Introdução à Análise de dados em FAE **(19/09/2021)**

Lista 5: Estatística

Professores: Sandro Souza, Sheila Da Silva, Eliza Da Costa, Dilson Damião *Name:* Vitor Souza Ramos

EXERCICIO 2

Item 1: Para o caso $u = x \pm y$, deduzir:

$$\sigma_{\bar{u}} = \sqrt{\sigma_{\bar{x}}^2 + \sigma_{\bar{y}}^2 + 2r\sigma_{xy}} \tag{2.1}$$

Solução: Da equação do erro padrão:

$$\sigma_{\bar{u}}^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2\Bigg|_{\bar{x},\bar{y}} \sigma_{\bar{x}}^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2\Bigg|_{\bar{x},\bar{y}} \sigma_{\bar{y}}^2 + \frac{2}{N}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\Bigg|_{\bar{x},\bar{y}} \sigma_{xy} \tag{2.2}$$

Para este caso temos $\frac{\partial f}{\partial x} = 1$, $\frac{\partial f}{\partial y} = \pm 1$, portanto

$$\sigma_{\bar{u}}^2 = \sigma_{\bar{x}}^2 + \sigma_{\bar{y}}^2 \pm \frac{2}{N}\sigma_{xy} \tag{2.3}$$

Do coeficiente de correlação linear de Pearson, temos:

$$r = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \sigma_y} \Rightarrow \sigma_{xy} = r\sigma_x\sigma_y \tag{2.4}$$

Assim, temos

$$\sigma_{\bar{u}}^2 = \sigma_{\bar{x}}^2 + \sigma_{\bar{y}}^2 \pm 2r\frac{\sigma_x}{\sqrt{N}}\frac{\sigma_y}{\sqrt{N}} \tag{2.5}$$

Sabendo que $\frac{\sigma_x}{\sqrt{N}} = \sigma_{\bar{x}}$, temos

$$\sigma_{\bar{u}} = \sqrt{\sigma_{\bar{x}}^2 + \sigma_{\bar{y}}^2 \pm 2r\sigma_{\bar{x}}\sigma_{\bar{y}}} \tag{2.6}$$

Item 2: Para os casos $u = xy$ e $u = x/y$, deduzir:

$$\frac{\sigma_{\bar{u}}}{|\bar{u}|} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_{\bar{x}}}{\bar{x}}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{\bar{y}}}{\bar{y}}\right)^2 \pm 2r\left(\frac{\sigma_{\bar{x}}}{\bar{x}}\right)\left(\frac{\sigma_{\bar{y}}}{\bar{y}}\right)} \tag{2.7}$$

Para o caso $u = xy$, partindo da equação (2.2) e usando $\frac{\partial f}{\partial x} = y$, $\frac{\partial f}{\partial y} = x$, temos

$$\sigma_{\bar{u}}^2 = \bar{y}^2\sigma_{\bar{x}}^2 + \bar{x}^2\sigma_{\bar{y}}^2 \pm \frac{2}{N}\sigma_{xy}\bar{x}\bar{y} \tag{2.8}$$

dividindo esta equação por $(\bar{x}\bar{y})^2 = \bar{u}^2$ e usando a equação (2.4), temos:

$$\frac{\sigma_{\bar{u}}^2}{\bar{u}^2} = \left(\frac{\sigma_{\bar{x}}}{\bar{x}}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{\bar{y}}}{\bar{y}}\right)^2 + 2r\frac{\sigma_{\bar{x}}}{\bar{x}}\frac{\sigma_{\bar{y}}}{\bar{y}} \tag{2.9}$$

Tirando a raiz desta equação encontramos a equação do problema.

Para o caso $u = x/y$, partindo da equação (2.2) e usando $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{y}$, $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{-x}{y^2}$, temos

$$\sigma_{\bar{u}}^2 = \frac{1}{\bar{y}^2}\sigma_{\bar{x}}^2 + \left(\frac{-\bar{x}}{\bar{y}^2}\right)^2\sigma_{\bar{y}}^2 \pm \frac{2}{N}\sigma_{xy}\frac{-\bar{x}}{\bar{y}^3} \tag{2.10}$$

dividindo esta equação por $(\bar{x}/\bar{y})^2 = \bar{u}^2$ e usando a equação (2.4), temos:

$$\frac{\sigma_{\bar{u}}^2}{\bar{u}^2} = \left(\frac{\sigma_{\bar{x}}}{\bar{x}}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{\bar{y}}}{\bar{y}}\right)^2 - 2r\frac{\sigma_{\bar{x}}}{\bar{x}}\frac{\sigma_{\bar{y}}}{\bar{y}} \tag{2.11}$$

Tirando a raiz desta equação encontramos a equação do problema.

EXERCICIO 7

Solução:
Existem 2587 alunos e 2852 alunas, totalizando 5419 alunos. Nos cursos de tecnologia existem 1291 alunos e 547 alunas. Assim a probabilidade de se escolher um aluno do grupo de tecnologia é de $\frac{1291}{5419}$, em torno de 24%.

