Лекция 1. Кратный интеграл Римана

Определение Координатным параллелепипедом (*промежутком*) в $\mathbf{R}^n$ будем называть множество $I = I_{a,b} = \{x = (x_1,...,x_n) \in \mathbf{R}^n : a_i \le x_i \le b_i,\ i = 1,2,...,n\}$, где $a = (a_1,...,a_n),\ b = (b_1,...,b_n)$. Число $\mu(I) = \prod_{i=1}^{n}(b_i - a_i)$ будем называть *мерой параллелепипеда* или его *объемом*.

Рассмотрим произвольные разбиения $\tau_i = \{x_i\}_{i=0}^m$ отрезков $[a_i;b_i]$. Они порождают разбиение промежутка I на более мелкие промежутки $I_j,\ j = 1,2,...,k$. Представление промежутка I в виде объединения более мелких промежутков $I = \bigcup_{j=1}^{k} I_j$ будем называть разбиением *I*. Пусть $P = \{I_j\}_{j=1}^k$ – разбиение промежутка *I*. Обозначим $\lambda(P) = \max_{1\le j\le k} d(I_j)$, где $d(I_j) = \sup_{x,y\in I_j} \rho(x,y)$ – диаметр промежутка I_j. Если в каждом промежутке I_j выбрана точка $\xi^{(j)} = (\xi_1^{(j)},...,\xi_n^{(j)})$, то мы получаем разбиение с отмеченными точками. Будем такое разбиение обозначать (P,ξ).

Пусть на промежутке *I* задана функция $f : I \to \mathbf{R}$ и (P,ξ) – произвольное разбиение с отмеченными точками промежутка *I*. Сумма $\sigma(f,P,\xi) = \sum_{j=1}^{k} f\left(\xi^{(j)}\right)\mu\left(I_j\right)$ называется *интегральной суммой Римана* функции f, соответствующей разбиению (P,ξ) промежутка *I*.

Определение Число А называется *интегралом Римана* от функции f по промежутку *I*, если

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \forall (P,\xi),\ \lambda(P) < \delta\ \Rightarrow\ \left|A - \sigma(f,P,\xi)\right| < \varepsilon.$$

В этом случае пишут $A = \lim_{\lambda(P)\to 0} \sigma(f,P,\xi)$.

Будем использовать следующие обозначения интеграла Римана: $\int_I f(x)dx$ или $\int_I\int\ldots\int f(x_1,...,x_n)dx_1...dx_n$. Это число называют так же *кратным интегралом*. Если $\int_I f(x)dx$ существует, то функция f называется *интегрируемой* на *I*. Множество интегрируемых на *I* функций будем обозначать $R(I)$.

Теорема (необходимое условие интегрируемости). Если $f \in R(I)$, то f ограничена на *I*.

Доказательство. Предположим, что функция не ограничена на промежутке *I*. Возьмем произвольное разбиение $P = \{I_i\}_{i=1}^k$ промежутка *I*. Тогда найдется промежуток I_j, на котором функция f неограничена. Поэтому существует последовательность $\{\xi_j^{(n)}\}$, для которой $\lim_{n\to\infty} f(\xi_j^{(n)}) = \infty$. Значит, если зафиксировать точки $\xi_i \in I_i,\ i \ne j$, то

$$\sigma=\sum_{i\neq j} f(\xi_i)\mu(I_i)+f(\xi_j^{(n)})\mu(I_j)\to\infty,\ n\to\infty .$$

Следовательно, не может выполняться определение. ■

Теорема (критерий Коши интегрируемости функции).

$f\in R(I)\Leftrightarrow$

$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0:\forall(P',\xi'),\,(P'',\xi''),\,\lambda(P'),\lambda(P'')<\delta\Rightarrow\left|\sigma(f,P',\xi')-\sigma(f,P'',\xi'')\right|<\varepsilon.$

Критерии интегрируемости Дарбу и Лебега.

Пусть $f:I\to\mathbf{R}$ ограниченная функция и $P=\{I_j\}_{j=1}^k$ – разбиение промежутка *I*. Положим $m_i=\inf\limits_{x\in I_i} f(x),\ M_i=\sup\limits_{x\in I_i} f(x)$ и введем в рассмотрение, соответственно, *нижнюю и верхнюю суммы Дарбу* $s(f,P)=\sum\limits_{i=1}^k m_i\mu(I_i),\ S(f,P)=\sum\limits_{i=1}^k M_i\mu(I_i)$. Очевидно, что

$$s(f,P)\le\sigma(f,P,\xi)\le S(f,P).$$

Лемма. Имеют место равенства

$$s(f,P)=\inf_{\xi}\sigma(f,P,\xi),\ S(f,P)=\sup_{\xi}\sigma(f,P,\xi).$$

Доказательство. Мы докажем первое равенство, а второе доказывается аналогично. Так как $m_i=\inf\limits_{x\in I_i} f(x)$, то для любого числа $\varepsilon>0$ существует точка $\xi_i\in I_i$ такая, что

$$m_i+\frac{\varepsilon}{\mu(I_i)}>f(\xi_i).$$

Отсюда

$$\sigma(f,P,\xi)=\sum_{i=1}^k f(\xi_i)\mu(I_i)<\sum_{i=1}^k m_i\mu(I_i)+\varepsilon=s(f,P)+\varepsilon .$$

По определению нижней грани $s(f,P)=\inf\limits_{\xi}\sigma(f,P,\xi)$. ■

Пусть разбиение $P'=\{I_{ij}\}_{i=1,\ j=1}^{k,\ \ n_i}$ промежутка *I* получается измельчением промежутков разбиения $P=\{I_i\}_{i=1}^k$. В этом случае $I_i=\bigcup\limits_{j=1}^{n_i} I_{ij}$ и, по свойству нижней грани,

$$m_i\le m_{ij}=\inf_{x\in I_{ij}} f(x),\ \forall j=1,2,...,n_i .$$

Отсюда получаем

$$s(f,P)=\sum_{i=1}^k m_i\mu(I_i)\le\sum_{i=1}^k\sum_{j=1}^{n_i} m_{ij}\mu(I_{ij})=s(f,P').$$

Аналогично показывается, что $S(f,P')\le S(f,P)$. Итак,

$$s(f,P)\le s(f,P')\le S(f,P')\le S(f,P).$$

Следовательно, для любых разбиений P_1,P_2 промежутка *I*

$$s(f,P_1)\le S(f,P_2).$$

Значит, существуют $J_*=\sup\limits_P s(f,P)$ и $J^*=\inf\limits_P S(f,P)$. Число J_* называется *нижним интегралом Дарбу*, а число J^* – *верхним интегралом Дарбу*. По определениям верхней и нижней граней, имеют место очевидные неравенства

$$s(f,P) \le J_* \le J^* \le S(f,P).$$

Теорема (Дарбу). Имеют место равенства

$$J_* = \lim_{\lambda(P)\to 0} s(f,P), \quad J^* = \lim_{\lambda(P)\to 0} S(f,P).$$

Теорема (критерий Дарбу). Определенная на промежутке $I \subset \mathbf{R}^n$ функция $f : I \to \mathbf{R}$ интегрируема на нем тогда и только тогда, когда f ограничена на промежутке *I* и $J_* = J^*$.

Доказательство. Пусть $f \in R(I)$. Тогда по теореме 33.1 функция ограничена на *I*. Если $J = \int_I f(x)dx = \lim_{\lambda(P)\to 0} \sigma(f,P,\xi)$, то для любого числа $\varepsilon > 0$ существует число $\delta > 0$ такое, что при всех разбиениях с отмеченными точками (P,ξ) с $\lambda(P) < \delta$ выполнено неравенство $\left|J - \sigma(f,P,\xi)\right| < \varepsilon$. Поскольку $s(f,P) = \inf_{\xi} \sigma(f,P,\xi)$, то существует ξ, что $s(f,P) + \varepsilon > \sigma(f,P,\xi)$. Отсюда

$$J - 2\varepsilon < \sigma(f,P,\xi) - \varepsilon < s(f,P) \le \sigma(f,P,\xi) < J + \varepsilon < J + 2\varepsilon .$$

Поэтому $\left|s(f,P) - J\right| < 2\varepsilon$ и $J = \lim_{\lambda(P)\to 0} s(f,P) = J_*$. Аналогично показываем, что $J = \lim_{\lambda(P)\to 0} S(f,P) = J^*$. Итак, $J = J_* = J^*$.

Обратно, пусть f ограничена на промежутке *I* и $J_* = J^* = J$. По теореме Дарбу

$$J = J_* = \lim_{\lambda(P)\to 0} s(f,P), \quad J = J^* = \lim_{\lambda(P)\to 0} S(f,P).$$

Значит, для любого числа $\varepsilon > 0$ существует число $\delta_\varepsilon > 0$ такое, что при всех разбиениях P промежутка *I* с $\lambda(P) < \delta_\varepsilon$ будут выполнены неравенства

$$J - \varepsilon < s(f,P) < J + \varepsilon, \;\; J - \varepsilon < S(f,P) < J + \varepsilon .$$

Отсюда, для любого разбиения с отмеченными точками (P,ξ) промежутка *I* с $\lambda(P) < \delta_\varepsilon$, выполняется

$$J - \varepsilon < s(f,P) \le \sigma(f,P,\xi) \le S(f,P) < J + \varepsilon .$$

Следовательно, $J = \lim_{\lambda(P)\to 0} \sigma(f,P,\xi)$ и $f \in R(I)$. ■

Определение Множество $E \subset \mathbf{R}^n$ имеет n-мерную меру нуль, если для любого числа $\varepsilon > 0$ существует такое покрытие $\{I_1,...,I_s,...\}$ этого множества промежутками, т.е. $E \subset \bigcup_j I_j$, что $\sum_i \mu(I_j) < \varepsilon$.

Теорема (критерий Лебега). Пусть функция $f : I \to \mathbf{R}$ ограничена на промежутке *I* и *B* – множество ее точек разрыва. Тогда f интегрируема на *I* в том и только в том случае, когда *B* – множество меры нуль.

Пусть $E \subset \mathbf{R}^n$. *Характеристическая функция* χ_E множества E определяется следующим образом: $\chi_E(x) = \begin{cases} 1, & x \in E; \\ 0, & x \notin E. \end{cases}$

Определение. Если $E \subset I$ для некоторого промежутка I и функция $f : I \to \mathbf{R}$ ограничена, то под интегралом $\int_E f(x)dx$ по множеству *E* от функции f будем понимать следующий интеграл $\int\limits_I f(x)\chi_E(x)dx$. Если последний интеграл не существует, то говорят, что функция f не интегрируема по Риману на множестве *E*. В противном случае f интегрируема на *E*.

Множество всех интегрируемых по Риману на множестве *E* функций будем обозначать *R*(*E*). Пусть *E* – произвольное множество. Назовем *внутренностью множества E* следующее множество

$$IntE = \{x \in E:\ \exists U(x) \subset E\}.$$

Точки множества $IntE$ будем называть *внутренними точками* множества *E*. Определим *границу множества* ∂E, как следующую разность $\partial E = \overline{E} \setminus IntE$.

Теорема. Характеристическая функция χ_E принадлежит $R(E)$ тогда и только тогда, когда ∂E – множество меры нуль.

Доказательство. Если x_0 – внутренняя точка множества *E*, то существует окрестность $U_\varepsilon(x_0) \subset E$. Отсюда характеристическая функция $\chi_E(x)=1$ на $U_\varepsilon(x_0)$. Поэтому она непрерывна в точке x_0. Если точка x_0 является внутренней точкой множества $\mathbf{R}^n / E$, то существует окрестность $U_\varepsilon(x_0) \subset \mathbf{R}^n / E$. Поэтому характеристическая функция $\chi_E(x)=0$ на $U_\varepsilon(x_0)$. Следовательно, она непрерывна в точке x_0. Пусть теперь точка x_0 является граничной точкой множества E. Тогда для любой окрестность $U_\varepsilon(x_0)$ выполняется

$$U_\varepsilon(x_0) \cap E \neq \varnothing,\ \ U_\varepsilon(x_0) \cap (\mathbf{R}^n / E) \neq \varnothing.$$

Поэтому в любой окрестности точки x_0 есть точки x', для которых $\chi_E(x')=1$, и есть точки x'', для которых $\chi_E(x'')=0$. Отсюда χ_E разрывна в точке x_0. Таким образом, множество точек разрыва функции χ_E совпадает с границей множества *E*. Утверждение теоремы вытекает теперь из критерия Лебега. ■

Определение. Ограниченное множество *E*, граница которого есть множество меры нуль, называется *измеримым по Жордану*. Число $\mu(E) = \int\limits_E dx$ называется *мерой Жордана* множества *E*.

Свойства интеграла Римана.

Теорема. Множество $R(E)$ представляет собой линейное пространство относительно стандартных операций сложения функций и умножения функции на число.

Доказательство. Данная теорема представляет собой очевидное следствие определения интеграла, критерия Лебега и того факта, что объединение двух множеств меры нуль также является множеством меры нуль. ■

Теорема. Если $f \in R(E)$ и $\mu(\{x \in E : f(x) \neq 0\}) = 0$, то $\int\limits_E f(x)dx = 0$.

Доказательство. Поскольку последнее неравенство в определении кратного интеграла должно выполняться при любом выборе точек ξ_i, то выбирая их так, чтобы $f(\xi_i)=0$, мы приходим к выводу $\int\limits_E f(x)dx = 0$. ■

Следствие. Если $f, g \in R(E)$ и $\mu(\{x \in E : f(x) \neq g(x)\}) = 0$, то $\int\limits_E f(x)dx = \int\limits_E g(x)dx$.

Следствие. Если $\mu(E)=0$, то $\int\limits_E f(x)dx=0$.

Теорема. Пусть множества E_1, E_2 измеримы по Жордану, а функция f интегрируема на E_1 и E_2. Тогда существует $\int\limits_{E_1\cup E_2} f(x)dx$. Если $\mu(E_1\cap E_2)=0$, то

$$\int\limits_{E_1\cup E_2} f(x)dx=\int\limits_{E_1} f(x)dx+\int\limits_{E_2} f(x)dx.$$

Доказательство. Пусть $E_1\cup E_2\subset I$. Так как объединение конечного числа множеств меры нуль есть множество меры нуль, то, по критерию Лебега, интеграл $\int\limits_{E_1\cup E_2} f(x)dx$ существует. Далее, из очевидного равенства $\chi_{E_1\cup E_2}=\chi_{E_1}+\chi_{E_2}-\chi_{E_1\cup E_2}$, получаем

$$\int\limits_{E_1\cup E_2} f(x)dx=\int\limits_I f(x)\chi_{E_1}(x)dx+\int\limits_I f(x)\chi_{E_2}(x)dx-\int\limits_I f(x)\chi_{E_1\cap E_2}(x)dx=$$

$$=\int\limits_I f(x)\chi_{E_1}(x)dx+\int\limits_I f(x)\chi_{E_2}(x)dx=\int\limits_{E_1} f(x)dx+\int\limits_{E_2} f(x)dx.\ \blacksquare$$

Теорема. Если $f\in R(E)$, то $|f|\in R(E)$ и $\left|\int\limits_E f(x)dx\right|\le\int\limits_E |f(x)|dx$.

Доказательство. По критерию Лебега, получаем $|f|\in R(E)$. Поскольку имеет место неравенство

$$\left|\sum_i f(\xi_i)\mu(I_i)\right|\le\sum_i |f(\xi_i)|\mu(I_i),$$

то ясно, что $\left|\int\limits_E f(x)dx\right|\le\int\limits_E |f(x)|dx$. ■

Теорема. Если $f\in R(E)$ и $f(x)\ge 0$ на E, то $\int\limits_E f(x)dx\ge 0$.

Доказательство. Пусть $E\subset I$. Тогда, по определению интеграла

$$\int\limits_E f(x)dx=\int\limits_I f(x)\chi_E(x)dx=\lim_{\lambda(P)\to 0}\sum_i f(\xi_i)\mu(I_i)\ge 0,$$

поскольку все слагаемые в интегральной сумме неотрицательны. ■

Отметим очевидные следствия данной теоремы.

Следствие. Если $f,g\in R(E)$ и $f(x)\le g(x)$ на E, то $\int\limits_E f(x)dx\le\int\limits_E g(x)dx$.

Следствие. Если $f\in R(E)$ и $m\le f(x)\le M$ на E, то

$$m\mu(E)\le\int\limits_E f(x)dx\le M\mu(E).$$

Следствие. Если $f\in R(E)$ и $m=\inf\limits_E f$, $M=\sup\limits_E f$, то существует число $\theta\in[m;M]$ такое, что $\int\limits_E f(x)dx=\theta\cdot\mu(E)$.

Доказательство. Если $\mu(E)=0$, то в качестве числа $\theta\in[m;M]$ можно взять любое. Если же $\mu(E)\neq 0$, то положим $\theta=\dfrac{1}{\mu(E)}\int\limits_E f(x)dx$. ■

Следствие. Если *E* ограниченное, замкнутое, линейно связное множество, а f непрерывна на *E*, то существует точка $\zeta\in E$ такая, что имеет место равенство $\int\limits_E f(x)dx=f(\zeta)\mu(E)$.

Доказательство. Функция *f* ограничена на *E,* т.к. она непрерывна на *E*. Следовательно, существует число $\theta\in[m;M]$, где $m=\inf\limits_E f$, $M=\sup\limits_E f$, для которого $\int\limits_E f(x)dx=\theta\cdot\mu(E)$. Отсюда существует точка $\zeta\in E$ такая, что $f(\zeta)=\theta$. ■

Теорема Фубини.

Пусть A и B – промежутки в $\mathbf{R}^n$ и $\mathbf{R}^m$ соответственно. Пусть на множестве $A\times B=\{(x,y):\ x\in A, y\in B\}\subset\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^m$ определена функция f. Определим при каждом фиксированном $x\in A$ функцию $g_x:B\to\mathbf{R}$ следующим равенством: $g_x(y)=f(x,y)$. Аналогично, при каждом фиксированном $y\in B$ определим функцию $g_y:A\to\mathbf{R}$ равенством $g_y(x)=f(x,y)$. Пусть P_A, P_B – произвольные разбиения промежутков *A* и *B* соответственно и

$$J_*(x)=\sup_{P_B}s(g_x,P_B),\ \ J^*(x)=\inf_{P_B}S(g_x,P_B),\ \ J_*(y)=\sup_{P_A}s(g_y,P_A),\ \ J^*(y)=\inf_{P_A}S(g_y,P_A).$$

Теорема. Если $f\in R(A\times B)$, то функции $J_*(x)$, $J^*(x)$ интегрируемы на *A* и имеют место равенства

$$\int\limits_{A\times B}f(x,y)dxdy=\int\limits_A J_*(x)dx=\int\limits_A J^*(x)dx.$$

Аналогичный результат имеет место и для функций $J_*(y)$, $J^*(y)$.

