

Programação dinâmica

► Problema da Mochila

► O item i não cabe na mochila

- A capacidade disponível w é menor que o peso w_i adicionado pelo novo item
- O valor total atingido pelo último item é repetido

► O item i cabe na mochila

- A capacidade disponível w é maior ou igual ao peso w_i do novo item inserido na mochila
- Para o valor do item adicionado ser considerado, é incrementado o valor total contido na mochila

$$V(i, w) = \begin{cases} V(i-1, w) & w - w_i < 0 \\ \max(V(i-1, w), V(i-1, w - w_i) + v_i) & w - w_i \geq 0 \end{cases}$$

Programação dinâmica

► Problema da Mochila

i	1	2	3	4
v_i	12	10	20	15
w_i	2	1	3	2

$V(i, w)$	0	1	2	3	4	5
0	0	0	0	0	0	0
1	0					
2	0					
3	0					
4	0					

Programação dinâmica

► Problema da Mochila

i	1	2	3	4
v_i	12	10	20	15
w_i	2	1	3	2

$V(i,w)$	\emptyset	1	2	3	4	5
\emptyset	\emptyset	\emptyset	\emptyset	\emptyset	\emptyset	\emptyset
1	\emptyset					
2	\emptyset					
3	\emptyset					
4	\emptyset					

O item 1 não cabe na mochila $w = 1 < w_1$

$$V(1, 1) = V(0, 1)$$

Programação dinâmica

► Problema da Mochila

i	1	2	3	4
v_i	12	10	20	15
w_i	2	1	3	2

$V(i, w)$	0	1	2	3	4	5
0	0	0	0	0	0	0
1	0	0				
2	0					
3	0					
4	0					

O item 1 cabe na mochila $w = 2 \geq w_1$

$$V(1, 2) = \max(V(0, 2), V(0, 0) + 12)$$

Programação dinâmica

► Problema da Mochila

i	1	2	3	4
v_i	12	10	20	15
w_i	2	1	3	2

$V(i, w)$	\emptyset	1	2	3	4	5
\emptyset	\emptyset	\emptyset	\emptyset	\emptyset	\emptyset	\emptyset
1	\emptyset	\emptyset	12			
2	\emptyset					
3	\emptyset					
4	\emptyset					

O item 1 cabe na mochila $w = 3 \geq w_1$

$$V(1, 3) = \max(V(0, 3), V(0, 1) + 12)$$

Programação dinâmica

► Problema da Mochila

i	1	2	3	4
v_i	12	10	20	15
w_i	2	1	3	2

$V(i, w)$	\emptyset	1	2	3	4	5
\emptyset	\emptyset	\emptyset	\emptyset	\emptyset	\emptyset	\emptyset
1	\emptyset	\emptyset	12	12		
2	\emptyset					
3	\emptyset					
4	\emptyset					

O item 1 cabe na mochila $w = 4 \geq w_1$
 $V(1, 4) = \max(V(0, 4), V(0, 2) + 12)$

Programação dinâmica

► Problema da Mochila

i	1	2	3	4
v_i	12	10	20	15
w_i	2	1	3	2

$V(i,w)$	\emptyset	1	2	3	4	5
\emptyset	\emptyset	\emptyset	\emptyset	\emptyset	\emptyset	\emptyset
1	\emptyset	\emptyset	12	12	12	
2	\emptyset					
3	\emptyset					
4	\emptyset					

O item 1 cabe na mochila $w = 5 \geq w_1$

$$V(1, 5) = \max(V(0, 5), V(0, 3) + 12)$$

Programação dinâmica

► Problema da Mochila

i	1	2	3	4
v_i	12	10	20	15
w_i	2	1	3	2

$V(i, w)$	\emptyset	1	2	3	4	5
\emptyset	\emptyset	\emptyset	\emptyset	\emptyset	\emptyset	\emptyset
1	\emptyset	\emptyset	12	12	12	12
2	\emptyset					
3	\emptyset					
4	\emptyset					

Programação dinâmica

► Problema da Mochila

i	1	2	3	4
v_i	12	10	20	15
w_i	2	1	3	2

$V(i, w)$	\emptyset	1	2	3	4	5
\emptyset	\emptyset	\emptyset	\emptyset	\emptyset	\emptyset	\emptyset
1	\emptyset	\emptyset	12	12	12	12
2	\emptyset					
3	\emptyset					
4	\emptyset					

