

Revisão P2 - Álgebra Linear - 2022-1 - Geometria dos Dados - Comparando e Aproximando Dados - Versão 1

João Paixão

June 15, 2022

Contents

1	Produto Interno - Linha · coluna	3
1.1	Propriedades	3
1.2	Modelagem com o produto interno	3
2	Transposta	4
2.1	Propriedades	4
2.2	Algoritmo	4
3	Norma	5
3.1	Especificação	5
3.2	Algoritmo	5
4	Normalizar	6
4.1	Especificação	6
4.2	Algoritmo	6
5	Distância entre dois vetores	7
5.1	Especificação	7
5.2	Algoritmo	7
6	Projeção ortogonal na reta	8
6.1	Especificação	8
6.2	Algoritmo	8
7	Distância entre um vetor e uma reta	9
7.1	Especificação	9
7.2	Algoritmo	9

8 Cosseno	10
8.1 Especificação	10
8.2 Algoritmo	10
9 Média	11
9.1 Especificação	11
9.2 Algoritmo	11
10 Sistema com infinitas soluções	12
10.1 Especificação	12
10.2 Algoritmo	12
11 Vetor perpendicular	13
11.1 Especificação	13
11.2 Algoritmo	13
12 Mínimos quadrados - Sistema sem solução	14
12.1 Especificação	14
12.2 Algoritmo	14
13 Projeção ortogonal no plano	15
13.1 Especificação	15
13.2 Algoritmo	15
14 Distância entre um vetor e um plano	16
14.1 Especificação	16
14.2 Algoritmo	16
15 Matrizes ortogonais	17
15.1 Especificação	17
15.2 Algoritmo	17
16 Resolver um sistema “ortogonal”	18
16.1 Especificação	18
16.2 Algoritmo	18
17 Fatoração (combinações e ortogonalidade)	19
18 Representação Implícita vs Explícita	20
18.1 Explícita	20
18.2 Implícita	20
18.3 Vantagens e Desvantagens	20
19 Outros Teoremas	21
20 Dicionário - Geometria e Álgebra	21

1 Produto Interno - Linha · coluna

$$a^t b \leftarrow a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n = \sum_{i=1}^n a_i b_i$$

1.1 Propriedades

- $a^t(b + c) = a^t b + a^t c$
- $a^t b = b^t a$
- $(a + b)^t c = a^t c + b^t c$
- $(a + b)^t(c + d) = a^t c + a^t d + b^t c + b^t d$

1.2 Modelagem com o produto interno

Exemplos:

1. Determine a média aritmética de vários números com o produto interno.
2. Determine a soma de vários números com o produto interno.
3. Determine uma média ponderada de vários números com o produto interno.
4. Determine a soma dos 3 primeiros números de vários números.

2 Transposta

2.1 Propriedades

Teorema 2.1. $(AB)^t = B^t A^t$

Teorema 2.2. $(A + B)^t = A^t + B^t$

2.2 Algoritmo

$$A_{ij}^t \leftarrow A_{ji}$$

Obs $A^t B =$ "todos os produtos internos possíveis" entre as colunas de A e B .

3 Norma

Intuição: Achar o tamanho de um vetor v .

3.1 Especificação

- Entrada: Um vetor
- Saída: Um escalar
- $\|v\| \geq 0$
- $\|v\| = 0 \iff v = \bar{0}$
- $\|\lambda v\| = |\lambda| \|v\|$ (λ é um escalar).
- $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$

3.2 Algoritmo

$$\|v\|^2 \leftarrow v^t v$$

4 Normalizar

Intuição: Achar um vetor \bar{v} na mesma direção de v com tamanho um (vetor unitário).

4.1 Especificação

- Entrada: Um vetor v
- Saída: Um vetor \bar{v}
- Existe um λ tal que $\lambda\bar{v} = v$.
- $\|\bar{v}\| = 1$

4.2 Algoritmo

$$\bar{v} \leftarrow \frac{v}{\|v\|}$$

5 Distância entre dois vetores

Intuição: Determine a distância entre v e w .

