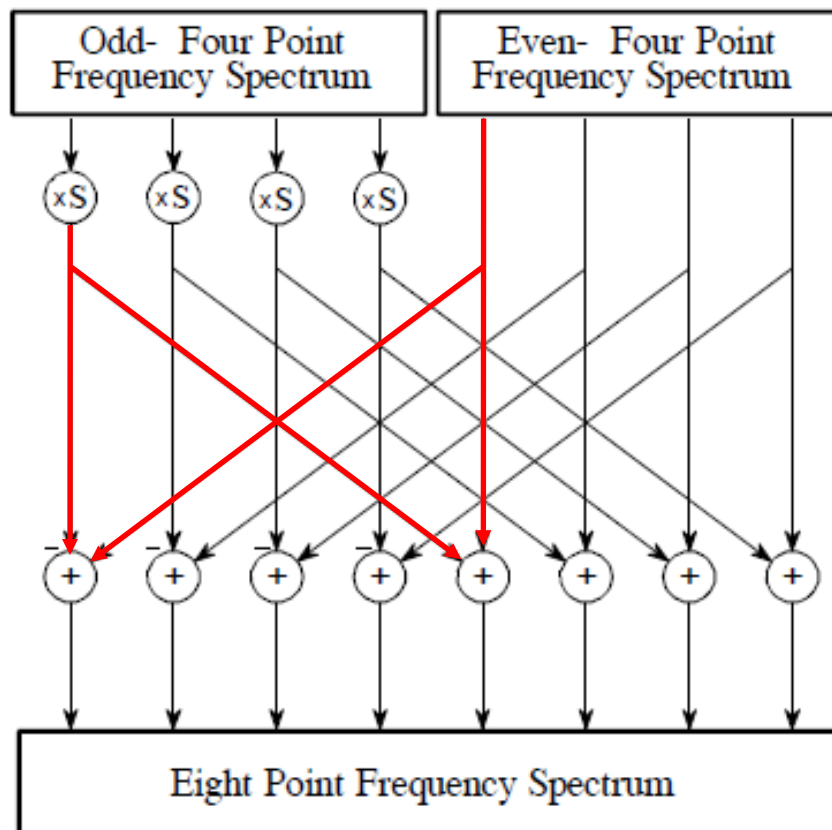
Transformada Rápida de Fourier

- PASSO 3: síntese do espectro de frequências
 - sintetiza-se o espectro a partir da composição dos pontos pares com os pontos ímpares, da forma abaixo, conhecida como **butterfly**



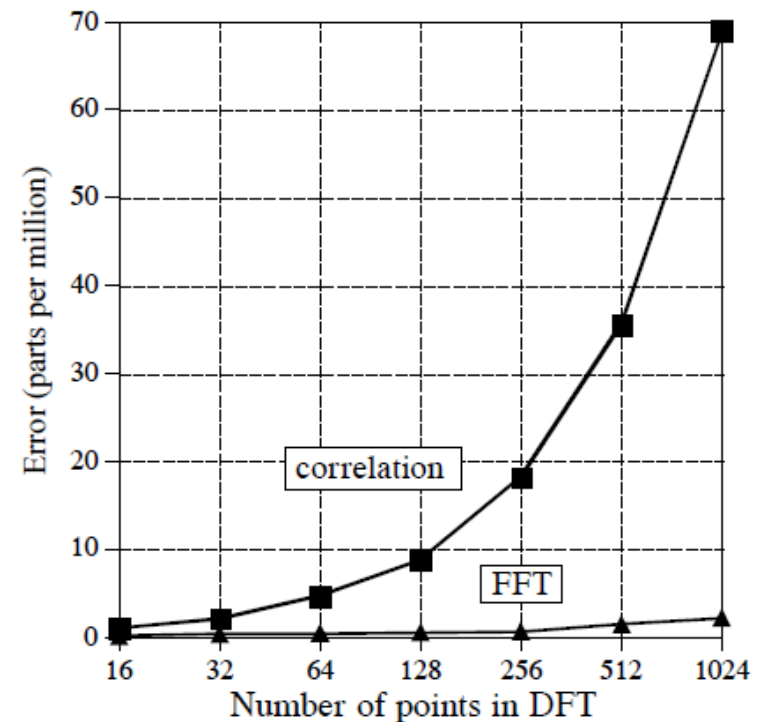
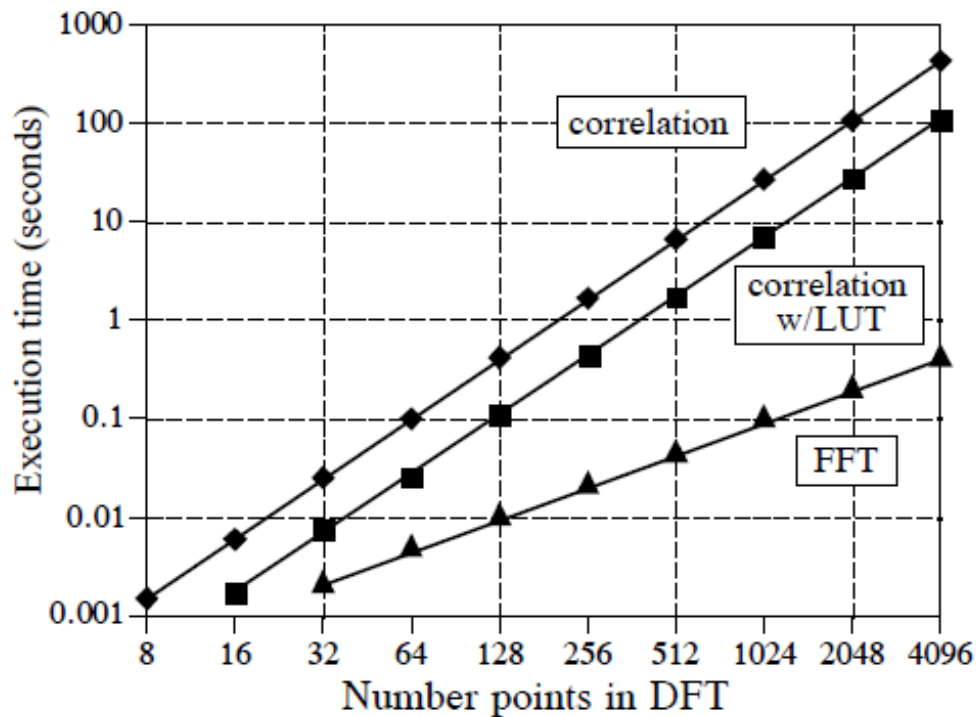
Transformada Rápida de Fourier

