reconciliador

August 2, 2020

0.1 Aulas 10 e 11 - Reconciliação de Dados

Aluno: Vitor Barbosa

Teoria: Multiplicadores de Lagrange Seja uma função $f = f(x, y, z)$ sujeita à restrição $g = g(x, y, z) = k, k \in \mathbb{R}$ Definimos a Lagrangiana ou função auxiliar $J(x, y, z, \lambda) = f - \lambda g$.

Desejamos encontrar pontos estacionários da Langrangiana (máximos ou mínimos), o que ocorre quando o gradiente desaparece:

$$\nabla(f - \lambda g) = 0 \iff \nabla f = \lambda \nabla g$$

Interpretação: O gradiente de uma isosuperfície (uma função da forma $h(x, y, z) = k$) representa seu vetor normal, e para que f e g se toquem (sejam tangentes), seus vetores normais precisam ser paralelos, ou seja, isso garante que a restrição será satisfeita.

No nosso caso, f é uma função custo comumente encontrada no problema dos Mínimos Quadrados Ponderados *(Weighted Least Squares)*:

$$f(x_i, \hat{x}_i) = \sum_{i=1}^{N} \frac{(x_i - \hat{x}_i)^2}{\sigma_i^2}$$

Aqui, $\hat{x}_i$ são os valores reconciliados que desejamos obter e σ_i^2 são as variâncias das medições.

A restrição g é a Equação da Continuidade para o fluxo incompressível (Balanço de Massa).

Passando para forma matricial, temos:

$$f(\hat{X}) = (X - \hat{X})^T V^{-1} (X - \hat{X})$$

V é a matrix de covariância. Para variáveis independentes, ela é uma matriz diagonal com as variâncias das medidas na diagonal principal. X é o vetor com as medidas da planta. A restrição é o balanço de massas reescrito na forma matricial, com a Matriz de Incidência A. Para m restrições (nós) e n variáveis (sensores), temos m linhas e n colunas.

$$g(\hat{X}) = A\hat{X} = 0$$

A função auxiliar será:

$$J(\hat{X}, \lambda) = (X - \hat{X})^T V^{-1} (X - \hat{X}) - 2\lambda^T A\hat{X}$$

Note que há um $2\lambda^T$ na equação em vez de λ^T. Creio que isso foi feito para simplificar

$$\frac{\partial(Y^T BY)}{\partial Y} = 2BY$$

Uma vez que λ_i é um multiplicador arbitrário, não há problema nisso.

Após as devidas manipulações, temos:

$$\hat{X} = X - VA^T(AVA^T)^{-1}AX$$

Vista a teoria, vamos implementar o código.

[1]:
```
#Exercício 2
#Reconciliando o sistema com 2 nós proposto nos slides do professor
from numpy import zeros, transpose
from numpy.linalg import inv,qr
X = [161,79,80,20,63]
V = zeros((5,5))
V[0,0] = 0.05*X[0]
V[1,1] = 0.01*X[1]
V[2,2] = 0.01*X[2]
V[3,3] = 0.10*X[3]
V[4,4] = 0.05*X[4]
#Multiplicação elemento-a-elemento para transformar desvio padrão em variância
V = V*V;
#X1-X2-X3 = X3-X4-X5 = 0
A = [[1,-1,-1,0,0],[0,0,1,-1,-1]]
Xhat = X-V@transpose(A)@inv(A@V@transpose(A))@A@X
Xhat
```

