Лекции

ПО КУРСУ

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Лекции читал: Пунтус А.А.

Лекции писали: Грудинина Т.В. (tyana), Сергукова Ю.М. (Graukin)

Лекции набирала: Сергукова Ю.М. (Graukin)

Москва

2007 — 2008 гг

I семестр

Необходимые учебные пособия

1. Филиппов А.Ф. "Введение в теорию дифференциальных уравнений"
2. Эльсгольц Л.Э. "Дифференциальные уравнения и вариационные исчисления"
3. Федорюк М.В. "Обыкновенные дифференциальные уравнения"
4. Пунтус А.А. "Учебное пособие по аналитическим методам решения задачи Коши"
5. Пунтус А.А. "Учебное пособие по приближенно-аналитическим и численным методам решения задачи Коши"
6. Пунтус А.А. "Метод малого параметра"
7. Пунтус А.А. "Качественные методы исследования динамических систем"
8. Пунтус А.А. "Проблемы новой постановки математических дисциплин в технических ВУЗах"
9. Киселев А.И., Краснов М.А., Макаренко Г.И. "Сборник задач по обыкновенным дифференциальным уравнениям"
10. Демидович Б.П., Марон И.А., Шувалова Э.З. "Численные методы анализа"

Базовые определения

Пример применения дифференциальных уравнений (далее — ДУ):

$\ddot{s} = a$

$s = \dfrac{at^2}{2} + v_0 t + s_0$

начальная задача $\begin{cases} \dot{s}(t_0) & = v_0; \\ s(t_0) & = s_0; \end{cases}$

краевая задача $\begin{cases} s(t_0) & = s_0; \\ s(t_1) & = s_1; \end{cases}$

Df 1 ДУ называется соотношение вида $F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0$, связывающее независимую переменную x, функцию y этой независимой переменной, производные функции y по x до n-го порядка, где функция F определена и достаточное число раз дифференцируема в некоторой области изменения своих аргументов.

Df 2 Решением ДУ называется функция $y(x)$, определенная и достаточное число раз дифференцируемая в некоторой области, при подстановке которой в исходное уравнение получается справедливое тождество.

График решения ДУ — интегральная кривая (при графическом решении).

Интегрирование ДУ — процесс его решения.

Df 3 Если решение имеет неявный вид, то такой вид решения называется интегралом ДУ.

Df 4 Порядком ДУ называется порядок старшей входящей в него производной.

Df 5 Общим решением ДУ (при выполнении некоторых условий) называется соотношение вида $y = y(x, c_1, c_2, \ldots, c_n)$, зависящее от n произвольных постоянных, при каждом наборе значений которых это соотношение является решением ДУ, и наоборот, любое решение данного ДУ n-го порядка содержится в этом семействе при определенных значениях произвольных постоянных.

Df 6 Если общее решение имеет неявный вид $\varphi(x, y, c_1, c_2, \ldots, c_n) = 0$, то такое неявное решение называется общим интегралом.

Замечание ДУ n-го порядка имеет обязательно общее решение, зависящее от n произвольных постоянных.

Df 7 Каждое решение или каждый интеграл в составе общего решения или общего интеграла называется, соответственно, частным решением или частным интегралом.

Замечание В дальнейшем в курсе лекций будет дано определение особого решения ДУ.

Замечание Всюду в дальнейшем, если особо не оговорено, все функции, переменные и постоянные будут рассматриваться в действительной области.

Замечание При проведении операции дифференцирования, интегрирования (если особо не оговорено) полагается, что эти операции выполнимы.

Замечание При решении задач (если особо не оговорено) переменные x и y следует полагать равноправными. [Т.е. в ответе должно быть учтено, что либо $y(x)$, либо $x(y)$]

Df 8 Если в ДУ содержится только одна независимая переменная, то такое ДУ называется обыкновенным ДУ. Если же независимых переменных 2 или более, то такое ДУ называется ДУ в частных производных.

Df 9 Если ясно, какое уравнение рассматривается, то слова "обыкновенное" или "в частных производных" могут опускаться.

Df 10 Порядком ДУ называется наивысший порядок производной, входящей в состав данного ДУ.

Df 11 Степенью ДУ называется показатель степени, в которую возведена производная наивысшего порядка для данного ДУ.

Пример:

$x^3 + y^7 - (y')^5 = 0$ — ДУ 1 порядка, 5 степени.

Основные задачи курса дифференциальных уравнений

1. изучение методов интегрирования ДУ и систем ДУ
2. изучение свойств решений ДУ, не определяя самих решений

Методы решения ДУ (классификация):

I. *Точные (аналитические) методы*

Если уравнение аналитически не решается, то говорят, что его решение не может быть получено в квадратурах.

II. *Приближенные методы*

a. приближенно-аналитические методы
b. численные методы
c. графические методы

Семейство кривых от n параметров и его ДУ

$$\begin{cases} \Phi(x, y, c_1, c_2, \ldots, c_n) = 0; \\ \Phi'_x + \Phi'_y \cdot y' = 0; \\ \Phi''_{xx} + \Phi''_{yy} \cdot (y')^2 + \Phi'_y \cdot y'' = 0; \\ \ldots \\ \Phi_x^{(n)} + \ldots + \Phi'_y \cdot y^{(n)} = 0; \end{cases}$$

Пример:

$$\begin{cases} y = \dfrac{a}{2}x^2 + bx; \\ y' = ax + b; \qquad y' = y''x + b \Rightarrow b = y' - y''x \\ y'' = a; \end{cases}$$

$$y = \frac{y''}{2}x^2 + y'x - y''x^2;$$

$$y'' \cdot \left(-\frac{x^2}{2}\right) + y' \cdot (x) - y = 0;$$

ДУ первого порядка

Приближенное графическое решение ДУ первого порядка

$y' = f(x, y)$

Берем точку, принадлежащую области, в которой определена функция. Подставляем в $f(x, y)$. Получаем число $y' - tg$ угла наклона касательной в данной точке. Из множества направлений складывается поле направлений.

Кривая, которая касается в каждой своей точке поля направления будет интегральной кривой.

Геометрическое построение интегральных кривых облегчается использованием метода изоклин.

Df 1 Изоклиной в поле направлений называется кривая, в каждой точке которой направление поля одно и то же.

Пример:

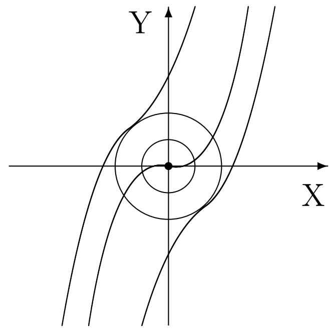
$y' = x^2 + y^2$;

$0 : 0 = x^2 + y^2$

$-1 : -1 = x^2 + y^2 \nexists$ в $\mathbb{R}$

$1 : 1 = x^2 + y^2$

$4 : 4 = x^2 + y^2$



Т.е. изоклины имеют вид окружностей с центрами в начале координат. На рисунке — изоклины, соответствующие $y' = 1$ и $y' = 4$.

Кривые — некоторые из возможных решений данного ДУ.

Параметр, от которого зависит семейство решений:

— координата x при $y = 0$;

— координата y при $x = 0$;

Аналитические методы интегрирования для ДУ 1 порядка

Задача Коши для ДУ 1 порядка:

Найти решение $y(x)$ ДУ $y' = f(x, y)$, удовлетворяющее условию $y(x_0) = y_0$.

Значения x_0 и y_0 в ЗК называются "начальными значениями".

Соотношение $y(x_0) = y_0$ называется "начальным условием".

В соответствии с этим ЗК называют "начальной задачей".

Задачу Коши решает Теорема Коши.

Теорема Коши:

Пусть в некоторой области изменения своих переменных функция $f(x, y)$ непрерывна. Тогда $\forall (x_0, y_0)$ этой области можно указать такой интервал $x_0 - h < x < x_0 + h, h > 0$ оси OX, на котором $\exists y(x)$ — решение ДУ $y' = f(x, y)$, удовлетворяющее условию $y(x_0) = y_0$.

Если, кроме того, в этой области непрерывна производная $\dfrac{\partial f}{\partial y} \left(= \dfrac{\partial y'}{\partial y} \right)$, то указанное решение будет единственным.

Замечание Условие непрерывности функции $f(x, y)$ является условием существования решения ЗК, а условие непрерывности $\frac{\partial f}{\partial y}$ является условием единственности этого решения.

Следствие [из Th Коши]Если в некоторой области выполнены условия Th Коши, то решение ЗК может быть продолжено до границ области.

Задача Коши для ДУ вида $F(x, y, y') = 0$:

Найти решение $y(x)$, удовлетворяющее условию $y(x_0) = y_0$.

Если это ДУ нельзя разрешить относительно y', то оно называется "неразрешенным ДУ 1 порядка". Если же относительно y' его можно разрешить, т.е. можно представить это ДУ в виде $y' = f(x, y)$, то оно называется "разрешенным ДУ 1 порядка".

Теорема Коши:

Пусть в некоторой области изменения своих аргументов функция $F(x, y, y')$ и ее производная $\frac{\partial F}{\partial y'}$ непрерывны и, кроме того, $\frac{\partial F}{\partial y'}$ не обращается в 0. Тогда $\forall (x_0, y_0)$ соответствующей области можно указать такой интервал $x_0 - h < x < x_0 + h, h > 0$ оси OX, на котором $\exists y(x)$ — решение ДУ $F(x, y, y') = 0$, удовлетворяющее условию $y(x_0) = y_0$.

Пусть, кроме того, в данной области непрерывна производная $\frac{\partial F}{\partial y}$, т.е. непрерывна производная $\frac{\partial y'}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial y'}}$, то $\forall y'_0$, являющегося корнем уравнения $F(x, y, y') = 0$, такое решение, удовлетворяющее условиям $y(x_0) = y_0$ и $y'(x_0) = y'_0$, является единственным.

Пример:

$(y')^2 - (x + y)y' + xy = 0;$

$\left(y' - \frac{1}{2}(x + y)\right)^2 - \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}xy - \frac{1}{4}y^2 + xy = 0;$

$\left(y' - \frac{1}{2}(x + y)\right)^2 = \frac{1}{4}(x^2 + y^2) - \frac{1}{2}xy = \left[\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y\right]^2;$

Пусть $x = 2, y = 3$

$(y')^2 - 5y' + 6 = 0;$

$y' = 3, y' = 2;$

$(y' - x)(y' - y) = 0$

Методы интегрирования ДУ 1 порядка, разрешенных относительно производной

$y' = f(x, y)$

Переход к $x(y)$: $x' = \dfrac{1}{f(x,y)}$

$\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{M(x,y)}{N(x,y)} \to M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$

Типизация уравнений:

1) с разделяющимися переменными и приводящиеся к ним;
2) однородные и приводящиеся к ним;
3) линейные и приводящиеся к ним;
4) в полных дифференциалах.

ДУ с разделяющимися переменными

Df 1 ДУ называется уравнением с РП, если его можно записать в виде

$$P(x)Q(y)dx + R(x)S(y)dy = 0 \quad | \cdot \frac{1}{R(x)Q(y)}$$

$$\frac{P(x)}{R(x)}dx = -\frac{S(y)}{Q(y)}dy$$

$$\int \frac{P(x)}{R(x)}dx = -\int \frac{S(y)}{Q(y)}dy + C$$

$$\varphi(x) + \psi(y) = C$$

Замечание Отдельно рассматриваются случаи $R(x) = 0$, $Q(y) = 0$ и $\varphi(x) + \psi(y) = C$. Если при решении последнего уравнения было получено общее решение, в которое не входят частные решения, полученные при решении первых двух равенств, то они записываются в ответ отдельно.

Пример:

$x(y^2 - 1)dx - y(x^2 - 1)dy = 0$

$\dfrac{xdx}{x^2 - 1} = \dfrac{ydy}{y^2 - 1}$

$\int \dfrac{2xdx}{x^2 - 1} = \int \dfrac{2ydy}{y^2 - 1} + C$

$\ln|x^2 - 1| = \ln|y^2 - 1| + \ln C$

$(x^2 - 1) = C(y^2 - 1)$

Ответ можно представить как в общем виде, так и выразить $y(x)$[или $x(y)$].

Проверяем:

$x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = \pm 1$ — при $C = 0$

$y^2 - 1 = 0 \Rightarrow y = \pm 1$ — не учтено в общем решении, значит, надо записать отдельно.

Замечание Если при решении ДУ получается выражение в логарифмах, то и произвольная постоянная может быть записана, как $\ln C$

Замечание Если при решении ДУ получается выражение в логарифмах и затем производится потенциирование, то в промежуточном выражении логарифмов модуль можно не ставить, т.к. при потенциировании этот знак модуля все равно исчезает. Если же потенциирование не проводится, то знак модуля ставить обязательно!

Замечание При решении ДУ можно получить несколько вариантов записи ответа, причем все эти ответы — эквивалентны, т.е. отражают одно и то же семейство решений.

Замечание В некоторых учебниках ДУ с разделяющимися переменными определяются, как уравнения, которые можно записать в виде $y' = f(x) \cdot \varphi(y)$

ДУ, приводящиеся к ДУ с разделяющимися переменными

$y' = f(ax + by + c)$

Для приведения к ДУ с разделяющимися переменными применяется подстановка: $\begin{cases} u = ax + by + c \\ x = x \end{cases}$ или $\begin{cases} u = ax + by \\ x = x \end{cases}$, которая приведет данное уравнение к виду с разделяющейся переменной.

$u = ax + by$

$u' = a + by' \Rightarrow y' = \dfrac{u' - a}{b}$

$\dfrac{u' - a}{b} = f(u + c) \to u' - a = b \cdot f(u + c) \to \dfrac{du}{bf(u + c) + a} = dx$

Пример:

$y' = 5x + y - 7$

$\begin{cases} u = 5x + y - 7 \\ x = x \end{cases}$

$u' = 5 + y'$

$y' = u' - 5$

$u' - 5 = u$

$\dfrac{du}{dx} = u + 5$

$\dfrac{du}{u + 5} = dx$

$\ln(u + 5) = x + \ln C$

$u + 5 = Ce^x$

$5x + y - 2 = Ce^x \leftarrow$ ответ.

Проверяем $u + 5 = 0$:

$u = -5$

при $C = 0$ содержится в общем решении $\Rightarrow$ отдельно выписывать его не надо.

Замечание Если при решении ДУ проводится замена переменных, то в результате решения необходимо обязательно провести обратную замену переменных, т.к. решение должно быть в тех же переменных, в которых было дано исходное уравнение.

Однородные уравнения

Df 1 Функция $M(x, y)$ называется однородной функцией относительно своих аргументов, если $\forall t$ выполняется равенство $M(tx, ty) = t^m M(x, y)$. Показатель m называется измерением или степенью однородности.

Df 2(1) ДУ $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ называется однородным, если функции $M(x, y)$ и $N(x, y)$ являются однородными функциями одинаковой степени однородности.

Df 2(2) Уравнение $y' = f(x, y)$ является однородным, если функция $f(x, y)$ — однородная функция 0 степени измерения, т.е. $f(tx, ty) = f(x, y)$.

Df 2(3) ДУ называется однородным, если его можно представить в виде $y' = f\left(\dfrac{y}{x}\right)$.

Замечание Однородные ДУ сводятся к ДУ с разделяющимися переменными с помощью подстановки: $\begin{cases} y = ux \\ x = x \end{cases}$ или $\begin{cases} x = uy \\ y = y \end{cases}$

Пример:

$xdy = (x + y)dx$

$\begin{cases} y = ux \\ x = x \end{cases}$ и $\begin{cases} dy = xdu + udx \\ dx = dx \end{cases}$

$x^2du + xudx = xdx + uxdx$

$x^2du = xdx$

$x(xdu - dx) = 0$

1) $x = 0$

2) $du = \dfrac{dx}{x}$

$u = \ln x + \ln C$

$e^u = Cx$

$Cx = e^{\frac{y}{x}}$

ДУ, приводящиеся к однородным уравнениям

Это уравнения вида $y' = f\left(\dfrac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right)$, $c_1^2 + c_2^2 \neq 0$ и $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$

Подстановка:

$$\begin{cases} x = u + \alpha \quad dx = du \\ y = v + \beta \quad dy = dv \end{cases}$$

α и β — решения системы (совместной и определенной по теореме Крамера):

$$\begin{cases} a_1\alpha + b_1\beta + c_1 = 0 \\ a_2\alpha + b_2\beta + c_2 = 0 \end{cases}$$

$$\frac{dv}{du} = f\left(\frac{a_1u + b_1v + a_1\alpha + b_1\beta + c_1}{a_2u + b_2v + a_2\alpha + b_2\beta + c_2}\right) = f\left(\frac{a_1u + b_1v}{a_2u + b_2v}\right)$$

Пример:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x + 2y - 4}{2x - y - 3}$$

$$\begin{cases} x = u + \alpha \\ y = v + \beta \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha + 2\beta = 4 \\ 2\alpha - \beta = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha = 2 \\ \beta = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} u = x - 2 \\ v = y - 1 \end{cases}$$

$$\frac{dv}{du} = \frac{u+2v+2+2-4}{2u-v+4-1-3}$$

$$\frac{dv}{du} = \frac{u+2v}{2u-v}$$

$$\begin{cases} v = zu \\ u = u \end{cases}$$

$$dv = udz + zdu$$

$$\frac{udz+zdu}{du} = \frac{u+2uz}{2u-uz}$$

1) $u = 0 \Rightarrow v = 0$

$x = 2 \Rightarrow y = 1$

Но: в исходном уравнении получаем тогда $\dfrac{0}{0} \Rightarrow u = 0$ — не решение.

2) $u\dfrac{dz}{du} + z = \dfrac{1+2z}{2-z}$

$$\frac{udz}{du} = \frac{1+2z-2z+z^2}{2-z}$$

$$\frac{udz}{du} = \frac{1+z^2}{2-z}$$

$$\frac{2-z}{1+z^2}dz = \frac{du}{u}$$

$$2arctgz - \frac{1}{2}\ln(1+z^2) = \ln u + \ln C$$

$$e^{2arctgz} = \frac{Cu}{\left(\sqrt{1+z^2}\right)^{-1}}$$

$$e^{2arctg\left(\frac{v}{u}\right)} = \frac{Cu}{\left(\sqrt{1+\frac{v^2}{u^2}}\right)^{-1}} = C\sqrt{u^2+v^2}$$

$$e^{2arctg\left(\frac{y-1}{x-2}\right)} = C\sqrt{x^2-4x+5+y^2-2y}$$

3) $2 - z = 0$

$z = 2 \Rightarrow v = 2u \Rightarrow$ не решение.

Обобщенные однородные уравнения

Df 1 ДУ 1 порядка, разрешенное относительно производной, называется обобщенным однородным уравнением, если $\exists\alpha$ такое, что все слагаемые уравнения оказываются слагаемыми одинакового измерения, если x приписать измерение 1, y — измерение α, а константы считать 0-измерениями (при произведении измерения складываются, при делении — вычитаются).

Если уравнение оказалось обобщенным однородным, то это уравнение сводится к однородному с помощью подстановки $\begin{cases} y = u^\alpha \\ x = x \end{cases}$ или $\begin{cases} y = ux^\alpha \\ x = x \end{cases}$

Пример:

$$\underbrace{2x^2y'}_{2+\alpha-1} = \underbrace{y^3}_{3\alpha} + \underbrace{xy}_{\alpha+1}$$

$$\alpha = \frac{1}{2}$$

$$\begin{cases} y = u\sqrt{x} \\ x = x \end{cases}$$

$$2x^2\left(u'\sqrt{x} + \frac{u}{2\sqrt{x}}\right) = u^3x\sqrt{x} + xu\sqrt{x}$$

$$2u'x^2\sqrt{x} + ux\sqrt{x} = u^3x\sqrt{x} + xu\sqrt{x}$$

$$2u'x^2\sqrt{x} = u^3x\sqrt{x}$$

1) $x = 0$ — не является решением

2) $2u'x = u^3$
$$2\frac{du}{u^3} = \frac{dx}{x}$$
$$-\frac{1}{u^2} = \ln(x) + \ln C$$
$$e^{-\frac{1}{u^2}} = Cx$$
$$e^{-\frac{x}{y^2}} = Cx$$

3) $u = 0 \to y = 0$ — еще одно решение.

Линейные уравнения

Df 1 ДУ называется линейным, если его можно записать в виде
$y' + p(x)y = q(x)$ — линейное по y
или
$x' + p(y)x = q(y)$ — линейное по x

Df 2 Линейное уравнение называется линейным однородным, если $q(x) \equiv 0$ или $q(y) \equiv 0$. Иначе — линейное неоднородное.

Линейные уравнения решаются или методом вариации произвольной постоянной (Лагранжа), или методом введения двух функций (Бернулли).

Метод Лагранжа

1. записать в определяемой форме (как в определении)

2. решаем полученное уравнение $y' + p(x)y = 0$
   $\dfrac{dy}{y} = -p(x)dx$
   $\ln y = -\int p(x)dx + \ln C$
   $y = C \cdot e^{-\int p(x)dx}$

3. записываем искомый вид решения уравнения в виде: $y = C(x) \cdot e^{-\int p(x)dx}$, т.е. вводим $C(x)$

4. подставляем искомый вид решения в исходное уравнение:
   $C'(x)e^{-\int p(x)dx} + C(x)e^{-\int p(x)dx}(-p(x)) + p(x)C(x)e^{-\int p(x)dx} = q(x)$
   $C'(x)e^{-\int p(x)dx} = q(x)$

5. $dC(x) = q(x)e^{\int p(x)dx} \cdot dx$
   $C(x) = C_1 + \int q(x)e^{\int p(x)dx}dx$

6. используем 3 этап алгоритма и получаем ответ:
   $$y = C_1 e^{-\int p(x)dx} + \underbrace{e^{-\int p(x)dx} \cdot \int q(x)e^{\int p(x)dx}dx}_{\text{частное решение неоднородного уравнения}}$$

Замечание Общее решение линейного неоднородного уравнения представляет собой сумму общего решения соответствующего однородного и частного решенеия данного неоднородного уравнений.

Замечание Т.к. решение неоднородного линейного уравнения представляет собой бесконечное множество решений, то частное решение решение можно выбрать бесконечным числом способов, значит и общее решение может быть записано бесконечным числом способов.

Замечание При решении конкретного линейного уравнения формулой пункта (6) сразу пользоваться не стоит, а решать последовательно по всей схеме алгоритма.

Пример:

$(e^y + x)y' = 1$

$\dfrac{1}{y'} = e^y + x$

$x' = e^y + x$

1. $x' - x = e^y$

2. $x' - x = 0$
   $\dfrac{dx}{dy} = x$
   $\dfrac{dx}{x} = dy$
   $\ln x = y + \ln C$
   $x = Ce^y$

3. $x = C(y)e^y$

4. $C'(y)e^y + C(y)e^y + (-1)C(y)e^y = e^y$
   $C'(y)e^y = e^y$
   $\dfrac{dC}{dy} = 1$

5. $dC = dy$
   $C(y) = C + y$

6. $x = Ce^y + ye^y$

Метод Бернулли

1. $y' + p(x)y = q(x)$

2. $\begin{cases} y = uv \\ x = x \end{cases}$

3. $\underbrace{u'v + uv'}_{\text{любое из этих 2}} + \underline{p(x)uv} = q(x)$ — любое из двух слагаемых остается и на следующем шаге рассматривается с подчеркнутым слагаемым (мы для наглядности выберем $u'v$)

4. $u'v + p(x)uv = v(u' + p(x)u)$

5. $u' + p(x)u = 0 \to \dfrac{du}{u} = -p(x)dx$
   $\ln u = \int -p(x)dx$
   $u = e^{-\int p(x)dx}$

6. благодаря выбору u:
   $u'v + p(x)uv = 0 \Rightarrow uv' = q(x)$
   $e^{-\int p(x)dx}\dfrac{dv}{dx} = q(x)$
   $dv = q(x)e^{\int p(x)dx}dx$
   $v = C + \int q(x)e^{\int p(x)dx}dx$

7. $y = Ce^{-\int p(x)dx} + e^{-\int p(x)dx} \cdot \int q(x)e^{\int p(x)dx}dx$

Замечание На 5 этапе алгоритма при первом интегрировании при применении метода Бернулли константа не ставится, во-первых, потому что если константу поставить, то при следующем интегрировании появится вторая постоянная и общее решение линейного ДУ будет иметь две постоянные, что противоречит тому, что решение линейного уравнения должно иметь одну постоянную, а во-вторых, благодаря тому, что мы получаем частное решение для функции $u(x)$ и, следовательно, замена на 2 этапе становится заменой на одну функцию, а не на две, т.е. $y = uv = v \cdot e^{-\int p(x)dx}$

Уравнения, приводящиеся к линейным

1. уравнения Бернулли

Df 1 ДУ называется уравнением Бернулли, если его можно записать в виде
$y' + p(x)y = y^n q(x)$
или
$x' + p(y)x = x^n q(y)$
при этом $n \neq 0$ — иначе неоднородное и $n \neq 1$ — иначе однородное.

Уравнение Бернулли сводится к однородному с помощью подстановки

$$\begin{cases} u = y^{1-n} \\ x = x \end{cases}$$

$$(y'y^{-n}) + p(x)y^{1-n} = q(x)$$

$$\frac{1}{1-n}u' + p(x)u = q(x)$$

$$u' + (1-n)p(x)u = (1-n)q(x)$$

далее решается как линейное любым способом.

Можно сразу решать уравнение методом Бернулли.

Пример:

$$y' + 2y = y^2 e^x$$

$$\begin{cases} y = uv \\ x = x \end{cases}$$

$$u'v + \underline{uv'} + \underline{2uv} = u^2 v^2 e^x$$

$$uv' + 2uv = u(v' + 2v)$$

$$v' + 2v = 0$$

$$\frac{dv}{dx} = -2v$$

$$\frac{dv}{v} = -2dv$$

$$\ln v = -2x$$

$v = e^{-2x} \Rightarrow y = ue^{-2x}$

Т.к. $uv' + 2uv = 0 \Rightarrow u'v = u^2v^2e^x$

$u'e^{-2x} = u^2e^{-ux}e^x$

$u' = u^2e^{-2x}e^x$

$\dfrac{du}{u^2} = e^{-x}dx$

$-\dfrac{1}{u} = -e^{-x} - C$

$u = \dfrac{1}{C + e^{-x}}$

$y = \dfrac{e^{-2x}}{C + e^{-}x}$

Рассмотрим также $v = 0 \to y = 0$ — тоже решение.

2. уравнения Риккати

Df 2 ДУ называется уравнением Риккати, если его можно записать в виде:
$y' = p(x)y^2 + q(x)y + r(x)$
при этом $r(x) \neq 0$ — иначе уравнение Бернулли, $p(x) \neq 0$ — иначе линейное.

Уравнение Риккати не интегрируется в общем виде в квадратурах.

Если задано или каким-либо образом найдено частное решение уравнения Риккати y_1, то общее решение может быть найдено с помощью подстановки:

$$\begin{cases} y = u + y_1 \\ x = x \end{cases}$$

$u' + y_1' = p(x)u^2 + 2p(x)uy_1 + p(x)y_1^2 + q(x)u + q(x)y_1 + r(x)$

$u' = p(x)u^2 + 2p(x)uy_1 + q(x)u$

$u' - (2p(x)y_1 + q(x))u = u^2p(x)$

Таким образом, мы получили уравнение Бернулли.

Пример:

$y' + y^2 + \dfrac{y}{x} - \dfrac{4}{x^2} = 0$

Частное решение имеет вид $y_1 = \dfrac{a}{x}$

$$-\frac{a}{x^2} + \frac{a^2}{x^2} + \frac{a}{x^2} - \frac{4}{x^2} = 0$$

$$\frac{-a + a^2 + a - 4}{x^2} = 0$$

$$a = \pm 2$$

возьмем $y_1 = \dfrac{2}{x}$

$$u' - \frac{2}{x^2} + u^2 + \frac{4u}{x} + \frac{4}{x^2} + \frac{u}{x} + \frac{2}{x^2} - \frac{4}{x^2} = 0$$

$u' + \dfrac{5u}{x} = -u^2$ — получаем уравнение Бернулли

$$\begin{cases} u = \dfrac{1}{z} \\ x = x \end{cases}$$

$$-\frac{1}{z^2}z' + \frac{5}{xz} = -\frac{1}{z^2}$$

$$z' - \frac{5z}{x} = 1$$

Полученное уравнение решаем, как линейное уравнение. Главное, не забыть в ответе вернуться к первоначальным x и y.

ДУ в полных дифференциалах

Df 1 ДУ $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ называется уравнением в полных дифференциалах, если левая часть этого уравнения представляет собой полный дифференциал от некоторой функции $U(x,y)$:
$M(x,y)dx + N(x,y)dy = \dfrac{\partial U}{\partial x}dx + \dfrac{\partial U}{\partial y}dy = d(U(x,y)) = 0$

Если уравнение в полных дифференциалах, то его решение имеет вид:

$$U(x,y) = C$$

$$M(x,y) = \frac{\partial U}{\partial x} \to \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}$$

$N(x, y) = \frac{\partial U}{\partial y} \to \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x}$

$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$

Решение ДУ в полных дифференциалах можно проводить двумя методами:

1. — метод восстановления функции по ее частным производным
2. — метод решения через применение криволинейного интеграла II рода

1. Метод восстановления функции

1. $U(x, y)$ определяется путем интегрирования:
   $U(x, y) = \int \frac{\partial U}{\partial x} dx + \varphi(y) = \int M(x, y) dx + \varphi(y)$
2. $\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\partial \left(\int M(x, y) dx + \varphi(y) \right)}{\partial y} = N(x, y)$
3. из пункта 2 находим $\varphi(y) \Rightarrow$ окончательно выражаем $U(x, y)$
4. $U(x, y) = C$

Пример:

$(3x^2y^4 - 2x)dx + (4x^3y^3 + 3y^2)dy = 0$

$\frac{\partial M}{\partial y} = 12x^2y^3$

$\frac{\partial N}{\partial x} = 12x^2y^3$

$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} \Rightarrow$ уравнение в полных дифференциалах

1. $U(x, y) = \int (3x^2y^4 - 2x)dx + \varphi(y) = x^3y^4 - x^2 + \varphi(y)$
2. $\frac{\partial U}{\partial y} = 4x^3y^3 + \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 4x^3y^3 + 3y^2$
   $\frac{\partial \varphi}{\partial y} = 3y^2$

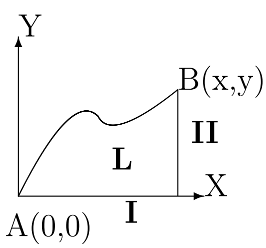
3. $\varphi(y) = y^3 + C^*$
   $U(x,y) = x^3y^4 - x^2 + y^3 + C^*$

4. $x^3y^4 - x^2 + y^3 = C$

2. Метод через криволинейный интеграл II рода

$\int\limits_L (M(x,y)dx + N(x,y)dy) = \int\limits_L U(x,y) = U(x,y)|\,_B^A$

Утверждение Если подынтегральная функция криволинейного интеграла II рода есть полный дифференциал, то такой интеграл не зависит от путей интегрирования.



$$U(x,y)|_B^A = \int\limits_L Mdx + Ndy = \int\limits_I + \int\limits_{II} = \int\limits_0^x (M(x,0)dx + 0) + \int\limits_0^y (0 + N(x_{const}, y)dy) = U(x,y) = C$$

Пример:

$(3x^2y^4 - 2x)dx + (4x^3y^3 + 3y^2)dy = 0$

$\dfrac{\partial M}{\partial y} = 12x^2y^3$

$\dfrac{\partial N}{\partial x} = 12x^2y^3$

$\dfrac{\partial M}{\partial y} = \dfrac{\partial N}{\partial x} \Rightarrow$ уравнение в полных дифференциалах

$U(x,y) = \int\limits_0^x (0 - 2x)dx + \int\limits_0^y (4x^3y^3 + 3y^2)dy = -x^2 + x^3y^4 + y^3 = C$

Но может оказаться, что $A(0,0)$ — не точка непрерывности функции$U(x,y) \Rightarrow$ надо выбрать другую точку.

$A(x_0, y_0), B(x,y)$:

$U(x,y) = \int\limits_{x_0}^x M(x, y_0)dx + \int\limits_{y_0}^y N(x_{const}, y)dy = C$

Пример:

$$\left(3x^2 + \frac{1}{y}\right) dx + \left(2y - \frac{x}{y^2}\right) dy = 0$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = -\frac{1}{y^2}$$

$$\frac{\partial N}{\partial x} = -\frac{1}{y^2}$$

$\dfrac{\partial M}{\partial y} = \dfrac{\partial N}{\partial x} \Rightarrow$ уравнение в полных дифференциалах

$A(1,1), B(x,y)$:

$$U(x,y) = \int\limits_1^x (3x^2+1)dx + \int\limits_1^y (2y - \frac{x}{y^2}dy = (x^3 - 1^3) + (x-1) + (y^2-1) + \left(\frac{x}{y} - x\right) =$$
$$x^3 + x - 2 + y^2 - 1 + \frac{x}{y} - x = x^3 + \frac{x}{y} + y^2 - 3$$

$$x^3 + \frac{x}{y} + y^2 = C$$

Интегрирующий множитель

Df 1 Если ДУ $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ не является уравнением в полных дифференциалах, однако, существует такая функция $\mu(x,y)$, в результате умножения на которую уравнение становится уравнением в полных дифференциалах, то такая функция называется интегрирующим множителем.

Th 1 о $\exists$ интегрирующего множителя
Если данное уравнение имеет общий интеграл вида $U(x,y) = C$, то такое уравнение имеет интегрирующий множитель.

D: $\dfrac{\partial U}{\partial x}dx + \dfrac{\partial U}{\partial y}dy = 0 \leftarrow U'(x,y)$
и данное уравнение имеет вид:
$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)}{\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)} \Leftrightarrow -\frac{M(x,y)}{N(x,y)} = \frac{dy}{dx}$$

$$\frac{\frac{\partial U}{\partial x}}{M(x,y)} = \frac{\frac{\partial U}{\partial y}}{N(x,y)} = \mu(x,y)$$

$\dfrac{\partial U}{\partial x} = \mu(x,y)M(x,y)$
$\dfrac{\partial U}{\partial y} = \mu(x,y)N(x,y)$
подставляем в $U'(x,y)$:
$\mu(x,y)M(x,y)dx + \mu(x,y)N(x,y)dy = 0$

Th 2 о $\not!$ интегрирующего множителя
Если ДУ $Mdx + Ndy = 0$ имеет интегрирующий множитель $\mu_0(x,y)$, т.е. $\mu_0 Mdx + \mu_0 Ndy = d(U(x,y))$, то данное уравнение имеет бесконечное множество интегрирующих множителей вида $\mu(x,y) = \mu_0(x,y) \cdot \Phi(U(x,y))$, где $\Phi(U(x,y))$ — произвольная дифференцируемая функция.

<u>D</u>: $\mu Mdx + \mu Ndy = \mu_0 \Phi(U) Mdx + \mu_0 \Phi(U) Ndy = \Phi(U)(\mu_0 Mdx + \mu_0 Ndy) = \Phi(U) \cdot dU = d(F(U))$, ч.т.д.