- PASSO 3: síntese do espectro de frequências
 - Exemplo de síntese de 2 sinais de 4 pontos no domínio da frequência



Transformada Rápida de Fourier

- Velocidade e Precisão



Transformada Rápida de Fourier

- Código da decomposição no tempo em “bit-reverse”

```
1050 PI = 3.14159265                                'Set constants
1060 NM1% = N%-1
1070 ND2% = N%/2
1080 M% = CINT(LOG(N%)/LOG(2))
1090 J% = ND2%
1100 '
1110 FOR I% = 1 TO N%-2                                'Bit reversal sorting
1120  IF I% >= J% THEN GOTO 1190
1130  TR = REX[J%]
1140  TI = IMX[J%]
1150  REX[J%] = REX[I%]
1160  IMX[J%] = IMX[I%]
1170  REX[I%] = TR
1180  IMX[I%] = TI
1190  K% = ND2%
1200  IF K% > J% THEN GOTO 1240
1210  J% = J%-K%
1220  K% = K%/2
1230  GOTO 1200
1240  J% = J%+K%
1250 NEXT I%
```

Transformada Rápida de Fourier

- Código da síntese na frequência do espectro

```
1260 '  
1270 FOR L% = 1 TO M%                                'Loop for each stage  
1280   LE% = CINT(2^L%)  
1290   LE2% = LE%/2  
1300   UR = 1  
1310   UI = 0  
1320   SR = COS(PI/LE2%)                              'Calculate sine & cosine values  
1330   SI = -SIN(PI/LE2%)  
1340   FOR J% = 1 TO LE2%                              'Loop for each sub DFT  
1350     JM1% = J%-1  
1360     FOR I% = JM1% TO NM1% STEP LE%                'Loop for each butterfly  
1370       IP% = I%+LE2%  
1380       TR = REX[IP%]*UR - IMX[IP%]*UI              'Butterfly calculation  
1390       TI = REX[IP%]*UI + IMX[IP%]*UR  
1400       REX[IP%] = REX[I%]-TR  
1410       IMX[IP%] = IMX[I%]-TI  
1420       REX[I%] = REX[I%]+TR  
1430       IMX[I%] = IMX[I%]+TI  
1440     NEXT I%  
1450     TR = UR  
1460     UR = TR*SR - UI*SI  
1470     UI = TR*SI + UI*SR  
1480   NEXT J%  
1490 NEXT L%  
1500 '  
1510 RETURN
```

Transformada Rápida de Fourier

- Exercício
 - Implementar na placa de desenvolvimento (com o MikroC) a FFT, mostrando no display gráfico o espectro de frequência do sinal amostrado.