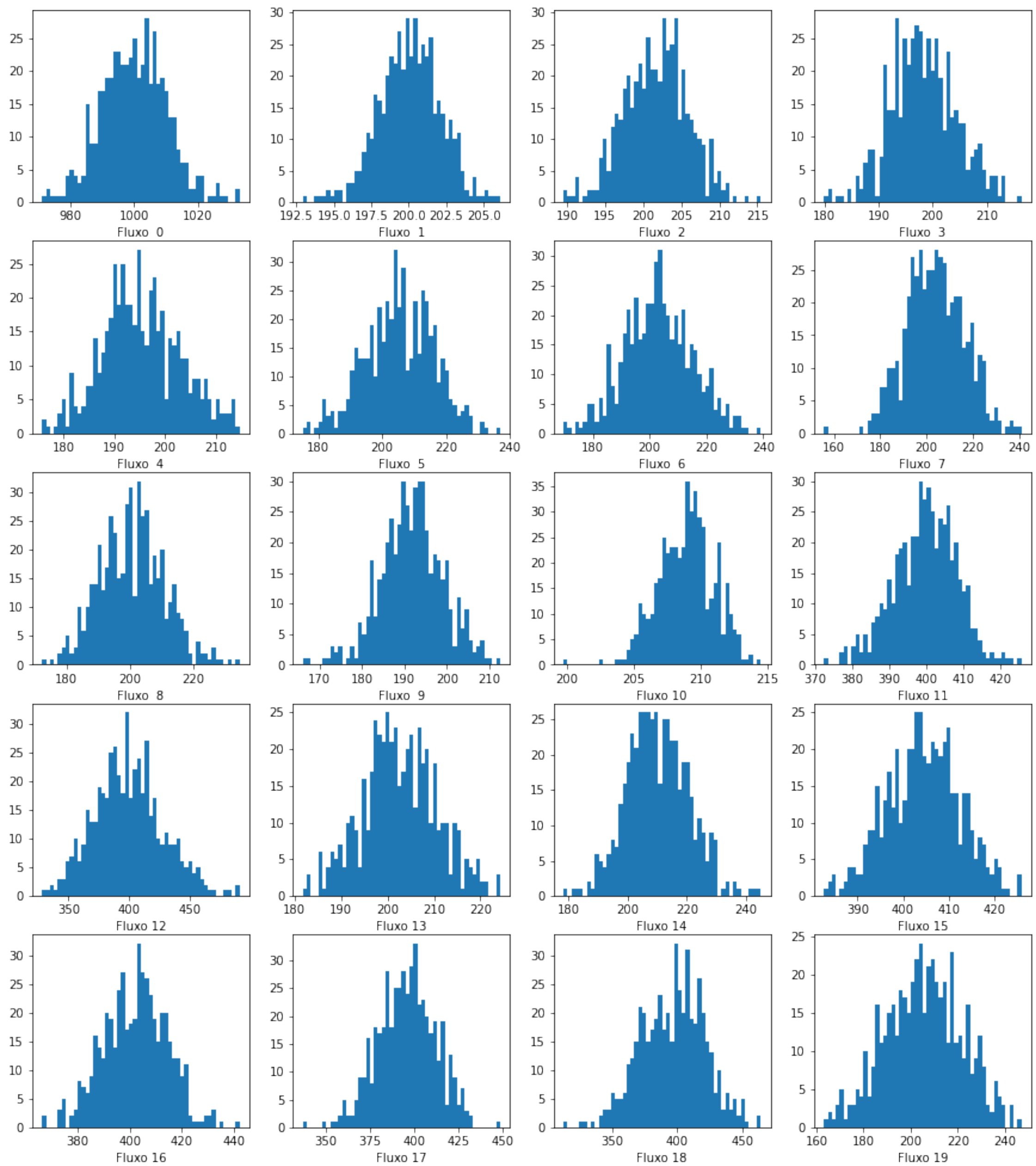
[1]:
```
array([159.16680979,  79.01765509,  80.14915469,  19.18093868,
        60.96821601])
```

