

# Colônia de formigas - PCV

Carolina Ribeiro Xavier

Maio de 2024

## 1 Inspiração biológica

Colônia de formigas é uma meta-heurística baseada em população e inspirada no comportamento forrageiro das formigas. Muitas espécies de formigas são quase cegas, logo a comunicação entre as formigas é realizada através de uma substância química denominada de feromônio. Em algumas espécies, o feromônio é usado para criar trilhas de formigas.

Ao caminhar, as formigas depositam no chão o feromônio, formando, deste modo, uma trilha de feromônios. Outras formigas sentem o cheiro do feromônio, e quando elas têm que escolher um caminho, escolhem, com maior probabilidade, o caminho com maior quantidade de feromônio (análogo ao cheiro mais forte). Essa trilha ajuda a própria formiga a achar o seu caminho de volta, e ajuda as demais formigas a encontrar a fonte de alimentos.

Experimentos realizados por Deneubourg et al., 1989 e Bonabeau et al., 1999 mostraram o comportamento na formação de trilhas pelas formigas reais.

Nesse experimento foi possível entender a inteligência do enxame, no caso (a), com dois caminhos alternativos de igual tamanho chegando na mesma fonte de alimento, notou-se a convergência para somente um dos dois caminhos.

Para os casos em que os caminhos alternativos tem tamanho diferente e chegam na mesma fonte de alimento (b), foi possível observar a escolha pelo caminho mais curto, o caminho curto é percorrida em menos tempo, fazendo com que mais formigas atravessem ele. Logo, mais feromônio é depositado.

Por fim, quando foi mantido o mesmo tamanho dos caminhos e variada a qualidade das fontes de alimento (c), foi possível observar a convergência pelo caminho que levava à melhor fonte. Quando a fonte foi modificada após a formação da trilha as formigas não conseguem verificar que a fonte melhorou.

A otimização por colônia de formigas foi proposta por Dorigo e Gambardella em 1997 e baseia-se no comportamento das formigas para formação de suas trilhas do experimento descrito anteriormente.

As formigas artificiais são heurísticas construtivas, as soluções são construídas de forma probabilística utilizando duas informações: a trilha de feromônios (artificial), que muda dinamicamente durante a execução do programa, e a informação heurística específica do problema a ser resolvido.

Para exemplificar o Ant System iremos aplicá-lo no problema de caminhos mais famoso da computação, o Problema do Caixeiro Viajante (PCV).

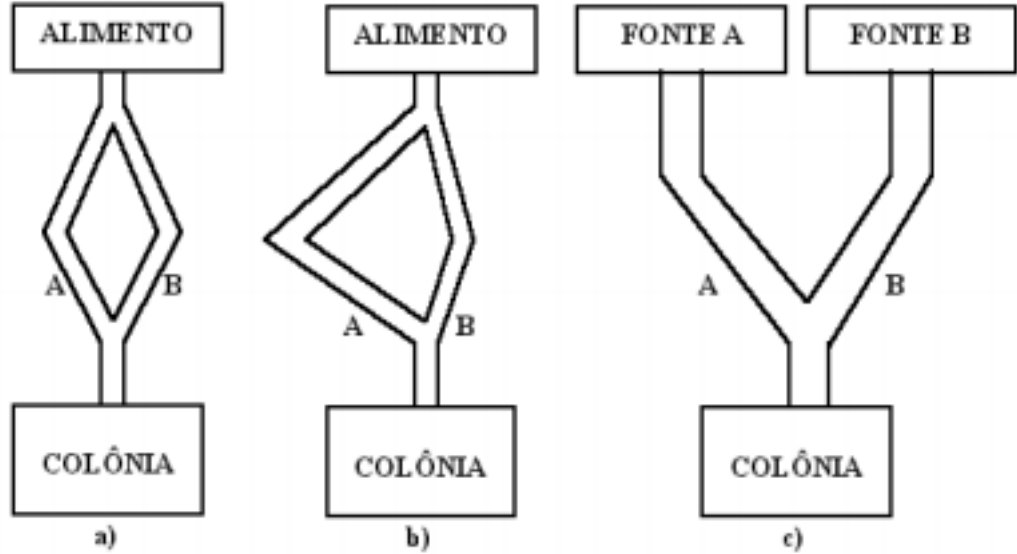


Figura 1: Experimento para observação da formação de trilhas

## 2 Problema do Caixeiro viajante

O problema PCV consiste na busca por um circuito que possua a menor distância, começando numa cidade qualquer, entre várias, e visitando todas cidades, cada uma precisamente uma vez, voltando então para a cidade de origem.

