Introdução à Análise de dados em FAE **(16/08/2021)**

Lista 1: Cinemática

Professores: Sandro Souza, Sheila Da Silva, Eliza Da Costa, Dilson Damião *Name:* Vitor Souza Ramos

EXERCICIO 0

Quando um píon decai em dois fótons, qual a energia do fóton?

Solução: Da conservação de energia:

$$E_\pi = E_{\gamma_1} + E_{\gamma_2} \tag{0.1}$$

Sabemos que as energias do píon e de um fóton são dadas por

$$E_\pi = \gamma m_\pi c^2 \tag{0.2}$$

$$E_{\gamma_i} = h\nu_i \tag{0.3}$$

Assim, temos

$$\gamma m_\pi c^2 = h\nu_1 + h\nu_2 \tag{0.4}$$

Da conservação do momentum:

$$|\vec{p}_{\pi,\parallel}| = |\vec{p}_{1,\parallel}| + |\vec{p}_{2,\parallel}| \tag{0.5}$$

$$|\vec{p}_{\pi,\perp}| = |\vec{p}_{1,\perp}| + |\vec{p}_{2,\perp}| \tag{0.6}$$

Sabemos que

$$|\vec{p}_{\pi,\parallel}| = \gamma m_\pi v \tag{0.7}$$

$$|\vec{p}_{\pi,\perp}| = 0 \tag{0.8}$$

$$|\vec{p}_{1,\parallel}| = \frac{h\nu_1}{c}\cos\theta_1 \tag{0.9}$$

$$|\vec{p}_{2,\parallel}| = \frac{h\nu_1}{c}\cos\theta_1 \tag{0.10}$$

$$|\vec{p}_{1,\perp}| = \frac{h\nu_1}{c}\sin\theta_1 \tag{0.11}$$

$$|\vec{p}_{2,\perp}| = \frac{h\nu_2}{c}\sin\theta_2 \tag{0.12}$$

Voltando às equações (0.5) e (0.6):

$$\gamma m_\pi v = \frac{h\nu_1}{c}\cos\theta_1 + \frac{h\nu_2}{c}\cos\theta_2 \tag{0.13}$$

$$0 = \frac{h\nu_1}{c}\sin\theta_1 + \frac{h\nu_2}{c}\sin\theta_2 \tag{0.14}$$

É possível reescrever a equação (0.13) como:

$$\left(\gamma m_\pi v - \frac{h\nu_1}{c}\cos\theta_1\right)^2 = \left(\frac{h\nu_2}{c}\right)^2\cos^2\theta_2 = \left(\frac{h\nu_2}{c}\right)^2(1-\sin^2\theta_2) \tag{0.15}$$

$$\left(\gamma m_\pi v - \frac{h\nu_1}{c}\cos\theta_1\right)^2 = \left(\frac{h\nu_2}{c}\right)^2 - \left(\frac{h\nu_2}{c}\sin\theta_2\right)^2 \tag{0.16}$$

E usando a relação (0.14):

$$\left(\gamma m_\pi v - \frac{h\nu_1}{c}\cos\theta_1\right)^2 = \left(\frac{h\nu_2}{c}\right)^2 - \left(-\frac{h\nu_1}{c}\sin\theta_1\right)^2 \tag{0.17}$$

Note que a relação (0.4) pode ser reescrita como:

$$\left(\frac{h\nu_2}{c}\right)^2 = \left(\gamma m_\pi c - \frac{h\nu_1}{c}\right)^2 \tag{0.18}$$

Assim, a equação (0.17) fica

$$\left(\gamma m_\pi v - \frac{h\nu_1}{c}\cos\theta_1\right)^2 = \left(\gamma m_\pi c - \frac{h\nu_1}{c}\right)^2 - \left(-\frac{h\nu_1}{c}\sin\theta_1\right)^2 \tag{0.19}$$

Somente em termos do fóton 1. Passando o segundo termo do lado direito para o lado esquerdo e expandindo os produtos notáveis:

$$(\gamma m_\pi v)^2 - 2(\gamma m_\pi v)\left(\frac{h\nu_1}{c}\cos\theta_1\right) + \left(\frac{h\nu_1}{c}\right)^2(\cos^2\theta_1 + \sin^2\theta_1) = (\gamma m_\pi c)^2 - 2(\gamma m_\pi c)\left(\frac{h\nu_1}{c}\right) + \left(\frac{h\nu_1}{c}\right)^2 \tag{0.20}$$