[2]:
```
#Exercício 3 - Sistema com 15 nós
from numpy import zeros, transpose,linspace, ones
from numpy.linalg import inv,qr
from random import gauss
from matplotlib import pyplot as plt

#Só pra deixar os gráficos maiores
%matplotlib inline
plt.rcParams['figure.figsize'] = [15, 10]

#Mapa do sistema com 15 nós
#a) Todos nós mensuráveis
''' Mapa do sistema. Cada "o" é um nó, cada "f" é um fluxo
f0-o0-f1-o1-f6-o2-f11-o3-f15-o4-f16
   |-f2-o5-f7--/
   |-f3-o6-f8----o7-f12-o8-f17-o9-f18
```

```
   |-f4-o10-f9---/
   \-f5-o11-f10-o12-f13-o13-f14-o14-f19
'''
#Médias dos fluxos em m^3/s
f = zeros(20)
s = zeros(20)
f[0] = 1000
f[1] = 200; f[2] = 202; f[3] = 198; f[4] = 195; f[5] = 205
f[6] = 203; f[7] = 204; f[8] = 201; f[9] = 192; f[10] = 209
f[11] = 400; f[12] = 399; f[13] = 203; f[14] = 210;f[16] = 403
f[15] = 405; f[17] = 395; f[18] = 397; f[19] = 206
#Desvios padrões normalizados
s[0] = 0.01; s[1] = 0.01; s[2] = 0.02; s[3] = 0.03; s[4] = 0.04; s[5] = 0.05;
 ↪s[6] = 0.06
s[7] = 0.06; s[8] = 0.05; s[9] = 0.04; s[10] = 0.01; s[11] = 0.02; s[12] = 0.07;
 ↪ s[13] = 0.04; s[14] = 0.05
s[15] = 0.02; s[16] = 0.03; s[17] = 0.04; s[18] = 0.06; s[19] = 0.08
#Pré-alocando memória para 500 medidas
X = zeros((20,500))
for i in range(500):
    for j in range(20):
        X[j,i] = gauss(f[j],s[j]*f[j])
#Plotando a distribuição de valores graficamente
n = linspace(0,500,500)
plt.subplots_adjust(top=1.4,bottom=0.1)
for i in range(20):
    plt.subplot(5,4,i+1)
    plt.hist(X[i,:],bins=50)
    plt.xlabel("Fluxo %2d"%(i))
    #plt.plot(n,X[i,:]) # plota valores diretamente

# Calculando valores das medidas
#Média
mu = zeros(20)
#Desvio padrão = Precisão
sigma = zeros(20)
#Bias
bias = zeros(20)


for i in range(500):
    for j in range(20): mu[j] = mu[j]+X[j,i]
mu = mu/500
for i in range(500):
    for j in range(20): sigma[j] = sigma[j] + (X[j,i]- mu[j])**2
sigma = (sigma/500)**0.5
bias = mu-f
```

```
#Incerteza = erro padrão = sigma/sqrt(N)
incert = (sigma/500)**0.5

for i in range(20):
    print("Sensor %2d - mu=%7.2f sigma=%6.2f  Incert=%2.2f  Bias=%5.
↪2f"%(i,mu[i],sigma[i],incert[i],bias[i]))
    #print("Sensor %2d - \u03BC=%7.2f \u03c3=%6.2f  Incert=%2.2f  Bias=%5.
↪2f"%(i,mu[i],sigma[i],incert[i],bias[i]))
```

```
Sensor  0 - mu= 999.98 sigma= 10.13  Incert=0.14  Bias=-0.02
Sensor  1 - mu= 200.06 sigma=  2.05  Incert=0.06  Bias= 0.06
Sensor  2 - mu= 201.67 sigma=  4.19  Incert=0.09  Bias=-0.33
Sensor  3 - mu= 198.30 sigma=  6.06  Incert=0.11  Bias= 0.30
Sensor  4 - mu= 195.37 sigma=  7.65  Incert=0.12  Bias= 0.37
Sensor  5 - mu= 205.35 sigma= 10.61  Incert=0.15  Bias= 0.35
Sensor  6 - mu= 203.10 sigma= 12.06  Incert=0.16  Bias= 0.10
Sensor  7 - mu= 203.81 sigma= 12.59  Incert=0.16  Bias=-0.19
Sensor  8 - mu= 200.56 sigma= 10.11  Incert=0.14  Bias=-0.44
Sensor  9 - mu= 191.77 sigma=  7.27  Incert=0.12  Bias=-0.23
Sensor 10 - mu= 208.95 sigma=  2.05  Incert=0.06  Bias=-0.05
Sensor 11 - mu= 399.74 sigma=  8.41  Incert=0.13  Bias=-0.26
Sensor 12 - mu= 399.23 sigma= 28.17  Incert=0.24  Bias= 0.23
Sensor 13 - mu= 202.65 sigma=  7.94  Incert=0.13  Bias=-0.35
Sensor 14 - mu= 210.14 sigma= 10.36  Incert=0.14  Bias= 0.14
Sensor 15 - mu= 404.49 sigma=  8.00  Incert=0.13  Bias=-0.51
Sensor 16 - mu= 402.15 sigma= 12.15  Incert=0.16  Bias=-0.85
Sensor 17 - mu= 395.60 sigma= 16.18  Incert=0.18  Bias= 0.60
Sensor 18 - mu= 396.73 sigma= 24.34  Incert=0.22  Bias=-0.27
Sensor 19 - mu= 205.50 sigma= 16.13  Incert=0.18  Bias=-0.50
```



