Подготовка к экзамену по математическому анализу, 3 семестр

Вопросы по математическому анализу (бакалавры)

Первая часть курса

1. Кратный интеграл Римана на n-мерном промежутке. Необходимое условие интегрируемости.

2. Множества лебеговой меры нуль. Критерий Лебега интегрируемости функции по Риману.

3. Критерий Дарбу интегрируемости вещественнозначной функции. Интеграл по множеству. Мера Жордана множества.

4. Общие свойства интеграла.

5. Сведение кратного интеграла к повторному (теорема Фубини). Замена переменных в кратном интеграле.

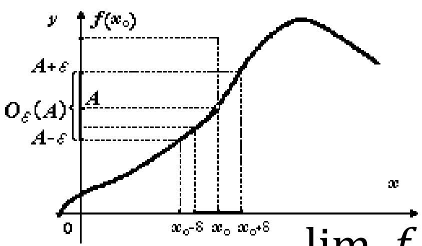
6. Векторные функции скалярного аргумента. Операции анализа над векторными функциями. Кривая. Основные понятия, связанные с кривой. Гладкие кривые. Натуральная параметризация. Касательная к кривой. Длина кривой.

7. Кривизна кривой. Кручение кривой. Репер Френе. Формулы Френе.

8. Параметризованная поверхность. Первая квадратичная форма поверхности.

9 Криволинейные и поверхностные интегралы 1-го и 2-го рода. Независимость криволинейного интеграла 2-го рода от пути интегрирования.

Различные «напоминания»:



Для начала может быть полезным вспомнить картинку, иллюстрирующую понятие предела функции:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A$$

Таким образом, $\varepsilon -$ окрестность аргумента, $\delta -$ окрестность функции (малая величина).

Множество всевозможных упорядоченных наборов *$(x^1, x^2, \dots, x^n)$,* состоящих из *n* действительных чисел $x^i \in \mathbb{R}$, *$i = 1, 2, \dots, n$,* будем называть ***n-мерным координатным пространством*** $\mathbb{R}^n$. . Другими словами, множество $\mathbb{R}^n$ — декартово произведение *n* экземпляров множества $\mathbb{R}$:

$$\mathbb{R}^n = \underbrace{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \ldots \times \mathbb{R}}_{n \text{ сомножителей}}$$

Простыми примерами множества $\mathbb{R}^n$ являются плоскость (при n = 2) и пространство (при n = 3) с фиксированными системами прямоугольных координат. Каждый набор *$(x^1, x^2, \dots, x^n)$* $\in \mathbb{R}^n$ будем обозначать одной буквой x = *$(x^1, x^2, \dots, x^n)$* и в соответствии с указанной геометрической терминологией называть точкой пространстве $\mathbb{R}^n$. Число x^i в наборе $(x^1, x^2, \dots, x^n)$ называют i-той координатой точки x. В двумерном и трёхмерном случаях мы часто прибегают к традиционным обозначениям ((x, y) и (x, y, z)) координат.

a. Промежуток в $\mathbb{R}^n$ и его мера.

Определение 1. Множество $I = \{x \in \mathbb{R}^n \mid a^i \leqslant x^i \leqslant b^i,\ i = 1, \ldots, n\}$ называется *промежутком* или *координатным параллелепипедом* в $\mathbb{R}^n$.

Если желают отметить, что промежуток определяется точками $a = (a^1, \ldots, a^n)$ и $b = (b^1, \ldots, b^n)$, то его часто обозначают символом $I_{a,b}$ или, по аналогии с одномерным случаем, записывают в виде $a \leqslant x \leqslant b$.

Определение 2. Промежутку $I = \{x \in \mathbb{R}^n \mid a^i \leqslant x^i \leqslant b^i,\ i = 1, \ldots, n\}$ ставится в соответствие число $|I| := \prod\limits_{i=1}^{n} (b^i - a^i)$, называемое *объемом* или *мерой промежутка*.

Объем (меру) промежутка I обозначают также символами $v(I)$ или $\mu(I)$.

Лемма 1. *Мера промежутка в* $\mathbb{R}^n$

a) *однородна, т. е. если* $\lambda I_{a,b} := I_{\lambda a, \lambda b}$, *где* $\lambda \geqslant 0$, *то*

$$|\lambda I_{a,b}| = \lambda^n |I_{a,b}|;$$

b) *аддитивна, т. е. если промежутки* $I, I_1, \ldots, I_k$ *таковы, что* $I = \bigcup\limits_{i=1}^{k} I_i$, *и промежутки* $I_1, \ldots, I_k$ *попарно не имеют общих внутренних точек, то* $|I| = \sum\limits_{i=1}^{k} |I_i|$;

c) *если промежуток* I *покрыт конечной системой промежутков* $I_1, \ldots, I_k$, *т. е.* $I \subset \bigcup\limits_{i=1}^{k} I_i$, *то* $|I| \leqslant \sum\limits_{i=1}^{k} |I_i|$.

Все эти утверждения легко вытекают из определений 1 и 2.

Мера множества — неотрицательная величина, интуитивно интерпретируемая как размер (объем) множества. Собственно, мера — это некоторая числовая функция, ставящая в соответствие каждому множеству (из некоторого семейства множеств) некоторое неотрицательное число. Кроме неотрицательности мера как функция должна также обладать свойством аддитивности — мера объединения непересекающихся множеств должна равняться сумме их мер. Необходимо отметить, что не всякое множество измеримо — для каждой функции меры обычно подразумевается некоторое семейство множеств (называемых измеримыми по данной мере), для которых мера существует.

Частным случаем меры является мера Лебега для подмножеств $\mathbb{R}^n$, обобщающая понятие объёма (n=3), площади (n=2) или длины (n=1) на случай множеств, более общих, чем просто ограниченных гладкой поверхностью.

Покрытие в математике — семейство множеств, таких, что их объединение содержит заданное множество. Если C — покрытие множества Y, то любое подмножество D⊂C, также являющееся покрытием Y, называется подпокрытием.

Кратным или многократным интегралом в математическом анализе называют множество интегралов, взятых от *d>1* переменных. Например:

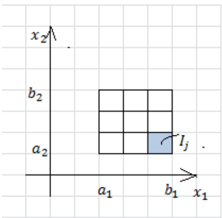
$$\underbrace{\int\cdots\int}_{d} f(x_1,\ldots,x_n)dx_1\cdots dx_d$$

Замечание: кратный интеграл — это определённый интеграл, при его вычислении всегда получается число.