Usando a identidade trigonométrica, os dois lados da equação tem um termo $\left(\frac{h\nu_1}{c}\right)^2$, que é cancelado. Efetuando as multiplicações, a equação pode ser reescrita como:

$$\gamma^2 m_\pi^2 v^2 - 2\left(\frac{\gamma m_\pi v h\nu_1}{c}\cos\theta_1\right) = \gamma^2 m_\pi^2 c^2 - 2\left(\frac{\gamma m_\pi c h\nu_1}{c}\right) \tag{0.21}$$

Simplificando γm_π em todos os termos, temos

$$\gamma m_\pi v^2 - 2\frac{vh\nu_1}{c}\cos\theta_1 = \gamma m_\pi c^2 - 2\frac{ch\nu_1}{c} \tag{0.22}$$

Esta equação pode ser reescrita como

$$\gamma m_\pi(v^2 - c^2) = 2\frac{h\nu_1}{c}(v\cos\theta_1 - c) \tag{0.23}$$

$$\gamma m_\pi(c^2 - v^2) = 2h\nu_1(1 - \frac{v}{c}\cos\theta_1) \tag{0.24}$$

Note que

$$\gamma^2 = \frac{1}{1 - v^2/c^2} = \frac{c^2}{c^2 - v^2} \Rightarrow c^2 - v^2 = c^2/\gamma^2 \tag{0.25}$$

Portanto:

$$\frac{m_\pi c^2}{\gamma} = 2h\nu_1(1 - \frac{v}{c}\cos\theta_1) \tag{0.26}$$

Assim, isolando a energia do fóton 1:

$$E_{\gamma 1} = h\nu_1 = \frac{m_\pi c^2}{2\gamma(1 - \frac{v}{c}\cos\theta_1)} \tag{0.27}$$

Substituindo na equação (0.4):

$$\gamma m_\pi c^2 = \frac{m_\pi c^2}{2\gamma(1 - \frac{v}{c}\cos\theta_1)} + h\nu_2 \tag{0.28}$$

$$E_{\gamma 2} = h\nu_2 = m_\pi c^2\left[\gamma - \frac{1}{2\gamma(1 - \frac{v}{c}\cos\theta_1)}\right] = \frac{m_\pi c^2}{\gamma}\left[\gamma^2 - \frac{1}{2(1 - \frac{v}{c}\cos\theta_1)}\right] \tag{0.29}$$

Mostrando a energia de cada fóton.

EXERCICIO 1

Prove a equação abaixo:

$$E_T = \sqrt{s} = \sqrt{{m_1}^2 + {m_2}^2 + 2{E_1}^{lab} m_2} \tag{0.30}$$

Solução: Para este exercícios serão usadas as seguintes relações:

$$p^2 = E^2 - |\mathbf{p}^2| = m^2 \tag{0.31}$$

$$p_1 p_2 = E_1 E_2 - \mathbf{p_1} \cdot \mathbf{p_2} \tag{0.32}$$

Onde p_1 e p_2 são os quadrimomenta das partículas, E_1 e E_2 suas energias e $\mathbf{p_1}$ e $\mathbf{p_2}$ seus momenta.

Da definição da variável de Mandelstam s:

$$s = (p_1 + p_2)^2 = {p_1}^2 + 2p_1 p_2 + {p_2}^2 \tag{0.33}$$

Assim, para um experimento de alvo fixo ($\mathbf{p_2} = 0$), temos:

$$s = {p_1}^2 + 2(E_1 E_2 - 0) + {p_2}^2 \tag{0.34}$$

Usando a relação (0.31), podemos escrever:

$$s = {m_1}^2 + 2E_1 E_2 + {m_2}^2 \tag{0.35}$$

Uma vez que para o alvo fixo, ${p_2}^2 = {m_2}^2 = {E_2}^2 - 0$. Assim, tomando a raiz dos dois lados da equação, chegamos à equação do problema.

EXERCICIO 2

Considerando a aproximação ${E_1}^{lab} \gg m_1, m_2$, provar:

$$E_T \approx \sqrt{s} \approx \sqrt{2{E_1}^{lab} m_2} \tag{0.36}$$

Solução: Como no exercício anterior, usaremos as relações

$$p^2 = E^2 - |\mathbf{p}^2| = m^2 \tag{0.37}$$

$$p_1 p_2 = E_1 E_2 - \mathbf{p_1} \cdot \mathbf{p_2} \tag{0.38}$$

Da definição da variável de Mandelstam s:

$$s = (p_1 + p_2)^2 = {p_1}^2 + 2p_1 p_2 + {p_2}^2 \tag{0.39}$$

Usando a relação (0.37), e considerando o alvo fixo ($\mathbf{p_2} = 0$, ${p_2}^2 = {m_2}^2 = {E_2}^2$), temos:

$$s = {m_1}^2 + 2(E_1 E_2 - 0) + {m_2}^2 \tag{0.40}$$

$$s = {m_1}^2 + m_2(2E_1 + m_2) \tag{0.41}$$

O termo m_2 somado a E_1 é desprezível devido à aproximação do problema.

$$s = {m_1}^2 + 2m_2 E_1 \tag{0.42}$$

Do mesmo modo, o termo ${m_1}^2$ somado também é desprezível. Assim, tomando a raiz dos dois lados chegamos à equação do problema.