Доказательство. Пусть P_A – произвольное разбиение промежутка *A*, а P_B – произвольное разбиение промежутка *B*. Тогда $P=\{I_A\times I_B:\ I_A\in P_A,\ I_B\in P_B\}$ – разбиение промежутка $A\times B$. Если $m_I(f)=\inf\limits_{(x,y)\in I}f(x,y)$, то

$$s(f,P)=\sum_I m_I(f)\mu(I)=\sum_{I_A}\sum_{I_B}m_{I_A\times I_B}(f)\mu(I_A\times I_B)=\sum_{I_A}\left(\sum_{I_B}m_{I_A\times I_B}(f)\mu(I_B)\right)\mu(I_A).$$

Заметим, что по свойству нижней грани, при $x\in I_A$, выполняется неравенство $m_I(f)=\inf\limits_{(x,y)\in I}f(x,y)\le m_{I_B}(g_x)=\inf\limits_{y\in I_B}g_x(y)$. Поэтому, при всех $x\in I_A$, имеем

$$\sum_{I_B}m_{I_A\times I_B}(f)\mu(I_B)\le\sum_{I_B}m_{I_B}(g_x)\mu(I_B)\le J_*(x).$$

Следовательно,

$$s(f,P)\le\sum_{I_A}\inf_{x\in I_A}J_*(x)\cdot\mu(I_A)=s(J_*,P_A).$$

Аналогично $S(J^*,P_A)\le S(f,P)$. Таким образом,

$$s(f,P)\le s(J_*,P_A)\le S(J_*,P_A)\le S(J^*,P_A)\le S(f,P).$$

Так как $f \in R(A \times B)$, то $\lim\limits_{\lambda(P)\to 0} s(f,P) = \lim\limits_{\lambda(P)\to 0} S(f,P) = \int\limits_{A\times B} f(x,y)dxdy$. Отсюда и из полученного выше неравенства, получаем

$$\lim_{\lambda(P_A)\to 0} s(J_*, P_A) = \lim_{\lambda(P_A)\to 0} S(J_*, P_A) = \int\limits_{A\times B} f(x,y)dxdy.$$

Аналогично доказывается, что

$$\lim_{\lambda(P_A)\to 0} s(J^*, P_A) = \lim_{\lambda(P_A)\to 0} S(J^*, P_A) = \int\limits_{A\times B} f(x,y)dxdy.$$

Итак, по критерию Дарбу, функции $J_*(x)$, $J^*(x)$ интегрируемы на промежутке A и

$$\int\limits_{A\times B} f(x,y)dxdy = \int\limits_A J_*(x)dx = \int\limits_A J^*(x)dx. \blacksquare$$

Замечание 33.1. Если функция g_x интегрируема на *B*, то $J_*(x) = J^*(x) = \int\limits_B f(x,y)dy$.

Поэтому равенство в теореме Фубини можно записать в виде

$$\int\limits_{A\times B} f(x,y)dxdy = \int\limits_A \left(\int\limits_B f(x,y)dy \right) dx = \int\limits_A dx \int\limits_B f(x,y)dy.$$

Аналогично, если функция g_y интегрируема на *A*, то имеет место равенство

$$\int\limits_{A\times B} f(x,y)dxdy = \int\limits_B \left(\int\limits_A f(x,y)dx \right) dy = \int\limits_B dy \int\limits_A f(x,y)dx.$$

Пусть $E = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : \ a \le x \le b, \ \varphi(x) \le y \le \psi(x)\}$. Данное множество изображено на рисунке 1.

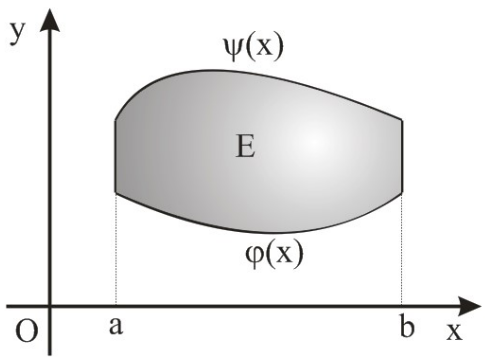


Рис. 1

Пусть функции $\varphi, \psi \in C[a,b]$. Существует промежуток $I = [a,b]\times[c,d]$, содержащий множество E. Если задана функция $f : I \to \mathbf{R}$ и выполняются условия теоремы Фубини, например, функция f непрерывна на I, то

$$\int\limits_E\int f(x,y)dxdy = \int\limits_I\int f(x,y)\cdot \chi_E(x,y)dxdy = \int\limits_a^b \left(\int\limits_c^d f(x,y)\cdot \chi_E(x,y)dy \right) dx =$$

$$= \int\limits_a^b \left(\int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)dy \right) dx = \int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)dy.$$

Итак,

$$\int\limits_E\int f(x,y)dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)dy. \qquad (1)$$

Для множества $E = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2:\ a \le y \le b,\ \ \varphi(y) \le x \le \psi(y)\}$ аналогично можно получить формулу

$$\int\limits_E\int f(x,y)dxdy = \int\limits_a^b \left(\int\limits_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x,y)dx \right) dy = \int\limits_a^b dy \int\limits_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x,y)dx. \qquad (2)$$

Также для множества $E = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^2:\ (x,y) \in D,\ \ \varphi(x,y) \le z \le \psi(x,y)\}$, которое изображено на рисунке 2, легко получить

$$\int\limits_E\int\int f(x,y,z)dxdydz = \iint\limits_D dxdy \int\limits_{\varphi(x,y)}^{\psi(x,y)} f(x,y,z)dz\ . \qquad (3)$$

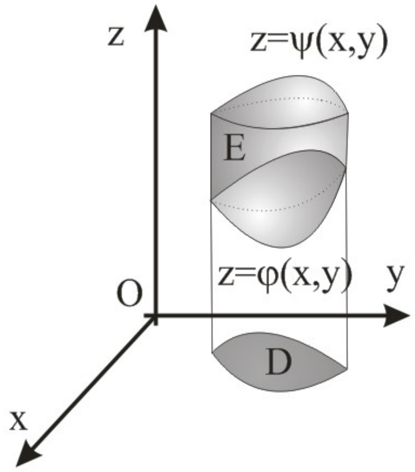


Рис. 2

Пример 1. Изменить порядок интегрирования

$$\int\limits_{-2}^{-1} dy \int\limits_{-\sqrt{2+y}}^{0} f(x,y)\,dx + \int\limits_{-1}^{0} dy \int\limits_{-\sqrt{-y}}^{0} f(x,y)\,dx\ .$$

Решение. В данном примере функция f рассматривается на множестве

$$E = \{(x,y):\ y \in [-2;-1],\ \ -\sqrt{2+y} \le x \le 0\} \cup \{(x,y):\ y \in [-1;0],\ \ -\sqrt{-y} \le x \le 0\}\ .$$

Это множество показано на рисунке 3.

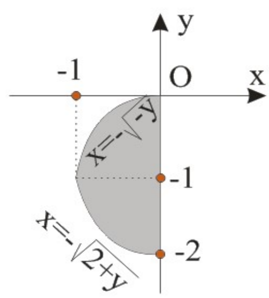


Рис. 3

Следовательно,

$$\int\limits_{-2}^{-1} dy \int\limits_{-\sqrt{2+y}}^{0} f(x,y)\,dx + \int\limits_{-1}^{0} dy \int\limits_{-\sqrt{-y}}^{0} f(x,y)\,dx = \int\limits_{-1}^{0} dx \int\limits_{x^2-2}^{-x^2} f(x,y)dy\ .$$

Пример 2. Вычислить $\iint\limits_E (12x^2y^2+16x^3y^3)dxdy,\quad E: x=1,\ y=x^2, y=-\sqrt{x}$.

Решение. Множество E изображено на рисунке 4. Следовательно,

$$\iint\limits_E (12x^2y^2+16x^3y^3)dxdy=\int\limits_0^1 dx\int\limits_{-\sqrt{x}}^{x^2}(12x^2y^2+16x^3y^3)dy=\int\limits_0^1 (12x^2\frac{y^3}{3}+16x^3\frac{y^4}{4})\Big|_{-\sqrt{x}}^{x^2}dx=$$

$$=4\int\limits_0^1 (x^8+x^{11}+x^3\sqrt{x}-x^5)dx=4\left(\frac{1}{9}+\frac{1}{12}+\frac{2}{9}-\frac{1}{6}\right)=1.$$

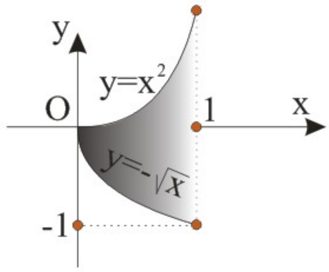
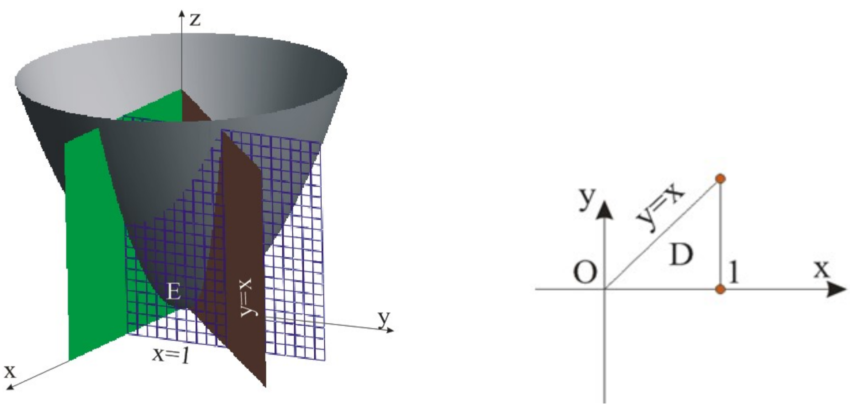


Рис. 4

Пример 3. Вычислить

$$\iiint\limits_E (9+18z)dxdydz,\quad E: y=x,\ y=0,\ x=1,\ z=x^2+y^2,\ z=0.$$

Решение. Множество E и его проекция D на плоскость Oxy представлены на рисунках 5 а) и 5 б).



а) б)

Рис. 5

По теореме Фубини, находим

$$\iiint_E (9+18z)dxdydz = \iint_D dxdy \int_0^{x^2+y^2} (9+18z)dz = \iint_D \left(9z+9z^2\right)\Big|_0^{x^2+y^2} dxdy =$$

$$=9\int_0^1 dx \int_0^x (x^2+y^2+x^4+y^4+2x^2y^2)dy = 9\int_0^1 \left(x^2y+\frac{y^3}{3}+yx^4+\frac{y^5}{5}+2x^2\frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_0^x dx =$$

$$=9\int_0^1 \left(x^3+\frac{x^3}{3}+x^5+\frac{x^5}{5}+\frac{2}{3}x^5\right)dx = 9\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{12}+\frac{1}{6}+\frac{1}{30}+\frac{1}{9}\right)=\frac{29}{5}.$$

Замена переменных в кратном интеграле.

Определение 6. Говорят, что отображение $f:U\to\mathbf{R}^n$, $U\subset\mathbf{R}^m$, $f(x)=(f_1(x_1,...,x_m),...,f_n(x_1,...,x_m))$ принадлежит классу C^1, если все частные производные $\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}$ существуют и непрерывны всюду на U.

Введем в рассмотрение матрицу из частных производных

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2} \cdots \dfrac{\partial f_1}{\partial x_m} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2} \cdots \dfrac{\partial f_2}{\partial x_m} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{\partial f_n}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_n}{\partial x_2} \cdots \dfrac{\partial f_n}{\partial x_m} \end{pmatrix}.$$

Данная матрица называется *матрицей Якоби отображения* f. Если $m=n$, то определитель матрицы Якоби называется *якобианом отображения* f и обозначается

$$\frac{\partial(f_1,...,f_n)}{\partial(x_1,...,x_n)}.$$

Определение. Пусть $V_1\subset\mathbf{R}^n$, $V_2\subset\mathbf{R}^n$ – открытые подмножества пространства $\mathbf{R}^n$. Отображение $f:V_1\to V_2$ называется *диффеоморфизмом*, если оно взаимно однозначно и отображения $f:V_1\to V_2$ и $f^{-1}:V_2\to V_1$ принадлежат классу C^1.

Теорема. Пусть $g:G\to U$, $g(t_1,...,t_n)=(g_1(t_1,...,t_n),...,g_n(t_1,...,t_n))$ – отображение измеримого (по Жордану) множества $G\subset\mathbf{R}^n$ на такое же множество $U\subset\mathbf{R}^n$, причем, можно указать такие множества A_G и A_U меры нуль, что $G\setminus A_G$ и $U\setminus A_U$ – открытые множества и $g:G\setminus A_G\to U\setminus A_U$ – диффеоморфизм и имеет ограниченный якобиан. Тогда для любой функции $f\in R(U\setminus A_U)$ функция $\left(f\circ g\right)\cdot\left|\dfrac{\partial(g_1,...,g_n)}{\partial(t_1,...,t_n)}\right|$ принадлежит $R(G\setminus A_G)$ и имеет место равенство

$$\int_U f\,dx = \int_G \left(f\circ g\right)(t)\cdot\left|\frac{\partial(g_1,...,g_n)}{\partial(t_1,...,t_n)}\right| dt. \tag{4}$$

Рассмотрим некоторые важные для дальнейшего примеры отображений g.

1) Пусть на плоскости фиксирована декартова система координат Oxy. Точку M на плоскости можно задать, если указать длину ρ радиус-вектора этой точки и угол φ, который радиус-вектор образует с положительным направлением оси Ox. Числа ρ, φ называются *полярными координатами точки М* (рис. 6).

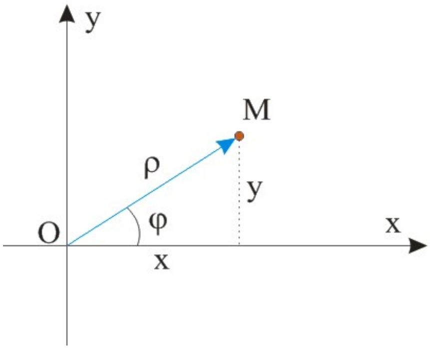


Рис. 6

Как легко видеть, декартовы координаты x, y точки M связаны с ее полярными координатами следующими очевидными соотношениями $x = \rho\cos\varphi,\ \ y = \rho\sin\varphi$. Если мы будем откладывать ρ, φ по двум взаимно перпендикулярным осям, то каждой точке полуплоскости $\rho \ge 0$ с помощью отображения $g(\rho,\varphi) = (\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)$ ставится в соответствие вполне определенная точка на плоскости Oxy. Заметим, что данное отображение на всей полуплоскости $\rho \ge 0$ не является взаимно однозначным. Кроме того, вся прямая $\rho = 0$ переходит в одну единственную точку $(0,0)$. Якобиан отображения g равен, очевидно, ρ. Следовательно, по формуле (33.4), получаем

$$\int\limits_E\int f(x,y)dxdy = \int\limits_G\int \rho f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)d\rho d\varphi \tag{5}$$

Иногда бывает полезно переходить к обобщенным полярным координатам ρ, φ, которые связаны с декартовыми координатами следующими соотношениями:

$$\begin{cases} x = a\rho\cos\varphi, \\ y = b\rho\sin\varphi, \end{cases} \quad a, b \in \mathbf{R}$$

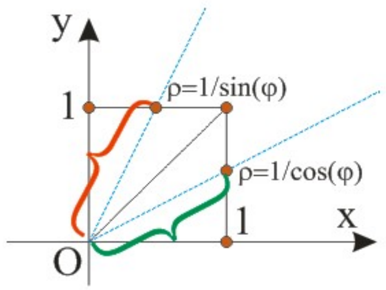
Такой переход представляет собой два последовательных преобразования:

$$\begin{cases} x = ax'; \\ y = by', \end{cases} \qquad \begin{cases} x' = \rho\cos\varphi, \\ y' = \rho\sin\varphi. \end{cases}$$

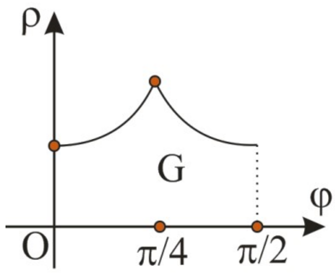
Модуль якобиана отображения $g(\rho,\varphi) = (a\rho\cos\varphi, b\rho\sin\varphi)$, очевидно, равен $ab\rho$.

Пример 4. Перейти к полярным координатам в двойном интеграле $\int\limits_E\int f(x,y)dxdy,\ \ E = [0,1]\times[0,1]$.

Решение. Для нахождения в формуле (5) области G изменения полярных координат у точек множества E, мы рассмотрим следующий прием. Ясно, что у точек множества E, полярный угол принадлежит промежутку $\left[0;\pi/2\right]$. Зафиксируем теперь произвольное значение полярного угла φ и рассмотрим все точки плоскости, у которых полярный угол равен φ. Это точки луча с началом в начале координат. Часть этого луча принадлежит множеству E и мы найдем в каких пределах изменяется значения полярного радиуса у точек этой части луча. Из рисунка 7 а) видно, что для $\varphi \in [0; \pi/4]$ значение $\rho \in [0; 1/\cos\varphi]$, а для $\varphi \in [\pi/4; \pi/2]$ значение $\rho \in [0; 1/\sin\varphi]$. Множество G показано на рисунке 7 б).



а)



б)

Рис. 7

Следовательно, по формуле (5) и теореме Фубини, находим

$$\iint_E f(x,y)dxdy = \iint_G \rho f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)d\rho d\varphi = \int_0^{\pi/4} d\varphi \int_0^{\frac{1}{\cos\varphi}} \rho f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)d\rho d\varphi +$$

$$+\int_{\pi/4}^{\pi/2} d\varphi \int_0^{\frac{1}{\sin\varphi}} \rho f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)d\rho d\varphi.$$

Пример 5. Вычислить $\int_0^3 dy \int_{3-\sqrt{9-y^2}}^{3+\sqrt{9-y^2}} \sqrt{36-x^2-y^2}\,dx$.

Решение. Область D ограничена линиями $x = 3 \pm \sqrt{9-y^2}$, $y \in [0;3]$. Преобразуем уравнения: $(x-3)^2 + y^2 = 9$ или $x^2 + y^2 = 6x$. Получили уравнение окружности. Таким образом, наша область – полукруг (рис. 8), поэтому имеет смысл перейти к полярным координатам.