5.1 Especificação

- Entrada: Um vetor v e um vetor w .
- Saída: Um escalar.
- $dist(v, w) \geq 0$.
- $dist(\lambda v, \lambda w) = |\lambda| dist(v, w)$
- $dist(v, w) = 0 \iff v = w$
- Para qualquer vetor z , $dist(v, w) \leq dist(v, z) + dist(z, w)$

5.2 Algoritmo

$$dist(v, w) \leftarrow \|v - w\|$$

6 Projecção ortogonal na reta

Intuição: Dado um vetor v e uma reta R , determine o vetor p na reta R mais próximo de v .

6.1 Especificação

- Entrada: Um vetor v e uma reta R .
- Saída: Um vetor p .
- Se $w \in R$, então $\text{dist}(v, p) \leq \text{dist}(v, w)$.

6.2 Algoritmo

Seja \bar{w} um vetor unitário na reta R ,
 $p \leftarrow (v^t \bar{w}) \bar{w}$.

7 Distância entre um vetor e uma reta

Intuição: Determine a menor distância entre um vetor v e uma reta R .

7.1 Especificação

- Entrada: Um vetor v e uma reta R .
- Saída: Um escalar λ .
- Se $w \in R$, então $d \leq \text{dist}(v, w)$.

7.2 Algoritmo

$p \leftarrow$ a projeção ortogonal de v na reta R
 $d \leftarrow \text{dist}(v, p)$

8 Cosseno

Intuição: Dado um vetor v e um vetor w , determine um número entre -1 e 1 que mede quanto os dois vetores estão na mesma proporção .

8.1 Especificação

- Entrada: Um vetor v e um vetor w .
- Saída: Um escalar.
- $-1 \leq \cos(v, w) \leq 1$.
- Se existe λ positivo tal que $v = \lambda w$, então $\cos(v, w) = 1$.
- Se existe λ negativo tal que $v = \lambda w$, então $\cos(v, w) = -1$.

8.2 Algoritmo

$$\cos(v, w) \leftarrow \frac{v^t w}{\|v\| \|w\|}$$

9 Média

Intuição:

9.1 Especificação

9.2 Algoritmo

10 Sistema com infinitas soluções

Intuição: Determine todas as soluções de um sistema $Ax = 0$.

10.1 Especificação

- Entrada: Uma matriz A .
- Saída: Todas as soluções x .
- Para todo x , $Ax = 0$

10.2 Algoritmo

$C \leftarrow GJ(A)$ "Gauss-Jordan na A " e depois colocar as variáveis com pivô em função das variáveis sem pivô.

Definição 10.1 (Dimensão da solução). A dimensão da solução é o número de variáveis sem pivô.

11 Vetor perpendicular

Intuição: determine um vetor v , perpendicular à a_1, a_2, \dots, a_n .

11.1 Especificação

- Entrada: os vetores a_1, a_2, \dots, a_n (ou uma matriz A com os vetores a_i como colunas).
- Saída: Um vetor v
- $a_1^t v = 0, a_2^t v = 0, \dots, a_n^t v = 0$.

11.2 Algoritmo

$v \leftarrow$ uma solução *não-nula* do sistema $A^t v = 0$, se existir.

12 Mínimos quadrados - Sistema sem solução

Intuição: determine uma solução aproximada para um sistema linear $Ay = b$ que não tem solução.

12.1 Especificação

- Entrada: A matriz A e um vetor b .
- Saída: Um vetor \bar{x}
- Para todo x , $\text{dist}(A\bar{x}, b) \leq \text{dist}(Ax, b)$

12.2 Algoritmo

$\bar{x} \leftarrow$ solução do sistema $A^t A \bar{x} = A^t b$.