Методы определения интегрирующего множителя

1. $P(x)Q(y)dx + R(x)S(y)dy = 0$
   $\mu = \dfrac{1}{R(x)Q(y)}$

2. $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ [однородное уравнение]
   $xM + yN \neq 0$ (иначе — ДУ с разделяющимися переменными)
   $\mu(x,y) = \dfrac{1}{xM + yN}$

3. общий случай:
   $\mu Mdx + \mu Ndy = 0$
   $\dfrac{\partial(\mu M)}{\partial y} = \dfrac{\partial(\mu N)}{\partial x}$
   $\dfrac{\partial \mu}{\partial y} M + \mu \dfrac{\partial M}{\partial y} = \dfrac{\partial \mu}{\partial x} N + \mu \dfrac{\partial N}{\partial x}$
   $\dfrac{1}{\mu}\left[\dfrac{\partial \mu}{\partial y} M - \dfrac{\partial \mu}{\partial x} N\right] = \dfrac{\partial N}{\partial x} - \dfrac{\partial M}{\partial y}$
   $\dfrac{\partial \ln \mu}{\partial y} M - \dfrac{\partial \ln \mu}{\partial x} N = \dfrac{\partial N}{\partial x} - \dfrac{\partial M}{\partial y}$

4. $\mu(x,y) = \mu(x)$
   $\dfrac{\partial \ln \mu}{\partial x} = \dfrac{\dfrac{\partial M}{\partial y} - \dfrac{\partial N}{\partial x}}{N}$

5. $\mu(x,y) = \mu(y)$

$$\frac{\partial \ln \mu}{\partial y} = \frac{\dfrac{\partial N}{\partial x} - \dfrac{\partial M}{\partial y}}{M}$$

6. $y' + p(x)y = q(x)$

$[p(x)y - q(x)]\, dx + dy = 0$

$\dfrac{\dfrac{\partial N}{\partial x} - \dfrac{\partial M}{\partial y}}{M} = \dfrac{0 - p(x)}{p(x)y - q(x)}$ — не функция от $y \Rightarrow \mu \neq \mu(y)$

$\dfrac{\dfrac{\partial M}{\partial y} - \dfrac{\partial N}{\partial x}}{N} = \dfrac{p(x) - 0}{1}$ — функция от $x \Rightarrow \mu = \mu(x)$

$\dfrac{\partial \ln \mu}{\partial x} = p(x)$

$d \ln \mu = p(x)dx$

$\ln \mu = \int p(x)dx$

$\mu = e^{\int p(x)dx}$

7. "подбор"

Пример(7 способ):

$(xy + y^4)dx + (x^2 - xy^3)dy = 0$

$\underbrace{xydx + x^2dy}_{\mu_1\Phi_1(U_1)} + \underbrace{y^4dx - xy^3dy}_{\mu_2\Phi_2(U_2)} = 0$

Φ_1 и Φ_2 выбираются так, чтобы $\mu_1\Phi_1 = \mu_2\Phi_2$ (??????)

$\underbrace{xydx + x^2dy}_{\frac{1}{x^2y}\varphi_1(\ln xy)} + \underbrace{y^4dx - xy^3dy}_{\frac{1}{xy^4}\varphi_2\left(\ln\left(\frac{x}{y}\right)\right)} = 0$

$d(\ln xy) = \dfrac{dx}{x} + \dfrac{dy}{y} = 0;\ \dfrac{dx}{x} - \dfrac{dy}{y} = 0$

$\ln x + \ln y = \ln C$

$\ln(xy) = C$

Подобрать $\varphi_1(t)$ и $\varphi_2(t)$ так, чтобы получилось общее равенство.

$\varphi_1(t) = e^{-t};\ \varphi_2(t) = e^{-2t}$

$\dfrac{1}{x^2y} \cdot \dfrac{1}{xy} = \dfrac{1}{xy^4} \cdot \dfrac{y^2}{x^2}$

$\frac{1}{x^3y^2} = \frac{1}{x^3y^2}$

$\frac{1}{x^3y^2}$ — общий инетгрирующий множитель.

Уравнения, неразрешенные относительно производной

Методы интегрирования ДУ 1 порядка:

1) $a_n(x,y)(y')^n + a_{n-1}(x,y)(y')^{n-1} + \ldots + a_1(x,y)y' + a_0(x,y) = 0$
$a_n(x,y)[y' + b_1(x,y)]^{k_1} \cdot [y' + b_2(x,y)]^{k_2} \cdot \ldots \cdot [y' + b_m(x,y)]^{k_m} \cdot ((y')^2 + c_1(x,y)y' + d_1(x,y))^{l_1} \cdot \ldots \cdot ((y')^2 + c_m(x,y)y' + d_m(x,y))^{l_m} = 0$
разбиение на множители, каждый из которых решается своим способом.

Пример:
$(y')^2 - (x+y)y' + xy = 0$
$(y' - x)(y' - y) = 0$
$$\left[\begin{array}{l} y' - x = 0 \\ y' - y = 0 \end{array}\right.$$
каждое из уравнений решается отдельно. Записываются <u>все</u> полученные ответы.

Замечание Все последующие случаи ДУ 1 порядка, неразрешенных относительно производной, интегрируются с помощью введения параметра, а ответ представляет собой выражение x и y через функции этого параметра.

Замечание В методе введения параметра следует проводить замену $\underline{y' = p}$, но не наоборот. Иначе решение может оказаться содержащим две произвольные постоянные, а должно содержать только одну.

2) $$\begin{cases} x = \varphi(y') \\ y' = p \end{cases} \to \begin{cases} x = \varphi(p) \\ y' = p \end{cases} \to \begin{cases} x = \varphi(p) \\ \dfrac{dy}{dx} = p \end{cases} \to \begin{cases} x = \varphi(p) \\ dy = pdx \end{cases} \to$$
$$\to \begin{cases} x = \varphi(p) \\ dy = p\varphi'(p)dp \end{cases} \to \begin{cases} x = \varphi(p) \\ y = \int \varphi'(p)pdp + C \end{cases}$$

Пример:

$$\begin{cases} x = y' + (y')^3 \\ y' = p \end{cases} \to \begin{cases} x = p + p^3 \\ dy = pdx \end{cases} \to \begin{cases} x = p + p^3 \\ dy = p(1+3p^2)dp \end{cases} \to$$

$$\to \begin{cases} x = p + p^3 \\ y = \dfrac{p^2}{2} + \dfrac{3}{4}p^4 + C \end{cases}$$

3) $\begin{cases} y = \varphi(y') \\ y' = p \end{cases} \to \begin{cases} y = \varphi(p) \\ dx = \dfrac{dy}{p} \end{cases} \to \begin{cases} y = \varphi(p) \\ x = \int \dfrac{\varphi'(p)}{p} dp + C \end{cases}$

Пример:

$$\begin{cases} y = 5(y')^3 \\ y' = p \end{cases} \to \begin{cases} y = 5p^3 \\ x = \int \dfrac{15p^2}{p} dp + C \end{cases} \to \begin{cases} y = 5p^3 \\ x = 15\dfrac{p^2}{2} + C \end{cases}$$

4) $\begin{cases} y = \varphi(x, y') \\ y' = p \end{cases} \to \begin{cases} y = \varphi(x, p) \\ y' = p \end{cases} \to \begin{cases} dy = \dfrac{\partial\varphi}{\partial x}dx + \dfrac{\partial\varphi}{\partial p}dp \\ dy = pdx \end{cases} \to$

$$\to \begin{cases} pdx = \dfrac{\partial\varphi}{\partial x}dx + \dfrac{\partial\varphi}{\partial p}dp \\ dy = pdx \end{cases} \to \begin{cases} p = \dfrac{\partial\varphi}{\partial x} + \dfrac{\partial\varphi}{\partial p}\dfrac{dp}{dx} \\ dy = pdx \end{cases} \dashrightarrow \begin{cases} x = f(p, c) \\ y = \varphi[f(p, c), p] \end{cases}$$

Замечание Метод решения 4 часто называют методом интегрирования с помощью дифференцирования. Действительно, уравнение $p = \dfrac{\partial\varphi}{\partial x} + \dfrac{\partial\varphi}{\partial p}\dfrac{dp}{dx}$ можно получить дифференцированием обеих частей уравнения $y = \varphi(x, p)$ по x, полагая при этом, что p — функция от x и заменяя левую часть результата на p.

5) $\begin{cases} x = \varphi(y, y') \\ y' = p \end{cases} \rightrightarrows \begin{cases} \dfrac{1}{p} = \dfrac{\partial\varphi}{\partial y} + \dfrac{\partial\varphi}{\partial p}\dfrac{dp}{dy} \\ y' = p \end{cases} \dashrightarrow \begin{cases} y = f(p, c) \\ x = \varphi[f(p, c), p] \end{cases}$

6) Уравнения Лагранжа и Клеро

Df 1 Уравнение называется уравнением Лагранжа, если:
$y = x\psi(y') + \varphi(y')$ (похоже на 4 случай)

Df 2 Уравнение Клеро (частный случай уравнения Лагранжа):
$y = x \cdot y' + \varphi(y')$

$$\begin{cases} y = xp + \varphi(p) \\ y' = p \end{cases} \to \begin{cases} p = p + \dfrac{\partial\varphi}{\partial p} \cdot \dfrac{dp}{dx} + x\dfrac{dp}{dx} \\ y' = p \end{cases} \to \begin{cases} \dfrac{dp}{dx}(x + \varphi'_p(p)) = 0 \\ y' = p \end{cases}$$

рассмотрим два множества решений:

1. $\dfrac{dp}{dx} \Rightarrow p = const \Rightarrow y = Cx + \varphi(C)$ — множество прямых с разным углом наклона
2. $\begin{cases} x = -\varphi'(p) \\ y = -p \cdot \varphi'(p) + \varphi(p) \end{cases}$

Особые решения ДУ 1 порядка

Df 1 Особым решением (далее — ОР) ДУ 1 порядка называется такое его решение, которое в каждой своей точке касается другого несовпадающего с ним решения данного ДУ.

Замечание ОР существует только в том случае, если нарушено условие единственности теоремы Коши:
$F(x, y, y') = 0$

$$\frac{\partial y'}{\partial y} = -\frac{\left(\dfrac{\partial F}{\partial y}\right)}{\left(\dfrac{\partial F}{\partial y'}\right)}$$

условие единственности должно быть нарушено $\Rightarrow \dfrac{\partial F}{\partial y'} = 0$

Замечание Условие единственности теоремы Коши нарушается, если $\dfrac{\partial F}{\partial y'} = 0$. Но т.к. теорема Коши является теоремой только о достаточных условиях, то в случае $\dfrac{\partial F}{\partial y'} = 0$ единственность может и не нарушаться.

Методы определения ОР:

1) $\begin{cases} F(x, y, y') = 0; \qquad \text{исключаем } y' & \text{— нельзя исключить} \Rightarrow \text{ОР нет} \\ \dfrac{\partial F}{\partial y'} = 0 & \text{— можно исключить} \to \Phi(x, y) = 0 \end{cases}$

Дискриминантная кривая $\Phi(x, y) = 0$ распадается на ветви:
$\Phi(x, y) = \varphi_1(x, y) \cdot \varphi_2(x, y) \cdot \ldots \cdot \varphi_m(x, y) = 0$
Для каждой ветви следует провести следующие операции:
1−проверить, является ли $\varphi_k(x, y)$ решением уравнения.
Если не является $\Rightarrow$ не ОР; если является, то переходим ко второму шагу.

2−проверить фактическое нарушение единственности.
Если не нарушается $\Rightarrow$ не ОР, а частное; если нарушается $\Rightarrow$ ОР.

Пример:

1. $y' + p(x)y - q(x) = 0$
   $\dfrac{\partial f}{\partial y'} = 1 \neq 0$
   y' не исключается, ОР нет
2. $\begin{cases} (y'-1)^2 - y = 0 \\ 2(y'-1) = 0 \end{cases}$
   $y' = 1 \Rightarrow (1-1)^2 - y = 0 \Rightarrow y = 0$
   $(0-1)^2 - 0 \neq 0 \Rightarrow y = 0$ — не решение $\Rightarrow$ не ОР
3. $\begin{cases} (y')^2 = y^3 \\ 2y' = 0 \end{cases}$
   $y' = 0 \Rightarrow y = 0$
   $0 = 0 \Rightarrow \boxed{y = 0}$ — решение
   $y' = \pm y^{\frac{3}{2}}$
   $\dfrac{dy}{y^{\frac{3}{2}}} = \pm dx$
   $\dfrac{y^{-\frac{1}{2}}}{\left(-\frac{1}{2}\right)} = \pm(x + C)$
   $-\dfrac{2}{\sqrt{y}} = \pm(x + C)$
   $\dfrac{4}{y} = (x + C)^2$
   $\boxed{y = \dfrac{4}{(x + C)^2}}$
   пересечений нет $\Rightarrow$ единственность не нарушена
   $y = 0$ — частное решение
4. $\begin{cases} (y')^2 = 4y \\ 2y' = 0 \end{cases}$
   $y' = 0 \Rightarrow y = 0$
   $0^2 = 0 \Rightarrow \boxed{y = 0}$ — решение
   $y' = \pm 2y^{\frac{1}{2}}$
   $\dfrac{dy}{2y^{\frac{1}{2}}} = \pm dx$
   $\sqrt{y} = \pm(x + C)$

$\boxed{y = (x+C)^2}$
$\exists$ касательные, общие для обоих решений $\Rightarrow y = 0$ — ОР.

2) (использует метод нахождения огибающей от параметрического семейства кривых)
$F(x, y, y') = 0 \to \varphi(x, y, C) = 0$

$$\begin{cases} \varphi(x, y, C) = 0 & \text{исключаем } C \quad \text{— можно исключить } \to \Phi_1(x, y) = 0 \\ \dfrac{\partial \varphi}{\partial C} = 0 & \qquad\qquad\qquad \text{— нельзя исключить } \Rightarrow \text{нет ОР} \end{cases}$$

$\Phi_1(x, y) = \varphi_1(x, y) \cdot \varphi_2(x, y) \cdot \ldots \cdot \varphi_n(x, y) = 0$
Рассмотрим $\left(\dfrac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 |_{\varphi_k(x,y)=0}$.
Если $\neq 0 \Rightarrow$ ОР; если $= 0 \to$ проверить на решение и нарушение единственности (как в 1 методе).

Пример:
$(y')^2 = 4y$

$$\begin{cases} y = (x+C)^2 \\ 2(x+C) = 0 \end{cases}$$

$x = -C \Rightarrow y = 0$
$4(x+C)^2 + 1 = 0 + 1 \neq 0 \Rightarrow y = 0$ — ОР.

Df 1 Огибающая — кривая, которая в каждой своей точке касается несовпадающей с ней кривой однопараметрического семейства.

Замечание Утверждать, что ОР находится среди частных решений, записанных в ответе и не входящих в состав однопараметрического семейства решений — не верное, как показывает следующий пример:
$(y')^3 - 4xyy' + 8y^2 = 0$
...
Решения: $y = C(x-C)^2; y = \dfrac{4}{27}x^3$
ОР: $y = \dfrac{4}{27}x^3; y = 0$

ДУ высшего порядка. Системы ДУ

ДУ высшего порядка, допускающие понижение порядка

1 сл. $y^{(n)} = f(x)$
$y^{(n-1)} = \int f(x)dx + C_1$
$y^{(n-2)} = \int \left(\int f(x)dx \right) dx + C_1 x + C_2$
$\dots$

Пример:
$y''' = 24x$
$y'' = 12x^2 + C_1$
$y' = 4x^3 + 6C_1 x + C_2$
$y = x^4 + 3C_1 x^2 + C_2 x + C_3$

2 сл. $F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \dots, y^{(m)}) = 0$
$y^{(k)} = z(x)$
$F(x, z, z', \dots, z^{(n-k)}) = 0$
Как правило, это применяется для $f(x, y', y'') = 0$. Рассмотрим данный пример:
$y' = z(x)$
$f(x, z, z') = 0$
$y'' = \dfrac{y'}{x}$
$z' = \dfrac{z}{x}$
$\dfrac{dz}{z} = \dfrac{dx}{x}$
$\ln z = \ln x + \ln 2C_1$
$\ln z = \ln (2xC_1)$
$z = 2xC_1$
$y' = 2C_1 x$
$y = C_1 x^2 + C_2$

3 сл. $F(y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$
y — условно-независимая переменная
$y' = z(y)$
$y'' = \dfrac{dy'}{dx} = \dfrac{dz(y)}{dx} = \dfrac{dz(y)}{dy} \cdot \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dz(y)}{dy} \cdot z$

$$y''' = \frac{dy''}{dx} = \frac{d\left(z\frac{dz}{dy}\right)}{dy}\cdot\frac{dy}{dx} = z\left(\frac{dz}{dy}\right)^2 + z^2\frac{d^2z}{dy^2}$$

Пример:
$f(y, y', y'') = 0$
$f(y, z, z') = 0$
$y \cdot y'' = (y')^2$
$y' = z(y)$
$y'' = z\dfrac{dz}{dy}$
$yz\dfrac{dz}{dy} = z^2$
$y\dfrac{dz}{dy} = z$
$\dfrac{dz}{z} = \dfrac{dy}{y}$
$z = 2C_1y$
$y' = 2C_1y$
$\dfrac{dy}{y} = 2C_1x$
$\ln y = 2C_1x + \ln C_2$
$y = C_2 \cdot e^{2C_1x}$
Также есть решение при $z = 0$: $y = C$, но оно входит в общее решение при $C_1 = 0$

4 сл. $F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$
если $F(x, ty, ty', \dots, ty^{(n)}) = t^kF(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$, то $\begin{cases} y = e^{\int zdx} \\ x = x \end{cases}$, где z — новая функция от x
$y' = z \cdot e^{\int zdx} = zy \Rightarrow \boxed{z = \dfrac{y'}{y}}$
$y'' = z'y + zy' = e^{\int zdx}(z' + z^2)$
$y''' = \dots$
Выносим $e^{\int zdx} = t$
$y \to 1$
$y' \to z$
$y'' \to z' + z^2$
$y''' \to \dots$

Пример:

$yy'' - (y')^2 = 6xy^2$
$y = e^{\int z dx}$
$e^{\int z dx} \cdot (z' + z^2) e^{\int z dx} - z^2 e^{2\int z dx} = 6xe^{2\int z dx}$
$z' + z^2 - z^2 = 6x$
$z' = 6x$
$z = 3x^2 + C_1$
$\frac{y'}{y} = 3x^2 + C_1$
$\frac{dy}{y} = (3x^2 + C_1)dx$
$\ln y = x^3 + C_1 x + \ln C_2$
$y = C_2 \cdot e^{x^3 + C_1 x}$

5 сл. $F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0$
$F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = \frac{d\Phi(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})}{dx} = 0$
$\Phi(x, y, y', \ldots, y^(n-1)) = C_1$

Пример:
$yy'' = (y')^2$
$yy'' - (y')^2 = 0$
$\frac{y''}{y'} - \frac{y'}{y} = 0$
$\frac{d\left(\ln \frac{y'}{y}\right)}{dx} = 0$
$\ln \frac{y'}{y} = \ln C_1$
$\frac{y'}{y} = C_1$
$y' = C_1 y$
$\frac{dy}{y} = C_1 dx$
$\ln y = C_1 x + \ln C_2$
$y = C_2 e^{C_1 x}$

Системы ДУ и ДУ высших порядков

Df 1 Системой ДУ называется система вида:

$$\begin{cases} y_1' = f_1(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \\ y_2' = f_2(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \\ \vdots \\ y_n' = f_n(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \end{cases}$$

Df 2 Системой ДУ в нормальной форме (нормальной системой ДУ) называется следующая система из ДУ 1 порядка:

$$(1) \begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = f_1(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \\ \dfrac{dy_2}{dx} = f_2(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \\ \dots \\ \dfrac{dy_n}{dx} = f_n(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \end{cases}$$

Df 3 Решением СДУ называется такая совокупность функций $y_1(x), \dots, y_n(x)$, в результате подстановки которой в систему эта система становится системой верных тождеств.

Df 4 Общее решение системы: $\overset{n}{\underset{i=1}{\{}} y_i(x, C_1, C_2, \dots, C_n)$

Df 5 Порядком системы называется количество функций данной системы ДУ.

Df 6 $y' = f(x, y)$ — векторная форма записи системы ДУ, где y и $f(x, y)$ — вектор-функции: $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ и $f(x, y) = \begin{pmatrix} f_1(x, y) \\ f_2(x, y) \\ \vdots \\ f_n(x, y) \end{pmatrix}$

Df 7 Норма вектор-функции $|f(y)|$ понимается как:

1) $|f(y)| = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} |f_i|^2}$

   $|y| = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} |y_i|^2}$

2) $|y| = \sum\limits_{i=1}^{n} |y_i|$

3) $|y| = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} |y_i|$

Всюду в дальнейшем при записи нормы может подразумеваться любая из форм нормы.

Если вектор состоит из 1 координаты, то его норма совпадают с модулем.

1) Сведение задачи интегрирования нормальной системы ДУ к интегрированию ДУ высшего порядка

$$(2)\begin{cases} y_1' = f_1(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \\ y_1'' = F_2(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \\ y_1''' = F_3(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \\ \ldots \\ y_1^{(n-1)} = F_{n-1}(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \end{cases}$$

$$(3) \quad y_1^n = F_n(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)$$

Продифференцируем y_1' по x:

$$y_1'' = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_1}{\partial y_1} \cdot \frac{dy_1}{dx} + \frac{\partial f_1}{\partial y_2} \cdot \frac{dy_2}{dx} + \ldots + \frac{\partial f_1}{\partial y_n} \cdot \frac{dy_n}{dx} = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_1}{\partial y_1} \cdot f_1 + \frac{\partial f_1}{\partial y_2} \cdot f_2 + \ldots + \frac{\partial f_1}{\partial y_n} \cdot f_n =$$
$$= F_2(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)$$

Продифференцируем y_1'' по x:

$$y_1''' = \frac{\partial F_2}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y_1} \cdot f_1 + \frac{\partial F_2}{\partial y_2} \cdot f_2 + \ldots + \frac{\partial F_2}{\partial y_n} \cdot f_n = F_3(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)$$

Дифференцируя последнее уравнение системы (2) получаем уравнение (3).

Составим определитель $\dfrac{\partial(f_1, F_2, \ldots, F_n)}{\partial(f_1, F_2, \ldots, F_n)}$. Если он $\neq 0$, то можно записать (2) в виде:

$$\begin{cases} y_2 = \varphi_2(x, y_1, y_1', \ldots, y_1^{(n-1)}) \\ y_3 = \varphi_3(x, y_1, y_1', \ldots, y_1^{(n-1)}) \\ \ldots \\ y_n = \varphi_n(x, y_1, y_1', \ldots, y_1^{(n-1)}) \end{cases}$$

$$y_1^{(n)} = F_n(x, y_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots, \varphi_n)$$

или, возвращаясь к исходным функциям:

$y_1^{(n)} = F_n(x, y_1, y_1', y_1'', \ldots, y_1^{(n-1)})$ — искомое ДУ высшего порядка

Этот метод сведения задачи интегрирования системы ДУ к задаче интегрирования ДУ высшего порядка называется методом исключения.

Основное условие — дифференцируемость функций в правой части системы.

Второе условие — якобиан должен быть отличен от 0. Если $|J| = 0$, то за главную переменную принимается не y_1, а любая другая. Если для всех переменных якобиан $= 0$, то метод неприменим.

Пример:

$$\begin{cases} \ddot{x} + \dot{x} + \dot{y} - 2y = 0 \\ \dot{x} - \dot{y} + x = 0 \end{cases}$$

Дифференцируем последнее уравнение системы:

$$\ddot{x} + \dot{x} = \ddot{y}$$

$$\ddot{y} + \dot{y} - 2y = 0$$

$$\ddot{x} + \dot{x} + \dot{x} + x - 2y = 0$$

$$\dddot{x} + \ddot{x} + \dot{x} - 2\dot{y} = 0$$

$$\dddot{x} + \ddot{x} + \dot{x} - 2\dot{x} - 2x = 0$$

$$\dddot{x} + \ddot{x} - \dot{x} - 2x = 0$$

2) Сведение задачи интегрирования ДУ высшего порядка к интегрированию нормальной системы ДУ

$$y_{(n)} = f(x, y, y', y'', y''', \ldots, y^{(n-1)})$$

$$y = z_1$$

$$y' = z_2$$

$$y'' = z_3$$

$$y''' = z_4$$

$$y^{(n-1)} = z_n$$

$$\begin{cases} \dfrac{dz_1}{dx} = z_2 \\ \dfrac{dz_2}{dx} = z_3 \\ \ldots \\ \dfrac{dz_{n-1}}{dx} = z_n \\ \dfrac{dz_n}{dx} = y^{(n)} = f(x, z_1, z_2, z_3, z_4, \ldots, z_n) \end{cases}$$

3) Сведение задачи интегрирования системы ДУ высшего порядка к интегрированию нормальной системы ДУ

$$\begin{cases} y_1^{(k)} = f_1(x, \quad y_1, y_1', \ldots, y_1^{(k-1)}, y_2, y_2', \ldots, y_2^{(l-1)}, \ldots, y_r^{(s-1)}) \\ \qquad\qquad\qquad\; z_1, z_2, \ldots, z_k, \qquad z_{k+1}, \ldots, \quad z_{k+l}, \ldots \\ y_2^{(l)} = f_2(x, \quad y_1, y_1', \ldots, y_1^{(k-1)}, y_2, y_2', \ldots, y_2^{(l-1)}, \ldots, y_r^{(s-1)}) \\ \ldots \\ y_r^{(s)} = f_r(x, \quad y_1, y_1', \ldots, y_1^{(k-1)}, y_2, y_2', \ldots, y_2^{(l-1)}, \ldots, y_r^{(s-1)}) \end{cases}$$

$n = k + l + \ldots + s$

$$\begin{cases} \dfrac{dz_1}{dx} = z_2 \\ \dfrac{dz_2}{dx} = z_3 \\ \ldots \\ \dfrac{dz_{k-1}}{dx} = z_k \\ \dfrac{dz_k}{dx} = y_1^{(k)} = f_1(x, z_1, z_2, \ldots, z_k, z_{k+1}, \ldots, z_n) \\ \dfrac{dz_{k+1}}{dx} = z_{k+2} \\ \ldots \\ \dfrac{dz_{k+l}}{dx} = f_2(x, z_1, z_2, \ldots, z_k, z_{k+1}, \ldots, z_n) \\ \ldots \\ \dfrac{dz_n}{dx} = f_r(x, z_1, z_2, \ldots, z_k, z_{k+1}, \ldots, z_n) \end{cases}$$

Общая схема взаимных переходов между системами ДУ и ДУВП:

$$\boxed{\text{СДУВП}} \longrightarrow \boxed{\text{НСДУ}} \begin{matrix} \longrightarrow \\ \longleftarrow \end{matrix} \boxed{\text{ДУВП}}$$

Условие Липшица

Df 1 Говорят, что $f(y)$ удовлетворяет условию Липшица по y, если:
$\forall y_1, y_2 (y_1 \neq y_2) \exists k > 0 : |f(y_2) - f(y_1)| \leqslant k|y_2 - y_1|$

Утверждение Если $f(y)$ имеет ограниченную производную $\left|\dfrac{df}{dy}\right| < k$, то $f(y)$ удовлетворяет условию Липшица по y.

$\underline{\text{D}}$: $|f(y_1) - f(y_2)| = $ [по теореме Лагранжа] $= |f'(\xi)||y_1 - y_2| \leqslant k|y_1 - y_2|$

Замечание Обратное утверждение неверно, т.е. функция может удовлетворять условию Липшица, и не быть дифференцируемой, как показывает следующий пример:
$f(y) = |y|$
$k = 1$, но сама функция не дифференцируема в 0.

Задача Коши для системы ДУ

Найти решение $y(x)$ системы ДУ $\dfrac{\partial y}{\partial x} = f(x, y)$, удовлетворяющее условию $y(0) = y_0$. (в отличие от прошлой версии — это все векторные уравнения).

В координатной форме:

$$\begin{cases} y_1(x_0) = y_{1_0} \\ y_2(x_0) = y_{2_0} \\ \dots \\ y_n(x_0) = y_{n_0} \end{cases}$$

Задача Коши для ДУ высшего порядка

Найти решение $y(x)$ ДУ $y^{(n)} = f(x, y', y'', y''', \dots, y^{(n-1)})$, удовлетворяющее условиям:

$y(x_0) = y_{1_0}$

$y'(x_0) = y_{2_0}$

$\dots$

$y^{(n-1)}(x_0) = y_{n_0}$

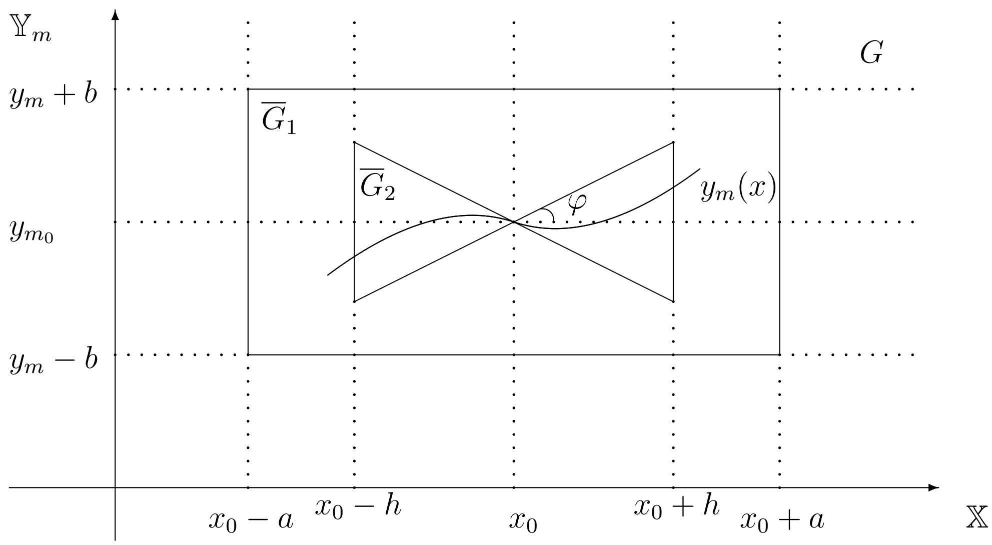
Теорема Коши для НСДУ:

Пусть в некоторой области G вектор-функция $f(x, y)$ непрерывна по своим аргументам.

Пусть, кроме того, в $\forall$ замкнутой подобласти области $G(\forall \overline{G}_1 \subset G)$ эта функция удовлетворяет условию Липшица по y, быть может со своей постоянной $k > 0$.

Тогда для любой точки $(x_0, y_0) \in G$ можно указать такой интервал $x_0 - h \leqslant x \leqslant x_0 + h, h > 0$, на котором $\exists!$ решение системы ДУ $\dfrac{\partial y}{\partial x} = f(x, y)$, удовлетворяющее условию $y(x_0) = y_0$.

Доказательство:



для $y_m, m = \overline{1, n}$

$a > 0, b > 0, (x_0, y_0) \in G$

$\overline{G}_1 \subset G; \overline{G}_1 : \begin{cases} x_0 - a \leqslant x \leqslant x_0 + a \\ y_m - b \leqslant y_{m_0} \leqslant y_m + b \end{cases}$

Т.к. $f(x, y)$ непрерывна, то $|f(x, y)| \leqslant M$

По условию теоремы в любой замкнутой подобным образом области функция $f(x, y)$ удовлетворяет условию Липшица.

$\forall y_1, y_2 (y_1 \neq y_2) \exists k : |f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leqslant k|y_2 - y_1|$

$\forall \alpha : 0 < \alpha < 1$

$\forall h : 0 < h \leqslant \min(a, \dfrac{b}{M}, \dfrac{\alpha}{k})$

$tg\varphi = M$

В пределах $[x_0 - h, x_0 + h]$ образуется две области: $\overline{G}_2 \subset \overline{G}_1 \subset G$

Покажем, что для того, чтобы доказать $\exists!$ дифференцируемого решения $y(x)$ системы ДУ $\dfrac{\partial y}{\partial x} = f(x, y), y(x_0) = y_0$, достаточно доказать $\exists!$ непрерывного решения $y(x)$ интегрального уравнения $y(x) = y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f(\xi, y(\xi))d\xi$.

Действительно, пусть $\exists$ другие решения $y(x)$, т.е.:

$$\frac{dy(x)}{dx} = f(x, y(x))$$

$$dy(x) = f(x, y(x))dx$$

$$\int\limits_{x_0}^{x} dy(x) = \int\limits_{x_0}^{x} f(\xi, y(\xi))d\xi$$

Тогда

$$y(x) - y(x_0) = \int\limits_{x_0}^{x} f(\xi, y(\xi))d\xi$$

$$y(x) = y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f(\xi, y(\xi))d\xi \qquad (1)$$

Пусть $\exists!$ непрерывное решение интегрального уравнения (1), тогда очевидно, что если подставить x_0,то $y(x_0) = y_0$. Пусть $y(x)$ — непрерывна, тогда и подынтегральная функция тоже непрерывна. Значит, правая часть дифференцируема по $x \Rightarrow$ и левая.

$\dfrac{dy(x)}{dx} = f(x, y(x))$, ч.т.д. $\Rightarrow$ если известно ! непрерывное решение интегрального уравнения (1), то оно будет решением системы ДУ.

Все доказательство теоремы Коши теперь сводится к доказательству ! непрерывного решения интегрального уравнения в области G_2.

В области G_2 строим последовательность вектор-функций $\{y_i(x)\}$

$$y_0(x) = y_0$$

$$y_1(x) = y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f(\xi, y_0)d\xi$$

$$y_2(x) = y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f(\xi, y_1(\xi))d\xi$$

$$\dots$$

$$y_{i+1}(x) = y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f(\xi, y_i(\xi))d\xi$$

$x_0 - h \leqslant x \leqslant x_0 + h$, тогда $y \in G_2 \Rightarrow |y_1 - y_0| = \left|\int\limits_{x_0}^{x} f(\xi, y_0)d\xi\right|$, но $f(x, y) \in G$, где $f \leqslant M$

$$|y_1 - y_0| = \left|\int\limits_{x_0}^{x} f(\xi, y_0)d\xi\right| \leqslant M \left|\int\limits_{x_0}^{x} d\xi\right| = M|x - x_0| \Rightarrow y_1 \in G_2 \text{ и далее по индексам.}$$

$|y_{i+1} - y_i| \leqslant M|x - x_0| \Rightarrow$:

1. все функции последовательности $\in G_2$
2. все $y_i(x_0) = y_0$
3. все $y_i(x)$ — непрерывные

Составим следующий ряд:

$y_0 + (y_1 - y_0) + (y_2 - y_1) + \ldots + (y_{i+1} - y_i) + \ldots + y_0 + Mh + kM\dfrac{h^2}{2!} + \ldots + k^{i-1}M\dfrac{h^i}{i!}$

Докажем, что $\sum$ сходится:

$y_0(x) = y_0$

$|y_1(x) - y_n(x)| = \left| y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f(\xi, y(\xi))d\xi - y_0 \right| \leqslant M|x - x_0| \leqslant Mh$

$|y_2(x) - y_1(x)| = \left| y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f(\xi, y_1(\xi))d\xi - y_0 - \int\limits_{x_0}^{x} f(\xi, y_1(\xi))d\xi \right| \leqslant$

$\leqslant \left| \int\limits_{x_0}^{x} f(\xi, y_1(\xi))d\xi - \int\limits_{x_0}^{x} f(\xi, y_1(\xi))d\xi \right| \leqslant k \left| \int\limits_{x_0}^{x} (y_1(\xi) - y_0)d\xi \right| \leqslant kM \left| \int\limits_{x_0}^{x} (\xi - x_0)d\xi \right| \leqslant$

$\leqslant kM\dfrac{|x - x_0|^2}{2} \leqslant kM\dfrac{h^2}{2!}$

Предположим, что $|y_i(x) - y_{i-1}(x)| \leqslant k^{i-1}M\dfrac{h^i}{i!}$

$|y_{i+1} - y_i| \leqslant x \left| \int\limits_{x_0}^{x} |y_i - y_{i-1}|d\xi \right| \leqslant k^iM\dfrac{|x - x_0|^{i+1}}{(i+1)!}$

$$\lim_{i\to\infty} \frac{u_{i+1}}{u_i} \begin{cases} < 1 & \text{— ряд сходится} \\ > 1 & \text{— ряд расходится} \\ = 1 & \text{— требуется исследование} \end{cases}$$

Рассмотрим предел:

$$\lim_{i\to\infty} \frac{k^iM\dfrac{h^{i+1}}{(i+1)!}}{k^{i-1}M\dfrac{h^i}{i!}} = \lim_{i\to\infty} k\frac{h}{i+1} \to 0 < 1 \Rightarrow \text{исходный ряд сходится.}$$

Если функциональный ряд мажорируется сходящимся числовым рядом, то сходятся сам ряд и последовательность его частичных сумм.