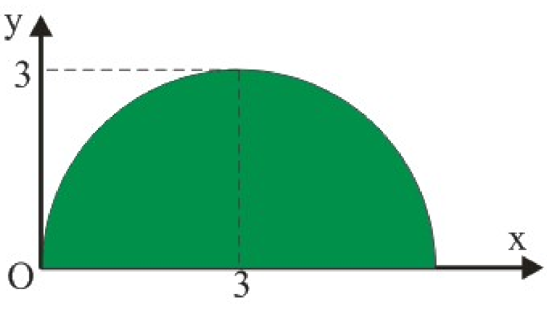


Рис. 8

Подставим $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$ в уравнение окружности и в подынтегральную функцию:

$$x^2 + y^2 = 6x\,,\ \rho^2 = 6\rho\cos\varphi,\quad \rho = 6\cos\varphi\,,$$

причем $\varphi \in [0; \pi/2]$ так как $y \in [0;3]$;

$$\sqrt{36-x^2-y^2} = \sqrt{36-\rho^2}\,.$$

Итак,

$$\int_0^3 dy \int_{3-\sqrt{9-y^2}}^{3+\sqrt{9-y^2}} \sqrt{36-x^2-y^2}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{6\cos\varphi} \sqrt{36-\rho^2}\cdot\rho\,d\rho = -\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{6\cos\varphi} \sqrt{36-\rho^2}\cdot d\left(36-\rho^2\right) =$$

$$= -\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{2}{3}\left(36-\rho^2\right)^{\frac{3}{2}}\Bigg|_0^{6\cos\varphi}\right)d\varphi = -\frac{6^3}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\sin^3\varphi-1\right)d\varphi = \frac{6^3}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1-\cos^2\varphi\right)d\cos\varphi + \frac{6^3}{3}\varphi\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= 72\left(\cos\varphi - \frac{1}{3}\cos^3\varphi\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} + 36\pi = 36\pi - 48.$$

Пример 6. Вычислить $\iint\limits_{(D)} \frac{dxdy}{\left(x^2+y^2\right)^2}$, если область D ограничена линиями

$$y = x,\quad y = 2x,\quad x^2 + y^2 = 4x,\quad x^2 + y^2 = 8x\,.$$

*Решение***.** Данная область D ограничена двумя прямыми и двумя окружностями (рис. 9), поэтому удобно при вычислении интеграла воспользоваться полярными координатами. Запишем уравнения границ в полярных координатах:

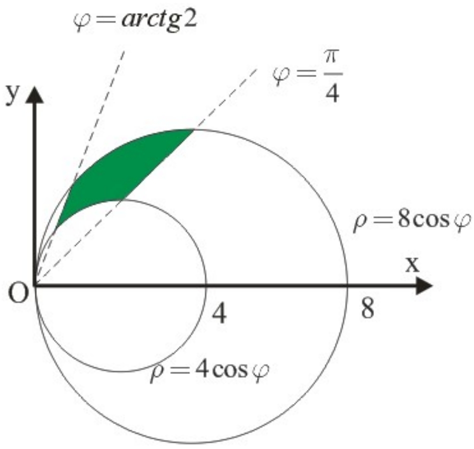


Рис. 9

$$y = x,\quad \sin\varphi = \cos\varphi,\quad \varphi = \frac{\pi}{4};$$

$$y = 2x,\quad \sin\varphi = 2\cos\varphi,\ \varphi = \operatorname{arctg} 2\,;$$

$$x^2 + y^2 = 4x,\ \rho^2 = 4\rho\cos\varphi,\ \rho = 4\cos\varphi\,;$$

$$x^2 + y^2 = 8x,\ \rho^2 = 8\rho\cos\varphi,\ \rho = 8\cos\varphi\,.$$

Учитывая, что $\left(x^2 + y^2\right)^2 = \rho^4$, получаем:

$$\iint\limits_{(D)} \frac{dxdy}{\left(x^2+y^2\right)^2} = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\operatorname{arctg}2} d\varphi \int_{4\cos\varphi}^{8\cos\varphi} \frac{d\rho}{\rho^3} = \frac{3}{128}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\operatorname{arctg}2} \frac{d\varphi}{\cos^2\varphi} = \frac{3}{128}\operatorname{tg}\varphi\Bigg|_{\frac{\pi}{4}}^{\operatorname{arctg}2} = \frac{3}{128}.$$

Пример 7. В интеграле $\int\limits_0^2 dy \int\limits_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} f(x,y)dx$ перейти к полярным координатам ρ и φ, полагая $x=\rho\cos\varphi$, $y=\rho\sin\varphi$, расставить пределы интегрирования в повторном интеграле вида $\int\limits_A^B d\varphi \int\limits_{f1(\varphi)}^{f2(\varphi)} f(\rho,\varphi)d\rho$.

*Решение***.** Область D ограничена линиями $x=\pm\sqrt{4-y^2}$, $y\in[0;2]$. Возводя в квадрат, получим уравнение окружности $x^2+y^2=4$, то есть D – полукруг. Перейдем к полярным координатам: $x=\rho\cos\varphi$, $y=\rho\sin\varphi$. Подставляя эти формулы в уравнение окружности, получим $\rho=2$, $\varphi\in[0;\pi]$, так как $y\in[0;2]$ и D расположена в 1 и 2 четвертях. Итак,

$$\int\limits_0^2 dy \int\limits_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} f(x,y)dx = \int\limits_0^{\pi} d\varphi \int\limits_0^2 f(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi)\cdot\rho\cdot d\rho\,\textbf{.}$$

Пример 8. В интеграле $\int\limits_0^1 dx \int\limits_{1-x}^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)dy$ перейти к полярным координатам ρ и φ, полагая $x=\rho\cos\varphi$, $y=\rho\sin\varphi$, расставить пределы интегрирования в повторном интеграле вида $\int\limits_A^B d\varphi \int\limits_{f1(\varphi)}^{f2(\varphi)} f(\rho,\varphi)d\rho$.

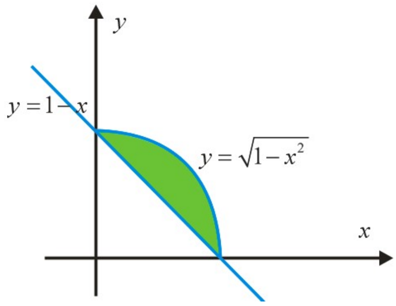


Рис. 10

*Решение***.** Область D ограничена линиями $y=1-x$, $y=\sqrt{1-x^2}$, $x\in[0;1]$. Первая из них – прямая, вторая – верхняя часть окружности $x^2+y^2=1$, $x\in[0;1]$. Поскольку D расположена в первой четверти, $\varphi\in[0;\pi/2]$. Чтобы определить границы для переменной ρ, подставим $x=\rho\cos\varphi$, $y=\rho\sin\varphi$ в уравнения линий, ограничивающих D, получим $\rho=1$ и $\rho=\dfrac{1}{\sin\varphi+\cos\varphi}$

Итак,

$$\int\limits_0^1 dx \int\limits_{1-x}^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dy = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_{\frac{1}{\cos\varphi+\sin\varphi}}^{1} f(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi)\cdot\rho\cdot d\rho\,\textbf{.}$$

2) Пусть в пространстве фиксирована декартова система координат $Oxyz$. Точку M можно задать, указав ее аппликату z и полярные координаты ρ,φ проекции точки M на плоскость Oxy. Числа ρ,φ,z называются цилиндрическими координатами точки M. Очевидна их связь с декартовыми координатами $x=\rho\cos\varphi,\ y=\rho\sin\varphi,\ z=z$. Якобиан отображения $g(\rho,\varphi,z)=(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi,z)$, как легко видеть, равен ρ. Следовательно, по формуле (4), получаем

$$\iiint_E f(x,y,z)dxdydz=\iiint_G \rho f(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi,z)\,d\rho\,d\varphi\,dz. \qquad (6)$$

Иногда бывает полезно переходить к, так называемым, обобщенным цилиндрическим координатам ρ,φ,z', которые связаны с декартовыми координатами следующими соотношениями:

$$\begin{cases} x=a\rho\cos\varphi; \\ y=b\rho\sin\varphi; \quad a,b,c\in\mathbf{R}. \\ z=cz', \end{cases}$$

Такой переход представляет собой два последовательных преобразования:

$$\begin{cases} x=ax'; \\ y=by'; \\ z=cz', \end{cases} \qquad \begin{cases} x'=\rho\cos\varphi; \\ y'=\rho\sin\varphi; \\ z'=z'. \end{cases}$$

Модуль якобиана отображения $g(\rho,\varphi,z')=(a\rho\cos\varphi,b\rho\sin\varphi,cz')$, очевидно, равен $abc\rho$.

Пример 9. Перейти к цилиндрическим координатам в тройном интеграле $\iiint_E f(x,y,z)dxdydz$, где область E ограничена поверхностями $z=3\sqrt{x^2+y^2}$, $z=10-x^2-y^2$.

Решение. Множество E показано на рисунке 11 а). Проекция D множества E на плоскость Oxy представляет собой круг, радиус которого мы найдем, если найдем линию пересечения данных поверхностей. Эта линия находится из решения системы уравнений

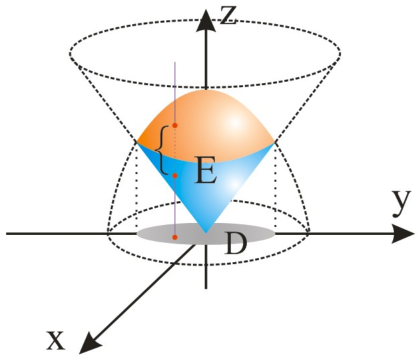
$$\begin{cases} z=3\sqrt{x^2+y^2}, \\ z=10-x^2-y^2. \end{cases}$$

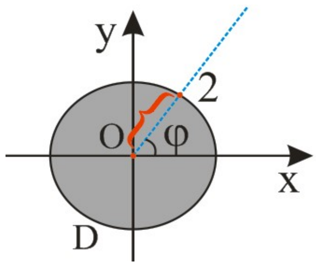
Отсюда получаем

$$\begin{cases} z=6, \\ x^2+y^2=4. \end{cases}$$

Следовательно, граница проекции D – это окружность радиуса 2 (рис. 11 б)). Для нахождения, в формуле (6), области G изменения цилиндрических координат точек множества E, мы используем прием аналогичный описанному в предыдущем примере (рис 11). Ясно, что полярный угол у точек множества E изменяется в промежутке $[0;2\pi]$. Зафиксируем произвольное значение полярного угла, проведем луч из точки O и рассмотрим, в каких пределах меняется полярный радиус у точек той части луча, которая принадлежит D. Очевидно, что $\rho\in[0;2]$. Далее зафиксируем произвольную точку (ρ,φ) в проекции D и проведем прямую параллельно оси Oz. Найдем точки пересечения этой прямой с границей множества E. Аппликаты этих точек и дадут нам отрезок изменения координаты z у точек множества E. Из уравнения поверхностей находим $z \in [3\rho; 10-\rho^2]$. Итак, по теореме Фубини, получаем

$$\iiint_E f(x,y,z)dxdydz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 d\rho \int_{3\rho}^{10-\rho^2} \rho f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi, z)\, dz .$$





а) б)

Рис. 11

3) Пусть в пространстве фиксирована декартова система координат $Oxyz$. Точку M можно задать, указав длину r радиус-вектора этой точки, угол θ, который радиус-вектор образует с плоскостью Oxy и полярный угол φ проекции точки M на плоскость Oxy (рис 12).

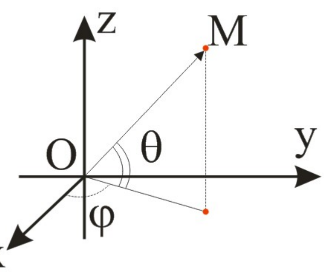


Рис. 12

Числа r,θ,φ называются сферическими координатами точки M. Заметим, что иногда в качестве угла θ берут угол между радиус-вектором точки M и ортом $\vec{k}$. Как легко видеть, между декартовыми и сферическими координатами точки M существует простая связь: $x = r\cos\theta\cos\varphi$, $y = r\cos\theta\sin\varphi$, $z = r\sin\theta$, а модуль якобиана отображения $g(r,\varphi,\theta) = (r\cos\theta\cos\varphi,\ r\cos\theta\sin\varphi,\ r\sin\theta)$ равен $r^2\cos\theta$. Следовательно, по формуле (4), получаем

$$\iiint_E f(x,y,z)dxdydz = \iiint_G f(r\cos\theta\cos\varphi,\ r\cos\theta\sin\varphi,\ r\sin\theta) r^2 \cos\theta drd\theta d\varphi \qquad (7)$$

Иногда бывает полезно переходить к, так называемым, обобщенным сферическим координатам r,θ,φ, которые связаны с декартовыми координатами следующими соотношениями:

$$\begin{cases} x = a\,r\cos\theta\cos\varphi, \\ y = b\,r\cos\theta\sin\varphi, \quad a,b,c \in \mathbf{R} \\ z = c\,r\sin\theta, \end{cases}$$

Как и выше, такой переход представляет собой, по сути, два последовательных преобразования:

$$\begin{cases} x = ax'; \\ y = by'; \\ z = cz', \end{cases} \qquad \begin{cases} x' = r\cos\theta\cos\varphi, \\ y' = r\cos\theta\sin\varphi, \\ z' = r\sin\theta. \end{cases}$$

Модуль якобиана отображения $g(r,\varphi,\theta) = (ar\cos\theta\cos\varphi,\ br\cos\theta\sin\varphi,\ cr\sin\theta)$, очевидно, равен $abcr^2\cos\theta$.

Пример 10. Перейти к сферическим координатам в тройном интеграле $\iiint\limits_E f(x^2+y^2+z^2)dxdydz$, если множество E ограничено поверхностями

$$z = x^2 + y^2,\ x = y,\ x = 1,\ y = 0,\ z = 0.$$

Решение. Множество E представлено на рисунке 10. По формуле (7), находим

$$\iiint\limits_E f(x^2+y^2+z^2)dxdydz = \iiint\limits_G f(r^2)r^2\cos\theta drd\theta d\varphi.$$

Ясно, что полярный угол φ точек множества E изменяется на отрезке $[0;\pi/4]$. Зафиксируем произвольное значение угла φ из данного отрезка и проведем плоскость Σ_φ через ось Oz и луч с началом в точке O, образующий с положительным направлением оси Ox угол φ (рис. 13). Часть этой плоскости содержится в E. Определим, как меняется угол θ точек этой части. Поскольку линия L пересечения плоскости x=1 и параболоида $z = x^2 + y^2$ задается уравнениями $\begin{cases} z = 1 + y^2, \\ x = 1, \end{cases}$ то несложно найти наибольшее значение угла θ. Он соответствует точке пересечения $L \cap \Sigma_\varphi$. Из уравнения линии L находим

$$\begin{cases} r\sin\theta = 1 + r^2\cos^2\theta\sin^2\varphi, \\ r\cos\theta\cos\varphi = 1, \end{cases} \quad \frac{tg\theta}{\cos\varphi} = 1 + tg^2\varphi, \quad tg\theta = \frac{1}{\cos\varphi}, \quad \theta = arctg\left(\frac{1}{\cos\varphi}\right).$$

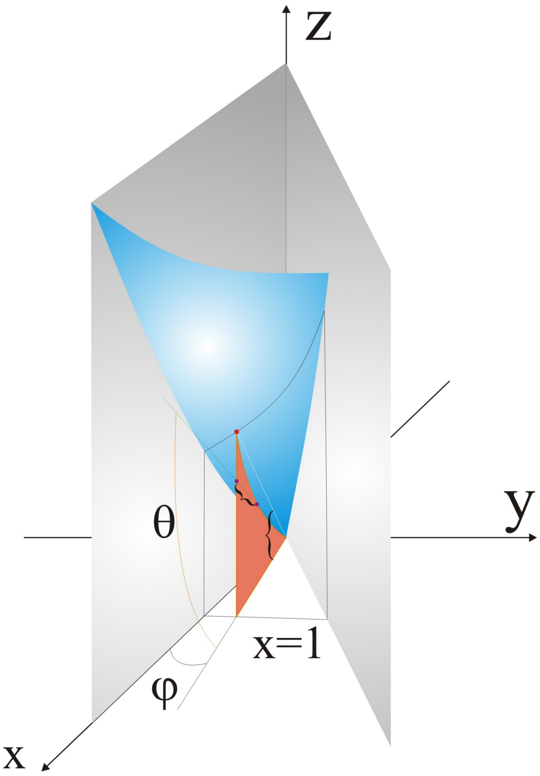


Рис. 13

Итак, $\theta \in \left[0;\, arctg\left(\frac{1}{\cos\varphi}\right)\right]$. Зафиксировав теперь значения θ, φ, проведем луч с началом в точке O, соответствующий фиксированным значениям углов. Такой луч сначала пересечет параболоид в некоторой точке, а затем плоскость $x = 1$. Эти две точки и определят нам границы изменения r. Поскольку уравнение параболоида в сферических координатах имеет вид $r = \frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}$, а уравнение плоскости $x = 1$ имеет вид $r = \frac{1}{\cos\theta\cos\varphi}$, то получаем $r \in \left[\frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}; \frac{1}{\cos\theta\cos\varphi}\right]$. Итак, по теореме Фубини, находим

$$\int\int_E\int f(x^2+y^2+z^2)dxdydz = \int_0^{\pi/4} d\varphi \int_0^{arctg\left(\frac{1}{\cos\varphi}\right)} d\theta \int_{\frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}}^{\frac{1}{\cos\theta\cos\varphi}} f(r^2)r^2\cos\theta dr\,.$$

Лекция 2. Элементы дифференциальной геометрии

Определение. Будем говорить, что на промежутке T определена вектор-функция, если каждому элементу $t\in T$ поставлен в соответствие вектор $\vec{a}(t)$.

Определение. Назовем вектор $\vec{b}$ пределом вектор-функции $\vec{a}(t)$ при $t\to t_0$, если $\lim\limits_{t\to t_0}\left|\vec{a}(t)-\vec{b}\right|=0$. При выполнении последнего условия, будем писать $\lim\limits_{t\to t_0}\vec{a}(t)=\vec{b}$.

Теорема. Если $\lim\limits_{t\to t_0}\vec{a}(t)=\vec{b}$, то $\lim\limits_{t\to t_0}\left|\vec{a}(t)\right|=\left|\vec{b}\right|$.