P

1. Кратный интеграл Римана на n-мерном промежутке. Необходимое условие интегрируемости.

Множество $I = I_{ab} = \{x = (x_1, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n,\ a_i \le x_i \le b_i,\ i = 1, \dots, n\}$, где a=$(a_1, \dots, a_n)^T$, b=$(b_1, \dots, b_n)^T$, $a_i \le b_i,\ i = 1, \dots, n$ называют промежутком в $\mathbb{R}^n$ или координатным параллелепипедом.



Разбиение $\tau_i = \{t_{ij}\}_{j=1}^{n}$ отрезков $[a_i,\ b_{i,}], i = 1, \dots, n$ порождает разбиение промежутка I.

Определение Описанное представление промежутка I $\left(\text{в виде объединения } I = \bigcup_{j=1}^{k} I_j \text{ более мелких промежутков } I_j\right)$ будем называть *разбиением промежутка* I и обозначать символом P.

Обозначение: $P = \{I_j\}_{j=1}^{N}$. Пусть $\xi \in I_j$ и $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_N)$. Пара (P, ξ) – разбиение с отмеченными точками.

$d(I_j) = sup_{x,y \in I_j} \rho(x, y)$ – диаметр множества I_j.

$\lambda(\text{P}) = max_{\ i \le j \le N} d(I_j)$ – мелкость разбиения P.

Пусть $J: I \to \mathbb{R}$ и (P, ξ) – разбиение с отмеченными точками. $P = \{I_j\}_{j=1}^{N}$.
Интегральной суммой Римана функции f, соответствующей (P, ξ), называется сумма

$$\sigma(f, P, \xi) = \sum_{j=1}^{N} f(\xi_j)\mu(I_j)$$

где $\mu(I_j)$ – мера (объём) промежутка I, т.е. если
$I = I_{ab}$, то $\mu(I) = (b_1 - a_1) \cdot \dots \cdot (b_n - a_n)$.

Определение. Число J называется **интегралом Римана от функции f** по промежутку I, если $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \colon \forall(\text{P}, \xi)$ $\lambda(\text{P}) < \delta \Rightarrow |J - \delta(f, P, \xi)| < \xi$.
Обозначение:

$$J = \int_I f(x) = (n \text{ интегралов}) \int \dots \int f(x_1, \dots, x_n) dx_1, \dots, dx_n$$
$$= \lim_{\lambda(\mathrm{P}) \to 0} \sigma(f, P, \xi)$$

Если J существует, то f называется интегрируемой на I.
R(I) – множество интегрируемых по I функций.

Теорема. (необходимое условие интегрируемости)
Если $f \in R(I)$, то f ограничена на I.
Док-во: Пусть f не ограничен на I и $P = \{I_j\}_{j=1}^{N}$ – произвольное разбиение I =>
$\exists I_j$: f не ограничена на I_j => существует последовательность

$$\exists \xi_j^{(m)} \in I_j, \qquad m = 1,2, \dots: \lim_{m \to \infty} f(\xi_j^{(m)}) = \infty$$

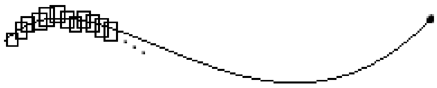
Пусть $\xi_i \in I_i, i \neq j$ произвольной точки.
Тогда

$$\sigma(f, P, \xi) = \sum_{i \neq j} f(\xi_j) \mu(I_j) + f(\xi_j^{(m)}) \cdot \mu(I_j) \to \infty$$

⇨ противоречит определению:
$J = \int_I f(x) dx \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0: \ \forall (\mathrm{P}, \xi) \quad \lambda(\mathrm{P}) < \delta$ =>
$|J - \delta(f, P, \xi)| < \xi$. ■

2. Множества лебеговой меры нуль. Критерий Лебега интегрируемости функции по Риману.

<u>ред.</u> Множество $E\subset\mathbb{R}^n$ называется ством меры ноль, если для $\forall\varepsilon>0\ \exists\{I_j\}$ – тие E промежутками в $\mathbb{R}^n$: $\sum_j \mu\left(I_j\right)<\varepsilon$.
шут $\mu(E)=0$.



<u>Определение множества лебеговой меры 0 НЕ по Битюкову (по Шилову):</u>

Множество E, расположенное на отрезке [a;b], называется множеством меры нуль, если для ∀ε>0 его можно покрыть конечной или счётной системой интегралов, сумма длин которых не превосходит ε.

Для чего это нужно нам? Множествами меры ноль это те множества, которыми можно пренебрегать при вычислении интегралов; точнее говоря, интеграл от функции f(x) не будет изменяться, если значения функции f(x) изменить произвольно на множестве меры нуль.

Если хочется более подробно, то…

Определение. Множество A, расположенное на отрезке $[a, b]$, называется *множеством меры нуль*, если для любого $\varepsilon>0$ его можно покрыть конечной или счетной системой интервалов, сумма длин которых не превосходит ε.

Примерами множеств меры нуль служат множества из одной точки, из двух точек, вообще, любая конечная или счетная совокупность точек. Докажем последнее. Пусть $A=\{x_1, x_2, \ldots\}$ — счетное множество и $\varepsilon>0$ — заданное число; тогда система интервалов с длинами $\frac{\varepsilon}{2}, \frac{\varepsilon}{4}, \ldots, \frac{\varepsilon}{2^n}, \ldots$, последовательно покрывающих точки $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$, покрывает все множество A и имеет общую сумму длин, не большую чем $\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{4}+\ldots+\frac{\varepsilon}{2^n}+\ldots=\varepsilon$. В частности, множество рациональных чисел и множество алгебраических чисел — множества меры нуль.

С другой стороны, весь отрезок $[a, b]$ заведомо не есть множество меры нуль. Действительно, если отрезок покрыт счетной системой интервалов, то по известной лемме анализа можно из указанного покрытия выбрать конечное покрытие; сумма длин даже этих интервалов заведомо превосходит число $b-a$, т. е. длину всего отрезка $[a, b]$.