Programação dinâmica

► Problema da Mochila

i	1	2	3	4
v_i	12	10	20	15
w_i	2	1	3	2

$V(i, w)$	0	1	2	3	4	5
0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	12	12	12	12
2	0					
3	0					
4	0					

Somente o item 2 cabe na mochila $w = 1 \geq w_2$

$$V(2, 1) = \max(V(1, 1), V(1, 0) + 10)$$

Programação dinâmica

► Problema da Mochila

i	1	2	3	4
v_i	12	10	20	15
w_i	2	1	3	2

$V(i, w)$	\emptyset	1	2	3	4	5
\emptyset	\emptyset	\emptyset	\emptyset	\emptyset	\emptyset	\emptyset
1	\emptyset	\emptyset	12	12	12	12
2	\emptyset	10				
3	\emptyset					
4	\emptyset					

Somente o item 1 cabe na mochila $w = 2 \geq w_2$

$$V(2, 2) = \max(V(1, 2), V(1, 1) + 10)$$

Programação dinâmica

► Problema da Mochila

i	1	2	3	4
v_i	12	10	20	15
w_i	2	1	3	2

$V(i, w)$	\emptyset	1	2	3	4	5
\emptyset	\emptyset	\emptyset	\emptyset	\emptyset	\emptyset	\emptyset
1	\emptyset	\emptyset	12	12	12	12
2	\emptyset	10	12			
3	\emptyset					
4	\emptyset					

Os itens 1 e 2 cabem na mochila $w = 3 \geq w_2$
 $V(2, 3) = \max(V(1, 3), V(1, 2) + 10)$

Programação dinâmica

► Problema da Mochila

i	1	2	3	4
v_i	12	10	20	15
w_i	2	1	3	2

$V(i, w)$	\emptyset	1	2	3	4	5
\emptyset	\emptyset	\emptyset	\emptyset	\emptyset	\emptyset	\emptyset
1	\emptyset	\emptyset	12	12	12	12
2	\emptyset	10	12	22		
3	\emptyset					
4	\emptyset					

Os itens 1 e 2 cabem na mochila $w = 4 \geq w_2$
 $V(2, 4) = \max(V(1, 4), V(1, 3) + 10)$

Programação dinâmica

► Problema da Mochila

i	1	2	3	4
v_i	12	10	20	15
w_i	2	1	3	2

$V(i, w)$	\emptyset	1	2	3	4	5
\emptyset	\emptyset	\emptyset	\emptyset	\emptyset	\emptyset	\emptyset
1	\emptyset	\emptyset	12	12	12	12
2	\emptyset	10	12	22	22	
3	\emptyset					
4	\emptyset					

Os itens 1 e 2 cabem na mochila $w = 5 \geq w_2$

$$V(2, 5) = \max(V(1, 5), V(1, 4) + 10)$$

Programação dinâmica

► Problema da Mochila

i	1	2	3	4
v_i	12	10	20	15
w_i	2	1	3	2

$V(i, w)$	\emptyset	1	2	3	4	5
\emptyset	\emptyset	\emptyset	\emptyset	\emptyset	\emptyset	\emptyset
1	\emptyset	\emptyset	12	12	12	12
2	\emptyset	10	12	22	22	22
3	\emptyset					
4	\emptyset					

Programação dinâmica

► Problema da Mochila

i	1	2	3	4
v_i	12	10	20	15
w_i	2	1	3	2

$V(i, w)$	\emptyset	1	2	3	4	5
\emptyset	\emptyset	\emptyset	\emptyset	\emptyset	\emptyset	\emptyset
1	\emptyset	\emptyset	12	12	12	12
2	\emptyset	10	12	22	22	22
3	\emptyset					
4	\emptyset					

Programação dinâmica

► Problema da Mochila

i	1	2	3	4
v_i	12	10	20	15
w_i	2	1	3	2

$V(i, w)$	0	1	2	3	4	5
0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	12	12	12	12
2	0	10	12	22	22	22
3	0					
4	0					

Somente o item 2 cabe na mochila $w = 1 < w_3$

$$V(3, 1) = V(2, 1)$$

Programação dinâmica

► Problema da Mochila

i	1	2	3	4
v_i	12	10	20	15
w_i	2	1	3	2

$V(i, w)$	0	1	2	3	4	5
0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	12	12	12	12
2	0	10	12	22	22	22
3	0	10				
4	0					