Доказательство. Утверждение теоремы, очевидно, следует из неравенства

$$\left|\left|\vec{a}(t)\right|-\left|\vec{b}\right|\right|\le\left|\vec{a}(t)-\vec{b}\right|$$

и равенства $\lim\limits_{t\to t_0}\left|\vec{a}(t)-\vec{b}\right|=0$. ■

Определение. Будем называть вектор-функцию $\vec{a}(t)$ непрерывной в точке t_0, если $\lim\limits_{t\to t_0}\vec{a}(t)=\vec{a}(t_0)$.

Определение. Назовем вектор $\vec{b}$ производной вектор-функции $\vec{a}(t)$ в точке t_0, если $\lim\limits_{t\to t_0}\dfrac{\vec{a}(t)-\vec{a}(t_0)}{t-t_0}=\vec{b}$. Производную вектор-функции $\vec{a}(t)$ в точке t_0 будем обозначать $\vec{a}'(t_0)$.

Теорема. Пусть существуют пределы $\lim\limits_{t\to t_0}\vec{a}(t)=\vec{A}$ и $\lim\limits_{t\to t_0}\vec{b}(t)=\vec{B}$. Тогда

а) существует предел $\lim\limits_{t\to t_0}(\vec{a}(t)+\vec{b}(t))$ и он равен сумме пределов $\lim\limits_{t\to t_0}\vec{a}(t)$ и $\lim\limits_{t\to t_0}\vec{b}(t)$;

б) существует предел $\lim\limits_{t\to t_0}\left(\vec{a}(t),\vec{b}(t)\right)=\left(\vec{A},\vec{B}\right)$.

*Доказательство***.** Утверждение первой части теоремы следует из неравенства

$$\left|\vec{a}(t)+\vec{b}(t)-\vec{A}-\vec{B}\right|\le\left|\vec{a}(t)-\vec{A}\right|+\left|\vec{b}(t)-\vec{B}\right|.$$

Для доказательства второй части, воспользуемся теоремой 34.1, свойством скалярного произведения

$$\left|\left(\vec{a}(t),\vec{b}(t)\right)-\left(\vec{A},\vec{B}\right)\right|=\left|\left(\vec{a}(t)-\vec{A},\vec{b}(t)\right)+\left(\vec{b}(t)-\vec{B},\vec{A}\right)\right|\le$$
$$\le\left|\vec{a}(t)-\vec{A}\right|\cdot\left|\vec{b}(t)\right|+\left|\vec{b}(t)-\vec{B}\right|\cdot\left|\vec{A}\right|$$

и равенствами $\lim\limits_{t\to t_0}\left|\vec{a}(t)-\vec{A}\right|=0,\quad \lim\limits_{t\to t_0}\left|\vec{b}(t)-\vec{B}\right|=0$. ■

Теорема. Пусть вектор-функции $\vec{a}(t)$ и $\vec{b}(t)$ имеют производные в точке t, тогда вектор-функция $\vec{a}(t)+\vec{b}(t)$ имеет производную в точке t и справедливо равенство $\left(\vec{a}(t)+\vec{b}(t)\right)'=\vec{a}'(t)+\vec{b}'(t)$.

Теорема. Пусть вектор-функции $\vec{a}(t)$ и $\vec{b}(t)$ непрерывны в точке t_0 и имеют в этой точке производные. Тогда функция $f(t)=\left(\vec{a}(t),\vec{b}(t)\right)$ имеет производную в точке t_0 и справедливо равенство $f'(t_0)=\left(\vec{a}'(t_0),\vec{b}(t_0)\right)+\left(\vec{a}(t_0),\vec{b}'(t_0)\right)$.

*Доказательство***.** Имеем

$$\frac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0}=\left(\frac{\vec a(t)-\vec a(t_0)}{t-t_0},\vec b(t)\right)+\left(\vec a(t_0),\frac{\vec b(t)-\vec b(t_0)}{t-t_0}\right).$$

Так как существуют пределы

$$\lim_{t\to t_0}\frac{\vec a(t)-\vec a(t_0)}{t-t_0}=\vec a'(t_0),\quad \lim_{t\to t_0}\frac{\vec b(t)-\vec b(t_0)}{t-t_0}=\vec b'(t_0),\ \lim_{t\to t_0}\vec b(t)=\vec b(t_0),$$

то, $f'(t_0)=\left(\vec a'(t_0),\vec b(t_0)\right)+\left(\vec a(t_0),\vec b'(t_0)\right)$. ■

Теорема. Пусть функция $g(t)$ и вектор-функция $\vec a(t)$ имеет производную в точке t_0. Тогда вектор-функция $g(t)\cdot\vec a(t)$ имеет производную в точке t_0 и справедливо равенство

$$\left.\left(g(t)\cdot\vec a(t)\right)'\right|_{t=t_0}=g'(t_0)\cdot\vec a(t_0)+g(t_0)\vec a'(t_0).$$

Доказательство. Утверждение теоремы очевидным образом получается из равенства

$$\frac{g(t)\cdot\vec a(t)-g(t_0)\cdot\vec a(t_0)}{t-t_0}=g(t)\cdot\frac{\vec a(t)-\vec a(t_0)}{t-t_0}+\vec a(t_0)\cdot\frac{g(t)-g(t_0)}{t-t_0}.\ ■$$

Определение. Пусть в пространстве фиксирована декартова система координат $Oxyz$ и задана некоторая непрерывная вектор-функция $\vec r=\vec r(t)$, $t\in[a;b]$. Будем при всех значениях t откладывать вектор $\vec r(t)$ от точки O. При каждом значении t мы получаем определенный вектор $\vec{OM}=\vec r(t)$, начало которого в точке O, а конец зависит от выбора значения t. При изменении t на промежутке $[a;b]$ точка M описывает геометрическое место точек, которое мы будем называть *параметрически заданной кривой*. Сама вектор-функция $\vec r=\vec r(t)$, $t\in[a;b]$ называется *векторным параметрическим представлением кривой*. При задании кривой будем использовать следующее обозначение: $\gamma:\vec r(t),\ t\in[a;b]$.

Если существует несколько значений параметра t, при которых $\vec r(t)$ принимает одно и тоже значение, то говорят, что кривая имеет *точки самопересечения* или *кратные точки*. Кривая без точек самопересечения называется *простой*. Если $\vec r(a)=\vec r(b)$, то кривая называется *замкнутой кривой* или *контуром*. Если у контура кроме точек, соответствующих значениям параметра $t=a$ и $t=b$ других кратных точек нет, то контур называется *простым*.

Обозначим $\vec i,\vec j,\vec k$ орты координатных осей декартовой системы координат. Тогда вектор $\vec r(t)$ можно разложить по базису $\vec i,\vec j,\vec k$

$$\vec r(t)=\varphi(t)\cdot\vec i+\psi(t)\cdot\vec j+\chi(t)\cdot\vec k.$$

На основании доказанных теорем, мы можем утверждать, что функции φ,ψ,χ дифференцируемы столько раз, сколько дифференцируема функция $\vec r(t)$ т.к. $\varphi(t)=\vec r(t)\cdot\vec i$, $\psi(t)=\vec r(t)\cdot\vec j$, $\chi(t)=\vec r(t)\cdot\vec k$. Причем, $\vec r'(t)=\varphi'(t)\cdot\vec i+\psi'(t)\cdot\vec j+\chi'(t)\cdot\vec k$.

Определение. Если $\varphi,\psi,\chi\in C^k[a;b]$, то кривая с параметрическим представлением $\vec r=\vec r(t)$, $t\in[a;b]$ называется k раз непрерывно дифференцируемой. В этом случае говорят, что кривая принадлежит классу C^k.

Предположим, что задана строго монотонная функция $\lambda:[\alpha;\beta]\to[a;b]$, причем $\lambda([\alpha;\beta])=[a;b]$. Пусть $\vec\rho(\tau)=\vec r(\lambda(\tau))$, $\tau\in[\alpha;\beta]$. Введем обозначения

$$\Gamma_1 = \{M \in \mathbf{R}^3 : \exists \tau \in [\alpha,\beta],\ \vec{OM} = \vec{\rho}(\tau)\}; \quad \Gamma_2 = \{N \in \mathbf{R}^3 : \exists t \in [a,b],\ \vec{ON} = \vec{r}(t)\}.$$

Теорема. Имеет место равенство $\Gamma_1 = \Gamma_2$.

Таким образом, на кривой можно произвольно менять параметризацию, отчего меняется вид параметрического представления. Заметим, что порядок точек на отрезке $[a;b]$ порождает порядок точек на кривой. Точка M_t, $\vec{OM_t} = \vec{r}(t)$ считается *следующей* за точкой $M_{t'}$, $\vec{OM_{t'}} = \vec{r}(t')$, если $a \le t' \le t \le b$. Точка M_a называется *началом* кривой, а точка M_b – *концом* кривой. Если указанный порядок желательно сохранить и при других представлениях кривой, то необходимо сузить класс допустимых преобразований параметра, а именно, допускать лишь строго возрастающие преобразования параметра. Кривую, у которой выбрали начальную и конечную точки, будем называть *ориентированной кривой*. Выражения $\gamma = \breve{AB}$ и $\gamma = \breve{BA}$ являются записью кривой с противоположными ориентациями. Наглядно, задать ориентацию кривой – это значит указать, как проходится эта кривая от точки *A* к точке *B*, или от точки *B* к точке *A*. Замкнутую кривую можно ориентировать, разрезав ее в произвольной точке и ориентируя полученную незамкнутую кривую.

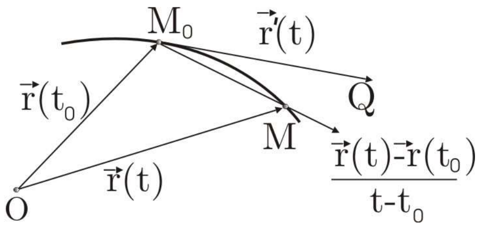


Рис. 1

Выясним геометрический смысл производной $\vec{r}'(t)$. Для этого рассмотрим две точки M_0 и M кривой, которым соответствуют радиус-векторы $\vec{r}(t_0)$ и $\vec{r}(t)$ (рис. 1). Очевидно, что вектор $\dfrac{\vec{r}(t)-\vec{r}(t_0)}{t-t_0}$ коллинеарен вектору $\vec{r}(t)-\vec{r}(t_0)$. Пусть существует производная $\vec{r}'(t_0) \ne 0$. Устремим t к t_0. Тогда, в силу непрерывности $\vec{r}(t)$ в точке t_0, имеем $\lim\limits_{t\to t_0}\left|\vec{r}(t)-\vec{r}(t_0)\right| = 0$. Это означает, что точка M стремится к точке M_0. Секущая M_0M, вращаясь в пространстве около точки M_0, остается в каждый момент направленной по вектору $\dfrac{\vec{r}(t)-\vec{r}(t_0)}{t-t_0}$. Поскольку вектор-функция $\dfrac{\vec{r}(t)-\vec{r}(t_0)}{t-t_0}$ стремится к вектору $\vec{r}'(t_0)$, то секущая также стремится к предельному положению, а именно – к прямой M_0Q, направленной по вектору $\vec{r}'(t_0)$.

Определение. Предельное положение M_0Q для секущей мы будем называть касательной к кривой в точке M_0.

Итак, вектор $\vec{r}'(t_0)$ является направляющим вектором касательной к кривой в точке M_0.

Определение. Пусть кривая $\gamma : \vec{r} = \vec{r}(t), t \in [a;b]$ является кривой класса C^1. Длиной кривой называется число $\int\limits_a^b \left|\vec{r}'(t)\right| dt$.

Лемма. Длина кривой γ не зависит от выбора параметрического представления кривой.

Доказательство. Пусть $\vec{\rho}(\tau),\ \tau\in[\alpha;\beta]$ другое параметрическое представление кривой γ. Тогда существует строго монотонная функция $\lambda:[\alpha;\beta]\to[a;b]$ такая, что

1. $\lambda([\alpha;\beta])=[a;b]$;
2. $\lambda\in C^1[\alpha;\beta]$;
3. $\vec{r}(\lambda(\tau))=\vec{\rho}(\tau),\ \tau\in[\alpha;\beta]$.

Следовательно, если $\lambda'(\tau)>0$, то $\int\limits_a^b\left|\vec{r}'(t)\right|dt=\int\limits_\alpha^\beta\left|\vec{r}'(\lambda(\tau))\right|\lambda'(\tau)d\tau=\int\limits_\alpha^\beta\left|\vec{\rho}'(\tau)\right|d\tau$. Случай $\lambda'(\tau)<0$ рассматривается аналогично. ■

Определение. Кривую $\gamma:\vec{r}(t),\ t\in[a,b]$ класса C^1, для которой $\left|\vec{r}'(t)\right|\neq 0,\ t\in[a,b]$ будем называть *гладкой*.

Определение. Пусть $[a';b']\subset[a;b]$. Тогда кривая $\gamma:\vec{r}(t),\ t\in[a';b']$ называется *частью* (*дугой*) кривой $\gamma:\vec{r}(t),\ t\in[a;b]$.

Определение. Пусть даны кривые $\gamma_1:\vec{r}(t),\ t\in[a;c]$ и $\gamma_2:\vec{r}(t),\ t\in[c;b]$, где $a<c<b$. Тогда кривую $\gamma:\vec{r}(t),\ t\in[a;b]$ будем называть *суммой кривых* γ_1, γ_2 и писать $\gamma=\gamma_1\cup\gamma_2$. Кривая, являющаяся суммой конечного числа гладких кривых, называется *кусочно-гладкой*.

Пусть $M(t)$ – произвольная точка кривой $\breve{AB}:\vec{r}=\vec{r}(t),\ t\in[a;b]$ класса C^1. Тогда длина дуги $\breve{AM_t}$ кривой равна $s(t)=\int\limits_a^t\left|\vec{r}'(q)\right|dq$. Отсюда следует, что функция $s\in C^1[a;b]$ и $s'(t)=\left|\vec{r}'(t)\right|$. Если на отрезке $[a;b]$ выполняется $\left|\vec{r}'(t)\right|\neq 0$, то функция $s(t)$ строго возрастает на этом отрезке и поэтому существует обратная функция $t=t(s)$. Следовательно, длину дуги можно взять за параметр кривой. Он называется *натуральным параметром*.

Теорема. Пусть $\breve{AB}:\vec{r}=\vec{r}(t),\ t\in[a;b]$ – гладкая кривая. Тогда переменная длина дуги *s*, отсчитываемая от начала *A* кривой, является возрастающей, непрерывно дифференцируемой функцией параметра *t*; при этом $s'(t)=\left|r'(t)\right|$. В частности, если параметром кривой является переменная длина дуги, то $\left|r'(s)\right|=1$.

Пример 1. Для кривой $\gamma:\vec{r}(t)=(a\cos t, a\sin t,\ t),\ t\in[0;2\pi]$ найти такое параметрическое представление, в котором в качестве параметра выступает переменная длина дуги.

Решение. Поскольку $s(t)=\int\limits_0^t\left|\vec{r}'(t)\right|dt=\int\limits_0^t\sqrt{a^2\sin^2 t+a^2\cos^2 t+1}\,dt=t\sqrt{a^2+1}$, то легко найти функцию обратную к $s(t)$:

$$t=\frac{s}{\sqrt{1+a^2}},\ s\in[0;2\pi\sqrt{1+a^2}\,].$$

Следовательно, искомым параметрическим представлением будет следующее

$$\vec{\rho}(s)=\vec{r}(t(s))=(a\cos\frac{s}{\sqrt{1+a^2}},a\sin\frac{s}{\sqrt{1+a^2}},\frac{s}{\sqrt{1+a^2}}),\ s\in[0,2\pi\sqrt{1+a^2}\,].$$

Пусть кривая γ класса C^2 задана параметрическим представлением $\vec{r}=\vec{r}(s),\ s\in[0;L]$, где s – натуральный параметр кривой. Обозначим $\vec{\tau}=\vec{r}'(s)$. Тогда $\vec{\tau}$ – это единичный касательный вектор кривой. Так как $(\vec{r}'(s),\vec{r}'(s))=1$, то дифференцируя скалярное произведение, находим $(\vec{\tau},\vec{r}'')=0$. Будем рассматривать кривые, для которых $\vec{r}''(s)\neq 0$. Таким образом, касательный вектор ортогонален вектору $\vec{r}''(s)$ и эти два вектора определяют плоскость, проходящую через них. Такая плоскость называется *соприкасающейся плоскостью*.

Нормаль в данной точке, лежащую в соприкасающейся плоскости (проходящую через эту точку), мы будем называть *главной нормалью*, а нормаль, перпендикулярную соприкасающейся плоскости, – *бинормалью*. Таким образом, с каждой точкой рассматриваемой кривой можно связать прямоугольную систему координат, начало которой совпадает с данной точкой, а оси – с касательной, главной нормалью и бинормалью в этой точке (рис. 2). Роль координатных плоскостей играют: соприкасающаяся плоскость, *нормальная плоскость* (проходит через главную нормаль и бинормаль) и *спрямляющая плоскость* (проходит через бинормаль и касательную). Совокупность трех построенных прямоугольных координатных осей и трех координатных плоскостей называется *сопровождающим трехгранником кривой в точке M*. На осях трехгранника мы условимся откладывать в определенную сторону единичные векторы-орты координатной системы: $\vec{\tau}$ – орт по касательной, $\vec{n}$ – орт по главной нормали, $\vec{b}$ – орт по бинормали. В силу сказанного выше, вектор $\vec{r}''(s)$ направлен по главной нормали. Условимся вектор $\vec{n}$ откладывать в направлении вектора $\vec{r}''$. Наконец вектор $\vec{b}=[\vec{\tau},\vec{n}]$. Итак, если обозначить $\left|\vec{r}''\right|=k$, то $k\cdot\vec{n}=\vec{\tau}'$. Вектор $k\cdot\vec{n}$ называется *вектором кривизны кривой*, а число k – *кривизной* кривой в данной точке. Заметим далее, что $\vec{b}'=[\vec{\tau}',\vec{n}]+[\vec{\tau},\vec{n}']=[\vec{\tau},\vec{n}']$, поскольку первое слагаемое равно нулю. Так как вектор $\vec{n}$ единичный, то вектор $\vec{n}'$ ортогонален вектору $\vec{n}$. Следовательно, векторное произведение $[\vec{\tau},\vec{n}']$ коллинеарно вектору $\vec{n}$, поэтому будет отличаться от него только коэффициентом, который мы обозначим $-\chi$. Таким образом, $-\chi\vec{n}=\vec{b}'$. Значение коэффициента χ в данной точке кривой будем называть *кручением* кривой в этой точке. Наконец рассмотрим вектор $\vec{n}'=[\vec{b}',\vec{\tau}]+[\vec{b},\vec{\tau}']=[-\chi\vec{n},\vec{\tau}]+[\vec{b},k\vec{n}]=\chi\vec{b}-k\vec{\tau}$.

