ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ
МОСКОВСКИЙ АВИАЦИОННЫЙ ИНСТИТУТ
(государственный технический университет)

Кафедра “Математическая кибернетика”

С.Ю. ЛУНЕВА

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К ПРАКТИЧЕСКИМ ЗАНЯТИЯМ ПО КУРСУ “ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ”

Рекомендовано в качестве учебного пособия
Редакционным советом факультета
“Прикладная математика и физика”
Московского авиационного института

МОСКВА
2008

СПИСОК СОКРАЩЕНИЙ

ДУ	Дифференциальное уравнение
СДУ	Система дифференциальных уравнений
НСДУ	Нормальная система дифференциальных уравнений
ЛДУ	Линейное дифференциальное уравнение
ЛОДУ	Линейное однородное дифференциальное уравнение
ЛНДУ	Линейное неоднородное дифференциальное уравнение

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Дифференциальные уравнения являются одним из основных математических понятий, применяемых при решении практических задач. Это объясняется тем, что при исследовании физических процессов очень часто выявляется связь между величинами, описывающими исследуемые явления и их производными или дифференциалами.

Пример.

Описать движение тела массы m, брошенного в момент времени $t = 0$ вертикально вверх из положения y_0 со скоростью V_0, под действием силы тяжести.

На основании 2-го закона Ньютона получим:

$$y'' = -g,$$
$$y(0) = y_0, \quad y'(0) = V_0$$

Решение задачи исследования физического процесса можно разделить на два этапа:

1. Составление дифференциального уравнения, которое при определенных предположениях, описывает физический процесс. Решается в курсах общей физики, механики, мат. моделирования, специальных курсах.

2. Нахождение решения дифференциального уравнения, то есть зависимости между величинами, характеризующими физический процесс. Решается в курсе дифференциальных уравнений. В рассматриваемом примере решение дифференциального уравнения это зависимость вертикальной координаты тела от времени $y(t)$, зная которую можно рассчитать, например, время падения тела на землю и т.д.

ГЛАВА 1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Рассматриваются следующие обозначения:

x - независимая переменная

$y(x)$ - неизвестная функция переменной x

$y', y'', y''', y^{(4)} .... y^{(n)} ...$ - производные неизвестной функции 1-го, 2-го, 3-го, 4-го и т.д. n-го порядков

$dy, d^2y, d^3y ....$ - дифференциалы неизвестной функции 1-го, 2-го, 3-го и т. д. порядков

Определение 1.1. Дифференциальным уравнением (ДУ) называется уравнение, в которое неизвестная функция $y(x)$ входит под знаком производной или дифференциала.

Определение 1.2. Порядок ДУ – это порядок (номер) старшей производной или дифференциала неизвестной функции $y(x)$, входящей в уравнение.

Общий вид ДУ n-го порядка: $F(x, y, y', y'', y''' .... y^{(n)}) = 0$

Определение 1.3. ДУ называется разрешенным относительно производной, если из ДУ может быть выражена в явном виде старшая производная.

Общий вид ДУ n-го порядка, разрешенного относительно производной:

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', y''' .... y^{(n-1)})$$

Определение 1.4. Процесс нахождения решения ДУ называется интегрированием ДУ.

Определение 1.5. Решением ДУ называется функция, определенная в некоторой области и достаточное число раз дифференцируемая, которая при подстановке в ДУ обращает его в тождество.

Решение ДУ, имеющее неявный вид $\Phi(x, y) = 0$, называют <u>интегралом</u> дифференциального уравнения.

График решения ДУ называется <u>интегральной кривой</u>.

Поскольку процесс нахождения решения ДУ связан с многократным (n кратным) интегрированием, получаемое в результате решение содержит n произвольных постоянных (констант), свободных для выбора. Таким образом, любое ДУ имеет бесконечное множество решений, подчиняющихся определенным закономерностям.

Определение 1.6. Общим решением ДУ называется множество, содержащее все без исключения решения ДУ.

Общее решение ДУ n-го порядка, имеющее неявный вид $\Phi(x, y, C_1, C_2..C_n) = 0$, называют общим интегралом дифференциального уравнения:

График общего решения ДУ называется семейством интегральных кривых.

Определение 1.7. Частным решением ДУ называется любое решение, получаемое из общего при конкретных значениях произвольных постоянных $C_1, C_2...C_n$. Значения произвольных постоянных, как правило, определяются из некоторых заданных условий.