Dado um conjunto  $C = \{c_1, \dots, c_n\}$  de  $n$  cidades  $c_i$  e uma matriz de distâncias  $(\rho_{ij})$ , onde  $\rho_{ij} = \rho(c_i, c_j)((i, j) \in \{1, \dots, n\}, \rho_{ij} = \rho_{ji}, \rho_{ii} = 0)$ , a tarefa passa por encontrar a permutação  $\pi \in S_n = \{s : \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, n\}\}$  que faça com que a função objetivo (distância do circuito)  $f : S_n \rightarrow \mathbb{R}$ , onde:

$$f(\pi) = \sum_{i=1}^{n-1} \rho(\pi(i), \pi(i+1)) + \rho(\pi(n), \pi(1)), \quad (1)$$

seja mínima.

## 3 Ant System e suas variantes

O Ant System é o primeiro algoritmo que surgiu inspirado em colônia de formigas naturais.

Detalhes do ambiente das formigas a serem utilizadas:

1. Ao tomar um caminho a formiga deixa no mesmo uma certa quantidade de feromônio;

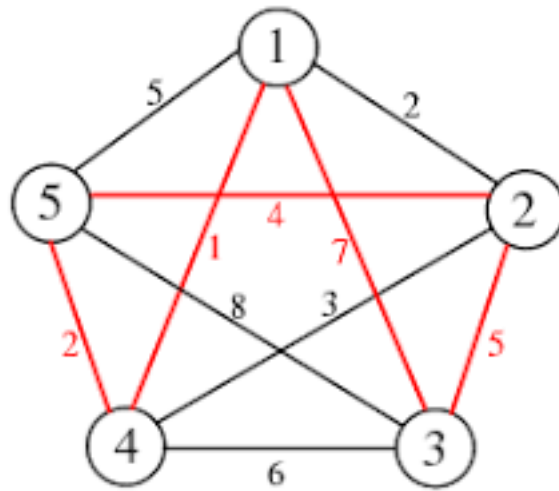


Figura 2: Grafo completo para aplicação do problema do caixeiro viajante

2. Uma formiga escolhe determinado caminho de acordo com uma função probabilística envolvendo a distância deste caminho e a quantidade de feromônio presente neste;
3. As formigas "lembram" os pontos por onde já passaram e não retornam a estes pontos até que tenham chegado à fonte de alimento;
4. O feromônio evapora.

### 3.1 Pseudocódigo

```
Coloque cada formiga em uma cidade aleatória
Para  $t = 1$  até o número de iterações
  Para  $k = 1$  até  $m$  (nº de formigas)
    Enquanto a formiga  $k$  não construir a viagem  $S_k$ 
      Selecione a próxima cidade pela regra da probabi
    Fim
    Calcule a distância  $L_k$  da viagem  $S_k$ 
    Se  $L_k < L^*$  então
       $S^* = S_k, L^* = L_k$ 
    Fim
  Fim
Atualize os feromônios
Fim
Retornar  $S^*$ 
```

Figura 3: Pseudocódigo do Ant System

### 3.2 Questões de projeto

As principais questões para o Ant System estão as listadas a seguir:

- Configuração inicial;
- Função objetivo;
- Representação;
- Função de probabilidade;
- Atualização de feromônio.

### 3.3 Configuração inicial

Durante o processo, cada formiga irá construir uma solução movendo-se de uma cidade para outra. No início, cada formiga é colocada em uma cidade diferente (ou são colocadas aleatoriamente).

O número sugerido de formigas ( $m$ ) deve ser proporcional à instância, sugere-se  $m = \text{número de vértices}$ .

É preciso também que você distribua uma quantidade igual de feromônio em todas as arestas  $\tau_0$ , sugestão  $10^{-16}$ .

### 3.4 Função objetivo

A função objetivo do problema do caixeiro viajante será direta, basta fazer o cálculo da distância do percurso dado por 1.

### 3.5 Representação

A representação da solução do problema do caixeiro viajante será feita por um vetor de  $n$  posições, que contenha alguma permutação dos vértices da instância a ser otimizada (minimização).

Começando de uma cidade  $i$ , a formiga move-se escolhendo probabilisticamente a cidade vizinha  $j$  (entre os vizinhos factíveis), isso será repetido até que a formiga obtenha uma permutação dos vértices. A estrutura de dados escolhida deve permitir que cada formiga tenha essa informação.