Somente o item 1 cabe na mochila $w = 1 < w_3$

$$V(3, 2) = V(2, 2)$$

Programação dinâmica

► Problema da Mochila

i	1	2	3	4
v_i	12	10	20	15
w_i	2	1	3	2

$V(i, w)$	0	1	2	3	4	5
0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	12	12	12	12
2	0	10	12	22	22	22
3	0	10	12			
4	0					

Os itens 1 e 2 cabem na mochila $w = 3 \geq w_3$

$$V(3, 3) = \max(V(2, 3), V(2, 0) + 20)$$

Programação dinâmica

► Problema da Mochila

i	1	2	3	4
v_i	12	10	20	15
w_i	2	1	3	2

$V(i, w)$	\emptyset	1	2	3	4	5
\emptyset	\emptyset	\emptyset	\emptyset	\emptyset	\emptyset	\emptyset
1	\emptyset	\emptyset	12	12	12	12
2	\emptyset	10	12	22	22	22
3	\emptyset	10	12	22		
4	\emptyset					

Os itens 2 e 3 cabem na mochila $w = 4 \geq w_3$

$$V(3, 4) = \max(V(2, 4), V(2, 1) + 20)$$

Programação dinâmica

► Problema da Mochila

i	1	2	3	4
v_i	12	10	20	15
w_i	2	1	3	2

$V(i, w)$	\emptyset	1	2	3	4	5
\emptyset	\emptyset	\emptyset	\emptyset	\emptyset	\emptyset	\emptyset
1	\emptyset	\emptyset	12	12	12	12
2	\emptyset	10	12	22	22	22
3	\emptyset	10	12	22	30	
4	\emptyset					

Os itens 1 e 3 cabem na mochila $w = 5 \geq w_3$

$$V(3, 5) = \max(V(2, 5), V(2, 2) + 20)$$

Programação dinâmica

► Problema da Mochila

i	1	2	3	4
v_i	12	10	20	15
w_i	2	1	3	2

$V(i, w)$	\emptyset	1	2	3	4	5
\emptyset	\emptyset	\emptyset	\emptyset	\emptyset	\emptyset	\emptyset
1	\emptyset	\emptyset	12	12	12	12
2	\emptyset	10	12	22	22	22
3	\emptyset	10	12	22	30	32
4	\emptyset					

Programação dinâmica

► Problema da Mochila

i	1	2	3	4
v_i	12	10	20	15
w_i	2	1	3	2

$V(i, w)$	\emptyset	1	2	3	4	5
\emptyset	\emptyset	\emptyset	\emptyset	\emptyset	\emptyset	\emptyset
1	\emptyset	\emptyset	12	12	12	12
2	\emptyset	10	12	22	22	22
3	\emptyset	10	12	22	30	32
4	\emptyset					

Programação dinâmica

► Problema da Mochila

i	1	2	3	4
v_i	12	10	20	15
w_i	2	1	3	2

$V(i, w)$	0	1	2	3	4	5
0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	12	12	12	12
2	0	10	12	22	22	22
3	0	10	12	22	30	32
4	0					

Somente o item 2 cabe na mochila $w = 1 < w_4$

$$V(4, 1) = V(3, 1)$$

Programação dinâmica

► Problema da Mochila

i	1	2	3	4
v_i	12	10	20	15
w_i	2	1	3	2

$V(i, w)$	0	1	2	3	4	5
0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	12	12	12	12
2	0	10	12	22	22	22
3	0	10	12	22	30	32
4	0	10				

Somente o item 4 cabe na mochila $w = 3 \geq w_4$

$$V(4, 2) = \max(V(3, 2), V(3, 0) + 15)$$

Programação dinâmica

► Problema da Mochila

i	1	2	3	4
v_i	12	10	20	15
w_i	2	1	3	2

$V(i, w)$	0	1	2	3	4	5
0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	12	12	12	12
2	0	10	12	22	22	22
3	0	10	12	22	30	32
4	0	10	15			

Os itens 1 e 4 cabem na mochila $w = 3 \geq w_3$

$$V(4, 3) = \max(V(3, 3), V(3, 1) + 15)$$

Programação dinâmica

► Problema da Mochila

i	1	2	3	4
v_i	12	10	20	15
w_i	2	1	3	2

$V(i, w)$	0	1	2	3	4	5
0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	12	12	12	12
2	0	10	12	22	22	22
3	0	10	12	22	30	32
4	0	10	15	25		