Пример.

Дано ДУ 2-го порядка: $y'' + y = 0$

Общее решение данного ДУ: $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$

Частное решение данного ДУ, полученное при условии что $y(0) = 1$ и $y'(0) = 2$: $y = \cos x + 2\sin x$

Определение 1.8 Особым решением ДУ называется такое его решение, в каждой точке которого с той же касательной проходит другое, не совпадающее с ним решение.

ГЛАВА 2. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ 1-ГО ПОРЯДКА

Общий вид ДУ 1-го порядка:

$$F(x, y, y') = 0 \qquad \text{(форма 1)}$$

или

$$y' = f(x, y) \qquad \text{(форма 2)}$$

Часто ДУ 1-го порядка заданы в форме явно содержащей дифференциал неизвестной функции dy:

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 \qquad \text{(форма 3)}$$

Очевидно, что от формы 2 записи ДУ легко перейти к форме 3 и наоборот, покажем это:

$$y' = f(x, y) \;\Rightarrow\; \frac{dy}{dx} = f(x, y) \;\Rightarrow\; dy = f(x, y)dx \;\Rightarrow\; \underbrace{f(x, y)}_{M(x,y)}dx + \underbrace{(-1)}_{N(x,y)}dy = 0$$

или

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 \;\Rightarrow\; M(x, y) + N(x, y)\frac{dy}{dx} = 0 \;\Rightarrow\; \frac{dy}{dx} = -\frac{M(x, y)}{N(x, y)} \;\Rightarrow\; y' = \underbrace{-\frac{M(x, y)}{N(x, y)}}_{f(x,y)}$$

Общее решение ДУ 1-го порядка содержит одну произвольную постоянную и имеет вид: $y = \varphi(x, C)$ или $\Phi(x, y, C) = 0$.

Геометрический смысл ДУ 1-го порядка

Пусть в некоторой области D ДУ 1-го порядка $y' = f(x, y)$ имеет решение $y = \varphi(x, C)$. Тогда, исходя из геометрического смысла производной, получим, что в любой точке P плоскости (x, y) касательная к интегральной кривой имеет угловой коэффициент (тангенс угла наклона) равный $f(x, y)$.

Направления касательных к интегральным кривым образует поле направлений. Построить поле направлений, значит вычислить тангенс угла наклона касательных к интегральным кривым в каждой точке плоскости (x, y), где определена $f(x, y)$.

Определение 2.1. Геометрическое место точек плоскости (x, y), в которых поле направлений постоянно называется изоклиной.

2.1. Условия существование и единственность решения дифференциального уравнения 1-го порядка. Задача Коши

При решении практических задач, как правило, необходимо найти не общее, а частные решения ДУ, соответствующие определенным априори известным условиям. Обычно это так называемые начальные условия, которые накладываются на искомую функцию $y(x)$ в заданной точке x_0.

Определение 2.2. Задачей Коши для ДУ 1-го называется задача об отыскании частного решения ДУ, удовлетворяющего начальному условию $y(x_0) = y_0$, где x_0, y_0 - заданы.

Поскольку задача Коши носит исключительно прикладной характер, возникает вопросы: существует ли решение ДУ, удовлетворяющее заданному начальному условию и будет ли оно единственным.

Теорема Коши. (Теорема существования и единственности решения ДУ)

<u>Дано:</u> $y' = f(x, y)$,

Если функция $f(x,y)$ непрерывна в некоторой области D, содержащей точку $P_0 = (x_0, y_0)$, и удовлетворяет в D условию Липшица, то в достаточно малом интервале $x_0 - h \le x \le x_0 + h, h > 0$ существует единственное решение уравнения $y' = f(x, y)$, удовлетворяющее условию $y(x_0) = y_0$.

Существование решения при этом утверждается на достаточно малом интервале, а единственность в пределах рассматриваемой области.

Замечание. Условие Липшица может быть заменено несколько более грубым условием существования ограниченной по модулю, непрерывной производной $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ в области D.

Утверждение.

1) Если функция $f(x,y)$ непрерывна, то в интервале $x_0 - h \le x \le x_0 + h, h > 0$ существует решение ДУ.

2) Если кроме этого, существует ограниченная непрерывная частная производная $\frac{\partial f}{\partial y}$ в рассматриваемой области, то это решение является единственным.