$\{y_i(x)\} \rightrightarrows y(x)$

Т.к. сходимость равномерная, то предельная функция $y(x)$, как предел последовательности непрерывных функций будет непрерывной:

$$y(x) \Rightarrow \begin{array}{l} 1)\text{непрерывна} \\ 2) \in G_2 \\ 3) y(x_0) = y_0 \end{array}$$

$\lim\limits_{i\to\infty} y_i(x) = y(x)$ (уже показали)

Покажем, что $y(x) = y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f(\xi, y(\xi))d\xi$

$y_{i+1} = y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f(\xi, y_i(\xi))d\xi$

$$0 \leqslant \left|\int\limits_{x_0}^{x} f(\xi, y_i(\xi))d\xi - \int\limits_{x_0}^{x} f(\xi, y(\xi))d\xi\right| \leqslant (\text{по усл. Липшица}) \leqslant k\left|\int\limits_{x_0}^{x} (y_i(\xi) - y(\xi))d\xi\right|$$

Переходим к пределам при $i \to \infty$

$$0 \leqslant \lim \left|\int\limits_{x_0}^{x} f(\xi, y_i(\xi))d\xi - \int\limits_{x_0}^{x} f(\xi, y(\xi))d\xi\right| \leqslant 0$$

$$\lim_{i\to\infty} \int\limits_{x_0}^{x} f(\xi, y_i(\xi))d\xi = \int\limits_{x_0}^{x} f(\xi, y(\xi))d\xi$$

В итерационном равенстве при $i \to \infty$:

$y(x) = y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f(\xi, y(\xi))d\xi$ — непрерывное решение интегрального уравнения в области G_2

$\exists$ теоремы Коши доказано.

Докажем !

$y(x) = y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f(\xi, y(\xi))d\xi$ — решение

пусть $\exists$ еще одно:

$z(x) = y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f(\xi, z(\xi))d\xi$

$|y(x) - z(x)| = \left|\int\limits_{x_0}^{x} [f(\xi, y(\xi)) - f(\xi, z(\xi))]\, d\xi\right| \leqslant k \left|\int\limits_{x_0}^{x} (y(\xi) - z(\xi))d\xi\right| \leqslant$

$\leqslant k \cdot \max\limits_{G_2} |y(x) - z(x)| \cdot \left|\int\limits_{x_0}^{x} d\xi\right| \leqslant k \cdot \max\limits_{G_2} |y(x) - z(x)| \cdot |x - x_0| \leqslant k \cdot \max\limits_{G_2} |y(x) - z(x)| \cdot h \leqslant$

$\leqslant \alpha \cdot \max\limits_{G_2} |y(x) - z(x)|$

$\max\limits_{G_2} |y(x) - z(x)| \leqslant \alpha \cdot \max\limits_{G_2} |y(x) - z(x)|$

$(1 - \alpha) \max\limits_{G_2} |y(x) - z(x)| \leqslant 0$

$\max\limits_{G_2} |y(x) - z(x)| \leqslant 0$

норма — неотрицательна

$\max\limits_{G_2} |y(x) - z(x)| = 0 \Rightarrow y(x) \equiv z(x)$, т.е. !

Теорема Коши для ДУВП

Пусть в некоторой области G изменения своих аргументов функция $f(x, y, y', \ldots$ $\ldots, y^{(n)})$— непрерывна по своим аргументам. Пусть, кроме того, в $\forall \overline{G}_1 \subset G$ эта функция удовлетворяет условию Липшица по переменным $y, y', \ldots, y^{(n)}$ быть может, со своей постоянной $k > 0$.

Тогда $\forall (x_0, y_{1_0}, y_{2_0}, \ldots, y_{n_0}) \in G$ можно указать такой интервал $x_0 - h \leqslant x \leqslant x_0 + h, h > 0$, на котором $\exists!$ решение $y(x)$ ДУ $y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$, удовлетворяющее условиям:

$y(x_0) = y_{1_0}$

$y'(x_0) = y_{2_0}$

$\ldots$

$y^{(n-1)}(x_0) = y_{n_0}$

<u>D</u>:

Построим систему ДУ, соответствующую данному ДУВП.

Тогда все условия данной теоремы перейдут в условия теоремы Коши для этой системы ДУ, а т.к. эта теорема доказана, т.е. $\exists!$ решение этой системы на некотором интервале $x_0 - h \leqslant x \leqslant x_0 + h, h > 0$, то, следовательно, $\exists!$ решение данного ДУВП.

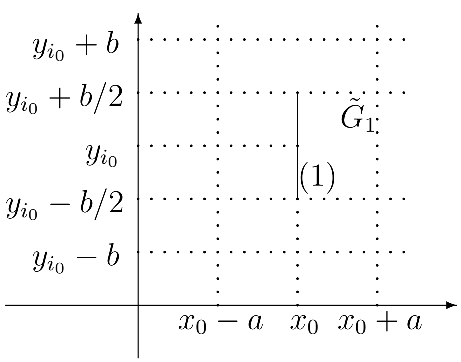
Рассматриваемые ниже следствия из теоремы Коши будут рассмотрены только для системы ДУ, но аналогично их можно сформулировать для ДУВП.

Следствие 1 Пусть в некоторой области G выполнены условия теоремы Коши, тогда в этой области $\exists!$ решение, проходящее через выбранную внутреннюю точку, может быть продолжено сколь угодно близко к границе этой области.

D: Продлевая решение, передоказываем теорему Коши для точек, пересекающих границу области G_2.

Следствие 2 Пусть в некоторой области G выполнены условия теоремы Коши, тогда в этой области $\exists$ общее решение системы ДУ $\dfrac{\partial y}{\partial x} = f(x, y)$ вида $y = \varphi(x, C)$

D:



Докажем теорему Коши для всех точек отрезка (1):

$$\tilde{G}_1 \begin{cases} x_0 - a \leqslant x_0 \leqslant x_0 + a \\ y_{i_0} - \dfrac{b}{2} \leqslant \tilde{y}_{i_0} \leqslant y_{i_0} + \dfrac{b}{2} \end{cases}$$

$$(1) \begin{cases} x_0 \\ y_{i_0} - \dfrac{b}{2} \leqslant \tilde{y}_{i_0} \leqslant y_{i_0} + \dfrac{b}{2} \end{cases}$$

$$\{y_i(x)\} \quad \begin{aligned} &y_0(x) = \tilde{y}_0(x) \\ &y_1(x) = \tilde{y}_0(x) + \int\limits_{x_0}^{x} f(\xi, \tilde{y}_0(\xi))d\xi = y_1(x, \tilde{y}_0) \\ &y_2(x) = \tilde{y}_0(x) + \int\limits_{x_0}^{x} f(\xi, \tilde{y}_1(\xi))d\xi = y_2(x, \tilde{y}_1) \\ &\ldots \\ &y_i(x) = y_i(x, \tilde{y}_0) \end{aligned}$$

$\{y_i(x, \tilde{y}_0)\} \rightrightarrows y(x, \tilde{y}_0)$

$y = y(x, \tilde{y}_0)$

$\tilde{y}_0 = C \Rightarrow y = y(x, C)$, ч.т.д.

Следствие 3 Пусть в некоторой области G выполнены условия теоремы Коши, тогда в этой области $\exists$ общий интеграл системы ДУ $\dfrac{\partial y}{\partial x} = f(x, y)$ вида $\varphi(x, y) = C$

D: В следствии 2 изменяется только y, а здесь изменяется и x, и y:
$\{y_i(x, \tilde{x}_0, tildey_0)\} \rightrightarrows y(x, \tilde{x}_0, \tilde{y}_0)$
$y = \varphi(x, \tilde{x}_0, \tilde{y}_0)$
Выбираем точку $(x_0, y_0) \in G_2$. Тогда $\exists$ решение, проходящее через эту точку: $y = \varphi(x, x_0, y_0)$, но x_0 и y_0 могут колебаться. Будем перемещать их по кривой решения. Переобозначим: $y_0 = \varphi(x_0, x, y)$. Если x_0 зафиксировать, то y_0 будетменяться вдоль своих осей, т.е. $C = \varphi(x, y)$

Симметрическая форма системы ДУ. Первые интегралы и их независимость. Метод интегрирующих комбинаций.

Замечание Всюду в дальнейшем, если особо не оговорено, считается, что условия теоремы Коши выполнены.

Рассмотрим систему ДУ:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial y_1}{\partial x} = f_1(x, y_1, \dots, y_n) \\ \dfrac{\partial y_2}{\partial x} = f_2(x, y_1, \dots, y_n) \\ \dots \\ \dfrac{\partial y_n}{\partial x} = f_n(x, y_1, \dots, y_n) \end{cases}$$

$$dx = \frac{dy_1}{f_1} = \frac{dy_2}{f_2} = \dots = \frac{dy_n}{f_n}$$

Df 1 Симметрическая форма системы ДУ:
$$\frac{\partial y_0}{F_0(y_0, y_1, \dots, y_n)} = \dots = \frac{\partial y_n}{F_n(y_0, y_1, \dots, y_n)}$$

Запишем общий интеграл в координатной форме:

$$\begin{cases} \varphi_1(x, y_1, y_2, \dots, y_n) = C_1 \\ \varphi_2(x, y_1, y_2, \dots, y_n) = C_2 \\ \dots \\ \varphi_n(x, y_1, y_2, \dots, y_n) = C_n \end{cases}$$

Df 2 Каждая координата общего интеграла системы ДУ называется первым интегралом.

Df 3 Первым интегралом системы ДУ называется нетождественно равная постоянной функция переменных системы, принимающая на решениях системы одно и то же постоянное значение.

Для того, чтобы n первых интегралов составляли общий интеграл необходимо, чтобы они были независимы, т.е. должно выполняться условие:

$$\left| J\left(\frac{\partial(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n)}{\partial(y_1, y_2, \ldots, y_n)}\right) \right| \neq 0$$

Если из пропорций симметрической формы удается составить интегрирующую пропорцию, то тем самым можно найти первый интеграл системы. Такой метод определения первых интегралов называется методом интегрирующих комбинаций.

Если рассматривается система n уравнений и удается составить k интегрирующих комбинаций ($k < n$), т.е. k первых интегралов, то можно из этих k первых интегралов выразить k переменных через остальные и подставить в первоначальную систему. Тем самым порядок исходной системы понижается на k единиц и остается проинтегрировать лишь систему $(n - k)$ порядка.

Итогом интегрирования системы является построение n независимых первых интегралов.

Пример:

$$\frac{dx}{x^2 - y^2 - z^2} = \frac{dy}{2xy} = \frac{dz}{2xz}$$

$$\frac{dy}{2xy} = \frac{dz}{2xz}$$

$$\frac{dy}{y} = \frac{dz}{z}$$

$$\ln y = \ln z + \ln C_1$$

$$y = zC_1; \; \frac{y}{z} = C_1$$

$$\frac{xdx + ydy + zdz}{x(x^2 - y^2 - z^2) + 2xy^2 + 2xz^2} = \frac{dy}{2xy}$$

$$\frac{xdx + ydy + zdz}{x(x^2 + y^2 + z^2)} = \frac{dy}{2xy}$$

$$2\frac{xdx+ydy+zdz}{x^2+y^2+z^2}=\frac{dy}{y}$$

$$\ln|x^2+y^2+z^2|=\ln y+\ln C_2$$

$$\frac{x^2+y^2+z^2}{y}=C_2$$

общий интеграл:

$$\begin{cases}\dfrac{x^2+y^2+z^2}{y}=C_2\\ \dfrac{y}{z}=C_1\end{cases}$$

Приближенно-аналитические методы решения систем ДУ и ДУВП

1 метод метод последовательных приближений (для системы ДУ)

$$\frac{\partial y}{\partial x}=f(x,y),\ y(x_0)=y_0$$

$$y(x)=y_0+\int\limits_{x_0}^{x}f(\xi,y(\xi))d\xi$$

$$\{y_i(x)\}\rightrightarrows y(x)$$

$$y_{i+1}(x)=y_0+\int\limits_{x_0}^{x}f(\xi,y_i(\xi))d\xi$$

$$y_0(x)=y_0$$

1) $|y_0(x)-y(x)|=\left|y_0-y_0-\int\limits_{x_0}^{x}f(\xi,y(\xi))d\xi\right|=\left|\int\limits_{x_0}^{x}f(\xi,y(\xi))d\xi\right|\leqslant M|x-x_0|\leqslant Mh$

2) $|y_1(x)-y(x)|=\left|y_0+\int\limits_{x_0}^{x}f(\xi,y_0(\xi))d\xi-y_0-\int\limits_{x_0}^{x}f(\xi,y(\xi))d\xi\right|=$

$=\left|\int\limits_{x_0}^{x}[f(\xi,y_0(\xi))-f(\xi,y(\xi))]d\xi\right|\leqslant k\cdot\left|\int\limits_{x_0}^{x}(y_0-y)d\xi\right|\leqslant kM\frac{(x-x_0)^2}{2!}\leqslant kM\frac{h^2}{2!}$

...

i) $|y_{i-1}(x)-y(x)|\leqslant k^{i-1}M\frac{h^i}{i!}$

i+1) $|y_i(x)-y(x)|\leqslant k^iM\frac{h^{i+1}}{(i+1)!}$

Пример:

$y' = x - y$, $y(0) = 1$, $x \in [0,1]$, $\epsilon = 0,1$

$k = |(x-y)'_y| = |-1| = 1$

$M = |x - y| \leqslant 3 = |x| + |y|$

$\dfrac{M}{(i+1)!} = \dfrac{3}{(i+1)!} \leqslant 0,1 \Rightarrow i = 4$

$y_i = y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f(\xi, y(\xi)) d\xi$

$y_0(x) = 1$

$y_1(x) = 1 + \int\limits_0^x (\xi - 1) d\xi = 1 + \left(\dfrac{\xi^2}{2} - \xi\right)\Bigg|_0^x = 1 - x + \dfrac{x^2}{2}$

$y_2(x) = 1 + \int\limits_0^x \left(\xi - 1 + \xi - \dfrac{\xi^2}{2}\right) d\xi = 1 - x + x^2 - \dfrac{x^3}{6}$

$y_3(x) = 1 + \int\limits_0^x \left(\xi - 1 + \xi - \xi^2 + \dfrac{\xi^3}{6}\right) d\xi = 1 - x + x^2 - \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^4}{24}$

$y_4(x) = 1 + \int\limits_0^x \left(\xi - 1 + \xi - \xi^2 + \dfrac{\xi^3}{3} - \dfrac{\xi^4}{24}\right) d\xi = 1 - x + x^2 - \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^4}{12} - \dfrac{x^5}{120}$

2 метод метод степенных рядов (для ДУВП)

$y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$

$y(x_0) = y_{1_0}$

$y'(x_0) = y_{2_0}$

$\ldots$

$y^{(n-1)}(x_0) = y_{n_0}$

$$y(x) = y(x_0) + \frac{y'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{y''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{y^{(n-1)(x_0)}}{(n-1)!}(x - x_0)^{n-1} + \ldots =$$

$$= y_{1_0} + y_{2_0}\frac{(x - x_0)}{1!} + y_{3_0}\frac{(x - x_0)^2}{2!} + \ldots + y_{n_0}\frac{(x - x_0)^{n-1}}{(n-1)!} + \underbrace{\frac{y^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \ldots}_{\text{надо определить}}$$

По методу определения последних коэффициентов искомого вида решения метод степенных рядов подразделяется на два метода:

1. метод последовательного дифференцирования
2. метод неопределенных коэффициентов

2.1 метод последовательного дифференцирования

1. в обе части уравнения подставляем заданные начальные условия:
   $y^{(n)}(x_0) = f(x_0, y_{1_0}, y_{2_0}, \ldots, y_{n_0})$
   значение $y^{(n)}(x_0)$ найдено

2. обе части дифференцируем по x
   $y^{(n+1)} = \dfrac{\partial f}{\partial x} + \sum\limits_{k=0}^{n-1} \dfrac{\partial f}{\partial y^{(k)}} \dfrac{dy^{(k)}}{dx} = \dfrac{\partial f}{\partial x} + \sum\limits_{k=0}^{n-1} \dfrac{\partial f}{\partial y^{(k)}} y^{(k+1)}$
3. повторяем 1 пункт — получаем $y^{(n+1)}(x_0)$

и т.д.

Пример:
$y'' + xy' + y^2 = 0$
$y(0) = 0,\ y'(0) = 1$
$y(x) = y(0) + \dfrac{y'(0)}{1!}x + \dfrac{y''(0)}{2!}x^2 + \ldots$
$y(x) = 0 + x + \dfrac{y''(0)}{2!}x^2 + \dfrac{y'''(0)}{3!}x^3 + \ldots$
$y''(0) = -0 - x = 0$
$y''' + y' + xy'' + 2yy' = 0$
$y'''(0) = -1$
$y^{(4)} + y'' + y'' + xy''' + 2(y')^2 + 2yy'' = 0$
$y^{(4)} + 2(y')^2 = 0$
$y^{(4)}(0) = -2$
$y(x) = x - \dfrac{x^3}{6} - \dfrac{x^4}{12}$

2.2 метод неопределенных коэффициентов
искомый вид решения записываем в виде:
$y(x) = y_{1_0} + y_{2_0}(x - x_0) + \dfrac{y_{3_0}}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \dfrac{y_{n)}}{(n-1)!}(x - x_0)^{n-1} + a_1(x - x_0)^n + a_2(x - x_0)^{n+1} + \ldots$
Подставляем этот вид решения в обе части заданного уравнения и приравниваем в обеих частях коэффициенты при $(x - x_0)$ в одинаковых степенях. Получаем систему, из которой и определяем a_i

Пример:
$y''' + xy' + y^2 = 0$
$y(x) = x + a_1x^2 + a_2x^3 + a_3x^4 + \ldots$
$(2a_1 + 6a_2x + 12a_3x^2 + 20a_4x^3 + \ldots) + (x + 2a_1x^2 + 3a_2x^3 + 4a_3x^4 + \ldots) + (x + a_1x^2 + a_2x^3 + \ldots)^2 = 0$

$x^0: \quad 2a_1 = 0 \qquad\qquad a_1 = 0$

$x^1: \quad 6a_2 + 1 = 0 \qquad\qquad a_2 = -\dfrac{1}{6}$

$x^2: \quad 12a_3 + 2a_1 + 1 = 0 \qquad a_3 = -\dfrac{1}{12}$

$x^3: \quad 20a_4 + 3a_2 + 2a_1 = 0 \quad a_4 = \dfrac{1}{40}$

$y(x) = x + 0 \cdot x^2 - \dfrac{1}{6}x^3 - \dfrac{1}{12}x^4 + \dfrac{1}{40}x^5$

3 метод метод малого параметра (для систем ДУ)

$\dfrac{dy}{dx} = f(x, y, \alpha)$, $y(x_0) = \varphi(\alpha)$

В дополнение к тому, что условия теоремы Коши выполнены полагается, что $f(x, y, \alpha)$ — дифференцируемая по x и аналитическая по y и α (т.е. бесконечно дифференцируема по y и α).

ряд по степеням α с коэффициентами-функциями от x:

$y(x) = y_0(x) = \alpha y_1(x) + \alpha^2 y_2(x) + \ldots + \alpha^i y_i(x)$

Рассмотрим при $\alpha = 0$

$\dfrac{dy}{dx} = f(x, y, 0)$; $y(x_0) = \varphi(0)$ — порождающая задача.

Решение: $y_0(x)$ — порождающее (невозмущенное) решение.

$y(x) = y_0(x)$

Разлагаем в окрестности $f(x, y_0, 0) = (\cdot)$

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y_0, 0) + \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(\cdot)} (y - y_0) + \left.\frac{\partial f}{\partial \alpha}\right|_{(\cdot)} \alpha + \frac{1}{2!}\left[\left.\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right|_{(\cdot)} (y - y_0)^2 + 2\left.\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial \alpha}\right|_{(\cdot)} (y- -y_0)\alpha + \left.\frac{\partial^2 f}{\partial \alpha^2}\right|_{(\cdot)} \alpha^2\right] + \frac{1}{3!}\ldots$$

$$\frac{dy_0}{dx} + \alpha\frac{dy_1}{dx} + \alpha^2\frac{dy_2}{dx} + \alpha^3\frac{dy_3}{dx} + \ldots = f|_{(\cdot)} + \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(\cdot)} \cdot (\alpha y_1 + \alpha^2 y_2 + \ldots) + \left.\frac{\partial f}{\partial \alpha}\right|_{(\cdot)} \cdot \alpha + +\frac{1}{2!}\left[\left.\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right|_{(\cdot)} \cdot (\alpha y_1 + \alpha^2 y_2 + \alpha^3 y_3 + \ldots)^2 + 2\left.\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial \alpha}\right|_{(\cdot)} (\alpha y_1 + \alpha^2 y_2 + \alpha^3 y_3 + \ldots)\alpha + + \left.\frac{\partial^2 f}{\partial \alpha^2}\right|_{(\cdot)} \alpha^2\right] + \ldots$$

$y(x_0) = \varphi(\alpha)$

$$y_0(x_0) + \alpha y_1(x_0) + \alpha^2 y_2(x_0) + \ldots = \varphi(0) + \frac{\varphi'(0)}{1!}\alpha + \frac{\varphi''(0)}{2!}\alpha^2 + \ldots + \frac{\varphi^{(n)}(0)}{n!}\alpha^n$$

$$
(*)\left[\begin{array}{l}
\text{Так как } \alpha = 0\text{, то:}\\
\left.\begin{array}{l}\dfrac{dy_0}{dx} = f(x, y_0, 0)\\ y_0(x_0) = \varphi(0)\end{array}\right\} \to y_0(x)\\
\text{При первой степени } \alpha\text{:}\\
\left.\begin{array}{l}\cancel{\alpha}\dfrac{dy_1}{dx} = \left.\dfrac{\partial f}{\partial y}\right|_{(\cdot)} \cancel{\alpha} y_1 + \left.\dfrac{\partial f}{\partial \alpha}\right|_{(\cdot)} \cancel{\alpha}\\ \cancel{\alpha} y_1(x_0) = \dfrac{\varphi'(0)}{1!}\cancel{\alpha}\end{array}\right\} \to y_1(x) (\text{подставляем } y_0(x) \text{ в } (\cdot))\\
\text{При второй степени } \alpha\text{:}\\
\left.\begin{array}{l}\dfrac{dy_2}{dx} = \left.\dfrac{\partial f}{\partial y}\right|_{(\cdot)} y_2 + \dfrac{1}{2}\left.\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right|_{(\cdot)} y_1^2 + \left.\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial \alpha}\right|_{(\cdot)} y_1 + \left.\dfrac{\partial^2 f}{\partial \alpha^2}\right|_{(\cdot)}\\ y_2(x_0) = \dfrac{\varphi''(0)}{1!}\end{array}\right\} \begin{array}{l}\to y_2(x)\\ (\text{подставляем}\\ y_0(x) \text{ и } y_1(x)\\ \text{в } (\cdot))\end{array}\\
\text{и т.д.}
\end{array}\right.
$$

При решении данной задачи по методу малого параметра при определении коэффициентов при степенях α искомого решения необходимо решать последовательность задач Коши $(*)$.
Особенностью последовательности $(*)$ является то, что для ее решения на каждом этапе требуются решения предыдущих. Благодаря этому метод наиболее точен.

Пример:
$y' = y^2 + \dfrac{2\mu}{x}$
$y(1) = 1$
$y = y_0 + \mu y_1 + \mu^2 y_2 + \mu^3 y_3 + \dots$
$y_0' + \mu y_1' + \mu^2 y_2' + \mu^3 y_3' + \dots = (y_0 + \mu y_1 + \mu^2 y_2 + \dots)^2 + \dfrac{2\mu}{x}$
$y_0(1) + \mu y_1(1) + \mu^2 y_2(1) + \dots = 1$
Построим последовательность задач Коши:

0) $y_0' = y_0^2$
   $y_0(1) = 1$

1) $y_1' = 2y_0 y_1 + \dfrac{2}{x}$
   $y_1(1) = 0$

2) $y_2' = y_1^2 + 2y_0 y_2$
   $y_2(1) = 0$

   и т.д.

Решаем:

0) $\dfrac{dy_0}{y_0^2} = dx \rightarrow -\dfrac{1}{y_0} = x + C$

$y_0(1) = 1 \rightarrow C = -2$

$y_0(x) = \dfrac{1}{2-x}$

1) $\dfrac{dy_1}{dx} = \dfrac{2y_1}{2-x} + \dfrac{2}{x}$

$\dfrac{dy_1}{y_1} = \dfrac{2dx}{2-x}$

$\ln y_1 = -2\ln|2-x| + \ln\tilde{C}$

$y_1 = \dfrac{\tilde{C}}{(x-2)^2}$

$\dfrac{\tilde{C}'(x)}{(x-2)^2} = \dfrac{2}{x}$

$d\tilde{C}(x) = \dfrac{2(x-2)^2}{x}dx$

$\tilde{C}(x) = \int\left(2x - 8 + \dfrac{8}{x}\right)dx + C_1$

$y_1(x) = \dfrac{C + x^2 - 8x + 8\ln|x|}{(x-2)^2}$

$y_1(1) = 0$

$y_1(1) = 0 = \dfrac{C + 1 - 8 + 0}{1} \Rightarrow C = 7$

$y_1(x) = \dfrac{7 + x^2 - 8x + 8\ln|x|}{(x-2)^2}$

2) $\ldots$

$$y(x) = \frac{1}{2-x} + \mu\frac{x^2 - 8x + 8\ln|x| + 7}{(x-2)^2} + \ldots$$

Численные методы решения ДУ (численное решение задачи Коши)

$y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$ на отрезке $[x_0, X]$

Делим отрезок на n частей. $h = \dfrac{x - x_0}{n}$ — шаг расчета. Текущий шаг расчета: $[x_i, x_{i+1}]$. x_i — уже найдено, x_{i+1} — надо найти.

$f(x_i, y_i)$:

$y_{i+1} = y_i + \dfrac{y_i'}{1!}h + \dfrac{y_i''}{2!}h^2 + \ldots$

В "чистом виде" формулу Тейлора применять нельзя потому что:

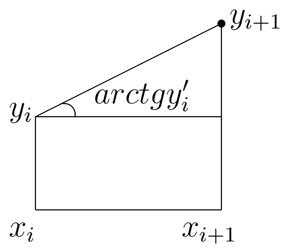
— y_i — приближенное значение

— значение y — дискретное.

Схожесть с формулой Тейлора

$$\begin{array}{rl} \text{до } h: & \text{численный метод Эйлера} \\ h^2: & \text{модификация численного метода Эйлера} \\ h^4: & \text{численные методы Рунге-Кутта и Адамса} \end{array}$$

Численный метод Эйлера:



$$y'_i = f(x_i, y_i)$$

$$y_{i+1} = y_i + y'_i \cdot h$$

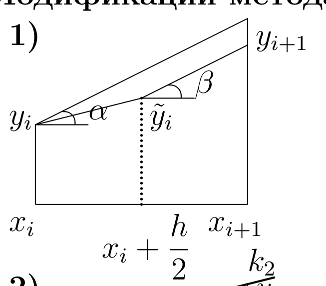
При применении численных методов надо обязательно строить таблицу расчета:

n	0	1	...
x	x_0	x_1	...
y	y_0	y_1	...
f	f_0	f_1	...

...

Модификации метода Эйлера

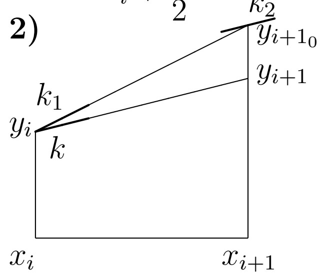
1)



$$1)\ \tilde{y}_i = y_i + \frac{h}{2} \cdot f(x_i, y_i)$$

$$y_{i+1} = y_i + h \cdot f(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2} \cdot f(x_i, \tilde{y}_i))$$

2)



$$2)\ k_1 = f(x_i, y_i)$$

$$k_2 = f(x_{i+1}, y_{i+1_0})$$

$$k = \frac{k_1 + k_2}{2}$$

$$y_{i+1} = y_1 + h \cdot \frac{f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1_0})}{2}$$

Метод Рунге-Кутта

[нет схемы]

$$k = \frac{k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4}{6}$$

$$y_{i+1} = y_i + \Delta y_i$$

$$\Delta y_i = \frac{1}{6}(k_1^i + 2k_2^i + 2k_3^i + k_4^i)$$

$$k_1^i = hf(x_i, y_i)$$

$$k_2^i = hf(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{1}{2}k_1^i)$$

$$k_3^i = hf(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{1}{2}k_2^i)$$

$$k_4^i = hf(x_i + h, y_i + k_3^i)$$

Замечание об аналитическом выводе метода Рунге-Кутта

$y_{i+1} = y_i + \Delta y_i$
$\Delta y_i = \alpha k_1^i + \beta k_2^i + \gamma k_3^i + \delta k_4^i$
$k_1^i = hf(x_i, y_i)$
$k_2^i = hf(x_i + a_1 h, y_i + b_1 k_1^i)$
$k_3^i = hf(x_i + a_2 h, y_i + b_2 k_2^i)$
$k_4^i = hf(x_i + a_3 h, y_i + b_3 k_3^i)$

Если теперь Δy_i, k_2^i, k_3^i и k_4^i разложить по степеням h, то получим разложение Δy_i по степеням h с некоторыми коэффициентами.

$\alpha = \delta = \frac{1}{6}$
$\beta = \gamma = \frac{1}{3}$
$a_1 = b_1 = a_2 = b_2 = \frac{1}{2}$
$a_3 = b_3 = 1$

Замечание об аналитическом доказательстве для алгоритмов модификаций метода Эйлера

$y_{i+1} = y_i + \frac{y_i'}{1!}h + \frac{y_i''}{2!}h^2 + \ldots$
$y_{i+1} = y_i + \Delta y_i$
$\Delta y_i = \alpha k_1^i + \beta k_2^i$
$k_1^i = hf(x_i, y_i)$
$k_2^i = hf(x_i + ah, y_i + bk_1^i)$
$y_i' = f(x_i, y_i)$

$y_i'' = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} f(x_i, y_i)$

$\Delta y_i = fh + \frac{h^2}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} f\right) = *$

$\Delta y_i = \alpha k_1^i + \beta k_2^i = \alpha hf + \beta\left[hf + \frac{\partial f}{\partial x} ah^2 + \frac{\partial f}{\partial y} fbh^2\right]$

$* = \alpha hf + \beta hf + \beta ah^2 \frac{\partial f}{\partial x} + \beta bh^2 f \frac{\partial f}{\partial y}$

$h : f = (\alpha + \beta) f$

$h^2 : \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial y} f = \beta a \frac{\partial f}{\partial x} + \beta b \frac{\partial f}{\partial y} f$

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 1 \\ \alpha\beta = \frac{1}{2} \\ b\beta = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$1 :$

$\alpha = 0$

$\beta = 1$

$a = b = \frac{1}{2}$

Подставляя эти значения получаем формулу первой модификации

$\Delta y_i = k_2^i = hf(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2} f(x_i, y_i))$

$2 :$

$\alpha = \beta = \frac{1}{2}$

$a = b = 1$

Подставляя эти значения получаем формулу второй модификации.

Метод Адамса

$x \in [x_i, x_{i+1}]$

$\Delta y_i = \int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} y' dx,\ i \geqslant 3$

Используется интерполяционный полином Ньютона.

Вычислив по методу Рунге-Кутта y_1, y_2, y_3, получаем y_0', y_1', y_2', y_3'.

$$\Delta y_i = \int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} y' dx \cong \int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} P_i(x) dx = \int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} \left[y_i' + z \cdot \Delta y_i' + \frac{z(z+1)}{2} \cdot \Delta^2 y_i' + \right.$$

$$\left. + \frac{z(z+1)(z+2)}{6} \cdot \Delta^3 y_i'\right] dx = *$$

$z = \dfrac{x - x_i}{h}$

$\Delta y'_i = y'_i - y'_{i-1}$

$\Delta^2 y'_i = \Delta y'_i - \Delta y'_{i-1}$

$\Delta^3 y'_i = \Delta^2 y'_i - \Delta^2 y'_{i-1}$

$* = h \int\limits_0^1 [y'_i + \Delta y'_i z + \ldots]\, dz = h \left[y'_i + \frac{1}{2}\Delta y'_i + \frac{5}{12}\Delta^2 y'_i + \frac{3}{8}\Delta^3 y'_i \right] \leqslant \Delta y_i$

$y_{i+1} = y_i + \Delta y_i$

Таблица для метода Адамса:

i	0	1	2	3	4	$\ldots$	$\ldots$	$n-1$	n
x_i	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	$\ldots$	$\ldots$	x_{n-1}	x_n
y_i	y_0	y_1	y_2	y_3	y_4	$\ldots$			
y'_i	y'_0	y'_1	y'_2	y'_3	$\ldots$				
$\Delta y'_i$	–	$\Delta y'_1$	$\Delta y'_2$	$\Delta y'_3$					
$\Delta^2 y'_i$	–	–	$\Delta^2 y'_2$	$\Delta^2 y'_3$					
$\Delta^3 y'_i$	–	–	–	$\Delta^3 y'_3$					
Δy_i				Δy_3	Δy_4				

В рамке в начале таблицы — результаты метода Рунге-Кутта.

$y'_i = f(x_i, y_i)$

$\Delta y'_i = y'_i - y'_{i-1}$

$\Delta^2 y'_i = \Delta y'_2 - \Delta y'_{i-1}$

Характеристики алгоритмов численных методов

1. Сходимость
   $y_i(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} y(x)$
   Все алгоритмы численных методов — сходящиеся

2. Устойчивость счета
   Устойчивость счета — порядок ошибки не увеличивается.