Observação: Se $\text{dist}(A\bar{x}, b) = 0$, então o sistema tem solução exata.

13 Projeção ortogonal no plano

Intuição: Dado um vetor v e um plano P , determine o vetor p no plano P mais próximo de v .

13.1 Especificação

- Entrada: Um vetor v e um plano P (ou dois vetores que geram o plano).
- Saída: Um vetor p .
- Se $w \in P$, então $\text{dist}(v, p) \leq \text{dist}(v, w)$.

13.2 Algoritmo

$\bar{x} \leftarrow$ solução do sistema $A^t A \bar{x} = A^t b$.
 $p \leftarrow A \bar{x}$.

14 Distância entre um vetor e um plano

Intuição: Determine a menor distância entre um vetor v e um reta P .

14.1 Especificação

- Entrada: Um vetor v e um plano P .
- Saída: Um escalar λ .
- Se $w \in P$, então $d \leq \text{dist}(v, w)$.

14.2 Algoritmo

$p \leftarrow$ a projeção ortogonal de v no plano P
 $\lambda \leftarrow \text{dist}(v, p)$

15 Matrizes ortogonais

Intuição: Dado uma matrix Q , verificar se

1. Q quando aplicada à qualquer vetor v não muda o tamanho de v
2. Q quando a aplicada à quaisquer dois vetores v e w o $\cos(v, w)$ não muda

15.1 Especificação

- Para qualquer vetor v , $\|Qv\| = \|v\|$
- Para quaisquer vetores v e w , $\text{dist}(Qv, Qw) = \text{dist}(v, w)$
- Para quaisquer vetores v e w , $\cos(Qv, Qw) = \cos(v, w)$.

15.2 Algoritmo

$$Q^t Q = I$$

Outra maneira de ver As colunas q_i de Q todas tem norma igual à 1 e são perpendiculares entre si.

$$q_i^t q_j = \begin{cases} 1, i = j \\ 0, i \neq j \end{cases}$$

16 Resolver um sistema “ortogonal”

Intuição: Dado uma matriz ortogonal Q e um vetor b , determine um vetor x tal que $Qx = b$.

16.1 Especificação

- Entrada: uma matriz ortogonal Q e um vetor b .
- Saída: Um vetor x .
- $Qx = b$.

16.2 Algoritmo

$x \leftarrow Q^t b$.

17 Fatoração (combinações e ortogonalidade)

Olhar os dois primeiros exercícios da Lista.

18 Representação Implícita vs Explícita

18.1 Explícita

Representação Explícita de uma reta: Representar os vetores da reta R com todas as combinações de um vetor.

18.2 Implícita

Representação Implícita de uma reta: Representar os vetores na reta R por um vetor perpendicular a todos os vetores da reta R .

18.3 Vantagens e Desvantagens

- Explícita vs. Implícita
- Boa para gerar vetores novos vs. Boa para verificar se um vetor está ou não na reta.
- Desenhar vs. colisão em jogos

Obs: Funciona da mesma maneira para o plano.

19 Outros Teoremas

Teorema 19.1. Para todo w na reta R , v é perpendicular à $w \iff v$ é perpendicular à um vetor a_1 que gera a reta R .

Teorema 19.2. Para todo w no plano P , v é perpendicular à $w \iff v$ é perpendicular à dois vetores a_1 e a_2 que geram o plano P .

20 Dicionário - Geometria e Álgebra

1. Geometria \iff Álgebra
2. Humano \iff Álgebra
3. Visual \iff Simbólico
4. $\|x\|^2 = \lambda \iff \lambda = x^t x$
5. v é perpendicular à $w \iff v^t w = 0$
6. v está na reta gerada por $a_1 \iff$ existe um escalar c_1 tal que $a_1 c = v$
7. v está no plano gerado por a_1 e $a_2 \iff$ existe escalares c_1 e c_2 tal que $c_1 a_1 + c_2 a_2 = b$