Итак, мы получили следующие формулы

$$\begin{cases}\vec{\tau}'=k\cdot\vec{n};\\ \vec{b}'=-\chi\vec{n};\\ \vec{n}'=\chi\vec{b}-k\vec{\tau},\end{cases}$$

называемые *формулами Френе*.

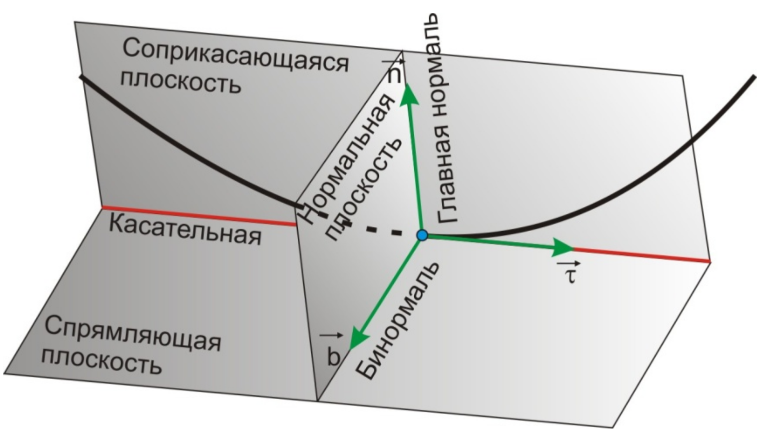


Рис. 2

Лекция 3. Криволинейный интеграл.

Определение. Пусть $\gamma:\vec{r}(s)=x(s)\cdot\vec{i}+y(s)\cdot\vec{j}+z(s)\cdot\vec{k},\ s\in[0;L]$ – гладкая кривая (здесь s – натуральный параметр) и в точках кривой γ задана функция $F(x,y,z)$. Выражение $\int\limits_{\gamma}F(x,y,z)ds$, определенное по формуле

$$\int\limits_{\gamma}F(x,y,z)ds=\int\limits_{0}^{L}F(x(s),y(s),z(s))ds \qquad (1)$$

называется криволинейным интегралом первого рода от функции $F(x,y,z)$ по кривой γ.

Теорема. Криволинейный интеграл первого рода не зависит от ориентации кривой

$$\int\limits_{\breve{AB}}F(x,y,z)ds=\int\limits_{\breve{BA}}F(x,y,z)ds.$$

Доказательство. Пусть $\breve{AB}:\vec{r}(s),\ s\in[0;L]$. Тогда $\breve{BA}:\vec{r}(L-\sigma),\ \sigma\in[0;L]$.

Следовательно, если $\vec{r}(s)=x(s)\vec{i}+y(s)\vec{j}+z(s)\vec{k}$, то, по формуле (1), получаем

$$\int\limits_{\breve{AB}}F(x,y,z)ds=\int\limits_{0}^{L}F(x(s),y(s),z(s))ds=-\int\limits_{L}^{0}F(x(L-\sigma),y(L-\sigma),z(L-\sigma))d\sigma=$$

$$=\int\limits_{0}^{L}F(x(L-\sigma),y(L-\sigma),z(L-\sigma))d\sigma=\int\limits_{\breve{BA}}F(x,y,z)ds.\ \blacksquare$$

Теорема. Пусть $\gamma:\vec{r}(t)=\varphi(t)\cdot\vec{i}+\psi(t)\cdot\vec{j}+\chi(t)\cdot\vec{k},\ t\in[a;b]$ – гладкая кривая и функция $F(x,y,z)$ непрерывна на кривой γ. Тогда

$$\int\limits_{\gamma}F(x,y,z)ds=\int\limits_{a}^{b}F(\varphi(t),\psi(t),\chi(t))\sqrt{\left(\varphi'(t)\right)^2+\left(\psi'(t)\right)^2+\left(\chi'(t)\right)^2}dt. \qquad (2)$$

Доказательство. Пусть $s(t)=\int\limits_{a}^{t}\left|r'(\tau)\right|d\tau$ и $t(s)$ – функция обратная к $s(t)$. Тогда вектор-функция

$$\vec{\rho}(s)=\varphi(t(s))\vec{i}+\psi(t(s))\vec{j}+\chi(t(s))\vec{k},\ s\in[0;L]$$

является параметрическим представлением кривой γ, где s – натуральный параметр кривой. Отсюда, учитывая, что

$$s'(t)=\sqrt{\left(\varphi'(t)\right)^2+\left(\psi'(t)\right)^2+\left(\chi'(t)\right)^2},$$

по формуле (1) получаем

$$\int\limits_{\gamma}F(x,y,z)ds=\int\limits_{0}^{L}F(\varphi(t(s)),\psi(t(s)),\chi(t(s)))ds=\int\limits_{a}^{b}F(\varphi(t),\psi(t),\chi(t))s'(t)dt=$$

$$=\int\limits_{a}^{b}F(\varphi(t),\psi(t),\chi(t))\sqrt{\left(\varphi'(t)\right)^2+\left(\psi'(t)\right)^2+\left(\chi'(t)\right)^2}dt.\ \blacksquare$$

Определение. Пусть $\gamma=\gamma_1\cup\ldots\cup\gamma_k$ кусочно-гладкая кривая и функция $F(x,y,z)$ определена в точках кривой γ. Тогда $\int\limits_{\gamma}F(x,y,z)ds=\sum\limits_{i=1}^{k}\int\limits_{\gamma_i}F(x,y,z)ds$.

Пример 2. Вычислить криволинейный интеграл $\int\limits_{\breve{AB}}y^2ds$, где $\breve{AB}$ – арка циклоиды

$$\breve{AB}:x=a(t-\sin t),\ y=a(1-\cos t),\ t\in[0;2\pi].$$

Решение. По формуле (2), имеем

$$\int\limits_{\breve{AB}} y^2 ds = \int\limits_0^{2\pi} a^2(1-\cos t)^2\sqrt{a^2(1-\cos t)^2 + a^2\sin^2 t}\,dt =$$

$$= a^3\int\limits_0^{2\pi}(1-\cos t)^2\sqrt{2-2\cos t}\ dt = a^3\int\limits_0^{2\pi}(1-\cos t)^2\sqrt{2-2\cos t}\ dt =$$

$$= a^3\int\limits_0^{2\pi}\left(2\sin^2\frac{t}{2}\right)^2 2\left|\sin\frac{t}{2}\right|\,dt = 16a^3\int\limits_0^{\pi}\sin^4\tau\sin\tau\ d\tau = -16a^3\int\limits_0^{\pi}\left(1-\cos^2\tau\right)^2\ d(\cos\tau) =$$

$$= -16a^3\left(\cos\tau - \frac{2\cos^3\tau}{3} + \frac{\cos^5\tau}{5}\right)\Bigg|_0^{\pi} = \frac{256a^3}{15}.$$

Пусть $\breve{AB}$ гладкая ориентированная кривая с параметрическим представлением $\vec{r}(s) = x(s)\vec{i} + y(s)\vec{j} + z(s)\vec{k},\ s\in[0;L]$, где s – натуральный параметр кривой. Обозначим через α,β,γ углы, образованные вектором $\vec{r}'(s)$ или, что то же самое, касательной к кривой $\breve{AB}$ соответственно с осями $Ox,\ Oy,\ Oz$. Тогда $\left|\vec{r}'(s)\right| = 1,\ s\in[0;L]$. Следовательно, $\cos\alpha = x'(s),\ \cos\beta = y'(s),\ \cos\gamma = z'(s)$. Пусть в точках кривой $\breve{AB}$ определена функция $F(x,y,z)$.

Определение. Криволинейные интегралы $\int\limits_{\breve{AB}} F(x,y,z)dx$, $\int\limits_{\breve{AB}} F(x,y,z)dy$, $\int\limits_{\breve{AB}} F(x,y,z)dz$ *второго рода* от функции F по кривой $\breve{AB}$ определяются по формулам

$$\int\limits_{\breve{AB}} F(x,y,z)dx = \int\limits_{\breve{AB}} F(x,y,z)\cos\alpha ds;$$

$$\int\limits_{\breve{AB}} F(x,y,z)dy = \int\limits_{\breve{AB}} F(x,y,z)\cos\beta ds;$$

$$\int\limits_{\breve{AB}} F(x,y,z)dz = \int\limits_{\breve{AB}} F(x,y,z)\cos\gamma ds.$$

Теорема. Криволинейный интеграл второго рода меняет знак при изменении ориентации кривой.

Доказательство. Поскольку параметрическое представление кривой $\breve{BA}$ имеет вид $\vec{r}(L-\sigma) = x(L-\sigma)\vec{i} + y(L-\sigma)\vec{j} + z(L-\sigma)\vec{k},\ \sigma\in[0;L]$, то

$$\int\limits_{\breve{AB}} F(x,y,z)dx = \int\limits_{\breve{AB}} F(x,y,z)\cos\alpha ds = \int\limits_0^L F(x(s),y(s),z(s))x'(s)ds =$$

$$= -\int\limits_L^0 F(x(L-\sigma),y(L-\sigma),z(L-\sigma))\left(x'(s)\right)\Big|_{s=L-\sigma}\,d\sigma.$$

Так как $\left(x'(s)\right)\Big|_{s=L-\sigma} = -\left(x(L-\sigma)\right)'$, то

$$\int\limits_{\breve{AB}} F(x,y,z)dx = -\int\limits_0^L F(x(L-\sigma),y(L-\sigma),z(L-\sigma))\left(x(L-\sigma)\right)'\,d\sigma = -\int\limits_{\breve{BA}} F(x,y,z)dx.\ \blacksquare$$

Теорема. Если $\breve{AB}$: $\vec{r}(t) = \varphi(t)\vec{i} + \psi(t)\vec{j} + \chi(t)\vec{k},\ t\in[a;b]$ – гладкая кривая, то справедливы формулы:

$$\int\limits_{\breve{AB}} F(x,y,z)dx = \int\limits_a^b F(\varphi(t),\psi(t),\chi(t))\varphi'(t)dt; \qquad (3)$$

$$\int\limits_{\breve{AB}} F(x,y,z)dy = \int\limits_a^b F(\varphi(t),\psi(t),\chi(t))\psi'(t)dt\,; \tag{4}$$

$$\int\limits_{\breve{AB}} F(x,y,z)dz = \int\limits_a^b F(\varphi(t),\psi(t),\chi(t))\chi'(t)dt\,. \tag{5}$$

Доказательство. Докажем первую формулу, остальные доказываются аналогично. Итак, если $s(t) = \int\limits_a^t \left| r'(\tau) \right| d\tau$ и $t(s)$ – функция обратная к $s(t)$, то $\vec{r}(t(s)) = \varphi(t(s))\vec{i} + \psi(t(s))\vec{j} + \chi(t(s))\vec{k}$, $s \in [0; L]$ – параметрическое представление кривой $\breve{AB}$, где в качестве параметра выступает переменная длина дуги кривой (L – длина кривой). Следовательно,

$$\int\limits_{\breve{AB}} F(x,y,z)dx = \int\limits_0^L F(\varphi(t(s)),\psi(t(s)),\chi(t(s)))\big(\varphi(t(s))\big)'\,ds =$$

$$= \int\limits_0^L F(\varphi(t(s)),\psi(t(s)),\chi(t(s)))\,\varphi'(t)\Big|_{t=t(s)} \cdot t'(s)ds.$$

Сделаем в интеграле замену переменной $t = t(s)$, учитывая, что $dt = t'(s)ds$. Получим

$$\int\limits_{\breve{AB}} F(x,y,z)dx = \int\limits_0^L F(\varphi(t),\psi(t),\chi(t))\varphi'(t)dt\,. \blacksquare$$

Определение. Если $\Gamma = \bigcup\limits_{i=1}^{k} \gamma_i$ – кусочно-гладкая кривая, то

$$\int\limits_{\Gamma} F(x,y,z)dx = \sum_{i=1}^{k} \int\limits_{\gamma_i} F(x,y,z)dx; \quad \int\limits_{\Gamma} F(x,y,z)dy = \sum_{i=1}^{k} \int\limits_{\gamma_i} F(x,y,z)dy;$$

$$\int\limits_{\Gamma} F(x,y,z)dz = \sum_{i=1}^{k} \int\limits_{\gamma_i} F(x,y,z)dz.$$

Аналогично определяются криволинейные интегралы второго рода, если Γ – конечная совокупность кусочно-гладких кривых γ_i, $i = 1,2,...,k$.

На практике приходится иметь дело с суммой интегралов $\int\limits_{\breve{AB}} P(x,y,z)dx$, $\int\limits_{\breve{AB}} Q(x,y,z)dy$, $\int\limits_{\breve{AB}} R(x,y,z)dz$, т.е. интегралом вида $\int\limits_{\breve{AB}} P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz$. Имеет место равенство

$$\int\limits_{\breve{AB}} Pdx + Qdy + Rdz = \int\limits_{\breve{AB}} \big(P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma\big)ds\,. \tag{6}$$

Используя формулы (3)–(6), находим

$$\begin{gathered}\int\limits_{\breve{AB}} Pdx + Qdy + Rdz = \\ = \int\limits_a^b \Big(P(\varphi(t),\psi(t),\chi(t))\varphi'(t) + Q(\varphi(t),\psi(t),\chi(t))\psi'(t) + R(\varphi(t),\psi(t),\chi(t))\chi'(t)\Big)dt.\end{gathered} \tag{7}$$

Пример 3. Вычислить криволинейный интеграл второго рода $I = \int\limits_{OA} xdy - ydx$ по трем кривым, соединяющим точки $O(0,0)$ и $A(1,2)$.

1. OA – отрезок прямой;

2. OA – дуга параболы с вершиной $O(0,0)$, осью которой является ось Oy;

3. OA – ломаная линия, состоящая из отрезка OB оси Ox и отрезка BA. Параллельного оси Oy.

Решение.

1. OA – отрезок прямой, проходящей через начало координат, следовательно, ее уравнение имеет вид $y = kx$. Значение коэффициента k найдем, подставляя в уравнение координаты точки $A(1,2)$. Получаем $y = 2x$, при этом x изменяется от 0 до 1. Следовательно, по формуле (7), $I = \int\limits_{OA} xdy - ydx = \int\limits_0^1 (2x - 2x)dx = 0$.

2. OA – дуга параболы, имеющей уравнение $y = kx^2$. Значение коэффициента k найдем, подставляя в уравнение координаты точки $A(1,2)$. Имеем $y = 2x^2$, при этом x изменяется от 0 до 1. Получаем

$$I = \int\limits_{OA} xdy - ydx = \int\limits_0^1 \left(x \cdot 4x - 2x^2\right)dx = \int\limits_0^1 2x^2 dx = 2\frac{x^3}{3}\bigg|_0^1 = \frac{2}{3}.$$

3. Интегрируя по данной ломаной, воспользуемся определением 15 и представим интеграл по данной ломаной как сумму двух интегралов – по отрезкам OB и BA. Так как параметрическое представление отрезка OB: $y = 0,\ x = x,\ x \in [0;1]$, то

$$I_1 = \int\limits_{OB} xdy - ydx = \int\limits_0^1 (x \cdot 0 - 0)dx = 0.$$

Для отрезка BA имеем $x = x(y) = 1$, при этом y изменяется от 0 до 2. Поэтому $I_2 = \int\limits_{BA} xdy - ydx = \int\limits_0^2 (1 - y \cdot 0)dy = 2$. Следовательно, $I = I_1 + I_2 = 2$. Заметим, что мы получили различные значения данного интеграла, то есть его значение зависит от формы пути интегрирования.

Пример 4. Вычислить криволинейный интеграл второго рода $I = \int\limits_{OA} 2xydx + x^2dy$ по трем кривым, заданным в примере 3.

Решение.

1. OA – отрезок прямой $y = 2x$, при этом x изменяется от 0 до 1. Следовательно, $I = \int\limits_{OA} 2xydx + x^2dy = \int\limits_0^1 \left(2x \cdot 2x + x^2 \cdot 2\right)dx = \int\limits_0^1 6x^2 dx = 2x^3\Big|_0^1 = 2$.

2. OA – дуга параболы, имеющей уравнение $y = 2x^2$, при этом x изменяется от 0 до 1. Поэтому

$$I = \int\limits_{OA} 2xydx + x^2dy = \int\limits_0^1 \left(2x \cdot 2x^2 + x^2 \cdot 4x\right)dx = \int\limits_0^1 8x^3 dx = 2x^4\Big|_0^1 = 2.$$

3. Интегрируя по данной ломаной, представим интеграл как сумму двух интегралов – по отрезкам OB и BA. Так как для отрезка OB $y = 0,\ x = x,\ x \in [0;1]$, то $I_1 = \int\limits_{OB} 2xydx + x^2dy = \int\limits_0^1 \left(2x \cdot 0 - x^2 \cdot 0\right)dx = 0$. Для отрезка BA имеем $x = x(y) = 1$, при этом y изменяется от 0 до 2. Получаем

$$I_2 = \int\limits_{BA} 2xydx + x^2dy = \int\limits_0^2 \left(2 \cdot 1 \cdot y \cdot 0 + 1^2\right)dy = \int\limits_0^2 dy = 2.$$

Следовательно, $I = I_1 + I_2 = 2$.

Во всех трех случаях мы получили одно и то же значение интеграла. Этот результат не случаен. Можно доказать, что значение данного интеграла не зависит от кривой, соединяющей точки O и A. Вопрос о том, в каких случаях криволинейный интеграл второго рода не зависит от кривой, соединяющей две данные точки, будет рассмотрен ниже.

Пусть на плоскости $\mathbf{R}^2$ фиксирована декартова система координат Oxy. Область $G \subset \mathbf{R}^2$ будем называть *элементарной относительно оси Oy*, если ее граница состоит из графиков непрерывных функций $\varphi(x)$, $\psi(x)$, $x \in [a;b]$ таких, что $\varphi(x) \le \psi(x)$, $\forall x \in [a;b]$ и, быть может из отрезков прямых $x = a$, $x = b$. Аналогично можно рассматривать область элементарную относительно оси Ox. Примеры областей элементарных относительно осей Oy и Ox показаны на рисунке 3.

