ГЛАВА VI

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ РЯДЫ

§ 27. Основные определения и свойства функциональных рядов и последовательностей

27.1 Основные определения.

Определение 27.1. Последовательность, членами которой являются функции, определенные на некотором множестве X, называется *функциональной последовательностью*.

Определение 27.2. Пусть дана функциональная последовательность $f_1(x),\ f_2(x),\dots f_n(x),\dots$. Формально написанную сумму

$$\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x) + \cdots$$

называют *функциональным рядом*.

При любом значении x из области определения членов ряда, получается числовой ряд, сходимость которого можно исследовать. Напомним, что ряд может сходится как условно, так и абсолютно.

Определение 27.3. Множество X значений x, для которых ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ сходится, называется *областью сходимости ряда*.

По определению области сходимости, для каждого $x \in X$ существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} S_n(x)$, где $S_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} f_k(x)$ - частичные суммы функционального ряда. Тем самым на множестве X определена функция $S(x) = \lim\limits_{n\to\infty} S_n(x)$ — *сумма функционального ряда*.

Пример 27.1. Найти область сходимости функционального ряда $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} x^{n-1}$.

Решение. Этот ряд представляет собой сумму геометрической прогрессии. Область сходимости, причем абсолютной, $|x| < 1$.

Пример 27.2. Найти область сходимости функционального ряда. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}}{n+x^2}$.

Решение. Этот ряд является знакочередующимся и при всех x, очевидно, удовлетворяет условиям признака Лейбница. Поскольку $\dfrac{1}{n+x^2} \sim \dfrac{1}{n}$, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n}$ расходится, то, по признаку сравнения, расходится и ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n+x^2}$. Итак, ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}}{n+x^2}$ сходится условно на $\mathbf{R}$.

Определение 27.4. Функциональная последовательность $f_n(x),\ n=1,2,...$ называется *равномерно сходящейся* на множестве X к функции $f(x)$, если

$$\forall\varepsilon>0\ \exists n_\varepsilon=n(\varepsilon):\forall n>n_\varepsilon\Rightarrow\left|f(x)-f_n(x)\right|<\varepsilon,\ \forall x\in X\ .$$

В этом случае пишут: $f_n \underset{X}{\rightrightarrows} f$. Сущность равномерной сходимости функциональной последовательности состоит в том, что для любого числа $\varepsilon>0$ можно выбрать такой номер n_ε, зависящий только от заданного $\varepsilon>0$ и не зависящий от выбора точки $x\in X$, что при $n>n_\varepsilon$ графики функций $f_n(x)$ расположены в «ε-полоске», окружающей график функции f (рис. 27.1).

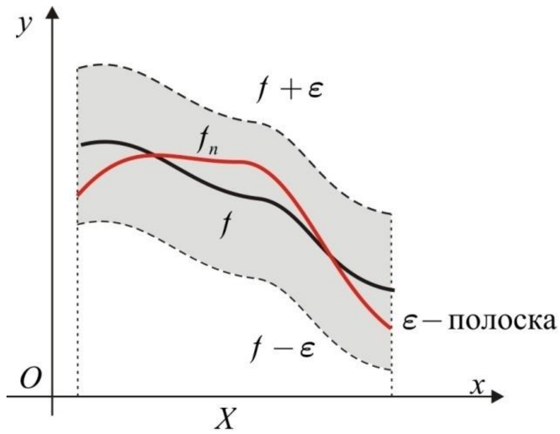

Рис. 27.1

Теорема 27.1 (критерий Коши равномерной сходимости функциональной последовательности). Для того чтобы функциональная последовательность $f_n(x),\ x\in X,\ n=1,2,...$ равномерно сходилась на множестве *X*, необходимо и достаточно, чтобы

$$\forall\varepsilon>0\ \exists n_\varepsilon:\ \forall n>n_\varepsilon,\forall p\in\mathbf{Z},\ p\geq0\ \Rightarrow\ \left|f_{n+p}(x)-f_n(x)\right|<\varepsilon,\ \ \forall x\in X\ .$$

Доказательство. Пусть последовательность равномерно сходится на множестве X. Тогда, по определению равномерной сходимости, существует функция *f*(*x*) такая, что

$$\forall\varepsilon>0\ \exists n_\varepsilon:\ \forall n>n_\varepsilon\ \Rightarrow\ \left|f_n(x)-f(x)\right|<\frac{\varepsilon}{2},\ \ \forall x\in X\ .$$

Поэтому, если $n>n_\varepsilon$ и $p\in\mathbf{Z},\ p\geq0$, то для всех $x\in X$ получим

$$\left|f_{n+p}(x)-f_n(x)\right|\leq\left|f_{n+p}(x)-f(x)\right|+\left|f(x)-f_n(x)<\varepsilon\right|.$$

Пусть теперь выполняется условие, данное в условии теоремы. Тогда при любом фиксированном $x\in X$ числовая последовательность $f_n(x),\ n=1,2,...$ удовлетворяет критерию Коши сходимости числовой последовательности. Следовательно, при любом $x\in X$ существует предел $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)$. Покажем, что функциональная последовательность $f_n(x),\ n=1,2,...$ сходится равномерно к функции $f(x)$ на множестве *X*. По условию теоремы

$$\forall\varepsilon>0\ \exists n_\varepsilon:\ \forall n>n_\varepsilon,\forall p\in\mathbf{Z},\ p\geq0\ \Rightarrow\ \left|f_{n+p}(x)-f_n(x)\right|<\frac{\varepsilon}{2},\ \ \forall x\in X\ .$$

Заметив, что $f(x) = \lim\limits_{p\to\infty} f_{n+p}(x)$, перейдем к пределу в неравенстве $\left|f_{n+p}(x) - f_n(x)\right| < \dfrac{\varepsilon}{2}$ при $p \to \infty$. Тогда для всех $n > n_\varepsilon$ и всех $x \in X$ получим $\left|f(x) - f_n(x)\right| \le \dfrac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$. Следовательно, $f_n \underset{X}{\overset{\rightarrow}{\rightarrow}} f$. ■

Определение 27.5. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ называется *равномерно сходящимся* на множестве X, если на этом множестве равномерно сходится функциональная последовательность его частичных сумм $S_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} f_k(x)$.

Итак, данное определение означает, что на множестве X определена функция $S(x)$ такая, что $S_n \underset{X}{\overset{\rightarrow}{\rightarrow}} S$. Заметим, что $r_n(x) = S(x) - S_n(x) = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x)$. Следовательно, условие $S_n \underset{X}{\overset{\rightarrow}{\rightarrow}} S$ можно переписать в эквивалентной форме $r_n \underset{X}{\overset{\rightarrow}{\rightarrow}} 0$.

Из теоремы 27.1 получаем критерий Коши равномерной сходимости функционального ряда.

Теорема 27.2. Для того чтобы функциональный ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ равномерно сходился на множестве X, необходимо и достаточно, чтобы

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_\varepsilon :\ \forall n > n_\varepsilon,\ \forall p \in \mathbf{Z},\ p \ge 0\ \Rightarrow \left|\sum_{k=n}^{n+p} f_k(x)\right| < \varepsilon,\quad \forall x \in X .$$

Пример 27.3. Исследовать на равномерную сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} x^{n-1}$ на (-1;1).

Решение. Заметим, что $\left|S(x) - S_n(x)\right| = \left|\sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} x^{k-1}\right| = \dfrac{|x|^n}{1-x}$. Пусть $x_n = 1 - \dfrac{1}{n}$. Тогда $\left|S(x_n) - S_n(x_n)\right| = n\left(1 - \dfrac{1}{n}\right)^n$. Поскольку $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(1 - \dfrac{1}{n}\right)^n = +\infty$, то для любого числа N мы всегда найдем номер $n > N$ и точку $x_n = 1 - \dfrac{1}{n} \in (-1;1)$, для которых $\left|S(x_n) - S_n(x_n)\right| > 1$. Следовательно, данный ряд не сходится равномерно на $(-1;1)$.

Пример 27.4. Исследовать на равномерную сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}}{n + x^2}$ на всей числовой прямой.

Решение. Остаток сходящегося знакочередующегося ряда не превышает по модулю первого отброшенного члена, поэтому $\left|\sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^{k+1}}{k + x^2}\right| < \dfrac{1}{n+1+x^2} < \dfrac{1}{n+1}$. Очевидно, что модуль остатка ряда может стать сколь угодно малым при достаточно большом n. Итак, этот ряд сходится равномерно на всей числовой прямой.

Пример 27.5. Исследовать последовательность на равномерную сходимость в указанном промежутке $f_n(x)=\dfrac{2nx}{1+n^2x^2}$, $x\in[0;1]$.

Решение. Как легко видеть $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2nx}{1+n^2x^2}=0$, $\forall x\in[0;1]$. Пусть $r_n(x)=f_n(x)-f(x)$. Найдем $\max\limits_{[0;1]}|r_n(x)|$. Имеем

$$r_n'(x)=f_n'(x)=\left(\frac{2nx}{1+n^2x^2}\right)'=\frac{2n\left(1+n^2x^2\right)-2nx2n^2x}{\left(1+n^2x^2\right)^2}=\frac{2n-2n^3x^2}{\left(1+n^2x^2\right)^2}.$$

При $x=\dfrac{1}{n}$ производная $r_n'(x)$ равна нулю и меняет свой знак с плюса на минус при переходе через эту точку. Следовательно, $\max\limits_{[0;1]}|r_n(x)|=r_n\left(\dfrac{1}{n}\right)=1$. Отсюда ясно, что последовательность не сходится равномерно на отрезке $[0;1]$, поскольку для $\varepsilon=1/2$ при любом натуральном n существует $x_n=\dfrac{1}{n}\in[0;1]$, для которой $\left|r_n\left(x_n\right)\right|=1\geq\varepsilon$.

27.2. Признаки равномерной сходимости функциональных рядов

Теорема 27.3. (Признак Вейерштрасса равномерной сходимости). Если для каждого члена $f_n(x)$ ряда $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ существует число $c_n>0$ такое, что

$$|\ f_n(x)\ |\leq c_n,\ \ \forall x\in X,$$

причем числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} c_n$ сходится, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ сходится равномерно и абсолютно на *X*.

Доказательство. Так как числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} c_n$ сходится, то

$$\forall\varepsilon>0\ \ \exists N=N(\varepsilon):\ \forall n>N\ \Rightarrow\ \sum_{k=n+1}^{+\infty} c_n<\varepsilon.$$

Следовательно,

$$\left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x)\right|\leq\sum_{k=n+1}^{+\infty}|f_k(x)|\leq\sum_{k=n+1}^{+\infty} c_n<\varepsilon,\ \ \forall x\in X.$$

Таким образом, по определению, ряд сходится равномерно на X. ■

Прежде чем рассматривать два других признака мы рассмотрим так называемое *преобразование Абеля*. Пусть дана сумма $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k b_k$. Введем обозначение $B_k=\sum\limits_{i=1}^{k} b_i$. Тогда $b_k=B_k-B_{k-1}$, $k=2,3,\ldots$. Следовательно, данную сумму можно представить в виде

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k=a_1B_1+a_2(B_2-B_1)+\ldots+a_n(B_n-B_{n-1})=$$
$$=B_1(a_1-a_2)+B_2(a_2-a_3)+\ldots+B_{n-1}(a_{n-1}-a_n)+a_nB_n.$$

Это и есть преобразование Абеля.

Лемма 27.1. Если $a_i \le a_{i+1},\ i=1,2,...$ или $a_i \ge a_{i+1},\ i=1,2,...$ и, кроме того, $\left|b_1+...+b_k\right| \le B,\ k=1,2,...$, то $\left|\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right| \le B(|a_1|+2|a_n|)$.

Доказательство. По условию леммы, все разности $a_i - a_{i+1},\ i=1,2,...$ одного знака, поэтому

$$\left|\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right| = \left|B_1(a_1-a_2)+B_2(a_2-a_3)+...+B_{n-1}(a_{n-1}-a_n)+a_n B_n\right| \le$$
$$\le |B_1||a_1-a_2|+|B_2||a_2-a_3|+...+|B_{n-1}||a_{n-1}-a_n|+|a_n||B_n| \le$$
$$\le B\left(\sum_{i=1}^{n-1}|a_i-a_{i+1}|+|a_n|\right) = B\left(|a_1-a_n|+|a_n|\right) \le B\left(|a_1|+2|a_n|\right). \ ■$$

Теперь мы готовы доказать следующие признаки равномерной сходимости.

Теорема 27.4 (Дирихле). Пусть дан ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n(x) b_n(x)$, в котором функции $a_n(x),\ b_n(x)$ определены на множестве *X* и таковы, что

1) последовательность $a_n(x),\ n=1,2,...$ монотонна при каждом $x \in X$ и равномерно стремится к нулю на *X*;

2) последовательность частичных сумм $B_k(x) = \sum_{i=1}^{k} b_i(x)$ ряда $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n(x)$ ограничена на множестве X.

Тогда ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n(x) b_n(x)$ равномерно сходится на множестве *X*.

Доказательство. По условию существует число *B*>0 такое, что

$$|B_k(x)| = \left|\sum_{i=1}^{k} b_i(x)\right| \le B, \quad \forall x \in X, \quad k=1,2,....$$

Кроме того,

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_\varepsilon :\ \forall n > n_\varepsilon\ \Rightarrow\ |a_n(x)| < \frac{\varepsilon}{6B},\ \forall x \in X.$$

Следовательно, в силу леммы 27.1, получаем

$$\left|\sum_{k=n}^{n+p} a_k(x) b_k(x)\right| \le B \cdot \left(|a_n(x)| + 2|a_{n+p}(x)|\right) < B\left(\frac{\varepsilon}{6B} + 2\frac{\varepsilon}{6B}\right) < \varepsilon,\ \forall x \in X,$$

при всех $n > n_\varepsilon$ и любом целом, неотрицательном *p*. Таким образом, по критерию Коши равномерной сходимости функционального ряда, ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n(x) b_n(x)$ сходится равномерно на множестве *X*. ■

Теорема 27.5 (Абель). Пусть дан ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n(x) b_n(x)$, в котором функции $a_n(x),\ b_n(x)$ определены на множестве *X* и таковы, что

1) последовательность $a_n(x),\ n=1,2,...$ монотонна при каждом $x \in X$ и ограничена на множестве *X*;

2) ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n(x)$ равномерно сходится на множестве X.

Тогда ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n(x)b_n(x)$ равномерно сходится на множестве X.

Доказательство. По условию существует число $M > 0$ такое, что $|a_n(x)| \le M$ для всех $n = 1, 2, \ldots$ и всех $x \in X$. По критерию Коши равномерной сходимости функционального ряда, для любого числа $\varepsilon > 0$ существует натуральное число $n_\varepsilon = n(\varepsilon)$ такое, что при всех $n > n_\varepsilon$ и любых целых неотрицательных числах p выполняется неравенство $\left|\sum_{k=n}^{n+p} b_k(x)\right| < \frac{\varepsilon}{3M}$, для всех $x \in X$. Отсюда, в силу леммы 27.1, имеет место неравенство

$$\left|\sum_{k=n}^{n+p} b_k(x)a_k(x)\right| < \frac{\varepsilon}{3M}\left(|a_n(x)| + 2|a_{n+p}(x)|\right) \le \varepsilon, \quad \forall x \in X.$$

Следовательно, по критерию Коши ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n(x)b_n(x)$ равномерно сходится на X. ■

Пример 27.6. Исследовать ряд на равномерную сходимость в указанном промежутке

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin nx}{n}, \quad x \in \left[\frac{\pi}{6}; \frac{11\pi}{6}\right]$$

Решение. Воспользуемся теоремой 27.4. Последовательность $a_n = \frac{1}{n}$ монотонна и равномерно стремится к нулю на указанном промежутке. Рассмотрим суммы $\sum_{k=1}^{n} \sin kx$.

Заметим, что $\sin\frac{x}{2} \ne 0$. Поэтому

$$\left|\sum_{k=1}^{n} \sin kx\right| = \left|\frac{1}{\sin\frac{x}{2}} \sum_{k=1}^{n} \sin kx \sin\frac{x}{2}\right| = \left|\frac{1}{2\sin\frac{x}{2}} \sum_{k=1}^{n} \left(\cos\left(k - \frac{1}{2}\right)x - \cos\left(k + \frac{1}{2}\right)x\right)\right| =$$

$$= \left|\frac{1}{2\sin\frac{x}{2}} \left(\cos\frac{x}{2} - \cos\frac{3x}{2} + \cos\frac{3x}{2} - \cos\frac{5x}{2} + \ldots + \cos\left(n - \frac{1}{2}\right)x - \cos\left(n + \frac{1}{2}\right)x\right)\right| =$$

$$= \left|\frac{1}{2\sin\frac{x}{2}} \left(\cos\frac{x}{2} - \cos\left(n + \frac{1}{2}\right)x\right)\right| \le \frac{1}{\sin\frac{\pi}{12}}.$$

Следовательно, по теореме 27.4 ряд равномерно сходится на указанном промежутке.