EXERCICIO 8

Solução:
Temos:

$$P(A) = 0,15 \Rightarrow \text{ Prob. do táxi ser azul} \tag{8.1}$$
$$P(V) = 0,85 \Rightarrow \text{ Prob. do táxi ser verde} \tag{8.2}$$
$$P(T|A) = 0,8 \Rightarrow \text{ Prob. da testemunha dizer que é azul dado que o táxi é azul} \tag{8.3}$$
$$\tag{8.4}$$

Pode-se inferir que:

$$P(T|V) = 0,2 \Rightarrow \text{ Prob. da testemunha dizer que é azul dado que o táxi é verde} \tag{8.5}$$

Assim, usando o fator de Bayes:

$$\frac{P(A|T)}{P(V|T)} = \frac{P(T|A)}{P(T|V)}\frac{P(A)}{P(V)} \tag{8.6}$$

Encontramos:

$$\frac{P(A|T)}{P(V|T)} = \frac{0,8}{0,2}\frac{0,15}{0,85} = \frac{12}{17} \tag{8.7}$$

Sabendo que $P(A|T) + P(V|T) = 1$, temos:

$$P(A|T) = \frac{12}{12+17} \approx 41\%. \tag{8.8}$$

EXERCICIO 9

Solução:
Temos:

$$P(C) = 0,008 \Rightarrow \text{ Prob. de haver câncer} \tag{9.1}$$
$$P(S) = 0,992 \Rightarrow \text{ Prob. de ser saudável} \tag{9.2}$$
$$P(P|S) = 0,07 \Rightarrow \text{ Prob. de teste positivo dado que é saudável} \tag{9.3}$$
$$P(N|C) = 0,1 \Rightarrow \text{ Prob. de teste negativo dado que há câncer} \tag{9.4}$$
$$\tag{9.5}$$

Assim, usando o fator de Bayes:

$$\frac{P(C|P)}{P(S|P)} = \frac{P(P|C)}{P(P|S)}\frac{P(C)}{P(S)} \tag{9.6}$$

Encontramos:

$$\frac{P(A|T)}{P(V|T)} = \frac{0,9}{0,07}\frac{0,008}{0,992} = \frac{45}{434} \tag{9.7}$$

Sabendo que $P(C|P) + P(S|P) = 1$, temos:

$$P(C|P) = \frac{45}{45+434} \approx 9,4\%. \tag{9.8}$$

EXERCICIO 10

Solução:

$$P(III) = \frac{8}{29} \Rightarrow \text{ Prob. de vir da urna III} \tag{10.1}$$

$$P(P) = \frac{16}{29} \Rightarrow \text{ Prob. de ser preta} \tag{10.2}$$

$$P(P|III) = \frac{4}{8} \Rightarrow \text{ Prob. de ser preta dado que veio da urna III} \tag{10.3}$$

$$\tag{10.4}$$

Usando o teorema o Teorema de Bayes, temos

$$P(III|P) = \frac{P(P|III) \times P(III)}{P(P)} = \frac{\frac{4}{8}\frac{8}{29}}{\frac{16}{29}} = 25\% \tag{10.5}$$

EXERCICIO 11

Solução:
Assumindo uma região de dimensão a entre $-a/2$ e $a/2$, o valor médio da posição é dado por:

$$< x >= \int_{-a/2}^{a/2} x \sin^2\left(\frac{\pi x}{a}\right) dx = 0 \tag{11.1}$$

O valor médio quadrático da posição é dado por:

$$< x^2 >= \int_{-a/2}^{a/2} x^2 \sin^2\left(\frac{\pi x}{a}\right) dx = \frac{6+\pi^2}{24\pi^2} a^3 \tag{11.2}$$

Assim, o desvio padrão é dado por:

$$\sigma_x = \sqrt{< x^2 > - < x >^2} = \sqrt{\frac{6+\pi^2}{24\pi^2} a^3} \tag{11.3}$$

EXERCICIO 12

Solução:
Usando a função massa de probabilidade para uma distribuição binomial, temos:

$$B(k|n;p) = \frac{n!}{k!(n-k)!} \times (p)^k \times (1-p)^{n-k} \tag{12.1}$$

Assim, para o caso de 3 sensores com 3 acertos, temos:

$$B(3|3;0,6) = \frac{3!}{3!(3-3)!} \times (0,6)^3 \times (0,4)^{3-3} = 1 \times 0,216 \times 1 = 21,6\% \tag{12.2}$$

Esta equação dá a probabilidade de que 3 sensores sejam atingidos quando existem 3 sensores. Para que haja uma detecção são necessários **ao menos** 3 sensores, então para o caso de 4 sensores, devemos somar as chances de se atingirem 3 sensores e de se atingirem 4:

$$P(4) = B(4|4;0,6) + B(4|4;0,6) \tag{12.3}$$

Temos:

$$P(4) = \frac{4!}{3!(4-3)!} \times (0,6)^3 \times (0,4)^{4-3} + \frac{4!}{4!(4-4)!} \times (0,6)^4 \times (0,4)^{4-4} = 0,3456 + 0,1296 \approx 48\% \tag{12.4}$$