   Пример

Устойчивость метода Эйлера
Пусть y_0 взято с некоторой ошибкой:
$|y_0 - \tilde{y}_0| < \varepsilon$
$y_1 = y_0 + hf(x_0, y_0)$
$\tilde{y}_1 = \tilde{y}_0 + hf(x_0, \tilde{y}_0)$
$|y_1 - \tilde{y}_1| \leqslant |y_0 - \tilde{y}_0| + hk|y_0 - \tilde{y}_0| = (1 + hk)|y_0 - \tilde{y}_0|$
$|y_2 - \tilde{y}_2| \leqslant |y_1 - \tilde{y}_1| + hk|y_1 - \tilde{y}_1| \leqslant (1 + hk)^2|y_0 - \tilde{y}_0|$
$\dots$
$|y_n - \tilde{y}_n| \leqslant (1 + hk)^n|y_0 - \tilde{y}_0| \leqslant (e^{hk})^n|y_0 - \tilde{y}_0| = e^{nhk}|y_0 - \tilde{y}_0| = e^{|x-x_0|k}|y_0 - \tilde{y}_0| \leqslant$
$\leqslant e^{|x-x_0|k}\varepsilon \Rightarrow$ ошибка не больше порядка ε

3. Обеспечение точности расчёта.
   Для того, чтобы обеспечить заданную точность расчета ε, необходимо разбить отрезок на n частей и произвести расчет, затем на $2n$ частей и также произвести расчет.
   Формула Рунге:
   $|y(x) - y_{2n}(x)| \leqslant \dfrac{|y_n(x) - y_{2n}(x)|}{2^m - 1} \leqslant \varepsilon$, где:
   $m = 1$ для метода Эйлера
   $m = 2$ для модификаций метода Эйлера
   $m = 4$ для методов Рунге-Кутта и Адамса
   Если полученная величина $\leqslant \varepsilon$, то расчет с числом деления $2n$ и является расчетом с заданной точность.

Линейная теория ДУ (линейные ДУ и линейные системы ДУ)

Df 1 Линейная СДУ имеет вид:
$\dfrac{dy}{dx} = A(x)y + f(x)$

$y = (y_1, y_2, \dots, y_n),\ f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{pmatrix}$

$A(x) = \begin{pmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x) & \dots & a_{1n}(x) \\ a_{21}(x) & a_{22}(x) & \dots & a_{2n}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(x) & a_{n2}(x) & \dots & a_{nn}(x) \end{pmatrix}$

Df 2 Если $f(x) = 0$, то система называется однородной

Запись линейной СДУ в операторной форме:

$L(y) = f(x)$

$$L(y) = \left[\frac{d}{dx} - A(x)\right] y$$

Df 3 ДУ называется линейным, если оно представимо в виде:
$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + a_2(x)y^{(n-2)} + \ldots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = f(x)$

Df 4 Если $f(x) = 0$, то ДУ называется однородным.

Запись линейного ДУ в операторной форме:

$L(y) = f(x)$

Свойства решений линейных однородных СДУ и ДУВП

Рассматриваем $L(y) = 0$

Th 1 $L(y) = 0$ имеет нулевое решение.

D: Любая однородная система имеет нулевое решение — очевидно.

Замечание Все последующие теоремы касаются только решений, отличных от нулевого.

Th 2 Сумма решений — решение:
$L(y_1) = 0, L(y_2) = 0 \Rightarrow L(y_1 + y_2) = 0$

D: [на примере системы] $L(y_1 + y_2) = \dfrac{d(y_1 + y_2)}{dx} - A(x)(y_1 + y_2) = \dfrac{dy_1}{dx} + \dfrac{dy_2}{dx} -$
$- A(x)y_1 - A(x)y_2 = L(y_1) + L(y_2)$

Th 3 Произведение решения на постоянную — решение
$L(y) = 0, \forall k = const \Rightarrow L(ky) = 0$

D: $L(ky) = \dfrac{d(ky)}{dx} - A(x)(ky) = k\dfrac{dy}{dx} - kA(x)y = k(\dfrac{dy_1}{dx} - A(x)y) = kL(y)$

Следствие 1 Линейная комбинация решений — решение

Следствие 2 Оператор $L(y)$ — линейный оператор, т.к. удовлетворяет свойствам линейного оператора, а именно:
$$\left[\begin{array}{l} L(y_1+y_2) = L(y_1)+L(y_2) \\ L(ky) = kL(y) \end{array}\right.$$

Th 4 Действительная и мнимая части комплексного решения — решения
$L(u+iv) = 0 \Rightarrow L(u) = 0, L(v) = 0$

D: $0 = L(u+iv) = L(u)+L(iv) = L(u)+iL(v) = 0 \Rightarrow L(u) = 0, iL(v) = 0 \Rightarrow L(v) = 0$

Df 1 Совокупность n решений — $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$

Df 2 Совокупность n решений — ЛЗ, если $\exists \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ не все равные $0 : \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \ldots + \alpha_n y_n = 0$

Df 3 Фундаментальная матрица:

для СДУ $G(x) = \begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} & \ldots & y_{1n} \\ y_{21} & y_{22} & \ldots & y_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{n1} & y_{n2} & \ldots & y_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \ldots & y_n \end{pmatrix}$

для ДУВП $G(x) = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \ldots & y_n \\ y_1' & y_2' & \ldots & y_n' \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \ldots & y_n^{(n-1)} \end{pmatrix}$

Df 4 Определитель Вронского: $det\ G(x) = W(x)$

Th 5 Если столбцы матрицы $G(x)$ — ЛЗ, то $W(x) = 0$. И, наоборот, если $W(x) = 0$, то толбцы матрицы $G(x)$ — ЛЗ. [из курса ЛА]

Th 6 Если $W(x) = 0$ хотя бы в одной точке, то соответствующая система решений — ЛЗ

D: $G(x), W(x), W(x_0) = 0$
$\forall H : G(x) \cdot H$ — ЛК решений
$G(x_0) \cdot H = 0$
Найдем h_i, удовлетворяющее этому условию

$$\left.\begin{array}{l} det\ G(x_0) = W(x_0) = 0 \Rightarrow \sum\limits_{i=1}^{n} h_i^2 \neq 0 \\ \text{по Th 1 } \left.\begin{array}{l} G(x)H \to G(x_0)H = 0 \\ y \equiv 0 \to y(x_0) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow G(x)H = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow G(x) \text{ — ЛЗ}$$

Рассмотрим $det\ G(x) = W(x)$ для СДУ

$$\begin{vmatrix} y_{11} & y_{12} & \dots & y_{1n} \\ y_{21} & y_{22} & \dots & y_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{n1} & y_{n2} & \dots & y_{nn} \end{vmatrix}$$

$\dfrac{dy_{ik}}{dx} = \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}y_{jk}$, где k — номер решения, i — номер координаты.

$$\begin{pmatrix} y'_{1k} \\ y'_{2k} \\ \dots \\ y'_{nk} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_{1k} \\ y_{2k} \\ \vdots \\ y_{nk} \end{pmatrix}$$

Df 5 Определителем n-ого порядка называется число, представляющее собой $n!$ слагаемых, представляющих собой произведение n элементов определителя, взятых по одному из каждой строки и каждого столбца определителя со знаком $+$ или $-$ в зависимости от четности или нечетности суммарного числа инверсий первых и вторых индексов сомножителей.

$$W'(x) = \begin{vmatrix} y_{11} & y_{12} & \dots & y_{1n} \\ y_{21} & y_{22} & \dots & y_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{n1} & y_{n2} & \dots & y_{nn} \end{vmatrix}' = \begin{vmatrix} y'_{11} & y'_{12} & \dots & y'_{1n} \\ y_{21} & y_{22} & \dots & y_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{n1} & y_{n2} & \dots & y_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} y_{11} & y_{12} & \dots & y_{1n} \\ y'_{21} & y'_{22} & \dots & y'_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{n1} & y_{n2} & \dots & y_{nn} \end{vmatrix} + \ldots +$$

$$+ \begin{vmatrix} y_{11} & y_{12} & \dots & y_{1n} \\ y_{21} & y_{22} & \dots & y_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y'_{n1} & y'_{n2} & \dots & y'_{nn} \end{vmatrix} = \underbrace{\begin{vmatrix} a_{11}y_{11} & a_{11}y_{12} & \dots & a_{11}y_{1n} \\ y_{21} & y_{22} & \dots & y_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{n1} & y_{n2} & \dots & y_{nn} \end{vmatrix}}_{a_{11}W(x)} + \underbrace{\begin{vmatrix} a_{12}y_{21} & a_{12}y_{22} & \dots & a_{12}y_{2n} \\ y_{21} & y_{22} & \dots & y_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{n1} & y_{n2} & \dots & y_{nn} \end{vmatrix}}_{a_{12}\cdot 0} +$$

$$+ \ldots + \underbrace{\begin{vmatrix} a_{1n}y_{n1} & a_{1n}y_{n2} & \dots & a_{1n}y_{nn} \\ y_{21} & y_{22} & \dots & y_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{n1} & y_{n2} & \dots & y_{nn} \end{vmatrix}}_{a_{1n}\cdot 0} + a_{22}W(x) + a_{33}W(x) + \ldots + a_{nn}W(x)$$

$$\frac{dW(x)}{W(x)} = (a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{nn})dx$$

$$\ln W(x) = \int\limits_{x_0}^{x} \left(\sum_{k=1}^{n} a_{kk} dx \right) + \ln C$$

$\sum\limits_{i=1}^{n} a_{ii} = Sp\ A$

$W(x) = Ce^{\int\limits_{x_0}^{x}(a_{11}+a_{22}+\ldots+a_{nn})dx} = Ce^{\int\limits_{x_0}^{x} Sp\ A\,dx}$

$W(x_0) = C \cdot 1$

$W(x) = W(x_0) \cdot e^{\int\limits_{x_0}^{x} Sp\ A\,dx}$ — формула Остроградского-Лиувилля-Якоби

Для линейного однородного ДУВП формула ОЛЯ имеет вид:

$W(x) = W(x_0) \cdot e^{-\int\limits_{x_0}^{x} a_1(x)\,dx}$

На основании теоремы 6 и формулы ОЛЯ следует:

Th 7 Для того, чтобы система n решений $L(y) = 0$ была ЛНЗ (ЛЗ) необходимо и достаточно, чтобы определитель Вронского этой системы решений был отличен от 0 (был равен 0) на всем рассматриваемом интервале оси X.

Th 8 Любое решение $L(y) = 0$ можно представить в виде ЛК n независимых решений.

D: Выберем $\forall y \in L(y) = 0, y(x_0) = y_0$
На базе n решений составим $G(x) \cdot H = y_0$ — система линейных неоднородных уравнений
$G(x)H \to G(x_0)H = y_0$
$y(x) \to y(x_0) = y_0$
т.е. через 1 точку проходит 2 решения $\Rightarrow y(x) = G(x)H$

Фундаментальная система решений

Df 1 ФСР $L(y) = 0$ называется совокупность n ЛНЗ решений $L(y) = 0$

Df 2 Матрица $G(x)$, построенная на базе ФСР называется фундаментальной матрицей.

Покажем, что ФСР существуют

$L(y) = 0$

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \; y(x_0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$ по теореме Коши $\exists$ такое решение

$$y(x_0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \to y_1(x)$$

$$y(x_0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \to y_2(x)$$

и т.д.

$y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x) \to G(x)$

$det\ G(x) = W(x)$

$W(x_0) = det\ E = 1 \neq 0 \Rightarrow$ система ЛНЗ

Df 3 Если ФСР такова, что для нее есть $G(x_0) = E$, то такая ФСР называется нормальной ФСР, а соответствующая $G(x)$ — нормальной фундаментальной матрицей.

Из всего рассмотренного для $L(y) = 0$ вытекают следующие выводы:

1. ФСР $L(y) = 0$ состоит ровно из n решений
2. ФСР у каждой $L(y) = 0$ — бесконечное множество
   если в качестве $G(x_0)$ — любая невырожденная матрица (а таких бесконечное множество), то по аналогии с доказательством $\Rightarrow$ бесконечное множество ФСР.
3. Общее решение линейной однородной СДУ представляет собой сумму произведений ФСР на произвольные постоянные
   Общее решение линейного однородного ДУВП представляет собой сумму произведений ФСР на произвольные постоянные

Построение линейной однородной СДУ по известной ее ФСР

$y_1, \ldots, y_n$ — ФСР

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_{11} & y_{12} & \ldots & y_{1n} \\ y_{21} & y_{22} & \ldots & y_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{n1} & y_{n2} & \ldots & y_{nn} \end{vmatrix} \neq 0 \text{ по теореме 7}$$

Составим n определителей вида

$$\begin{vmatrix} y_{11} & y_{12} & \ldots & y_{1n} & y_1 \\ y_{21} & y_{22} & \ldots & y_{2n} & y_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ y_{k1} & y_{k2} & \ldots & y_{kn} & y_k \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ y_{n1} & y_{n2} & \ldots & y_{nn} & y_n \\ y'_{k1} & y'_{k2} & \ldots & y'_{kn} & y'_k \end{vmatrix} = 0$$

при $k = 1$ если разложить по последнему столбцу, то при y'_k будет число $\neq 0 \Rightarrow$ можно разделить

$$\begin{cases} y'_1 = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \ldots + a_{1n}y_n & \text{— при } k = 1 \\ y'_2 = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \ldots + a_{2n}y_n & \text{— при } k = 2 \\ \ldots \\ y'_n = a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \ldots + a_{nn}y_n & \text{— при } k = n \end{cases}$$

Построение линейного однородного ДУВП по известной его ФСР

$y_1, \ldots, y_n$ — ФСР

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \ldots & y_n \\ y'_1 & y'_2 & \ldots & y'_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \ldots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} \neq 0$$

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n & y \\ y_1' & y_2' & \dots & y_n' & y' \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} & y^{(n-1)} \\ y_1^{(n)} & y_2^{(n)} & \dots & y_n^{(n)} & y^{(n)} \end{vmatrix} = 0$$

$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y = 0$

Матрица Коши

$L(y) = 0$ имеет общее решение вида $y = G(x) \cdot C$, но

$y(x_0) = y_0$

$y_0 = G(x_0)C$

$G(x_0)$ — невырожденная $\Rightarrow \exists G^{-1}(x_0)$

$G^{-1}(x_0)y_0 = \underbrace{G^{-1}(x_0)G(x_0)}_{E}C$

$G^{-1}(x_0)y_0 = C$

$y = G(x)G^{-1}(x)y_0$

$K(x, x_0) = G(x) \cdot G^{-1}(x_0)$ — матрица Коши

$y = K(x, x_0)y_0$

Если ФСР — нормальная, то матрица Коши совпадает с ФСР:

$K(x, x_0) = G(x)$, т.к. $G(x_0) = E = G^{-1}(x_0)$

$y = G(x)y_0$

Решение линейной однородной СДУ с постоянными коэффициентами

$\dfrac{dy}{dx} = f \cdot y$, где $A = const$

$\dfrac{dy}{dx} = \lambda y$, где λ — число

$\dfrac{dy}{y} = \lambda dx \to \ln y = \lambda x + \ln H$

$y = He^{\lambda x}$

вектор $y = He^{\lambda x}$ — для СДУ

$H\lambda e^{\lambda x} = AHe^{\lambda x}$

$H\lambda = AH \Rightarrow AH - \lambda H = 0$

$(A - \lambda)H = 0$

$|A - \lambda E| = 0 \leftarrow$ характеристическое уравнение

$(A - \lambda_k E)H_k = 0$ — найти H_k

$y_k = H_k \cdot e^{\lambda_k k}$

<u>**1)**</u> Все корни: $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ — действительные и различные$\to \lambda_k, k = \overline{1, n} \to$
$\to (A - \lambda_k E) \cdot H_k = 0 \to y = \sum\limits_{k=1}^{n} C_k H_k e^{\lambda_k k}$

Пример:

$$\begin{cases} \dot{x} = x - y + z \\ \dot{y} = x + y - z \\ \dot{z} = x - y + z \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & -1 \\ 1 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 = (1-\lambda)^3 - (1-\lambda)$$

$(1-\lambda)\left((1-\lambda)^2 - 1\right) = 0$

$(1-\lambda)(-\lambda)(2-\lambda) = 0$

$\lambda(\lambda-1)(\lambda-2) = 0$

$$\left[\begin{array}{l} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 1 \\ \lambda_3 = 2 \end{array}\right.$$

$\lambda_1 = 0$

$(A - \lambda_1)H_1 = 0$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{cases} h_1 - h_2 + h_3 = 0 \\ h_1 + h_2 - h_3 = 0 \\ h_1 - h_2 + h_3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} h_1 - h_2 = -h_3 \\ h_1 + h_2 = h_3 \end{cases}$$

$$H_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\lambda_2 = 1$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} H_2 = 0$$

$$\begin{cases} -h_2 + h_3 = 0 \\ h_1 - h_3 = 0 \\ h_1 - h_2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} h_1 = h_3 \\ h_1 - h_2 = 0 \end{cases}$$

$$H_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\lambda_3 = 2$

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} H_3 = 0$$

$$\begin{cases} -h_1 - h_2 + h_3 = 0 \\ h_1 - h_2 - h_3 = 0 \\ h_1 - h_2 - h_3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} h_1 + h_2 = h_3 \\ h_1 - h_2 = h_3 \end{cases}$$

$$H_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ответ: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^t + C_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t}$

$x = C_2e^t + C_3e^{2t}$
$y = C_1 + C_2e^t$
$z = C_1 + C_2e^t + C_3e^{2t}$

2) Пусть имеются комплексно-сопряженные корни: $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$
$\lambda_1 = \alpha + i\beta \to (A - \lambda_1 E)H_1 = 0 \to H_1 = ReH_1 + iImH_1 \to H_1e^{\lambda_1 x}$ — комплексное решение $\dfrac{\partial y}{\partial x} = A(y)$
По теореме 4 ReH_1 и ImH_1 — решения $\Rightarrow y_0 = C_1ReH_1e^{\lambda_1 x} + C_2ImH_1e^{\lambda_1 x} + C_3\ldots$
$\lambda_1 \to H_1e^{\lambda_1 x}$
$\lambda_2 \to \overline{H_1}e^{\overline{\lambda_1}x} = \overline{H_1e^{\lambda_1 x}}$
λ_2 — не рассматриваем, так как решение полученное из этого корня будет с точностью до константы иметь те же действительные и мнимые числа.

Формула Эйлера (для выделения действительной и мнимой частей):

$$\boxed{e^{i\varphi} = cos\varphi + isin\varphi}$$

Пример:

$$\begin{cases} \dot{x} = x - y \\ \dot{y} = x + y \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$(1-\lambda)^2 + 1 = 0$
$\lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0$
$\lambda_{1,2} = 1 \pm i$
Рассмотрим только один из корней. Для этого выберем $\lambda_1 = 1 + i$
$(A - \lambda_1 E)H_1 = 0$

$$\begin{pmatrix} -i & -1 \\ 1 & -i \end{pmatrix} H_1 = 0$$

$$\begin{cases} -ih_1 - h_2 = 0 \\ h_1 - ih_2 = 0 \end{cases}$$

$$H_1 = \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} e^{(1+i)t} = \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} e^t(cos\ t + i\ sin\ t) = e^t \begin{pmatrix} i\ cos\ t - sin\ t \\ cos\ t + i\ sin\ t \end{pmatrix} = e^t \left[\begin{pmatrix} -sin\ t \\ cos\ t \end{pmatrix} + \right.$$

$$\left. +i \begin{pmatrix} cos\ t \\ sin\ t \end{pmatrix} \right] = \underbrace{\begin{pmatrix} -sin\ t \\ cos\ t \end{pmatrix} e^t}_{ReH_1} + i \underbrace{\begin{pmatrix} cos\ t \\ sin\ t \end{pmatrix} e^t}_{ImH_1}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} -sin\ t \\ cos\ t \end{pmatrix} e^t + C_2 \begin{pmatrix} cos\ t \\ sin\ t \end{pmatrix} e^t$$

3) Пусть есть кратные действительные корни:
$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \ldots = \lambda_m$, $\lambda_{m+1}(\neq \lambda_m), \ldots, \lambda_n$
$(A - \lambda_1 E)H_1 = 0$
rg зависит от жордановой формы матрицы
Есть 2 метода решения (определения m решений системы)

I (— для единой жардановой клетки)
1)$(A - \lambda_1 E)H_1 = 0 \to H_1$
2)$(A - \lambda_1 E)H_2 = H_1 \to H_2$
3)$(A - \lambda_1 E)H_3 = H_2 \to H_3$
$\ldots$
$(A - \lambda_1 E)H_m = H_{m-1} \to H_m$

$$y = C_1 H_1 e^{\lambda_1 x} + C_2\left[H_1 \cdot \frac{x}{1!} + H_2\right]e^{\lambda_1 x} + C_3\left[H_1 \cdot \frac{x^2}{2!} + H_2 \cdot \frac{x}{1!} + H_3\right]e^{\lambda_1 x} + \ldots +$$
$$+ C_m\left[H_1 \cdot \frac{x^{m-1}}{(m-1)!} + \ldots + H_m\right]e^{\lambda_1 x}$$

Если же на 1 шаге $(A - \lambda_1 E)H_1 = 0 \to H_1, H_2, \ldots$
количество H = количество клеток
если $H_1, \ldots, H_k, k < m$, то ищем присоединенные для них.
Одинарные записываются как $C_i H_i e^{\lambda_j x}$
иначе записываются как $C_i\left[H_i \cdot \dfrac{x}{1!} + H_{i+1}\dfrac{x^2}{2!}\right]e^{\lambda_j x}\ldots$

II (— дает результаты **всегда**)

1. $k = rg(A - \lambda_1 E) - (n - m)$
   $y = [H_0 + H_1 x + H_2 x_2 + \ldots + H_k x_k]\, e^{\lambda x}$
2. последнее выражение подставляется в СДУ $\dfrac{\partial y}{\partial x} = Ay$
   по методу неопределенных коэффициентов получаем систему алгебраических линейных уравнений относительно неизвестных H
   решаем
   получаем ЛК ФСР с постоянными коэффициентами (общее решение)
   найденный вид решения подставляем в искомый вид решения:
   $y = \left[\quad \ldots \quad\right]e^{\lambda x}$
   и разрешаем его относительно m произвольных постоянных.

Пример:

$$\begin{cases} \dot{x} = 3x - y \\ \dot{y} = 4x - y \end{cases}$$
$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 \\ 4 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$(3-\lambda)(-1-\lambda)+4=0$
$\lambda^2-2\lambda+1=0$
$\lambda=1, p=2$

I

$\lambda_1=1$
$(A-\lambda_1 E)H_1=0$
$$\begin{pmatrix}2 & -1\\ 4 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}h_1\\ h_2\end{pmatrix}=0$$
$$\begin{cases}2h_1-h_2=0\\ 4h_1-2h_2=0\end{cases}$$
$$H_1=\begin{pmatrix}1\\ 2\end{pmatrix}$$
$(A-\lambda_1 E)H_2=H_1$
$$\begin{pmatrix}2 & -1\\ 4 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}h_3\\ h_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 2\end{pmatrix}$$
$$\begin{cases}2h_3-h_4=1\\ 4h_3-2h_4=2\end{cases}$$
$$H_2=\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=C_1\begin{pmatrix}1\\ 2\end{pmatrix}e^t+C_2\begin{pmatrix}t+1\\ 2t+1\end{pmatrix}e^t$$

II

$k=rg(A-\lambda_1 E)-(n-m)=1-0=1$
$$\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\left[\begin{pmatrix}a_1\\ a_2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}b_1\\ b_2\end{pmatrix}t\right]e^t$$
$x=(a_1+b_1 t)e^t$
$y=(a_2+b_2 t)e^t$
$$\begin{cases}b_1e^t+(a_1+b_1t)e^t=3a_1e^t+3b_1te^t-a_2e^t-b_2te^t\\ b_2e^t+(a_2+b_2t)e^t=4a_1e^t+4b_1te^t-a_2e^t-b_2te^t\end{cases}$$
$$\begin{cases}b_1+a_1+b_1t=3a_1+3b_1t-a_2-b_2t\\ b_2+a_2+b_2t=4a_1+4b_1t-a_2-b_2t\end{cases}$$
$$\begin{cases}b_1 & =3b_1-b_2\\ b_1+a_1 & =3a_1-a_2\\ b_2 & =4b_1-b_2\\ b_2+a_2 & =4a_1-a_2\end{cases}$$

$$\begin{cases} 2a_1 - a_2 - b_1 &= 0 \\ 4a_1 - 2a_2 - b_2 &= 0 \\ 2b_1 - b_2 &= 0 \\ 4b_1 - 2b_2 &= 0 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 \\ 4 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow rg = 2$$

$$\begin{cases} b_1 &= 2a_1 - a_2 \\ b_2 &= 4a_1 - 2a_2 \\ 2b_1 - b_2 &= 0 \\ 4b_1 - 2b_2 &= 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b_1 &= 2a_1 - a_2 \\ b_2 &= 4a_1 - 2a_2 \end{cases}$$

$a_1 = C_1$

$a_2 = C_2$

$b_1 = 2C_1 - C_2$

$b_2 = 4C_1 - 2C_2$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \left[\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2C_1 - C_2 \\ 4C_1 - 2C_2 \end{pmatrix} t \right] e^t = C_1 \begin{pmatrix} 1 + 2t \\ 4t \end{pmatrix} e^t + C_2 \begin{pmatrix} -t \\ 1 - 2t \end{pmatrix} e^t = \dots$$

покажем, что это решение эквивалентно тому, что мы получили в решении первым способом. Для этого заменим текущие постоянные другими (операции с произвольными постоянными не влияют на решение как таковое, только на его запись):

$$\dots = (\tilde{C}_1 + \tilde{C}_2) \begin{pmatrix} 1 + 2t \\ 4t \end{pmatrix} e^t + (2\tilde{C}_1 + \tilde{C}_2) \begin{pmatrix} -t \\ 1 - 2t \end{pmatrix} e^t = \left[\tilde{C}_1 \begin{pmatrix} 1 + 2t - 2t \\ 4t + 2 - 4t \end{pmatrix} + \right.$$

$$\left. + \tilde{C}_2 \begin{pmatrix} 1 + 2t - t \\ 4t + 1 - 2t \end{pmatrix} \right] e^t = \left[\tilde{C}_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \tilde{C}_2 \begin{pmatrix} 1 + t \\ 2t + 1 \end{pmatrix} \right] e^t$$

что эквивалентно решению, полученному первым способом.

4) Пусть есть кратные комплексные корни:
$\lambda_{1,2,3,\dots,2m-1,2m} = \alpha \pm i\beta, \lambda_{2m+1}$ — уже другой корень

1. Сначала по любому из 2 методов решаем СДУ для одного из комплексных корней (например для $\lambda = \alpha + i\beta$)
2. Решаем как для кратных действительных
3. Получаем ответ в виде m решений фундаментальной системы комплексного вида
4. В каждом из этих решений фундаментальной системы выделяем Re и Im. Получаем $2m$ решений.

5. Записываем итог в виде суммы $2m$ произведений произвольных постоянных на каждый из этих $2m$ действительных решений.

Решение линейного однородного ДУВП с постоянными коэффициентами

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}y' + a_n y = 0$$

$$a_i = const$$

$$\frac{d}{dx} = p$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = py$$

$$y'' = \frac{d^2y}{dx^2} = \left(\frac{d}{dx}\right)^2 y = p^2 y$$

$$\ldots$$

$$y^{(n)} = p^n y$$

$$p^n y + a_1 p^{n-1} y + \ldots + a_{n-1} p y + a_n y = 0$$

$$y(\underbrace{p^n + a_1 p^{n-1} + a_2 p^{n-2} + \ldots + a_{n-1} p + a_n}_{\text{оператор, действующий на } y}) = 0$$

$$\underbrace{L(p)}_{\text{линейный оператор}} \qquad y = 0$$

1) $L(p)(y+z) = L(p)y + L(p)z$

2) $L(p)(\alpha y) = \alpha L(p)y$

3) $[L_1(p) + L_2(p)]y = L_1(p)y + L_2(p)y$

4) $[L_1(p) \cdot L_2(p)]y = L_2(p)[L_1(p)y] = L_1(p)[L_2(p)y]$

5) $L(p)e^{\lambda x} = L(\lambda)e^{\lambda x}$
$pe^{\lambda x} = \lambda e^{\lambda x}$
$p^2 e^{\lambda x} = \lambda^2 e^{\lambda x}$
$\ldots$
$p^n e^{\lambda x} = \lambda^n e^{\lambda x}$

6) $L(p)(f(x)\cdot e^{\lambda x}) = e^{\lambda x}L(p+\lambda)f(x)$

<u>D</u>: $L(p) = ap + b$ (по индукции получаем следующее)
$(ap+b)(f(x)e^{\lambda x}) = a\left[p\left(f(x)e^{\lambda x}\right)\right] + b\left(f(x)e^{\lambda x}\right) = a\left[e^{\lambda x}pf(x) + f(x)\lambda e^{\lambda x}\right] +$
$+e^{\lambda x}bf(x) = e^{\lambda x}\left[apf(x)\right] + e^{\lambda x}\lambda af(x) + e^{\lambda x}bf(x) = e^{\lambda x}\left[a(p+\lambda)+b\right]f(x) =$
$= e^{\lambda x}L(p+\lambda)f(x)$
для $(n-1)$ — верно. Рассмотрим для n

$$L_n(p)\left(f(x)e^{\lambda x}\right) = L_1(p)\left[L_{n-1}(p)\left(f(x)e^{\lambda x}\right)\right] = L_1(p)\left(e^{\lambda x}\underbrace{L_{n-1}(p+\lambda)f(x)}_{\varphi(x)}\right) =$$

$$= e^{\lambda x}L_1(p+\lambda)L_{n-1}(p+\lambda)f(x) = e^{\lambda x}L_n(p+\lambda)f(x)$$

Определение решения линейного однородного ДУВП с постоянными коэффициентами

$L(p)y = 0$

$y = e^{\lambda x}$

$L(p)e^{\lambda x} = 0$

$L(\lambda)e^{\lambda x} = 0 \Rightarrow$ (по 4 свойству) $\Rightarrow L(\lambda) = 0 \leftarrow$ характеристическое уравнение

$\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\lambda + \underline{a_n} = 0$

<u>**1)**</u> Пусть $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ — действительные и различные
$e^{\lambda_1 x}, \ldots, e^{\lambda_n x}$ — решения

$$W = e\begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \ldots & \lambda_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \ldots & \lambda_n^{n-1} \end{vmatrix} \neq 0$$

$$y = \sum_{i=1}^{n} C_i e^{\lambda_n x}$$

Пример:

$y''' - 3y'' + 2y' = 0$
$\lambda^3 - 3\lambda^2 + 2\lambda = 0$

$$\left[\begin{array}{l} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 1 \\ \lambda_3 = 2 \end{array}\right.$$

$y = C_1 + C_2e^x + C_3e^{2x}$

2) Пусть среди корней есть комплексные: $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$

$\lambda = \alpha + i\beta$

$e^{(\alpha+i\beta)x} = e^{\alpha x}(cos\beta x + isin\beta x) = e^{\alpha x}cos\beta x + ie^{\alpha x}sin\beta x$

$y = C_1e^{\alpha x}cos\beta x + C_2e^{\alpha x}sin\beta x + \ldots$

Пример:

$y'' + 2y' + 2y = 0$

$\lambda^2 + 2\lambda + 2 = 0$

$\lambda_{1,2} = -1 \pm i$

$y = C_1e^{-x}cosx + C_2e^{-x}sinx$

3) Есть кратные действительные корни

$\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_m, \lambda_{m+1}, \ldots, \lambda_n$

$(A - \lambda_1E)H_1 = 0 \to H_1 \to H_1e^{\lambda_1x}$

$L(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^m \cdot L_1(\lambda) : L_1(\lambda_1) \neq 0$

$\lambda \to p + \lambda_1$

$L(p + \lambda_1) = (p)^mL_1(p + \lambda_1) = (p)^m\left(L_1(p) + L_1(\lambda_1)\right) = L_1(p + \lambda_1)p^m$

$y = x^ne^{\lambda_1x}$

$$L(p)\underbrace{x^k}_{f(x)}e^{\lambda_1x} = e^{\lambda_1x}L(p + \lambda_1)x^k = e^{\lambda_1x}L_1(p + \lambda_1)\quad\underbrace{p^m \cdot x^k}_{=0 \text{ при } k=\overline{0,m-1}}\qquad\overbrace{=0}^{\text{чтобы было решением}}$$

$e^{\lambda_1x}, xe^{\lambda_1x}, x^2e^{\lambda_1x}, \ldots, x^{m-1}e^{\lambda_1x}$ — m независимых решений

$y = C_1e^{\lambda_1x} + C_2xe^{\lambda_1x} + C_3x^2e^{\lambda_1x} + \ldots + C_mx^{m-1}e^{\lambda_1x} + \ldots$

Пример:

$y^{IX} - 4y^{VIII} + 6y^{VII} - 4y^{VI} + y^V = 0$

$\lambda^9 - 4\lambda^8 + 6\lambda^7 - 4\lambda^6 + \lambda^5 = 0$

$\lambda^5(\lambda^4 - 4\lambda^3 + 6\lambda^2 - 4\lambda + 1) = 0$

$\lambda^5(\lambda - 1)^4 = 0$

$$\left[\begin{array}{l} \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = \lambda_5 = 0 \\ \lambda_6 = \lambda_7 = \lambda_8 = \lambda_9 = 1 \end{array}\right.$$

$y = C_1 + C_2x + C_3x^2 + C_4x^3 + C_5x^4 + C_6e^x + C_7xe^x + C_8x^2e^x + C_9x^3e^x$

4) Пусть есть кратные комплексные корни:

$\lambda_{1,2,\ldots,2m-1,2m} = \alpha \pm i\beta, \lambda_{2m+1}$

(кратность — m, а не $2m$!)

1. решается уравнение с одним из корней $(\alpha + i\beta)$
2. решение записывается в виде:
   $e^{(\alpha+i\beta)x}, e^{(\alpha+i\beta)x} \cdot x, e^{(\alpha+i\beta)x} \cdot x^2, \ldots, e^{(\alpha+i\beta)x} \cdot x^{m-1}$
   $y = C_1e^{\alpha x}cos(\beta x) + C_2e^{\alpha x}sin(\beta x) + C_3e^{\alpha x}cos(\beta x)x + C_4e^{\alpha x}sin(\beta x)x+$
   $+C_5e^{\alpha x}cos(\beta x)x^2 + C_2e^{\alpha x}sin(\beta x)x^2 + \ldots$

Пример:

$y^{VI} + 3y^{IV} + 3y^{II} + y = 0$
$\lambda^6 + 3\lambda^4 + 3\lambda^2 + 1 = 0$
$(\lambda^2 + 1)^3 = 0$
$\lambda^2 = -1$
$\lambda_{1,\dots,6} = \pm i$
$\left[\begin{array}{l} \alpha = 0 \\ \beta = 1 \end{array}\right.$
$y = C_1 cosx + C_2 sinx + C_3 cosx \cdot x + C_4 sinx \cdot x + C_5 cosx \cdot x^2 + C_6 sinx \cdot x^2$

Линейные неоднородные СДУ и линейные неоднородные ДУВП

$L(y) = f(x)$ (а не 0, как в однородных)

Th 1 Если правая часть $L(y) = f(x)$ представляет собой сумму m слагаемых и если $y_k(x)$ является решением $L(y) = f_k(x)$, то решением $L(y) = f(x)$ будет сумма $\sum\limits_{k=1}^{m} y_k(x)$

D: $f(x) = \sum\limits_{k=1}^{m} f_k(x)$
$L(y) = L(\sum\limits_{k=1}^{m} y_k) = \sum\limits_{k=1}^{m} L(y_k) = \sum\limits_{k=1}^{m} f_k(x) = f(x)$

Th 2 Если известно или каким-либо образом определено частное решение $y_1 : L(y_1) = f(x)$, то определение общего решения $L(y) = f(x)$ сводится к определению общего решения $L(y) = 0$

D: $L(y_1) = f(x)$
$y = y_1 + y_2$
$L(y_1 + y_2) = L(y_1) + L(y_2) = f(x) + L(y_2) = 0 \Rightarrow L(y_2) = 0$

Следствие Разность двух любых решений $L(y) = f(x)$ является решением $L(y) = 0$

Следствие Общее решение линейной неоднородной СДУ или линейного неоднородного ДУВП представляет собой сумму общего решения соответствующей СДУ или соответствующего ДУВП и частного решения данной неоднородной СДУ или данного неоднородного ДУВП.