27.3. Свойства равномерно сходящихся функциональных рядов и последовательностей.

Для начала отметим два очевидных свойства равномерно сходящихся рядов.

Лемма 27.2. Если ряды $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n(x)$ и $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n(x)$ равномерно сходятся на множестве X, то для любых чисел $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$ ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\lambda a_n(x) + \mu b_n(x)\right)$ равномерно сходится на множестве X.

Лемма 27.3. Если ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n(x)$ равномерно сходится на множестве X, а функция $g(x)$ ограничена на этом множестве, то ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} g(x) a_n(x)$ равномерно сходится на X.

Теорема 27.6 (непрерывность суммы равномерно сходящегося ряда). Если члены функционального ряда $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ непрерывны в точке $x_0 \in X$ и ряд равномерно сходится на X, то сумма ряда $S(x)$ непрерывна в точке $x_0 \in X$.

Доказательство. Обозначим через $S_n(x)$ частичную сумму функционального ряда $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$. Поскольку все функции $f_n(x)$ непрерывны в точке $x_0 \in X$, то частичная сумма $S_n(x)$ непрерывна в точке x_0. Так как ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ сходится равномерно на множестве X, то

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N = N(\varepsilon):\ \forall n > N \Rightarrow \left|S(x) - S_n(x)\right| < \frac{\varepsilon}{3},\ \forall x \in X .$$

Возьмем произвольное натуральное число $n_0 > N$. Из непрерывности функции $S_{n_0}(x)$ в точке x_0 следует:

$$\exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0:\ \forall x \in X,\ \left|x - x_0\right| < \delta \ \Rightarrow \left|S_{n_0}(x) - S_{n_0}(x_0)\right| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Поэтому, для любого $x \in X,\ \left|x - x_0\right| < \delta$ мы получаем

$$\left|S(x) - S(x_0)\right| \le \left|S(x) - S_{n_0}(x)\right| + \left|S_{n_0}(x) - S_{n_0}(x_0)\right| + \left|S_{n_0}(x_0) - S(x_0)\right| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon .$$

Следовательно, функция $S(x)$ непрерывна в точке x_0. ■

Теорема 27.7 (почленное интегрирование равномерно сходящегося функционального ряда). Если члены функционального ряда $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ непрерывны на отрезке $[a;b]$ и ряд равномерно сходится на этом отрезке, то при любом выборе точки $x_0 \in [a;b]$ функциональный ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} \int_{x_0}^{x} f_n(t)dt$ равномерно сходится на отрезке $[a;b]$, и если $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$, то $\int_{x_0}^{x} S(t)dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_{x_0}^{x} f_n(t)dt,\ x \in [a;b]$.

Доказательство. Пусть $S_n(x)$ - частичные суммы данного функционального ряда. В силу предыдущей теоремы, функция $S(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$, поэтому она интегрируема на этом отрезке. По условию теоремы $S_n \underset{X}{\rightrightarrows} S$. Следовательно,

$$\forall\varepsilon>0\ \exists N=N(\varepsilon):\ \forall n>N\Rightarrow\left|S(x)-S_n(x)\right|<\frac{\varepsilon}{2(b-a)},\ \forall x\in[a;b].$$

Отсюда получаем при любом $n>N$

$$\left|\int_{x_0}^{x}S(t)dt-\sum_{k=1}^{n}\int_{x_0}^{x}f_n(t)dt\right|=\left|\int_{x_0}^{x}S(t)dt-\int_{x_0}^{x}\left(\sum_{k=1}^{n}f_n(t)\right)dt\right|=\left|\int_{x_0}^{x}S(t)dt-\int_{x_0}^{x}S_n(t)dt\right|\le$$

$$\le\left|\int_{x_0}^{x}\left|S(t)-S_n(t)\right|dt\right|\le\frac{\varepsilon}{2(b-a)}\left|x-x_0\right|\le\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon,\ \forall x\in[a;b].$$

Таким образом, $\sum_{k=1}^{n}\int_{x_0}^{x}f_n(t)dt\underset{X}{\rightrightarrows}\int_{x_0}^{x}S(t)dt$. ■

Теорема 27.8 (почленное дифференцирование функционального ряда). Если члены функционального ряда $\sum_{n=1}^{+\infty}f_n(x)$ непрерывно дифференцируемы на $[a;b]$, ряд $\sum_{n=1}^{+\infty}f_n(x)$ сходится в точке $x_0\in[a;b]$, а ряд $\sum_{n=1}^{+\infty}f_n'(x)$ сходится равномерно на отрезке $[a;b]$, то ряд $\sum_{n=1}^{+\infty}f_n(x)$ сходится равномерно на отрезке $[a;b]$, его сумма непрерывно дифференцируема на отрезке $[a;b]$ и имеет место равенство $\left(\sum_{n=1}^{+\infty}f_n(x)\right)'=\sum_{n=1}^{+\infty}f_n'(x)$.

Доказательство. Пусть $\sigma(x)$ – это сумма ряда $\sum_{n=1}^{+\infty}f_n'(x)$. По теореме 27.6 $\sigma\in C[a;b]$, а по теореме 27.7 ряд $\sum_{n=1}^{+\infty}\int_{x_0}^{x}f_n'(t)dt=\sum_{n=1}^{+\infty}\left(f_n(x)-f_n(x_0)\right)$ равномерно сходится на отрезке $[a;b]$ и его сумма равна $\int_{x_0}^{x}\sigma(t)dt$. Поскольку, по условию, числовой ряд $\sum_{n=1}^{+\infty}f_n(x_0)$ сходится, то, по лемме 27.2, на отрезке $[a;b]$ равномерно сходится ряд

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\left(f_n(x)-f_n(x_0)\right)+f_n(x_0)\right)=\sum_{n=1}^{+\infty}f_n(x).$$

Обозначим сумму этого ряда $s(x)$. Тогда имеет место равенство

$$\int_{x_0}^{x}\sigma(t)dt=\sum_{n=1}^{+\infty}\left(f_n(x)-f_n(x_0)\right)=s(x)-s(x_0).$$

По свойству интеграла с переменным верхним пределом, функция $s(x)$ имеет производную на отрезке $[a;b]$ и $s'(x)=\sigma(x)$. Поскольку $\sigma\in C[a;b]$, то $s\in C^1[a;b]$. ■

Доказанные теоремы легко перефразировать для функциональных последовательностей.

Теорема 27.9. Если $f_n\underset{X}{\rightrightarrows}f$ и функции f_n непрерывны в точке $x_0\in X$, то f непрерывна в x_0. Следовательно, $\lim_{x\to x_0}\lim_{n\to\infty}f_n(x)=\lim_{n\to\infty}\lim_{x\to x_0}f_n(x)$.

Теорема 27.10. Если $f_n \underset{[a;b]}{\rightrightarrows} f$, $f_n \in C[a;b]$, $n=1,2,...$, то, какова бы ни была точка $x_0 \in [a;b]$, $\int\limits_{x_0}^{x} f_n(t)dt \underset{[a;b]}{\rightrightarrows} \int\limits_{x_0}^{x} f(t)dt$. Следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_{x_0}^{x} f_n(t)dt = \int\limits_{x_0}^{x} \lim\limits_{n\to\infty} f_n(t)dt,\ x\in[a;b]$.

Теорема 27.11. Пусть $f_n \in C^1[a;b]$, $n=1,2,...$ и последовательность f_n, $n=1,2,...$ сходится в точке $x_0 \in [a;b]$, а последовательность производных f_n', $n=1,2,...$ сходится равномерно на отрезке $[a;b]$. Тогда последовательность f_n, $n=1,2,...$ сходится равномерно на отрезке $[a;b]$, ее предел является непрерывно дифференцируемой на $[a;b]$ функцией и $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{df_n(x)}{dx} = \dfrac{d}{dx}\lim\limits_{n\to\infty} f_n(t)$.

Пример 27.7. Исследовать на непрерывность функцию $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{nx}{1+n^5x^2},\ x\in(-\infty;+\infty)$.

Решение. Найдем $\sup\limits_{x\in(-\infty;+\infty)}\left|\dfrac{nx}{1+n^5x^2}\right|$. Если $f_n(x) = \dfrac{nx}{1+n^5x^2}$, то

$$f_n'(x) = \frac{n\left(1+n^5x^2\right) - nx2n^5x}{\left(1+n^5x^2\right)^2} = \frac{n-n^6x^2}{\left(1+n^5x^2\right)^2}.$$

Производная равна нулю при $x = \pm\dfrac{1}{n^{5/2}}$ и, как легко видеть,

$$\sup_{x\in(-\infty;+\infty)}\left|f_n(x)\right| = \left|f_n\left(\frac{1}{n^{5/2}}\right)\right| = \frac{1}{2n^{3/2}} = c_n.$$

Так как числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{n^{3/2}}$ сходится, то, по признаку Вейерштрасса, функциональный ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{nx}{1+n^5x^2}$ сходится равномерно на $(-\infty;+\infty)$. Но члены ряда $f_n(x)$ – непрерывные функции на $(-\infty;+\infty)$, поэтому, по теореме 27.6, функция $f(x)$ непрерывна на $(-\infty;+\infty)$.

27.4. Типовые примеры.

Пример 1. Найти область сходимости функционального ряда $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\ln^n x$.

Решение. Поскольку члены данного ряда представляют собой геометрическую прогрессию, то ряд сходится при $|\ln x|<1$. Откуда найдем, что область сходимости X представляет собой интервал $1/e < x < e$.

Пример 2. Найти область сходимости функционального ряда $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{1+x^n}$.

Решение. Заметим, что

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{1+x^n} = \begin{cases} 1 & ,|x|<1, \\ 0 & ,|x|>1, \\ \dfrac{1}{2} & ,\ x=1\ . \end{cases}$$

Итак, при $|x|<1$ и $x=1$ ряд расходится (по необходимому условию сходимости ряда). При $|x|>1$ применим к ряду $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left|\dfrac{1}{1+x^n}\right|$ признак Даламбера. Найдем

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1/|1+x^{n+1}|}{1/|1+x^n|}=\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{1+x^n}{1+x^{n+1}}\right|=\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{x^n}{x^{n+1}}\right|\left|\frac{1/x^n+1}{1/x^{n+1}+1}\right|=1/|x|.$$

Следовательно, при $|x|>1$ данный ряд сходится абсолютно.

Пример 3. Найти область сходимости функционального ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(x-2)^n}{\sqrt{n+1}}$.

Решение. Используем признак Даламбера:

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{(x-2)^{n+1}/\sqrt{n+2}}{(x-2)^n/\sqrt{n+1}}\right|=|x-2|\lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+2}}=|x-2|\lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt{n}\sqrt{1+1/n}}{\sqrt{n}\sqrt{1+2/n}}=|x-2|.$$

Данный ряд будет сходится, причем абсолютно, если $|x-2|<1$, находим отсюда $-1<x-2<1$ или $1<x<3$.

Как известно, признак Даламбера не дает ответ, если $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=1$, поэтому проверим сходимость ряда при $|x-2|=1$, т.е. при $x=1, x=3$. При $x=3$ имеем ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n+1}}$. Так как $\dfrac{1}{\sqrt{n+1}}\sim\dfrac{1}{\sqrt{n}}$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n+1}}$ расходится. При $x=1$ получаем знакочередующийся ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$, который сходится (условно) по признаку Лейбница. Итак, областью сходимости является полуинтервал $1\le x<3$.

Пример 4. Найти область сходимости функционального ряда $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{3^n}{n^2 2^{nx}}$.

Решение. Используем признак Даламбера:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{3^{n+1}/(n+1)^2 2^{(n+1)x}}{3^n/n^2 2^{nx}}=\frac{3}{2^x}\lim_{n\to+\infty}\frac{n^2}{(n+1)^2}=\frac{3}{2^x}\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^2=\frac{3}{2^x}\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{1+1/n}\right)^2=\frac{3}{2^x}.$$

Ряд будет сходиться, если $3/2^x<1$. Решаем неравенство и находим $x>\log_2 3$. Как известно, признак Даламбера не дает ответ, если $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=1$, поэтому проверим сходимость ряда при $x=\log_2 3$. Получим ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{n^2}$, который сходится. Итак, область сходимости $x\ge\log_2 3$.

Пример 5. Убедиться, что функциональный ряд $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin^2 nx}{n^2}$ сходится равномерно при любых значениях x.

Решение. Верно неравенство $\frac{\sin^2 nx}{n^2} \le \frac{1}{n^2}$, а так как ряд $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$ сходится, то данный ряд сходится равномерно по признаку Вейерштрасса при любых x.

Пример 6. Исследовать функциональный ряд $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x}{((n-1)x+2)(nx+2)}$ на равномерную сходимость в промежутке $0 < x < +\infty$.

Решение. Верно равенство

$$\frac{x}{((n-1)x+2)(nx+2)} = \frac{1}{(n-1)x+2} - \frac{1}{nx+2}.$$

Поэтому частичная сумма $S_n(x) = 1/2 - \frac{1}{nx+2}$, сумма ряда $S(x) = \lim_{n\to\infty} S_n(x) = 1/2$. Следовательно, $\left|S_n(x) - S(x)\right| = \frac{1}{nx+2}$. Если бы ряд равномерно сходился, то

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists N\colon \forall n > N,\ \forall x \in (0;+\infty),\ \ \left|S_n(x) - S(x)\right| < \varepsilon,$$

но, на самом деле,

$$\exists\varepsilon = \frac{1}{3}\ \ \forall N\ \exists n = N+1 > N,\ \exists x_n = \frac{1}{n} \in (0;+\infty):\ \left|S_n(x) - S(x)\right| = \frac{1}{nx_n + 2} = \frac{1}{3}.$$

Таким образом, данный ряд не является равномерно сходящимся.

Пример 7. Исследовать функциональный ряд $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{x+n}$ на равномерную сходимость в промежутке $0 \le x < +\infty$.

Решение. Пусть $S_n(x), S(x)$, соответственно частичная сумма ряда и его сумма. Данный ряд является знакочередующимся и удовлетворяет признаку Лейбница при указанных значениях x. Следовательно, модуль его остатка не превышает модуля первого отбрасываемого члена, т.е. $|S_n(x) - S(x)| < \frac{1}{x+n+1} < \frac{1}{n}$. Поэтому для для любого положительного значения ε находим номер $N > \frac{1}{\varepsilon}$ такой, что при $n > N$ $|S_n(x) - S(x)| < \varepsilon$ сразу для всех x, $0 \le x < +\infty$. Таким образом, данный ряд сходится равномерно.

Пример 8. Доказать равномерную сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+\sqrt{x}} \text{ на отрезке } [0;1].$$

Решение. Будем рассматривать данный ряд как ряд вида $\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n(x)\beta_n(x)$, где $\alpha_n(x) = \left(1+\frac{x}{n}\right)^n$, $\beta_n(x) = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+\sqrt{x}}$. Применим теорему 27.5. Докажем, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\beta_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+\sqrt{x}}$ сходится равномерно на промежутке $[0;+\infty)$, а значит и на отрезке $[0;1]$. Этот ряд сходится на указанном промежутке как знакочередующийся по признаку Лейбница, но сходимость условная и поэтому признак Вейерштрасса неприменим. Однако, пользуясь известной оценкой остатка знакочередующегося ряда (модуль остатка ряда не превосходит модуля своего первого члена), легко получить неравенство $\left|\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{\sqrt{k}+\sqrt{x}}\right| \le \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{x}} \le \frac{1}{\sqrt{n+1}}$. Каково бы ни было $\varepsilon > 0$, найдется номер N, $N = \left[\frac{1}{\varepsilon^2} - 1\right]$ такой, что для всех $n > N$ и всех x из промежутка $[0;+\infty)$ выполняется неравенство $\left|\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{\sqrt{k}+\sqrt{x}}\right| < \varepsilon$. Это и свидетельствует о равномерной сходимости данного ряда в указанном промежутке.

Известно, что последовательность $\left\{\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\right\}$ для любого $x > 0$ монотонно возрастает и имеет пределом число e^x. Поэтому последовательность $\alpha_n(x) = \left(1+\frac{x}{n}\right)^n$ ограничена на отрезке $[0;1]$ числом e и при каждом $x \in [0;1]$ образуют монотонную (возрастающую) последовательность. Отсюда следует, что, по теореме 27.5, данный ряд равномерно на отрезке $[0;1]$.

Задачи для самостоятельного решения.

Найти области сходимости следующих рядов:

1. $\sum_{n=1}^{+\infty}(nx)^n$. 2. $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^{2x-1}}$. 3. $\sum_{n=1}^{+\infty}\ln^n\left(1+x^2\right)$. 4. $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n^3}{x^n}$. 5. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+2)^n}{n\cdot 2^n}$

6. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(3x-4)^n}{3^n}$. 7. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n\cdot x^n}}$. 8. $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n(x-2)^n}$. 9. $\sum_{n=1}^{+\infty}2^n tg\frac{x}{3^n}$.