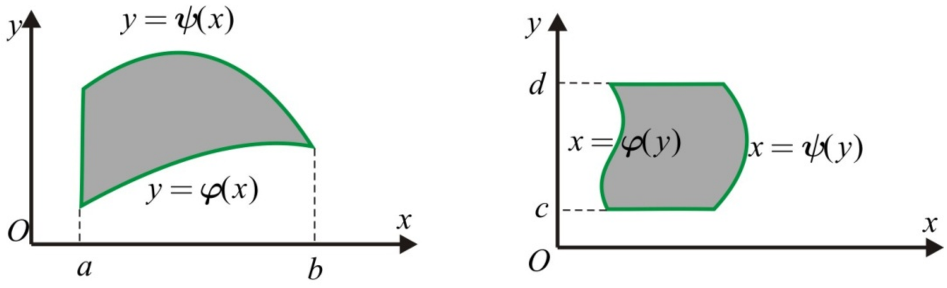


Рис. 3

Рассмотрим на плоскости ограниченную область G, граница ∂G которой состоит из конечного числа простых контуров, которые будем называть *граничными контурами*. Если граничный контур является одновременно и границей неограниченной области, лежащей в $\mathbf{R}^2 \setminus \overline{G}$, то будем называть его внешним, а если он является одновременно и границей ограниченной области, лежащей в $\mathbf{R}^2 \setminus \overline{G}$, то будем называть его внутренним. Выберем ориентацию граничных контуров так, чтобы при обходе их в направлении выбранной ориентации область G оставалась с левой стороны. Совокупность контуров с указанным образом выбранной ориентацией, называется положительной ориентацией границы и обозначается ∂G^+.

Теорема (формула Грина). Пусть граница области G состоит из конечного числа простых контуров и область G может быть разбита на конечное число элементарных относительно обеих координатных осей областей с кусочно-гладкими границами. Если в замкнутой области $\overline{G}$ заданы функции $P(x,y)$ и $Q(x,y)$, непрерывные на $\overline{G}$ вместе со своими частными производными $\dfrac{\partial P}{\partial y}$, $\dfrac{\partial Q}{\partial x}$, то справедлива формула

$$\iint\limits_G \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy = \int\limits_{\partial G^+} Pdx + Qdy. \tag{8}$$

Доказательство. Рассмотрим сначала случай, когда область G сама является элементарной, т.е. (рис. 4 а))

$$\overline{G} = \{(x,y):\ \varphi(x) \le y \le \psi(x),\ a \le x \le y\} = \{(x,y):\ \eta(y) \le x \le \theta(y),\quad c \le y \le d\}.$$

Тогда

$$\iint_G \frac{\partial P}{\partial y}dxdy = \int_a^b dx \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} \frac{\partial P}{\partial y}dy = \int_a^b \big(P(x,\psi(x)) - P(x,\varphi(x))\big)dx =$$

$$= \int_a^b P(x,\psi(x))dx - \int_a^b P(x,\varphi(x))dx = \int_{\breve{BC}} Pdx - \int_{\breve{AD}} Pdx =$$

$$= -\int_{\breve{CB}} Pdx - \int_{\breve{AD}} Pdx.$$

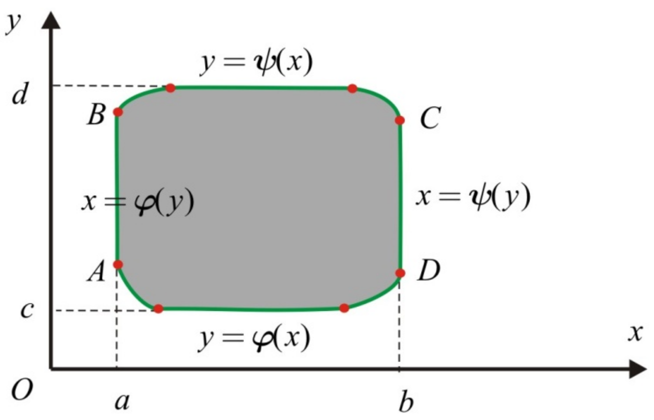
Учитывая, что $\int_{\breve{AB}} Pdx = \int_{\breve{CD}} Pdx = 0$, получаем

$$\iint_G \frac{\partial P}{\partial y}dxdy = -\int_{\partial G^+} Pdx\,.$$

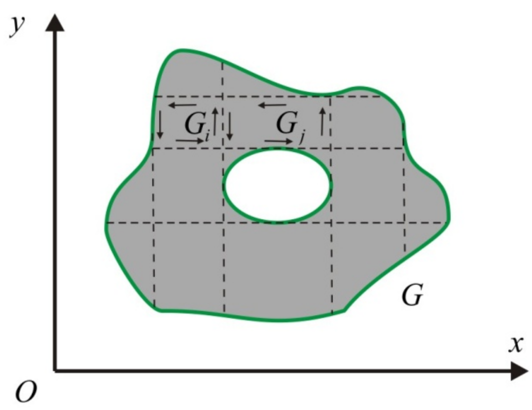
Аналогично выводим формулу

$$\iint_G \frac{\partial Q}{\partial x}dxdy = \int_{\partial G^+} Qdx\,.$$

Складывая полученные равенства, приходим к формуле Грина для рассматриваемого случая.



а)



б)

Рис. 4

Рассмотрим теперь общий случай. Пусть область G разбита на элементарные области $G_i,\ i = 1, 2, ..., k$. По доказанному

$$\iint_{G_i} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy = \int_{\partial G_i^+} Pdx + Qdy\,.$$

Сложим эти равенства:

$$\iint_G \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy = \sum_{i=1}^{k} \iint_{G_i} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy = \sum_{i=1}^{k} \int_{\partial G_i^+} Pdx + Qdy\,.$$

В сумме, стоящей в правой части полученного равенства, криволинейные интегралы берутся дважды по всем кривым, которые являются частью границ двух областей $G_i,\ i = 1, 2, ..., k$ и, следовательно, не входят в границу области G. (рис. 4 б)). При этом ориентации этих частей кривых противоположны. Поскольку знак криволинейного интеграла изменяется при изменении ориентации кривой, сумма двух криволинейных интегралов по указанным частям кривых равна нулю. Следовательно, в правой части полученной выше суммы, останутся только интегралы по положительно ориентированным частям границы области G, дающие в сумме $\int\limits_{\partial G^+} Pdx + Qdy$. ■

Рассмотрим теперь вопрос о том, когда криволинейный интеграл $\int\limits_{\breve{AB}} Pdx + Qdy$ зависит только от точек A и B и не зависит от выбора кривой $\breve{AB}$, соединяющей эти точки.

Теорема. Пусть функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ непрерывны в плоской области G, тогда эквивалентны следующие три условия.

1) Для любого замкнутого контура γ, лежащего в G, $\int\limits_{\gamma} Pdx + Qdy = 0$.

2) Для любых двух точек $A \in G$ и $B \in G$ значение интеграла $\int\limits_{\breve{AB}} Pdx + Qdy$ не зависит от кривой $\breve{AB}$, лежащей в G, соединяющей точки A и B.

3) Выражение $Pdx + Qdy$ является в G полным дифференциалом, т.е. существует функция $u(x, y)$, определенная в G и такая, что $du = Pdx + Qdy$. В этом случае, если $A \in G,\ B \in G$, то $\int\limits_{\breve{AB}} Pdx + Qdy = u(B) - u(A)$ для любой кривой $\breve{AB}$, соединяющей в G эти точки.

Доказательство. Пусть выполнено первое условие в теореме. Покажем, что из этого следует второе условие. Пусть $A, B \in G$ и даны две кусочно-гладкие кривые $\left(\breve{AB}\right)_1$ и $\left(\breve{AB}\right)_2$, соединяющие в G точки A и B. Поскольку $\left(\breve{AB}\right)_1 \cup \left(\breve{BA}\right)_2$ представляет собой замкнутый контур, то

$$0 = \int\limits_{\left(\breve{AB}\right)_1 \cup \left(\breve{BA}\right)_2} Pdx + Qdy = \int\limits_{\left(\breve{AB}\right)_1} Pdx + Qdy + \int\limits_{\left(\breve{BA}\right)_2} Pdx + Qdy =$$
$$= \int\limits_{\left(\breve{AB}\right)_1} Pdx + Qdy - \int\limits_{\left(\breve{AB}\right)_2} Pdx + Qdy.$$

Отсюда $\int\limits_{\left(\breve{AB}\right)_1} Pdx + Qdy = \int\limits_{\left(\breve{AB}\right)_2} Pdx + Qdy$. Таким образом, условие 2 выполняется.

Покажем теперь, что из второго условия следует третье. Введем новое обозначение. Поскольку интеграл $\int\limits_{\breve{AB}} Pdx + Qdy$ не зависит от кривой, соединяющей точки A и B, то обозначим его через $\int\limits_{A}^{B} Pdx + Qdy$. Зафиксируем точку $M_0(x_0, y_0) \in G$. Пусть $M(x, y) \in G$. Определим функцию $u(x, y) = \int\limits_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} Pdx + Qdy$ и покажем, что $\dfrac{\partial u}{\partial x} = P,\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = Q$. Так как G открытое множество и $M(x, y) \in G$, то существует окрестность точки M такая, что $U_\delta(M) \subset G$. Пусть $|\Delta x| < \delta$. Соединим точки M и $N(x + \Delta x, y)$ отрезком прямой. Тогда, используя теорему о среднем для определенного интеграла, получим

$$\frac{u(x+\Delta x,y)-u(x,y)}{\Delta x}=\frac{1}{\Delta x}\left(\int\limits_{(x_0,y_0)}^{(x+\Delta x,y)} Pdx+Qdy-\int\limits_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} Pdx+Qdy\right)=$$

$$=\frac{1}{\Delta x}\left(\int\limits_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} Pdx+Qdy+\int\limits_{(x,y)}^{(x+\Delta x,y)} Pdx+Qdy-\int\limits_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} Pdx+Qdy\right)=\frac{1}{\Delta x}\int\limits_{(x,y)}^{(x+\Delta x,y)} Pdx+Qdy=$$

$$=\frac{1}{\Delta x}\int\limits_{x}^{x+\Delta x} P(t,y)dt=\frac{1}{\Delta x}P(x+\theta\Delta x,y)\Delta x=P(x+\theta\Delta x,y),\quad 0<\theta<1.$$

Ввиду непрерывности функции P в области G, существует предел

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(x+\Delta x,y)-u(x,y)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}P(x+\theta\Delta x,y)=P(x,y)\,.$$

Аналогично доказывается существование частной производной $\frac{\partial u}{\partial y}$ и равенство $\frac{\partial u}{\partial y}=Q$.

Итак, поскольку функции P и Q непрерывны в области G, то функция u дифференцируема в области G и $du=Pdx+Qdy$. Если теперь $\breve{AB}$: $\vec{r}(t)=x(t)\vec{i}+y(t)\vec{j},\ t\in[a;b]$, то

$$\int\limits_{\breve{AB}} Pdx+Qdy=\int\limits_{a}^{b}\Big(P(x(t),y(t))x'(t)+Q(x(t),y(t))y'(t)\Big)dt=$$

$$=\int\limits_{a}^{b}\frac{d}{dt}\Big(u(x(t),y(t))\Big)dt=u(x(t),y(t))\Big|_a^b=u(B)-u(A).$$

Итак, условие 3 выполняется.

Пусть теперь выполняется условие 3. Тогда условие 1, очевидно, выполняется. Действительно, для контура начальная точка A совпадает с конечной точкой, поэтому

$$\int\limits_{\gamma} Pdx+Qdy=u(A)-u(A)=0\,.\ ■$$

Назовем плоскую область G *односвязной*, если каков бы ни был простой контур γ, лежащий в G, ограниченная область D, границей которой является контур γ, содержится в G.

Теорема. Пусть функции $P(x,y),Q(x,y)$ непрерывны вместе со своими частными производными $P'_y,\ Q'_x$ в односвязной области G. Тогда каждое из условий, перечисленных в теореме эквивалентно условию

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}\ \text{ в } G.$$

Лекция 5. Поверхностный интеграл.

При изучении поверхностей, как и при изучении кривых, наиболее целесообразным способом их задания является параметрическое представление.

Определение. Пусть теперь в пространстве $\mathbf{R}^2$ задана область *D*. Зафиксируем на плоскости декартову систему координат *Ouv*. Предположим, что каждой точке (u,v) заданной области поставлен в соответствие некоторый вектор $\vec{r}(u,v)$. Тогда говорят, что на области *D* задана вектор-функция $\vec{r}(u,v)$.

Определение. Назовем вектор $\vec{A}$ пределом вектор-функции $\vec{r}(u,v)$ при $(u,v)\to(u_0,v_0)\in D$, если $\lim\limits_{(u,v)\to(u_0,v_0)}\left|\vec{r}(u,v)-\vec{A}\right|=0$. В этом случае употребляется запись $\lim\limits_{(u,v)\to(u_0,v_0)}\vec{r}(u,v)=\vec{A}$.

Определение. Если $\lim\limits_{(u,v)\to(u_0,v_0)}\vec{r}(u,v)=\vec{r}(u_0,v_0)$, то вектор-функция $\vec{r}(u,v)$ называется непрерывной в точке $(u_0,v_0)\in D$. Если вектор-функция непрерывна в каждой точке области *D*, то она называется непрерывной в области *D*.

Определение. Если существует предел $\lim\limits_{\Delta u\to 0}\dfrac{1}{\Delta u}(\vec{r}(u+\Delta u,v)-\vec{r}(u,v))$, то он называется частной производной вектор-функции $\vec{r}(u,v)$ по аргументу *u* в точке *(u,v)* и обозначается $\vec{r}_u'(u,v)$ или $\dfrac{\partial\vec{r}}{\partial u}(u,v)$.

Аналогично можно определить частную производную $\vec{r}_v'(u,v)$ и частные производные старших порядков.

Определение. Пусть нам дана непрерывная вектор-функция двух скалярных аргументов *u*, *v*, рассматриваемых в некоторой замкнутой области $\overline{D}$ их изменения $\vec{r}\left(u,v\right)=x\left(u,v\right)\cdot\vec{i}+y\left(u,v\right)\cdot\vec{j}+z\left(u,v\right)\cdot\vec{k}$. Будем откладывать $\vec{r}\left(u,v\right)$ из начала координат *O*. Когда *u* и *v* пробегают область своего изменения, конец радиус-вектора $\vec{r}\left(u,v\right)$ описывает некоторое геометрическое место точек Σ, которое мы будем называть *поверхностью в параметрическом представлении.* Аргументы вектор-функции $\vec{r}(u,v)$ называют *параметрами* или *криволинейными координатами* на Σ.

Определение. Поверхность $\Sigma:\vec{r}(u,v)=x(u,v)\vec{i}+y(u,v)\vec{j}+z(u,v)\vec{k},\ (u,v)\in\overline{D}$, где D – плоская область с границей γ, являющейся кусочно-гладкой кривой, а вектор-функция имеет в $\overline{D}$ непрерывные частные производные и хотя бы один из якобианов $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)},\ \dfrac{\partial(x,z)}{\partial(u,v)},\ \dfrac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}$ отличен от нуля при любых значениях u и v, называется *элементарным гладким куском поверхности*. Поверхность называется *кусочно-гладкой*, если ее можно разбить на конечное число элементарных гладких кусков. При этом будем считать, что различным точкам (u,v) соответствуют различные точки поверхности.

Рассмотрим границу γ области D, на которой определены функции $x(u,v),\ y(u,v),\ z(u,v)$ для элементарного гладкого куска поверхности. Так как граница области является кусочно-гладкой кривой, то на γ имеем $u(s),\ v(s)$, где s – натуральный параметр, а функции $u(s),v(s)$ имеют кусочно-непрерывные производные первого порядка. Поэтому граница поверхности, задаваемая параметрическим представлением $\vec{r}(u(s),\ v(s))$, является кусочно-гладкой кривой. Таким образом, граница кусочно-гладкой поверхности является кусочно-гладкой кривой.

Рассмотрим на поверхности $\Sigma: \vec{r} = \vec{r}(u,v),\ (u,v) \in \bar{D}$ геометрическое место точек, криволинейные координаты которых определяются парой непрерывных функций $u = u(t),\ v = v(t),\ t \in T \subset \mathbf{R}$. Такое геометрическое место точек можно описать вектор-функцией $\vec{r}(t) = \vec{r}(u(t), v(t)),\ t \in T$. Следовательно, когда параметр t изменяется на множестве T, конец вектора $\vec{r}(t)$ описывает в пространстве некоторую кривую. Итак, функции $u = u(t),\ v = v(t),\ t \in T$ определяют кривую на поверхности.

Зафиксируем значение параметра v, положив $v = v_0$. Тогда на поверхности получим некоторую кривую с параметрическим представлением $\vec{r}(u) = \vec{r}\left(u, v_0\right)$. Такую кривую будем называть *линией u*. Аналогично, зафиксировав значение параметра u, получим кривую на поверхности, называемую *линией v*. Линии u и линии v называются также *координатными линиями*, а оба семейства координатных линий называются *сетью кривых* на поверхности.

Заметим, что согласно определению элементарного гладкого куска поверхности, в каждой точке такой поверхности векторное произведение $\left[r'_u, r'_v\right]$ отлично от нуля и поэтому эта пара векторов определяет плоскость, проходящую через данную точку поверхности. Рассмотрим произвольную кривую на элементарном гладком куске поверхности

$$\vec{r}\left(t\right) = x\left(u\left(t\right), v\left(t\right)\right) \cdot \vec{i} + y\left(u\left(t\right), v\left(t\right)\right) \cdot \vec{j} + z\left(u\left(t\right), v\left(t\right)\right) \cdot \vec{k}$$

и точку $M\left(x\left(u\left(t\right), v\left(t\right)\right), y\left(u\left(t\right), v\left(t\right)\right), z\left(u\left(t\right), v\left(t\right)\right)\right)$ этой кривой. Тогда, вектор $\vec{r}'\left(t\right) = \vec{r}'_u\left(u,v\right)\Big|_{\left(u(t);v(t)\right)} \cdot u'\left(t\right) + \vec{r}'_v\left(u,v\right)\Big|_{\left(u(t);v(t)\right)} \cdot v'\left(t\right)$ является направляющим вектором касательной к кривой в точке M. Следовательно, касательные к всевозможным кривым на поверхности, проходящим через точку M, лежат в одной плоскости, а именно в плоскости векторов $\vec{r}'_u\left(u,v\right)\Big|_{\left(u(t);v(t)\right)}, \vec{r}'_v\left(u,v\right)\Big|_{\left(u(t);v(t)\right)}$. Эта плоскость носит название *касательной плоскости к поверхности* в точке M. Вектор, перпендикулярный касательной плоскости к поверхности в точке M, называется *вектором нормали* к поверхности в точке M. Итак, вектор нормали к поверхности можно записать в виде $\vec{n} = \left[\vec{r}'_u; \vec{r}'_v\right] / \left\|\left[\vec{r}'_u; \vec{r}'_v\right]\right\|$.