EXERCICIO 3

Prove a equação abaixo:

$$E_T = \sqrt{s} = \sqrt{{m_1}^2 + {m_2}^2 + 2E_1 E_2 (1 - \beta_1 \beta_2 \cos\theta)} \tag{0.43}$$

Solução: Usando as mesmas relações dos problemas anteriores, partimos da definição de s:

$$s = (p_1 + p_2)^2 = {p_1}^2 + 2p_1 p_2 + {p_2}^2 \tag{0.44}$$

$$s = {m_1}^2 + 2(E_1 E_2 - \mathbf{p_1} \cdot \mathbf{p_2}) + {m_2}^2 \tag{0.45}$$

Efetuando o produto vetorial:

$$s = {m_1}^2 + 2(E_1 E_2 - |\mathbf{p_1}||\mathbf{p_2}| \cos\theta) + {m_2}^2 \tag{0.46}$$

Usando a definição de $\beta = \mathbf{p}/E$:

$$s = {m_1}^2 + 2(E_1 E_2 - \beta_1 E_1 \beta_2 E_2 \cos\theta) + {m_2}^2 \tag{0.47}$$

Que pode ser reescrito como

$$s = {m_1}^2 + {m_2}^2 + 2E_1E_2(1 - \beta_1\beta_2 \cos\theta) \tag{0.48}$$

Tomando a raiz, chega-se a equação do problema.

EXERCICIO 4

Considerando $m_1 = m_2$ e $\mathbf{p_1} = -\mathbf{p_2}$, provar:

$$E_T = \sqrt{s} = 2E_1 \tag{0.49}$$

Solução: Usando as mesmas relações dos problemas anteriores, partimos da definição de s:

$$s = (p_1 + p_2)^2 = {p_1}^2 + 2p_1p_2 + {p_2}^2 \tag{0.50}$$

$$s = {m_1}^2 + 2(E_1E_2 - \mathbf{p_1} \cdot \mathbf{p_2}) + {m_2}^2 \tag{0.51}$$

Efetuando o produto vetorial:

$$s = {m_1}^2 + 2(E_1E_2 - |\mathbf{p_1}||\mathbf{p_2}| \cos\theta) + {m_2}^2 \tag{0.52}$$

Se $p_1 = -p_2$, o ângulo entre eles deve ser π, e assim, $\cos\theta = -1$. Usando que $m_1 = m_2$ e, por consequência, $E_1 = E_2$:

$$s = 2{m_1}^2 + 2{E_1}^2 + 2|{\mathbf{p_1}}^2| \tag{0.53}$$

Usando que $E^2 = m^2 + |\mathbf{p}^2|$, temos:

$$s = 4{E_1}^2 \tag{0.54}$$

Tomando a raiz desta equação se chega a equação do problema.

EXERCICIO 5

Um feixe de prótons com momentum de 100 GeV atinge um alvo fixo de hidrogênio.

(a) Qual é a energia de centro de massa para esta interação?

Solução: Usando a equação encontrada para um experimento de alvo fixo:

$$E_T = \sqrt{s} = \sqrt{{m_1}^2 + {m_2}^2 + 2{E_1}^{lab} m_2} \tag{0.55}$$

E usando $p_1 = 100$ GeV como o momentum do feixe, $m_1 = 0,938$ GeV como a massa do próton e $m_2 \approx m_1$ para a massa do hidrogênio, temos:

$${E_1}^{lab} = \sqrt{{m_1}^2 + {p_1}^2} \tag{0.56}$$

Substituindo na equação anterior e usando $m_1 \approx m_2$

$$\sqrt{s} = \sqrt{2{m_1}^2 + 2\sqrt{{m_1}^2 + {p_1}^2}\, m_1} \tag{0.57}$$

Substituindo os valores:

$$\sqrt{s} = \sqrt{2(0,938 \text{ GeV})^2 + 2(0,938 \text{ GeV})\sqrt{(0,938 \text{ GeV})^2 + (100 \text{ GeV})^2}} = 13,761 \text{ GeV} \tag{0.58}$$

(b) Qual seria a energia do feixe necessária para atingir a mesma energia do LHC?