10. $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(x+n)^p}$. 11. $\sum_{n=1}^{+\infty}\sqrt{\frac{x^n}{n^2+1}}$.

Исходя из определения равномерной сходимости, доказать равномерную сходимость следующих рядов в указанных промежутках:

12. $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^{2n}}{2n-1}$, $(-1;1)$. 13. $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{2^{n-1}\sqrt{1+nx}}$, $[0;10]$.

Пользуясь признаком Вейерштрасса, доказать равномерную сходимость следующих функциональных рядов в указанных промежутках:

14. $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n^2}$, $[-1;1]$. 15. $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{3^n n^3}$, $[-3;3]$. 16. $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos nx}{n^2}$, $(-\infty,+\infty)$.

Исследовать на равномерную сходимость следующие функциональные ряды в указанных промежутках:

17. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{\sin nx}{\sqrt{n}},\ \ [\varepsilon,2\pi-\varepsilon],\, 0<\varepsilon<\pi$.   18. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}2^n\sin\dfrac{1}{x\cdot 3^n},(0;\infty)$.

Доказать непрерывность суммы следующих функциональных рядов в указанных промежутках:

19. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{x+3^n},(-3;\infty)$.   20. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\arcsin\dfrac{1}{n^2+x^2},(-\infty;+\infty)$.

21. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{arctgnx}{\sqrt[4]{n^5+x^6}},\ \ (-\infty;+\infty)$.   22. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{n}{2^{nx}},(0;\infty)$.

Ответы.

1. Ряд сходится в единственной точке $x=0$. **2**. $x>0.5$; для $x>1$ ряд сходится абсолютно, а для $0.5<x\le 1$ – условно. **3.** Сходится абсолютно для $-2<x<-\sqrt{2}$ и $\sqrt{2}<x<2$. **4.** Сходится абсолютно для $|x|>1$. **5.** Сходится абсолютно для $-4<x<0$ и условно для $x=-4$. **6.** Сходится абсолютно для $\dfrac{1}{3}<x<\dfrac{7}{3}$. **7.** $x>1$ и $x\le -1$; для $|x|>1$ сходится абсолютно, а при $x=-1$ – условно. **8.** $-\infty<x\le 1$; $3<x<\infty$; в точке $x=1$ сходимость условная. **9.** Сходится абсолютно при всех $x\ne\pi(2k+1)3^n/2$, где $n\in\mathbf{N}, k\in\mathbf{Z}$. **10.** Сходится абсолютно при $p>1$ и $x\ne k$ $(k=-1,-2,...)$, сходится условно при $0<p\le 1, x\ne k$. **11.** Сходится абсолютно для $0\le x<1$. **17.** Сходится равномерно. **18.** Сходится неравномерно.

§ 28. Степенные ряды

28.1. Интервал сходимости. Характер сходимости степенного ряда.

Определение 28.1. Функциональный ряд вида $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}a_n(x-c)^n$, где $c, a_n\in\mathbf{R}$, а x – действительная переменная, называется степенным.

Замена переменной $y=x-c$ приводит ряд к виду $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}a_n y^n$. Далее будем рассматривать именно такие ряды. Итак, пусть дан ряд $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}a_n x^n$.

Теорема 28.1. (Абеля). Если ряд $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}a_n x^n$ сходится в точке $x_0\ne 0$, то он сходится при всех x, $|x|<|x_0|$, причем абсолютно**.**

Доказательство. Так как ряд $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}a_n x_0^n$ сходится, то, по необходимому признаку сходимости числового ряда, $\lim\limits_{n\to\infty}a_n x_0^n=0$. Следовательно, последовательность $a_n x_0^n$, $n=1,2,...$ ограничена. Поэтому существует число $M>0$ такое, что $|a_n x_0^n|\le M$, $\forall n=0,1,...$. Пусть $|x|<|x_0|$. Тогда

$$\left|a_n x^n\right| = \left|a_n x_0^n\right| \left|\frac{x}{x_0}\right|^n \le M \left|\frac{x}{x_0}\right|^n .$$

Так как ряд $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\left|\frac{x}{x_0}\right|^n$ сходящийся, то ряд $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ сходится абсолютно. ■

Следствие 28.1. Если ряд $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ расходится в точке $x_0 \ne 0$, то он расходится при всех x, $|x| > |x_0|$.

Теорема 28.2. (Абель). Если степенной ряд $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ сходится на интервале $(-R;R)$ и при $x = R$ (при $x = -R$), то ряд сходится равномерно на отрезке $[0;R]$ (на отрезке $[-R;0]$).

Доказательство. По условию числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n R^n$ сходится. Пусть $x \in [0;R]$ Последовательность $\left(\frac{x}{R}\right)^n$, $n = 1,2,...$ монотонна и ограничена. Поэтому, по признаку Абеля равномерной сходимости функционального ряда, ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n x^n = \sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{x}{R}\right)^n \left(a_n R^n\right)$ равномерно сходится на отрезке $[0;R]$. ■

Определение 28.2. Пусть задан ряд $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$. Если R - неотрицательное число или $+\infty$ обладает тем свойством, что при всех x, для которых $|x| < R$, ряд $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ сходится, а при всех x, для которых $|x| > R$, ряд расходится, то R называется *радиусом сходимости* степенного ряда. Интервал $(-R,\ R)$ называется *интервалом сходимости степенного ряда*.

Теорема 28.3. У всякого степенного ряда $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ существует радиус сходимости R. При любом $x, |x| < R$ ряд сходится абсолютно, а на любом отрезке $|x| \le r$, где r фиксировано и $r < R$ ряд сходится равномерно.

Доказательство. Пусть $A = \left\{x:\ x \in [0;+\infty),\ \text{ряд } \sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n x^n \text{ сходится}\right\}$. Заметим, что множество $A \ne \varnothing$, так как $0 \in A$. Пусть $R = \sup A$. Рассмотрим случай $0 < R < +\infty$. В этом случае, если $|y| < R$, то, по определению верхней грани, существует $x \in A$ такой, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n x^n$ сходится и $|y| < x < R$. По теореме Абеля ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n y^n$ сходится абсолютно. Если же $|y| > R$, то выберем число x, $|y| > x > R$. Ясно, что $x \notin A$, поэтому ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n x^n$

расходится. Значит, по следствию 28.1 ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n y^n$ расходится. Таким образом, R – радиус сходимости ряда $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

Пусть теперь $r < R$. Тогда ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n r^n$ сходится абсолютно. Поскольку при $|x| \le r$ имеет место неравенство $|a_n x|^n \le |a_n| r^n$ и числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} |a_n| r^n$ сходится, то, по признаку Вейерштрасса ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n x^n$ сходится равномерно на отрезке $[-r; r]$. ■

Пример 28.1. Найти область сходимости и радиус сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{n^3+2} x^n$.

Решение. Исследуем сходимость по признаку Даламбера для знакопеременных рядов:
$\lim\limits_{n\to+\infty} \left| \frac{(n+1)(n^3+2)x^{n+1}}{((n+1)^3+2)(n+2)x^n} \right| = |x| \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n\left(1+\frac{1}{n}\right)n^3\left(1+\frac{2}{n^3}\right)}{n^3\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^3+\frac{2}{n^3}\right)n\left(1+\frac{2}{n}\right)} = |x|$. Ряд сходится при $|x| < 1$ и расходится при $|x| > 1$. Посмотрим граничные точки $x = 1$ и $x = -1$. При $x = 1$ получаем ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{n^3+2}$. Так как его общий член $\frac{n}{n^3+2} \sim \frac{1}{n^2}$ при $n \to +\infty$, и ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ сходится, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{n^3+2}$ тоже сходится по предельному признаку сравнения. При $x = -1$ получаем ряд знакочередующийся ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n n}{n^3+2}$, который сходится абсолютно. Следовательно, радиус сходимости $R = 1$; область сходимости $|x| \le 1$.

Пример 28.2. Найти область сходимости и радиус сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n \ \cdot 2^n} x^n$.

Решение. Исследуем сходимость по признаку Даламбера для знакопеременных рядов: $\lim\limits_{n\to+\infty} \left| \frac{n \cdot 2^n x^{n+1}}{(n+1)\cdot 2^{n+1} x^n} \right| = |x| \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n \cdot 2^n}{n\left(1+\frac{1}{n}\right)\cdot 2^{n+1}} = |x| \cdot \frac{1}{2}$. Ряд сходится при $|x| < 2$. Исследуем сходимость в точке $x = 2$. Имеем ряд $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n \cdot 2^n} 2^n = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n}$. Полученный ряд является гармоническим, он расходится. Теперь рассмотрим случай $x = -2$. Получаем ряд Лейбница $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$, который сходится условно. Таким образом, радиус сходимости $R = 2$, область сходимости $-2 \le x < 2$.

28.2. Интегрирование и дифференцирование степенного ряда.

Теорема 28.4. Если $R>0$ радиус сходимости степенного ряда $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n(x-x_0)^n$, то

1) функция $f(x)$ имеет в интервале $\left(x_0-R; x_0+R\right)$ производные всех порядков и они находятся из ряда $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n(x-x_0)^n$ почленным дифференцированием;

2) для любого $x\in(x_0-R; x_0+R)$

$$\int\limits_{x_0}^{x} f(t)dt=\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\frac{(x-x_0)^{n+1}}{n+1},$$

т.е. внутри интервала сходимости ряд можно почленно интегрировать;

3) степенные ряды, получающиеся из ряда $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n(x-x_0)^n$ в результате почленного дифференцирования или интегрирования, имеют тот же радиус сходимости, что и сам ряд $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n(x-x_0)^n$.

Пример 28.3. Найти сумму числового ряда $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n2^n}$.

Решение. Применим теорему о возможности почленного дифференцирования степенного ряда:

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n2^n}=\left.\left(\sum_{n=1}^{+\infty} nx^n\right)\right|_{x=\frac{1}{2}}=\left.\left(x\sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1}\right)\right|_{x=\frac{1}{2}}=\left.\left(x\sum_{n=1}^{+\infty}\left(x^n\right)'\right)\right|_{x=\frac{1}{2}}=\left.\left(x\left(\sum_{n=1}^{+\infty} x^n\right)'\right)\right|_{x=\frac{1}{2}}=$$

$$=\left.\left(x\left(\frac{x}{1-x}\right)'\right)\right|_{x=\frac{1}{2}}=\left.\left(x\frac{1-x+x}{(1-x)^2}\right)\right|_{x=\frac{1}{2}}=2.$$

Пример 28.4. Найти сумму ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(n+1)\left(x^2-1\right)^n$.

Решение. Положим $x^2-1=y$ и найдем сумму $S(y)$ степенного ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(n+1)y^n$, сходящегося для $|y|<1$, что нетрудно установить по признаку Даламбера. На основании теоремы 28.4, имеем

$$\int\limits_0^y S(t)\,dt=\sum_{n=0}^{\infty}\int\limits_0^y(n+1)t^n dt=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\left.\frac{t^{n+1}}{n+1}\right|_0^y=\sum_{n=0}^{\infty} y^{n+1}=\frac{y}{1-y}.$$

Отсюда, по свойству интеграла с переменным верхним пределом

$$S(y)=\left(\frac{y}{1-y}\right)'=\frac{1}{(1-y)^2},$$

но $y=x^2-1$, поэтому $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(n+1)\left(x^2-1\right)^n=\frac{1}{\left(2-x^2\right)^2}$.

Разложение имеет место для всех значений x, удовлетворяющих неравенству $\left|x^2-1\right|<1$, то есть для $-1<x^2-1<1$, $0<x^2<2$, откуда $-\sqrt{2}<x<0$ и $0<x<\sqrt{2}$. Эти неравенства и определяют область сходимости данного ряда к сумме $\dfrac{1}{\left(2-x^2\right)^2}$.

28.3. **Ряд Тейлора**

Определение 28.3. Пусть функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0 и имеет в этой точке производные всех порядков. Тогда ряд $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$ называется *рядом Тейлора функции* $f(x)$ в точке x_0. Если $x_0=0$, то ряд Тейлора принято называть рядом *Маклорена*.

Теорема 28.5. Если функция $f(x)$ на интервале $(x_0-R;x_0+R)$ представима рядом $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}a_n(x-x_0)^n$, то $a_n=\dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$.

Доказательство. По теореме 28.4 функция $f(x)$ имеет на интервале $(x_0-R;x_0+R)$ производные всех порядков и

$$f^{(n)}(x)=n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1\cdot a_n+n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot 2\cdot a_{n+1}(x-x_0)+\ldots.$$

Следовательно, $f^{(n)}(x_0)=a_n n!$. ■

Теорема 28.6. (Достаточное условие разложимости функции в степенной ряд). Пусть функция f бесконечно дифференцируема и все ее производные ограничены в совокупности на интервале $(x_0-R;x_0+R)$, т.е. существует число М, что для всех $x\in(x_0-R;x_0+R)$ и всех $n=0,1,\ldots$ выполняется неравенство

$$\left|f^{(n)}(x)\right|\le M$$

Тогда на интервале $(x_0-R;x_0+R)$ функция f раскладывается в ряд Тейлора

$$f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n,\ x\in(x_0-h;x_0+h).$$

Доказательство. По формуле Тейлора имеем

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1},\ x\in(x_0-h;x_0+h),$$

где $\xi=x_0+\theta(x-x_0),\ 0<\theta<1$. Следовательно,

$$\left|f(x)-\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k\right|\le M\frac{\left|x-x_0\right|^{n+1}}{(n+1)!},\ x\in(x_0-h;x_0+h).$$

Поскольку, по признаку Даламбера, ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{\left|x-x_0\right|^{n+1}}{(n+1)!}$ сходится при всех x, то $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\left|x-x_0\right|^{n+1}}{(n+1)!}=0,\ \forall x\in(x_0-R;x_0+R)$. Поэтому ряд $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$ сходится при любом $x\in(x_0-h;x_0+h)$ и его сумма равна $f(x)$. ■

Найдем разложения в ряд некоторых основных элементарных функций.

1. Разложение в ряд функции $f(x)=e^x$. Находим $f(0)=1,\ f'(0)=1,\ f''(0)=1$ и т.д. Ясно, что $f^{(n)}(0)=1$. Поэтому

$$e^x=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n!}=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots.$$

Возьмем произвольное $h>0$ и пусть $x\in[-h,\ h]$. Легко видеть, что все производные функции e^x на отрезке $[-h,\ h]$ ограничены: $e^x\le e^h$. Поэтому по теореме о достаточном условии сходимости ряда Тейлора ряд сходится и именно к e^x. Итак,

$$e^x=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n!}=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots,\ -\infty<x<+\infty.$$

2. $f(x)=\cos x$. Находим $f(0)=1,\ f'(0)=-\sin 0=0,\ f''(0)=-\cos 0=-1,$ и т.д. Легко видеть, что все производные нечетного порядка $2m+1,\ m=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$ при $x=0$ равны 0, а производные четного порядка $2m,\ m=1,\ 2,\ \ldots$ даются формулой $f^{(2m)}(0)=(-1)^m$. Поскольку производные функции $\cos x$ ограничены в совокупности единицей на всей числовой прямой, то

$$\cos x=\sum_{m=0}^{+\infty}\frac{(-1)^m x^{2m}}{(2m)!}=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}\cdots+\frac{(-1)^m x^{2m}}{(2m)!}+\cdots,\ -\infty<x<+\infty.$$

3. $f(x)=\sin x$. Аналогично предыдущему пункту, находим

$$\sin x=\sum_{m=0}^{+\infty}\frac{(-1)^m x^{2m+1}}{(2m+1)!}=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}\cdots+\frac{(-1)^m x^{2m+1}}{(2m+1)!}+\cdots,\ -\infty<x<+\infty.$$

4. $f(x)=\ln(1+x)$. Для построения ряда Тейлора этой функции не будем действовать по определению, как выше, а используем известный ряд и свойства степенных рядов. Итак, рассмотрим степенной ряд $1-x+x^2-x^3+\cdots$. Поскольку члены этого ряда представляют собой геометрическую прогрессию, то сумма ряда равна $\dfrac{1}{1+x}$. Как известно, областью сходимости данного ряда является интервал $-1<x<1$. Используя теорему о почленном интегрировании степенного ряда, найдем

$$\ln(1+x)=\int_0^x\frac{1}{1+t}dt=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots+(-1)^n\frac{x^n}{n}+\ldots,\ -1<x<1.$$

Поскольку ряд сходится условно при $x=1$, то, на основании теоремы Абеля 28.4, можно заключить, что $\ln(1+x)=x-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{x^4}{4}+\ldots+(-1)^n\dfrac{x^n}{n}+\ldots,\ -1<x\le 1.$

5. $f(x)=(1+x)^\alpha$. Приведем без доказательства

$$(1+x)^\alpha=1+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n,\ |x|<1.$$

28.4. Типовые примеры.