Пусть элементарный гладкий кусок поверхности S задан параметрическим представлением $\vec{r} = \vec{r}(u,v)$ и пусть $\gamma: \vec{r} = \vec{r}(u(t), v(t)), t \in [t_1; t_2]$ кривая на этой поверхности. Предположим, что $u(t), v(t) \in C^1[t_1; t_2]$. Тогда длина $s(t)$ дуги этой кривой, соответствующей отрезку $[t_1; t]$ изменения параметра, равна

$$s(t) = \int_{t_1}^{t} \left|\vec{r}'(\tau)\right| d\tau = \int_{t_1}^{t} \sqrt{(\vec{r}'_u u' + \vec{r}'_v v', \vec{r}'_u u' + \vec{r}'_v v')} d\tau = \int_{t_1}^{t} \sqrt{(\vec{r}'_u, \vec{r}'_u) u'^2 + 2(\vec{r}'_v, \vec{r}'_u) u' v' + (\vec{r}'_v, \vec{r}'_v) v'^2}\, d\tau.$$

Обозначим

$$E = (\vec{r}'_u, \vec{r}'_u),\ F = (\vec{r}'_v, \vec{r}'_u),\ G = (\vec{r}'_v, \vec{r}'_v).$$

Тогда

$$s(t) = \int_{t_1}^{t} \sqrt{E u'^2 + 2F u' v' + G v'^2}\, d\tau.$$

Итак, $ds = \sqrt{E u'^2 + 2F u' v' + G v'^2}\, dt$. Отсюда $ds^2 = E du^2 + 2F du dv + G dv^2$. Полученное выражение в правой части последнего равенства называется *первой квадратичной формой поверхности*. Первая квадратичная форма поверхности положительно определена. Значение первой квадратичной формы поверхности заключается в том, что она выражает квадрат дифференциала дуги при бесконечно малом смещении по поверхности. При этом коэффициенты первой квадратичной формы поверхности определяются той точкой, из которой производится смещение, а дифференциалы du, dv отвечают данному смещению.

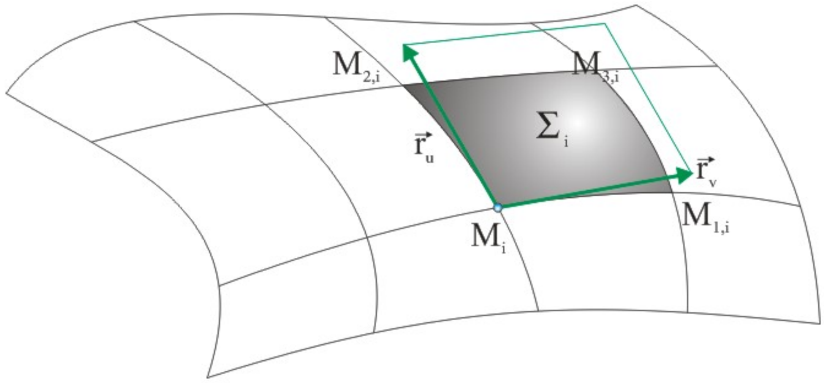


Рис. 5.

Первая квадратичная форма поверхности позволяет вычислять площадь поверхности $S: \vec{r}(u,v), (u,v) \in \overline{D}$. Пусть $\overline{D} \subset I$, где I – прямоугольник в $\mathbf{R}^2$. Рассмотрим произвольное разбиение $\{I_j\}$ прямоугольника I и пусть $\tau = \{I_j : I_j \subset D\}$. Поверхность Σ разобьется на криволинейные параллелограммы Σ_i, каждый из которых ограничен с двух сторон отрезками линий u и с двух сторон – отрезками линий v (рис. 5). Рассмотрим один из таких параллелограммов Σ_i с вершинами

$$M_i(u,v), M_{1,i}(u,v+\Delta v), M_{2,i}(u+\Delta u,v), M_{3,i}(u+\Delta u,v+\Delta v).$$

Заметим, что

$$\overrightarrow{M_i M_{1,i}} = \vec{r}(u,v+\Delta v) - \vec{r}(u,v) = \vec{r}_v{}' \Delta v + o(\Delta v),\ \Delta v \to 0,$$

$$\overrightarrow{M_i M_{2,i}} = \vec{r}(u+\Delta u,v) - \vec{r}(u,v) = \vec{r}_u{}' \Delta u + o(\Delta u),\ \Delta u \to 0.$$

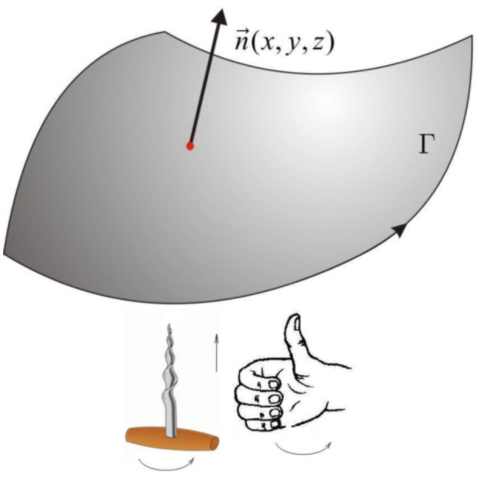
При определении площади поверхности будем заменять образы прямоугольников I_j прямолинейными параллелограммами, построенными на векторах $\vec{r}_v{}'\Delta v, \vec{r}_u{}'\Delta u$. Площадь такого параллелограмма, очевидно, равна $\left\|[\vec{r}_v{}', \vec{r}_u{}']\right\| \Delta v \Delta u = \sqrt{EG-F^2}\,\mu(I_j)$.

Определение. Предел $\mu(\Sigma) = \lim\limits_{\lambda(\tau)\to 0} \sum\limits_{I_j \in \tau} \left\|[\vec{r}_v{}', \vec{r}_u{}']\right\| \Delta v \Delta u = \iint\limits_D \sqrt{EG-F^2}\,du dv$ называется площадью поверхности Σ.

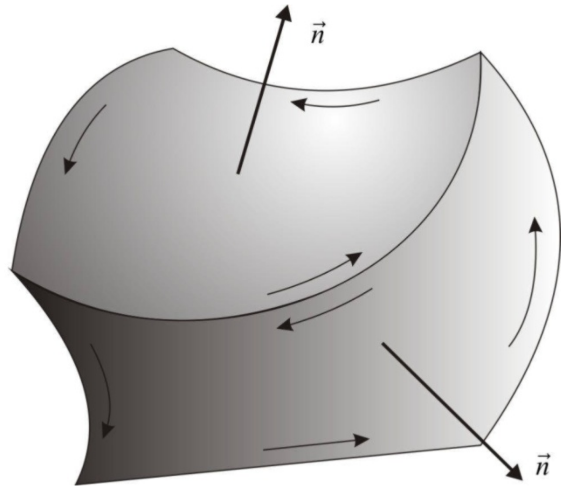
Определение. Поверхность называется *ориентируемой*, если в каждой точке этой поверхности можно выбрать единичный вектор нормали к поверхности $\vec{n}(x,y,z)$, чтобы вектор-функция $\vec{n}(x,y,z)$ была непрерывной на поверхности. Такие поверхности иногда называют *двусторонними*. Под *стороной поверхности* будем понимать множество точек поверхности с приписанными в них нормалями $\vec{n}(x,y,z)$ так, что $\vec{n}(x,y,z)$ непрерывна на поверхности.

Поскольку для элементарного гладкого куска поверхности существуют две непрерывные нормали $\vec{n} = \pm\left[\vec{r}_u{}';\vec{r}_v{}'\right] / \left\|\left[\vec{r}_u{}';\vec{r}_v{}'\right]\right\|$, то, если договориться об определенном выборе знака в выражении для нормали, мы получим, что элементарный гладкий кусок поверхности становится ориентируемой поверхностью.

Рассмотрим теперь обобщение понятия ориентируемой поверхности, пригодное для кусочно-гладких поверхностей. Пусть Γ – некоторая замкнутая кусочно-гладкая кривая на поверхности, окружающая точку (x,y,z) этой поверхности. На кривой можно выбрать положительное направление обхода следующим образом: пусть штопор с правой резьбой ввинчивается по направлению вектора $\vec{n}(x,y,z)$. Тогда направление вращения головки штопора задает положительное направление обхода кривой Γ. Так как вектор $\vec{n}(x,y,z)$ для ориентируемой поверхности является непрерывной функцией, то указание положительного обхода контура в одной точке поверхности однозначно определяет положительное направление обхода контура в любой точке этой поверхности, в том числе и положительное направление обхода на границе поверхности (рис. 6 а)).



а)



б)

Рис. 6

Будем кусочно-гладкую поверхность считать ориентируемой поверхностью, задавая ориентацию элементарных гладких кусков таким образом, чтобы части границ этих кусков, принадлежащих одновременно двум элементарным гладким кускам, имели противоположные направления обхода. При такой договоренности выбор знака $\vec{n}(x,y,z)$ в одной точке поверхности однозначно определяет выбор знака в любых точках поверхности (рис 6 б)).

Поверхностный интеграл первого рода и его свойства

Определение. Пусть $\Sigma:\ \vec{r}(u,v),\ (u,v)\in\overline{D}$ элементарный гладкий кусок поверхности и в точках этой поверхности задана функция $F(x,y,z)$. Интеграл $\iint\limits_{\Sigma} F(x,y,z)dS$, определенный равенством

$$\iint\limits_{\Sigma} F(x,y,z)dS = \iint\limits_{\overline{D}} F(x(u,v),y(u,v),z(u,v))\sqrt{EG-F^2}\,dudv$$

называется *поверхностным интегралом первого рода*.

Теорема. Если функция F непрерывна на поверхности Σ, то интеграл $\iint\limits_{\Sigma} F(x,y,z)dS$ существует.

Теорема. Если существуют интегралы $\iint\limits_{\Sigma} F_1dS,\ \iint\limits_{\Sigma} F_2dS$, то существуют интегралы $\iint\limits_{\Sigma} F_1\cdot F_2dS,\ \iint\limits_{\Sigma}\left(\alpha F_1+\beta F_2\right)dS$, где $\alpha,\beta\in\mathbf{R}$, причем

$$\iint\limits_{\Sigma}\left(\alpha F_1+\beta F_2\right)dS = \alpha\iint\limits_{\Sigma} F_1dS + \beta\iint\limits_{\Sigma} F_2dS.$$

Теорема. Если поверхность Σ имеет одно из следующих параметрических представлений

а) $\Sigma: \vec{r}(x,y)=(x,y,f(x,y)),\ (x,y)\in\overline{D}$;

б) $\Sigma: \vec{r}(x,z)=(x,f(x,z),z),\ (x,z)\in\overline{D}$;

в) $\Sigma: \vec{r}(y,z)=(f(y,z),y,z),\ (y,z)\in\overline{D}$,

то

$$\text{а) } \iint_{\Sigma} F(x,y,z)dS=\iint_{D} F(x,y,f(x,y))\sqrt{1+\left(f_x'\right)^2+\left(f_y'\right)^2}\,dxdy\,;$$

$$\text{б) } \iint_{\Sigma} F(x,y,z)dS=\iint_{D} F(x,f(x,z),z)\sqrt{1+\left(f_x'\right)^2+\left(f_z'\right)^2}\,dxdz\,;$$

$$\text{в) } \iint_{\Sigma} F(x,y,z)dS=\iint_{D} F(f(y,z),y,z)\sqrt{1+\left(f_y'\right)^2+\left(f_z'\right)^2}\,dydz\,.$$

Доказательство. Докажем только первое равенство, поскольку все остальные доказываются аналогично. Имеем

$$\vec{r}_x'(x,y)=(1,0,f_x'(x,y));\quad \vec{r}_y'(x,y)=(0,1,f_y'(x,y))\,.$$

Поэтому

$$E=(\vec{r}_x',\vec{r}_x')=1+\left(f_x'\right)^2,\quad G=(\vec{r}_y',\vec{r}_y')=1+\left(f_y'\right)^2,\quad F=(\vec{r}_x',\vec{r}_y')=f_x'f_y'\,.$$

$$EG-F^2=\left(1+\left(f_x'\right)^2\right)\left(1+\left(f_y'\right)^2\right)-\left(f_x'f_y'\right)^2=1+\left(f_x'\right)^2+\left(f_y'\right)^2.$$

Следовательно,

$$\iint_{\Sigma} F(x,y,z)dS=\iint_{D} F(x,y,f(x,y))\sqrt{1+\left(f_x'\right)^2+\left(f_y'\right)^2}\,dxdy\,.\ \blacksquare$$

Определение. Пусть Σ – кусочно-гладкая поверхность, состоящая из элементарных гладких кусков $\Sigma_1,...,\Sigma_n$ и на Σ задана функция F. Тогда поверхностный интеграл $\iint_{\Sigma} FdS$ определяется равенством $\iint_{\Sigma} FdS=\sum_{k=1}^{n}\iint_{\Sigma_k} FdS$.

Пример 4. Вычислить интеграл $\iint_{\Sigma}(x^2+y^2+z^2)dS$, где Σ – поверхность, полученная вращением кардиоиды $r=a(1+\cos u)$ относительно полярной оси (декартова и полярная системы координат совмещены).

Решение. Данная поверхность имеет следующее параметрическое представление

$$\vec{r}(u,v)=\left(a(\cos u+\cos^2 u),\ a(\sin u+\frac{1}{2}\sin 2u)\cos v,\ a(\sin u+\frac{1}{2}\sin 2u)\sin v\right),$$

$$u\in[0,\pi],\ v\in[0,2\pi].$$

Найдем коэффициенты первой квадратичной формы этой поверхности.

Так как

$$\vec{r}_u'=\left(a(-\sin u-\sin 2u),\ a(\cos u+\cos 2u)\cos v,\ a(\cos u+\cos 2u)\sin v\right),$$

$$\vec{r}_v'=\left(0,\ -a(\sin u+\frac{1}{2}\sin 2u)\sin v,\ a(\sin u+\frac{1}{2}\sin 2u)\cos v\right),$$

то

$$E=(\vec{r}_u',\vec{r}_u')=a^2(\sin u+\sin 2u)^2+a^2(\cos u+\cos 2u)^2=2a^2(1+\cos u),$$
$$G=(\vec{r}_v',\vec{r}_v')=a^2(\sin u+\frac{1}{2}\sin 2u)^2=a^2\sin^2 u(1+\cos u)^2,$$
$$F=(\vec{r}_u',\vec{r}_v')=0,$$
$$\sqrt{EG-F^2}=\sqrt{2a^4\sin^2 u\,(1+\cos u)^3}=\sqrt{16a^4\sin^2 u\,\cos^6\left(\frac{u}{2}\right)}=8a^2\sin\left(\frac{u}{2}\right)\cos^4\left(\frac{u}{2}\right).$$

Кроме того,

$$x^2+y^2+z^2=4a^2\cos^4\left(\frac{u}{2}\right).$$

Следовательно,

$$\iint\limits_{\Sigma}(x^2+y^2+z^2)dS=32a^4\iint\limits_{D}\sin\left(\frac{u}{2}\right)\cos^8\left(\frac{u}{2}\right)dudv=32a^4\int\limits_0^{2\pi}dv\int\limits_0^{\pi}\sin\left(\frac{u}{2}\right)\cos^8\left(\frac{u}{2}\right)du=$$
$$=-128a^4\pi\frac{\cos^9\left(\frac{u}{2}\right)}{9}\Big|_0^{\pi}=\frac{128a^4\pi}{9}.$$

Поверхностный интеграл второго рода.

Пусть $\Sigma:\ \vec{r}(u,v)=x(u,v)\vec{i}+y(u,v)\vec{j}+z(u,v)\vec{k},\ (u,v)\in\overline{D}$ – элементарный гладкий кусок поверхности с ориентацией $\vec{n}=(\cos\alpha,\,\cos\beta,\,\cos\gamma)$, где α,β,γ – углы, которые вектор $\vec{n}$ образует с осями координат *Ox*, *Oy*, *Oz* соответственно. Кроме того, пусть в точках поверхности Σ определены функции $P(x,y,z),\ Q(x,y,z),\ R(x,y,z)$.