Уже теперь можно объяснить, почему значения функции на множестве меры нуль несущественны при вычислении интеграла от нее. Достаточно убедиться, что интеграл от функции $f(x)$, равной 1 на множестве A меры 0 и равной нулю на дополнении A, должен быть равен нулю. Покроем множество A системой интервалов с общей длиной $< \varepsilon$. Ясно, что интеграл от функции $f(x)$, если он определен разумно, не должен превосходить суммы площадей прямоугольников высоты 1 с основаниями на указанных интервалах. А эта сумма равна сумме длин самих интервалов и по условию меньше ε, т. е. может быть сделана как угодно малой. Отсюда необходимо следует, что функция $f(x)$ должна иметь интеграл, равный 0.

Мера множества ноль по Зоричу.

2. Критерий Лебега интегрируемости функции по Риману. Изучая интеграл Римана в одномерном случае, мы уже познакомили читателя (без доказательств) с критерием Лебега существования интеграла. Здесь мы напомним некоторые понятия и докажем этот критерий.

a. Множество меры нуль в $\mathbb{R}^n$.

Определение 9. Говорят, что *множество* $E \subset \mathbb{R}^n$ *имеет* (n-мерную) *меру нуль* или является *множеством меры нуль* (в смысле Лебега), если для любого $\varepsilon > 0$ существует покрытие множества E не более чем счетной системой $\{I_i\}$ n-мерных промежутков, сумма $\sum_i |I_i|$ объемов которых не превышает ε.

Лемма 2. a) *Точка и конечное число точек суть множества меры нуль.*

b) *Объединение конечного или счетного числа множеств меры нуль есть множество меры нуль.*

c) *Подмножество множества меры нуль само есть множество меры нуль.*

d) *Невырожденный промежуток* *) $I_{a,b} \subset \mathbb{R}^n$ *не является множеством меры нуль.*

Доказательство леммы 2 ничем не отличается от доказательства ее одномерного варианта, рассмотренного в п 3d, § 1, гл. VI, поэтому мы на нем не останавливаемся.

Пример 1. Множество рациональных точек в $\mathbb{R}^n$ (точек, все координаты которых рациональны) счетно и потому является множеством меры нуль.

Пример 2. Пусть $f\colon I \to \mathbb{R}$ — непрерывная вещественнозначная функция, определенная на $(n-1)$-мерном промежутке $I \subset \mathbb{R}^{n-1}$. Покажем, что ее график в $\mathbb{R}^n$ есть множество n-мерной меры нуль.

◀ Поскольку функция f равномерно непрерывна на I, то по $\varepsilon > 0$ найдем $\delta > 0$ так, чтобы для любых точек $x_1, x_2 \in I$ при условии $|x_1 - x_2| < \delta$ иметь $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$ Если теперь взять разбиение P промежутка I с параметром $\lambda(P) < \delta$, то на каждом промежутке I_i такого разбиения колебание функции f будет меньше ε. Значит, если x_i — произвольная фиксированная точка промежутка I_i, то n-мерный промежуток $\tilde{I}_i = I_i \times [f(x_i) - \varepsilon, f(x_i) + \varepsilon]$, очевидно, содержит всю часть графика функции f, которая лежит над промежутком I_i, а объединение $\bigcup\limits_i \tilde{I}_i$ промежутков $\tilde{I}_i$ покрывает весь график функции f над I. Но $\sum\limits_i |\tilde{I}_i| = \sum\limits_i |I_i| \cdot 2\varepsilon = 2\varepsilon |I|$ (здесь $|I_i|$ — объем I_i в $\mathbb{R}^{n-1}$, $|\tilde{I}_i|$ — объем $\tilde{I}_i$ в $\mathbb{R}^n$). Таким образом, уменьшая ε, действительно можно общий объем покрытия сделать сколь угодно близким к нулю. ▶

Замечание 1. Сопоставляя утверждение b) леммы 2 с примером 2, можно заключить, что вообще график непрерывной функции $f\colon \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}$ или непрерывной функции $f\colon M \to \mathbb{R}$, где $M \subset \mathbb{R}^{n-1}$, является множеством n-мерной меры нуль в $\mathbb{R}^n$.

Лемма 3. a) *Класс множеств меры нуль не изменится от того, понимать ли в определении 9 покрытие множества E системой промежутков $\{I_i\}$ в обычном смысле, т. е. считая $E \subset \bigcup\limits_i I_i$, или в более жестком смысле, требуя, чтобы каждая точка множества была внутренней точкой по крайней мере одного из промежутков покрытия* **).

---

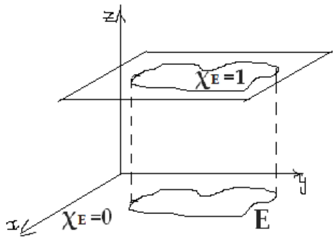
*) То есть такой промежуток $I_{a,b} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid a^i \leq x^i \leq b^i,\ i = 1, \ldots, n\}$, что при любом значении $i \in \{1, \ldots, n\}$ имеет место строгое неравенство $a^i < b^i$.

**) Иными словами, все равно, иметь ли в виду в определении 9 замкнутые или открытые промежутки

Теорема (критерий интегрируемости Лебега), без док-ва.

Пусть f: I→$\mathbb{R}$ и B – множество точек разрыва f. f∈$\mathbb{R}$ (I) ⇔ μ(B)=0. (без док-ва)

//Примечание г-на Битюкова: «Дарбу почти неприменим, а вот Лебег – великая вещь»



Обозначения:

[хи] $\chi_E(x) = \begin{cases} 1, x \in E \\ 0, \ x \notin E \end{cases}$ $E \subset \mathbb{R}^n$

χ_E – характеристическая функция множества

Критерий Лебега по Зоричу:

c. Критерий Лебега. Как и прежде, будем говорить, что некоторое свойство имеет место *почти во всех точках множества M* или выполнено *почти всюду на M*, если подмножество M, где это свойство может нарушаться, имеет меру нуль.

Теорема 1 (критерий Лебега). $f \in \mathcal{R}(I) \Longleftrightarrow$ (*f ограничена на I*) $\wedge$ (*f непрерывна почти всюду на I*).

3. Критерий Дарбу интегрируемости вещественнозначной функции. Интеграл по множеству. Мера Жордана множества.