Пример 1. Найти область сходимости степенного ряда $\sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{n!}{n+1}x^n$.

Решение. Исследуем ряд на абсолютную сходимость по признаку Даламбера:

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{(n+1)!\ (n+1)\ x^{n+1}}{(n+2)\ \ n!\ \ x^{n}}\right| = |x|\lim_{n\to+\infty}\frac{1\cdot 2\cdot\dots\cdot n\cdot(n+1)\cdot n\left(1+\dfrac{1}{n}\right)}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n\cdot n\cdot\left(1+\dfrac{2}{n}\right)} = +\infty\ .$$

Следовательно, ряд расходится при всех $x \neq 0$. Радиус сходимости равен нулю.

Пример 2. Найти область сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{n}{n+2}x^n$.

Решение. Имеем

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{(n+1)(n+2)x^{n+1}}{(n+3)\,n\,x^{n}}\right| = |x|\lim_{n\to+\infty}\frac{n^2\left(1+\dfrac{1}{n}\right)\left(1+\dfrac{2}{n}\right)}{n\left(1+\dfrac{3}{n}\right)n} = |x|\ .$$

Следовательно, по признаку Даламбера, ряд сходится при $|x|<1$ и расходится при $|x|>1$. Поэтому радиус сходимости равен 1. Посмотрим сходимость в граничных точках $x=1$ и $x=-1$. Нетрудно видеть, что в обоих случаях не выполняется необходимый признак сходимости, т.е. ряд расходится. Итак, область сходимости является интервал $|x|<1$.

Пример 3. Найти область сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{(x+3)^n}{\sqrt{n+1}}$.

Решение. Исследуем ряд на абсолютную сходимость по признаку Даламбера для знакопеременных рядов:

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{\sqrt{n+1}\quad (x+3)^{n+1}}{\sqrt{n+2}\quad (x+3)^{n}}\right| = |x+3|\lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt{n}\sqrt{1+\dfrac{1}{n}}}{\sqrt{n}\sqrt{1+\dfrac{2}{n}}} = |x+3|\,.$$

Ряд сходится при $|x+3|<1$ и расходится при $|x+3|>1$, следовательно, радиус сходимости $R=1$, а интервал сходимости: $(-4;-2)$. Посмотрим сходимость ряда в граничных точках $x=-2$ и $x=-4$. При $x=-2$ получаем расходящийся ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n+1}}$, а при $x=-4$ знакочередующийся ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$, который сходится по признаку Лейбница условно. Итак, область сходимости ряда - это полуинтервал $-4 \le x < -2$.

Пример 4. Найти область сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{x^n}{n^2\ \ 3^n}$.

Решение. Для исследования абсолютной сходимости применим радикальный признак Коши:

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\left|\frac{x^n}{n^2 3^n}\right|} = \left|\frac{x}{3}\right|\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n^2}} = \left|\frac{x}{3}\right|.$$

Следовательно, ряд сходится при $|x|<3$ и расходится при $|x|>3$. Поэтому радиус сходимости $R=3$, а интервал сходимости: $(-3;3)$. При $x=3$ мы получаем сходящийся ряд $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$, а при $x=-3$ ряд $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}$, который сходится абсолютно. Таким образом, область сходимости ряда представляет собой отрезок $[-3;3]$.

Пример 5. Найти область сходимости степенного ряда $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(x-2)^n}{n+2^n}$.

Решение. Заметим, что, используя определение предела функции по Гейне, можно получить значение следующего предела

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2^n}=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{2^x}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{(x)'}{\left(2^x\right)'}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{2^x\ln 2}=0.$$

Поэтому

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{(n+2^n)\quad(x-2)^{n+1}}{(n+1+2^{n+1})\quad(x-2)^n}\right|=|x-2|\lim_{n\to+\infty}\frac{2^n\left(\frac{n}{2^n}+1\right)}{2^{n+1}\left(\frac{n+1}{2^{n+1}}+1\right)}=\frac{|x-2|}{2}\ .$$

Следовательно, по признаку Даламбера, ряд сходится при $|x-2|<2$ и расходится при $|x-2|>2$. Значит, интервал сходимости: $(0;4)$. В граничных точках мы получаем числовые ряды $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n 2^n}{n+2^n}$, $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2^n}{n+2^n}$, которые расходятся по необходимому условию сходимости числового ряда. Итак, область сходимости совпадает с интервалом сходимости.

Пример 6. Найти область сходимости степенного ряда $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{1+n\cdot 2^n}x^n$.

Решение. Исследуем ряд на абсолютную сходимость по признаку Даламбера.

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{(1+n\cdot 2^n)x^{n+1}}{(1+(n+1)\cdot 2^{n+1})x^n}\right|=|x|\lim_{n\to+\infty}\frac{n\cdot 2^n\left(\frac{1}{n\cdot 2^n}+1\right)}{(n+1)\cdot 2^{n+1}\left(\frac{1}{(n+1)\cdot 2^{n+1}}+1\right)}=|x|\cdot\frac{1}{2}\ .$$

Следовательно, ряд сходится при $|x|<2$ и расходится при $|x|>2$. При $x=2$ мы получим ряд $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{1+n\cdot 2^n}2^n$. Поскольку $\frac{1}{1+n\cdot 2^n}2^n=\frac{1}{\frac{1}{2^n}+n}\sim\frac{1}{n}$, то данный ряд расходится по признаку сравнения. При $x=-2$ мы получаем ряд $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{1+n\cdot 2^n}2^n$. Исследуем этот ряд на условную сходимость. Очевидно, что $\lim_{n\to\infty}\frac{2^n}{1+n\cdot 2^n}=0$. Для обоснования не возрастания последовательности $\frac{2^n}{1+n\cdot 2^n}$, рассмотрим функцию $f(x)=\frac{1}{2^{-x}+x}$, $x\geq 1$. Найдем производную $f'(x)=-\frac{1}{(2^{-x}+z)^2}\cdot(-2^{-x}\cdot\ln 2+1)$. Видно, что $f'(x)<0$ при $x\geq 1$. Следовательно, эта функция убывает при $x\geq 1$. Поэтому

$$\frac{2^n}{1+n\cdot 2^n}=f(n)>f(n+1)=\frac{2^{n+1}}{1+(n+1)\cdot 2^{n+1}}.$$

Итак, условия признака Лейбница выполнены, отсюда ряд $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n 2^n}{1+n\,2^n}$ сходится условно. Таким образом, область сходимости ряда - это полуинтервал $-2\le x<2$.

Пример 7. Найти область сходимости степенного ряда $\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{2n}{n+1}\right)^n x^n$.

Решение. Для исследования ряда на абсолютную сходимость применим радикальный признак Коши.

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{2n}{n+1}\right)^n |x|^n}=|x|\lim_{n\to+\infty}\frac{2n}{(n+1)}=2|x|.$$

Ряд сходится при $|x|<\frac{1}{2}$ и расходится при $|x|>\frac{1}{2}$, следовательно, радиус сходимости $R=\frac{1}{2}$. При $x=\frac{1}{2}$ получаем ряд $\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n$, который расходится по необходимому условию сходимости, поскольку $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{-n}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n}=\frac{1}{e}\ne 0.$ При $x=-\frac{1}{2}$ так же не выполняется необходимый признак сходимости. Итак, область сходимости ряда совпадает с интервалом сходимости $\left(-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$.

Пример 8. Разложить функцию e^{-x} в ряд Маклорена, указать область сходимости.

Решение. Для решения достаточно в разложение $e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots$ вместо x подставить $-x$. Получим $e^{-x}=1-x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+(-1)^n\frac{x^n}{n!}+\cdots$. Так как исходный ряд для сходится при $-\infty<x<+\infty$, то и полученный ряд сходится при $-\infty<x<+\infty$.

Пример 9. Разложить функцию $arctg\,x$ в ряд Маклорена, указать область сходимости.

Решение. Найдем производную $(arctg\,x)'=\frac{1}{1+x^2}$. Функцию $\frac{1}{1+x^2}$ рассмотрим как сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии со знаменателем $-x^2$, получим $\frac{1}{1+x^2}=1-x^2+x^4-x^6+\cdots$. Интервал сходимости данного ряда $-1<x<1$. Используем теорему о почленном интегрировании степенного ряда, получим

$$arctg\,x=\int_0^x\frac{1}{1+t^2}dt=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\cdots,\ -1<x<1.$$

По теореме Лейбница полученный ряд сходится условно при $x=\pm1$, тогда, на основании второй теоремы Абеля, заключаем, что $arctg\,x=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\cdots,\ -1\le x\le 1$.

Пример 10. Разложить функцию $\dfrac{1}{x^2+4x+3}$ в ряд Маклорена, указать область сходимости.

Решение. Представим данную рациональную дробь в виде сумму элементарных дробей:

$$\frac{1}{x^2+3x+2}=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+x/2}.$$

Для каждой из дробей мы имеем следующие разложения

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+\cdots,\quad -1<x<1,$$

$$\frac{1}{1+x/2}=1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{2^2}-\frac{x^3}{2^3}+\cdots,\quad -2<x<2.$$

Складываем эти ряды и окончательно получаем

$$\frac{1}{x^2+4x+3}=\frac{1}{2}-\frac{3}{4}x+\frac{7}{8}x^2-\frac{15}{16}x^3+\cdots+\left((-1)^n+\frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+1}}\right)x^n+\cdots,$$

область сходимости $-1<x<1$.

Пример 11. Разложить функцию $\ln(21+x)$ по степеням $x+1$ (т.е. в ряд Тейлора в точке $x_0=-1$).

Решение. Введем новую переменную $z=x+1,\ x=z-1$, подставим в функцию и преобразуем

$$\ln(21+x)=\ln(20+z)=\ln 20+\ln(1+z/20).$$

В ряд Маклорена функции $\ln(1+x)$ вместо x подставим $\dfrac{z}{20}$:

$$\ln(1+\frac{z}{20})=\frac{z}{20}-\frac{z^2}{2\cdot 20^2}+\frac{z^3}{3\cdot 20^3}-\frac{z^4}{4\cdot 20^4}+\cdots.$$

Область сходимости этого ряда $-20<z\le 20$. Отсюда

$$\ln(21+x)=\ln 20+\frac{x+1}{20}-\frac{(x+1)^2}{2\cdot 20^2}+\frac{(x+1)^3}{3\cdot 20^3}-\frac{(x+1)^4}{4\cdot 20^4}+\cdots.$$

область сходимости $-21<x+1\le 19$ или $-22<x\le 18$.

Пример 12. Найти сумму ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^{n+1}}{n(n+1)}$.

Решение. Интервал сходимости данного ряда $(-1;1)$. На основании теоремы о дифференцировании степенных рядов его можно дифференцировать в любой точке интервала $(-1;1)$. Обозначим сумму данного ряда $S(x)$ и выполним дифференцирование дважды:

$$\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{2\cdot 3}+\frac{x^4}{3\cdot 4}+\frac{x^5}{4\cdot 5}+\ldots+\frac{x^{n+1}}{n\cdot(n+1)}+\ldots=S(x),$$

$$x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{4}+\ldots+\frac{x^n}{n}+\ldots=S'(x),$$

$$1+x+x^2+x^3+\ldots+x^{n-1}+\ldots=S''(x).$$

Суммируя полученную бесконечно убывающую при $|x|<1$ геометрическую прогрессию, находим $S''(x)=\dfrac{1}{1-x}$, откуда $S'(x)=\int \dfrac{1}{1-x}dx=-\ln(1-x)+C$.

Постоянную C можно вычислить, зная, что $S'(0)=0$. Следовательно, $0=-\ln(1-0)+C$, откуда $C=0$, то есть $S'(x)=-\ln(1-x)$. Проинтегрируем полученное равенство, найдем $S(x)$, учитывая, что $S(0)=0$.

$$S(x)=-\int \ln(1-x)dx=-x\ln(1-x)-\int \frac{x}{1-x}dx=$$

$$=-x\ln(1-x)-\int \frac{(x-1)+1}{1-x}dx=-x\ln(1-x)-\int\left(-1+\frac{1}{1-x}\right)dx=$$

$$=(1-x)\ln(1-x)+x+C_1.$$

Поскольку $S(0)=0$, то $C_1=0$. Таким образом, сумма данного ряда $S(x)=(1-x)\ln(1-x)+x$. Данный ряд сходится к своей сумме для $|x|<1$.

Заметим, что данный ряд расходится в граничной точке $x=1$ и сходится, по признаку Лейбница, в граничной точке $x=-1$. По второй теореме Абеля, область сходимости данного ряда к функции $(1-x)\ln(1-x)+x$ характеризуется двойным неравенством $-1\le x<1$.

Пример 13. Найти сумму числового ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2^{2n-1}}{(n+2)7^n}$.

Решение. Составим вспомогательный степенной ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2^{2n-1}x^{n+2}}{(n+2)7^n}$ и обозначим его сумму $S(x)$. Легко показать, воспользовавшись признаком Даламбера, что этот ряд сходится к своей сумме в каждой точке $|x|<\dfrac{7}{4}$. Нужно найти $S(1)$. Для этого дифференцируем обе части равенства $S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2^{2n-1}x^{n+2}}{(n+2)7^n}$ по переменной x (это возможно на основании теоремы о дифференцировании степенных рядов) и вычислим сумму ряда производных:

$$S'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{2n-1}(n+2)x^{n+1}}{(n+2)7^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{2n-1}x^{n+1}}{7^n}=\frac{x}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4x}{7}\right)^n=\frac{x}{2}\cdot\frac{\frac{4x}{7}}{1-\frac{4x}{7}}=\frac{2x^2}{7-4x}.$$

Учитывая, что $S(0)=0$, получаем:

$$S(x)=\int_0^x\frac{2t^2}{7-4t}dt=\frac{1}{8}\int_0^x\frac{(16t^2-49)+49}{7-4t}dt=\frac{1}{8}\int_0^x\left(-4t-7+\frac{49}{7-4t}\right)dt=$$

$$=\frac{1}{8}\left(-2t^2-7t-\frac{49}{4}\ln(7-4t)\right)\Bigg|_0^x=\frac{1}{8}\left(-2x^2-7x-\frac{49}{4}\ln(7-4x)\right)+\frac{1}{8}\cdot\frac{49}{4}\ln 7.$$

Тогда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{2n-1}}{(n+2)7^n}=S(1)=\frac{1}{8}\left(-2-7-\frac{49}{4}\ln 3\right)+\frac{49}{32}\ln 7=\frac{49}{32}\ln\frac{7}{3}-\frac{9}{8}.$$

Пример 14. Вычислить интеграл $\int\limits_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}}\frac{\ln(1+x)}{x}dx$ с точностью до 0,001.

Решение. Разложим подынтегральную функцию в ряд Тейлора по степеням x:

$$\frac{\ln(1+x)}{x}=\frac{1}{x}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{n-1}}{n}.$$

Отрезок $\left[\frac{1}{4};\frac{1}{2}\right]$ целиком принадлежит интервалу сходимости полученного ряда, поэтому на нем ряд сходится равномерно, а, следовательно, его можно почленно интегрировать на этом отрезке. Выполняя интегрирование, получаем

$$\int\limits_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}}\frac{\ln(1+x)}{x}dx=\sum_{n=1}^{\infty}\int\limits_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}}(-1)^{n-1}\frac{x^{n-1}}{n}dx=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\left(\frac{x^n}{n^2}\right)\Bigg|_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}}=$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}\left(\left(\frac{1}{2}\right)^n-\left(\frac{1}{4}\right)^n\right)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{2^n-1}{n^2 4^n}.$$

Сумма найденного ряда дает точное значение интеграла. Поскольку ряд удовлетворяет условиям теоремы Лейбница, то

$$\left|\int\limits_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}}\frac{\ln(1+x)}{x}dx-\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\frac{2^k-1}{k^2 4^k}\right|=\left|\sum_{k=n+1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{2^k-1}{k^2 4^k}\right|\le\frac{2^{n+1}-1}{(n+1)^2 4^{n+1}}.$$

Для вычисления значения интеграла с указанной точностью достаточно взять пять членов ряда, так как при этом $\frac{2^6-1}{6^2\cdot 4^6}<0.001$. Производя вычисления, получаем

$$\int\limits_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}}\frac{\ln(1+x)}{x}dx\approx 0.213.$$

Пример 15. Выписать первые пять членов (до x^5) разложения по степеням x функции $f(x)=\frac{\sin 2x}{1-x^2}$.