[30]:
```
#Reconciliação de Dados
from numpy import diag, append
# As matrizes:
#V é matriz de covariancia diagonal, quadrada, com a dimensão do número de sensores
V = diag(sigma*sigma)
# A matriz das restrições vamos tirar do mapa:
''' Mapa do sistema. Cada "o" é um nó, cada "f" é um fluxo
f0-o0-f1-o1-f6-o2-f11-o3-f15-o4-f16
```

```
   |-f2-o5-f7--/
   |-f3-o6-f8----o7-f12-o8-f17-o9-f18
   |-f4-o10-f9---/
   \-f5-o11-f10-o12-f13-o13-f14-o14-f19
'''
#Temos A com 15 linhas(restrições) e 20 colunas(variáveis)
#A pode ser obtida diretamente analisando os balanços de massa nos nós
# Vamos percorrer os nós linha a linha, da esquerda para a direita
nRest = 15;
nFlux = 20;
A = zeros((nRest,nFlux))
#Rest 0
A[0,0] = 1;A[0,1:6] = -1
#Rest 1
A[1,1] = 1;A[1,6] = -1
#Rest 2
A[2,6] = 1;A[2,7]=1;A[2,11] = -1
#Demais restrições
A[3,11]=1;A[3,15]=-1
A[4,15]=1;A[4,16]=-1
A[5,2]=1;A[5,7]=-1
A[6,3]=1;A[6,8]=-1
A[7,8]=1;A[7,9]=1;A[7,12]=-1
A[8,12]=1;A[8,17]=-1
A[9,17]=1;A[9,18]=-1
A[10,4]=1;A[10,9]=-1
A[11,5]=1;A[11,10]=-1
A[12,10]=1;A[12,13]=-1
A[13,13]=1;A[13,14]=-1
A[14,14]=1;A[14,19]=-1

X1 = mu

# A matriz de dados reconciliados
Xhat = X1-V@transpose(A)@inv(A@V@transpose(A))@A@X1


print("\nMatrizes Geradas-------------------------------------------------\n")
print("A matriz de covariância V:\n")
print(V)
print("\nMatriz de medidas X1:\n")
print(X1)
print("\nA Matriz de restrições A:\n")
print(A)
print("\n-----------------------------------------------------------------\n")

print("\nOs fluxos reconciliados:\n")
```

```python
print(Xhat)
```

```
Matrizes Geradas-------------------------------------------------

A matriz de covariância V:

[[102.60790425   0.           0.           0.           0.
    0.           0.           0.           0.           0.
    0.           0.           0.           0.           0.
    0.           0.           0.           0.           0.        ]
 [  0.           4.19985415   0.           0.           0.
    0.           0.           0.           0.           0.
    0.           0.           0.           0.           0.
    0.           0.           0.           0.           0.        ]
 [  0.           0.          17.57493865   0.           0.
    0.           0.           0.           0.           0.
    0.           0.           0.           0.           0.
    0.           0.           0.           0.           0.        ]
 [  0.           0.           0.          36.77545451   0.
    0.           0.           0.           0.           0.
    0.           0.           0.           0.           0.
    0.           0.           0.           0.           0.        ]
 [  0.           0.           0.           0.          58.45619424
    0.           0.           0.           0.           0.
    0.           0.           0.           0.           0.
    0.           0.           0.           0.           0.        ]
 [  0.           0.           0.           0.           0.
  112.61893251   0.           0.           0.           0.
    0.           0.           0.           0.           0.
    0.           0.           0.           0.           0.        ]
 [  0.           0.           0.           0.           0.
    0.         145.36557111   0.           0.           0.
    0.           0.           0.           0.           0.
    0.           0.           0.           0.           0.        ]
 [  0.           0.           0.           0.           0.
    0.           0.         158.5112549    0.           0.
    0.           0.           0.           0.           0.
    0.           0.           0.           0.           0.        ]
 [  0.           0.           0.           0.           0.
    0.           0.           0.         102.30275102   0.
    0.           0.           0.           0.           0.
    0.           0.           0.           0.           0.        ]
 [  0.           0.           0.           0.           0.
    0.           0.           0.           0.          52.83170658
    0.           0.           0.           0.           0.
    0.           0.           0.           0.           0.        ]
```

```
 [ 0.          0.          0.          0.          0.