Df 3 Если известно или каким-либо образом определено общее решение $L(y) = 0$, то определение общего решения $L(y) = f(x)$ может быть проведено по методу вариации произвольных постоянных Лагранжа или по методу Коши.

<u>D</u>: $y_0 = G(x)C \to L(y_0) = 0$

$y_{\text{н}} = G(x)C(x)$

$L(G(x)C(x)) = f(x)$

$L(y) = \dfrac{dy}{dx} - A(x)y = f(x)$

$\dfrac{d[G(x)C(x)]}{dx} - A(x)G(x)C(x) = f(x)$

$G'_x(x)C(x) + G(x)C'_x(x) - A(x)G(x)C(x) = f(x)$

$$G(x)\frac{dC(x)}{dx} + \underbrace{\left[\frac{dG(x)}{dx} - A(x)G(x)\right]}_{=0,\text{т.к. } G(x)\text{-решение однородн.}} C(x) = f(x)$$

$G(x)\dfrac{dC(x)}{dx} = f(x)$

Возможны 3 варианта дальнейшего решения:

1. линейная неоднородная СДУ — метод Лагранжа
2. линейное неоднородное ДУВП — метод Лагрнжа
3. линейная неоднородная СДУ — метод Коши

Рассмотрим каждый из них:

1) ЛНСДУ (метод Лагранжа)

$G(x) \cdot \dfrac{dC(x)}{dx} = f(x)$:

$$\begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} & \dots & y_{1n} \\ y_{21} & y_{22} & \dots & y_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{n1} & y_{n2} & \dots & y_{nn} \end{pmatrix} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} C'_1(x) \\ C'_2(x) \\ \vdots \\ C'_n(x) \end{pmatrix}}_{\text{неизвестные}} = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{pmatrix}$$

$C'_k(x) = \psi_k(x)$, $k = 1, \dots, n$

$C_k(x) = \int \psi_k(x)dx + C_k = \varphi_k(x) + C_k$

$C(x) = C + \Phi(x)$

$$\boxed{y = G(x)C(x) = G(x)C + G(x)\Phi(x)}$$

$$\begin{cases} y_{11}C'_1 + y_{12}C'_2 + \ldots + y_{1n}C'_n = f_1(x) \\ y_{21}C'_1 + y_{22}C'_2 + \ldots + y_{2n}C'_n = f_2(x) \\ \vdots \\ y_{n1}C'_1 + y_{n2}C'_2 + \ldots + y_{nn}C'_n = f_n(x) \end{cases}$$

Пример:

$$\begin{cases}\dot{x} = y + tg^2 t\\ \dot{y} = -x + tg\, t\end{cases}$$

$$\begin{vmatrix}-\lambda & 1\\ -1 & -\lambda\end{vmatrix} = 0$$

$\lambda^2 + 1 = 0$

$\lambda = \pm i$

Рассмотрим $\lambda = i$

$$\begin{cases}-ih_1 + h_2 = 0\\ -h_1 - ih_2 = 0\end{cases}$$

$$H = \begin{pmatrix}1\\ i\end{pmatrix}$$

Решим как однородную СДУ

$$\begin{pmatrix}1\\ i\end{pmatrix} e^{it} = \begin{pmatrix}1\\ i\end{pmatrix}(cos\ t + i\ sin\ t) = \begin{pmatrix}cos\ t + i\ sin\ t\\ i\ cos\ t - sin\ t\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}cos\ t\\ -sin\ t\end{pmatrix} + i\begin{pmatrix}sin\ t\\ cos\ t\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} = C_1\begin{pmatrix}cos\ t\\ -sin\ t\end{pmatrix} + C_2\begin{pmatrix}sin\ t\\ cos\ t\end{pmatrix}$$

ищем общее решение неоднородной системы в виде

$$\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} = C_1(t)\begin{pmatrix}cos\ t\\ -sin\ t\end{pmatrix} + C_2(t)\begin{pmatrix}sin\ t\\ cos\ t\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases}cos\ t \cdot C_1' + sin\ t \cdot C_2' = tg^2 t\\ -sin\ t \cdot C_1' + cos\ t \cdot C_2' = tg\ t\end{cases}$$

$\Delta = cos^2 t + sin^2 t = 1$

$$\Delta_1 = tg^2 t \cdot cos\ t - tg\ t \cdot sin\ t = \frac{sin^2 t}{cos\ t} - \frac{sin^2 t}{cos\ t} = 0$$

$$\frac{\Delta_1}{\Delta} = 0$$

$$\Delta_2 = cos\ t \cdot tg\ t + sin\ t \cdot tg^2 t = sin\ t + \frac{sin^3 t}{cos^2 t}$$

$$\frac{\Delta_2}{\Delta} = sin\ t + \frac{sin^3 t}{cos^2 t}$$

$\dot{C}_1(t) = 0$

$C_1(t) = C_1$

$$\dot{C}_2(t) = sin\ t + \frac{sin\ t}{cos^2 t} - sin\ t = \frac{sin\ t}{cos^2 t}$$

$$C_2(t) = -cos\ t + \frac{1}{cos\ t} + cos\ t + C_2 = \frac{1}{cos\ t} + C_2$$

Ответ: $\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} = C_1\begin{pmatrix}cos\ t\\ -sin\ t\end{pmatrix} + C_2\begin{pmatrix}sin\ t\\ cos\ t\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}tg\ t\\ 1\end{pmatrix}$

2) ЛНДУВП (метод Лагранжа)

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + a_2(x)y^{(n-2)} + \ldots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = f(x)$$

$$\begin{cases} z_1' = z_2 \\ z_2' = z_3 \\ \dots \\ z_n' = -a_n z_2 - a_{n-1} z_2 - \dots - a_1 z_n + f(x) \end{cases}$$

$$G(x) = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y_1' & y_2' & \dots & y_n' \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{pmatrix}$$

$L(y) = 0$

$y_{0^{\text{о}}} = G(x)C$

$y_{0^{\text{н}}} = G(x)C(x)$

$$f(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ f(x) \end{pmatrix}$$

$$G(x)\frac{dC(x)}{dx} = f(x)$$

$$\begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y_1' & y_2' & \dots & y_n' \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{pmatrix}$$

запишем систему в координатной форме:

$$\begin{cases} y_1 C_1' + y_2 C_2' + \dots + y_n C_n' = 0 \\ y_1' C_1' + y_2' C_2' + \dots + y_n' C_n' = 0 \\ y_1'' C_1' + y_2'' C_2' + \dots + y_n'' C_n' = 0 \\ \dots \\ y_1^{(n-1)} C_1' + y_2^{(n-1)} C_2' + \dots + y_n^{(n-1)} C_n' = 0 \end{cases}$$

Система совместна и определена

Решая ее находим:

$C_k'(x) = \psi_k(x) \qquad k = 1, \dots, n$

$dC_k(x) = \psi(x)dx$

$C_k(x) = \int \psi(x)dx + C_k = C_k + \varphi(x)$

$$y_{0^{\text{н}}} = G(x)C(x) = \sum_{k=1}^{n} C_k(x) y_k$$

$$y = \sum_{k=1}^{n} C_k y_k + \sum_{k=1}^{n} \varphi_k y_k$$

Пример:

$xy'' - y' = x^2$

решаем однородное:
$xy'' - y' = 0$
$y' = z(x),\ y'' = \dfrac{dz}{dx}$
$x\dfrac{dz}{dx} - z = 0$
$\dfrac{dz}{z} = \dfrac{dx}{x}$
$\ln|z| = \ln|x| + \ln|2C_1|$
$z = 2C_1x$
$y' = 2C_1x$
$\int dy = 2C_1\int xdx$
$y = C_1x^2 + C_2$
$y = C_1(x)x^2 + C_2(x)$
$\begin{cases} x^2C_1' + C_2' = 0 \\ 2xC_1' + C_2' \cdot 0 = x \end{cases}$
$C_1' = \dfrac{1}{2}$
$C_1(x) = \dfrac{1}{2}x + C_1$
$C_2' = \dfrac{1}{2}x^2$
$C_2(x) = -\dfrac{1}{6}x^3 + C_2$
$y = \dfrac{1}{2}x^3 + C_1x^2 - \dfrac{1}{6}x^3 + C_2 = \dfrac{x^3}{3} + C_1x^2 + C_2$

3) ЛНСДУ (метод Коши) [только теоретически]
$G^{-1}(x)G(x)\dfrac{dC(x)}{dx} = G^{-1}(x)f(x)$
$\dfrac{dC(x)}{dx} = G^{-1}(x) \cdot f(x)$
$dC(x) = G^{-1}(x)f(x)dx$
$C(x) = \int\limits_{x_0}^{x} G^{-1}(\xi)f(\xi)d\xi + C$
$y = G(x)C(x)$
$\Rightarrow y = G(x)C + \int\limits_{x_0}^{x} G(x)G^{-1}(\xi)f(\xi)d\xi = G(x)C + \int\limits_{x_0}^{x} K(x,\xi)f(\xi)d\xi$
$y(x_0) = y_0$
$y_0 = G(x_0)C \Rightarrow C = G_x^{-1}(x_0)y_0$
$y = G(x)G^{-1}(x_0)y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} K(x,\xi)f(\xi)d\xi = K(x,x_0)y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} K(x,\xi)f(\xi)d\xi$

Th 4 Метод неопределенных коэффициентов решения ЛНСДУ с постоянными коэффициентами в случае специальной правой части

Если правая часть ЛНСДУ с постоянными коэффициентами имеет вид
$\sum\limits_{k=1}^{n}(P_k(x)cos(\beta_k x)+Q_k(x)sin(\beta_k x))\cdot e^{\alpha_k x}$,
где $P_k(x)$ и $Q_k(x)$ — вектор-многочлены по x;
α_k, β_k — действительные числа (в том числе 0) (этот вид называется специальной правой частью),
то частное решение данной неоднородной СДУ может быть определено в виде:
$y_ч \sum\limits_{k=1}^{n}(R_k(x)cos(\beta_k x)+S_k(x)sin(\beta_k x))\cdot e^{\alpha_k x}$,
где $R_k(x)$ и $S_k(x)$ — вектор-многочлены, координаты которых являются многочленами с неопределенными коэффициентами одинаковой степени, равной сумме наибольшей степени многочленов координат P_k и Q_k и кратности (m_k) корня $\lambda_k=\alpha_k \pm i\beta_k$. Среди корней характеристического уравнения соответствующей однородной СДУ неопределенные коэффициенты многочленов $R_k(x)$ и $S_k(x)$ определяются с помощью известного метода неопределенных коэффициентов.
$\rightarrow deg\ R_k(x)=deg\ S_k(x)=\max(deg\ P_k(x), deg\ Q_k(x))+m_k$

Следствие (из Th 4)
Если среди слагаемых специального вида правой части имеются слагаемые с $\beta_k=0$, т.е. слагаемые вида $P_k(x)e^{\alpha_k x}$, то частное решение соответствует такому слагаемому, определенному в виде
$y_k=R_k(x)e^{\alpha_k x}$,
где $R_k(x)$ — вектор-многочлен,
$deg\ R_k(x)=\max deg\ P_k(x)+m_k$
m_k — кратность корня $\lambda_k=\alpha_k$
Для tg и $\frac{1}{\sqrt{}}$ не работает

Пример:

$$\begin{cases}\dot{x}=x-2y+3+4e^t\\ \dot{y}=2y-x-5sin\ t\end{cases}$$

$$\begin{vmatrix}1-\lambda & -2\\ -1 & 2-\lambda\end{vmatrix}=0$$

$$\lambda^3-3\lambda=0$$

$$\left[\begin{array}{l}\lambda_1=0\\ \lambda_2=3\end{array}\right.$$

$\lambda_1=0:$

$$\begin{pmatrix}1 & -2\\ -1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}h_1\\ h_2\end{pmatrix}=0$$

$$H_1=\begin{pmatrix}2\\ 1\end{pmatrix}$$

$\lambda_2=3:$

$$H_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{l} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \\ \lambda = 0 \\ m = 1 \\ deg = 1 \end{array}\right.$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} at+b \\ ct+d \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} a = at + b - 2ct - 2d + 3 \\ c = 2ct + 2d - at - b \end{cases}$$

$$\begin{cases} a - 2c = 0 \\ a - b + 2d = 3 \\ c + b - 2d = 0 \end{cases}$$

d — произвольное

$$\left[\begin{array}{l} a = 2 \\ b = 1 \\ c = 1 \\ d = 1 \end{array}\right.$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{3t} + \begin{pmatrix} 2t+1 \\ t+1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \ \end{pmatrix} \dots$$

Th 5 Метод неопределенных коэффициентов решения ЛНДУВП с постоянными коэффициентами в случае специальной правой части.

Если правая часть ДУВП $L(y) = f(x)$ представляет собой

$\sum\limits_{k=1}^{n} (p_k(x)cos(\beta_k x) + q_k(x)sin(\beta_k x)) \cdot e^{\alpha_k x}$,

то частное решение данного уравнения может быть определено в виде:

$y_{\text{ч}} = \sum\limits_{k=1}^{n} (r_k(x)cos(\beta_k x) + s_k(x)sin(\beta_k x)) \cdot e^{\alpha_k x} \cdot x^{m_k}$,

где $p_k(x)$ и $q_k(x)$ — многочлены по x

α_k, β_k — действительные числа

$r_k(x)$, $s_k(x)$ — многочлены с неопределенными коэффициентами одинаковой степени, равной наибольшей из степеней многочленов $p_k(x)$ и $q_k(x)$

m_k — кратность корня $\lambda_k = \alpha_k + i\beta_k$среди корней характеристического уравнения соответствующего уравнения

Следствие Если среди слагаемых правой части уравнения имеется $p_k(x)e^{\alpha_k x}$(т.е. $\beta_k = 0$), то и соответствующее частное решение ищется в виде

$y = r_k(x)e^{\alpha_k x}x^{m_k}$

r_k — многочлен той же степени, что и p_k
m_k — кратность $\lambda_k = \alpha_k$
Неопределенные коэффициенты в частном решении определяются по методу неопределенных коэффициентов путем подстановки в заданное уравнение.

Пример:

$y''' + 2y'' + y' = 1 + (x + e^x)\, cos\; x + x\; sin\; 2x - x + cos\; 2x + x^2 e^{-x}$
правая часть: $[1 - x] + [(x + e^x)\, cos\; x] + [x\; sin\; 2x + cos\; 2x] + [x^2 e^{-x}]$
$\lambda^3 + 2\lambda^2 + \lambda = 0$
$\lambda(\lambda + 1)^2 = 0$
$\lambda_1 = 0,\, p_1 = 1$
$\lambda_2 = -1,\, p_2 = 2$
$y_0 = C_1 \cdot e^{0x} + C_2 \cdot e^{-x} + C_3 \cdot e^{-x} \cdot x$

$1 - x \to e^{0x} \cdot x^1 \cdot (a_1 x + b_1)$
$cos\; 2x + x\; sin\; 2x \to e^{0x} \cdot x^0 \cdot ((a_2 x + b_2) cos\; 2x + (a_3 x + b_3) sin\; 2x)$
$x^2 e^{-x} \to e^{-x} \cdot x^2 \cdot (a_4 x^2 + b_4 x + c_4)$
$x\; cos\; x \to e^{0x} \cdot x^0 \cdot ((a_5 x + b_5) cos\; x + (a_6 x + b_6) sin\; x)$
$e^x cos\; x \to e^x \cdot x^0 \cdot ((a_7 x + b_7) cos\; x + (a_8 x + b_8) sin\; x)$

$$\begin{aligned} y = \;& C_1 + C_2 e^{-x} + C_3 e^{-x} x + \\ & + C_4 x^2 + C_5 x + \\ & + C_6 cos\; 2x + C_7 cos\; 2x \cdot x + C_8 sin\; 2x + C_9 sin\; 2x \cdot x + \\ & + C_{10} e^{-x} x^2 + C_{11} e^{-x} x^3 + C_{12} e^{-x} x^4 + \\ & + C_{13} cos\; x + C_{14} cos\; x \cdot x + C_{15} sin\; x + C_{16} sin\; x \cdot x + \\ & + C_{17} e^x cos\; x + C_{18} e^x x\; cos\; x + C_{19} e^x sin\; x + C_{20} e^x x\; sin\; x \end{aligned}$$

Рассмотрим поиск коэффициентов для $x^2 e^{-x}$
$y_ч = e^{-x} (ax^2 + bx + c)\, x^2 = e^{-x} (ax^4 + bx^3 + cx^2)$

$y' = -ax^4 e^{-x} + 4ax^3 e^{-x} - bx^3 e^{-x} + 3bx^2 e^{-x} - cx^2 e^{-x} + 2cxe^{-x}$

$y'' = ax^4 e^{-x} - 4ax^3 e^{-x} - 4ax^3 e^{-x} + 12ax^2 e^{-x} + bx^3 e^{-x} - 3bx^2 e^{-x} - 3bx^2 e^{-x} + 6bxe^{-x} + {} + cx^2 e^{-x} - 2cxe^{-x} - 2cxe^{-x} + 2ce^{-x} = ax^4 e^{-x} - 8ax^3 e^{-x} + 12ax^2 e^{-x} + bx^3 e^{-x} - {} - 6bx^2 e^{-x} + 6bxe^{-x} + cx^2 e^{-x} - 4cxe^{-x} + 2ce^{-x}$

$y''' = -ax^4 e^{-x} + 4ax^3 e^{-x} + 8ax^3 e^{-x} - 24ax^2 e^{-x} - 12ax^2 e^{-x} + 24axe^{-x} - bx^3 e^{-x} + {} + 3bx^2 e^{-x} + 6bx^2 e^{-x} - 12bxe^{-x} - 6bxe^{-x} + 6be^{-x} - cx^2 e^{-x} + 2cxe^{-x} + 4cxe^{-x} - 4ce^{-x} - {} - 2ce^{-x} = -ax^4 e^{-x} + 12ax^3 e^{-x} - 36ax^2 e^{-x} + 24axe^{-x} - bx^3 e^{-x} + 9bx^2 e^{-x} - 18bxe^{-x} + {} + 6be^{-x} - cx^2 e^{-x} + 6cxe^{-x} - 6ce^{-x}$

$(-ax^4 e^{-x} + 12ax^3 e^{-x} - 36ax^2 e^{-x} + 24axe^{-x} - bx^3 e^{-x} + 9bx^2 e^{-x} - 18bxe^{-x} + 6be^{-x} -$

$-cx^2e^{-x}+6cxe^{-x}-6ce^{-x})+2(ax^4e^{-x}-8ax^3e^{-x}+12ax^2e^{-x}+bx^3e^{-x}-6bx^2e^{-x}+$
$+6bxe^{-x}+cx^2e^{-x}-4cxe^{-x}+2ce^{-x})+(-ax^4e^{-x}+4ax^3e^{-x}-bx^3e^{-x}+3bx^2e^{-x}-$
$-cx^2e^{-x}+2cxe^{-x})=x^2e^{-x}$

Сокращаем на e^{-x}:
$(-ax^4+12ax^3-36ax^2+24ax-bx^3+9bx^2-18bx+6b-cx^2+6cx-6c)+2(ax^4-8ax^3+$
$+12ax^2+bx^3-6bx^2+6bx+cx^2-4cx+2c)+(-ax^4+4ax^3-bx^3+3bx^2-cx^2+2cx)=x^2$

$-ax^4+12ax^3-36ax^2+24ax-bx^3+9bx^2-18bx+6b-cx^2+6cx-6c+2ax^4-16ax^3+$
$+24ax^2+2bx^3-12bx^2+12bx+2cx^2-8cx+4c+-ax^4+4ax^3-bx^3+3bx^2-cx^2+2cx=x^2$

$-12ax^2+24ax-6bx+6b-2c=x^2$

$$\begin{cases}-12a=1\\24a-6b=0\\6b-2c=0\end{cases}$$

$$\begin{cases}a=-\dfrac{1}{12}\\b=-\dfrac{1}{3}\\c=-1\end{cases}$$

Другой способ:
$y_ч=\underbrace{\left(ax^4+bx^3+cx^2\right)}_{\varphi(x)}e^{-x}=\varphi(x)\cdot e^{-x}$
$y=\varphi e^{-x}$
$y'=\left(\varphi'-\varphi\right)e^{-x}$
$y''=\left(\varphi''-\varphi'-\varphi'+\varphi\right)e^{-x}=\left(\varphi''-2\varphi'+\varphi\right)e^{-x}$
$y'''=\left(\varphi'''-2\varphi''+\varphi'-\varphi''+2\varphi'-\varphi\right)e^{-x}=\left(\varphi'''-3\varphi''+3\varphi'-\varphi\right)e^{-x}$
Подставить в уравнение (сокращаем на e^{-x})
$\varphi'''-3\varphi''+3\varphi'-\varphi+2\varphi''-4\varphi'+2\varphi+\varphi'-\varphi=x^2$
$\varphi'''-\varphi''=x^2$
$(24ax+6b)-(12ax^2+6bx+2c)=x^2$
$y_ч=\left(-\dfrac{x^2}{12}-\dfrac{x}{3}-1\right)x^2e^{-x}$

Некоторые методы решения ДУВП с переменными коэффициентами

1) $y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = f(x)$
Если известно частное решение соответствующего однородного ДУ, то порядок данного уравнения можно понизить на 1.

y_1 — частное решение $L(y_1) = 0$
замена: $y = u \cdot y_1$ (u — новая неизвестная функция)
$y' = uy_1' + u'y_1$
$y'' = uy_1'' + 2u'y_1' + u''y_1$
$\ldots$
$y^{(n)} = uy_1^{(n)} + \ldots + u^{(n)}y_1$
умножаем на соответствующие коэффициенты:

$$\left.\begin{aligned} &a_n(x)y = a_n(x)uy_1 \\ &a_{n-1}(x)y' = a_{n-1}(x)uy_1' + a_{n-1}u'y_1 \\ &\ldots \\ &y^n = uy_1^{(n)} + \ldots + u^{(n)}y_1 \end{aligned}\right\} \underbrace{uL(y_1)}_{=0} + b_1(x)u' + b_2(x)u'' + \ldots = f(x)$$

$u' \to z(x) \Rightarrow$ понижается на 1 порядок

2) $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$
y_1 — удалось найти частное решение: $L(y_1) = 0$
Если бы знали оба частных решения:
$W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = C_1 \cdot e^{-\int p(x)dx}$
$y_1y_2' - y_2y_1' = C_1 \cdot e^{-\int p(x)dx}$, где y_2 — неизвестное решение
$\dfrac{y_1y_2' - y_2y_1'}{y_1^2} = \dfrac{C_1 \cdot e^{-\int p(x)dx}}{y_1^2}$
$\left(\dfrac{y_2}{y_1}\right)' = \dfrac{C_1}{y_1^2}e^{-\int p(x)dx}$
$d\left(\dfrac{y_2}{y_1}\right) = \dfrac{C_1}{y_1^2}e^{-\int p(x)dx}dx$
$\dfrac{y_2}{y_1} = \int \dfrac{C_1}{y_1^2}e^{-\int p(x)dx}dx + C_2$
$y_2 = C_1y_1 \cdot \int \dfrac{e^{-\int p(x)dx}}{y_1^2}dx + C_2y_1$ — формула Остроградского-Лиувилля

3) Уравнения Эйлера:
ДУ называется уравнением Эйлера, если оно приводится к виду
$x^ny^{(n)} + x^{n-1}a_1y^{(n-1)} + \ldots + xa_{n-1}y' + a_ny = f(x)$
данное уравнение сводится к уравнению с постоянными коэффициентами, если заменить x на e^t
$x = e^t$; $t = \ln x$
$y' = \dfrac{dy'}{dx} = \dfrac{dy}{dt}\dfrac{dt}{dx} = \dot{y}e^{-t}$

$$y'' = \frac{d^2y}{dy^2} = \frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx} = \frac{dy'}{dt}\frac{dt}{dx} = \frac{d\left(\dot{y}e^{-t}\right)}{dt}e^{-t} = \left(\ddot{y} - \dot{y}\right)e^{-2t}$$

$\dots$

$$y^{(n)} = \left(\overset{(n)}{\ddot{y}} + b_1 \overset{(n)}{\ddot{y}} + b_{n-1}y\right)e^{-nt}$$

Подставим в уравнение:

$$e^{nt}\left(\overset{(n)}{\ddot{y}} + b_1 \overset{(n-1)}{\ddot{y}} + \ldots + b_{n-1}\dot{y}\right)e^{-nt} + e^{(n-1)t}\left(\overset{(n-1)}{\ddot{y}} + \ldots + c_{n-2}\dot{y}\right)e^{-(n-1)t}a_1 + \ldots +$$
$$+ e^t a_{n-1}\dot{y}e^{-t} + a_n y = f(e^t)$$

Новая функция от $t \to u$

$u^{(n)} + d_1 u^{(n-1)} + \ldots + d_{n-1}u' + d_n u = \varphi(t)$

$\lambda^n + d_1\lambda^{n-1} + \ldots + d_{n-1}\lambda + d_n = 0$

Рассмотрим возможные корни (не ограничивая общности):

$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ — действительные и различные

$\lambda_4 = \lambda_5 = \alpha_1 \pm \beta_1$ — комплексно-сопряженные

$\lambda_6 = \lambda_7 = \lambda_8$ — кратный действительный корень

$\lambda_{9,10} = \lambda_{11,12} = \alpha_2 \pm \beta_2$ — кратные комплексные корни

$$u = C_1e^{\lambda_1 t} + C_2e^{\lambda_2 t} + C_3e^{\lambda_3 t} + C_4e^{\alpha_1 t}cos(\beta_1 t) + C_5e^{\alpha_1 t}sin(\beta_1 t) + C_6e^{\lambda_6 t} + C_7te^{\lambda_6 t} +$$
$$+ C_8t^2e^{\lambda_6 t} + C_9e^{\alpha_2 t}cos(\beta_2 t) + C_{10}e^{\alpha_2 t}sin(\beta_2 t) + C_{11}te^{\alpha_2 t}cos(\beta_2 t) + C_{12}te^{\alpha_2 t}sin(\beta_2 t)$$

Возвращаемся к переменной x

$$u = C_1x^{\lambda_1} + C_2x^{\lambda_2} + C_3x^{\lambda_3} + C_4x^{\alpha_1}cos(\beta_1 \ln x) + C_5x^{\alpha_1}sin(\beta_1 \ln x) + C_6x^{\lambda_6} + C_7 \ln x \cdot$$
$$x^{\lambda_6} + C_8 \ln x^2 x^{\lambda_6} + C_9x^{\alpha_2}cos(\beta_2 \ln x) + C_{10}x^{\alpha_2}sin(\beta_2 \ln x) + C_{11}\ln x \cdot x^{\alpha_2}cos(\beta_2 \ln x) +$$
$$+ C_{12}x^{\alpha_2}sin(\beta_2 \ln x)$$

Получили решение однородного уравнения Эйлера

В обычном ДУВП с постоянными коэффициентами $y_ч = e^{\lambda x}$, для нахождения характеристического уравнения ДУ Эйлера необходимо в левую часть подставить $y_ч = x^\lambda$.

Проделаем это на примере:

$x^2y'' - 3xy' + 5y$

подставим:

$y_ч = x^\lambda$

$y'_ч = \lambda x^{\lambda-1}$

$y''_ч = \lambda(\lambda-1)x^{\lambda-2}$

$x^2\lambda(\lambda-1)x^{\lambda-2} - 3x\lambda x^{\lambda-1} + 5x^\lambda = 0$

$x^\lambda\lambda(\lambda-1) - 3\lambda x + 5x^\lambda = 0$

$x^\lambda(\lambda^2 - 4\lambda + 5) = 0$, $x^\lambda \neq 0$ при $x \neq 0$

$\lambda^2 - 4\lambda + 5 = 0$ — характеристическое уравнение

$\lambda_{1,2} = 2 \pm i$

$y_0 = C_1x^2cos(\ln x) + C_2x^2sin(\ln x)$

Неоднородное ДУ Эйлера решаем методом вариации произвольных постоянных, основываясь на y_0.

Неоднородное ДУ Эйлера можно решать методом неопределенных коэффициентов путем подбора частного решения в случае специальной правой части вида:

$$L(y) = f(x) = \sum_{k=1}^{n} \left[p_k(\ln x)cos(\beta_k \ln x) + q_k(\ln x)sin(\beta_k \ln x)\right] x^{\alpha_k}$$

В этом случае частное решение подбирается в виде:

$$y_{ч} = \sum_{k=1}^{n} \left[r_k(\ln x cos(\beta_k \ln x) + s_k(\ln x)sin(\beta_k \ln x))\right] x^{\alpha_k}(\ln x)^{m_k},$$

где m_k — кратность корня $\lambda = \alpha_k \pm i\beta_k$ в решении характеристического уравнения.

В случае правой части вида:

$$L(y) = f(x) = p_k(\ln x)x^{\alpha_k}$$

частное решение подбирается в виде

$$y_{ч} = r_k(\ln x)x^{\alpha_k}(\ln x)^{m_k},$$

где m_k — кратность корня $\lambda = \alpha_k$

Решим соответствующий пример:

$$x^2y'' - 3xy' + 5y'' = 3x^2 + 5\ln x + x^2 \ln x cos(\ln x)$$

$$\begin{array}{lcl} 3x^2 & \to & a_1x^2(\ln x)^0 = a_1x^2 \\ 5\ln x & \to & (a_2 \ln x + b_2)x^0(\ln x)^0 = a_2 \ln x + b_2 \\ x^2 \ln x cos(\ln x) & \to & [(a_3 \ln x + b_3)cos(\ln x) + (a_4 \ln x + b_4)sin(\ln x)]\, x^2 \ln x \end{array}$$

1. a_1 — ?

$y = a_1x^2$

$y' = 2a_1x$

$y'' = 2a_1$

$x^2 \cdot 2a_1 - 3x \cdot 2a_1x + 5a_1x^2 = 3x^2$

$x^2(2a_1 - 6a_1 + 5a_1) = 3x^2$

$\mathbf{a_1 = 3}$

2. a_2 — ? b_2 — ?

$y = a_2 \ln x + b_2$

$y' = \dfrac{a_2}{x}$

$y'' = -\dfrac{a_2}{x^2}$

$-a_2 - 3a_2 + 5a_2 \ln x + 5b_2 = 5 \ln x$

$\begin{cases} -4a_2 + 5b_2 = 0 \\ 5a_2 = 5 \end{cases}$

$\begin{cases} \mathbf{b_2 = \dfrac{4}{5}} \\ \mathbf{a_2 = 1} \end{cases}$

далее — по аналогии

Элементы качественной теории ДУ

Общее описание

Система ДУ $\dfrac{dy}{dx} = f(x, y)$

$\dfrac{dy}{dt} = f(t, y)$, где t — независимая постоянная, время

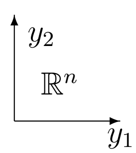
$y \in \mathbb{R}^n$, где $\mathbb{R}^n$ — фазовое пространство, а y — фазовые координаты

$t \in \mathbb{R}^1$

$\dfrac{dy}{dt}$ — фазовая скорость

'траектория' $\Leftrightarrow$ 'траектория решения'

$y(t, y_0) \Leftrightarrow \underline{y(t)}$



'траектория' $\Leftrightarrow$ 'фазовая траектория'

$y(t, y_0)$

В такой интерпретации СДУ $\dfrac{dy}{dt} = f(t, y)$ называется динамической системой

Динамические системы подразделяются на 2 вида динамических систем:

1 — автономные динамические системы для СДУ $\dfrac{dy}{dt} = f(y)$

2 — неавтономные динамические системы для СДУ $\dfrac{dy}{dt} = f(t, y)$

Свойства фазовых траекторий автономных динамических систем

Df 1 Множество фазовых траекторий автономной динамической системы есть множество, зависящее от $n-1$ параметра

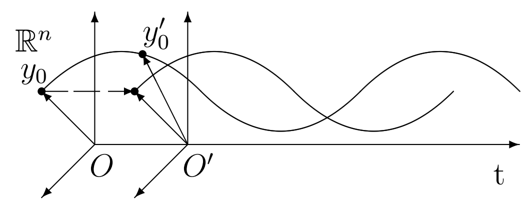
$$\begin{cases} \dfrac{\partial y_1}{\partial t} = f_1(y) \\ \dfrac{\partial y_2}{\partial t} = f_2(y) \\ \dots \\ \dfrac{\partial y_n}{\partial t} = f_n(y) \end{cases}$$

Df 2 Множество движений по фазовым траекториям автономной динамической системы есть множество, зависящее от одного параметра.

$$\frac{dy}{dt} = f(y)$$

$$y = y(t, y_0)$$

$(n+1)$-мерное пространство



Изменим отсчет времени t. Начало в $t_0' = t_0 - \tau$, τ — параметр

$$\frac{dy}{d(t-\tau)} = f(y) \qquad \frac{dy}{dt} = f(y)$$

$$y = y(t-\tau, y_0)$$

Df 3 Множество фазовах проекций автономной динамической системы есть проекция множества траекторий решения из $(n+1)$-мерного пространства на n-мерное фазовое пространство.

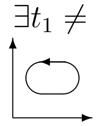
Свойство: Так как предполагается, что условия теоремы Коши выполнены, то фазовые траектории либо не пересекаются, либо совпадают.

Классификация фазовых траекторий автономной динамической системы:

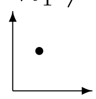
[1] траектории без самопересечения:
$\forall t_1, t_2; t_1 \neq t_2 : y(t_1) \neq y(t_2)$

[2] траектории с самопересечениями:
$\exists T > 0 \forall t : y(t+T) = y(t)$

[2.1] цикл:
$\exists t_1 \neq t_2 : y(t_1) \neq y(t_2)$



[2.2] точка покоя:
$\forall t_1 \neq t_2 y(t_1) = y(t_2)$



Th 1 о необходимом и достаточном условии принадлежности фазовой траектории к состоянию равновесия систем:
Для того, чтобы фазовая траектория была <u>точкой покоя</u> необходимо и достаточно, чтобы фазовая скорость в этой точке была равна 0.

