

Descida de gradiente

7 de outubro de 2022

1 Objetivo

Estimar o mínimo de uma função $f(x)$. O argumento x pode ser unidimensional ou multidimensional. A função $f(x)$ pode estar disponível em forma analítica, por ex. $f(x) = x^2$, ou $f(x_1, x_2) = x_1 * x_1 + 3 * x_2 * x_1$, ou somente para um argumento específico x_k , ou seja $f(x_k) = \dots$

O gradiente da função pode estar disponível em forma analítica por ex. $df(x) = 2x$, $df(x) = [2x_1 + 3x_2, 3x_1]$, ou somente para um argumento específico x_k , ou seja $df(x_k) = \dots$, ou nem isso.

Se o gradiente da função não estiver disponível, o gradiente tem que ser aproximado pelo método de diferenças finitas. Veja a eq. (3.1). Esta aproximação pode ser feita separadamente para cada dimensão do argumento x , veja a eq. (3.9).

2 TAREFAS

1. Dada a função $f(x) = \exp(-x) * x * (x * 2 - x - 1)$, o valor inicial $x_0 = 1$, e a taxa de aprendizagem $\alpha = 0.1$, calcule o próximo valor x_1 pela descida de gradiente, usando uma aproximação da derivada pelo método de diferenças finitas (eq. 3.1), com um passo $h = 0.01$, diferenciação numérica.
2. Calcule x_1 , usando a derivada $f'(x)$ Ajuda: Para calcular a derivada analiticamente, use a função 'diff' do pacote 'sympy' do Python. A função 'lambdify' converte de uma função simbólica para uma função numérica.
3. Usando o método da descida de gradiente, tente aproximar o mínimo de f , com o valor inicial $x_0 = 3$ e taxa de aprendizagem $\alpha = 0.1$. Defina as duas condições de parada do Algoritmo 3, com $gmin = 0.1$, $k_{max} = 20$
 - (a) Qual é o valor de um mínimo obtido?
 - (b) Usando um gráfico bidimensional, eixo $x = x$, eixo $y = f(x)$, marque os valores da aproximação $x_0 \rightarrow x_1 \rightarrow x_2 \rightarrow x_3 \rightarrow x_4 \rightarrow x_5 \dots$ e $f(x_0) \rightarrow f(x_1) \rightarrow f(x_2) \rightarrow f(x_3) \rightarrow f(x_4) \rightarrow f(x_5) \dots$ e $f'(x_0) \rightarrow f'(x_1) \rightarrow f'(x_2) \rightarrow f'(x_3) \rightarrow f'(x_4) \rightarrow f'(x_5) \dots$
4. Determine pelo menos dois mínimos da função bidimensional:

$$f(x_1, x_2) = (4 - 2.1 * x_1^{**2} + x_1^{**3} / 3) * x_1^{**3} + x_1 * x_2 + (-4 + 4 * x_2^{**2}) * x_2^{**2}$$

- (a) Use o método de diferenças finitas para aproximar o gradiente.
- (b) Use o gradiente explícito no algoritmo da descida de gradiente
- (c) Desenhe a trajetória de x_k no plano (x_1, x_2) , e o valor da função correspondente $f(x_1, x_2)$ no gráfico 3-D.