   0.          0.          0.          0.          0.
   4.18234032  0.          0.          0.          0.
   0.          0.          0.          0.          0.        ]
 [ 0.          0.          0.          0.          0.
   0.          0.          0.          0.          0.
   0.         70.75648163  0.          0.          0.
   0.          0.          0.          0.          0.        ]
 [ 0.          0.          0.          0.          0.
   0.          0.          0.          0.          0.
   0.          0.        793.28138694  0.          0.
   0.          0.          0.          0.          0.        ]
 [ 0.          0.          0.          0.          0.
   0.          0.          0.          0.          0.
   0.          0.          0.         63.12289211  0.
   0.          0.          0.          0.          0.        ]
 [ 0.          0.          0.          0.          0.
   0.          0.          0.          0.          0.
   0.          0.          0.          0.        107.25584259
   0.          0.          0.          0.          0.        ]
 [ 0.          0.          0.          0.          0.
   0.          0.          0.          0.          0.
   0.          0.          0.          0.          0.
  64.04557929  0.          0.          0.          0.        ]
 [ 0.          0.          0.          0.          0.
   0.          0.          0.          0.          0.
   0.          0.          0.          0.          0.
   0.        147.57411359  0.          0.          0.        ]
 [ 0.          0.          0.          0.          0.
   0.          0.          0.          0.          0.
   0.          0.          0.          0.          0.
   0.          0.        261.94741234  0.          0.        ]
 [ 0.          0.          0.          0.          0.
   0.          0.          0.          0.          0.
   0.          0.          0.          0.          0.
   0.          0.          0.        592.2288072   0.        ]
 [ 0.          0.          0.          0.          0.
   0.          0.          0.          0.          0.
   0.          0.          0.          0.          0.
   0.          0.          0.          0.        260.22231692]]
```

```
Matriz de medidas X1:

[999.98068317 200.06446321 201.66529692 198.30495248 195.36861487
 205.3455356  203.09509339 203.80963746 200.56319438 191.77421124
 208.94655554 399.737448   399.22761704 202.64618889 210.14457352
 404.49397929 402.15277209 395.59594308 396.73132428 205.49782709]
```

```
A Matriz de restrições A:

[[ 1. -1. -1. -1. -1. -1.  0.  0.  0.  0.  0.  0.  0.  0.  0.  0.  0.  0.
   0.  0.]
 [ 0.  1.  0.  0.  0.  0. -1.  0.  0.  0.  0.  0.  0.  0.  0.  0.  0.  0.
   0.  0.]
 [ 0.  0.  0.  0.  0.  0.  1.  1.  0.  0.  0. -1.  0.  0.  0.  0.  0.  0.
   0.  0.]
 [ 0.  0.  0.  0.  0.  0.  0.  0.  0.  0.  0.  1.  0.  0.  0. -1.  0.  0.
   0.  0.]
 [ 0.  0.  0.  0.  0.  0.  0.  0.  0.  0.  0.  0.  0.  0.  0.  1. -1.  0.
   0.  0.]
 [ 0.  0.  1.  0.  0.  0.  0. -1.  0.  0.  0.  0.  0.  0.  0.  0.  0.  0.
   0.  0.]
 [ 0.  0.  0.  1.  0.  0.  0.  0. -1.  0.  0.  0.  0.  0.  0.  0.  0.  0.
   0.  0.]
 [ 0.  0.  0.  0.  0.  0.  0.  0.  1.  1.  0.  0. -1.  0.  0.  0.  0.  0.
   0.  0.]
 [ 0.  0.  0.  0.  0.  0.  0.  0.  0.  0.  0.  0.  1.  0.  0.  0.  0. -1.
   0.  0.]
 [ 0.  0.  0.  0.  0.  0.  0.  0.  0.  0.  0.  0.  0.  0.  0.  0.  0.  1.
  -1.  0.]
 [ 0.  0.  0.  0.  1.  0.  0.  0.  0. -1.  0.  0.  0.  0.  0.  0.  0.  0.
   0.  0.]
 [ 0.  0.  0.  0.  0.  1.  0.  0.  0.  0. -1.  0.  0.  0.  0.  0.  0.  0.
   0.  0.]
 [ 0.  0.  0.  0.  0.  0.  0.  0.  0.  0.  1.  0.  0. -1.  0.  0.  0.  0.
   0.  0.]
 [ 0.  0.  0.  0.  0.  0.  0.  0.  0.  0.  0.  0.  0.  1. -1.  0.  0.  0.
   0.  0.]
 [ 0.  0.  0.  0.  0.  0.  0.  0.  0.  0.  0.  0.  0.  0.  1.  0.  0.  0.
   0. -1.]]

-----------------------------------------------------------------


Os fluxos reconciliados:

[1002.64999479  200.10448761  201.70461089  198.94596501  193.52559938
  208.3693319   200.10448761  201.70461089  198.94596501  193.52559938
  208.3693319   401.8090985   392.47156439  208.3693319   208.3693319
  401.8090985   401.8090985   392.47156439  392.47156439  208.3693319 ]
```