Igualmente, para o caso de 5 sensores, temos:

$$P(3) = B(3|5;0,6) + B(4|5;0,6) + B(4|5;0,6) \tag{12.5}$$

Assim:

$$P(5) = \frac{5!}{3!(5-3)!} \times (0,6)^3 \times (0,4)^{5-3} + \frac{5!}{4!(5-4)!} \times (0,6)^4 \times (0,4)^{5-4} + \frac{5!}{5!(5-5)!} \times (0,6)^5 \times (0,4)^{5-5} \approx 68\% \tag{12.6}$$

EXERCICIO 2

Considerando a aproximação ${E_1}^{lab} \gg m_1, m_2$, provar:

$$E_T \approx \sqrt{s} \approx \sqrt{2{E_1}^{lab} m_2} \tag{12.7}$$

Solução: Como no exercício anterior, usaremos as relações

$$p^2 = E^2 - |\mathbf{p}^2| = m^2 \tag{12.8}$$

$$p_1 p_2 = E_1 E_2 - \mathbf{p_1} \cdot \mathbf{p_2} \tag{12.9}$$

Da definição da variável de Mandelstam s:

$$s = (p_1 + p_2)^2 = {p_1}^2 + 2p_1p_2 + {p_2}^2 \tag{12.10}$$

Usando a relação (12.8), e considerando o alvo fixo ($\mathbf{p_2} = 0$, ${p_2}^2 = {m_2}^2 = {E_2}^2$), temos:

$$s = {m_1}^2 + 2(E_1E_2 - 0) + {m_2}^2 \tag{12.11}$$

$$s = {m_1}^2 + m_2(2E_1 + m_2) \tag{12.12}$$

O termo m_2 somado a E_1 é desprezível devido à aproximação do problema.

$$s = {m_1}^2 + 2m_2E_1 \tag{12.13}$$

Do mesmo modo, o termo ${m_1}^2$ somado também é desprezível. Assim, tomando a raiz dos dois lados chegamos à equação do problema.

EXERCICIO 3

Prove a equação abaixo:

$$E_T = \sqrt{s} = \sqrt{{m_1}^2 + {m_2}^2 + 2E_1E_2(1 - \beta_1\beta_2\cos\theta)} \tag{12.14}$$

Solução: Usando as mesmas relações dos problemas anteriores, partimos da definição de s:

$$s = (p_1 + p_2)^2 = {p_1}^2 + 2p_1p_2 + {p_2}^2 \tag{12.15}$$

$$s = {m_1}^2 + 2(E_1E_2 - \mathbf{p_1} \cdot \mathbf{p_2}) + {m_2}^2 \tag{12.16}$$

Efetuando o produto vetorial:

$$s = {m_1}^2 + 2(E_1E_2 - |\mathbf{p_1}||\mathbf{p_2}|\cos\theta) + {m_2}^2 \tag{12.17}$$

Usando a definição de $\beta = \mathbf{p}/E$:

$$s = {m_1}^2 + 2(E_1E_2 - \beta_1E_1\beta_2E_2\cos\theta) + {m_2}^2 \tag{12.18}$$

Que pode ser reescrito como

$$s = {m_1}^2 + {m_2}^2 + 2E_1E_2(1 - \beta_1\beta_2\cos\theta) \tag{12.19}$$

Tomando a raiz, chega-se a equação do problema.

EXERCICIO 4

Considerando $m_1 = m_2$ e $\mathbf{p_1} = -\mathbf{p_2}$, provar:

$$E_T = \sqrt{s} = 2E_1 \tag{12.20}$$

Solução: Usando as mesmas relações dos problemas anteriores, partimos da definição de s:

$$s = (p_1 + p_2)^2 = {p_1}^2 + 2p_1p_2 + {p_2}^2 \tag{12.21}$$

$$s = {m_1}^2 + 2(E_1E_2 - \mathbf{p_1}\cdot\mathbf{p_2}) + {m_2}^2 \tag{12.22}$$

Efetuando o produto vetorial:

$$s = {m_1}^2 + 2(E_1E_2 - |\mathbf{p_1}||\mathbf{p_2}|\cos\theta) + {m_2}^2 \tag{12.23}$$

Se $p_1 = -p_2$, o ângulo entre eles deve ser π, e assim, $\cos\theta = -1$. Usando que $m_1 = m_2$ e, por consequência, $E_1 = E_2$:

$$s = 2{m_1}^2 + 2{E_1}^2 + 2|{\mathbf{p_1}}^2| \tag{12.24}$$

Usando que $E^2 = m^2 + |\mathbf{p}^2|$, temos:

$$s = 4{E_1}^2 \tag{12.25}$$

Tomando a raiz desta equação se chega a equação do problema.