Н $\dfrac{dy}{dt} = f(y)$
$y(t) = A$
$\dfrac{dy}{dt} = 0$

Д Пусть на некоторой фазовой траектории $y(t) = y(t, y_0) \qquad y(t) = 0$, т.е.
$\dfrac{dy(t)}{dt} = 0$
$y(t) = const$
но т.к. в $t_0 \quad y = A$, то $y(t) = A$

Следствие $\dfrac{dy}{dt} = f(y)$. Чтобы определить точки покоя принимаем $f(y) = 0$ и все решения этого уравнения дают точки покоя.

Исследование точек покоя автономной динамической системы второго порядка

$$\frac{dy_1}{dt} = f_1(y_1, y_2)$$

$$\frac{dy_2}{dt} = f_2(y_1, y_2)$$

$$\begin{cases} f_1(y_1, y_2) = 0 \\ f_2(y_1, y_2) = 0 \end{cases} \quad \text{решения этой системы определяют точки покоя}$$

$$\frac{dy_1}{dy_2} = \frac{f_1(y_1, y_2)}{f_2(y_1, y_2)}$$

В точке покоя:

$$\frac{dy_1}{dy_2} = \frac{0}{0}$$

В точке покоя нарушается условие существования теоремы Коши. Точки, в которых нарушается условие существования теоремы Коши для уравнения первого порядка называются *особыми точками*

точки покоя = особые точки

Особые точки линейной автономной динамической системы 2 порядка:

$$\frac{dy}{dt} = Ay$$

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dt} = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 \\ \dfrac{dy_2}{dt} = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

$$\frac{dy_1}{dy_2} = \frac{a_{11}y_1 + a_{12}y_2}{a_{21}y_1 + a_{22}y_2}$$

$$\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{12}y_2 = 0 \\ a_{21}y_1 + a_{22}y_2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix}$$

I. $rg\ A = 2$
единственное решение $(0, 0)$

a) о.т. "Узел"
λ_1, λ_2 — действительные, различные, одного знака

$$\frac{dy}{dt} = Ay$$

$$y = Bz$$

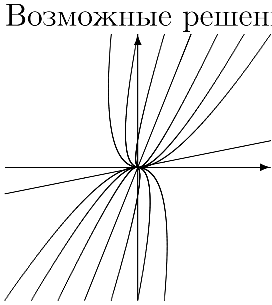
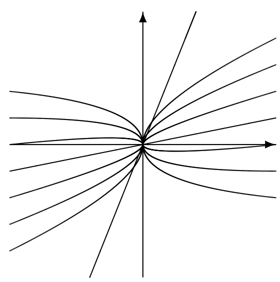
$$\frac{dz}{dt} = B'ABz$$

$$B'AB = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \dfrac{dz_1}{dt} = \lambda_1 z_1 \\ \dfrac{dz_2}{dt} = \lambda_2 z_2 \end{cases}$$

$$z_1 = C_1 e^{\lambda_1 t}$$

$z_2 = C_1 e^{\lambda_2 t}$
$\dfrac{dz_1}{dz_2} = \dfrac{\lambda_1 z_1}{\lambda_2 z_2}$
$\ln z_1 = \dfrac{\lambda_1}{\lambda_2} \ln z_2 + \ln C$
z_1, z_2 — сепаратриссы
$\boxed{z_1 = C z_2^{\frac{\lambda_1}{\lambda_2}}}$
$y_1 = k y_2$
$\dfrac{dy_1}{dy_2} = \dfrac{a_{11}y_1 + a_{12}y_2}{a_{21}y_1 + a_{22}y_2}$
$k = \dfrac{a_{11}k + a_{12}}{a_{21}k + a_{22}}$
$a_{21}k^2 + (a_{22} - a_{11})k - a_{12} = 0$
Возможные решения:

 или 

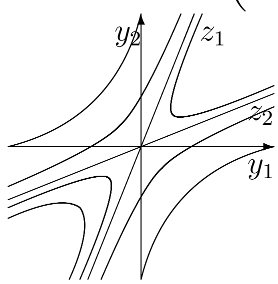
если $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0$, то движение от начала координат
рассмотрим точку $(0,1)$ в Y_1Y_2
подставялем в уравнение:
$\dfrac{d0}{d1} = \dfrac{a_{11}0 + a_{12}1}{a_{21}0 + a_{22}1} \Rightarrow 0 = \dfrac{a_{12}}{a_{22}}$

b) о.т. "Седло"
λ_1, λ_2 — различные, действительные, разнозначные
$\dfrac{dy}{dt} = Ay$
$y = Bz$
$\dfrac{dz}{dt} = B'ABz$
$B'AB = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$
$\begin{cases} \dfrac{dz_1}{dt} = \lambda_1 z_1 \\ \dfrac{dz_2}{dt} = \lambda_2 z_2 \end{cases}$
$z_1 = C_1 e^{\lambda_1 t}$
$z_2 = C_1 e^{\lambda_2 t}$

$$\frac{dz_1}{dz_2} = \frac{\lambda_1 z_1}{\lambda_2 z_2}$$

$$\ln z_1 = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \ln z_2 + \ln C$$

$$\boxed{z_1 = C_1 z_2^{\frac{\lambda_1}{\lambda_2}}} = \frac{C_1}{\left(z_2^{-\frac{\lambda_1}{\lambda_2}}\right)}$$



c) о.т. "Фокус"

$\lambda_{1,2}$ — комплексно-сопряженные корни $(\alpha \pm i\beta), \alpha \neq 0$

$$B^{-1}AB = \begin{pmatrix} \alpha + i\beta & 0 \\ 0 & \alpha - i\beta \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \dot z_1 \\ \dot z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha + i\beta & 0 \\ 0 & \alpha - i\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$$

$$z = Du$$

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \overbrace{\begin{pmatrix} 1 & +i \\ 1 & -i \end{pmatrix}}^{D} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

$$\dot z_1 = \dot u_1 + i\dot u_2 = (\alpha + i\beta)(u_1 + iu_2)$$

$$\dot z_2 = \dot u_1 - i\dot u_2 = (\alpha - i\beta)(u_1 - iu_2)$$

$$\frac{du_1 + idu_2}{du_1 - du_2} = \frac{\alpha u_1 - \beta u_2 + i(\alpha u_2 + \beta u_1)}{\alpha u_1 - \beta u_2 - i(\alpha u_2 + \beta u_1)}$$

$$\frac{\dfrac{du_1}{du_2} + i}{\dfrac{du_1}{du_2} - i} = \frac{\left(\dfrac{\alpha u_1 - \beta u_2}{\alpha u_2 + \beta u_1}\right) + i}{\left(\dfrac{\alpha u_1 - \beta u_2}{\alpha u_2 + \beta u_1}\right) - i}$$

$$\frac{du_1}{du_2} = \frac{\alpha u_1 - \beta u_2}{\alpha u_2 + \beta u_1}$$

$$y = Bz,\ z = Du$$

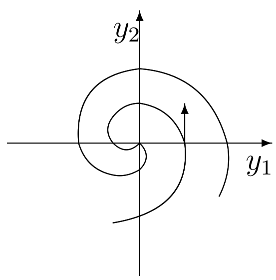
$$y = BDu$$

$$\frac{du}{dt} = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \alpha & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

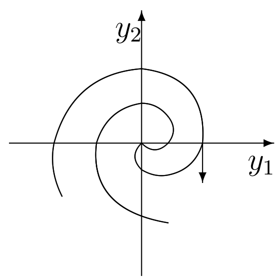
$$\alpha u_2 du_1 + \beta u_1 du_1 = \alpha u_1 du_2 - \beta u_2 du_2$$

$$\beta(u_1 du_1 + u_2 du_2) = \alpha(u_1 du_2 - u_2 du_1)$$

$$\frac{u_1 du_1 + u_2 du_2}{u_1^2 + u_2^2} = \frac{\alpha}{\beta}\left(\frac{u_1 du_2 - u_2 du_1}{u_1^2 + u_2^2}\right)$$
$$\frac{1}{2}\ln\left(u_1^2 + u_2^2\right) = \frac{\alpha}{\beta} arctg\frac{u_2}{u_1} + \ln C$$
$$\sqrt{u_1^2 + u_2^2} = C \cdot e^{\frac{\alpha}{\beta} arctg\frac{u_2}{u_1}}$$
$$u_1 = \rho cos\,\varphi$$
$$u_2 = \rho sin\,\varphi$$
$\boxed{\rho = C \cdot e^{\frac{\alpha}{\beta}\varphi}}$ — логарифмическая спираль



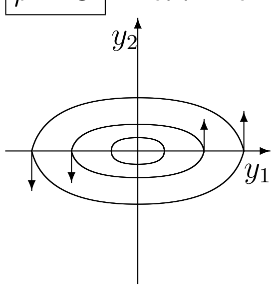
I.



II.

$\alpha < 0 \Rightarrow$ движение к началу координат

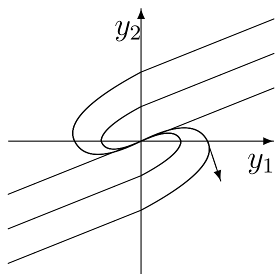
d) о.т. "Центр"
$\lambda_{1,2}$ — комплексно-сопряженные, $\lambda_{1,2} = \pm\beta i$
аналогично пункту с), но $\alpha = 0$
$\boxed{\rho = C}$ — эллипсы



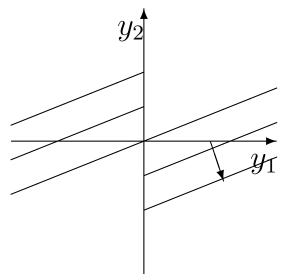
e) о.т. "Вырожденный узел"
$\lambda_1 = \lambda_2$, $rg(A - \lambda_1 E) = 1$
$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$
$$\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{a_{11} + a_{22}}{2}$$
$y = Bz$ к $\dfrac{dy}{dt} = Ay$
$$B^{-1}AB = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 \\ 0 & \lambda_1 \end{pmatrix}$$
$$\frac{dz_1}{dz_2} = \frac{\lambda_1 z_1 + z_2}{\lambda_1 z_2}$$

$$\frac{dz_1}{dz_2} = \frac{z_1}{z_2} + \frac{1}{\lambda_1}$$

$$\boxed{z_1 = Cz_2 + \left(\frac{z_2}{\lambda_1}\right) \cdot \ln z_2} \Rightarrow 1 \text{ сепаратрисса}$$



или



$\alpha > 0 \Rightarrow$ от центра

f) о.т. "Дикритический узел"

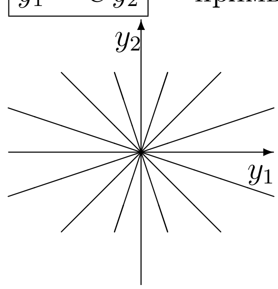
$\lambda_1 = \lambda_2$, $rg(A - \lambda E) = 0$

$$\begin{cases} a_{12} = a_{21} = 0 \\ a_{11} = a_{22} \end{cases}$$

$$A : \frac{dy_1}{dt} = a_{11}y_1 \quad \frac{dy_2}{dt} = a_{22}y_2$$

$$\frac{dy_1}{dy_2} = \frac{y_1}{y_2}$$

$\boxed{y_1 = Cy_2}$ — прямые линии



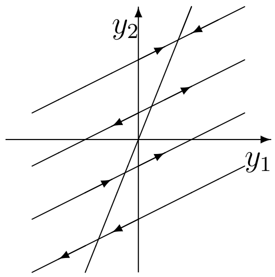
$\lambda < 0 \Rightarrow$ движение к началу координат

II. $rg\ A = 1$

$$\frac{dy_1}{dy_2} = \frac{a_{11}y_1 + a_{12}y_2}{a_{21}y_1 + a_{22}y_2} = m$$

$\boxed{y_1 = my_2 + C}$ — прямые из особых точек

Возможны 4 варианта направлений:



III. $rg\ A = 0$

$$\frac{dy_1}{dt} = 0$$

$$\frac{dy_2}{dt} = 0$$

$$\begin{cases} y_1 = C_1 \\ y_2 = C_2 \end{cases}$$

плоскость из особых точек.

Исследование особых точек нелинейной автономной динамической системы 2 порядка

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dt} = f_1(y_1, y_2) \\ \dfrac{dy_2}{dt} = f_2(y_1, y_2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} f_1(y_1, y_2) = 0 \\ f_2(y_1, y_2) = 0 \end{cases}$$

Исследование о.т. (a, b)

$$\frac{dy_1}{dt} = \underbrace{f_1(a,b)}_{=0} + \underbrace{\frac{\partial f_1}{\partial y_1}}_{=a_{11}}(y_1 - a) + \underbrace{\frac{\partial f_1}{\partial y_2}}_{=a_{12}}(y_2 - b) + \alpha_1$$

$$\frac{dy_2}{dt} = \underbrace{f_2(a,b)}_{=0} + \underbrace{\frac{\partial f_2}{\partial y_1}}_{=a_{21}}(y_1 - a) + \underbrace{\frac{\partial f_2}{\partial y_2}}_{=a_{22}}(y_2 - b) + \alpha_2$$

$$\left.\begin{array}{l} y_1 - a = z_1 \\ y_2 - b = z_2 \end{array}\right] \text{ перенести начало координат}$$

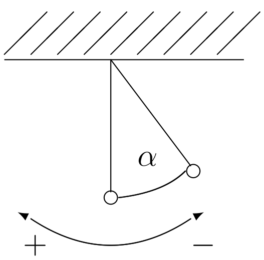
$$\frac{dz_1}{dt} = \boxed{\begin{array}{l} a_{11}z_1 + a_{12}z_2 \\[1em] a_{21}z_1 + a_{22}z_2 \end{array}} \begin{array}{l} +\alpha_1 \\[1em] +\alpha_2 \quad = \dfrac{dz_2}{dt} \end{array}$$

Полученная система при отбрасывании α_1, α_2 называется системой 1-го приближения.

Характер исследуемой точки (a, b) совпадает с характером особой точки $(0, 0)$ системы линейного первого приближения во всех случаях, кроме "Центра". Если $(0, 0)$ — "Центр", то точка (a, b) может оказаться либо "Центром", либо "Фокусом" и для этого требуется дополнительное исследование.

Пример:

Рассмотрим задачу колебания математического маятника.



$\ddot{x} + \omega^2 sin\ x = 0$

$$\omega^2 = \frac{l}{g}$$

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -\omega^2 sin\ x \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 0 \\ -\omega^2 sin\ x = 0 \end{cases}$$

Исследуем т. $(0, 0)$:

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -\omega^2 x + \alpha \end{cases}$$

Найдем сепаратриссы:

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -\omega^2 & -\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$\lambda^2 + \omega^2 = 0$

$\lambda = \pm i\omega \Rightarrow$ "Центр" или "Фокус"

Проводим дополнительное исследование:

система абсолютна симметрична $\Rightarrow$"Центр"

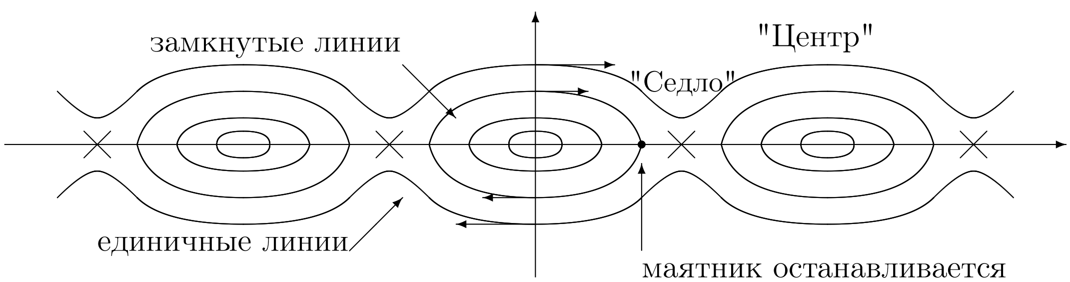
Исследуем т. $(\pi, 0)$

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -\omega^2 \left[cos\ \pi(x-\pi)\right] + \alpha \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = \omega^2 \underbrace{(x-\pi)}_{=z} + \alpha \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ \omega^2 & -\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$\lambda^2 - \omega^2 = 0 \qquad \lambda = \pm\omega \Rightarrow$ "Седло"



II семестр

ДУ в частных производных 1 порядка

Симметрическая форма СДУ. Первые интегралы. Метод интегрирующих комбинаций.

$\dfrac{dy}{dx} = f(x,y)$ — СДУ

$$\begin{cases} y_1' = f_1(x, y_1, \dots, y_n) \\ y_2' = f_2(x, y_1, \dots, y_n) \\ \dots \\ y_n' = f_n(x, y_1, \dots, y_n) \end{cases} \quad \text{— запись в координатной форме}$$

$$dx = \frac{dy_1}{f_1} = \frac{dy_2}{f_2} = \dots = \frac{dy_n}{f_n}$$

Предположим, что $f_k(x, y_1, \dots, y_n) = \dfrac{F_k(x, y_1, y_2, \dots, y_n)}{F_0(x, y_1, y_2, \dots, y_n)}$

Тогда симметрическая форма имеет вид:

$$\frac{dx}{F_0(y_0, y_1, \dots, y_n)} = \frac{dy_1}{F_1(y_0, y_1, \dots, y_n)} = \dots = \frac{dy_n}{F_n(y_0, y_1, \dots, y_n)}$$

Согласно следствию из теоремы Коши общий интеграл имеет вид:

$$\begin{cases} \varphi_1(x, y_1, y_2, \dots, y_n) = C_1 \\ \varphi_2(x, y_1, y_2, \dots, y_n) = C_2 \\ \dots \\ \varphi_n(x, y_1, y_2, \dots, y_n) = C_n \end{cases}$$

Df 1 Каждая координата общего интеграла СДУ называется первым интегралом.

Df 2 Первым интегралом системы ДУ называется нетождественно равная постоянной функция переменных системы, принимающая на решениях системы одно и то же постоянное значение.

Совокупность первых интегралов определяет общий интеграл при условии ее независимости, т.е. при условии:

$$\left| J\left(\frac{\partial(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n)}{\partial(y_1, y_2, \ldots, y_n)}\right) \right| \neq 0$$

Алгоритм построения независимой системы первых интегралов реализуется с помощью метода интегрируемых комбинаций.

Пример:

$$\frac{dx}{x^2 - y^2 - z^2} = \frac{dy}{2xy} = \frac{dz}{2xz}$$

1) $\dfrac{dy}{2xy} = \dfrac{dz}{2xz}$
$\dfrac{dy}{y} = \dfrac{dz}{z}$
$\ln y = \ln z + \ln C_1$
$y = zC_1$
$\dfrac{\mathbf{y}}{\mathbf{z}} = \mathbf{C_1}$

2) $\dfrac{xdx + ydy + zdz}{x(x^2 - y^2 - z^2) + 2xy^2 + 2xz^2} = \dfrac{dz}{2xz}$
$\dfrac{xdx + ydy + zdz}{x(x^2 + y^2 + z^2)} = \dfrac{dz}{2xz}$
$2\dfrac{xdx + ydy + zdz}{x^2 + y^2 + z^2} = \dfrac{dz}{z}$
$\ln|x^2 + y^2 + z^2| = \ln z + \ln C_2$
$\dfrac{\mathbf{x^2 + y^2 + z^2}}{\mathbf{z}} = \mathbf{C_2}$

J: $\begin{vmatrix} \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial x} & \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial y} \\ \dfrac{\partial\varphi_2}{\partial x} & \dfrac{\partial\varphi_2}{\partial y} \end{vmatrix} \neq 0$

Пример:

$$\frac{dx}{x^2} = \frac{dy}{2z^2 - xy} = \frac{dz}{-xz}$$

1) $\dfrac{dx}{x} = -\dfrac{dz}{z}$
$\ln x + \ln z = \ln C_1$
$\mathbf{xz = C_1}$

2) $\dfrac{ydx + xdy + 2zdz}{yx^2 + 2xz^2 - x^2y - 2xz^2} = \dfrac{dx}{x^2}$
$(ydx + xdy + 2zdz) = 0$
$\mathbf{xy + z^2 = C_2}$

Если найдено k первых интегралов, то можно выразить k переменных через остальные и подставить в данную симметрическую систему, где получаем $(n-k)$ равенств, для которых уже проще подобрать интегрирующие комбинации.

Пример:

$$\frac{dx}{xz} = \frac{dy}{yz} = \frac{dz}{xy\sqrt{z^2+1}}$$

1) $\dfrac{dx}{xz} = \dfrac{dy}{yz}$
$\ln x = \ln y + \ln C_1$
$\mathbf{\dfrac{x}{y} = C_1}$

2) выражаем $x = C_1 y$
$\dfrac{C_1 dy}{C_1 yz} = \dfrac{dy}{yz} = \dfrac{dz}{C_1 y^2\sqrt{z^2+1}}$
$\dfrac{dy}{yz} = \dfrac{dz}{C_1 y^2\sqrt{z^2+1}}$
$C_1 ydy = \dfrac{zdz}{\sqrt{z^2+1}}$
$C_1 ydy = \dfrac{dz^2}{2\sqrt{z^2+1}}$
$C_1 \dfrac{y^2}{2} = \sqrt{z^2+1} + C_2$
$C_1 y^2 = 2\sqrt{z^2+1} + C_2$
$C_1 y^2 - 2\sqrt{z^2+1} = C_2$
т.е. $\mathbf{xy - 2\sqrt{z^2+1} = C_2}$

Вывод 1: Пусть $F(\varphi_1(x, y_1, \ldots, y_n), \varphi_2(x, y_1, \ldots, y_n), \ldots, \varphi_n(x, y_1, \ldots, y_n)) = const$ — произвольная функция.
Подставив φ_i получим, что F — тоже решение.
Т.е. произвольная функция от левых частей первых интегралов - тоже интеграл.

Вывод 2: Необходимое и достаточное условие существования первого интеграла.
$\varphi_k(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) = C_k$

$$\frac{\partial \varphi_k}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_k}{\partial y_1}\cdot\frac{dy_1}{dx} + \frac{\partial \varphi_k}{\partial y_2}\cdot\frac{dy_2}{dx} + \ldots + \frac{\partial \varphi_k}{\partial y_n}\cdot\frac{dy_n}{dx} = 0$$

$$\frac{\partial \varphi_k}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_k}{\partial y_1} f_1(x, y_1, \ldots, y_n) + \ldots + \frac{\partial \varphi_k}{\partial y_n} f_n(x, y_1, \ldots, y_n) = 0 \qquad (*)$$

получили уравнение в частных производных 1-го порядка

Для того, чтобы функция $\varphi_k(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) = C_k$ была первым интегралом данной СДУ необходимо и достаточно, чтобы левая часть этого первого интеграла была решением ДУвЧП1П (*)

ДУвЧП 1 порядка

Df 1 Ду называется ДУвЧП1П, если оно определеяется соотношением вида $F(x, y, z, \ldots, v, u, \frac{du}{dx}, \frac{du}{dy}, \frac{du}{dz}, \ldots, \frac{du}{dv}) = 0$

Замечание Независимых переменных должно быть не меньше 2

Df 2 Порядок ДУвЧП — порядок независимых переменных.

Замечание Всюду в дальнейшем все рассматриваемые функции и ДУ будут в действительных числах. Все функции будут непрерывно дифференцируемые.

В отличие от обыкновенных ДУ общее решение ДУвЧП1П зависит от 1 произвольной функции.

$F(x, y, z, \frac{dz}{dx}) = 0$

Решение: $z = f(x, y, C)$

Пример:

$z = \frac{\partial z}{\partial x} x + x^2 y^2$

$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{z - x^2 y^2}{x}$

$\frac{\partial z}{\partial x} - \frac{z}{x} = -xy^2$ — линейное уравнение, если считать y параметром

$z = Cx$

$z = C(x)x$

$C'(x)x = -xy^2$

$C'(x) = -y^2$

$C(x) = -xy^2 + C(y)$

$\mathbf{z = -x^2y^2 + C(y)x}$

Если для ДУвЧП1П необходим решить задачу Коши, то, очевидно, начальное условие ставится в виде:

при заданном значении 1 неизвестной задается функция остальных переменных.

Интегрирование линейного однородного ДУвЧП1П

Df 1 ДУвЧП1П называется линейным однородным, если его можно записать в виде:
$$X_1(x_1, x_2, \ldots, x_n)\frac{\partial u}{\partial x_1} + X_2(x_1, x_2, \ldots, x_n)\frac{\partial u}{\partial x_2} + \ldots + X_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)\frac{\partial u}{\partial x_n}$$
$(x_1, \ldots, x_n)$ — независимые переменные
u — искомая функция

Наряду с этим уравнениемзапишем следующее:

$$\frac{dx_1}{X_1(x_1, \ldots, x_n)} = \frac{dx_2}{X_2(x_1, \ldots, x_n)} = \ldots = \frac{dx_n}{X_n(x_1, \ldots, x_n)}$$

Пусть $\varphi_k(x_1, x_2, \ldots, x_n) = C_k$ — первый интеграл этой СДУ.

Берем полный дифференциал этой функции:

$$\frac{\partial \varphi_k}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_2}dx_2 + \ldots + \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_n}dx_n = 0$$

Будем считать это скалярным произведением двух векторов. Оно равно 0 $\Rightarrow$ эти векторы ортогональны.

$\left(\dfrac{\partial \varphi_k}{\partial x_1}, \dfrac{\partial \varphi_k}{\partial x_2}, \ldots, \dfrac{\partial \varphi_k}{\partial x_n}\right)$ — первый вектор

$(dx_1, dx_2, \ldots, dx_n)$ — второй вектор

Заменяем второй вектор на коллинеарный ему (взятый из СДУ). Это не нарушит равенства нулю исходного скалярного произведения.

$$X_1(x_1, x_2, \ldots, x_n)\frac{\partial \varphi_k}{\partial x_1} + X_2(x_1, x_2, \ldots, x_n)\frac{\partial \varphi_k}{\partial x_2} + \ldots + X_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)\frac{\partial \varphi_k}{\partial x_n} = 0$$

Значит левая часть любого первого интеграла является решением ДУвЧП1П.

Первые интегралы:

$$\begin{cases} \varphi_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = C_1 \\ \varphi_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) = C_2 \\ \ldots \\ \varphi_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) = C_n \end{cases}$$

$$\begin{cases} X_1\dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} + X_2\dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x_2} + \ldots + X_n\dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x_n} = 0 \\ X_1\dfrac{\partial \varphi_2}{\partial x_1} + X_2\dfrac{\partial \varphi_2}{\partial x_2} + \ldots + X_n\dfrac{\partial \varphi_2}{\partial x_n} = 0 \\ \ldots \\ X_1\dfrac{\partial \varphi_{n-1}}{\partial x_1} + X_2\dfrac{\partial \varphi_{n-1}}{\partial x_2} + \ldots + X_n\dfrac{\partial \varphi_{n-1}}{\partial x_n} = 0 \\ X_1\dfrac{\partial u}{\partial x_1} + X_2\dfrac{\partial u}{\partial x_2} + \ldots + X_n\dfrac{\partial u}{\partial x_n} = 0 \end{cases}$$

Рассмотрим 2 якобиана:

1 — $\dfrac{\partial(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n-1})}{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})} \neq 0$ — из независимости системы первых интегралов.

2 — $\dfrac{\partial(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n-1}, \varphi_n)}{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n)} = 0$ — из свойств последней системы (подробнее см. в курсе Линейной Алгебры)

$u = u(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n-1})$

Покажем, что любая функция $F(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n-1})$ является решением уравнения (то есть соответствует с точностью до изоморфизма функции u)

$X_1\dfrac{\partial \varphi_k}{\partial x_1} + X_2\dfrac{\partial \varphi_k}{\partial x_2} + \ldots + X_n\dfrac{\partial \varphi_k}{\partial x_n} = 0$, где $k = 1, \ldots, n-1$ перепишем как:

$\sum\limits_{l=1}^{n} X_l\dfrac{\partial \varphi_k}{\partial x_l}, k = 1, \ldots, n-1$

Подставим в $\sum\limits_{l=1}^{n} X_l\dfrac{\partial \varphi_k}{\partial x_l}$ функцию $u = F$, получаем:

$X_1\dfrac{\partial F}{\partial x_1} + X_2\dfrac{\partial F}{\partial x_2} + \ldots + X_n\dfrac{\partial F}{\partial x_n} = 0$, где

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} = \frac{\partial F}{\partial \varphi_1} \cdot \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} + \frac{\partial F}{\partial \varphi_2} \cdot \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1} + \ldots + \frac{\partial F}{\partial \varphi_{n-1}} \cdot \frac{\partial \varphi_{n-1}}{\partial x_1} = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\partial F}{\partial \varphi_k}\frac{\partial \varphi_k}{\partial x_1}$$

остальные частные производные расписываются аналогично

Уравнение теперь имеет вид:

$$X_1\sum_{k=1}^{n-1}\frac{\partial F}{\partial\varphi_k}\frac{\partial\varphi_k}{\partial x_1}+X_2\sum_{k=1}^{n-1}\frac{\partial F}{\partial\varphi_k}\frac{\partial\varphi_k}{\partial x_2}+\ldots+X_n\sum_{k=1}^{n-1}\frac{\partial F}{\partial\varphi_k}\frac{\partial\varphi_k}{\partial x_n}=0$$

$$\sum_{l=1}^{n}\sum_{k=1}^{n-1}X_l\frac{\partial F}{\partial\varphi_k}\frac{\partial\varphi_k}{\partial x_l}=0$$

$\sum_{l=1}^{n}\frac{\partial F}{\partial\varphi_k}\underbrace{\sum_{k=1}^{n-1}X_l\frac{\partial F}{\partial\varphi_k}\frac{\partial\varphi_k}{\partial x_l}}_{=0}=0\Rightarrow F$ — произвольная дифференцируемая функция от левых частей первых интегралов.

Пример:

$$x^2\frac{\partial u}{\partial x}+(2z^2-xy)\frac{\partial u}{\partial y}-xz\frac{\partial u}{\partial z}=0$$

$$\frac{dx}{x^2}=\frac{dy}{2z^2-xy}=\frac{dz}{-xz}$$

$$1.\frac{dx}{x^2}=-\frac{dz}{z}$$

$$\frac{dx}{x^2}+\frac{dz}{z}=0$$

$$\ln x+\ln z=\ln C_1$$

$$\mathbf{xz=C_1}$$

$$2.\frac{ydx+xdy+2zdz}{x^2y+2xz^2-x^2y-2z^2x}=\frac{dx}{x^2}$$

$$ydx+xdy+2zdz=0$$

$$\mathbf{xy+z^2=C_2}$$

$$u=F(\underbrace{xz}_{\varphi_1},\underbrace{xy+z^2}_{\varphi_2})$$

$$x^2\left[\frac{\partial F}{\partial\varphi_1}\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial\varphi_2}\frac{\partial\varphi_2}{\partial x}\right]+(2z^2-xy)\left[\frac{\partial F}{\partial\varphi_1}\frac{\partial\varphi_1}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial\varphi_2}\frac{\partial\varphi_2}{\partial y}\right]-zx\left[\frac{\partial F}{\partial\varphi_1}\frac{\partial\varphi_1}{\partial z}+\frac{\partial F}{\partial\varphi_2}\frac{\partial\varphi_2}{\partial z}\right]=$$

$$=x^2\left[\frac{\partial F}{\partial\varphi_1}\cdot x+\frac{\partial F}{\partial\varphi_2}\cdot y\right]+(2z^2-xy)\left[\frac{\partial F}{\partial\varphi_1}\cdot 0+\frac{\partial F}{\partial\varphi_2}\cdot x\right]-zx\left[\frac{\partial F}{\partial\varphi_1}\cdot x+\frac{\partial F}{\partial\varphi_2}\cdot 2z\right]=$$

$$= \frac{\partial F}{\partial \varphi_1}\left[x^2 z + 0 - z x^2\right] + \frac{\partial F}{\partial \varphi_2}\left[x^2 y + 2z^2 x - x^2 y - 2z^x\right] = 0$$

Таким образом показано, что производные F по φ могут принимать произвольные значения (а, значит, и сама функция тоже).

Автономные динамические системы уравнений характеристик. Поверхность из характеристик

$$X_1(x_1, x_2, \ldots, x_n)\frac{\partial u}{\partial x_1} + X_2(x_1, x_2, \ldots, x_n)\frac{\partial u}{\partial x_2} + \ldots + X_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)\frac{\partial u}{\partial x_n} = 0$$

$$\frac{dx_1}{X_1} = \frac{dx_2}{X_2} = \ldots = \frac{dx_n}{X_n}$$

Df 1 Автономная динамическая система:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial x_1}{\partial t} = X_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ \ldots \\ \dfrac{\partial x_n}{\partial t} = X_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) \end{cases}$$

Df 2 Фазовые траектории данной автономной динамической системы, удовлетворяющей симметрической системе ДУ, являются одновременно и решениями данного ДУвЧП1П и, в связи с этим, называются "характеристиками"или "характеристиками данного уравнения в ЧП".

Df 3 Сама автономная динамическая система называется системой уравнений характеристик данного ДУвЧП.

$u = F(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n-1})$ — поверхность в n-мерном пространстве, аргументами которой которой являются характеристики.

Решение задачи Коши для ОЛДУвЧП1П

Постановка задачи:

1. дано ДУ

2. дано значение функции всех аргументов, кроме одного, значение которого фиксировано:
   $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})$ при $x_n = x_{n_0}$

Геометрический смысл:

построить поверхность из характеристик, проходящую через заданную кривую.