Теорема. (критерий интегрируемости)

$f \in R(I) \Leftrightarrow f$ опр. на I и $J^* = J_*$

Док-во:

Пусть $f \in R(I) \Rightarrow$ f опр. на I.

$$J = \int_I f(x)dx = \lim_{\lambda(P)\to 0} \sigma(f,P,\xi) \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0: \forall(P,\xi)\ \ \lambda(P) < \delta \ \Rightarrow |J - \sigma(f,P,\xi)| < \varepsilon$$

$$\Rightarrow\ J - \varepsilon < \sigma(f,P,\xi) < J + \varepsilon$$

Т.к. $s(f,P) \le \sigma(f,P,\xi)$ и

$$s(f,P) = \inf \sigma(f,P,\xi) \Rightarrow \exists\hat{\xi}:\ s(f,P) + \varepsilon > \sigma\big(f,P,\hat{\xi}\big) \Rightarrow s(f,P) > \sigma\big(f,P,\hat{\xi}\big) - \epsilon > J - 2\varepsilon$$

$$J - 2\varepsilon < s(f,P) < J + 2\varepsilon\ \Rightarrow |J - s(f,P)| < 2\varepsilon \Rightarrow J = \lim_{\lambda(P)\to 0} s(f,P).$$

Аналогично $J^* = I \Rightarrow J_* = I$

Обратно: Пусть f ограничена и $J^* = J_* = I$.

$I = \lim\limits_{\lambda(P)\to 0} s(f,P) = \lim\limits_{\lambda(P)\to 0} S(f,P).$

Т.к. $s(f,P) \le \sigma(f,P,\xi) \le S(f,P)$

$I = \lim\limits_{\lambda(P)\to 0} \sigma(f,P,\xi) \Rightarrow f \in R(I).$

Характеристическая функция множества $= \chi_E(x) = \begin{cases} 1, x \in E \\ 0,\ x \notin E \end{cases}, E \subset \mathbb{R}^n$

Определение: Пусть $f: E \to \mathbb{R}$ и $E \subset$ I – промежуток. Если $\exists\ \int_I \chi_E(x) \cdot f(x)dx$, то он называется **интегралом** Римана от функции f **по множеству** E и обозначается как $\int_E f(x)dx$.

Функция f называется интегрируемой на E.
$R(E)$ – множество всех интегрируемых на E функций.

Ограниченное множество $E \subset \mathbb{R}^n$ называется измеримым по Жордану, если $\mu(\partial E)=0$.
В этом случае число $\int_E dx$ называется **мерой Жордана** множества E и обозначается как $\mu(E)$.

4. Общие свойства интеграла.

Свойства интеграла Римана (по Зоричу-Битюкову)

1. Множество R(E) является линейным пространством относительно стандартной операции сложения и умножения на число.

Действительно, всё фигня.

$f_1, f_2 \in$ R(E) и B_1, B_2 – множество точек разрыва этих функций, то, по критерию Лебега, $\mu(B_1) = \mu(B_2) = 0$ => множество точек разрыва $f_1 + f_2$ – это подмножество $B_1 \cup B_2$ => имеет меру ноль => $f_1 + f_2 \in R(E)$. Аналогично, $\lambda \cdot f_1 \in R(E)$. ■

2. Если $\mu(\{x \in E: f(x) \neq 0\}) = 0$,
/ функция равна нулю почти всюду (f=0) */*

то $\int_E f\, dx = 0$.

Действительно,
$\int_E f\, dx = \int_I \chi_E(x) \cdot f(x) dx = \lim_{\lambda(P)\to 0} \sum_{i=1}^{N} \chi_E(\xi_i) f(\boldsymbol{\xi_i}) \mu(I_i) = 0.$
($\boldsymbol{\xi_i}$ выбирают так: $f(\boldsymbol{\xi_i}) = 0.$) ■

<u>Следствие:</u> Если $\mu(E) = 0$, то $\int_E f(x) dx = 0$.

<u>Следствие:</u> Если $f, g \in$ R(E) и $f = g$, т.е. $(\mu\{x: f(x) \neq g(x)\} = 0) \Rightarrow \int_E f\, dx = \int_E g\, dx$.

3. Если $f \in R(E)$, то $|f| \in R(E)$ и $\left|\int_E f\, dx\right| \leq \int_E |f|\, dx$.
Очевидно, т.к. если B *– множество точек разрыва* f *и* $\hat{B}$ *– множество точек разрыва*

$|f|$, то $\hat{B} = B \Rightarrow \mu(B) = \mu(\hat{B}) = 0$.

$$\left|\sum_i f(\xi_i)\chi_E(\xi_i)\mu(I_i)\right| \leq \sum_i |f(\xi_i)| \cdot \chi_E(\xi_i)\mu(I_i)$$

Если $f(x) \geq 0$ на E, $f \in R(E)$, то $\int_E f\ dx \geq 0$.

Очевидно, $\sigma(f, P, \xi) = \sum_i f(\xi)\chi_E(\xi_i)\mu(I_i) \geq 0$.

<u>Следствие</u>: $f(x) \geq g(x), \forall x \in E$ и $f, g \in R(E) \Rightarrow$
$\int_E f\ dx \geq \int_E g\ dx$.

<u>Следствие</u>: $m \leq f(x) \leq M, \forall x \in E$ и $f \in R(E)$, то $m \cdot \mu(E) \leq \int_E f\ dx \leq M \cdot \mu(E)$.

5. Сведение кратного интеграла к повторному (теорема Фубини).

Замена переменных в кратном интеграле.

Теорема Фубини.

Пусть A⊂$\mathbb{R}^n$, B⊂$\mathbb{R}^n$ – промежутки и f∊R(A× B). Пусть при x∈ A функция g_x (y)=f(x,y), g_x: B→ℝ и J_*(x) = sup_{P_B} S(g$_x$, P_B) – нижний интеграл Дарбу функции g_x, P_B – разбиение B. J^*(x) = inf_{P_B} S(g$_x$, P_B) – нижний интеграл Дарбу функции g_x, P_B – разбиение B.

Тогда J_*, J^* ∈ R(A) и $\int_{A\times B} f\, dx = \int_A J_*(x)dx = \int_A J^*(x)dx$.