Решение. Поскольку

$$\sin 2x=2x-\frac{2^3x^3}{3!}+\frac{2^5x^5}{5!}-\frac{2^7x^7}{7!}+\ldots,\ x\in\mathbf{R};$$

$$\frac{1}{1-x^2}=1+x^2+x^4+x^6+\ldots,\ |x|<1,$$

то

$$\frac{\sin 2x}{1-x^2}=\sin 2x\cdot\frac{1}{1-x^2}=\left(2x-\frac{2^3x^3}{3!}+\frac{2^5x^5}{5!}-\frac{2^7x^7}{7!}\ldots\right)\cdot\left(1+x^2+x^4+x^6+\ldots\right)=$$

$$=2x+x^3\left(2-\frac{2^3}{3!}\right)+x^5\left(2-\frac{2^3}{3!}+\frac{2^5}{5!}\right)+\ldots=x+\frac{2}{3}x^3+\frac{14}{15}x^5+\ldots$$

Разложение имеет место для $-1<x<1$.

Пример 16. Разложить в ряд по степеням x функцию $f(x)=\dfrac{e^x}{1-x}$.

Решение. Поскольку

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots,\quad x\in\mathbf{R}$$

и

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+x^4\ldots+x^n+\ldots,\quad x\in(-1;1),$$

то

$$\frac{e^x}{1-x}=e^x\cdot\frac{1}{1-x}=\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots\right)\cdot\left(1+x+x^2+x^3+x^4\ldots+x^n+\ldots\right)=$$

$$=1+(x\cdot 1+1\cdot x)+\left(1\cdot x^2+x^2+\frac{x^2}{2!}\cdot 1\right)+\left(1\cdot x^3+x^3+\frac{x^3}{2!}+\frac{x^3}{3!}\right)+\left(1\cdot x^4+x^4+\frac{x^4}{2!}+\frac{x^4}{3!}+\frac{x^4}{4!}\right)+\ldots$$

$$\ldots+\left(1\cdot x^n+x^n+\frac{x^n}{2!}+\frac{x^n}{3!}+\frac{x^n}{4!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}\right)+\ldots=1+2x+\left(2+\frac{1}{2!}\right)x^2+\left(2+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}\right)x^3+$$

$$+\left(2+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}\right)x^4+\ldots+\left(2+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\ldots+\frac{1}{n!}\right)x^n+\ldots\ .$$

Разложение имеет место для $-1<x<1$.

Пример 17. Разложить функцию $f(x)=\sqrt[3]{x}$ в окрестности точки $x=1$, то есть по степеням $(x-1)$.

Решение. Положим $y=x-1$, тогда $x=1+y$ и, следовательно,

$$\sqrt[3]{x}=\sqrt[3]{1+y}=1+\frac{1}{3}y+\frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)}{2!}y^2+\frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)\left(\frac{1}{3}-2\right)}{3!}y^3+\ldots$$

$$\ldots+\frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)\left(\frac{1}{3}-2\right)\ldots\left(\frac{1}{3}-n+1\right)}{n!}y^n+\ldots=1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{2\cdot 5\cdot 8\cdot\ldots\cdot(3n-4)}{3^n n!}(x-1)^n.$$

Здесь использовано разложение $(1+y)^{\alpha}$ при $\alpha=\dfrac{1}{3}$ (см. раздел 28.4). Так как разложение имеет место при $-1<y<1$, то найденное разложение справедливо при $-1<x-1<1$, то есть при $0<x<2$.

Пример 18. Найти сумму числового ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{1}{3^n(2n)!}$.

Решение. Составим вспомогательный степенной ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n}}{3^n(2n)!}$ и обозначим его сумму $S(x)$. Легко показать, воспользовавшись признаком Даламбера, что этот ряд сходится к своей сумме в каждой точке $x \in \mathbf{R}$. Нужно найти $S(1)$. Заметим, что $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n}}{3^n(2n)!} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)^{2n}}{(2n)!}$ – ряд Тейлора функции $f(x) = \cos\frac{x}{\sqrt{3}}$.

Итак, $S(x) = \cos\frac{x}{\sqrt{3}}$ и $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{3^n(2n)!} = S(1) = \cos\frac{1}{\sqrt{3}}$.

28.5. Задачи для самостоятельного решения.

Найти область сходимости и радиус сходимости следующих степенных рядов:

1. $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n+1}$. 2. $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{5^n}$. 3. $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n(n+3)}$. 4. $\sum_{n=1}^{+\infty}n!x^n$. 5. $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(x-1)^n}{n!}$.

Найти область сходимости следующих степенных рядов:

6. $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}x^n$. 7. $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{3^n x^n}{\sqrt{(4n+1)\cdot 5^n}}$. 8. $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(x-1)^n}{2^n(n+3)}$

9. $\sum_{n=1}^{+\infty}5^n(n^2+1)(x+2)^{2n}$. 10. $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n!(x+10)^n}{n^n}$. 11. $\sum_{n=0}^{+\infty}2^{n^2}(x+2)^{n^2}$.

12. $\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{n+1}{2n+1}\right)^n x^n$. 13. $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(x+5)^{n^2}}{(n+1)^n}$. 14. $\sum_{n=1}^{+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} x^n$.

15. $\sum_{n=0}^{+\infty}(2-x)^n \sin\frac{\pi}{2^n}$. 16. $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{2^n+5^n}$.

Найти суммы следующих рядов и указать области их сходимости к своим суммам:

17. $\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n$. 18. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n x^n}{n}$ 19. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(n+1)x^n}{3^n}$. 20. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x^3-1)^{n+1}}{n+1}$.

Вычислить суммы следующих числовых рядов:

21. $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2^n}{n5^n}$. 22. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$. 23. $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n}{5^{n+1}}$.

Разложить следующие функции в ряд Маклорена и указать области сходимости полученных рядов к своим суммам:

24. $\cos 5x$. 25. $\sin x^2$ 26. $\frac{1}{\sqrt{e^x}}$. 27. $\frac{x^2}{1+x}$.

28. $\frac{e^x-1}{x}$. 29. $\sin^2 x$. 30. $\frac{4x+3}{x^2-3x+2}$.

31. Выписать первые четыре члена (до x^3) разложения по степеням x функции $f(x)=e^{-x}\cdot\cos\sqrt{x}$.

32. Разложить функцию $\ln x$ по степеням $x-1$ (т.е. в ряд Тейлора в точке $x_0=1$).

33. Разложить функцию $f(x)=\sqrt{x}$ в окрестности точки $x=2$, то есть по степеням $(x-2)$.

Следующие интегралы вычислить с точностью до 0,001:

34. $\int\limits_0^{\frac14} e^{-x^2}dx$. 35. $\int\limits_{\frac14}^{\frac12} \dfrac{\cos\frac{x^2}{2}}{x^2}dx$. 36. $\int\limits_0^{\frac14}\sin x^2 dx$.

Ответы.

1. $-1\le x<1, R=1$. **2**. $-5<x<5, R=5$. **3.** $-1\le x\le 1, R=1$. **4.** Ряд сходится в единственной точке $x=0$, $R=0$. **5.** Сходится при всех действительных значениях x, $R=+\infty$. **6.** $-1<x\le 1$. **7.** $-\sqrt{\frac{5}{3}}\le x<\sqrt{\frac{5}{3}}$. **8.** $-1\le x<3$. **9.** $-2-\frac{1}{\sqrt5}<x<-2+\frac{1}{\sqrt5}$. **10.** $-e-10<x<e-10$. **11.** $-2.5<x<-1.5$. **12.** $-2<x<-2$. **13.** $-6\le x\le -4$. **14.** $-e^{-1}<x<e^{-1}$. **15.** $0<x<4$. **16.** $-5<x<5$. **17.** $\frac{1}{(x-1)^2}, |x|<1$. **18.** $-\ln|1-2x|, -\frac12\le x<\frac12$

19. $\frac{9}{(x+3)^2}, |x|<3$. **20.** $-\ln\left|2-x^3\right|, 0<x<\sqrt[3]{2}$. **21.** $\ln\frac53$. **22.** $\frac{\pi}{4}$. **23.** $\frac{1}{16}$. **24.** $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 5^{2n}x^{2n}}{(2n)!}, |x|<\infty$. **25.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^{4n-2}}{(2n-1)!}, |x|<\infty$. **26.** $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^n}{2^n n!}, |x|<\infty$. **27.** $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{n+2}, |x|<1$. **28.** $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{(n+1)!}, |x|<\infty$ (предполагается, что $f(0)=0$). **29.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}2^{2n-1}x^{2n}}{(2n)!}, |x|<\infty$. **30.** $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(7-\frac{11}{2^{n+1}}\right)x^n, |x|<1$. **31.** $1-\frac32 x+\frac{25}{24}x^2-\frac{331}{720}x^3+\ldots$. **32.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}(x-1)^n}{n}, 0<x\le 2$. **33.** $\sqrt2\left[1+\frac{x-2}{4}+\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}(2n-3)!!}{4^n n!}(x-2)^n\right], 0\le x\le 4$. **34.** 0,245. **35.** 1,995. **36.** 0,005.

§ 29. Ряды Фурье.

29.1. Основные определения.

Определение 29.1. Множество функций $\cos\frac{nx\pi}{l}, \sin\frac{nx\pi}{l}, n=1,2,\ldots$ называется *тригонометрической системой*. Ряд вида $\frac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{nx\pi}{l}+b_n\sin\frac{nx\pi}{l}$ называется *тригонометрическим рядом*.

Лемма 29.1. Тригонометрическая система обладает следующими свойствами:

1. Интеграл по отрезку от произведения двух различных функций, входящих в нее, равен нулю (ортогональность системы), т.е.

$$\int_{-l}^{l} \cos\frac{n x\pi}{l}\cdot\cos\frac{m x\pi}{l}dx = 0,\ \int_{-l}^{l} \sin\frac{n x\pi}{l}\cdot\sin\frac{m x\pi}{l}dx = 0\ \ n \neq m;$$

$$\int_{-l}^{l} \cos\frac{n x\pi}{l}\cdot\cos\frac{m x\pi}{l}dx = 0,\ n, m = 0,1,2...;$$

2. $\int_{-l}^{l} \cos^2\frac{n x\pi}{l}dx = \int_{-l}^{l} \sin^2\frac{n x\pi}{l}dx = l,\ n, m = 1,2...$

Доказательство. Поскольку все равенства доказываются аналогично, проверим некоторые из них.

$$\int_{-l}^{l} \cos\frac{n x\pi}{l}\cdot\cos\frac{m x\pi}{l}dx = \frac{1}{2}\int_{-l}^{l}\left(\cos\frac{(n+m)x\pi}{l}+\cos\frac{(n-m)x\pi}{l}\right)dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{l}{n+m}\sin\frac{(n+m)x\pi}{l}\Bigg|_{-l}^{l} + \frac{l}{n-m}\sin\frac{(n-m)x\pi}{l}\Bigg|_{-l}^{l}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{l}{n+m}\big(\sin(n+m)\pi - \sin(n+m)\pi\big) + \frac{l}{n-m}\big(\sin(n-m)\pi - \sin(n-m)\pi\big)\right) = 0.$$

$$\int_{-l}^{l} \cos^2\frac{n x\pi}{l}dx = \int_{-l}^{l} \frac{1+\cos\frac{2n x\pi}{l}}{2}dx = \frac{1}{2}\left(x + \frac{l}{2n\pi}\sin\frac{2n x\pi}{l}\right)\Bigg|_{-l}^{l} = l. \ \blacksquare$$

Теорема 29.1. Пусть функция $f(x)$ является суммой тригонометрического ряда, то есть $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos\frac{n x\pi}{l} + b_n\sin\frac{n x\pi}{l}$ и ряд, стоящий в правой части равенства сходится равномерно на отрезке $[-l;l]$. Тогда $a_0 = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)dx$, $a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n x\pi}{l}dx, n = 1,2,...$, $b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{n x\pi}{l}dx, n = 1,2,....$

Доказательство. Поскольку функциональный ряд сходится равномерно на отрезке $[-l;l]$, то по теореме 27.7, с учетом леммы 29.1, получаем

$$\int_{-l}^{l} f(x)dx = \frac{a_0}{2}\int_{-l}^{l} dx + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\int_{-l}^{l}\cos\frac{n x\pi}{l}dx + b_n\int_{-l}^{l}\sin\frac{n x\pi}{l}dx = a_0 l.$$

Отсюда $a_0 = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)dx$. По лемме 27.3, при любом натуральном *m*, ряд

$$\frac{a_0}{2}\cos\frac{m x\pi}{l} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos\frac{n x\pi}{l}\cos\frac{m x\pi}{l} + b_n\sin\frac{n x\pi}{l}\cos\frac{m x\pi}{l}$$

равномерно сходится на отрезке $[-l;l]$ и его сумма равна $f(x)\cos\frac{m x\pi}{l}$. Снова по теореме 27.7, с учетом леммы 29.1, получаем

$$\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{mx\pi}{l}dx =$$

$$= \frac{a_0}{2}\int_{-l}^{l}\cos\frac{mx\pi}{l}dx + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\int_{-l}^{l}\cos\frac{mx\pi}{l}\cos\frac{nx\pi}{l}dx + b_n\int_{-l}^{l}\cos\frac{mx\pi}{l}\sin\frac{nx\pi}{l}dx = a_m l.$$

Отсюда $a_m = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{mx\pi}{l}dx$. Аналогично доказывается равенство $b_m = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{mx\pi}{l}dx$. ∎

Лемма 29.2. Если функция f имеет период T и при некотором $a \in \mathbf{R}$ интегрируема на отрезке $[a;a+T]$, то при любом $b \in \mathbf{R}$ она интегрируема на отрезке $[b;b+T]$ и $\int_a^{a+T} f(x)dx = \int_b^{b+T} f(x)dx$. Таким образом, интеграл $\int_a^{a+T} f(x)dx$ не зависит от выбора числа $a \in \mathbf{R}$.

Определение 29.2. Пусть $f(x)$ – $2l$–периодическая, абсолютно интегрируемая на промежутке длины периода функция. Тригонометрический ряд $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos\frac{nx\pi}{l} + b_n\sin\frac{nx\pi}{l}$, коэффициенты которого находятся по формулам

$$a_0 = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)dx;\ a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{nx\pi}{l}dx,\ \ b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{nx\pi}{l}dx, n = 1,2,....$$

называется *тригонометрическим рядом Фурье*, а числа a_n и b_n – коэффициентами Фурье функции $f(x)$. Пишут $f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos\frac{nx\pi}{l} + b_n\sin\frac{nx\pi}{l}$. Знак ~ означает в данном случае соответствие: функции сопоставляется ее ряд Фурье.

Если функция $f(x)$ задана и абсолютно интегрируема на полуинтервале $[a;b)$, то, периодически продолжая ее на всю числовую прямую, получим функцию $\overline{f}(x)$, которая является $2l$ - периодической функцией, $l = \frac{b-a}{2}$. Функции $\overline{f}(x)$ можно сопоставить ряд Фурье, который назовем рядом Фурье функции $f(x)$. Коэффициенты этого ряда, согласно лемме 29.2, находим по формулам

$$a_0 = \frac{1}{l}\int_a^b f(x)dx,\ a_n = \frac{1}{l}\int_a^b f(x)\cos\frac{nx\pi}{l}dx,\ b_n = \frac{1}{l}\int_a^b f(x)\sin\frac{nx\pi}{l}dx, n = 1;2;...$$

29.2. Минимальное свойство коэффициентов Фурье.

Теорема 29.2. Пусть существует $\int_{-l}^{l} f^2(x)dx$. Тогда, если $S_n(x)$ – n-я частичная сумма ряда Фурье функции $f(x)$, то $\int_{-l}^{l}\left(f(x)-S_n(x)\right)^2 dx = \min_{T_n(x)}\int_{-l}^{l}\left(f(x)-T_n(x)\right)^2 dx$, где минимум берется по всем тригонометрическим многочленам $T_n(x)$ степени не выше n.

Если a_n и b_n – коэффициенты Фурье функции $f(x)$, то выполняется неравенство $\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^2+b_n^2\right)\le\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f^2(x)dx$, которое называется неравенством Бесселя.