[14]:
```python
# Parte 2 - Excluir 5 fluxos
# Os fluxos excluídos: 19,18,17,16,15
# Vamos remover os fluxos não mensuráveis
fexcl = [15,16,17,18,19]
```

```python
fmens = [0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14]
nExcl = len(fexcl);
nMens = len(fmens);
#Fluxos medidos
Ay = zeros((nRest,nMens))
#Fluxos só observados (não medidos)
Az = zeros((nRest,nExcl))

i = 0; k = 0
for j in range(nFlux):
    if(j not in fexcl): #Se o fluxo não deve ser excluído
        Ay[:,i] = A[:,j] #Copia a restrição da coluna do fluxo da matriz A para␣
 ↪a matriz Ay
        i=i+1
    else:
        Az[:,k] = A[:,j]#Copia a restrição da coluna do fluxo para a matriz Az
        k=k+1
```

O problema de otimização agora estará sujeito a

$$A_y\hat{Y} + A_z\hat{Z} = 0$$

Sendo A_y a matriz de restrições com os fluxos mensuráveis e A_z a matriz com os fluxos não mensuráveis, mas observáveis.

Precisamos eliminar A_z, o que faremos usando a matriz de projeção P tal que $PA_z = 0$.

A matriz PA_y tem a forma de um vetor que só possui elementos não nulos para os fluxos redundantes correspondentes.

Definiremos a matriz

$$A' \quad | \quad A'_i = (PA_y)_i \;\forall\; (PA_y)_i \neq 0$$

Temos então:

$$\hat{Y} = Y - V(A')^T[(A')V(A')^T]^{-1}A'Y$$

[29]:
```python
#Vamos encontrar a matriz de projeção P por fatorização QR:
q,r = qr(Az,mode='complete')

P = q[:,-1] # ultima coluna de q é a matriz de projeção

#O vetor PAy indica os fluxos não redundantes
# Se um elemento é nulo, quer dizer que o fluxo não é redundante e não pode ser␣
 ↪reconciliado
#PAy tem o comprimento igual ao numero de fluxos mensuráveis
print("A matriz PAy indica os fluxos redundantes: \n")
PAy = P@Ay
print(PAy)
print("\n")
```

```
nRedundant=0

for i in range(nMens):
    if(PAy[i]!=0): #Se o fluxo é redundante, pode-se reconciliá-lo, outros␣
↪fluxos podem ajudar
        nRedundant+=1
        print("A medida %2d é redundante" %i)
    else:
        print("A medida %2d não é redundante" %i)


#Alocando memória
#Matriz de variância
V=zeros((nRedundant,nRedundant))
#Matriz de medidas dos fluxos redundantes
Y=zeros((nRedundant,1))
#Matriz de restrições, é a matriz A'
A_=zeros((1,nRedundant))
#Matriz com todos os fluxos mensuráveis, após a reconciliação
Yfull=zeros((nMens,1))

n = 0
for i in range(nMens):
    if(PAy[i]!=0):#Se o fluxo é redundante
        Y[n,:] = mu[fmens[i]]#Só incluir as medidas redundantes
        V[n,n] = sigma[fmens[i]]*sigma[fmens[i]]
        A_[:,n] = PAy[i] #Construindo a matriz A' segundo sua definição
        n += 1
    else:
        #Se o fluxo não é redundante, já copiamos ele direto pra matriz final
        #Pois ele não será reconciliado
        Yfull[i,:] = mu[fmens[i]]

# Reconciliando
Yhat = Y-V@transpose(A_)@inv(A_@V@transpose(A_))@A_@Y

n = 0
for i in range(nMens):
    if(Yfull[i]==0):
        Yfull[i] = Yhat[n] # Colocando os fluxos reconciliados na matriz final
        n = n+1
#Finalmente, reconciliamos of fluxos observáveis, mas não medidos (os excluídos)
Zhat = -inv(transpose(Az)@Az)@transpose(Az)@(Ay@Yfull)

print("\nMatrizes dos Fluxos Redundantes----------------------------------\n")
print("A matriz de covariância V:\n")
print(V)
```

```python
print("\nMatriz de medidas Y:\n")
print(Y)
print("\nA Matriz de restrições A':\n")
print(A_)
print("\n-----------------------------------------------------------------\n")

print("\nOs fluxos mensuráveis:\n")
for n in range(nMens): print("Fluxo %2d -> %3.3f" %(fmens[n],Yfull[n]))

print("\nOs fluxos observáveis, mas excluídos (não mensuráveis):\n")
for n in range(nExcl): print("Fluxo %2d -> %3.3f" %(fexcl[n],Zhat[n]))
```

```
A matriz PAy indica os fluxos redundantes:

[-7.07106781e-01  1.41421356e+00  7.07106781e-01  7.07106781e-01
  7.07106781e-01  7.07106781e-01 -7.07106781e-01  0.00000000e+00
  0.00000000e+00  0.00000000e+00  0.00000000e+00 -5.55111512e-17
  0.00000000e+00  0.00000000e+00  0.00000000e+00]



A medida  0 é redundante
A medida  1 é redundante
A medida  2 é redundante
A medida  3 é redundante
A medida  4 é redundante
A medida  5 é redundante
A medida  6 é redundante
A medida  7 não é redundante
A medida  8 não é redundante
A medida  9 não é redundante
A medida 10 não é redundante
A medida 11 é redundante
A medida 12 não é redundante
A medida 13 não é redundante
A medida 14 não é redundante

Matrizes dos Fluxos Redundantes---------------------------------

A matriz de covariância V:

[[102.60790425   0.           0.           0.           0.
    0.           0.           0.        ]
 [  0.           4.19985415   0.           0.           0.
    0.           0.           0.        ]
 [  0.           0.          17.57493865   0.           0.
    0.           0.           0.        ]
 [  0.           0.           0.          36.77545451   0.
```

```
   0.           0.           0.         ]
 [ 0.           0.           0.           0.          58.45619424
   0.           0.           0.         ]
 [ 0.           0.           0.           0.           0.
 112.61893251   0.           0.         ]
 [ 0.           0.           0.           0.           0.
   0.         145.36557111   0.         ]
 [ 0.           0.           0.           0.           0.
   0.           0.          70.75648163]]

Matriz de medidas Y:

[[999.98068317]
 [200.06446321]
 [201.66529692]
 [198.30495248]
 [195.36861487]
 [205.3455356 ]
 [203.09509339]
 [399.737448  ]]

A Matriz de restrições A':

[[-7.07106781e-01  1.41421356e+00  7.07106781e-01  7.07106781e-01
   7.07106781e-01  7.07106781e-01 -7.07106781e-01 -5.55111512e-17]]

-----------------------------------------------------------------


Os fluxos mensuráveis:

Fluxo  0 -> 999.507
Fluxo  1 -> 200.103
Fluxo  2 -> 201.746
Fluxo  3 -> 198.475
Fluxo  4 -> 195.638
Fluxo  5 -> 205.865
Fluxo  6 -> 202.424
Fluxo  7 -> 203.810
Fluxo  8 -> 200.563
Fluxo  9 -> 191.774
Fluxo 10 -> 208.947
Fluxo 11 -> 399.737
Fluxo 12 -> 399.228
Fluxo 13 -> 202.646
Fluxo 14 -> 210.145

Os fluxos observáveis, mas excluídos (não mensuráveis):
```

```
Fluxo 15 -> 399.737
Fluxo 16 -> 399.737
Fluxo 17 -> 399.228
Fluxo 18 -> 399.228
Fluxo 19 -> 210.145
```

Fontes:

https://en.wikipedia.org/wiki/Lagrange_multiplier https://tutorial.math.lamar.edu/classes/calciii/lagrangemulti
https://en.wikipedia.org/wiki/Continuity_equation https://en.wikipedia.org/wiki/Weighted_least_squares
http://www.gatsby.ucl.ac.uk/teaching/courses/sntn/sntn-2017/resources/Matrix_derivatives_cribsheet.pdf
https://www2.southeastern.edu/Academics/Faculty/rallain/plab194/error.html