EXERCICIO 5

Um feixe de prótons com momentum de 100 GeV atinge um alvo fixo de hidrogênio.

(a) Qual é a energia de centro de massa para esta interação?

Solução: Usando a equação encontrada para um experimento de alvo fixo:

$$E_T = \sqrt{s} = \sqrt{{m_1}^2 + {m_2}^2 + 2{E_1}^{lab}m_2} \tag{12.26}$$

E usando $p_1 = 100$ GeV como o momentum do feixe, $m_1 = 0,938$ GeV como a massa do próton e $m_2 \approx m_1$ para a massa do hidrogênio, temos:

$${E_1}^{lab} = \sqrt{{m_1}^2 + {p_1}^2} \tag{12.27}$$

Substituindo na equação anterior e usando $m_1 \approx m_2$

$$\sqrt{s} = \sqrt{2{m_1}^2 + 2\sqrt{{m_1}^2 + {p_1}^2}m_1} \tag{12.28}$$

Substituindo os valores:

$$\sqrt{s} = \sqrt{2(0,938\ \text{GeV})^2 + 2(0,938\ \text{GeV})\sqrt{(0,938\ \text{GeV})^2 + (100\ \text{GeV})^2}} = 13,761\ \text{GeV} \tag{12.29}$$

(b) Qual seria a energia do feixe necessária para atingir a mesma energia do LHC?

Solução: A energia do LHC é da casa de 6,5 TeV por feixe. substituindo na equação:

$$E_{LHC} = \sqrt{{m_1}^2 + {m_2}^2 + 2{E_1}^{lab}m_2} \tag{12.30}$$

Isolando ${E_1}^{lab}$ e usando $m_1 \approx m_2$:

$$2{E_1}^{lab}m_1 = E_{LHC}^2 + 2{m_1}^2 \tag{12.31}$$

$${E_1}^{lab} = \frac{E_{LHC}^2 + 2{m_1}^2}{2m_1} \tag{12.32}$$

Substituindo os valores:

$${E_1}^{lab} = \frac{(3,5\ \text{TeV})^2 + 2(0,938\times10^{-3}\ \text{TeV})^2}{2(0,938\times10^{-3}\ \text{TeV})} = 6,231\ \text{PeV} \tag{12.33}$$

(c) Quais os colisores assimétricos usados atualmente e porque não usar um colisor mais potente?

Solução: Pode-se citar o J-PARC, no japão, como exemplo de um acelerador de hádrons de alta intensidade e o Tevatron, nos EUA, como exemplo de acelerador de elétrons e hádrons de baixa intensidade. Como a energia do centro de massa cresce com a raiz da energia do feixe, usar colisores mais potentes acaba sendo muito difícil. Os colisores simétricos são muito mais capazes de atingir altas energias do centro de massa.

EXERCICIO 5 a

Encontre a energia de centro de massa para o experimento de alvo fixo e um colisor de partículas cujo feixe de prótons tem uma energia de 3,5 TeV.

Solução: Usando a equação encontrada para um experimento de alvo fixo:

$$E_T = \sqrt{s} = \sqrt{{m_1}^2 + {m_2}^2 + 2{E_1}^{lab} m_2} \tag{12.34}$$

E usando $m_1 = 0,938$ GeV como a massa do próton, ${E_1}^{lab} = 3,5$ TeV como a massa do próton e supondo um alvo de próton fixo ($m_2 = m_1$), temos:

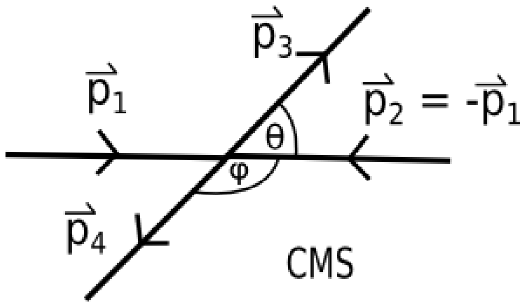
$$E_T = \sqrt{s} = \sqrt{2{m_1}^2 + 2m_1{E_1}^{lab}} \tag{12.35}$$

Substituindo os valores:

$$E_T = \sqrt{2 \times (0,938 \times 10^{-3}\ \text{TeV})^2 + 2 \times (0,938 \times 10^{-3}\ \text{TeV}) \times (3,5\ \text{TeV})} = 0,081\ \text{TeV} \tag{12.36}$$

EXERCICIO 6

Em espalhamento elástico do tipo: A+A =A+A, quais são as variáveis de Mandelstam?