Определение. Поверхностный интеграл второго рода

$$\iint\limits_{\Sigma}P(x,y,z)dydz+Q(x,y,z)dzdx+R(x,y,z)dxdy$$

по поверхности Σ с ориентацией $\vec{n}=(\cos\alpha,\,\cos\beta,\,\cos\gamma)$ определяется следующим равенством

$$\iint\limits_{\Sigma}P(x,y,z)dydz+Q(x,y,z)dxdz+R(x,y,z)dxdy=$$
$$=\iint\limits_{\Sigma}\big(P(x,y,z)\cos\alpha+Q(x,y,z)\cos\beta+R(x,y,z)\cos\gamma\big)dS.$$

Определение. Пусть Σ – кусочно-гладкая ориентируемая поверхность и $\Sigma_i,\ i=1,2,...,k$ – составляющие ее элементарные гладкие куски. *Поверхностный интеграл второго рода*

$$\iint\limits_{\Sigma}P(x,y,z)dydz+Q(x,y,z)dzdx+R(x,y,z)dxdy$$

по ориентированной поверхности Σ определяется следующим равенством

$$\iint\limits_{\Sigma}P(x,y,z)dydz+Q(x,y,z)dzdx+R(x,y,z)dxdy=$$
$$=\sum_{i=1}^{k}\iint\limits_{\Sigma_i}P(x,y,z)dydz+Q(x,y,z)dzdx+R(x,y,z)dxdy.$$

Легко видеть, что поверхностный интеграл второго рода меняет знак при изменении ориентации поверхности. Действительно, если Σ^+ – поверхность Σ с ориентацией $\vec{n}=(\cos\alpha,\,\cos\beta,\,\cos\gamma)$, а Σ^- – поверхность Σ с ориентацией $-\vec{n}=(-\cos\alpha,\,-\cos\beta,-\cos\gamma)$, то

$$\iint\limits_{\Sigma^+} P(x,y,z)dydz + Q(x,y,z)dzdx + R(x,y,z)dxdy =$$
$$= \iint\limits_{\Sigma} \left(P(x,y,z)\cos\alpha + Q(x,y,z)\cos\beta + R(x,y,z)\cos\gamma\right) dS =$$
$$= -\iint\limits_{\Sigma} \Big(P(x,y,z)\big(-\cos\alpha\big) + Q(x,y,z)\big(-\cos\beta\big) + R(x,y,z)\big(-\cos\gamma\big)\Big) dS =$$
$$= -\iint\limits_{\Sigma^-} P(x,y,z)dydz + Q(x,y,z)dzdx + R(x,y,z)dxdy.$$

Получим формулу для вычисления поверхностного интеграла второго рода. Выберем в качестве ориентации нормаль $\vec{n} = \dfrac{[r'_u; r'_v]}{\left|[r'_u; r'_v]\right|}$. Так как $\left|[r'_u; r'_v]\right| = \sqrt{EG - F^2}$, то

$$\vec{n} = \frac{[r'_u; r'_v]}{\left|[r'_u; r'_v]\right|} = \left(\frac{\begin{vmatrix} y'_u & z'_u \\ y'_v & z'_v \end{vmatrix}}{\sqrt{EG-F^2}}, -\frac{\begin{vmatrix} x'_u & z'_u \\ x'_v & z'_v \end{vmatrix}}{\sqrt{EG-F^2}}, \frac{\begin{vmatrix} x'_u & y'_u \\ x'_v & y'_v \end{vmatrix}}{\sqrt{EG-F^2}} \right).$$

Следовательно,

$$\cos\alpha = \frac{\begin{vmatrix} y'_u & z'_u \\ y'_v & z'_v \end{vmatrix}}{\sqrt{EG-F^2}}; \quad \cos\beta = -\frac{\begin{vmatrix} x'_u & z'_u \\ x'_v & z'_v \end{vmatrix}}{\sqrt{EG-F^2}}; \quad \cos\gamma = \frac{\begin{vmatrix} x'_u & y'_u \\ x'_v & y'_v \end{vmatrix}}{\sqrt{EG-F^2}}.$$

Поэтому

$$\iint\limits_{\Sigma} P(x,y,z)dydz + Q(x,y,z)dzdx + R(x,y,z)dxdy =$$
$$= \iint\limits_{\Sigma} \left(P(x,y,z)\cos\alpha + Q(x,y,z)\cos\beta + R(x,y,z)\cos\gamma\right) dS =$$
$$= \iint\limits_{D} \left(P(x(u,v), y(u,v), z(u,v)) \frac{\begin{vmatrix} y'_u & z'_u \\ y'_v & z'_v \end{vmatrix}}{\sqrt{EG-F^2}} - Q(x(u,v), y(u,v), z(u,v)) \frac{\begin{vmatrix} x'_u & z'_u \\ x'_v & z'_v \end{vmatrix}}{\sqrt{EG-F^2}} + \right.$$
$$\left. + R(x,y,z) \frac{\begin{vmatrix} x'_u & y'_u \\ x'_v & y'_v \end{vmatrix}}{\sqrt{EG-F^2}} \right) \sqrt{EG-F^2}\, dudv = \iint\limits_{D} \begin{vmatrix} P & Q & R \\ x'_u & y'_u & z'_u \\ x'_v & y'_v & z'_v \end{vmatrix} dudv.$$

Рассмотрим частный случай. Пусть поверхность задана в виде $z = f(x,y), \ (x,y) \in \overline{D}$. В этом случае радиус-вектор точки поверхности равен $\vec{r} = (x, y, f(x,y))$. Пусть ориентация поверхности задается нормалью $\vec{n} = \dfrac{[\vec{r}'_x, \vec{r}'_y]}{\left|[\vec{r}'_x, \vec{r}'_y]\right|}$. Заметим, что вектор

$[\vec{r}'_x, \vec{r}'_y] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & f'_x \\ 0 & 1 & f'_y \end{vmatrix} = -f'_x\vec{i} - f'_y\vec{j} + \vec{k}$ образует острый угол с ортом $\vec{k}$. Говорят, что такая нормаль определяет *верхнюю сторону поверхности*, а противоположная – *нижнюю*. Итак,

$$\iint\limits_{\Sigma} P(x,y,z)dydz + Q(x,y,z)dzdx + R(x,y,z)dxdy = \iint\limits_{D} \begin{vmatrix} P & Q & R \\ 1 & 0 & f'_x \\ 0 & 1 & f'_y \end{vmatrix} dxdy =$$

$$= \iint\limits_{D} \left(R(x,y,f(x,y)) - P(x,y,f(x,y))f'_x - Q(x,y,f(x,y))f'_y \right) dxdy.$$

Можно получить аналогичные формулы для случаев поверхностей, заданных в виде $y = f(x,z),\ (x,z) \in \overline{D}$ или $x = f(y,z),\ (y,z) \in \overline{D}$.

Пример 6. Вычислить поверхностный интеграл второго рода по части поверхности цилиндра, вырезаемой заданными плоскостями. Нормаль выбрать внешнюю по отношению к замкнутой поверхности, образованной данными поверхностями.

$$\iint\limits_{\Sigma} xdydz + ydzdx + 2z^4 dxdy, \quad \Sigma:\ x^2 + y^2 = 1,\ \ z = 0,\ z = 3.$$

Решение. Переходя к цилиндрическим координатам, параметрическое представление данной поверхности можно записать в виде

$$\Sigma:\ \vec{r}(\varphi,z) = \cos\varphi\vec{i} + \sin\varphi\vec{j} + z\vec{k},\ \ \varphi \in [0;2\pi],\ z \in [0;3].$$

Тогда

$$\vec{r}'_\varphi(\varphi,z) = -\sin\varphi\vec{i} + \cos\varphi\vec{j}, \quad \vec{r}'_z(\varphi,z) = \vec{k}.$$

Рассмотрим нормаль $\vec{n} = \dfrac{[\vec{r}'_\varphi, \vec{r}'_z]}{\left|[\vec{r}'_\varphi, \vec{r}'_z]\right|}$. Так как

$$[\vec{r}'_\varphi, \vec{r}'_z] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \cos\varphi\vec{i} + \sin\varphi\vec{j},$$

то $\vec{n} = \cos\varphi\vec{i} + \sin\varphi\vec{j}$. Поскольку, например, в точке поверхности, соответствующей параметрам $\varphi = 0,\ z = 1$, мы получаем $\vec{n} = \vec{i}$, то $\vec{n} = \cos\varphi\vec{i} + \sin\varphi\vec{j}$ – это внешняя нормаль по отношению к замкнутой поверхности, образованной данными поверхностями. Следовательно,

$$\iint\limits_{\Sigma} xdydz + ydzdx + 2z^4 dxdy = \iint\limits_{[0;2\pi]\times[0;3]} \begin{vmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 2z^4 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} d\varphi dz =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^3 dz = 6\pi.$$

Пример 7. Вычислить $\iint\limits_{\Sigma} yzdydz + x^2 dzdx + yzdxdy$, где Σ – полусфера $x^2 + y^2 + z^2 = a^2,\ \ y \ge 0$, а нормаль образует острый угол с ортом $\vec{k}$.

Решение. Поскольку $y \ge 0$, то данную полусферу можно задать следующим параметрическим представлением

$$\Sigma:\ \vec{r}(x,z) = x\vec{i} + \sqrt{a^2 - x^2 - z^2}\,\vec{j} + z\vec{k},\ \left(x,z\right) \in \overline{D} = \{(x,z):\ x^2 + z^2 \le a^2\}.$$

Имеем

$$\vec{r}'_x = \vec{i} + \frac{-x}{\sqrt{a^2 - x^2 - z^2}}\vec{j}; \qquad \vec{r}'_z = \frac{-z}{\sqrt{a^2 - x^2 - z^2}}\vec{j} + \vec{k};$$

$$[\vec{r}_x',\vec{r}_z'] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & \dfrac{-x}{\sqrt{a^2-x^2-z^2}} & 0 \\ 0 & \dfrac{-z}{\sqrt{a^2-x^2-z^2}} & 1 \end{vmatrix} = \frac{-x}{\sqrt{a^2-x^2-z^2}}\vec{i} - \vec{j} + \frac{-z}{\sqrt{a^2-x^2-z^2}}\vec{k}.$$

Отсюда ясно, что нормаль $\dfrac{[\vec{r}_x',\vec{r}_z']}{\left|[\vec{r}_x',\vec{r}_z']\right|}$ образует тупой угол с ортом $\vec{k}$. Следовательно, заданная ориентация определяется нормалью $\vec{n} = \dfrac{[\vec{r}_z',\vec{r}_x']}{\left|[\vec{r}_z',\vec{r}_x']\right|}$. Поэтому

$$\iint\limits_{\Sigma} yzdydz + x^2dzdx + yzdxdy = \iint\limits_{\bar{D}} \begin{vmatrix} z\sqrt{a^2-x^2-z^2} & x^2 & z\sqrt{a^2-x^2-z^2} \\ 0 & \dfrac{-z}{\sqrt{a^2-x^2-z^2}} & 1 \\ 1 & \dfrac{-x}{\sqrt{a^2-x^2-z^2}} & 0 \end{vmatrix} dxdz =$$

$$= \iint\limits_{\bar{D}} \left(xz + z^2 + x^2\right)dxdz = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^a \left(\rho^2\cos\varphi\sin\varphi + \rho^2\sin^2\varphi + \rho^2\cos^2\varphi\right)\rho d\rho =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^a \left(\cos\varphi\sin\varphi + 1\right)\rho^3 d\rho = \frac{\pi a^4}{2}.$$

Теорема (Остроградский – Гаусс). Пусть граница ∂G ограниченной области G состоит из конечного числа кусочно-гладких ориентируемых поверхностей, а функции $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$, $R(x,y,z)$ непрерывны вместе с частными производными $\dfrac{\partial P}{\partial x}$, $\dfrac{\partial Q}{\partial y}$, $\dfrac{\partial R}{\partial z}$ на $\bar{G}$. Тогда

$$\iiint\limits_G \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right)dxdydz = \iint\limits_{\partial G} Pdydz + Qdzdx + Rdxdy,$$

где в качестве нормали на границе ∂G выбрана внешняя нормаль.

Теорема (Стокс). Пусть Σ ориентированная кусочно-гладкая поверхность, а контур Γ охватывает Σ и ориентирован в соответствии с ориентацией поверхности. Если функции $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$, $R(x,y,z)$ непрерывны вместе частными производными первого порядка в области G, содержащей поверхность Σ, то

$$\iint\limits_{\Sigma} \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)dydz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)dzdx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy = \int\limits_{\Gamma} Pdx + Qdy + Rdz.$$

Лекция 5. Элементы векторного анализа и теории поля.

Пусть в области $D \subset \mathbf{R}^3$ определена вектор-функция $\vec{a} = (P, Q, R)$. В этом случае говорят, что на D определено *векторное поле* $\vec{a}$.

Определение. Если функции P, Q, R дифференцируемы в точке $M \in D$, то число $\left.\left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right)\right|_M$ называется дивергенцией векторного поля $\vec{a} = (P, Q, R)$ в точке M и обозначается $div\vec{a}$.

Определение. Вектор с координатами $\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z},\ \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x},\ \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}$ называется *ротором* векторного поля $\vec{a} = (P, Q, R)$ и обозначается $rot\vec{a}$. Символически ротор можно записать следующим образом

$$rot\vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}.$$

Определение. Пусть γ – замкнутая кусочно-гладкая кривая в области D. Интеграл $\int\limits_{\gamma} Pdx + Qdy + Rdz$ называется *циркуляцией* векторного поля $\vec{a} = (P, Q, R)$ по кривой γ. Используют также обозначение $\oint\limits_{\gamma} Pdx + Qdy + Rdz$. Если $\breve{AB}$ кусочно-гладкая кривая в области D, то интеграл $\int\limits_{\breve{AB}} Pdx + Qdy + Rdz$ называется *работой* векторного поля $\vec{a} = (P, Q, R)$ по кривой $\breve{AB}$.

Определение. Векторное поле $\vec{a}$ называется *потенциальным* в области D, если циркуляция этого поля по любой замкнутой кусочно-гладкой кривой, расположенной в области D, равна нулю.

Определение. Пусть S – некоторая ориентированная поверхность, лежащая в области D, $\vec{n}$ – единичная нормаль на поверхности, задающая ее ориентацию, и S^+ – поверхность S с указанной ориентацией. Интеграл $\iint\limits_{S^+} (\vec{a}, \vec{n})\, dS$ называется потоком векторного поля через поверхность S.

Определение. Векторное поле, поток которого через любую кусочно-гладкую поверхность, лежащую в области D и являющуюся границей некоторой ограниченной области, равен нулю, называется *соленоидальным* в D.

Используя введенные обозначения, теорему Остроградского–Гаусса можно записать в виде:

$$\iiint\limits_{G} div\vec{a}\ dxdydz = \iint\limits_{\partial G} (\vec{a}, \vec{n})\, dS,$$

а теорему Стокса – в виде

$$\iint\limits_{\Sigma} (rot\vec{a}, \vec{n})\, dS = \int\limits_{\Gamma} Pdx + Qdy + Rdz.$$

Определение. Область $D \subset \mathbf{R}^3$ называется *поверхностно-односвязной*, если для любой кусочно-гладкой замкнутой кривой Γ, лежащей в D, можно указать такую ориентируемую кусочно-гладкую поверхность S, расположенную в D, границей которой является кривая Γ.

Теорема. Пусть в поверхностно-односвязной области *D*, задано векторное поле $\vec{a}=(P,Q,R)$, причем функции P,Q,R имеют в *D* непрерывные частные производные первого порядка. Тогда следующие три условия эквивалентны:

1. Векторное поле является потенциальным.
2. В области *D* существует потенциальная функция $u(M)$, т.е. такая функция, что $\vec{a}=\nabla u$. В этом случае для любых двух точек *A* и *B* из области *D* и для произвольной кусочно-гладкой кривой $\breve{AB}$, соединяющей эти точки и расположенной в *D*: $\int\limits_{\breve{AB}} Pdx+Qdy+Rdz=u(B)-u(A)$.
3. $rot\vec{a}=\vec{0}$ в области D.

Назовем ограниченную область *допустимой*, если для нее справедлива теорема Гаусса-Остроградского и ее граница состоит из одной кусочно-гладкой поверхности. Поверхность будем называть допустимой, если она является границей допустимой области. Область $G\subset\mathbf{R}^3$ назовем *объемно-односвязной*, если, какова бы ни была допустимая область *D*, граница которой лежит в *G*, сама область *D* также содержится в *G*.

Теорема. Пусть в объемно односвязной области *G* задано векторное поле $\vec{a}=(P,Q,R)$, где функции P,Q,R непрерывны вместе со своими частными производными в области *G*. Для того чтобы векторное поле $\vec{a}$ было соленоидальным в области *G* необходимо и достаточно, чтобы во всех точках области выполнялось $div\vec{a}=0$.

Пример. Показать, что поле $\vec{F}=\left(\frac{y}{z}+2x\right)\cdot\vec{i}+\frac{x}{z}\cdot\vec{j}-\frac{xy}{z^2}\cdot\vec{k}$ потенциально. Найти потенциал, вычислить работу поля по отрезку, соединяющему точки $A(1,0,1)$ и $B(0,2,2)$.

Решение. Обозначим

$$P=\frac{y}{z}+2x,\ Q=\frac{x}{z},\ R=-\frac{xy}{z^2}.$$

Вычислим

$$rot\vec{F}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix}=\vec{i}\left(\frac{\partial}{\partial y}R-\frac{\partial}{\partial z}Q\right)-\vec{j}\left(\frac{\partial}{\partial x}R-\frac{\partial}{\partial z}P\right)+\vec{k}\left(\frac{\partial}{\partial x}Q-\frac{\partial}{\partial y}P\right)=$$

$$=\vec{i}\left(\frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{xy}{z^2}\right)-\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{x}{z}\right)\right)-\vec{j}\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{xy}{z^2}\right)-\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{y}{z}+2x\right)\right)+\vec{k}\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{z}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{z}+2x\right)\right)=$$

$$=\vec{i}\left(-\frac{x}{z^2}-\left(-\frac{x}{z^2}\right)\right)-\vec{j}\left(-\frac{y}{z^2}-\left(-\frac{y}{z^2}\right)\right)+\vec{k}\left(\frac{1}{z}-\frac{1}{z}\right)=\vec{0}.$$

Итак, $rot\vec{F}=\vec{0}$. Следовательно, заданное поле потенциально.

Найдем функцию $U=U(x,y,z)$ такую, что $\frac{\partial U}{\partial x}=P$, $\frac{\partial U}{\partial y}=Q$, $\frac{\partial U}{\partial z}=R$.

1 способ.

$$U(x,y,z)=\int\limits_{(x_0,y_0,z_0)}^{(x,y,z)} Pdx+Qdy+Rdz=\int\limits_{x_0}^{x}P(x,y_0,z_0)dx+\int\limits_{y_0}^{y}Q(x,y,z_0)dy+\int\limits_{z_0}^{z}P(x,y,z)dz=$$

$$=\int\limits_{x_0}^{x}\left(\frac{y_0}{z_0}+2x\right)dx+\int\limits_{y_0}^{y}\frac{x}{z_0}dy-\int\limits_{z_0}^{z}\frac{xy}{z^2}dz=\left(\frac{y_0}{z_0}+x^2\right)\Bigg|_{x_0}^{x}+\frac{x}{z_0}\Bigg|_{y_0}^{y}+\frac{xy}{z}\Bigg|_{z_0}^{z}=x^2+\frac{xy}{z}-{x_0}^2-\frac{x_0y_0}{z_0}.$$

Так как точка (x_0, y_0, z_0) – произвольная, то обозначим $C = -{x_0}^2 - \frac{x_0 y_0}{z_0}$. Итак, $U(x,y,z) = x^2 + \frac{xy}{z} + C$.

2 способ. Имеем

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial x} = \frac{y}{z} + 2x, \\ \frac{\partial U}{\partial y} = \frac{x}{z}, \\ \frac{\partial U}{\partial z} = -\frac{xy}{z^2}. \end{cases}$$

Из первого равенства $U = \int \left(\frac{y}{z} + 2x\right) dx = \frac{xy}{z} + x^2 + \varphi(y,z)$. Продифференцируем полученное равенство по y, получим $\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{x}{z} + \frac{\partial \varphi(y,z)}{\partial y}$. Используем второе равенство и получим $\frac{x}{z} + \frac{\partial \varphi(y,z)}{\partial y} = \frac{x}{z}$, откуда $\frac{\partial \varphi(y,z)}{\partial y} = 0$, $\varphi(y,z) = \phi(z)$, то есть $U = \frac{xy}{z} + x^2 + \phi(z)$. Дифференцируем по z и воспользуемся последним равенством. $\frac{\partial U}{\partial z} = -\frac{xy}{z^2} + \frac{d\phi}{dz} = -\frac{xy}{z^2}$, откуда $\frac{d\phi}{dz} = 0$, то есть $\phi = Const = C$. Итак, $U(x,y,z) = x^2 + \frac{xy}{z} + C$.

Используем найденную функцию $U(x,y,z)$ для вычисления работы

$$\int_{A(1,0,1)}^{B(0,2,2)} Pdx + Qdy + Rdz = \int_{A(1,0,1)}^{B(0,2,2)} dU = U(B) - U(A) = C - (1 + C) = -1.$$