Доказательство. Пусть $T_n(x)=\frac{A_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}A_n\cos\frac{nx\pi}{l}+B_n\sin\frac{nx\pi}{l}$. Тогда

$$\int_{-l}^{l}\left(f(x)-T_n(x)\right)^2dx=\int_{-l}^{l}f^2(x)dx+\int_{-l}^{l}T_n^2(x)dx-2\int_{-l}^{l}f(x)\cdot T_n(x)dx. \qquad (29.1)$$

Вычислим второе слагаемое в правой части равенства 29.1. По лемме 29.1 находим

$$\int_{-l}^{l}T_n^2(x)dx=\int_{-l}^{l}\left(\frac{A_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}A_n\cos\frac{nx\pi}{l}+B_n\sin\frac{nx\pi}{l}\right)^2dx=\frac{A_0^{\ 2}}{4}\cdot 2l+\sum_{k=1}^{n}\left(A_k^{\ 2}\cdot l+B_k^{\ 2}\cdot l\right)=$$

$$=l\cdot\left(\frac{A_0^{\ 2}}{2}+\sum_{k=1}^{n}\left(A_k^{\ 2}+B_k^{\ 2}\right)\right).$$

Рассмотрим теперь последнее слагаемое в равенстве 29.1:

$$\int_{-l}^{l}f(x)\cdot T_n(x)dx=\frac{A_0}{2}\cdot\int_{-l}^{l}f(x)dx+\sum_{k=1}^{n}A_k\cdot\int_{-l}^{l}f(x)\cdot\cos\frac{k\pi x}{l}dx+B_k\cdot\int_{-l}^{l}f(x)\cdot\sin\frac{k\pi x}{l}dx=$$

$$=l\cdot\frac{A_0a_0}{2}+l\cdot\sum_{k=1}^{n}A_ka_k+B_kb_k.$$

Следовательно, получаем

$$\int_{-l}^{l}\left(f(x)-T_n(x)\right)^2dx=\int_{-l}^{l}f^2(x)dx+l\cdot\left(\frac{A_0^{\ 2}}{2}+\sum_{k=1}^{n}\left(A_k^{\ 2}+B_k^{\ 2}\right)\right)-2l\cdot\left(\frac{A_0a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}A_ka_k+B_kb_k\right)=$$

$$=\int_{-l}^{l}f^2(x)dx+l\cdot\left(\frac{(A_0-a_0)^2}{2}+\sum_{k=1}^{n}\left((A_k-a_k)^2+(B_k-b_k)^2\right)\right)-l\cdot\left(\frac{a_0^{\ 2}}{2}+\sum_{k=1}^{n}\left(a_k^{\ 2}+b_k^{\ 2}\right)\right).$$

Минимальное значение $\int_{-l}^{l}\left(f(x)-T_n(x)\right)^2dx$ достигается в случае, если $A_0=a_0$, $A_k=a_k$, $B_k=b_k$, то есть при $T_n(x)=S_n(x)$. В этом случае

$$\int_{-l}^{l}\left(f(x)-S_n(x)\right)^2dx=\int_{-l}^{l}f^2(x)dx-l\cdot\left(\frac{a_0^{\ 2}}{2}+\sum_{k=1}^{n}\left(a_k^{\ 2}+b_k^{\ 2}\right)\right)\ge 0.$$

Итак, мы приходим к неравенству $\frac{1}{l}\cdot\int_{-l}^{l}f^2(x)dx\ge\frac{a_0^{\ 2}}{2}+\sum_{k=1}^{n}\left(a_k^{\ 2}+b_k^{\ 2}\right)$. Отсюда ряд $\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k^{\ 2}+b_k^{\ 2}\right)$ сходится и имеет место неравенство Бесселя. В качестве следствия, получаем $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}b_n=0$. ■

29.3. Комплексная запись ряда Фурье.

Пусть $f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{nx\pi}{l}+b_n\sin\frac{nx\pi}{l}$. По формулам Эйлера находим

$$\cos\frac{n\pi x}{l}=\frac{1}{2}\cdot\left(e^{i\frac{n\pi x}{l}}+e^{-i\frac{n\pi x}{l}}\right),\ \sin\frac{n\pi x}{l}=\frac{1}{2i}\cdot\left(e^{i\frac{n\pi x}{l}}-e^{-i\frac{n\pi x}{l}}\right).$$

Тогда частичную сумму ряда Фурье можем записать в следующем виде:

$$S_n(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}\left(a_k\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(e^{i\frac{n\pi x}{l}}+e^{-i\frac{n\pi x}{l}}\right)+b_k\cdot\frac{1}{2i}\cdot\left(e^{i\frac{n\pi x}{l}}-e^{-i\frac{n\pi x}{l}}\right)\right)=$$

$$=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}\left(e^{i\frac{n\pi x}{l}}\frac{1}{2}(a_k-ib_k)+e^{-i\frac{n\pi x}{l}}\frac{1}{2}(a_k+ib_k)\right).$$

Полагая $c_0=\frac{a_0}{2}$, $c_k=\frac{a_k-ib_k}{2}$, $c_{-k}=\frac{a_k+ib_k}{2}$, получим $S_n=\sum\limits_{k=-n}^{n}c_k\cdot e^{i\cdot\frac{k\pi x}{l}}$.

Понимая под сходимостью ряда $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}c_n\cdot e^{i\cdot\frac{n\pi x}{l}}$ существование предела $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=-n}^{n}c_k\cdot e^{i\cdot\frac{k\pi x}{l}}$, получаем

$$f(x)\sim\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n\cdot e^{i\cdot\frac{n\pi x}{l}}.$$

С учетом того, что $\cos\alpha\pm i\sin\alpha=e^{\pm i\alpha}$, будем иметь

$$c_n=\frac{a_n-ib_n}{2}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx-i\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx\right)=\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}f(x)e^{-i\frac{n\pi x}{l}}dx.$$

Аналогично, $c_{-n}=\frac{a_n+ib_n}{2}=\frac{1}{2l}\int\limits_{-l}^{l}f(x)e^{i\frac{n\pi x}{l}}dx$. Таким образом, при любых целых значениях n

$$c_n=\frac{1}{2l}\cdot\int_{-l}^{l}f(x)\cdot e^{-i\frac{n\pi x}{l}}dx.$$

Следовательно,

$$f(x)\sim\frac{1}{2l}\cdot\sum_{n=-\infty}^{\infty}e^{i\cdot\frac{n\pi x}{l}}\cdot\int_{-l}^{l}f(t)\cdot e^{-i\cdot\frac{n\pi t}{l}}dt.$$

Пример 29.1. Записать разложение функции $f(x)=x$ в интервале $(-\pi;\pi)$ в ряд Фурье в комплексной форме.

Решение. Искомое разложение должно иметь вид $f(x)\sim\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}c_n\cdot e^{i\cdot nx}$, где $c_n=\frac{1}{2\pi}\cdot\int\limits_{-\pi}^{\pi}f(x)\cdot e^{-inx}dx$, $n=\ldots,-2,-1,0,1,2,\ldots$. Вычисляем коэффициенты c_n:

$$c_n=\frac{1}{2\pi}\cdot\int_{-\pi}^{\pi}x\cdot e^{-inx}dx=\frac{1}{2\pi}\left(x\cdot\frac{e^{-inx}}{(-in)}\Bigg|_{-\pi}^{\pi}-\int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{-inx}}{(-in)}dx\right)=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\left(\frac{e^{-inx}}{(-in)^2}(-inx-1)\right)\Bigg|_{-\pi}^{\pi}=\frac{1}{2\pi}\left(\frac{e^{-inx}}{n^2}(inx+1)\right)\Bigg|_{-\pi}^{\pi}=\frac{1}{2\pi}\left(\frac{e^{-in\pi}}{n^2}(in\pi+1)-\frac{e^{in\pi}}{n^2}(-in\pi+1)\right)=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\left(\frac{\cos n\pi}{n^2}(in\pi+1)-\frac{\cos n\pi}{n^2}(-in\pi+1)\right)=\frac{1}{\pi}\cdot\frac{\cos n\pi}{n^2}\cdot in\pi=\frac{(-1)^n i}{n},\ n\neq0;$$

$$c_0=\frac{1}{2\pi}\cdot\int_{-\pi}^{\pi}xdx=0.$$

Итак, получаем разложение $x\sim\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{(-1)^n i}{n}\cdot e^{inx},\ \ x\in(-\pi;\pi)$.

29.4. Достаточные условия поточечной сходимости ряда Фурье.

Теорема 29.3 (Риман). Если функция $g(t)$ абсолютно интегрируема на промежутке с концами $a<b$, то $\lim\limits_{p\to\infty}\int_a^b g(t)\sin ptdt=\lim\limits_{p\to\infty}\int_a^b g(t)\cos ptdt=0$.

Доказательство. Заметим, что для любого отрезка $[\alpha;\beta]$ выполняется

$$\left|\int_{\alpha}^{\beta}\sin ptdt\right|=\left|\frac{\cos p\alpha-\cos p\beta}{p}\right|\le\frac{2}{p}.$$

Допустим, что функция $g(t)$ интегрируема в собственном смысле на отрезке $[a;b]$. Рассмотрим произвольное разбиение $a=t_0<t_1<...<t_n=b$ отрезка $[a;b]$. Тогда

$$\int_a^b g(t)\sin ptdt=\sum_{k=0}^{n-1}\int_{t_k}^{t_{k+1}}g(t)\sin ptdt.$$

Пусть $m_i=\inf\limits_{[t_i,t_{i+1}]}g(t)$. Имеем

$$\int_a^b g(t)\sin ptdt=\sum_{k=0}^{n-1}\int_{t_k}^{t_{k+1}}\big(g(t)-m_i\big)\sin ptdt+\sum_{k=0}^{n-1}m_i\int_{t_k}^{t_{k+1}}\sin ptdt.$$

Заметим, что для всех $t,\overline{t}\in[t_i,t_{i+1}]$ имеет место неравенство

$$\left|g(t)-g(\overline{t})\right|\le\omega_i=\omega\big(g,[t_i,t_{i+1}]\big)=\sup_{t',t''\in[t_i,t_{i+1}]}\left|g(t')-g(t'')\right|.$$

Отсюда для всех $t\in[t_i,t_{i+1}]$ выполняется $\left|g(t)-m_i\right|\le\omega_i$. Поэтому

$$\left|\int_a^b g(t)\sin ptdt\right|\le\sum_{i=0}^{n-1}\omega_i\Delta t_i+\frac{2}{p}\sum_{i=0}^{n-1}|m_i|.$$

Выбором разбиения, ввиду интегрируемости функции $g(t)$, можно добиться $\sum\limits_{i=0}^{n-1}\omega_i\Delta t_i<\frac{\varepsilon}{2}$ для произвольного $\varepsilon>0$. Такой выбор определит m_i и можно взять $p>\frac{4}{\varepsilon}\sum\limits_{i=0}^{n-1}|m_i|$. Тогда $\left|\int_a^b g(t)\sin ptdt\right|<\varepsilon$.

Рассмотрим теперь случай несобственного интеграла. Пусть особенность в точке b. Другие случаи рассматриваются аналогично после представления интеграла в виде суммы интегралов с одной особенностью. Ввиду сходимости интеграла $\int_a^b g(x)dx$, при достаточно малом q и любых значениях p

$$\left|\int_{b-q}^{b} g(t)\sin pt\,dt\right| < \int_{b-q}^{b} |g(t)|\,dt < \frac{\varepsilon}{2}.$$

По доказанному выше, $\lim\limits_{p\to\infty}\int_a^{b-q} g(t)\sin pt\,dt = 0$, так как $g(t)$ интегрируема в собственном смысле на отрезке $[a;b-q]$. Поэтому, существует число p_ε такое, что при $p > p_\varepsilon$ будет выполнено неравенство $\left|\int_a^{b-q} g(t)\sin pt\,dt\right| < \frac{\varepsilon}{2}$. Следовательно, при $p > p_\varepsilon$ выполняется

$$\left|\int_a^b g(t)\sin pt dt\right| < \varepsilon. \blacksquare$$

Пусть $f(x)$ – $2l$–периодическая, абсолютно интегрируемая на промежутке длины периода функция. Преобразуем частичную сумму ряда Фурье функции $f(x)$

$$S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_n\cos\frac{k\pi x}{l} + b_n\sin\frac{k\pi x}{l} =$$

$$= \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(t)\,dt + \frac{1}{l}\sum_{k=1}^{n}\int_{-l}^{l} f(t)\left(\cos\frac{k\pi t}{l}\cos\frac{k\pi x}{l} + \sin\frac{k\pi x}{l}\sin\frac{k\pi t}{l}\right)dt =$$

$$= \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(t)\cdot\left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}\cos\frac{k(t-x)\pi}{l}\right)dt = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(t)\cdot D_n(t-x)\,dt.$$

Функция $D_n(t)$ называется *ядром Дирихле*, а интеграл, стоящий в правой части полученного равенства называется *интегралом Дирихле*. Преобразуем ядро Дирихле следующим образом

$$D_n(t) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}\cos\frac{\pi kt}{l} = \frac{1}{2\sin\frac{\pi t}{2l}}\left(\sin\frac{\pi t}{2l} + \sum_{k=1}^{n} 2\sin\frac{\pi t}{2l}\cos\frac{\pi kt}{l}\right) =$$

$$= \frac{1}{2\sin\frac{\pi t}{2l}}\left(\sin\frac{\pi t}{2l} + \sum_{k=1}^{n}\left(\sin\left(\left(k+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi t}{l}\right) - \sin\left(\left(k-\frac{1}{2}\right)\frac{\pi t}{l}\right)\right)\right) = \frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi t}{l}\right)}{2\sin\frac{\pi t}{2l}},$$

где $t \ne 2lk, k\in\mathrm{Z}$. Заметим, что $\lim\limits_{t\to 2lk}\frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi t}{l}\right)}{2\sin\frac{\pi t}{2l}} = n+\frac{1}{2}$ и функцию $\frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi t}{l}\right)}{2\sin\frac{\pi t}{2l}}$ в точках $t = 2lk, k\in\mathrm{Z}$ можно доопределить значением $n+\frac{1}{2}$. Итак,

$$S_n(x) = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(t)\frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi(t-x)}{l}\right)}{2\sin\frac{\pi(t-x)}{2l}}dt. \qquad (29.2)$$

Очевидно, что $D_n(t)$ – $2l$–периодическая функция и

$$S_n(x)=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(t)\cdot D_n(t-x)\,dt=\frac{1}{l}\int_{-l-x}^{l+x} f(\tau+x)\cdot D_n(\tau)\,d\tau=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(\tau+x)D_n(\tau)\,d\tau,$$

так как значение интеграла по промежутку длины, равной периоду, не зависит от промежутка. Поскольку $D(\tau)$ – четная, так как является суммой косинусов, то

$$S_n(x)=\frac{1}{l}\int_{-l}^{0} f(\tau+x)D_n(\tau)\,d\tau+\frac{1}{l}\int_{0}^{l} f(\tau+x)D_n(\tau)\,d\tau=$$

$$=\frac{1}{l}\int_{0}^{l} f(x-\tau)D_n(\tau)\,d\tau+\frac{1}{l}\int_{0}^{l} f(\tau+x)D_n(\tau)\,d\tau=\frac{1}{l}\int_{0}^{l} D_n(\tau)\big(f(x-\tau)+f(x+\tau)\big)\,d\tau.$$

Лемма 29.3. Для любых $\delta\in(0;l)$ $x\in[-l;l]$ частичная сумма $S_n(x)$ $2l$ –периодической, абсолютно интегрируемой на $[-l;l]$ функции $f(x)$ представима в виде

$$S_n(x)=\frac{1}{l}\int_{0}^{\delta} D_n(t)\big(f(x-t)+f(x+t)\big)\,dt+o(1),\ n\to\infty.$$

Доказательство. Имеем

$$S_n(x)=\frac{1}{l}\int_{0}^{\delta} D_n(\tau)\big(f(x-\tau)+f(x+\tau)\big)\,d\tau+\frac{1}{l}\int_{\delta}^{l} D_n(\tau)\big(f(x-\tau)+f(x+\tau)\big)\,d\tau.$$

Функция $\dfrac{1}{2\sin\frac{\pi t}{2l}}$ непрерывна на отрезке $[-l;l]$, следовательно, ограничена на этом отрезке. Поэтому функция $\dfrac{f(x-t)+f(x+t)}{2\sin\frac{\pi t}{2l}}$ абсолютно интегрируема на $[-l;l]$. Следовательно, по теореме 29.3 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_{\delta}^{l}\dfrac{f(x-t)+f(x+t)}{2\sin\frac{\pi t}{2l}}\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi t}{l}\right)dt=0$. ■

Из данной леммы следует *принцип локализации*. А именно, существование и значение $\lim\limits_{n\to\infty}S_n(x)$ в любой точке $x_0\in\mathbf{R}$ зависит только от существования и значения предела $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{l}\int_{0}^{\delta} D_n(t)\big(f(x_0+t)+f(x_0-t)\big)\,dt$, где δ – произвольное положительное число. Заметим, что в подынтегральное выражение входит $f(x)$ на $[x_0-\delta,x_0+\delta]$, то есть существование и значение предела частичных сумм ряда Фурье функции $f(x)$ зависит только от ее свойств в окрестности точки x.

Положим в равенстве

$$S_n(x)=\frac{1}{l}\int_{0}^{l} D_n(\tau)\big(f(x-\tau)+f(x+\tau)\big)\,d\tau$$

$f(x)\equiv 1$, получим $S_n(x)\equiv 1$ и

$$1 \equiv \frac{2}{l}\int_0^l D_n(t)dt = \frac{2}{l}\int_0^l \frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi t}{l}\right)}{2\sin\frac{\pi t}{2l}}dt\,. \tag{29.3}$$

Пусть S_0 – некоторое число, тогда

$$S_n(x) - S_0 = \frac{1}{l}\int_0^l \left(f(x-t)+f(x+t)-2S_0\right)\cdot\frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi t}{l}\right)}{2\sin\frac{\pi t}{2l}}dt\,.$$

Обозначим $\varphi(t) = f(x-t)+f(x+t)-2S_0$. Если мы хотим установить, что $\lim\limits_{n\to\infty} S_n(x) = S_0$, то нужно доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{l}\int_0^l \varphi(t)\cdot\frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi t}{l}\right)}{2\sin\frac{\pi t}{2l}}dt = 0$.