Замечание: Если g_x∈R(B), то $J_*(x) = J^*(x) = \int_B g_x(y)dy = \int_B f(x,y)dy$ => $\int_{A\times B} f(x,y)\,dxdy = \int_A(\int_B f(x,y)dy)dx = \int_A dx(\int_B f(x,y)dy$

Док-во:

Пусть P_A, P_B – разбиение A и B. $P_A = \{I_A\}$, $P_B = \{I_B\}$ => $P = \{I_A \times I_B\}$ – разбиение A× B.

s(f, P) = $\sum_{I_A\times I_B} m_{I_A\times I_B}\mu(I_A \times I_B) = \sum_{I_A}\sum_{I_B} m_{I_A\times I_B}\mu(I_A I_B) = \sum_{I_A}(\sum_{I_B} m_{I_A\times I_B} \cdot \mu(I_B)) \cdot \mu(I_A)$ $\boxed{\leq}$ (по (*))

$$\forall x \in I_A, m_{I_A\times I_B} = inf_{(x,y)\in I_A\times I_B}\, \mathrm{f(x,y)}$$

$$m_{I_B}(g_x) = inf_{y\in I_B} g_x(y) \qquad m_{I_A\times I_B} \leq m_{I_B}(g_x)$$

(*)$\sum_{I_B} m_{I_A\times I_B}\mu(I_B) \leq$ (при ∀ x∊I_A) $\leq \sum_{I_B} m_{I_B}(g_x) \cdot \mu(I_B)$=S$(g_x, P_B)$ $\leq J_*(x) = sup_{P_B}$ S(g$_x$, P_B) => т.е. нер-во при ∀x∈ I_A => $\sum_{I_B} m_{I_B}(g_x) \cdot \mu(I_B) \leq inf_{x\in A} J_*(x)$

$$\boxed{\leq} \sum_{I_A} inf_{x\in A} J_*(x) \cdot \mu(I_A) = s(g_x, P_A)$$

Итак, $s(f,P) \leq s(J_*, P_A) \leq S(J_*, P_A) \leq S(f,P)$.

При мелкости разбиения $\lambda(P) \to 0 \; => \lambda(P_A) \to 0$

$\lim_{\lambda(P)\to 0} s(f,P) = \lim_{\lambda(P)\to 0} S(f,P) = \int_{A\times B} f(x,y)dxdy =>$

$$\lim_{\lambda(P)\to 0} s(J_*, P_A) = \lim_{\lambda(P)\to 0} S(J_*, P_A) = \int_{A\times B} f(x,y)dxdy => J_* \in R(A) \text{и} \int_A J_*(x)dx = \int_{A\times B} f(x,y)dxdy. \blacksquare$$

Теорема о замене переменной в кратном интеграле.

Пусть G, U$\subset\mathbb{R}^n$, ψ: G→U. Причём, ∃ $A_G \subset$ G, $A_U \subset$ G, $\mu(A_G) = \mu(A_U) = 0$: G\ A_G, U\ A_U – открыты и ψ: G\$A_G$ →U\$A_U$ – диффеоморфизм.

Тогда, если fϵR(U), то функции $f_0 \circ \psi(t) \cdot(\det \varphi(t)) \epsilon R(G)$ (φ(t) – матрица Якоби) и $\int_U f(x)\, dx = \int_G f \circ \psi(t) \cdot |\det \psi'(t)| dt$. (без док-ва)

6. Векторные функции скалярного аргумента. Операции анализа над векторными функциями. Кривая. Основные понятия, связанные с кривой. Гладкие кривые. Натуральная параметризация. Касательная к кривой. Длина кривой.

<u>Определение</u>. Если каждому $t \in T \subset \mathrm{R}$ поставлен в соответствие единственный вектор $\bar{a}(t)$, то на T задана **вектор-функция**.

<u>Определение</u>. Вектор $\vec{A}$ называется пределом вектор-функции $\bar{a}(t)$ при $\mathrm{t} \to t_0$, если $\lim_{\mathrm{t}\to t_0} |\vec{A} - \bar{a}(t)| = 0$ $\vec{A} = \lim_{\mathrm{t}\to t_0} \bar{a}(t)$

<u>Теорема 1.</u>

Если $\vec{A} = \lim_{\mathrm{t}\to t_0} \bar{a}(t)$, то $|\overrightarrow{A}| = \lim_{\mathrm{t}\to t_0} |\bar{a}(t)|$

<u>Док-во:</u>

$$0 \le \left| |\overline{A}| - |\bar{a}(t)| \right| \le |\bar{A} - \bar{a}(t)| \to 0, t \to t_0$$

$\Rightarrow$ по т. о двух полицейских $|\bar{A}| = \lim_{\mathrm{t}\to t_0} |\bar{a}(t)|$.

<u>Теорема 2.</u>

Если $|\bar{A}| = \lim_{\mathrm{t}\to t_0} |\bar{a}(t)|$, $|\bar{B}| = \lim_{\mathrm{t}\to t_0} |\bar{b}(t)|$, то

1. $\bar{A} + \bar{B} = \lim_{\mathrm{t}\to t_0} (\bar{a}(t) + \bar{b}(t))$

2. $\overline{(\bar{A}, \bar{B})} = \lim_{\mathrm{t}\to t_0} (\bar{a}(t), \bar{b}(t))$

<u>Док-во 2:</u>

$$\left|\left(\bar{a}(t), \bar{b}(t)\right) - (\bar{A}, \bar{B})\right| = \left|\left(\underbrace{\bar{a}(t) - \bar{A}} + \underbrace{\bar{A}, \bar{b}(t)}\right) - (\bar{A}, \bar{B})\right|$$

$$= \left|\left(\bar{a}(t) - \bar{A}, \bar{b}(t)\right) + (\bar{A}, \bar{b}(t)) - (\bar{A}, \bar{B})\right| =$$

$$= |(\bar{a}(t) - \bar{A}, \bar{b}(t)) + (\bar{A}, \bar{b}(t)) - \bar{B}| \le |(\bar{a}(t) - \bar{A}| \cdot |\bar{b}(t)| + |A| \cdot |\bar{b}(t) - \bar{B}| \to 0$$

$$\Rightarrow \lim_{\mathrm{t}\to 0} |\bar{a}(t), \bar{b}(t)| = (\bar{A}, \bar{B})$$

Определение.

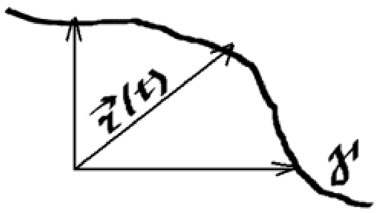
Если $\exists \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\bar{a}(t_0+\Delta t)-\bar{a}(t_0)}{\Delta t}$, то он называется производной вектор ф

Теорема 3.