Решение:

$$\frac{dx_1}{X_1} = \frac{dx_2}{X_2} = \ldots = \frac{dx_n}{X_n}$$

можем найти первые интегралы:

$$\begin{cases} \varphi_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = C_1 \\ \ldots \\ \varphi_{n-1}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = C_{n-1} \end{cases}$$

$u = F(\varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1})$

Подставим во все первые интегралы значение $x_n = x_{n_0}$:

$$\begin{cases} \varphi_1(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_{n_0}) = \overline{\varphi}_1 \\ \varphi_2(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_{n_0}) = \overline{\varphi}_2 \\ \ldots \\ \varphi_{n-1}(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_{n_0}) = \overline{\varphi}_{n-1} \end{cases}$$

$$\frac{\partial(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n-1})}{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})} \neq 0$$

По теореме о системе неявных функций:

> | переменные: $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, \overline{\varphi}_1, \ldots, \overline{\varphi}_{n-1}$

переменные $x_1, \ldots, x_{n-1}$ выражаем через оставшиеся:

$$\begin{cases} x_1 = \omega_1(\overline{\varphi}_1, \overline{\varphi}_2, \ldots, \overline{\varphi}_{n-1}) \\ x_2 = \omega_2(\overline{\varphi}_1, \overline{\varphi}_2, \ldots, \overline{\varphi}_{n-1}) \\ \ldots \\ x_{n-1} = \omega_{n-1}(\overline{\varphi}_1, \overline{\varphi}_2, \ldots, \overline{\varphi}_{n-1}) \end{cases}$$

Подставим $x_1, \ldots, x_{n-1}$ в $u = f(x_1, \ldots, x_{n-1})$

$u = f(\omega_1(\overline{\varphi}_1, \overline{\varphi}_2, \ldots, \overline{\varphi}_{n-1}), \omega_2(\overline{\varphi}_1, \overline{\varphi}_2, \ldots, \overline{\varphi}_{n-1}), \ldots, \omega_{n-1}(\overline{\varphi}_1, \overline{\varphi}_2, \ldots, \overline{\varphi}_{n-1}))$

$u = f(\omega_1(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n-1}), \omega_2(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n-1}), \ldots, \omega_{n-1}(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n-1}))$

Пример:

$(y-z)^2\dfrac{\partial u}{\partial x} + z\dfrac{\partial u}{\partial y} + y\dfrac{\partial u}{\partial z}$

$u = 2y(y-z)$ при $x = 0$

$\dfrac{dx}{(y-z)^2} = \dfrac{dy}{z} = \dfrac{dz}{y}$

1. $\dfrac{dy}{z} = \dfrac{dz}{y}$

$ydy - zdz = 0$

$\mathbf{y^2 - z^2 = C_1}$

2. $\dfrac{dx}{(y-z)^2} = \dfrac{dy - dz}{z - y}$

$dx = -(y-z)d(y-z)$

$\mathbf{2x + (y-z)^2 = C_2}$

$$\begin{cases} y^2 - z^2 = C_1 \\ 2x + (y-z)^2 = C_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y^2 - z^2 = \overline{\varphi}_1 \\ (y-z)^2 = \overline{\varphi}_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y + z = \dfrac{\overline{\varphi}_1}{\sqrt{\overline{\varphi}_2}} \\ y - z = \sqrt{\overline{\varphi}_2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = \dfrac{\overline{\varphi}_1 + \overline{\varphi}_2}{2\sqrt{\overline{\varphi}_2}} \\ z = \dfrac{\overline{\varphi}_1 - \overline{\varphi}_2}{2\sqrt{\overline{\varphi}_2}} \end{cases}$$

$u = 2\dfrac{\overline{\varphi}_1 + \overline{\varphi}_2}{2\sqrt{\overline{\varphi}_2}} \cdot \sqrt{\overline{\varphi}_2} = \overline{\varphi}_1 + \overline{\varphi}_2$

$u = y^2 - z^2 + 2x + (y-z)^2 = 2y^2 - 2yz + 2x = 2\left(x + y\left(y - z\right)\right)$

Пример:

$$y\frac{\partial u}{\partial x} - x\frac{\partial u}{\partial y} = 0,\ u|_{y=0} = sin\ x$$

$$\frac{dx}{y} = \frac{dy}{-x}$$

$$-xdx = ydy$$

$$ydy + xdx = 0$$

$$y^2 + x^2 = C,\ \varphi(x,y) = C$$

$$y = 0 \Rightarrow \begin{array}{l} x^2 = \overline{\varphi} \\ x = \sqrt{\overline{\varphi}} \end{array}$$

$$u = sin\sqrt{\overline{\varphi}}$$

$$u = sin\sqrt{x^2 + y^2}$$

Пример:

$$x\frac{\partial u}{\partial x} + yz\frac{\partial u}{\partial z} = 0,\ u|_{z=1} = x^y$$

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{0} = \frac{dz}{yz}$$

1. $\dfrac{dx}{x} = \dfrac{dy}{0}$

   $dy = 0$

   $\mathbf{y = C_1} = \varphi_1$

2. $\dfrac{dx}{x} = \dfrac{dz}{C_1 z}$

   $C_1 \ln x - \ln z = \ln C_2$

   $\dfrac{x_1^C}{z} = C_2$

   $\dfrac{\mathbf{x^y}}{\mathbf{z}} = \mathbf{C_2} = \varphi_2$

$$z = 1 \Rightarrow \begin{array}{l} y = \overline{\varphi_1} \\ x^y = \overline{\varphi_2} \end{array}$$

$$u = \overline{\varphi_2}$$

$$u = \frac{x^y}{z}$$

Линейные неоднородные и квазилинейные ДУвЧП1П

Df 1 ДУвЧП называется неоднородным, если оно записывается в виде:
$P_1(x_1, x_2, \ldots, x_n)\dfrac{\partial z}{\partial x_1} + P_2(x_1, x_2, \ldots, x_n)\dfrac{\partial z}{\partial x_2} + \ldots + P_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)\dfrac{\partial z}{\partial x_n} =$
$= R(x_1, x_2, \ldots, x_n)$
Решение такого уравнения ищется в виде:
$V(x_1, x_2, \ldots, x_n, z) = 0$

Df 2 ДУвЧП называется квазилинейным, если оно записывается в виде:
$P_1(x_1, x_2, \ldots, x_n, z)\dfrac{\partial z}{\partial x_1} + P_2(x_1, x_2, \ldots, x_n, z)\dfrac{\partial z}{\partial x_2} + \ldots + P_n(x_1, x_2, \ldots, x_n, z)\dfrac{\partial z}{\partial x_n} =$
$= R(x_1, x_2, \ldots, x_n, z)$
Решение такого уравнения ищем в виде:
$V(x_1, x_2, \ldots, x_n, z) = 0$

Замечание Т.к. ЛНДУ - лишь частный случай квазилинейных ДУ, то в дальнейшем, если не оговорено обратное, будем рассматривать квазилинейные ДУ.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x_1} = -\dfrac{\left(\dfrac{\partial V}{\partial x_1}\right)}{\left(\dfrac{\partial V}{\partial z}\right)} \\ \dfrac{\partial z}{\partial x_2} = -\dfrac{\left(\dfrac{\partial V}{\partial x_2}\right)}{\left(\dfrac{\partial V}{\partial z}\right)} \\ \ldots \\ \dfrac{\partial z}{\partial x_n} = -\dfrac{\left(\dfrac{\partial V}{\partial x_n}\right)}{\left(\dfrac{\partial V}{\partial z}\right)} \end{cases}$$

$$P_1 \cdot \left(-\dfrac{\left(\dfrac{\partial V}{\partial x_1}\right)}{\left(\dfrac{\partial V}{\partial z}\right)}\right) + P_2 \cdot \left(-\dfrac{\left(\dfrac{\partial V}{\partial x_2}\right)}{\left(\dfrac{\partial V}{\partial z}\right)}\right) + \ldots + P_n \cdot \left(-\dfrac{\left(\dfrac{\partial V}{\partial x_n}\right)}{\left(\dfrac{\partial V}{\partial z}\right)}\right) - R = 0$$

$$P_1 \cdot \frac{\partial V}{\partial x_1} + P_2 \cdot \frac{\partial V}{\partial x_2} + \ldots + P_n \cdot \frac{\partial V}{\partial x_n} + R \cdot \frac{\partial V}{\partial z} = 0$$

т.е. получили линейное однородное уравнение

$$\frac{dx_1}{P_1} = \frac{dx_2}{P_2} = \ldots = \frac{dx_n}{P_n} = \frac{dz}{R}$$

Допустим, мы нашли некий первый интеграл:

$$\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n, z) = C$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x_1} \cdot dx_1 + \frac{\partial\varphi}{\partial x_2} \cdot dx_2 + \ldots + \frac{\partial\varphi}{\partial x_n} \cdot dx_n + \frac{\partial\varphi}{\partial z} \cdot dz = 0$$

Т.к. векторы (dx_1, dx_2, dx_n, dz) и $(P_1, P_2, \ldots, P_n, R)$ коллинеарны, то проводим замену в последнем уравнении, сохраняя ортогональность:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}P_1 + \frac{\partial\varphi}{\partial x_2}P_2 + \ldots + \frac{\partial\varphi}{\partial x_n}P_n + \frac{\partial\varphi}{\partial z}R = 0 \qquad (*)$$

Разделим на $\dfrac{\partial\varphi}{\partial z}$

$$P_1 \cdot \frac{\left(\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_1}\right)}{\left(\dfrac{\partial\varphi}{\partial z}\right)} + P_2 \cdot \frac{\left(\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_2}\right)}{\left(\dfrac{\partial\varphi}{\partial z}\right)} + \ldots + P_n \cdot \frac{\left(\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_n}\right)}{\left(\dfrac{\partial\varphi}{\partial z}\right)} = R$$

сравним с:

$$P_1 \cdot \frac{\partial z}{\partial x_1} + P_2 \cdot \frac{\partial z}{\partial x_2} + \ldots + P_n \cdot \frac{\partial z}{\partial x_n} = R, \left[\frac{\partial z}{\partial x_1} = -\frac{\left(\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right)}{\left(\dfrac{\partial\varphi}{\partial z}\right)}\right]$$

Если $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n, z) = C$ — первый интеграл системы, то для него верно выражение $(*)$:

$$\sum_{l=1}^{n} P_l \frac{\partial\varphi}{\partial x_l} + R\frac{\partial\varphi}{\partial z} = 0 \qquad (**)$$

Т.к. система имеет n первых интегралов:

$$\begin{cases} \varphi_1(x_1, x_2, \ldots, x_n, z) = C_1 \\ \varphi_2(x_1, x_2, \ldots, x_n, z) = C_2 \\ \ldots \\ \varphi_n(x_1, x_2, \ldots, x_n, z) = C_n \end{cases}$$

то каждый из этих n первых интегралов является решением данного квазилинейного ДУ.

Покажем, что решением данного уравнения будет произвольная функция

$V(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n) = 0$

Покажем, что она удовлетворяет уравнению $(*)$:

$$P_1 \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial \varphi_k} \cdot \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_1} + P_2 \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial \varphi_k} \cdot \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_2} + \ldots + P_n \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial \varphi_k} \cdot \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_n} + R \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial \varphi_k} \cdot \frac{\partial \varphi_k}{\partial z} = 0$$

$$\left[\sum_{l=1}^{n} P_l \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial v}{\partial \varphi_k} \cdot \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_l}\right] + \left[R \textstyle\sum_{k=1}^{n} \displaystyle\frac{\partial V}{\partial \varphi_k} \cdot \frac{\partial \varphi_k}{\partial z}\right] = 0$$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial \varphi_k} \left[\sum_{l=1}^{n} P_l \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_l} + R \frac{\partial \varphi_k}{\partial z}\right] = 0$$

но для каждого φ выполняется условие $(**)$. Следовательно:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial \varphi_k} \underbrace{\left[\sum_{l=1}^{n} P_l \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_l} + R \frac{\partial \varphi_k}{\partial z}\right]}_{=0} = 0$$

Значит, V — произвольная функция от первых интегралов.

Пример:

$$(1 + \sqrt{z - x - y}) \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = 2$$

$$\frac{dx}{1 + \sqrt{z - x - y}} = \frac{dy}{1} = \frac{dz}{2}$$

1. $\dfrac{dy}{1} = \dfrac{dz}{2}$
   $2dy - dz = 0$
   $\mathbf{z - 2y = C_1} = \varphi_1$

2. $\dfrac{dz - dx - dy}{-\sqrt{z - x - y}} = \dfrac{dy}{1}$
   $-2\sqrt{z - x - y} = y - C_2$
   $\mathbf{y + 2\sqrt{z - x - y} = C_2} = \varphi_2$

$$V(\underbrace{z - 2y}_{\varphi_1}, \underbrace{y + 2\sqrt{z - x - y}}_{\varphi_2}) = 0$$

подставим полученное решение в исходное уравнение:

$$(1+\sqrt{z-x-y})\left(-\frac{0+\dfrac{\partial V}{\partial \varphi_2}\cdot 2\cdot\dfrac{1}{2}\cdot(z-x-y)^{-\frac{1}{2}}\cdot(-1)}{\dfrac{\partial V}{\partial \varphi_1}\cdot 1+\dfrac{\partial V}{\partial \varphi_2}\cdot 2\cdot\dfrac{1}{2}\cdot(z-x-y)^{-\frac{1}{2}}}\right)-$$

$$-\frac{\dfrac{\partial V}{\partial \varphi_1}\cdot(-2)+\dfrac{\partial V}{\partial \varphi_2}\cdot\left(1+2\cdot\dfrac{1}{2}\cdot(z-x-y)^{-\frac{1}{2}}\cdot(-1)\right)}{\dfrac{\partial V}{\partial \varphi_1}+\dfrac{\partial V}{\partial \varphi_2}\cdot(z-x-y)^{-\frac{1}{2}}}=2$$

$$(1+\sqrt{z-x-y})\frac{\partial V}{\partial \varphi_2}(z-x-y)^{-\frac{1}{2}}+2\frac{\partial V}{\partial \varphi_1}-\frac{\partial V}{\partial \varphi_2}+\frac{\partial V}{\partial \varphi_2}(z-x-y)^{-\frac{1}{2}}=$$
$$=2\left(\frac{\partial V}{\partial \varphi_1}+\frac{\partial V}{\partial \varphi_2}(z-x-y)^{-\frac{1}{2}}\right)$$

$$\frac{\partial V}{\partial \varphi_2}(z-x-y)^{-\frac{1}{2}}+(z-x-y)^{\frac{1}{2}}\frac{\partial V}{\partial \varphi_2}(z-x-y)^{-\frac{1}{2}}+2\frac{\partial V}{\partial \varphi_1}-\frac{\partial V}{\partial \varphi_2}+\frac{\partial V}{\partial \varphi_2}(z-x-y)^{-\frac{1}{2}}=$$
$$=2\frac{\partial V}{\partial \varphi_1}+2\frac{\partial V}{\partial \varphi_2}(z-x-y)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\frac{\partial V}{\partial \varphi_2}(z-x-y)^{-\frac{1}{2}}+\frac{\partial V}{\partial \varphi_2}+2\frac{\partial V}{\partial \varphi_1}-\frac{\partial V}{\partial \varphi_2}+\frac{\partial V}{\partial \varphi_2}(z-x-y)^{-\frac{1}{2}}=2\frac{\partial V}{\partial \varphi_1}+2\frac{\partial V}{\partial \varphi_2}(z-x-y)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\frac{\partial V}{\partial \varphi_2}(z-x-y)^{-\frac{1}{2}}+\frac{\partial V}{\partial \varphi_2}(z-x-y)^{-\frac{1}{2}}=2\frac{\partial V}{\partial \varphi_2}(z-x-y)^{-\frac{1}{2}}$$

$$0=0$$

Т.е. наше предположение было верно.

Пример:

$$y\frac{\partial z}{\partial x}+x\frac{\partial z}{\partial y}=x-y$$

$$\frac{dx}{y}=\frac{dy}{x}=\frac{dz}{x-y}$$

1. $\dfrac{dx}{y}=\dfrac{dy}{x}$
   $-xdx+ydy=0$
   $\mathbf{y^2-x^2=C_1}=\varphi_1$

2. $\dfrac{dx-dy}{y-x}=\dfrac{dz}{x-y}$
   $dz+dx-dy=0$
   $\mathbf{z+x-y=C_2}=\varphi_2$

$V(y^2 - x^2, z + x - y) = 0$

Решение задачи Коши для ЛН или квазилинейных ДУвЧП1П

Постановка задачи:

$$P_1 \cdot \frac{\partial z}{\partial x_1} + P_2 \cdot \frac{\partial z}{\partial x_2} + \ldots + P_n \cdot \frac{\partial z}{\partial x_n} = R$$

$z = f(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})$ при $x_n = x_{n_0}$

Решение:

$$\frac{dx_1}{P_1} = \frac{dx_2}{P_2} = \ldots = \frac{dx_n}{P_n} = \frac{dz}{R}$$

$$\begin{cases} \varphi_1(x_1, x_2, \ldots, x_n, z) = C_1 \\ \varphi_2(x_1, x_2, \ldots, x_n, z) = C_2 \\ \ldots \\ \varphi_n(x_1, x_2, \ldots, x_n, z) = C_n \end{cases}$$

$$\begin{cases} \varphi_1(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_{n_0}, z) = \overline{\varphi_1} \\ \varphi_2(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_{n_0}, z) = \overline{\varphi_2} \\ \ldots \\ \varphi_n(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_{n_0}, z) = \overline{\varphi_n} \end{cases} \qquad (\mathbf{1})$$

$$\frac{\partial(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n)}{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, z)} \neq 0$$

А теперь применяем теорему о системе неявных функций (см. курс математического анализа).

Системе (1) эквивалентна система:

$$(\mathbf{2}) \begin{cases} x_1 = \omega_1(\overline{\varphi_1}, \overline{\varphi_2}, \ldots, \overline{\varphi_n}) \\ x_2 = \omega_2(\overline{\varphi_1}, \overline{\varphi_2}, \ldots, \overline{\varphi_n}) \\ \vdots \\ x_{n-1} = \omega_{n-1}(\overline{\varphi_1}, \overline{\varphi_2}, \ldots, \overline{\varphi_n}) \\ z = \omega_n(\overline{\varphi_1}, \overline{\varphi_2}, \ldots, \overline{\varphi_n}) \end{cases}$$

$$\omega_n(\overline{\varphi_1}, \overline{\varphi_2}, \ldots, \overline{\varphi_n}) = f\left[\omega_1(\overline{\varphi_1}, \overline{\varphi_2}, \ldots, \overline{\varphi_n}), \omega_2(\overline{\varphi_1}, \overline{\varphi_2}, \ldots, \overline{\varphi_n}), \ldots, \omega_{n-1}(\overline{\varphi_1}, \overline{\varphi_2}, \ldots, \overline{\varphi_n})\right]$$

Ответ:

$$\omega_n(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n) = f\left[\omega_1(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n), \omega_2(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n), \ldots, \omega_{n-1}(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n)\right]$$

Пример:

$$x\frac{\partial z}{\partial x} - 2y\frac{\partial z}{\partial y} = x^2 + y^2,\ z|_{y=1} = x_2$$

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{-2y} = \frac{dz}{x^2+y^2}$$

1. $\dfrac{dx}{x} = \dfrac{dy}{-2y}$

   $2\dfrac{dx}{x} + \dfrac{dy}{y} = 0$

   $\mathbf{x^2 y = C_1} = \varphi_1$

2. $\dfrac{-2xdx + ydy}{-2x^2 - 2y^2} = \dfrac{dz}{x^2+y^2}$

   $-2xdx + ydy = -2dz$

   $\mathbf{2z - x^2 + \dfrac{y^2}{2} = C_2} = \varphi_2$

$$y = 1 \Rightarrow \begin{cases} x^2 = \overline{\varphi_1} \\ 2z - x^2 + \dfrac{1}{2} = \overline{\varphi_2} \end{cases}$$

$$2z = \overline{\varphi_2} - \frac{1}{2} + \overline{\varphi_1}$$

$$z = \frac{\overline{\varphi_2}}{4} - \frac{1}{4} + \frac{\overline{\varphi_1}}{2}$$

$$\frac{\overline{\varphi_2}}{4} - \frac{1}{4} + \frac{\overline{\varphi_1}}{2} = \overline{\varphi_1}$$

$$2\overline{\varphi_2} - 1 + 2\overline{\varphi_1} = 4\overline{\varphi_1}$$

$$2\overline{\varphi_2} - 1 - 2\overline{\varphi_1} = 0$$

$$2\left(\overline{\varphi_2} - \overline{\varphi_1}\right) = 1$$

$$4z - 2x^2 + y^2 - 2x^2 y = 1$$

$$z = \frac{2x^2 - y^2 + 2x^2 y + 1}{4}$$

Пример:

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + z\frac{\partial z}{\partial y} = y, \qquad y = 2z, \quad x + 2y = z$$

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{z} = \frac{dz}{y}$$

1. $\dfrac{dy}{z} = \dfrac{dz}{y}$
   $ydy = zdz$
   $\mathbf{y^2 - z^2 = C_1} = \varphi_1$

2. $\dfrac{dx}{x} = \dfrac{dy - dz}{-(y-z)}$
   $\ln x + \ln(y-z) = \ln C_2$
   $\mathbf{x(y - z) = C_2} = \varphi_2$

$$\begin{cases} y^2 - z^2 = C_1 & (\varphi_1) \\ x(y-z) = C_2 & (\varphi_2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4z^2 - z^2 = \overline{\varphi_1} \\ (z - 4z)(2z - z) = \overline{\varphi_2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3z^2 = \overline{\varphi_1} \\ -3z^2 = \overline{\varphi_2} \end{cases}$$

$$\overline{\varphi_1} + \overline{\varphi_2} = 0$$

$$y^2 - z^2 + x(y-z) = 0$$

$$(x + y + z)(y - z) = 0$$

$y - z = 0$ — не подходит, т.к. по начальным условиям $y = 2z$

$x+y+z = 0$ — поверхность, проходящая через прямую, являющуюся пересечением $y = 2z$ и $x + 2y = z$

Интерпретация ДУвЧП1П и его решения в 3-мерном пространстве

дано: $P\dfrac{\partial z}{\partial x} + Q\dfrac{\partial z}{\partial y} = R$

решение:

поверхность: $z = f(x, y)$

нормаль: $\overline{N} = \{\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, -1\}$

$\{P, Q, R\} \cdot \{\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, -1\} = 0$ (эти векторы перпендикулярны)

$\frac{x - x_0}{P} = \frac{y - y_0}{Q} = \frac{z - z_0}{R}$

$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R}$ — уравнение характеристик, фазовая проекция на данной поверхности

Т.о. $\{P, Q, R\}$ — вектор, касательный к кривой на поверхности, которая и является характеристикой.

$\begin{cases} \varphi_1(x, y, z) = C_1 \\ \varphi_2(x, y, z) = C_2 \end{cases}$ — их пересечение — характеристика.

$V(\varphi_1(x, y, z), \varphi_2(x, y, z)) = 0$

Пример:

$yz\frac{\partial z}{\partial x} + xz\frac{\partial z}{\partial y} = xy$

$\frac{dx}{yz} = \frac{dy}{xz} = \frac{dz}{xy}$

1. $\frac{dx}{yz} = \frac{dy}{xz}$
   $\frac{dx}{y} = \frac{dy}{x}$
   $xdx = ydy$
   $\mathbf{x^2 - y^2 = C_1} = \varphi_1$

2. $\frac{dx}{yz} = \frac{dz}{xy}$
   $\frac{dx}{z} = \frac{dz}{x}$
   $xdx = zdz$
   $\mathbf{x^2 - z^2 = C_2} = \varphi_2$

$\begin{cases} a^2 - y^2 = \overline{\varphi_1} \\ a^2 - z^2 = \overline{\varphi_2} \end{cases}$

$2a^2 - (y^2 + z^2) = \overline{\varphi_1} + \overline{\varphi_2}$

$a^2 = \overline{\varphi_1} + \overline{\varphi_2}$

$x^2 - y^2 + x^2 - z^2 = a^2$

$2x^2 - y^2 - z^2 = a^2$ — двуполостной гиперболоид

Устойчивость

Устойчивость решений ДУ и СДУ

$\dfrac{dy}{dt} = f(t, y)$ — общий вид динамической системы.

Конкретное решение, которое будет исследованно на устойчивость:

$\xi(t, \xi_0)$ — невозмущенное решение.

Df 1 невозмущенное решение $\xi(t, \xi_0)$ называется устойчивым по Ляпунову, если
$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta(\varepsilon) > 0 \quad \forall y_0 : |y_0 - \xi_0| < \delta$
$|y(t, y_0) - \xi(t, \xi_0)| < \varepsilon. \qquad \forall t \geqslant t_0$

Df 2 невозмущенное решение $\xi(t, \xi_0)$ называется ассимптотически устойчивым по Ляпунову, если

1. оно устойчивое
2. $\forall H > 0 \quad \forall y_0 : |y_0 - \xi_0| < H$
   $\lim\limits_{t \to \infty} |y(t, y_0) - \xi(t, \xi_0)| = 0$

Df 3 невозмущенное решение называется устойчивым в целом по Ляпунову, если это решение ассимптотически устойчиво и $H = \infty$ (все решения стремятся к невозмущенному)

Df 4 невозмущенное решение называется неустойчивым по Ляпунову, если
$\exists \varepsilon > 0 \quad \forall \delta(\varepsilon) \quad \exists y_0 : |y_0 - \xi_0| < \delta \quad \exists t_1 > t_0$

Пример:

$\dfrac{dy}{dt} = 1 + t$

$\xi(0) = 1[\xi_0 = 1]$

$y = t + \dfrac{t^2}{2} + C$

$1 = 0 + \dfrac{0}{2} + C \Rightarrow$ для $y(\xi_0) = 1$ $C = 1$

$\xi(t, xi_0) = 1 + t + \dfrac{t^2}{2}$ — невозмущенное решение

$y(0) = y_0$

$y_0 = 0 + C$

$y(t, y_0) = t + \dfrac{t^2}{2} + y_0$

$|y_0 - \xi_0| < \delta$

$|y_0 - 1| < \delta = \varepsilon$

$|y(t, y_0) - \xi(t, \xi_0)| = |y_0 - 1| < \varepsilon$

Т.о. невозмущенное решение $\xi(t, \xi_0) = 1 + t + \dfrac{t^2}{2}$ является устойчивым

Пример:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -y \\ \dfrac{dy}{dt} = x \end{cases}$$

$x_\xi(0) = 0$

$y_\xi(0) = 0$

$$\begin{vmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$\lambda^2 + 1 = 0$

$\lambda_{1,2} = \pm i$

$\lambda = i$

$$\begin{pmatrix} -i & -1 \\ 1 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = 0$$

$h_1 - ih_2 = 0$

$h_1 = ih_2$

собственный вектор:

$$\begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} e^{it} = \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} (cos\ t + isin\ t) = \begin{pmatrix} -sin\ t + icos\ t \\ cos\ t + isin\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -sin\ t \\ cos\ t \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} cos\ t \\ sin\ t \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x = -C_1 sin\ t + C_2 cos\ t \\ y = C_1 cos\ t + C_2 sin\ t \end{cases}$$

Подставим $x_\xi(0)$ и $y_\xi(0)$:

$$\begin{cases} 0 = C_2 \\ 0 = C_1 \end{cases}$$

Т.о. $\begin{cases} x_\xi(t, x_{\xi_0}) = 0 \\ y_\xi(t, y_{\xi_0}) = 0 \end{cases}$

Рассмотрим произвольное решение: $\begin{cases} x(0) = x_0 \\ y(0) = y_0 \end{cases}$, проходящее через т.$(x_0, y_0)$

$$\begin{cases} x_0 = C_2 \\ y_0 = C_1 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \begin{cases} x = -y_0 sin\ t + x_0 cos\ t \\ y = y_0 cos\ t + x_0 sin\ t \end{cases}$$

$$|x_0 - 0| = |x_0| < \frac{\delta}{2}$$

$$|y_0 - 0| = |y_0| < \frac{\delta}{2}$$

$$| - y_0 sin\ t + x_0 cos\ t| < \varepsilon$$

$$|y_0 cos\ t + x_0 sin\ t| < \varepsilon$$

$$| - y_0 sin\ t + x_0 cos\ t| \leqslant |y_0||sin\ t| + |x_0||cos\ t| < |y_0| + |x_0| < \varepsilon = \delta$$

$$|y_0 cos\ t + x_0 sin\ t| \leqslant |y_0||cos\ t| + |x_0||sin\ t| < |y_0| + |x_0| < \varepsilon = \delta$$

Т.е. устойчива.

Пример: (ассимптотическая устойчивость)

$$\frac{dy}{dt} = 1 + t - y$$

$$\xi(0) = 0$$

$$\frac{dy}{dt} + y = 1 + t$$

$$y_{0_{\text{о}}} = Ce^{-t}$$

$$y_{0_{\text{н}}} = C(t)e^{-t}$$

$$C'(t)e^{-t} = 1 + t$$

$$dC(t) = (1 + t)e^{t}dt$$

$$C(t) = (1 + t)e^{t} - e^{t} + C$$

$$y = Ce^{-t} + 1 + t - 1 = Ce^{-t} + t$$

$$\xi(0) = 0$$

$$0 = C + 0 \Rightarrow C = 0 \Rightarrow \xi(t, \xi_0) = t$$

$$y_0 = C$$

$$y(t, y_0) = y_0 e^{-t} + t$$

$$|y_0 - 0| < \delta$$

$$|y_0 e^{-t} + t - t| < \varepsilon$$

$$|y_0| < \delta$$

$$|y_0 e^{-t}| < \varepsilon$$

$|y_0 e^{-t}| < |y_0| < \varepsilon = \delta -$ устойчивое.

$\lim\limits_{t\to\infty} |y_0 e^{-t} + t - t| = \lim\limits_{t\to\infty} y_0 e^{-t} = 0 \Rightarrow$ ассимптотическая устойчивость

Пример: (на неустойчивость)

$$\frac{dy}{dt} = -y^2$$

$$\xi(0) = 0$$

$$\xi(t, \xi_0) = 0$$

$$\frac{dy}{y^2} = -dt$$

$$-\frac{1}{y} = -t - C$$

$$y = \frac{1}{t+C}$$

$$t_0 : y_0 = \frac{1}{C}$$

$$y(t, y_0) = \frac{1}{t + \frac{1}{y_0}}$$

$$|y_0| < \delta$$

$$\left|\frac{1}{t + \frac{1}{y_0}}\right| < \varepsilon$$

1) $y_0 > 0$
   $\frac{1}{y_0}\varepsilon = 1$
   $\frac{1}{\delta}\varepsilon = 1$
   $\varepsilon = \delta$ - устойчивое

2) $y_0 < 0$
   $t = -\frac{1}{y_0} > 0$
   при $t \to -\frac{1}{y_0}$ $\qquad \left|\frac{1}{t + \frac{1}{y_0}}\right| \to \infty \Rightarrow$ неустойчивое

Устойчивость решений ЛСДУ

$$\frac{dy}{dt} = A(t)y + f(t)$$

с постоянными коэффициентами:

$$\frac{dy}{dt} = Ay + f(t)$$

Th 1 Для того, чтобы любое решение ЛСДУ было устойчивым (ассимптотически устойчивым, устойчивым в целом, неустойчивым) необходимо и достаточно, чтобы нулевое решение соответствующей однородной СДУ было устойчивым (ассимптотически устойчивым, устойчивым в целом, неустойчивым).

D: Докажем, что если любое решение устойчиво, то устойчиво и нулевое решение соответствующей СДУ

Д

$\forall \tilde{y}(t, y_0)$ - устойчивое:

$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) > 0 : \forall y_0 : |y_0 - \tilde{y}_0| < \delta \to |y(t, y_0) - \tilde{y}(t, y_0)| < \varepsilon \forall t \geqslant t_0$

Известно, что разность двух решений данной СДУ есть решение однородной СДУ.

Рассмотрим все решения ОСДУ, которые можно представить в виде:

$z(t, z_0) = y_0(t, y_0) - \tilde{y}_0(t, \tilde{y}_0)$, т.е. $\dfrac{dz}{dt} = A(t)z$

При $t = t_0$:

$z_0 = y_0 - \tilde{y}_0$

Выберем только те y_0, которые удовлетворяют условию устойчивости Ляпунова:

$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) > 0 : \quad \forall z_0(y_0) : \quad |z_0| < \delta \to |z(t, z_0)| < \varepsilon \quad \forall t \geqslant t_0$

$\Rightarrow |z_0 - 0| < \delta \to |z(t, z_0) - 0| < \varepsilon$

Т.е. нулевое решение устойчиво.

Н

в обратную сторону доказывается обратное следование

Th 2 $\dfrac{dy}{dt} = A(t)y$. Для того, чтобы все решения ОСДУ были устойчивы, необходимо и достаточно, чтобы эти решения были ограничены.

D:

Д

Дано: все y — ограничены

$y = Gy_0$

$|G| \leqslant M$

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta(\varepsilon) = \dfrac{\varepsilon}{M} > 0$

$\forall y_0 \quad |y_0 - 0| = |y_0| < \delta = \dfrac{\varepsilon}{M}$

$|y - 0| = |y| \leqslant |G| \cdot |y_0| \leqslant M \cdot \dfrac{\varepsilon}{M} = \varepsilon$

Таким образом нулевое решение устойчиво $\Rightarrow$ по Th 1 все решения устойчивы.

Н

Дано: все решения устойчивы

Пойдем от противного: пусть какое-то $y(t_1, y_0) > \varepsilon \dfrac{|y_0| \cdot 2}{\delta}$ для зафиксированных ε и δ

Возьмем решение: $\dfrac{y(t, y_0)}{|y_0|} \cdot \dfrac{\delta}{2}$

Рассмотрим его в начальный момент времени:

$\left|\dfrac{y(t_0,y_0)\cdot\delta}{2|y_0|}-0\right| = \left|\dfrac{y_0\delta}{2|y_0|}\right| = \dfrac{\delta}{2} < \delta$
в $t = t_1$:
$\left|\dfrac{y(t_1,y_0)\cdot\delta}{2|y_0|}-0\right| = \left|\dfrac{y(t_1,y_0)\cdot\delta}{2|y_0|}\right| > \dfrac{\varepsilon|y_0|2}{\delta}\cdot\dfrac{\delta}{2|y_0|} = \varepsilon$, т.е. решение неустойчиво, что противоречит условию теоремы.
Значит, все устойчивые решения ограничены.

Следствие: Для НСДУ Th 2 несправедлива. В случае НСДУ, если ее решения устойчивы, то они могут быть все одновременно ограничены или все одновременно неограничены.

Пример:

$\begin{cases} \dot{x} = -ax + y + f_1(t) \\ \dot{y} = x - ay + f_2(t) \end{cases}$ при каких значениях a все решения будут:

1. устойчивы
2. ассимптотически устойчивы
3. неустойчивы

$$\begin{vmatrix} -a-\lambda & 1 \\ 1 & -a-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$a^2 + 2a\lambda + \lambda^2 - 1 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = -a \pm 1$$

СВ ($\lambda_1 = -a + 1$):

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow H_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

СВ ($\lambda_2 = -a - 1$):

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} h_3 \\ h_4 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow H_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{(1-a)t} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-(a+1)t} + y_{\text{ч}}$$

1. $a = 1$

$$\left.\begin{array}{lll} \forall C_1 & C_1\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}e^{(1-a)t} & \text{— ограничено}\\ \forall C_2 & C_2\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}e^{-(1+a)t} & \text{— ограничено}\end{array}\right\}\Rightarrow \text{все решения устойчивы}$$

2. $a > 1$

   все решения ОСДУ ограничены и $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\xrightarrow[t\to\infty]{} 0 \Rightarrow$ все решения ассимптотически устойчивы

3. $a < 1$

   решение неограничено $\Rightarrow$ решения неустойчивы

Th 3 $\dfrac{dy}{dt} = A\cdot y + f(t)$

Для того, чтобы все решения СДУ с ПК были устойчивы, необходимо и достаточно, чтобы корни характеристического уравнения имели неположительные вещественные части, а корни с нулевой вещественной частью были простыми.

D: Пусть выполняется условие на вещественные части корней.

$$y = \underbrace{\sum_{k=1}^{n} P_k(t)\cdot e^{-(\alpha_k\pm i\beta_k)t}}_{\text{отрицательные, т.е.}\alpha_k>0} + \underbrace{\sum_{l=1}^{s} C_l e^{\pm i\beta_l t}}_{\alpha_l=0} + y_{\text{ч}}$$

$P_k(t)\cdot e^{-(\alpha_k\pm i\beta_k)t} = P_k(t)e^{-\alpha_k t}e^{\pm i\beta_k t}$

при $t\to\infty$:

$$\begin{cases} P_k(t)e^{-\alpha_k t}\to 0\\ e^{\pm i\beta_k t} \text{ — ограничено}\\ C_l e^{\pm i\beta_l t} \text{ — ограничено}\end{cases}$$

Таким образом решения ОСДУ ограничены $\Rightarrow$ решения ОСДУ устойчивы $\Rightarrow$ решения НСДУ устойчивы

Th 4 Если все корни характеристического уравнения имеют отрицательные вещественные части, то все решения данной системы ассимптотически устойчивы.