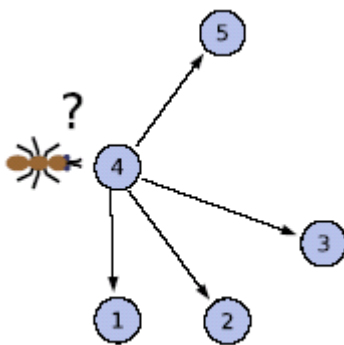


Figura 4: Cada formiga formará uma solução candidata probabilisticamente

Você irá precisar de armazenar também uma matriz de feromônio  $\tau$ , que será atualizada a cada iteração.

### 3.6 Função de probabilidade

A escolha da formiga é feita de forma probabilística, a probabilidade da formiga  $k$  que está na cidade  $i$  de escolher a cidade  $j$  é dada pela Equação 2.

$$p_{ij}^k = \frac{(\tau_{ij})^\alpha (\eta_{ij})^\beta}{\sum_{l \in \mathcal{N}_i^k} (\tau_{il})^\alpha (\eta_{il})^\beta} \quad (2)$$

Onde  $\tau_{ij}$  é o feromônio associado à aresta  $(i,j)$ ,  $\mathcal{N}_i^k$  é a vizinhança factível da formiga  $k$  (o conjunto de cidades ainda não visitadas por ela) e  $\eta_{ij}$  é um fator inversamente proporcional ao custo da aresta  $(i,j)$ , para o PCV:

$$\eta_{ij} = \frac{1}{d_{ij}}$$

Os valores de  $\alpha$  e  $\beta$  são parâmetros ajustáveis, o  $\alpha$  pondera a influência do feromônio e o  $\beta$  pondera a influência do custo do caminho no cálculo da probabilidade. Se  $\alpha = 0$  então cidades mais próximas tenderão a ser escolhidas, enquanto que se  $\beta = 0$ , as cidades associadas a arestas com maior quantidade de feromônio tenderão a ser escolhidas.

A partir de uma cidade  $i$ , a escolha da cidade candidata  $j$  é feita de acordo com a probabilidade de transição, com ideia similar à escolha por roleta de AG.

Para outra variante do AS, a Ant Colony System, uma estratégia de intensificação é feita, com uma probabilidade  $q_0$  a cidade de maior probabilidade é escolhida, com probabilidade  $1 - q_0$  usa-se a regra do AS.

#### 3.6.1 Parâmetros da Equação de P

Os melhores valores para os parâmetros  $\alpha$  e  $\beta$  da equação de P 2 podem ser encontrados com um experimento fatorial, inicialmente você pode colocar  $\alpha = 1$  e  $\beta = 5$  para desenvolver sua primeira implementação.

### 3.7 Atualização do Feromônio

Em cada posição da matriz de feromônio  $\tau_{ij}$  associado a aresta  $(i,j)$  ocorrem dois eventos:

- Evaporação - evita que o feromônio acumulado cresça indefinidamente, permitindo esquecer decisões ruins e encontrar soluções diversificadas;
- O depósito de feromônio, que varia de acordo com a variante do algoritmo baseado em colônia de formigas.

No **Ant System** o depósito de feromônio é feito por todas as formigas que passaram sobre  $(i,j)$ .

Depois que todas as formigas construíram suas viagens, o feromônio é atualizado da forma:

$$\tau_{ij} = (1 - \rho)\tau_{ij} + \sum_{k=1}^m \Delta\tau_{ij}^k \quad (3)$$

- $\Delta\tau_{ij}^k = \frac{Q}{L_k}$  quando a aresta  $(i, j)$  pertence  $S_k$ ;
- $\Delta\tau_{ij}^k = 0$ , caso contrário
- $Q$  é uma variável definida pelo usuário;
- $0 < \rho \leq 1$  é a taxa de evaporação de feromônio.

Sugere-se usar o  $Q = 100$  e  $\rho = 0,5$  para os testes iniciais.

No **Elitism Ant System (EAS)** a formiga com o melhor percurso  $T_{bs}$ , denominado best-so-far Tour reforça a sua trilha.

$$\tau_{ij} = (1 - \rho)\tau_{ij} + \sum_{k=1}^m \Delta\tau_{ij}^k + \epsilon\Delta\tau_{ij}^{bs} \quad (4)$$

- $\Delta\tau_{ij}^{bs} = \frac{Q}{T_{bs}}$  quando a aresta  $(i, j)$  pertence  $S_{bs}$ ;
- $\Delta\tau_{ij}^{bs} = 0$ , caso contrário
- $\Delta\tau_{ij}^k = \frac{Q}{L_k}$  quando a aresta  $(i, j)$  pertence  $S_k$ ;
- $\Delta\tau_{ij}^k = 0$ , caso contrário
- $Q$  é uma variável definida pelo usuário;
- $0 < \rho \leq 1$  é a taxa de evaporação de feromônio.