Os itens 2 e 3 cabem na mochila $w = 4 \geq w_3$

$$V(4, 4) = \max(V(3, 4), V(3, 2) + 15)$$

Programação dinâmica

► Problema da Mochila

i	1	2	3	4
v_i	12	10	20	15
w_i	2	1	3	2

$V(i, w)$	0	1	2	3	4	5
0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	12	12	12	12
2	0	10	12	22	22	22
3	0	10	12	22	30	32
4	0	10	15	25	30	

Os itens 1, 2 e 4 cabem na mochila $w = 5 \geq w_3$
 $V(4, 5) = \max(V(3, 5), V(3, 3) + 15)$

Programação dinâmica

► Problema da Mochila

i	1	2	3	4
v_i	12	10	20	15
w_i	2	1	3	2

$V(i, w)$	0	1	2	3	4	5
0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	12	12	12	12
2	0	10	12	22	22	22
3	0	10	12	22	30	32
4	0	10	15	25	30	37

Como determinar algoritmicamente quais são os itens que maximizam o valor armazenado pela mochila?

Programação dinâmica

► Problema da Mochila

i	1	2	3	4
v_i	12	10	20	15
w_i	2	1	3	2

$V(i, w)$	0	1	2	3	4	5
0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	12	12	12	12
2	0	10	12	22	22	22
3	0	10	12	22	30	32
4	0	10	15	25	30	37

Como $V(i, j) \neq V(i-1, j)$, então o item $i = 4$ faz parte da solução e $i = i-1, j = j - w_i$

Programação dinâmica

► Problema da Mochila

i	1	2	3	4
v_i	12	10	20	15
w_i	2	1	3	2

$V(i,w)$	0	1	2	3	4	5
0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	12	12	12	12
2	0	10	12	22	22	22
3	0	10	12	22	30	32
4	0	10	15	25	30	37

Como $V(i, j) = V(i-1, j)$, o item $i = 3$
não faz parte da solução e $i = i-1$

Programação dinâmica

► Problema da Mochila

i	1	2	3	4
v_i	12	10	20	15
w_i	2	1	3	2

$V(i,w)$	0	1	2	3	4	5
0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	12	12	12	12
2	0	10	12	22	22	22
3	0	10	12	22	30	32
4	0	10	15	25	30	37

Como $V(i,j) \neq V(i-1,j)$, então o item $i = 2$ faz parte da solução e $i = i - 1, j = j - w_i$

Programação dinâmica

► Problema da Mochila

i	1	2	3	4
v_i	12	10	20	15
w_i	2	1	3	2

$V(i,w)$	\emptyset	1	2	3	4	5
\emptyset	\emptyset	\emptyset	\emptyset	\emptyset	\emptyset	\emptyset
1	\emptyset	\emptyset	12	12	12	12
2	\emptyset	10	12	22	22	22
3	\emptyset	10	12	22	30	32
4	\emptyset	10	15	25	30	37

Como $V(i, j) \neq V(i-1, j)$, então o item $i = 1$ faz parte da solução e $i = i-1, j = j - w_i$

Programação dinâmica

► Problema da Mochila

i	1	2	3	4
v_i	12	10	20	15
w_i	2	1	3	2

$V(i, w)$	0	1	2	3	4	5
0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	12	12	12	12
2	0	10	12	22	22	22
3	0	10	12	22	30	32
4	0	10	15	25	30	37

A solução ótima possui valor 37,
sendo composta pelos itens 1, 2 e 4

Programação dinâmica

- ▶ Análise de complexidade
 - ▶ Pseudo-polinomial $O(n \times W)$
 - ▶ É polinomial para o tamanho da entrada n que é o número de itens que podem ser colocados na mochila

Programação dinâmica

- ▶ Análise de complexidade
 - ▶ Pseudo-polinomial $O(n \times W)$
 - ▶ É polinomial para o tamanho da entrada n que é o número de itens que podem ser colocados na mochila
 - ▶ A capacidade máxima da mochila W possui um crescimento exponencial para o valor numérico (largura em bits)

$$\begin{aligned}\log_2 W &= m \\ W &= 2^m\end{aligned}$$