Solução: A energia do LHC é da casa de 6,5 TeV por feixe. substituindo na equação:

$$E_{LHC} = \sqrt{{m_1}^2 + {m_2}^2 + 2{E_1}^{lab} m_2} \tag{0.59}$$

Isolando ${E_1}^{lab}$ e usando $m_1 \approx m_2$:

$$2{E_1}^{lab} m_1 = E_{LHC}^2 + 2{m_1}^2 \tag{0.60}$$

$${E_1}^{lab} = \frac{E_{LHC}^2 + 2{m_1}^2}{2m_1} \tag{0.61}$$

Substituindo os valores:

$$E_1{}^{lab} = \frac{(3,5 \text{ TeV})^2 + 2(0,938 \times 10^{-3} \text{ TeV})^2}{2(0,938 \times 10^{-3} \text{ TeV})} = 6,231 \text{ PeV} \tag{0.62}$$

(c) Quais os colisores assimétricos usados atualmente e porque não usar um colisor mais potente?

Solução: Pode-se citar o J-PARC, no japão, como exemplo de um acelerador de hádrons de alta intensidade e o Tevatron, nos EUA, como exemplo de acelerador de elétrons e hádrons de baixa intensidade. Como a energia do centro de massa cresce com a raiz da energia do feixe, usar colisores mais potentes acaba sendo muito difícil. Os colisores simétricos são muito mais capazes de atingir altas energias do centro de massa.

EXERCICIO 5 a

Encontre a energia de centro de massa para o experimento de alvo fixo e um colisor de partículas cujo feixe de prótons tem uma energia de 3,5 TeV.

Solução: Usando a equação encontrada para um experimento de alvo fixo:

$$E_T = \sqrt{s} = \sqrt{m_1{}^2 + m_2{}^2 + 2E_1{}^{lab} m_2} \tag{0.63}$$

E usando $m_1 = 0,938$ GeV como a massa do próton, $E_1{}^{lab} = 3,5$ TeV como a massa do próton e supondo um alvo de próton fixo ($m_2 = m_1$), temos:

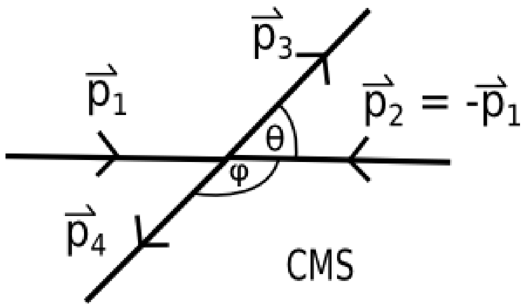
$$E_T = \sqrt{s} = \sqrt{2m_1{}^2 + 2m_1 E_1{}^{lab}} \tag{0.64}$$

Substituindo os valores:

$$E_T = \sqrt{2 \times (0,938 \times 10^{-3} \text{ TeV})^2 + 2 \times (0,938 \times 10^{-3} \text{ TeV}) \times (3,5 \text{ TeV})} = 0,081 \text{ TeV} \tag{0.65}$$

EXERCICIO 6

Em espalhamento elástico do tipo: A+A =A+A, quais são as variáveis de Mandelstam?



Solução: Partimos da definição das variáveis de Mandelstam. Para a variável s:

$$s = (p_1 + p_2)^2 = p_1{}^2 + p_2{}^2 + 2p_1 p_2 \tag{0.66}$$

Para o caso de partículas idênticas, temos $m_1 = m_2$, $\mathbf{p_1} = -\mathbf{p_2}$, portanto o ângulo entre os momenta é π, e $\cos\theta = -1$. Usando $m^2 = p^2$ temos:

$$s = 2m_1{}^2 + 2(E_1E_2 - \mathbf{p_1} \cdot \mathbf{p_2}) \tag{0.67}$$

Efetuando o produto vetorial:

$$s = 2m_1{}^2 + 2(E_1E_2 + |\mathbf{p_1}||\mathbf{p_2}|) \tag{0.68}$$

Sabendo que as partículas são idênticas, suas energias devem ser iguais ($E_1 = E_2$), assim como os módulos dos momenta. Assim, a relação $E^2 = m^2 + |\mathbf{p}|^2$ pode ser usada:

$$s = 2m_1{}^2 + 2[(m_1{}^2 + |\mathbf{p_1}|^2) + |\mathbf{p_1}|^2] \tag{0.69}$$

Simplificando temos

$$s = 4({m_1}^2 + |\mathbf{p_1}|^2) \tag{0.70}$$

Para a variável t:

$$t = (p_1 - p_3)^2 = {p_1}^2 + {p_2}^2 - 2p_1p_3 \tag{0.71}$$

Usando $m_1 = m_3$ e $m^2 = p^2$ temos:

$$t = 2{m_1}^2 - 2(E_1E_3 - |\mathbf{p_1}||\mathbf{p_3}|\cos\theta) \tag{0.72}$$

Usando $E_1 = E_3$, e $|\mathbf{p_1}| = |\mathbf{p_3}|$:

$$t = 2{m_1}^2 - 2E_1^2 + 2|\mathbf{p_1}|^2\cos\theta \tag{0.73}$$

Aplicando a relação $E^2 = m^2 + |\mathbf{p}|^2$

$$t = -2|\mathbf{p_1}|^2 + 2|\mathbf{p_1}|^2\cos\theta \tag{0.74}$$

Simplificando, temos

$$t = -2|\mathbf{p_1}|^2(1 - \cos\theta) \tag{0.75}$$

Para a variável u:

$$u = (p_1 - p_4)^2 = {p_1}^2 + {p_4}^2 - 2p_1p_4 \tag{0.76}$$

Usando $m_1 = m_4$ e $m^2 = p^2$ temos:

$$u = 2{m_1}^2 - 2(E_1E_4 - |\mathbf{p_1}||\mathbf{p_4}|\cos\phi) \tag{0.77}$$

Usando $E_1 = E_4$, e $|\mathbf{p_1}| = |\mathbf{p_4}|$:

$$u = 2{m_1}^2 - 2E_1^2 + 2|\mathbf{p_1}|^2\cos\phi \tag{0.78}$$

Aplicando a relação $E^2 = m^2 + |\mathbf{p}|^2$

$$u = -2|\mathbf{p_1}|^2 + 2|\mathbf{p_1}|^2\cos\phi \tag{0.79}$$

Simplificando, temos

$$u = -2|\mathbf{p_1}|^2(1 - \cos\phi) \tag{0.80}$$

Note que $\phi + \theta = \pi$. Assim, $\cos\phi = \cos\pi - \theta = -\cos\theta$. Assim, podemos escrever:

$$u = -2|\mathbf{p_1}|^2(1 + \cos\theta) \tag{0.81}$$

EXERCICIO 7

Prove a relação abaixo:

$$s + t + u = {m_1}^2 + {m_2}^2 + {M_1}^2 + {M_2}^2 \tag{0.82}$$

Solução: Começamos redefinindo as variáveis $M_1 = -m_3$ e $M_2 = -m_4$, de modo que ${M_1}^2 = {m_3}^2$ e ${M_2}^2 = {m_4}^2$. Usando a relação:

$$p^2 = m^2 \tag{0.83}$$

E a conservação de momentum

$$p_1 + p_2 = p_3 + p_3 \tag{0.84}$$

Partimos da definição das variáveis de Mandelstam:

$$s = (p_1 + p_2)^2 = {p_1}^2 + {p_2}^2 + 2p_1p_2 \tag{0.85}$$

$$t = (p_1 - p_3)^2 = {p_1}^2 + {p_3}^2 - 2p_1p_3 \tag{0.86}$$

$$s = (p_1 - p_4)^2 = {p_1}^2 + {p_4}^2 - 2p_1p_4 \tag{0.87}$$

Somando as três equações, temos:

$$s + t + u = {p_1}^2 + {p_2}^2 + {p_3}^2 + {p_4}^2 + 2{p_1}^2 + 2p_1p_2 - 2p_1p_3 - 2p_1p_4 \tag{0.88}$$

isolando $2p_1$ nos últimos termos:

$$s + t + u = {p_1}^2 + {p_2}^2 + {p_3}^2 + {p_4}^2 + 2p_1(p_1 + p_2 - p_3 - p_4) \tag{0.89}$$

Note que devido à conservação do momento, o termo entre parênteses se anula. Substituindo a relação (0.83):

$$s + t + u = {m_1}^2 + {m_2}^2 + {m_3}^2 + {m_4}^2 \tag{0.90}$$

Voltando nas variáveis definidas, temos

$$s + t + u = {m_1}^2 + {m_2}^2 + {M_1}^2 + {M_2}^2 \tag{0.91}$$

EXERCICIO 8 a

Exercício não resolvido

EXERCICIO 8 b

Mostre em detalhes que o decaimento de dois corpos pode ser descrito por:

$$E_1 = \frac{M^2 - {m_2}^2 + {m_1}^2}{2M} \tag{0.92}$$

$$|\mathbf{p_1}| = |\mathbf{p_2}| = \frac{[(M^2 - (m_1 + m_2)^2)(M^2 - (m_1 - m_2)^2)]^{1/2}}{2M} \tag{0.93}$$