Solução: Partimos da definição das variáveis de Mandelstam. Para a variável s:

$$s = (p_1 + p_2)^2 = {p_1}^2 + {p_2}^2 + 2p_1p_2 \tag{12.37}$$

Para o caso de partículas idênticas, temos $m_1 = m_2$, $\mathbf{p_1} = -\mathbf{p_2}$, portanto o ângulo entre os momenta é π, e $\cos\theta = -1$. Usando $m^2 = p^2$ temos:

$$s = 2{m_1}^2 + 2(E_1E_2 - \mathbf{p_1} \cdot \mathbf{p_2}) \tag{12.38}$$

Efetuando o produto vetorial:

$$s = 2{m_1}^2 + 2(E_1E_2 + |\mathbf{p_1}||\mathbf{p_2}|) \tag{12.39}$$

Sabendo que as partículas são idênticas, suas energias devem ser iguais ($E_1 = E_2$), assim como os módulos dos momenta. Assim, a relação $E^2 = m^2 + |\mathbf{p}|^2$ pode ser usada:

$$s = 2{m_1}^2 + 2[({m_1}^2 + |\mathbf{p_1}|^2) + |\mathbf{p_1}|^2] \tag{12.40}$$

Simplificando temos

$$s = 4({m_1}^2 + |\mathbf{p_1}|^2) \tag{12.41}$$

Para a variável t:

$$t = (p_1 - p_3)^2 = {p_1}^2 + {p_2}^2 - 2p_1p_3 \tag{12.42}$$

Usando $m_1 = m_3$ e $m^2 = p^2$ temos:

$$t = 2{m_1}^2 - 2(E_1E_3 - |\mathbf{p_1}||\mathbf{p_3}|\cos\theta) \tag{12.43}$$

Usando $E_1 = E_3$, e $|\mathbf{p_1}| = |\mathbf{p_3}|$:

$$t = 2{m_1}^2 - 2E_1^2 + 2|\mathbf{p_1}|^2\cos\theta \tag{12.44}$$

Aplicando a relação $E^2 = m^2 + |\mathbf{p}|^2$

$$t = -2|\mathbf{p_1}|^2 + 2|\mathbf{p_1}|^2\cos\theta \tag{12.45}$$

Simplificando, temos

$$t = -2|\mathbf{p_1}|^2(1 - \cos\theta) \tag{12.46}$$

Para a variável u:

$$u = (p_1 - p_4)^2 = {p_1}^2 + {p_4}^2 - 2p_1p_4 \tag{12.47}$$

Usando $m_1 = m_4$ e $m^2 = p^2$ temos:

$$u = 2{m_1}^2 - 2(E_1E_4 - |\mathbf{p_1}||\mathbf{p_4}|\cos\phi) \tag{12.48}$$

Usando $E_1 = E_4$, e $|\mathbf{p_1}| = |\mathbf{p_4}|$:

$$u = 2{m_1}^2 - 2E_1^2 + 2|\mathbf{p_1}|^2\cos\phi \tag{12.49}$$

Aplicando a relação $E^2 = m^2 + |\mathbf{p}|^2$

$$u = -2|\mathbf{p_1}|^2 + 2|\mathbf{p_1}|^2\cos\phi \tag{12.50}$$

Simplificando, temos

$$u = -2|\mathbf{p_1}|^2(1 - \cos\phi) \tag{12.51}$$

Note que $\phi + \theta = \pi$. Assim, $\cos\phi = \cos\pi - \theta = -\cos\theta$. Assim, podemos escrever:

$$u = -2|\mathbf{p_1}|^2(1 + \cos\theta) \tag{12.52}$$

EXERCICIO 7

Prove a relação abaixo:

$$s + t + u = {m_1}^2 + {m_2}^2 + {M_1}^2 + {M_2}^2 \tag{12.53}$$

Solução: Começamos redefinindo as variáveis $M_1 = -m_3$ e $M_2 = -m_4$, de modo que ${M_1}^2 = {m_3}^2$ e ${M_2}^2 = {m_4}^2$. Usando a relação:

$$p^2 = m^2 \tag{12.54}$$

E a conservação de momentum

$$p_1 + p_2 = p_3 + p_3 \tag{12.55}$$

Partimos da definição das variáveis de Mandelstam:

$$s = (p_1 + p_2)^2 = {p_1}^2 + {p_2}^2 + 2p_1p_2 \tag{12.56}$$

$$t = (p_1 - p_3)^2 = {p_1}^2 + {p_3}^2 - 2p_1p_3 \tag{12.57}$$

$$s = (p_1 - p_4)^2 = {p_1}^2 + {p_4}^2 - 2p_1p_4 \tag{12.58}$$

Somando as três equações, temos:

$$s + t + u = {p_1}^2 + {p_2}^2 + {p_3}^2 + {p_4}^2 + 2{p_1}^2 + 2p_1p_2 - 2p_1p_3 - 2p_1p_4 \tag{12.59}$$

isolando $2p_1$ nos últimos termos:

$$s + t + u = {p_1}^2 + {p_2}^2 + {p_3}^2 + {p_4}^2 + 2p_1(p_1 + p_2 - p_3 - p_4) \tag{12.60}$$

Note que devido à conservação do momento, o termo entre parênteses se anula. Substituindo a relação (12.54):

$$s + t + u = {m_1}^2 + {m_2}^2 + {m_3}^2 + {m_4}^2 \tag{12.61}$$

Voltando nas variáveis definidas, temos

$$s + t + u = {m_1}^2 + {m_2}^2 + {M_1}^2 + {M_2}^2 \tag{12.62}$$

EXERCICIO 8 a

Exercício não resolvido.