Если $\bar{a}(t)$ и $\bar{b}(t)$ имеют производные в t_0 и $\bar{a}(t_0) = \lim_{t\to 0} \bar{a}(t)$, $\bar{b}(t_0) = \lim_{t\to 0} \bar{b}(t)$ (непрерывны в t_0), то:

1. $\exists \, (\bar{a}(t)+\bar{b}(t))'_{|t=t_0} = \bar{a}'(t_0)+\bar{b}'(t_0)$
2. $\forall \, f(t) = (\bar{a}(t), \bar{b}(t))$ существуют $f'(t_0) = (\bar{a}'(t_0), \bar{\bar{b}}'(t_0)) + (\bar{a}(t_0), \bar{b}(t_0))$

Пусть на $[a,b]$ задана непрерывная вектор-функция $\bar{r}(t)$ при каждом значении t будем откладывать $\vec{r}(t)$ от некоторой фиксированной точки 0. При изменении t на $[a,b]$ конец вектора опишет некоторое ГМТ которое называется непрерывной ***параметрически заданной кривой***.



Сама вектор-функция называется векторным параметрическим представлением кривой.

$$\gamma\colon \bar{r}(t), t\in[a,b]$$

Пусть $\lambda \in [\alpha;\beta] \to$ на$[a,b]$, строго монотонна.

$\vec{\rho}(\tau) = \vec{r}\big(\lambda(\tau)\big), \tau\in[\alpha,\beta]$

$\Gamma_1 = \{M\in R^5\colon \ \exists t\in[a;b], \overrightarrow{OM} = \vec{r}(t)\}$

$\Gamma_2 = \{N\in R^3\colon \ \exists \tau\in[\alpha;\beta], \overrightarrow{ON} = \vec{\rho}(\tau)\}$

Теорема 3. $\Gamma_1 = \Gamma_2$

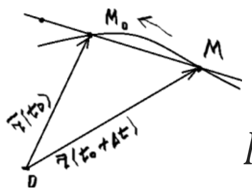
Теорема 4. Если функция $g(t)$ имеет производную в t_0 и вектор-функция $\vec{a}(t)$ имеет производную в t_0, то вектор-функция $g(t)\cdot\vec{a}(t)$ имеет производную в t_0:

$\left(g(t)\cdot\vec{a}(t)\right)'|_{t=t_0} = g'(t_0)\cdot\vec{a}(t_0) + g(t_0)\cdot\overrightarrow{a'}(t_0)$
по теореме 4 , если f, ψ, χ имеют производную, то $\vec{r}(t)$имеет производную:

$$\vec{r}\,'(t) = f'(t)\vec{\imath} + \psi'(\mathrm{t})\vec{\jmath} + \chi'(\mathrm{t})\vec{k}$$

Если $f, \psi, \chi \in \mathrm{C}^k[a,b]$, то кривая γ называется прямой класса C^k.

Пусть γ: $\overrightarrow{r}(t), t \in [a,b]$ – кривая C^l.



M_0M имеет направляющий вектор $\dfrac{\overrightarrow{M_0M}}{\Delta t}$

$$= \frac{\bar{r}(t_0+\Delta t) - \bar{r}(t_0)}{\Delta t}$$

Т.к. $\overrightarrow{r}(t)$ непрерывна в $t_0 \Rightarrow \lim_{\Delta t\to 0}|\bar{r}(t_0+\Delta t) - \bar{r}(t_0)| = 0 \Rightarrow M \to M_0,\ \Delta t \to 0$.

$$\text{Т. е.} \exists \overline{r'}(t_0) = \lim_{t\to 0}\frac{\bar{r}(t_0+\Delta t) - \bar{r}(t_0)}{\Delta t} \Rightarrow$$

то секущая стремится к предельному положению – прямой с направляющим вектором $\bar{r}'(t_0)$.
Это предельное положение называется **касательной к кривой**.
Вывод:
Вектор $\bar{r}'(t_0)$ – направляющий вектор касательной к кривой.

Пусть
λ: $[\alpha,\beta] \to$ "на" [a,b] - строго монотонная функция γ: $\bar{r}(t), t \in [a,b]$
Рассмотрим вектор-функцию

$$\vec{\rho}(\tau) = \vec{r}\left(\lambda(\tau)\right), \tau \in [\alpha, \beta]$$

Определение:

Пусть $\gamma: \bar{r}(t), t \in [a,b]$ – класса C^1

Длиной кривой γ называется число $L = \int_a^b |\vec{r}'(t)| dt \quad (*)$

Теорема:

Значение (*) не зависит от выбора параметра представленной кривой.

Док-во:

Пусть $\vec{\rho}(\tau) = \vec{r}(\lambda(\tau)), \tau \in [\alpha, \beta]$ – другое параметрическое представление кривой.

$$\int_a^b |\vec{r}'(t)| dt = \boxed{t = \lambda(\tau) - \text{случай } \lambda > 0}$$

$$= \int_a^b |\vec{r}'(\lambda(\tau))| \cdot \lambda'(\tau) d\tau = \int_\alpha^\beta |\vec{r}'(\lambda(\tau))| \cdot \lambda'(\tau) d\tau =$$

$$= \int_\alpha^\beta \left|\overrightarrow{(r}(\lambda(\tau)))\right| d\tau = \int_\alpha^\beta (p'(\tau) d\tau$$

$\overrightarrow{OA} = \vec{r}(a),\ \overrightarrow{OB} = \vec{r}(b), \quad \overrightarrow{OM} = \vec{r}(t)$

$$s(t) = \int_a^b |\vec{r}'(\xi)| d\xi \ , s - \text{длина дуги}$$

По свойству интеграла с переменным верхним пределом.

$S(t) \in C^1[a;b]$ и $S'(t) = |\vec{r}(t)|$

Если $\vec{r}'(t) \neq 0$,

Если $\vec{r}'(t) \neq 0,\ \forall t \in [a;b]$, то кривая γ называется **гладкой** $=> s(t) > 0 => s(t)$ строго возрастает => есть обратная

$t = t(s), s \in [0, L] =>$

гладкую кривую можно задать параметрическим представлением

$\vec{p}(s) = \vec{r}\big(f(s)\big), s \in [0; t]$

s – переменная длина дуги, которая называется **натуральным параметром**.