Solução: Pela conservação do momentum:

$$P = p_1 + p_2 \Rightarrow p_2 = P - p_1 \tag{0.94}$$

Tomando o quadrado da equação:

$${p_2}^2 = P^2 + {p_1}^2 - 2Pp_1 \tag{0.95}$$

Usando que $p_1 p_2 = E_1 E_2 - \mathbf{p_1} \cdot \mathbf{p_2}$ e sabendo que no referencial da partícula P, o quadrimomentum é dado por $P = (M, 0)$. Isto implica que $\mathbf{p_1} + \mathbf{p_2} = 0$, e assim, $|\mathbf{p_1}| = |\mathbf{p_2}|$. temos

$${p_2}^2 = P^2 + {p_1}^2 - 2(EE_1 - 0) \tag{0.96}$$

Usando as relações das massas $m^2 = p^2$ e pro caso de P, $E^2 = m^2$:

$${m_2}^2 = M^2 + {m_1}^2 - 2ME_1 \tag{0.97}$$

Isolando a energia:

$$E_1 = \frac{M^2 + {m_1}^2 - {m_2}^2}{2M} \tag{0.98}$$

Que é a primeira equação do problema. Sabendo que $E^2 = |\mathbf{p}|^2 + m^2$, podemos isolar o módulo do momentum e substituir a equação encontrada para a energia:

$$|\mathbf{p_1}| = \sqrt{E_1^2 - {m_1}^2} \tag{0.99}$$

$$|\mathbf{p_1}| = \sqrt{\left(\frac{M^2 + {m_1}^2 - {m_2}^2}{2M}\right)^2 - {m_1}^2} \tag{0.100}$$

É possível fatorar o denominador do primeiro termo dentro da raiz

$$|\mathbf{p_1}| = \frac{1}{2M}\sqrt{(M^2 + {m_1}^2 - {m_2}^2)^2 - 4M^2{m_1}^2} \tag{0.101}$$

Expandindo o termo entre parênteses:

$$|\mathbf{p_1}| = \frac{1}{2M}\sqrt{M^4 + {m_1}^4 + {m_2}^4 + 2M^2{m_1}^2 - 2{m_1}^2{m_2}^2 - 2M^2{m_2}^2 - 4M^2{m_1}^2} \tag{0.102}$$

Somando os termos com $M^2{m_1}^2$, temos

$$|\mathbf{p_1}| = \frac{1}{2M}\sqrt{M^4 + {m_1}^4 + {m_2}^4 - 2M^2{m_1}^2 - 2{m_1}^2{m_2}^2 - 2M^2{m_2}^2} \tag{0.103}$$

Somando e subtraindo um termo $2M^2m_1m_2$:

$$|\mathbf{p_1}| = \frac{1}{2M}\sqrt{M^4 + {m_1}^4 + {m_2}^4 + 2M^2m_1m_2 - 2M^2m_1m_2 - 2M^2{m_1}^2 - 2{m_1}^2{m_2}^2 - 2M^2{m_2}^2} \quad (0.104)$$

Fatorando o termo $-M^2$:

$$|\mathbf{p_1}| = \frac{1}{2M}\sqrt{M^4 + {m_1}^4 + {m_2}^4 - M^2(-2m_1m_2 + 2m_1m_2 + 2{m_1}^2 + 2{m_2}^2) - 2{m_1}^2{m_2}^2} \quad (0.105)$$

Reordenando os termos, temos:

$$|\mathbf{p_1}| = \frac{1}{2M}\sqrt{M^4 - M^2[({m_1}^2 + 2m_1m_2 + {m_2}^2) + ({m_1}^2 - 2m_1m_2 + {m_2}^2)] + ({m_1}^4 - 2{m_1}^2{m_2}^2 + {m_2}^4)} \quad (0.106)$$

E contraindo os produtos notáveis:

$$|\mathbf{p_1}| = \frac{1}{2M}\sqrt{M^4 - M^2[(m_1 + m_2)^2 + (m_1 - m_2)^2] + ({m_1}^2 - {m_2}^2)^2} \quad (0.107)$$

Note que é possível expandir o último termo como:

$$|\mathbf{p_1}| = \frac{1}{2M}\sqrt{M^4 - M^2(m_1 + m_2)^2 - M^2(m_1 - m_2)^2 + [(m_1 + m_2)(m_1 - m_2)]^2} \quad (0.108)$$