EXERCICIO 8 b

Mostre em detalhes que o decaimento de dois corpos pode ser descrito por:

$$E_1 = \frac{M^2 - {m_2}^2 + {m_1}^2}{2M} \tag{12.63}$$

$$|\mathbf{p_1}| = |\mathbf{p_2}| = \frac{[(M^2 - (m_1 + m_2)^2)(M^2 - (m_1 - m_2)^2)]^{1/2}}{2M} \tag{12.64}$$

Solução: Pela conservação do momentum:

$$P = p_1 + p_2 \Rightarrow p_2 = P - p_1 \tag{12.65}$$

Tomando o quadrado da equação:

$${p_2}^2 = P^2 + {p_1}^2 - 2Pp_1 \tag{12.66}$$

Usando que $p_1 p_2 = E_1 E_2 - \mathbf{p_1} \cdot \mathbf{p_2}$ e sabendo que no referencial da partícula P, o quadrimomentum é dado por $P = (M, 0)$. Isto implica que $\mathbf{p_1} + \mathbf{p_2} = 0$, e assim, $|\mathbf{p_1}| = |\mathbf{p_2}|$. temos

$${p_2}^2 = P^2 + {p_1}^2 - 2(EE_1 - 0) \tag{12.67}$$

Usando as relações das massas $m^2 = p^2$ e pro caso de P, $E^2 = m^2$:

$${m_2}^2 = M^2 + {m_1}^2 - 2ME_1 \tag{12.68}$$

Isolando a energia:

$$E_1 = \frac{M^2 + {m_1}^2 - {m_2}^2}{2M} \tag{12.69}$$

Que é a primeira equação do problema. Sabendo que $E^2 = |\mathbf{p}|^2 + m^2$, podemos isolar o módulo do momentum e substituir a equação encontrada para a energia:

$$|\mathbf{p_1}| = \sqrt{E_1^2 - {m_1}^2} \tag{12.70}$$

$$|\mathbf{p_1}| = \sqrt{\left(\frac{M^2 + {m_1}^2 - {m_2}^2}{2M}\right)^2 - {m_1}^2} \tag{12.71}$$

É possível fatorar o denominador do primeiro termo dentro da raiz

$$|\mathbf{p_1}| = \frac{1}{2M}\sqrt{(M^2 + {m_1}^2 - {m_2}^2)^2 - 4M^2{m_1}^2} \tag{12.72}$$

Expandindo o termo entre parênteses:

$$|\mathbf{p_1}| = \frac{1}{2M}\sqrt{M^4 + {m_1}^4 + {m_2}^4 + 2M^2{m_1}^2 - 2{m_1}^2{m_2}^2 - 2M^2{m_2}^2 - 4M^2{m_1}^2} \tag{12.73}$$

Somando os termos com $M^2{m_1}^2$, temos

$$|\mathbf{p_1}| = \frac{1}{2M}\sqrt{M^4 + {m_1}^4 + {m_2}^4 - 2M^2{m_1}^2 - 2{m_1}^2{m_2}^2 - 2M^2{m_2}^2} \tag{12.74}$$

Somando e subtraindo um termo $2M^2 m_1 m_2$:

$$|\mathbf{p_1}| = \frac{1}{2M}\sqrt{M^4 + {m_1}^4 + {m_2}^4 + 2M^2 m_1 m_2 - 2M^2 m_1 m_2 - 2M^2{m_1}^2 - 2{m_1}^2{m_2}^2 - 2M^2{m_2}^2} \tag{12.75}$$

Fatorando o termo $-M^2$:

$$|\mathbf{p_1}| = \frac{1}{2M}\sqrt{M^4 + {m_1}^4 + {m_2}^4 - M^2(-2m_1 m_2 + 2m_1 m_2 + 2{m_1}^2 + 2{m_2}^2) - 2{m_1}^2{m_2}^2} \tag{12.76}$$

Reordenando os termos, temos:

$$|\mathbf{p_1}| = \frac{1}{2M}\sqrt{M^4 - M^2[({m_1}^2 + 2m_1 m_2 + {m_2}^2) + ({m_1}^2 - 2m_1 m_2 + {m_2}^2)] + ({m_1}^4 - 2{m_1}^2{m_2}^2 + {m_2}^4)} \tag{12.77}$$

E contraindo os produtos notáveis:

$$|\mathbf{p_1}| = \frac{1}{2M}\sqrt{M^4 - M^2[(m_1+m_2)^2 + (m_1-m_2)^2] + ({m_1}^2 - {m_2}^2)^2} \tag{12.78}$$

