~~Vitória~~ de Souza Serafim

Prova 3 - Álgebra Linear 2022-1 - Prof. João Paixão

Justifique suas respostas e coloque cada item em uma página **em ordem.**

1. Sabe-se que

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

   (a) Determine os 3 autovalores e 3 autovetores independentes de A. (Dica: Verifique no final se a sua resposta está correta).

   (b) Determine $A^{10}\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$ usando o item anterior.

2. Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 11 \\ 1 & 2 & 12 \\ 1 & 3 & k \\ 1 & 4 & 14 \\ 1 & 5 & 15 \end{bmatrix}$. Sabemos que se um sistema $Ax = b$ tiver alguma solução, então a solução é única.

   (a) Sabendo que $k = 13$ ou $k = 14$, determine k.

   (b) Usando o k do item anterior, determine as condições sobre um vetor genérico $b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \\ b_5 \end{bmatrix}$ para o sistema $Ax = b$ **não ter solução.**

3. Seja V o subespaço de todas as combinações lineares dos vetores

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 31 \\ -41 \\ 0 \\ 10 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

   Temos que $M_{4\times 4}$ é uma matriz tal que para todo vetor $w \in V$, $Mw = \frac{1}{2}w$ e também temos para todos os vetores z que são perpendiculares ao vetores em V, temos que $Mz = \frac{1}{3}z$.

   (a) Determine uma base para V e a dimensão de V com o Gauss-Jordan.

   (b) Determine 4 autovetores independentes de M.

   (c) Aproxime $M^{1000000}$ (dica: não precisa fazer muitas contas).

   (d) Determine os autovalores e autovetores de $M^8 + 2I$ (I é a identidade) e justifique a sua resposta **algébricamente** usando a definição de autovalores e autovetores.

GABARITO

1 a)

$$\begin{array}{c|c|c} 0 & -1 & 2 \\ \hline \begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}-1\\1\\1\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}1\\-1\\2\end{bmatrix}\end{array}$$

ok

b) $\begin{bmatrix}-1\\1\\1\end{bmatrix}$

2 a) Não tem vars livres $\Longrightarrow K=14$

b) $b_4 - 3b_2 + 2b_1 \neq 0$

$b_5 - 4b_2 + 3b_1 \neq 0$

$\begin{bmatrix}2 & 3 & 0 & 1 & 0\end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix}3 & -4 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$

3 a) $\begin{bmatrix}1\\-1\\0\\0\end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix}-1\\0\\0\\1\end{bmatrix}$ $\dim(V)=2$ OK

b)

$$\begin{array}{c|c} 1/2 & 1/3 \\ \hline \begin{bmatrix}1\\-1\\0\\0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1\\0\\0\\1\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}1\\1\\0\\1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\0\\1\\0\end{bmatrix}\end{array}$$

OK

c) $M = \begin{bmatrix}0\end{bmatrix}$ ok

d)

$$\begin{array}{c|c} \dfrac{2^9+1}{2^8} = 2+\left(\dfrac{1}{2}\right)^8 & \dfrac{2\cdot 3^8+1}{3^8} = 2+\left(\dfrac{1}{3}\right)^8 \\ \hline \begin{bmatrix}1\\-1\\0\\0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1\\0\\0\\1\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}1\\1\\0\\1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\0\\1\\0\end{bmatrix}\end{array}$$

OK