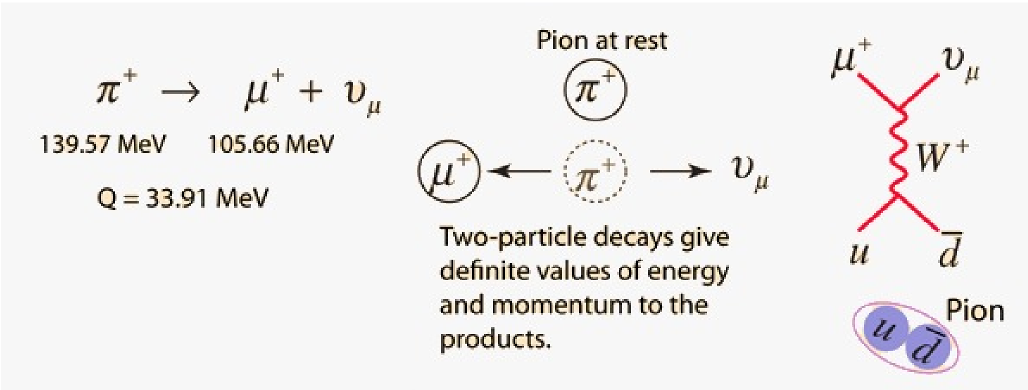
Que pode ser visto como uma expansão de

$$|\mathbf{p_1}| = \frac{\sqrt{(M^2 - (m_1 + m_2)^2)(M^2 - (m_1 - m_2)^2)}}{2M} \quad (0.109)$$

Que é a equação do problema

EXERCICIO 9

Determine a energia e momentum para os seguintes decaimentos de dois corpos:



Solução: A figura mostra o decaimento de um píon em um múon e um neutrino. As massas de cada partícula são:

$$m_\pi = 139,57 \text{ MeV} \quad (0.110)$$

$$m_\mu = 105,66 \text{ MeV} \quad (0.111)$$

$$m_\nu \approx 0 \quad (0.112)$$

Usando a equação encontrada para a energia no problema anterior, temos:

$$E_\mu = \frac{{m_\pi}^2 - {m_\nu}^2 + {m_\mu}^2}{2m_\pi} \quad (0.113)$$

Substituindo os valores:

$$E_\mu = \frac{(139,57\ \text{MeV})^2 - 0 + (105,66\ \text{MeV})^2}{2 \times (139,57\ \text{MeV})} = 109,78\ \text{MeV} \tag{0.114}$$

E para o momentum, já desconsiderando a massa do neutrino:

$$|\mathbf{p}_\mu| = \frac{1}{2m_\pi}\left[({m_\pi}^2 - {m_\mu}^2)({m_\pi}^2 - {m_\mu}^2)\right]^{1/2} = \frac{({m_\pi}^2 - {m_\mu}^2)}{2m_\pi} \tag{0.115}$$

Substituindo os valores:

$$|\mathbf{p}_\mu| = \frac{(139,57\ \text{MeV})^2 - (105,66\ \text{MeV})^2}{2(139,57\ \text{MeV})} = 29,79\ \text{MeV} \tag{0.116}$$

Sabendo que $|\mathbf{p}_\mu| = |\mathbf{p}_\nu|$, como demonstrado no exercício anterior, temos que $|\mathbf{p}_\nu| = 29{,}79$ MeV. Uma vez que a massa do neutrino é desprezível, sua energia é dada somente pelo seu momentum, portanto $E_\nu = 29{,}79$ MeV.

EXERCICIO 10

Prove o decaimento de três corpos.

Solução: Primeiro é necessário fazer algumas definições:

$$p_{ij} = p_i + p_j \tag{0.117}$$

$${m_{ij}}^2 = {p_{ij}}^2 \tag{0.118}$$

Disso, temos

$${m_{12}}^2 + {m_{23}}^2 + {m_{13}}^2 = M^2 + {m_1}^2 + {m_2}^2 + {m_3}^2 \tag{0.119}$$

Pela conservação do momentum:

$$P = p_1 + p_2 + p_3 \Rightarrow (p_1 + p_2)^2 = (P - p_3)^2 \tag{0.120}$$

No referencial de P, usando as definições, podemos escrever

$${m_{12}}^2 = (P - p_3)^2 = P^2 + {m_3}^2 - 2(EE_3 - 0) \tag{0.121}$$

Usando que $m^2 = p^2$, e no caso de P, $P^2 = M^2$:

$${m_{12}}^2 = M^2 + {m_3}^2 - 2ME_3 \tag{0.122}$$

Isolando a energia:

$$E_3 = \frac{M^2 + {m_3}^2 - {m_{12}}^2}{2M} \tag{0.123}$$

Esta equação pode ser substituída na equação do momentum:

$$|\mathbf{p_3}| = \sqrt{{E_3}^2 - {m_3}^2} = \sqrt{\left(\frac{M^2 + {m_3}^2 - {m_{12}}^2}{2M}\right)^2 - {m_3}^2} \tag{0.124}$$