Note que é possível expandir o último termo como:

$$|\mathbf{p_1}| = \frac{1}{2M}\sqrt{M^4 - M^2(m_1+m_2)^2 - M^2(m_1-m_2)^2 + [(m_1+m_2)(m_1-m_2)]^2} \tag{12.79}$$

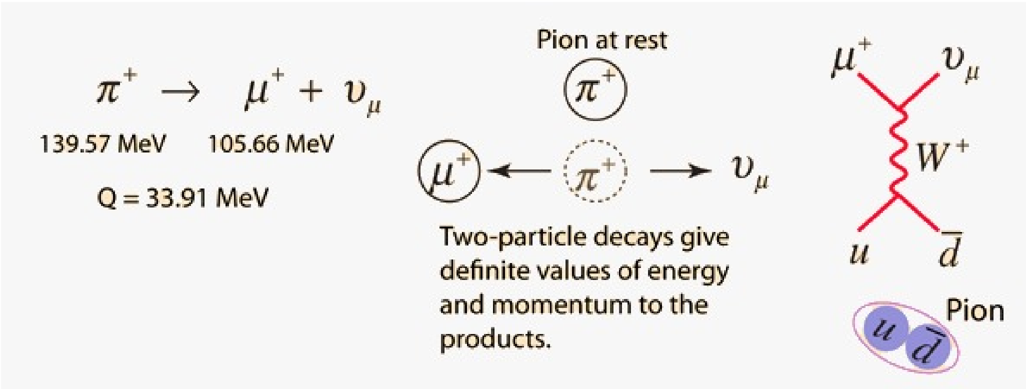
Que pode ser visto como uma expansão de

$$|\mathbf{p_1}| = \frac{\sqrt{(M^2-(m_1+m_2)^2)(M^2-(m_1-m_2)^2)}}{2M} \tag{12.80}$$

Que é a equação do problema

EXERCICIO 9

Determine a energia e momentum para os seguintes decaimentos de dois corpos:



Solução: A figura mostra o decaimento de um píon em um múon e um neutrino. As massas de cada partícula são:

$$m_\pi = 139,57 \text{ MeV} \tag{12.81}$$

$$m_\mu = 105,66 \text{ MeV} \tag{12.82}$$

$$m_\nu \approx 0 \tag{12.83}$$

Usando a equação encontrada para a energia no problema anterior, temos:

$$E_\mu = \frac{{m_\pi}^2 - {m_\nu}^2 + {m_\mu}^2}{2m_\pi} \tag{12.84}$$

Substituindo os valores:

$$E_\mu = \frac{(139,57 \text{ MeV})^2 - 0 + (105,66 \text{ MeV})^2}{2 \times (139,57 \text{ MeV})} = 109,78 \text{ MeV} \tag{12.85}$$

E para o momentum, já desconsiderando a massa do neutrino:

$$|\mathbf{p}_\mu| = \frac{1}{2m_\pi}\left[({m_\pi}^2 - {m_\mu}^2)({m_\pi}^2 - {m_\mu}^2)\right]^{1/2} = \frac{({m_\pi}^2 - {m_\mu}^2)}{2m_\pi} \tag{12.86}$$

Substituindo os valores:

$$|\mathbf{p}_\mu| = \frac{(139,57 \text{ MeV})^2 - (105,66 \text{ MeV})^2}{2(139,57 \text{ MeV})} = 29,79 \text{ MeV} \tag{12.87}$$

Sabendo que $|\mathbf{p}_\mu| = |\mathbf{p}_\nu|$, como demonstrado no exercício anterior, temos que $|\mathbf{p}_\nu| = 29{,}79$ MeV. Uma vez que a massa do neutrino é desprezível, sua energia é dada somente pelo seu momentum, portanto $E_\nu = 29{,}79$ MeV.

EXERCICIO 10

Prove o decaimento de três corpos.

Solução: Primeiro é necessário fazer algumas definições:

$$p_{ij} = p_i + p_j \tag{12.88}$$

$$m_{ij}{}^2 = p_{ij}{}^2 \tag{12.89}$$

Disso, temos

$$m_{12}{}^2 + m_{23}{}^2 + m_{13}{}^2 = M^2 + m_1{}^2 + m_2{}^2 + m_3{}^2 \tag{12.90}$$

Pela conservação do momentum:

$$P = p_1 + p_2 + p_3 \Rightarrow (p_1 + p_2)^2 = (P - p_3)^2 \tag{12.91}$$

No referencial de P, usando as definições, podemos escrever

$$m_{12}{}^2 = (P - p_3)^2 = P^2 + m_3{}^2 - 2(EE_3 - 0) \tag{12.92}$$

Usando que $m^2 = p^2$, e no caso de P, $P^2 = M^2$:

$$m_{12}{}^2 = M^2 + m_3{}^2 - 2ME_3 \tag{12.93}$$

Isolando a energia:

$$E_3 = \frac{M^2 + m_3{}^2 - m_{12}{}^2}{2M} \tag{12.94}$$

Esta equação pode ser substituída na equação do momentum:

$$|\mathbf{p_3}| = \sqrt{E_3{}^2 - m_3{}^2} = \sqrt{\left(\frac{M^2 + m_3{}^2 - m_{12}{}^2}{2M}\right)^2 - m_3{}^2} \tag{12.95}$$