No **Rank-Based Ant System ( $AS_{rank}$ )**, somente as  $w$  melhores formigas depositam uma quantidade de feromônio, que proporcional ao seu rank, a formiga best-so-far pode reforça a trilha Equação 5.

$$\tau_{ij} = (1 - \rho)\tau_{ij} + \sum_{r=1}^{w-1} (w - r)\Delta\tau_{ij}^r + w\Delta\tau_{ij}^{bs} \quad (5)$$

- $\Delta\tau_{ij}^{bs} = \frac{Q}{T_{bs}}$  quando a aresta  $(i, j)$  pertence  $S_{bs}$ ;
- $\Delta\tau_{ij}^{bs} = 0$ , caso contrário;
- $\Delta\tau_{ij}^r = \frac{Q}{L_k}$  quando a aresta  $(i, j)$  pertence  $S_r$ ;
- $\Delta\tau_{ij}^r = 0$ , caso contrário
- $Q$  é uma variável definida pelo usuário;
- $0 < \rho \leq 1$  é a taxa de evaporação de feromônio;
- $w$  é definido pelo usuário e é o número de formigas que farão o depósito de feromônio. Sugestão de  $w = 5$ .

Existe ainda o **Ant Colony System**, que somente a melhor formiga deposita feromônio depois de cada iteração, sendo o valor uma média ponderada entre o valor antigo e valor dado pelo novo percurso da formiga best-so-far. Somente esta formiga faz a evaporação.

$$\tau_{ij} = (1 - \rho)\tau_{ij} + \rho\Delta\tau_{ij}^{bs} \quad (6)$$

- $\Delta\tau_{ij}^{bs} = \frac{Q}{T_{bs}}$  quando a aresta  $(i, j)$  pertence  $S_{bs}$ ;
- $\Delta\tau_{ij}^{bs} = 0$ , caso contrário
- $Q$  é uma variável definida pelo usuário;
- $0 < \rho \leq 1$  é a taxa de evaporação de feromônio;

É aplicado pelas demais formigas uma regra de atualização local do feromônio.

$$\tau_{ij} = (1 - \xi)\tau_{ij} + \xi\tau_0 \quad (7)$$

onde  $\tau_0$  é o nível inicial de feromônio e  $0 < \xi \leq 1$  é um parâmetro dado pelo usuário.

Na prática o que as formigas fazem é reduzir o feromônio na aresta, a fim de dar diversidade para as soluções, reduzindo a atratividade das arestas frequentemente visitadas.

### 3.8 Critério de parada

- Número máximo de iterações
- Estagnação (mínimo local)
- Convergência (mínimo global)

## 4 Implementação

Agora vamos implementar um algoritmo baseado em colônia de formigas para o problema do caixeiro viajante

Você deve definir a estrutura de dados que você irá armazenar as formigas, suas soluções e seus respectivos valores de *fitness*. Você deve armazenar ainda a quantidade de feromônio por aresta, de forma que seja viável a atualização desses valores.

Use alguma instância encontrada em:

**aqui** ou **aqui**.

As instâncias que melhor representam o problema no primeiro link são:

LAU15 - que possui o resultado da solução ótima e a matriz de distâncias (lau15.dist.txt)



SGB128 - que não traz a solução ótima, mas possui a matriz de distâncias (sgb128.dist.txt)

Por simplicidade, no segundo link você deve se atentar aos dados que possuem problemas simétricos.

Defina 3 dos valores listados a seguir com um experimento fatorial:

- Tamanho da população de formigas;
- Número máximo de iterações a serem executadas;
- $\alpha$ ;
- $\beta$ ;
- $\rho$
- $Q$
- $\epsilon$  - caso do EAS
- $w$  - caso do *AS\_rank*

Relembrando as sugestões  $\alpha = 1$ ,  $\beta = 5$ ,  $\rho = 0,5$ ,  $m = |V|$ ,  $Q = 100$ ,  $\tau_0 = 10^{-6}$ ,  $w = 5$  e  $\xi = 0,1$ .