É possível fatorar o denominador do primeiro termo dentro da raiz

$$|\mathbf{p_3}| = \frac{1}{2M}\sqrt{(M^2 + {m_3}^2 - {m_{12}}^2)^2 - 4M^2{m_3}^2} \tag{0.125}$$

Expandindo o termo entre parênteses:

$$|\mathbf{p_3}| = \frac{1}{2M}\sqrt{M^4 + {m_3}^4 + {m_{12}}^4 + 2M^2{m_3}^2 - 2{m_3}^2{m_{12}}^2 - 2M^2{m_{12}}^2 - 4M^2{m_3}^2} \tag{0.126}$$

Somando os termos com $M^2{m_3}^2$, temos

$$|\mathbf{p_3}| = \frac{1}{2M}\sqrt{M^4 + {m_3}^4 + {m_{12}}^4 - 2M^2{m_3}^2 - 2{m_3}^2{m_{12}}^2 - 2M^2{m_{12}}^2} \tag{0.127}$$

Somando e subtraindo um termo $2M^2m_3m_{12}$:

$$|\mathbf{p_3}| = \frac{1}{2M}\sqrt{M^4 + m_3{}^4 + m_{12}{}^4 + 2M^2m_3m_{12} - 2M^2m_3m_{12} - 2M^2m_3{}^2 - 2m_3{}^2m_{12}{}^2 - 2M^2m_{12}{}^2} \quad (0.128)$$

Fatorando o termo $-M^2$:

$$|\mathbf{p_3}| = \frac{1}{2M}\sqrt{M^4 + m_3{}^4 + m_{12}{}^4 - M^2(-2m_3m_{12} + 2m_3m_{12} + 2m_3{}^2 + 2m_{12}{}^2) - 2m_3{}^2m_{12}{}^2} \quad (0.129)$$

Reordenando os termos, temos:

$$|\mathbf{p_3}| = \frac{1}{2M}\sqrt{M^4 - M^2[(m_3{}^2 + 2m_3m_{12} + m_{12}{}^2) + (m_3{}^2 - 2m_3m_{12} + m_{12}{}^2)] + (m_3{}^4 - 2m_3{}^2m_{12}{}^2 + m_{12}{}^4)} \quad (0.130)$$

E contraindo os produtos notáveis:

$$|\mathbf{p_3}| = \frac{1}{2M}\sqrt{M^4 - M^2[(m_3 + m_{12})^2 + (m_3 - m_{12})^2] + (m_3{}^2 - m_{12}{}^2)^2} \quad (0.131)$$

Note que é possível expandir o último termo como:

$$|\mathbf{p_3}| = \frac{1}{2M}\sqrt{M^4 - M^2(m_3 + m_{12})^2 - M^2(m_3 - m_{12})^2 + [(m_3 + m_{12})(m_3 - m_{12})]^2} \quad (0.132)$$

Que pode ser visto como uma expansão de

$$|\mathbf{p_3}| = \frac{\sqrt{(M^2 - (m_3 + m_{12})^2)(M^2 - (m_3 - m_{12})^2)}}{2M} \quad (0.133)$$

Que é a equação do problema. Note que $(m_3 - m_{12})^2 = (m_{12} - m_3)^2$.

EXERCICIO 10 a

Exercício não resolvido

EXERCICIO 11

Prove a equação abaixo:

$$M = \sqrt{\left(\sum E_i\right)^2 - \left(\sum \mathbf{p}_i\right)^2} \quad (0.134)$$

Solução: Para um sistema de n partículas, podemos definir:

$$E_{total} = \sum E_i \quad (0.135)$$

$$\mathbf{p}_{total} = \sum \mathbf{p}_i \quad (0.136)$$

Sabendo que energia e momentum se conservam, podemos também definir:

$$P_{total} = (E_{total}, \mathbf{p}_{total}) = \sum p_i \quad (0.137)$$

Uma vez que P_{total} é uma quantidade invariante, podemos usar a relação $p^2 = m^2$ para encontrar a massa invariante:

$$M^2 = P_{total}P_{total} = E_{total}E_{total} - \mathbf{p}_{total}\mathbf{p}_{total} \quad (0.138)$$

Tirando a raiz dos dois lados:

$$M = \sqrt{E_{total}{}^2 - \mathbf{p}_{total}{}^2} \quad (0.139)$$

Substituindo os somatórios definidos no início:

$$M = \sqrt{\left(\sum E_i\right)^2 - \left(\sum \mathbf{p}_i\right)^2} \quad (0.140)$$