7. Кривизна кривой. Кручение кривой. Репер Френе. Формулы Френе.

Рассмотрим гладкую кривую $\gamma: \bar{r}(t), t \in [a,b]$

Т.к. для любого параметра представлена $s'(t) = \left|\overrightarrow{r'}(t)\right| =>$

$\left|\overrightarrow{r'}(s)\right| = 1$

Следовательно, касательный вектор $\vec{\tau} = \overrightarrow{r'}(s)$ имеет единичную длину =>

$$\left(\overrightarrow{r'}(s), \overrightarrow{r'}(s)\right) = 1 \;\; => \;\; \left(\overrightarrow{r''}(s), \overrightarrow{r'}(s)\right) \cdot \left(\overrightarrow{r'}(s), \overrightarrow{r''}(s)\right) = 0$$

$$\left(\overrightarrow{r''}(s), \tau'\right) = 0 \;\; => \overrightarrow{r'} \text{ огр.} \tau$$

Вектор $\vec{\tau}$ и $\overrightarrow{r''}$ определяет *соприкасающиеся плоскости*.

Нормаль кривой, лежащая в соприкасающейся плоскости, называется *главной нормалью*.

Нормаль кривой, которая $\perp$соприкасающейся плоскости называется *бинормалью*.

Плоскость, задающаяся нормалями, называется *нормальной плоскостью*.

Плоскость, определяемая бинормалью и касательной, называется *спрямляющей плоскостью*.

Плоскость, определяемая касательной и нормалью, называется *соприкасающейся плоскостью*.

Совокупность плоскостей из прямых называется ***многогранником Френе***.

Пусть дана гладкая кривая γ: $\bar{r}'^{(s)}, s \in [0, L]$

Производную будем обозначать $\left|\dot{\vec{r}}\right| = 1$. Обозначим $\vec{\tau} = \vec{r} =>$

$\vec{\tau}$ – единичный касательный вектор.

$$\text{Т.к.} \; (\vec{\tau};\, \vec{\tau}) = 1 \;\; => \;\; \left(\dot{\vec{\tau}};\, \vec{\tau}\right) = 0 \;\; => \;\; \vec{\tau} \perp \ddot{\vec{r}}$$

Пусть $k = |\ddot{\vec{r}}|$ => $\vec{n} = \frac{\ddot{\vec{r}}}{k}$ – единичный вектор

Т. к. $\ddot{\vec{r}} = \dot{\vec{\tau}}$ => $\boxed{\dot{\vec{\tau}} = k \cdot \vec{n}}$ k – <u>кривизна кривой</u>

$|\vec{b}| = [\vec{\tau}, \vec{n}]$ – вектор бинормали

$$\dot{\vec{b}} = [\dot{\vec{\tau}}; \vec{n}] + [\vec{\tau}, \dot{\vec{n}}] = [k \cdot \vec{n}; \vec{n}] + [\vec{\tau}, \dot{\vec{n}}] = [\vec{\tau}, \dot{\vec{n}}]$$

Т. к. $(\vec{n}; \vec{n}) = 1$ => $\dot{\vec{n}} \perp \vec{n}$ => $[\vec{\tau}, \dot{\vec{n}}] \perp \vec{\tau}$, $[\vec{\tau}, \dot{\vec{n}}] \perp \vec{n}$ => $[\vec{\tau}, \dot{\vec{n}}] // \vec{n}$ $\Rightarrow$ $\dot{\vec{b}} = [\vec{\tau}, \dot{\vec{n}}] = -\varkappa \cdot \vec{n}$

$\varkappa$ - **кручение кривой** (каппа).

Итак, $\boxed{\dot{\vec{b}} = -\varkappa \cdot \vec{n}}$

$\vec{n} = [\vec{b}, \vec{\tau}]$

$\dot{\vec{n}} = [\dot{\vec{b}}, \vec{\tau}] + [\vec{b}, \dot{\vec{\tau}}] = -\varkappa[\vec{n}, \vec{\tau}] + k[\vec{b}, \vec{n}] = \boxed{\varkappa \cdot \vec{b} - k \cdot \vec{\tau}}$

Окончательно:

$\dot{\vec{\tau}} = k \cdot \vec{n}$

$\dot{\vec{b}} = -\varkappa \cdot \vec{n}$

$\dot{\vec{n}} = \varkappa \cdot \vec{b} - k \cdot \vec{\tau}$ – уравнения Френе

8. Параметризованная поверхность. Первая квадратичная форма поверхности.

Пусть D⊂$\mathbb{R}^2$ – область в $\mathbb{R}^2$ и $\vec{r}(u,v)$ – непрерывная вектор-функция на D.

При каждом значении параметров u и v будем откладывать $\vec{r}(u,v)$ от некоторой фиксированной точки О. Конец вектора при этом опишет некоторое Геометрическое Место Точек $\sum$, которое называется ***параметрически заданной поверхностью***.

Сама вектор-функция называется *векторной параметрически представленной поверхностью*.

Пусть $u(t), v(t)$определена на $T \subset \mathbb{R}$: при $\forall t \in T \ \ =>$ $\big(u(t), v(t)\big) \in D \ \ =>$ можно рассмотреть кривую на поверхности. γ: $\bar{r}(t) = \bar{r}(u(t), v(t)\ ),\ \ t \in T -$ касательный вектор к кривой.

Т.к. $\bar{r}'^{(t)} = \ \overline{r_u{}'}(u') + \overline{r_v{}'}(v')$, где u’ и v’ – коэффициенты.

$$\overrightarrow{OM_0} = \vec{r}(t_0) = \ \vec{r}(u_0, v_0), u_0 = u(t_0), \qquad v_0 = v(t_0)$$

$$\overrightarrow{r_u{}'}(u_0, v_0), \overrightarrow{r_v{}'}(u_0, v_0), \text{если не колеарны} = \\ > \text{они определяют плоскость, которой кол} - \text{рны}$$

касат. векторы по всевозможным кривым на пов-ти, проход. через M_0.

Такая плоскость называется касательной плоскостью к поверхности M_0.

Вектор нормали этой плоскости

$$\vec{n} = \frac{[\overrightarrow{r_u{}'}, \overrightarrow{r_v{}'}]}{\left|[\overrightarrow{r_u{}'}, \overrightarrow{r_v{}'}]\right|} \text{ называется нормалью к поверхности в } M_0.$$

Параметры u, v – криволинейные координаты точки поверхности.