Теорема 29.4 (признак Дини). Ряд Фурье функции $f(x)$ в точке x сходится к сумме S_0, если при некотором $h>0$ интеграл $\int_0^h \frac{|\varphi(t)|}{t}dt$ существует.

Доказательство. Если интеграл $\int_0^h \frac{|\varphi(t)|}{t}dt$ существует, то существует интеграл $\int_0^l \frac{|\varphi(t)|}{t}dt$. Тогда по теореме Римана

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{l}\int_0^l \varphi(t)\cdot\frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi t}{l}\right)}{2\sin\frac{\pi t}{2l}}dt = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{l}\int_0^l \frac{\varphi(t)}{t}\cdot\frac{\frac{\pi t}{2l}}{\sin\frac{\pi t}{2l}}\cdot\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi t}{l}\right)dt = 0,$$

поскольку $\frac{\varphi(t)}{t}\cdot\frac{\frac{\pi t}{2l}}{\sin\frac{\pi t}{2l}}$ – абсолютно интегрируемая функция на промежутке $(0;l)$. ■

Следствие 29.1. Если $f(x)$ – $2l$–периодическая функция, абсолютно интегрируемая на промежутке длины периода, и в точке x существуют односторонние пределы:

$$f(x+0) = \lim_{t\to x+0} f(t),\ f(x-0) = \lim_{t\to x-0} f(t),$$

$$f'_+(x) = \lim_{h\to+0}\frac{f(x+h)-f(x+0)}{h},\ f'_-(x) = \lim_{h\to+0}\frac{f(x-h)-f(x-0)}{-h},$$

то ряд Фурье функции $f(x)$ сходится в этой точке к значению $\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$.

Доказательство. Положим $S_0 = \frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$. Тогда

$$\varphi(t) = f(x-t)+f(x+t)-f(x+0)-f(x-0)$$

и

$$\lim_{t\to+0}\frac{\varphi(t)}{t}=\lim_{t\to+0}\left(\frac{f(x+t)-f(x+0)}{t}+\frac{f(x-t)-f(x-0)}{t}\right)=f'_+(x)-f'_-(x).$$

Следовательно, на некотором промежутке $(0;h)$ функция $\frac{\varphi(t)}{t}$ ограничена. Поэтому, по лемме 26.1, существует $\int\limits_0^h\frac{|\varphi(t)|}{t}dt$, значит, ряд Фурье функции f сходится в точке x к значению $S_0=\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$. ■

Определение 29.3. Пусть функция f определена на отрезке $[a;b]$ и существует разбиение $x_0=a<x_1<...<x_n=b$ отрезка $[a;b]$, что f непрерывна на каждом интервале $(x_{i-1};x_i)$, и существуют конечные пределы $f(x_{i-1}+0)$ и $f(x_i-0),\quad i=1,2,...,n$. Если при каждом $i=1,2,...,n$ функция

$$f_i(x)=\begin{cases}f(x_{i-1}+0), & x=x_{i-1};\\ f(x), & x\in(x_{i-1};x_i);\\ f(x_i-0), & x=x_i\end{cases}$$

принадлежит $C^1[x_{i-1};x_i]$, то функция f называется кусочно-дифференцируемой на отрезке $[a;b]$.

Следствие 29.2. Ряд Фурье кусочно-дифференцируемой на отрезке $[-l;l]$ функции $f(x)$ сходится в каждой точке $x\in(-l;l)$ к значению $\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$, а в точках $x=-l$, $x=l$ – к значению $\frac{f(-l+0)+f(l-0)}{2}$.

Пример 29.2. Разложить в тригонометрический ряд Фурье в интервале $(-2;2)$ функцию

$$f(x)=\begin{cases}2,-2<x<0,\\ 2-x,0\le x<2.\end{cases}$$

Решение. Данная функция является кусочно-дифференцируемой на отрезке $[-2;2]$, поэтому ряд Фурье такой функции сходится в каждой точке отрезка $[-2;2]$. Согласно следствию 29.2, сумма $S(x)$ ряда Фурье имеет вид

$$S(x)=\begin{cases}2,\ -2<x<0;\\ 2-x,\ 0\le x<2;\\ 1,\ x=\pm2.\end{cases}$$

Как видно, на интервале $(-2;2)$ имеет место равенство $S(x)=f(x)$. Вычислим коэффициенты Фурье:

$$a_0=\frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l}f(x)dx=\frac{1}{2}\int\limits_{-2}^{2}f(x)dx=\frac{1}{2}\int\limits_{-2}^{0}2dx+\frac{1}{2}\int\limits_{0}^{2}(2-x)dx=\frac{1}{2}\int\limits_{-2}^{2}2dx-\frac{1}{2}\int\limits_{0}^{2}xdx=3,$$

$$a_n=\frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{nx\pi}{l}dx=\frac{1}{2}\int\limits_{-2}^{2}f(x)\cos\frac{nx\pi}{2}dx=\frac{1}{2}\int\limits_{-2}^{2}2\cos\frac{nx\pi}{2}dx-\frac{1}{2}\int\limits_{0}^{2}x\cos\frac{nx\pi}{2}dx=$$

$$=-\frac{1}{2}\cdot\frac{\cos\frac{nx\pi}{2}}{\left(\frac{n\pi}{2}\right)^2}\Bigg|_0^2=\frac{2\left(\left(-1\right)^{n+1}+1\right)}{n^2\pi^2},\ n=1,2,...$$

$$b_n=\frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l}f\left(x\right)\sin\frac{nx\pi}{l}dx=\frac{1}{2}\int\limits_{-2}^{2}f\left(x\right)\sin\frac{nx\pi}{2}dx=\frac{1}{2}\int\limits_{-2}^{2}2\sin\frac{nx\pi}{2}dx-\frac{1}{2}\int\limits_{0}^{2}x\sin\frac{nx\pi}{2}dx=$$

$$=\frac{2}{n\pi}\cos\left(n\pi\right)=\frac{\left(-1\right)^n\cdot 2}{n\pi},\ n=1,2,...$$

Итак, получаем

$$f\left(x\right)=\frac{3}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\left(\left(-1\right)^{n+1}+1\right)}{n^2\pi^2}\cdot\cos\frac{nx\pi}{2}+\frac{\left(-1\right)^n\cdot 2}{n\pi}\cdot\sin\frac{nx\pi}{2}.$$

На рисунке 29.1 показаны график исходной функции и графики частичных сумм $S_3(x),\ S_{20}(x)$ ряда Фурье данной функции.

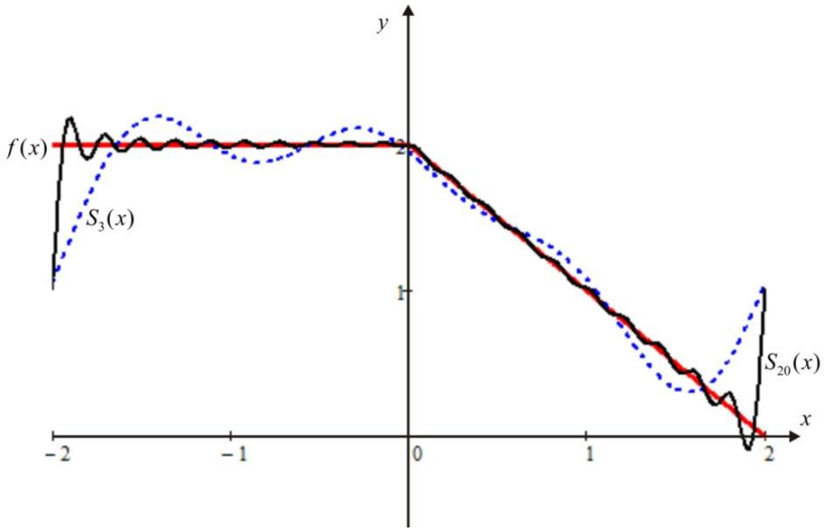

Рис. 29.1

29.5. Ряд Фурье для четных и нечетных функций.

Начнем со следующей очевидной леммы.

Лемма 29.4. Если функция $f\in R[-l;l]$ является четной, то $\int\limits_{-l}^{l}f(x)dx=2\int\limits_{0}^{l}f(x)dx$. Если функция является нечетной, то $\int\limits_{-l}^{l}f(x)dx=0$.

Пусть $f\left(x\right)$ – четная, $2l$–периодическая функция, абсолютно интегрируемая на промежутке длины периода. Тогда по лемме 29.4 получаем

$$a_0=\frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l}f\left(x\right)dx=\frac{2}{l}\int\limits_{0}^{l}f\left(x\right)dx;$$

$$a_n=\frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{nx\pi}{l}dx=\frac{2}{l}\int\limits_{0}^{l}f(x)\cos\frac{nx\pi}{l}dx,\quad n=1,2,....;$$

$$b_n=\frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{nx\pi}{l}dx=0,\quad n=1,2,....$$

Поэтому $f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{nx\pi}{l}$. То есть ряд Фурье четной функции содержит только косинусы.

Пусть $f(x)$ – нечетная, $2l$–периодическая функция, абсолютно интегрируемая на промежутке длины периода. Тогда, по лемме 29.4, получаем

$$a_0=\frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l}f(x)dx=0;$$

$$a_n=\frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{nx\pi}{l}dx=0,\quad n=1,2,....;$$

$$b_n=\frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{nx\pi}{l}dx=\frac{2}{l}\int\limits_{0}^{l}f(x)\sin\frac{nx\pi}{l}dx=0,\quad n=1,2,....$$

Поэтому $f(x)\sim\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n\sin\frac{nx\pi}{l}$. То есть, ряд Фурье нечетной функции содержит только синусы.

29.6. Типовые примеры.

Пример 1. Разложить в тригонометрический ряд Фурье в интервале $(-\pi;\pi)$ функцию $f(x)=e^{2x}$.

Решение. Искомое разложение должно иметь вид $f(t)\sim\frac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n\cos nx+b_n\sin nx$, где

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nxdx=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}e^{2x}\cos nxdx,\ n=0;1;2;...;$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nxdx=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}e^{2x}\sin nxdx,\ n=1;2;....$$

Записанные выше интегралы вычисляются, применяя метод интегрирования по частям дважды. Можно этого избежать, используя комплексную форму записи ряда Фурье.

$$f(x)\sim\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}c_n\cdot e^{i\cdot nx},\ \text{где}\ c_n=\frac{1}{2\pi}\cdot\int\limits_{-\pi}^{\pi}f(x)\cdot e^{-inx}dx.$$

При этом

$$c_n=\frac{a_n-ib_n}{2},\ c_{-n}=\frac{a_n+ib_n}{2}.$$

Отсюда

$$a_n=c_n+c_{-n},\ b_n=-i(c_{-n}+c_n).$$

Найдем c_n.

$$c_n=\frac{1}{2\pi}\cdot\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cdot e^{-inx}dx=\frac{1}{2\pi}\cdot\int_{-\pi}^{\pi}e^{2x}\cdot e^{-inx}dx=\frac{1}{2\pi}\cdot\int_{-\pi}^{\pi}e^{(2-in)x}dx=\frac{1}{2\pi}\cdot\left.\frac{e^{(2-in)x}}{(2-in)}\right|_{-\pi}^{\pi}=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{1}{(2-in)}\left(e^{(2-in)\pi}-e^{-(2-in)\pi}\right)=\frac{2+in}{2\pi\left(4+n^2\right)}\left(e^{(2-in)\pi}-e^{-(2-in)\pi}\right).$$

Воспользуемся формулой Эйлера $e^{x+iy}=e^x\left(\cos y+i\sin y\right)$. Получим

$$c_n=\frac{2+in}{2\pi\left(4+n^2\right)}\left(e^{(2-in)\pi}-e^{-(2-in)\pi}\right)=\frac{2+in}{2\pi\left(4+n^2\right)}\left(e^{2\pi}\cos\pi n-e^{-2\pi}\cos\pi n\right)=$$

$$=\frac{(-1)^n(2+in)\left(e^{2\pi}-e^{-2\pi}\right)}{2\pi\left(4+n^2\right)}=\frac{(-1)^n(2+in)sh2\pi}{\pi\left(4+n^2\right)}.$$

$$c_{-n}=\frac{(-1)^n(2-in)sh2\pi}{\pi\left(4+n^2\right)}.$$

Следовательно,

$$a_n=c_n+c_{-n}=\frac{(-1)^n\cdot 4\cdot sh2\pi}{\pi\left(4+n^2\right)},\ n=0,1,2,\ldots,$$

$$b_n=-i\left(c_{-n}+c_n\right)=\frac{(-1)^{n+1}\cdot 2n\cdot sh2\pi}{\pi\left(4+n^2\right)},\ n=1,2,\ldots.$$

Получаем разложение

$$e^{2x}\sim\frac{sh2\pi}{2\pi}+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n\cdot 4\cdot sh2\pi}{\pi\left(4+n^2\right)}\cos nx+\frac{(-1)^{n+1}\cdot 2n\cdot sh2\pi}{\pi\left(4+n^2\right)}\sin nt,\ x\in(-\pi;\pi).$$

Пример 2. Дана функция $f(x)=\begin{cases}x, & 0<x<\dfrac{\pi}{2},\\ \dfrac{\pi}{2}, & \dfrac{\pi}{2}\le x<\pi.\end{cases}$

Разложить ее в ряд Фурье

1) с периодом 2π, доопределив $f(x)$ на интервале $(-\pi;0)$ произвольным образом;

2) в интервале $(0;\pi)$ с периодом π;

3) в интервале $(0;\pi)$ в ряд синусов;

4) в интервале $(0;\pi)$ в ряд косинусов.

Решение.

1) Доопределим данную функцию на $(-\pi;0)$, скажем, значениями равными нулю. Таким образом, нужно разложить в ряд функцию

$$f(x)=\begin{cases}0,\ -\pi<x<0,\\ x,0<x<\dfrac{\pi}{2},\\ \dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\le x<\pi.\end{cases}$$

Данная функция является кусочно-дифференцируемой на отрезке $[-\pi;\pi]$, поэтому ряд Фурье такой функции сходится в каждой точке отрезка $[-\pi;\pi]$. Согласно следствию 29.2, сумма $S(x)$ ряда Фурье имеет вид

$$S(x)=\begin{cases}\dfrac{\pi}{4}, \quad x=\pm\pi,\\ 0, \ -\pi<x<0,\\ x, \ 0<x<\dfrac{\pi}{2},\\ \dfrac{\pi}{2}, \ \dfrac{\pi}{2}\le x<\pi.\end{cases}$$

Вычислим коэффициенты Фурье:

$$a_0=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=\frac{1}{\pi}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}xdx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{\pi}{2}dx\right)=\frac{1}{\pi}\left(\frac{x^2}{2}\bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}+\frac{\pi}{2}x\bigg|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\right)=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi^2}{8}+\frac{\pi}{2}\left(\pi-\frac{\pi}{2}\right)\right)=\frac{3\pi}{8};$$

$$a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos nxdx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nxdx=\frac{1}{\pi}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\cos nxdx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{\pi}{2}\cos nxdx\right)=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left(x\frac{\sin nx}{n}\bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin nx}{n}dx+\frac{\pi}{2}\cdot\frac{\sin nx}{n}\bigg|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\right)=\frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{2n}\cdot\sin\frac{\pi n}{2}+\frac{\cos nx}{n^2}\bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}+\frac{\pi}{2n}\left(0-\sin\frac{\pi n}{2}\right)\right)=$$

$$=\frac{1}{\pi n^2}\left(\cos\frac{\pi n}{2}-1\right),\ \ n=1,2,\ldots;$$

$$b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{nx\pi}{l}dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nxdx=\frac{1}{\pi}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\sin nxdx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{\pi}{2}\sin nxdx\right)=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left(-x\frac{\cos nx}{n}\bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos nx}{n}dx-\frac{\pi}{2}\cdot\frac{\cos nx}{n}\bigg|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\right)=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left(-\frac{\pi}{2n}\cdot\cos\frac{\pi n}{2}+\frac{\sin nx}{n^2}\bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}-\frac{\pi}{2n}\left(\cos n\pi-\cos\frac{\pi n}{2}\right)\right)=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{n^2}\sin\frac{\pi n}{2}-\frac{\pi}{2n}\cdot(-1)^n\right),\ \ n=1,2,\ldots.$$

Итак, получим разложение в ряд Фурье

$$f(x)\sim\frac{3\pi}{16}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\pi n^2}\left(\cos\frac{\pi n}{2}-1\right)\cdot\cos nx+\frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{n^2}\sin\frac{\pi n}{2}-\frac{\pi}{2n}\cdot(-1)^n\right)\cdot\sin nx.$$

На рисунке 29.2 представлены график функции $f(x)$ и график частичной суммы $S_{10}(x)$.