É possível fatorar o denominador do primeiro termo dentro da raiz

$$|\mathbf{p_3}| = \frac{1}{2M}\sqrt{(M^2 + m_3{}^2 - m_{12}{}^2)^2 - 4M^2m_3{}^2} \tag{12.96}$$

Expandindo o termo entre parênteses:

$$|\mathbf{p_3}| = \frac{1}{2M}\sqrt{M^4 + m_3{}^4 + m_{12}{}^4 + 2M^2m_3{}^2 - 2m_3{}^2m_{12}{}^2 - 2M^2m_{12}{}^2 - 4M^2m_3{}^2} \tag{12.97}$$

Somando os termos com $M^2m_3{}^2$, temos

$$|\mathbf{p_3}| = \frac{1}{2M}\sqrt{M^4 + m_3{}^4 + m_{12}{}^4 - 2M^2m_3{}^2 - 2m_3{}^2m_{12}{}^2 - 2M^2m_{12}{}^2} \tag{12.98}$$

Somando e subtraindo um termo $2M^2m_3m_{12}$:

$$|\mathbf{p_3}| = \frac{1}{2M}\sqrt{M^4 + m_3{}^4 + m_{12}{}^4 + 2M^2m_3m_{12} - 2M^2m_3m_{12} - 2M^2m_3{}^2 - 2m_3{}^2m_{12}{}^2 - 2M^2m_{12}{}^2} \tag{12.99}$$

Fatorando o termo $-M^2$:

$$|\mathbf{p_3}| = \frac{1}{2M}\sqrt{M^4 + m_3{}^4 + m_{12}{}^4 - M^2(-2m_3m_{12} + 2m_3m_{12} + 2m_3{}^2 + 2m_{12}{}^2) - 2m_3{}^2m_{12}{}^2} \tag{12.100}$$

Reordenando os termos, temos:

$$|\mathbf{p_3}| = \frac{1}{2M}\sqrt{M^4 - M^2[(m_3{}^2 + 2m_3m_{12} + m_{12}{}^2) + (m_3{}^2 - 2m_3m_{12} + m_{12}{}^2)] + (m_3{}^4 - 2m_3{}^2m_{12}{}^2 + m_{12}{}^4)} \tag{12.101}$$

E contraindo os produtos notáveis:

$$|\mathbf{p_3}| = \frac{1}{2M}\sqrt{M^4 - M^2[(m_3+m_{12})^2 + (m_3-m_{12})^2] + ({m_3}^2 - {m_{12}}^2)^2} \tag{12.102}$$

Note que é possível expandir o último termo como:

$$|\mathbf{p_3}| = \frac{1}{2M}\sqrt{M^4 - M^2(m_3+m_{12})^2 - M^2(m_3-m_{12})^2 + [(m_3+m_{12})(m_3-m_{12})]^2} \tag{12.103}$$

Que pode ser visto como uma expansão de

$$|\mathbf{p_3}| = \frac{\sqrt{(M^2-(m_3+m_{12})^2)(M^2-(m_3-m_{12})^2)}}{2M} \tag{12.104}$$

Que é a equação do problema. Note que $(m_3 - m_{12})^2 = (m_{12} - m_3)^2$.

EXERCICIO 10 a

Exercício não resolvido.

EXERCICIO 11

Prove a equação abaixo:

$$M = \sqrt{\left(\sum E_i\right)^2 - \left(\sum \mathbf{p}_i\right)^2} \tag{12.105}$$

Solução: Para um sistema de n partículas, podemos definir:

$$E_{total} = \sum E_i \tag{12.106}$$

$$\mathbf{p}_{total} = \sum \mathbf{p}_i \tag{12.107}$$

Sabendo que energia e momentum se conservam, podemos também definir:

$$P_{total} = (E_{total}, \mathbf{p}_{total}) = \sum p_i \tag{12.108}$$

Uma vez que P_{total} é uma quantidade invariante, podemos usar a relação $p^2 = m^2$ para encontrar a massa invariante:

$$M^2 = P_{total}P_{total} = E_{total}E_{total} - \mathbf{p}_{total}\mathbf{p}_{total} \tag{12.109}$$

Tirando a raiz dos dois lados:

$$M = \sqrt{{E_{total}}^2 - {\mathbf{p}_{total}}^2} \tag{12.110}$$

Substituindo os somatórios definidos no início:

$$M = \sqrt{\left(\sum E_i\right)^2 - \left(\sum \mathbf{p}_i\right)^2} \tag{12.111}$$