Определение.

Поверхность $\sum: \vec{r}(u,v) = x(u,v)\vec{i} + y(u,v)\vec{j} + z(u,v)\vec{k}$; $(u,v) \in D$называется *элементарным гладким куском,* если функции $x(u,v) + y(u,v) + z(u,v)$ дифференцируемы в области D ив каждой точке $(u,v) \in D$.

$$\left(\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right)^2 + \left(\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}\right)^2 + \left(\frac{\partial(x,z)}{\partial(u,v)}\right)^2 > 0 \quad (\text{сумма Якобианов} > 0)$$

$$\left[\overrightarrow{r_u{}'}; \overrightarrow{r_v{}'}\right] = \begin{vmatrix} i & j & k \\ x_u{}' & y_u{}' & z_u{}' \\ x_v{}' & y_v{}' & z_v{}' \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}; \frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}; \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right) =>$$

нер-во в опред. => в каждой точке такой поверхности есть касательная плоскость.

Поверхность, которую можно разбить на конечное число элементарных гладких кусков.

Поверхность $\sum: \vec{r}(u,v)$; $(u,v) \in D$ – пов-ть и $\gamma: \bar{r}(t) = \bar{r}(u(t), v(t))$, $t \in [a,b]$ – кривая на пов-сти

$$s(t) = \int_a^t \left|\overrightarrow{r'}(\tau)\right| d\tau$$

$$= \int_a^t \left|\overrightarrow{r_u{}'}u' + \overrightarrow{r_v{}'}v'\right| d\tau$$

$$= \int_a^t \sqrt{\left(\overrightarrow{r_u{}'}u' + \overrightarrow{r_v{}'}v',\ \overrightarrow{r_u{}'}u' + \overrightarrow{r_v{}'}v'\right)}\, d\tau =$$

$$\int_a^t \sqrt{\left(\overrightarrow{r_u{}'},\ \overrightarrow{r_u{}'}\right)(u')^2 + 2\cdot\left(\overrightarrow{r_u{}'},\ \overrightarrow{r_v{}'}\right)\cdot u'\cdot v' + \left(\overrightarrow{r_v{}'},\ \overrightarrow{r_v{}'}\right)(v')^2}\, d\tau$$

$$s'(t) = \sqrt{E(u')^2 + 2\cdot G\cdot u'\cdot v' + F(v')^2}$$

$$(ds)^2 = Edu^2 + 2Gdudv + Fdv^2$$

$(ds)^2 = (s')^2(dt)^2$. С учётом $u'dt = du, \qquad v'dt = dv$

$\boxed{(ds)^2 = Edu^2 + 2Gdudv + Fdv^2}$

Первая квадратичная форма поверхности.

Пусть D⊂I – промежуток в $\mathbb{R}^2$и $\{I_j\}$ − разбиение I.

$P = \{I_j\colon I_j \subset \mathrm{D}\}$ => поверхность $\sum$ кривыми

$\vec{r}(u_j, v)$ и $\vec{r}(u, v_i)$

− разбиение на криволинейные параллелограммы. (u_j, v_i

− фиксир., v, u − переменные)

Кривые $\vec{r}(u, v_0)$ называются u линиями, $\vec{r}(u_0, v)$ называются v линия

Совокупность этих кривых называется *координатной сетью на поверхности.*

Поверхность, которую можно разбить на конечно число элементарных кусков называется *кусочно-гладкой поверхностью.*

9 Криволинейные и поверхностные интегралы 1-го и 2-го рода. Независимость криволинейного интеграла 2-го рода от пути интегрирования.

Пусть γ: $\bar{r}(s), s \in [0, L]$ − гладкая кривая. $\bar{r}(s) = x(s)\vec{\imath} + y(s)\vec{\jmath} + z(s)\vec{k}$

Пусть в точках γ задана функция $f(x, y, z)$.

Криволинейным интегралом 1-го рода $\int_\gamma f(x, y, z)ds$ называется следующий определённый интеграл:

$$\int_0^i F(x(s), y(s), z(s)ds.$$

Определение. Предел $\lim_{\delta \to 0} S$, если он существует, называется *криволинейным интегралом 1-го рода* от функции $f(x,y)$ по кривой L и обозначается (*) $\int_L f(x,y)dl = \lim_{\delta \to 0} S.$

В случае замкнутой кривой L выбирается произвольная точка на кривой, которая принимается за концевые точки A, B, и криволинейный интеграл 1-го рода определяется аналогично случаю незамкнутой кривой.

Теорема (достаточное условие существования интеграла). Если функция $f(x,y)$ непрерывна на кривой L за исключением, быть может, конечного числа точек и ограничена на L, то криволинейный интеграл 1-го рода (*) существует.

Некоторые свойства криволинейного интеграла 1-го рода. Для криволинейных интегралов 1-го рода выполняются свойства *линейности* и *аддитивности*.

1) $|L|=\int_L dl$, где $|L|$- длина кривой L.

2) Криволинейный интеграл 1-го рода (*) не зависит от ориентации кривой L. Это значит, что интеграл не зависит от того, какая из концевых точек A и B является начальной точкой кривой.

Физический смысл криволинейного интеграла 1-го рода. Пусть L - кривая с линейной плотностью массы $m\,(x, y)$. Тогда масса кривой равна

$$m = \int_L \mu(x, y)dl.$$

<u>Замечание.</u> Криволинейный интеграл 1-го рода аналогично определяется и для пространственной кривой.

<u>Вычисление криволинейного интеграла 1-го рода.</u> Пусть кривая L задана параметрическими уравнениями $x=\varphi(t), y=\psi(t), \alpha \le t \le \beta,$
где $\varphi(t)$, $\psi(t)$ - непрерывно дифференцируемые на отрезке $[\alpha, \beta]$ функции. Тогда

$$\int_L f(x,y)dl = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t),\psi(t))\sqrt{\varphi'(t)^2+\psi'(t)^2}\,dt.$$

Пусть кривая L задана явно уравнением $y=g\,(x)$, $\alpha \le t \le \beta$, где $g\,(x)$ - непрерывно дифференцируемая на $[\alpha, \beta]$функция. Тогда

$$\int_L f(x,y)dl = \int_a^b f(x,g(x))\sqrt{1+g'(x)^2}\,dt.$$