D: $e^{-(\alpha_k\pm i\beta_k)t} = e^{-\alpha_k t}\cdot e^{\mp i\beta_k t}$

$y = \sum\limits_{k=1}^{n}\underbrace{P_k(t)e^{-\alpha_k t}}_{\to 0}\underbrace{e^{\mp i\beta_k t}}_{\text{огранич.}} + y_{\text{ч}} \Rightarrow y\to 0$, таким образом, решение ассимптотически устойчиво.

Th 5 Если среди корней характеристического уравнения имеется хотя бы один корень с положительной вещественной частью, то все решения данной СДУ неустойчивые.

$\underline{\text{D}}$: выберем хотя бы один корень с положительной вещественной частью:

$y = \underbrace{P(t)e^{(\alpha \pm i\beta)t}}_{\text{неогранич.}} + y_{\text{ост.}}$

Таким образом y — неограничено $\Rightarrow$ решения неустойчивы.

Пример:

$$\begin{cases} \dot{x} = (2-a)x + 2y + f_1(t) \\ \dot{y} = -ax + f_2(t) \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} 2-a-\lambda & 2 \\ -a & -\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\lambda^2 - (2-a)\lambda + 2a = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{2-a \pm \sqrt{(2-a)^2 - 8a}}{2}$$

1) $a = 2$ — устойчивы (по Th 3)

2) $a > 2$ — ассимптотическая устойчивость (по Th 4)

   $2 - a \overset{?}{>} \sqrt{(2-a)^2 - 8a}$

   $(2-a)^2 \overset{?}{>} (2-a)^2 - 8a$

   $0 \overset{?}{>} 8a$ — верно при данных $a \Rightarrow$ отрицательная вещественная часть

3) $a < 2$ — неустойчивы

Исследование устойчивости решений СДУ вида $\dfrac{dy}{dt} = f(t, y)$ по первому приближению

$$\xi(t, \xi_0): \quad \frac{d\xi}{dt} = f(t, \xi)$$

$$y = z + \xi$$

$$\frac{dz}{dt} + \frac{d\xi}{dt} = f(t, z + \xi)$$

$$\frac{dz}{dt} = f(t, z + \xi) - f(t, \xi)$$

z — нулевое решение для $y = \xi$. Таким образом $\dfrac{dz}{dt} = Az + \varphi(t, z)$

Th 6 об устойчивости по первому приближению

Для того, чтобы нулевое решение СДУ $\dfrac{dz}{dt} = Az + \varphi(t, z)$ [а с ним и $\xi(t, \xi_0)$] было устойчивым, необходимо и достаточно, чтобы корни характеристического уравнения системы $\dfrac{dz}{dt}$ имели отрицательные вещественные части и, кроме того, $\exists M > 0, \alpha \in (0, 1): \quad |\varphi(t, z)| \leqslant M|z|^\alpha$

Th 7 Для того, чтобы нулевое решение $\dfrac{dz}{dt} = Az + \varphi(t, z)$ было неустойчивым, достаточно, чтобы среди корней характеристического уравнения системы $\dfrac{dz}{dt}$ был хотя бы один корень с положительной вещественной частью и выполнялось условие: $\exists M > 0, \alpha \in (0, 1): \quad |\varphi(t, z)| \leqslant M|z|^\alpha$

Следствие Для того, чтобы удовлетворялось дополнительное условие в Th 6 и Th 7 относительно $\varphi(t, z)$, достаточно чтобы эта функция $\varphi(t, z) = o(z^2)$.

Пример:

$$\frac{dz}{dt} = \begin{cases} \dot{x} = -8x + 7y + sin\ x^3 - 3y^4 + x^2 e^{y^3} \\ \dot{y} = x - 2y - x^2 sin\ y + 2y^3 \end{cases}$$

$$\varphi(t, x, y) = o(x^2 + y^2)$$

$$\begin{vmatrix} -8-\lambda & 7 \\ 1 & -2-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\lambda^2 + 10\lambda + 9 = 0$$

$$\left[\begin{array}{l} \lambda_1 = -1 \\ \lambda_2 = -9 \end{array} \right. \Rightarrow \text{решение устойчиво}$$

Пример:

$$\begin{cases} \dot{x} = 1 - 2z - x + \ldots \\ \dot{y} = 4x + y \\ \dot{z} = 2x + y - z + \ldots \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} -1-\lambda & 1 & -2 \\ 4 & 1-\lambda & 0 \\ 2 & 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(1-\lambda)^2(1+\lambda) = 0$$

$$\left[\begin{array}{l}\lambda_1 = 1\\ \lambda_2 = 1\\ \lambda_3 = -1\end{array}\right. \Rightarrow \text{решение неустойчивое}$$

Алгоритмы методов определения устойчивости нулевого решения СДУ или ДУВП

I ***Метод функций Ляпунова***

$V(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — знакоопределенная, если $\forall x, V \leqslant 0$ или$V \geqslant 0$, причем $V(0) = 0$

Например, $V = x_1^2 + (x_2 - x_3)^2$ — знакопостояннаяи обращается в 0 при различных x_1, x_2, x_3

$\dfrac{dx}{dt} = f(x)$

$\dfrac{dx_i}{dt} = f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$

полная производная функции Ляпунова имеет вид (в силу системы):

$\dfrac{dV}{dt} = \dfrac{\partial V}{\partial x_1}\dfrac{dx_1}{dt} + \dfrac{\partial V}{\partial x_2}\dfrac{dx_2}{dt} + \ldots + \dfrac{\partial V}{\partial x_n}\dfrac{dx_n}{dt}$

$\dfrac{dV}{dt} = \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{\partial V}{\partial x_i}\dfrac{dx_i}{dt} = \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{\partial V}{\partial x_i} f_i$

Th 1(8) Пусть в рассматриваемой области G, куда обязательно входит нулевая точка, $\exists V(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, знакоопределенная в данной области. И пусть в этой области $\dfrac{dV}{dt}$ является знакопостоянной функцией знака, противоположного знаку функции V, или $\dfrac{dV}{dt} \equiv 0$

Пример:

$\begin{cases}\dot{x} = y\\ \dot{y} = -x\end{cases}$

$V = x^2 + y^2 > 0$

$\dfrac{dV}{dt} = 2xy + 2y(-x) = 0$

Th 2(9) Пусть в рассматриваемой области $G \quad \exists V(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — знакоопределенная, $V(0) = 0$ и пусть $\dfrac{dV}{dt}$ тоже знакоопределенная и $\left.\dfrac{dV}{dt}\right|_{x=0} = 0$ и имеет знак, противоположный функции V. Тогда нулевое решение системы $\dfrac{dx}{dt} = f$ ассимптотически устойчиво.

Пример:

$$\begin{cases} \dot{x} = y - x^3 \\ \dot{y} = -x - y^3 \end{cases}$$

$V = x^2 + y^2 > 0$

$\dfrac{dV}{dt} = 2x \cdot \dot{x} + 2y \cdot \dot{y} = 2xy - 2x^4 - 2xy - 2y^4 = -2(x^4 + y^4) < 0$

Замечание (о выборе функции Ляпунова)

$V = ax^2 + by^2$

$V = ax^4 + by^4$

$V = ax^2 + by^4$

...

основной критерий: четные степени

Пример:

$$\begin{cases} \dot{x} = -x - 2y + x^2y^2 \\ \dot{x} - \dfrac{y}{2} - \dfrac{yx^3}{2} \end{cases}$$

$V = ax^2 + by^2 > 0$

$a = 1, b = 2$

$V = x^2 + 2y^2 > 0$

$\dfrac{dV}{dt} = 2ax \cdot \dot{x} + 2by \cdot \dot{y} = -2ax^2 - 4axy + 2ax^3y^2 + 2bxy - by^2 - by^2x^3 = -(2ax^2 + by^2) + 2(-2axy + bxy) + (2ax^3y^2 - bx^3y^2)$

с учетом выбранных a и b:

$\dfrac{dV}{dt} = -(2x^2 + 2y^2) + 2(-2xy + 2xy) + (2x^3y^2 - 2x^3y^2) = -2(x^2 + y^2) < 0$

значит, решение ассимптотически устойчиво.

Th 3(10) Пусть в области G $\exists$ дифференцируемая функция V такая, что $V(0) = 0$, $\dfrac{dV}{dt}$ — знакоопределенная в данной области. Тогда, если в некоторой подобласти G_1 (в которой находится нулевое решение) области G знаки V и $\dfrac{dV}{dt}$ совпадают, то нулевое решение неустойчиво.

Прмер:

$$\begin{cases} \dot{x} = x \\ \dot{y} = -y \end{cases}$$

$V = x^2 - y^2$

$\dfrac{dV}{dt} = 2x^2 + 2y^2 > 0$

$G_1 \subset G$

$V|_{G_1 : y=0} = x^2 > 0 \Rightarrow$ решение неустойчиво.

Th 4(11) (теорема Читаева)

Пусть в области G $\exists$ дифференцируемая функция V такая, что $V(0) = 0$, $\dfrac{dV}{dt}$ — знакоопределенная в некоторой подобласти G_1 области G. Тогда, если в G_1 (в которой находится нулевое решение) знаки V и $\dfrac{dV}{dt}$ совпадают, то нулевое решение неустойчиво.

Пример:

$$\begin{cases} \dot{x} = x^5 + y^3 \\ \dot{y} = x^3 + y^5 \end{cases}$$
$$V = x^4 - y^4$$
$$\frac{dV}{dt} = 4x^3 \cdot \dot{x} - 4y^3 \cdot \dot{y} = 4x^8 + 4x^3y^3 - 4x^3y^3 - 4y^8 = 4(x^8 - y^8)$$
$$sign\,(V)\Big|_{G_1:|x|>|y|} = sign\left(\frac{dV}{dt}\right)\Big|_{G_1:|x|>|y|} \Rightarrow \text{нулевое решение неустойчиво}$$

II *Метод Рауса-Гурвица (для ДУВП[ЛО])*

$a_0y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + a_2y^{(n-2)} + \ldots + a_{n-1}y' + a_ny = 0$

характеристическое уравнение:

$a_o\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0$

Матрица Гурвица:

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & \ldots & 0 & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & a_{n-1} & a_{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & a_n \end{pmatrix}$$

Th 12 Для того, чтобы нулевое решение данного уравнения было ассимптотически устойчивым, то есть все корни характеристического уравнения имели отрицательную вещественную часть, необходимо и достаточно, чтобы все главные миноры матрицы Гурвица были положительными.

Пример:

$y^V + 7y^{IV} + 19y^{III} + 25y^{II} + 16y^I + 4y = 0$

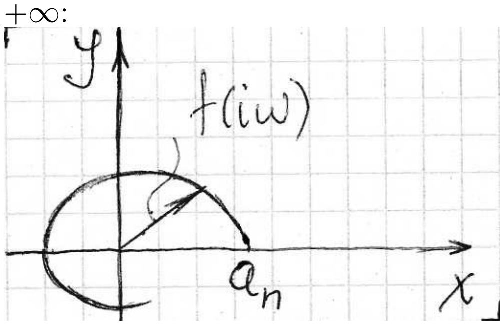
$\lambda^5 + 7\lambda^4 + 19\lambda^3 + 25\lambda^2 + 16\lambda + 4 = 0$

$$\begin{pmatrix} 7 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 25 & 19 & 7 & 1 & 0 \\ 4 & 16 & 25 & 19 & 7 \\ 0 & 0 & 4 & 16 & 25 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$\Delta_1 = 7 > 0$
$\Delta_2 = 7 \cdot 19 - 25 = 108 > 0$
$\Delta_3 > 0$
$\Delta_4 > 0$
$\Delta_5 = 4 \cdot \Delta_4 > 0$

III *Метод Михайлова (ЛОДУВП)*

$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y = 0$
$a_i = const$
$f(\lambda) = a_o \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\lambda + a_n$
$f(i\omega) = u(\omega) + iv(\omega)$
$u(\omega) = a_n - a_{n-2}\omega^2 + a_{n-4}\omega^4 - \ldots$
$v(\omega) = a_{n-1}\omega - a_{n-3}\omega^3 + a_{n-5}\omega^5 - \ldots$
$f(i\omega) = u(\omega) + iv(\omega), \qquad \omega \in (-\infty, +\infty)$
Т.к. $u(\omega)$ — четная функция, то достаточно $\omega \in [0, +\infty)$
Годограф — кривая, очерчиваемая функцией $f(i\omega)$ при изменении ω от 0 до $+\infty$:



Для того, чтобы нулевое решение данного однородного уравнения было ассимптотически устойчивым, т.е. для того, чтобы все корни характеристического уравнения имели отрицательные вещественные части, необходимо и достаточно, чтобы годограф вектора $f(i\omega)$ при изменении ω от 0 до $+\infty$ описывал угол $\varphi = n\dfrac{\pi}{2}$ и при этом $f(i\omega) \neq 0 \forall \omega$.

Алгоритм метода Михайлова:

$\omega \in [0, +\infty), \varphi = (n - 2m)\dfrac{\pi}{2} \qquad \mathbf{(1)}$

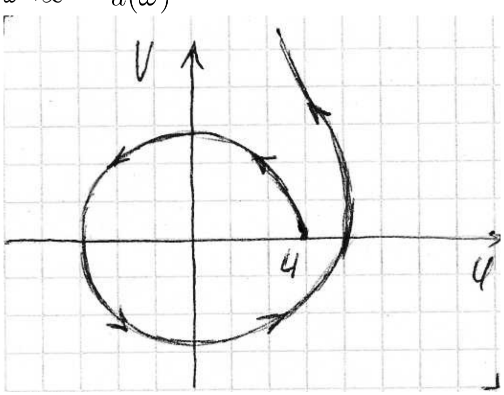
т.е. решается уравнение (1) относительно m, т.к. φ — угол, описываемый годографом, n — порядок уравнения. Отсюда определяется m — число корней с положительной вещественной частью.
Если $m = 0$, то нулевое решение данного уравнения ассимптотически устойчиво.
Если $m > 0$, то нулевое решение данного уравнения неустойчиво.

Пример:

$y^V + 7y^{IV} + 19y^{III} + 25y^{II} + 16y^I + 4y = 0$
$f(\lambda) = \lambda^5 + 7\lambda^4 + 19\lambda^3 + 25\lambda^2 + 16\lambda + 4$
$f(i\omega) = u(\omega) + iv(\omega)$
$u_0 = 7\omega^4 - 25\omega^2 + 4 = 0$
$v_0 = \omega^5 - 19\omega^3 + 16\omega = 0$
$u : \omega_{1,2}^2 = \dfrac{25 \pm \sqrt{625 - 112}}{14} \to \left[\begin{array}{l} \omega_1^2 \approx 3,4 \\ \omega_2^2 \approx 0,168 \end{array} \right. \to \left[\begin{array}{l} \omega_1 \approx 1,84 \\ \omega_2 \approx 0,4 \end{array} \right. \ (\omega \geqslant 0)$
$v : \omega_{3,4}^2 = \dfrac{19 \pm \sqrt{361 - 64}}{2} \to \left[\begin{array}{l} \omega_1^2 \approx 18,1 \\ \omega_2^2 \approx 0,9 \end{array} \right. \to \left[\begin{array}{l} \omega_1 \approx 4,25 \\ \omega_2 \approx 0,95 \end{array} \right. \ (\omega \geqslant 0)$
$\omega_5 = 0$

ω	0	0,4	0,95	1,84	4,25	$\to \infty$
u	4	0	-	0	+	$\to 0$
v	0	+	0	-	0	$\to \infty$

$\lim\limits_{\omega \to \infty} = \dfrac{v(\omega)}{u(\omega)} = \infty$



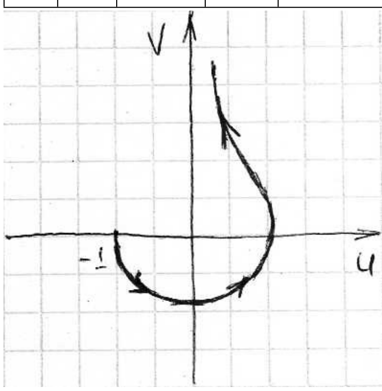
$\varphi = 5\dfrac{\pi}{2} = (5 - 2m)\dfrac{\pi}{2}$
$m = 0 \Rightarrow$ все корни с отрицательными вещественными частями $\Rightarrow$ нулевое решение ассимптотически устойчиво.

Пример:

$y^V + 3y^{IV} + 2y^{III} - 2y^{II} - 4y^I - y = 0$
$f(\lambda) = \lambda^5 + 3\lambda^4 + 2\lambda^3 - 2\lambda^2 - 4\lambda - 1$
$f(i\omega) = u(\omega) + iv(\omega)$
$u(\omega) = -1 + 2\omega^2 + 3\omega^4$
$v(\omega) = -4\omega - 2\omega^3 + \omega^5$
$u(\omega) = 0 :$
$\left[\begin{array}{ll} \omega_1^2 = \dfrac{1}{3} & \to \omega_1 \approx 0,58 \\ \omega_2^2 < 0 & \to \varnothing \end{array} \right.$
$v(\omega) :$

$$\left[\begin{array}{ll} \omega_3 = 0 & \\ \omega_4^2 = 1+\sqrt{5} & \to \omega_4 \approx 1,8 \\ \omega_5^2 < 0 & \to \varnothing \end{array}\right.$$

ω	0	0,58	1,8	$\to +\infty$
u	-1	0	+	$\to 0$
v	0	-	0	$\to +\infty$



$\varphi = 3\dfrac{\pi}{2} = (5-2m)\dfrac{\pi}{2}$
$3 = 5 - 2m$
$m = 1 \Rightarrow 1$ положительный корень $\Rightarrow$ нулевое решение неустойчиво.

Краевые задачи для ДУ

$a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = f(x), \quad x \in [a,b]$

$\begin{cases} \alpha_1 y(a) + \alpha_2 y'(a) = A \\ \beta_1 y(b) + \beta_2 y'(b) = B \end{cases} \quad \leftarrow$ краевое условие

$\alpha_1^2 + \alpha_2^2 \neq 0$

$\beta_1^2 + \beta_2^2 \neq 0$

в операторной форме данная задача записывается в виде:

$L(y) = f(x)$

$\begin{cases} \Gamma_a(y) = A \\ \Gamma_b(y) = B \end{cases}$

условия теоремы Коши выполнены, значит, решение существует.

Если краевое условие задано в двух точках, то краевая задача называется «двуточечной», если в большем числе точек, то — «многоточечной».

Методы решения краевых задач:

1. Точные (аналитические)
2. Приближенные
   а) приближенно-аналитические
   б) численные

Аналитические методы решения краевых задач

I Общий аналитический метод

1. Решаем уравнение. Получаем решение, зависящее от двух произвольных постоянных.
2. Используя краевые условия, находим значения произвольных постоянных.

Пример:

$y'' + y = 0, \quad y(0) = 0, y(b) = B$
$\lambda^2 + 1 = 0$
$\lambda = \pm i$
$y = C_1 sin\ x + C_2 cos\ x$
$y(0) = 0 \Rightarrow 0 = C_1 \cdot 0 + C_2 \cdot 1 \Rightarrow C_2 = 0$
$y = C_1 \cdot sin\ x$
Рассмотрим различные случаи:

а) $b \neq k\pi$
$B = C_1 sin\ b \Rightarrow C_1 = \dfrac{B}{sin\ b}$
$y = \dfrac{B}{sin\ b} sin\ x$ — единственное решение.

б) $b = k\pi, B = 0$
$0 = C_1 \cdot 0 \Rightarrow \forall C_1$
$y = C_1 sin\ x$ — бесконечное множество решений

в) $b = k\pi, B \neq 0$
$B = C_1 \cdot 0 \Rightarrow \nexists C_1$
нет решений

II Метод функции Грина

$y'' + p(x)y' + q(x) = f(x)$

$\begin{cases} y(a) = A \\ y(b) = B \end{cases}$

$z = y - \dfrac{B - A}{b - a}(x - a) - A$

$z'' + p_1(x)z' + q_1(x)z = f_1(x)$

$\begin{cases} z(a) = 0 \\ z(b) = 0 \end{cases}$ — однородные краевые условия

$z = uv$

$u''v + 2u'v' + 2uv'' + p_1(x)(u'v + uv') + q_1(x)uv = f_1(x)$

по методу Бернулли приводим к виду:

$u'' + q_2 u = f_2(x)$

Вернемся к y-обозначениям:

$y'' + q(x)y = f(x), \qquad y(a) = y(b) = 0$

1) $y'' + q(x)y = 0$

   $\begin{cases} y(a) = 0 \\ y'(a) = k_1 \neq 0 \end{cases}$

   $y_1(x)$ удовлетворяет краевым условиям

2) $y'' + q(x)y = 0$

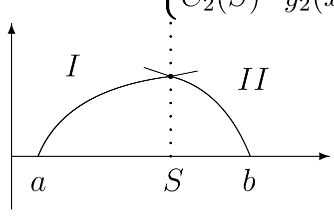
   $\begin{cases} y(b) = 0 \\ y'(b) = k_2 \neq 0 \end{cases}$

   $y_2(x)$ удовлетворяет краевым условиям

Алгорнитм проверки данного условия:

$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} \neq 0$ — условие независимости y_1 и y_2

$G(x, S) = \begin{cases} C_1(S) \cdot y_1(x), & a \leqslant x \leqslant S \\ C_2(S) \cdot y_2(x), & S \leqslant x \leqslant b \end{cases}$



$I - C_1(S)y_1(x)$

$II - C_2(S)y_2(x)$

$C_1(S)y_1(x) = C_2(S)y_2(x)$ — точка, в которой совпадают левая и правая кривые

Т.к. $W(x) \neq 0$, то не будет гладкого перехода в S (касательные не равны)

$$\begin{cases} C_2(S) \cdot y_2'(S) - C_1(S) \cdot y_1'(S) = 1 \\ C_2(S) \cdot y_2(S) - C_1(S) \cdot y_1(S) = 0 \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} y_2(S) & -y_1(S) \\ y_2'(S) & -y_1'(S) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1(S) & y_2(S) \\ y_1'(S) & y_2'(S) \end{vmatrix} = W(S) \neq 0$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & -y_1(S) \\ 1 & -y_1'(S) \end{vmatrix} = y_1(S)$$

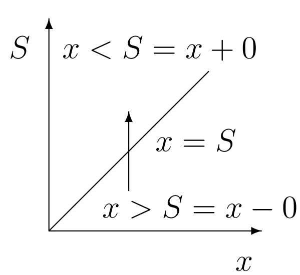
$$\Delta = \begin{vmatrix} y_2(S) & 0 \\ y_2'(S) & 1 \end{vmatrix} = y_2(S)$$

$$C_2(S) = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{y_1(S)}{W(S)}$$

$$C_1(S) = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{y_2(S)}{W(S)}$$

$$G(x,S) = \begin{cases} \dfrac{y_1(x)y_2(S)}{W(S)} \\ \dfrac{y_1(S)y_2(x)}{W(S)} \end{cases}$$

Свойства функции Грина:

1. функция непрерывна по x и по S на всем отрезке $[a,b]$
2. удовлетворяет краевым условиям: $G(a,S) = G(b,S) = 0$
3. $G''(x,S) + q(x) \cdot G(x,S) = 0$
   т.к. на $[a,S]$ этому условию удовлетворяет y_1, на $[S,b]$ этому условию удовлетворяет y_2
4. 

   $G_x'(x, x-0) - G_x'(x, x+0) = 1$

Решением краевой задачи будет:

$$y = \int_a^b G(x,S) \cdot f(S) dS, \qquad y(a) = y(b) = 0$$

$$y'' + q(x)y = f(x)$$

Подставим полученное решение в данное уравнение.
Сперва найдем вторую производную:

$y' = \int\limits_a^b G'_x(x,S)f(S)dS = \int\limits_a^x G'_x(x,S)f(S)dS + \int\limits_x^b G'_x(x,S)f(S)dS$

$y'' = G'_x(x,x-0)f(x) - G'_x(x,x+0)f(x) + \int\limits_a^x G''_{xx}(x,S)f(S)dS + \int\limits_x^b G''_{xx}(x,S)f(S)dS =$

$= \underbrace{[G'_x(x,x-0) - G'_x(x,x+0)]}_{=1} + \int\limits_a^b G''_{xx}f(S)dS$

Подставляем:

$f(x) + \int\limits_a^b G''_{xx}(x,S)f(S)dS + q(x)\int\limits_a^b G(x,S)f(S)dS = f(x)$

$\int\limits_a^b \underbrace{[G''_{xx}(x,S) + q(x)G(x,S)]}_{=0\text{по св-ву ф-ции Грина}} f(S)dS = 0$

$0 = 0$ — верно, значит, полученная нами функция действительно является решением исходного уравнения.

Пример:

$y'' + y = 1, \qquad y(0) = y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$

Составляем функцию Грина:

$y'' + y = 0$

$\lambda^2 = -1$

$y = C_1 cos\ x + C_2 sin\ x$

Используем условия $y(0) = 0, y'(0) = 1$:

$y_1 = sin\ x$

Используем условия $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0, y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$:

$y_2 = cos\ x$

Проверим, применим ли здесь метод функции Грина:

$W(x) = \begin{vmatrix} sin\ x & cos\ x \\ cos\ x & -sin\ x \end{vmatrix} = -sin^2 x - cos^2 x = -1 \neq 0 \Rightarrow$ метод функции Грина применим.

Построим функцию Грина:

$G(x,S) = \begin{cases} -sin\ x \cdot cos\ S, & 0 \leqslant S \leqslant x \\ -sin\ S \cdot cos\ x, & x \leqslant S \leqslant \frac{\pi}{2} \end{cases}$

$f(S) = 1$

$y = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} G(x,S)f(S)dS = \int\limits_0^x G(x,S)dS + \int\limits_x^{\frac{\pi}{2}} G(x,S)dS = \int\limits_0^x -sin\ x \cdot cos\ SdS + \int\limits_x^{\frac{\pi}{2}} -sin\ S \cdot$
$\cdot cos\ xdS = 1 - sin\ x - cos\ x$

Рассмотрим самый общий вид краевой задачи

$a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = f(x)$

$\begin{cases} \alpha_1 y(a) + \alpha_2 y'(a) = A \\ \beta_1 y(b) + \beta_2 y'(b) = B \end{cases}$

При этом $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 \neq 0$, $\beta_1^2 + \beta_2^2$, $a \neq b$
Коэффициенты предполагаются непрерывными.

Th 1 Если решения вспомогательных начальных задач (для соответствующего однородного уравнения, каждое из которых удовлетворяет соответствующему краевому условию с дополнением этих условий с целью получиения ненулевых решений) таковы, чтор они независимы между собой, т.е. не существует ненулевого решения соответствующего однородного уравнения, удовлетворяющего заданным краевым условиям, то
метод функции Грина применим и дает единственное решение данной краевой задачи:

$$y = \int_a^b G(x, S) f(S) dS$$

Замечание Если решения вспомогательных начальных задач зависимы, т.е. $W(x) = 0$, то существует ненулевое решение соответствующего однородного уравнения, удовлетворяющее данным краевым условиям

Это решение легко получить в виде линейной комбинации полученных решений вспомогательных начальных задач.
Если после подстановки полученного решения в данное уравнение получается справедливое тождество, то такая краевая задача имеет ∞ число решений.
Если же тождество не получается, то краевая задача не имеет решения.

Дополнение при построении $G(x, S)$ $C_1(S)$ и $C_2(S)$ получаются из:
$$C_2(S)y_2(S) - C_1(S)y_1(S) = 0$$
$$C_2(S)y_2'(S) - C_1(S)y_1'(S) = \frac{1}{a_0(S)}$$

Приближенно-аналитические решения краевых задач

$$\begin{cases} L(y) = f(x) \\ \Gamma_a(y) = A \\ \Gamma_b(y) = B \end{cases}$$

Все приближенно-аналитические методы основаны на приближенном нахождении решения в виде:

$y \cong u_0(x) + \sum\limits_{i=1}^{n} c_i u_i(x),$

где $u_i(x), i = \overline{0, n}$ — последовательность независимых функций.

$\Gamma_a(u_0) = A$
$\Gamma_b(u_0) = B$
$\Gamma_a(u_i) = \Gamma_b(u_i) = 0, i = \overline{1, n}$

Запишем уравнение в виде $L(y) - f(x) = 0$:

$L(u_0 + \sum\limits_{i=1}^{n} c_i u_i) - f(x) = R(x, c_1, c_2, \ldots, c_n)$

Наша задача — сделать $R = 0$.

R — невязка, все методы направлены на ее обнуление.

1. **Метод коллокаций**
   На $[a, b]$ выбираем n точек x: x_1, x_2, ..., x_n(точки коллокаций, в которых $R = 0$).
   Все эти точки последовательно подставляем в R. Получаем следующую систему
   $$\begin{cases} R(x_1, c_1, c_2, \ldots, c_n = 0) = 0 \\ R(x_2, c_1, c_2, \ldots, c_n = 0) = 0 \\ \ldots \\ R(x_n, c_1, c_2, \ldots, c_n = 0) = 0 \end{cases}$$

2, 3. **Методы наименьших квадратов:**
   1) интегральный, где $\varphi(c_1, c_2, \ldots, c_n) = \int\limits_a^b R^2(x, c_1, c_2, \ldots, c_n)dx$
   1) точечный, где $\varphi(c_1, c_2, \ldots, c_n) = \sum\limits_{i=1}^{n} R^2(x_i, c_1, c_2, \ldots, c_n)dx$
   $$\begin{cases} \dfrac{\partial \varphi}{\partial c_1} = 0 \\ \dfrac{\partial \varphi}{\partial c_2} = 0 \\ \ldots \\ \dfrac{\partial \varphi}{\partial c_n} = 0 \end{cases}$$

4. **Метод Галёркина**
   (обобщенный ряд Фурье $f(x) = \sum$ из коэфициентов из функций, составляющих полноценную ортогональную систему)
   При применении этого метода функции $u(x)$ должны составлять полную ортогональную систему функций (берем только начало):

$$\begin{cases} \int\limits_a^b R(x, c_1, c_2, \ldots, c_n) u_1(x) dx = 0 \\ \vdots \\ \int\limits_a^b R(x, c_1, c_2, \ldots, c_n) u_n(x) dx = 0 \end{cases}$$

первые коэффициенты ряда Фурье.

Т.о. перемещаемся к концу последовательности, а по Коши, остаток последовательности не превосходит ε(???)

Понятие о численных методах решения краевых задач

$$\begin{cases} y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x) \\ \alpha_1 y(a) + \alpha_2 y(a) = A \\ \beta_1 y(b) + \beta_2 y(b) = B \end{cases}$$

Обозначим $x_0 = a$, $x_n = b$; $h = \dfrac{b-a}{n}$ и $x_i = a + ih$

$$y'_i = \frac{y_{i+1} - y_i}{h}$$

$$y''_i = \frac{y_{i+2} - 2y_{i+1} + y_i}{h^2}$$

$$\frac{y_{i+2} - 2y_{i+1} + y_i}{h^2} + p_k \frac{y_{i+1} - y_i}{h} + q_i y_i = f_i,\ i = \overline{0, n-2} - n - 1 \text{ уравнение}$$

$$\alpha_1 y_0 + \alpha_2 \frac{y_1 - y_0}{h} = A$$

$$\beta_1 y_n + \beta_2 \frac{y_n - y_{n-1}}{h} = B$$

В итоге получаем $n + 1$ уравнение и $n + 1$ y. Решение этого безобразия и есть применение числового метода (метод конечных разностей).

Вместо этого метода на практике применяют метод прогонки, о котором и пойдет речь дальше.

Метод прогонки

$$y_{i+2} + (\underbrace{p_i h - 2}_{m_i}) y_{i+1} + (\underbrace{q_i h^2 - p_i h + 1}_{n_i}) y_i = h^2 f_i$$

i	0	1	2	$\dots$	$n-2$	$n-1$	n
p_i	p_0	p_1	p_2	$\dots$	p_{n-2}	p_{n-1}	p_n
q_i	q_0	q_1	q_2	$\dots$	q_{n-2}	q_{n-1}	q_n
f_i	f_0	f_1	f_2	$\dots$	f_{n-2}	f_{n-1}	f_n
m_i	m_0	m_1	m_2	$\dots$	m_{n-2}	$\times$	$\times$
n_i	n_0	n_1	n_2	$\dots$	n_{n-2}	$\times$	$\times$
C_i	C_0	C_1(по 5,6)	C_2(по 5,6)	$\rightarrow$	C_{n-2}	$\times$	$\times$
d_i	d_0	d_1	d_2	$\rightarrow$	d_{n-2}	$\times$	$\times$
y_i	y_0(по 9)	y_1(по 8)	y_2(по 8)	$\leftarrow$	y_{n-2}	y_{n-1}(по 8)	y_n
x_i	x_0	x_1	x_2	$\dots$	x_{n-2}	x_{n-1}	x_n

$$\underbrace{|y(x) - y_{2n}(x)|}_{\text{точное приближение}} \leqslant \max_i \frac{(y_n(x_i) - y_{2n}(x_i))}{3}$$

Формулы метода прогонки

1. $m_i = p_i h - 2$, $i = \overline{0, n-2}$
2. $n_i = q_i h^2 - p_i h + 1$, $i = \overline{0, n-2}$
   при $i = 0$
   $y_2 + m_0 y_1 + n_0 y_0 = n^2 f_0$
   $\alpha_1 y_0 + \alpha_2 \dfrac{y_1 - y_0}{h} = A$
   $y_1 = C_0(d_0 - y_2)$
3. $C_0 = \dfrac{\alpha_1 h - \alpha_2}{m_0(\alpha_1 h - \alpha_2) - n_0 \alpha_2}$
4. $d_0 = h^2 f_0 - \dfrac{n_0 h A}{\alpha_1 h - \alpha_2}$
   Предположим по индукции, что
   $y_{i+1} = C_i(d_i - y_{i+2}) \qquad (*)$
   на предыдущем шаге (на $i = 0$ выполн.)
   $y_i = C_{i-1}(d_{i-1} - y_{i+1})$
   $y_{i+2} + m_i y_{i+1} + n_i y_i = h^2 f_i$
5. $C_i = \dfrac{1}{m_i - n_i C_{i-1}}, \quad i = \overline{1, n-2}$
6. $d_i = h^2 f_i - n_i C_{i-1} d_{i-1}, \quad i = \overline{1, n-2}$
   $(*)$ для $i = -2(???)$
   $y_{i-2} = C_{n-2}(d_{n-2} - y_n)$
   $\beta_1 y_n + \beta_2 \dfrac{y_n - y_{n-1}}{n} = B$

7. $y_n = \dfrac{hB + \beta_2 C_{n-2} d_{n-2}}{\beta_1 h + \beta_2 (1 + C_{n-2})}$ формула применяется однократно

8. $y_{i+1} = C_i(d_i - y_{i+2})$, $i = (n-2), (n-3), \ldots, 0$

9. из краевых условий y_0 через y_1
   $y_0 = \dfrac{hA - \alpha_2 y_1}{\alpha_1 h - \alpha_2}$

Всё!)

если найдете опечатки или ошибки — пишите на мыло: graukin@mail.ru или в личку на форуме.