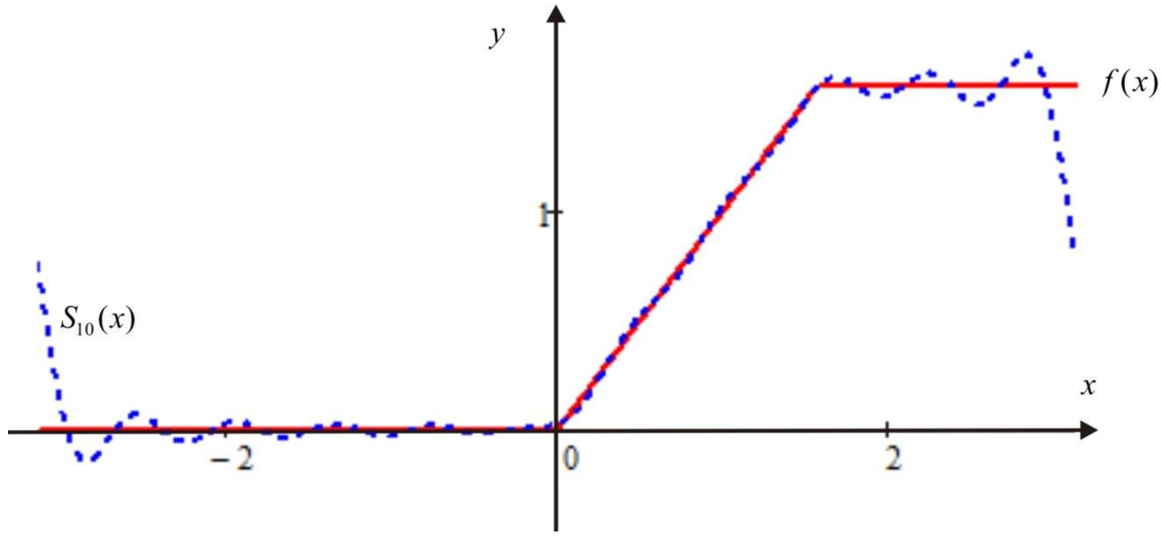

Рис. 29.2

2) Согласно сказанному в конце раздела 29.1, коэффициенты Фурье имеют вид:

$$a_0=\frac{1}{\left(\frac{\pi}{2}\right)}\int_0^{\pi} f(x)\,dx=\frac{2}{\pi}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\,dx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{\pi}{2}\,dx\right)=\frac{2}{\pi}\left(\left.\frac{x^2}{2}\right|_0^{\frac{\pi}{2}}+\left.\frac{\pi}{2}x\right|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\right)=$$

$$=\frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi^2}{8}+\frac{\pi}{2}\left(\pi-\frac{\pi}{2}\right)\right)=\frac{3\pi}{4},$$

$$a_n=\frac{1}{\left(\frac{\pi}{2}\right)}\int_0^{\pi} f(x)\cos\frac{n\pi x}{\left(\frac{\pi}{2}\right)}\,dx=\frac{2}{\pi}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos 2nx\,dx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{\pi}{2}\cos 2nx\,dx\right)=$$

$$=\frac{2}{\pi}\left(\left.x\frac{\sin 2nx}{2n}\right|_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin 2nx}{2n}\,dx+\frac{\pi}{2}\cdot\left.\frac{\sin 2nx}{2n}\right|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\right)=$$

$$=\frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi}{4n}\cdot\sin\pi n+\left.\frac{\cos 2nx}{4n^2}\right|_0^{\frac{\pi}{2}}+\frac{\pi}{4n}(\sin 2n\pi-\sin\pi n)\right)=$$

$$=\frac{1}{2\pi n^2}(\cos\pi n-1)=\frac{1}{2\pi n^2}\left((-1)^n-1\right),\ \ n=1,2,\ldots,$$

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin 2nx\,dx=\frac{2}{\pi}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin 2nx\,dx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{\pi}{2}\sin 2nx\,dx\right)=$$

$$=\frac{2}{\pi}\left(\left.-x\frac{\cos 2nx}{2n}\right|_0^{\frac{\pi}{2}}+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos 2nx}{2n}\,dx-\frac{\pi}{2}\cdot\left.\frac{\cos 2nx}{2n}\right|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\right)=$$

$$=\frac{2}{\pi}\left(-\frac{\pi}{4n}\cdot\cos\pi n-\frac{\pi}{4n}(\cos 2n\pi-\cos\pi n)\right)=-\frac{1}{2n},\quad n=1,2,\ldots.$$

В результате получаем следующее разложение в ряд Фурье

$$f(x) \sim \frac{3\pi}{8} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n - 1}{2\pi n^2} \cos 2nx - \frac{1}{2n} \cdot \sin 2nx .$$

Согласно следствию 29.2, сумма данного ряда совпадает с $f(x)$ на $(0;\pi)$, а в точках 0 и π сумма ряда Фурье равна $\frac{\pi}{4}$. График функции $f(x)$ и частичной суммы $S_{10}(x)$ представлены на рисунке 29.3.

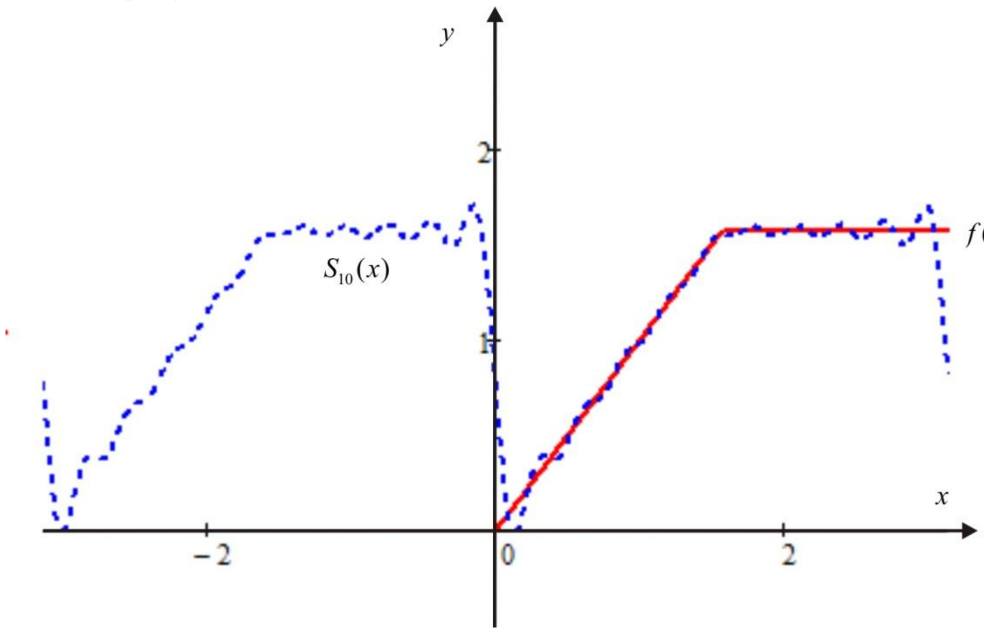

Рис. 29.3

3) Функция, разлагаемая в ряд по синусам, должна быть нечетной. Следовательно, нужно построить ее нечетное продолжение в интервале $(-\pi;0)$, тогда $a_n = 0$, $n = 0,1,2,...$, а

$$b_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{nx\pi}{l} dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx dx = \frac{2}{\pi} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin nx dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\pi}{2} \sin nx dx \right) =$$

$$= \frac{2}{\pi} \left(-x \frac{\cos nx}{n} \Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos nx}{n} dx - \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\cos nx}{n} \Bigg|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \right) =$$

$$= \frac{2}{\pi} \left(-\frac{\pi}{2n} \cdot \cos \frac{\pi n}{2} + \frac{\sin nx}{n^2} \Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{\pi}{2n} \left(\cos n\pi - \cos \frac{\pi n}{2} \right) \right) = \frac{2}{\pi} \left(\frac{1}{n^2} \sin \frac{\pi n}{2} - \frac{\pi}{2n} \cdot (-1)^n \right), \quad n = 1,2,....$$

Искомое разложение будет иметь вид

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi} \left(\frac{1}{n^2} \sin \frac{\pi n}{2} - \frac{\pi}{2n} \cdot (-1)^n \right) \cdot \sin nx .$$

Нечетное продолжение функции $f(x)$ представляет собой кусочно-дифференцируемую функцию, поэтому, согласно следствию 29.2, сумма полученного ряда на интервале $(0;\pi)$ совпадает с $f(x)$, а в точках 0 и π сумма ряда Фурье равна нулю. На рисунке 29.4

представлены график функции $f(x)$, график ее нечетного продолжения $\overline{f}(x)$ и график частичной суммы $S_{20}(x)$.

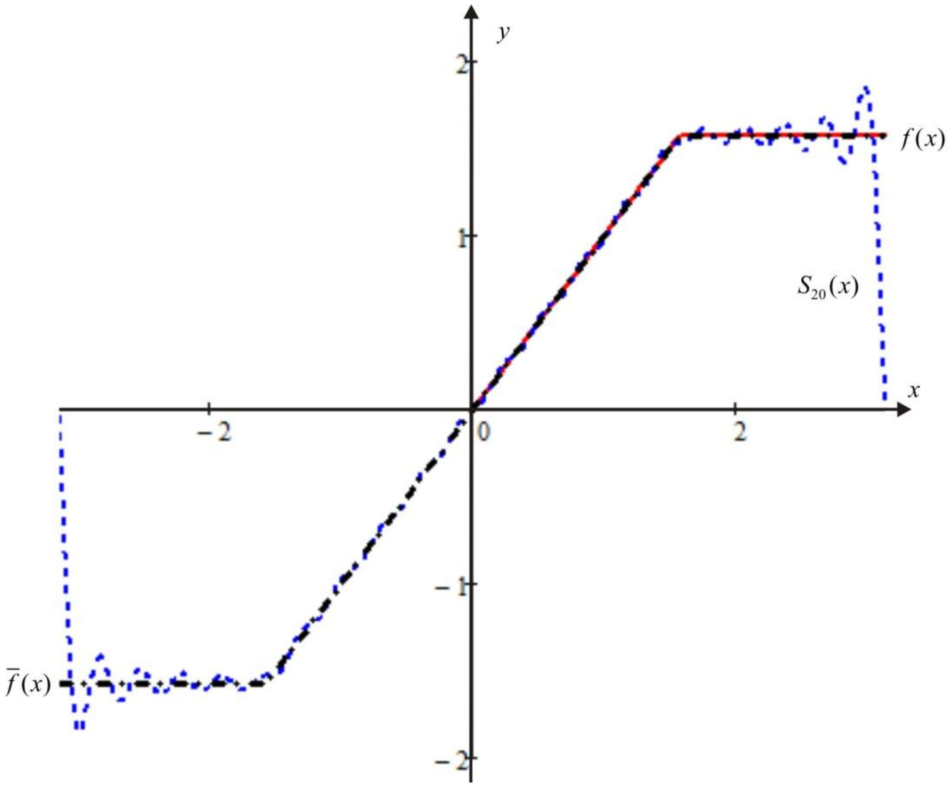

Рис. 29.4

4) Функция, разлагаемая в ряд по косинусам, должна быть четной. Следовательно, нужно построить ее четное продолжение в интервале $(-\pi;0)$, тогда $b_n = 0$, $n = 1, 2, \ldots$, а

$$a_0 = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\,dx = \frac{2}{\pi}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\,dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\pi}{2}\,dx\right) = \frac{2}{\pi}\left(\frac{x^2}{2}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{\pi}{2}x\Bigg|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\right) =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi^2}{8} + \frac{\pi}{2}\left(\pi - \frac{\pi}{2}\right)\right) = \frac{3\pi}{4},$$

$$a_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos nx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx\,dx = \frac{2}{\pi}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos nx\,dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\pi}{2}\cos nx\,dx\right) =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(x\frac{\sin nx}{n}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin nx}{n}\,dx + \frac{\pi}{2}\cdot\frac{\sin nx}{n}\Bigg|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\right) = \frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi}{2n}\cdot\sin\frac{\pi n}{2} + \frac{\cos nx}{n^2}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{\pi}{2n}\left(0 - \sin\frac{\pi n}{2}\right)\right) =$$

$$= \frac{2}{\pi n^2}\left(\cos\frac{\pi n}{2} - 1\right), \quad n = 1, 2, \ldots,$$

Искомое разложение будет иметь вид

$$f(x) \sim \frac{3\pi}{8} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi n^2}\left(\cos\frac{\pi n}{2} - 1\right)\cdot\cos nx\,.$$

Четное продолжение функции $f(x)$ представляет собой кусочно дифференцируемую функцию, поэтому, согласно следствию 29.2, сумма полученного ряда на интервале $(0;\pi)$ совпадает с $f(x)$, а в точках 0 и π сумма ряда Фурье равна соответственно 0 и π. На рисунке 29.5 представлены график функции $f(x)$, график ее четного продолжения $\overline{f}(x)$ и график частичной суммы $S_2(x)$.

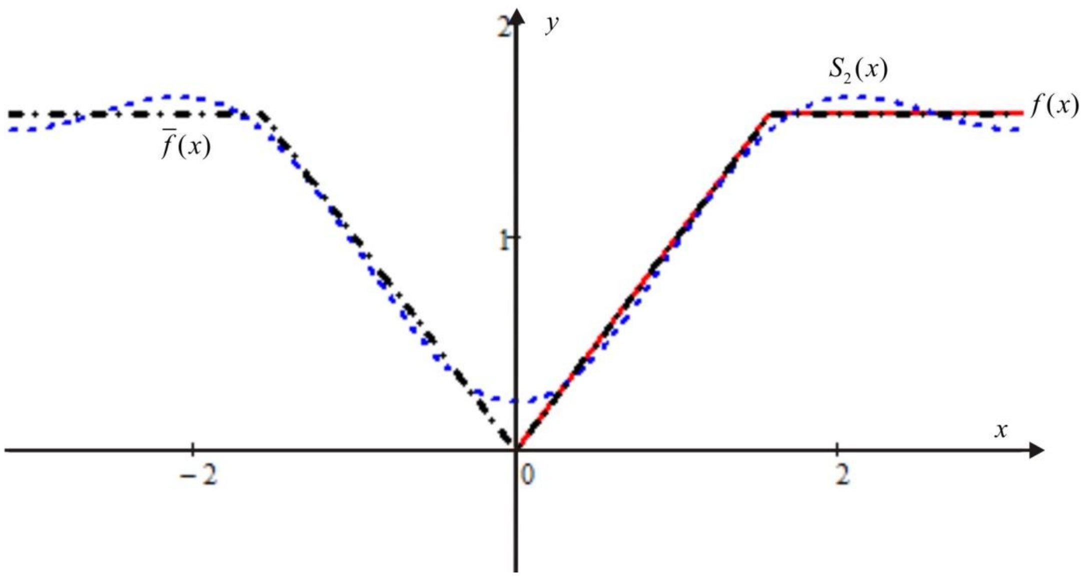

Рис. 29.5

Задачи для самостоятельного решения.

Следующие функции разложить в тригонометрические ряды Фурье в интервале $(-\pi;\pi)$

1. $f(x)=\begin{cases}-1, -\pi<x<0,\\ 1, 0<x<\pi.\end{cases}$

2. $f(x)=\begin{cases}0, -\pi<x<0,\\ 2, 0<x<\pi.\end{cases}$

3. $f(x)=|x|$.

4. Функцию $f(x)=x$ в интервале $(0;\pi)$ разложить в ряд по косинусам.

5. Функцию $f(x)=|x|$ в интервале $(0;\pi)$ разложить в ряд по синусам.

6. Функцию $f(x)=\dfrac{\pi-x}{2}$ в интервале $(0;\pi)$ разложить в ряд по косинусам.

7. Разложить в тригонометрический ряд Фурье периодическую с периодом $T=2$ функцию, определенную на всей числовой оси и заданную на отрезке $[-1;1]$ равенством

$$f(x)=\begin{cases}1, -1\le x<0,\\ 0.5, \text{ при } x=0,\\ x, 0<x\le 1.\end{cases}$$

Ответы.

1. $\frac{\pi}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin(2n+1)x}{2n+1}$. **2.** $1+\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+(-1)^{n-1}}{n}\sin nx$. **3.** $\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}$

4. $\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}$. **5.** $2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\sin nx}{n}$. **6.** $\frac{\pi}{4}-\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}$.

7. $\frac{3}{4}-\frac{2}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)\pi x}{(2n-1)^2}-\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\pi x}{n}$.