Prova 2 - Álgebra Linear 2022-1 - Prof. João Paixão

Justifique suas respostas e coloque cada item em uma página.

1. Seja P um plano onde os vetores são perpendiculares ao vetor $c = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

   (a) Determine a menor distância do vetor $v = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ até o plano P.

   (b) Seja $M_{3\times 3}$ a matriz que projeta ortogonalmente todos os vetores de $\mathbb{R}^3$ no plano P. Determine um vetor $w_{3\times 1}$ com norma igual à 3, tal que $Mw = 0$.

   (c) Determine a terceira (**somente a terceira**) coluna da matriz $M_{3\times 3}$ do item anterior.

   (d) Determine todos os vetores no plano P.

2. Seja $R = \{x | x^t a = 0, x^t b = 0, x^t c = 0\}$ uma **reta** em $\mathbb{R}^3$ com $a = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 9 \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 13 \end{bmatrix}$, $c = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ k \end{bmatrix}$. Determine $k \in \mathbb{R}$ (usando o fato que R é uma reta) e depois determine um vetor v na reta R tal que $\|v\| = 1$.

3. Seja

$$\begin{bmatrix} | & | & | & | \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ | & | & | & | \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} | & | & | & | \\ v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \\ | & | & | & | \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 4 & 2 & 4 \\ 0 & 7 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

   e v_1, v_2, v_3 e $v_4 \in \mathbb{R}^4$ tem norma igual à 1 e são perpendiculares entre si.

   (a) Usando as propriedades algébricas do produto interno, determine o cosseno entre a_3 e a_1.

   (b) Determine $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ tal que para todo $d_1, d_2 \in \mathbb{R}$, $dist(c_1 v_1 + c_2 v_2, a_3) \leq dist(d_1 v_1 + d_2 v_2, a_3)$.

   (c) Usando as propriedades algébricas do produto interno, determine $z \in \mathbb{R}$ não-nulo tal que $z v_1 = v_2$, se possível. Justifique algebricamente se não for possível.

GABARITO

(1) a) $2\sqrt{2} = \sqrt{8} = \frac{4}{\sqrt{2}}$ OK

b) $\begin{bmatrix} 3/\sqrt{2} \\ 0 \\ 3/\sqrt{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3\sqrt{2}/2 \\ 0 \\ 3\sqrt{2}/2 \end{bmatrix}$ OK

c) $\begin{bmatrix} -1/2 \\ 0 \\ 1/2 \end{bmatrix}$ OK

d) $x_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_3 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$

(2) parte 1 $k = 4$ OK

parte 2 $\frac{1}{\sqrt{98}} \begin{bmatrix} -9 \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{7\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -9 \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9\sqrt{2}/14 \\ -2\sqrt{3}/14 \\ \sqrt{2}/14 \end{bmatrix}$ OK

(3) OK

a) $\frac{2}{\sqrt{13}} = \frac{2\sqrt{13}}{13}$ $\qquad \frac{6}{15}$

b) $\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$ OK $\qquad dist = \sqrt{17}$

c) $Zv_1 = v_2$

$v_1^T (Zv_1) = v_1^T v_2$

$Z \underbrace{v_1^T v_1}_{1} = \underbrace{v_1^T v_2}_{0}$ OK $\qquad Z \cdot 1 = 0$ //