Пример.

Проанализировать поставленные задачи Коши

1) $y' = \frac{y}{x}, \quad y(0) = 1$

2) $y' = x\sqrt{y}, \quad y(1) = 0$

Решение.

1) Рассмотрим задачу $y' = \frac{y}{x}, \quad y(0) = 1$.

Рассмотрим правую часть уравнения: $f(x, y) = \frac{y}{x}$ - это функция двух переменных. Исследуем поведение этой функции в окрестности начальной точки, точки задаваемой начальными условиями: $P_0 = (0,1)$. Очевидно, что в самой точке $P_0 = (0,1)$ функция имеет разрыв, а, следовательно, не является непрерывной.

Вывод: задача Коши не имеет решений.

Для сравнения, общее решение данного ДУ: $y = C \cdot x$, очевидно, что при подстановке начальных условий в общее решение получим: $1 = 0$

2) Рассмотрим задачу $y' = x\sqrt{y}, \quad y(1) = 0$.

Рассмотрим правую часть уравнения: $f(x, y) = x\sqrt{y}$ - это функция двух переменных. Исследуем поведение этой функции в окрестности начальной точки, точки задаваемой начальными условиями: $P_0 = (1,0)$. Очевидно, что функция не имеет разрывов, а, следовательно, является непрерывной.

Вывод: задача Коши имеет решение.

Рассмотрим частную производную функции $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x}{2\sqrt{y}}$ - это также функция двух переменных. Исследуем поведение этой функции в окрестности начальной точки $P_0 = (1,0)$. Очевидно, что в самой точке $P_0 = (1,0)$ функция имеет разрыв, а, следовательно, не является непрерывной.

Вывод: задача Коши имеет более одного решения.

Для сравнения, общее решение данного ДУ: $\sqrt{y}=\frac{x^2}{4}+C$, $y=0$, очевидно, что при подстановке начальных условий в общее решение получим два решения задачи Коши: $\sqrt{y}=\frac{x^2}{4}-\frac{1}{4}$, $y=0$

2.2 Дифференциальные уравнения 1-го порядка, разрешенные относительно производной

2.2.1 Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными

Определение 2.3. Дифференциальное уравнение $y'=f(x,y)$ называется дифференциальным уравнением с разделяющимися переменными, если его можно привести к виду:

$$P(x)\cdot Q(y)dx+R(x)\cdot S(y)dy=0$$

или

$$\boxed{y'=\varphi(x)\cdot\psi(y)} \quad *$$

Правая часть уравнения * представлена в виде произведения двух функций, одна из которых зависит только от y, а другая только от x.

Алгоритм решения ДУ с разделяющимися переменными

1. Привести уравнение к виду *, указать тип уравнения.
2. Представить y' в виде $\frac{dy}{dx}$.
3. Умножить или разделить обе части уравнения на такие выражения, чтобы слева оказались только функции y и дифференциал dy, а справа – функции только x и дифференциал dx. При разделении переменных числовые множители лучше оставлять слева.
4. Проинтегрировать левую часть уравнения по y, а правую – по x. Константу интегрирования C записать только справа. Результат интегрирования – решение ДУ.
5. Проверить возможно потерянные решения. (см. Замечание)

6. Записать в ответ общее решение ДУ.

Замечание. В процессе решения ДУ могли быть потеряны решения. Такими потерянными решениями могут быть функции, обращающие в ноль выражения, оказавшиеся в знаменателях левой и правой частей уравнения или сокращенные при разделении переменных.

Пример 2.1.

Дано: $x \cdot y + (x+1)y' = 0$

Решение:

1. Выразим из ДУ старшую производную: $y' = \dfrac{-x \cdot y}{x+1}$

В правой части ДУ можно выделить два множителя, один представляет функцию аргумента x, другой аргумента y:

$$y' = \underbrace{\frac{-x}{x+1}}_{\varphi(x)} \cdot \underbrace{y}_{\psi(y)}$$ - это ДУ с разделяющимися переменными в виде *

2. Сделаем замену: $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{-x}{x+1} \cdot y$

3. Разделим переменные: $\dfrac{dy}{y} = \dfrac{-x}{x+1} \cdot dx$

4. Проинтегрируем левую часть уравнения по y, правую по x:

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{-x}{x+1} \cdot dx \qquad \Rightarrow \qquad \ln|y| = -\int \frac{x+1-1}{x+1} \cdot dx$$

$$\Rightarrow \qquad \ln|y| = -\int \frac{x+1}{x+1} \cdot dx - \int \frac{-1}{x+1} \cdot dx \qquad \Rightarrow \qquad \ln|y| = -\int 1 \cdot dx + \int \frac{1}{x+1} \cdot d(x+1)$$

$$\Rightarrow \qquad \underline{\ln|y| = -x + \ln|x+1| + C}$$ - решение ДУ

Преобразуем полученное решение:

$$\ln|y| = -x + \ln|x+1| + \ln C$$

$$\Rightarrow \qquad e^{\ln|y|} = e^{-x + \ln|x+1| + \ln C} \qquad \Rightarrow \qquad y = e^{-x} \cdot e^{\ln|x+1|} \cdot e^{\ln C}$$

$$\Rightarrow \qquad \boxed{y = e^{-x} \cdot (x+1) \cdot C}$$ - решение ДУ

5. Проанализируем возможно потерянные решения. Для этого выпишем все выражения, на которые осуществлялось деление в процессе решения, приравняем их нулю и проверим соответствующие функции подстановкой в исходное ДУ:

а) $x+1=0 \quad \Rightarrow \quad x=-1$. Проверим функцию $x=-1$, подставляем ее в ДУ:

$$-1\cdot y+(-1+1)y'=0 \qquad \Rightarrow \qquad -y+0=0 \qquad \Rightarrow \qquad -y=0$$

В полученном выражении левая часть не равна правой (не тождество), значит $x=-1$ - не решение ДУ.

б) $y=0$. Проверим функцию $y=0$, подставляем ее в ДУ:

$$x\cdot 0+(x+1)\cdot 0'=0 \qquad \Rightarrow \qquad 0+0=0 \qquad \Rightarrow \qquad 0=0$$

Получили: левая часть равна правой (тождество), значит $y=0$ - решение ДУ, но это решение входит в ранее найденное как частный случай при $C=0$

6. ***Ответ:*** $\boxed{y=e^{-x}\cdot(x+1)\cdot C}$

Пример 2.2.

<u>**Дано:**</u> $\sqrt{y^2+1}\cdot dx=x\cdot y\cdot dy$

<u>**Решение:**</u>

1. Используя формулу $y'=\dfrac{dy}{dx}$, выделим в ДУ старшую производную: $\sqrt{y^2+1}=x\cdot y\cdot y'$.

Выразим из ДУ старшую производную: $y'=\dfrac{\sqrt{y^2+1}}{x\cdot y}$

В правой части ДУ можно выделить два множителя, один представляет функцию аргумента x, другой аргумента y:

$$y'=\underbrace{\frac{1}{x}}_{\varphi(x)}\cdot\underbrace{\frac{\sqrt{y^2+1}}{y}}_{\psi(y)}$$ - это ДУ с разделяющимися переменными в виде *

2. Сделаем замену: $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{x}\cdot\dfrac{\sqrt{y^2+1}}{y}$

3. Разделим переменные: $\dfrac{y\cdot dy}{\sqrt{y^2+1}}=\dfrac{1}{x}dx$

4. Проинтегрируем левую часть уравнения по y, правую по x:

$$\int\frac{y\cdot dy}{\sqrt{y^2+1}}=\int\frac{1}{x}dx \qquad \Rightarrow \qquad \frac{1}{2}\cdot\int\frac{d(y^2+1)}{\sqrt{y^2+1}}=\ln|x|$$

$\Rightarrow \quad \dfrac{1}{2}\cdot 2\sqrt{y^2+1}=\ln|x|+C \quad \Rightarrow \quad \boxed{\sqrt{y^2+1}=\ln|x|+C}$ - решение ДУ

5. Проанализируем возможно потерянные решения. Для этого выпишем все выражения, на которые осуществлялось деление в процессе решения, приравняем их нулю и проверим соответствующие функции подстановкой в исходное ДУ:

а) $x=0$. Проверим функцию $x=0$, подставляем ее в ДУ:

$$\sqrt{y^2+1}\cdot d0=0\cdot y\cdot dy \quad \Rightarrow \quad 0=0$$

В полученном выражении левая часть равна правой (тождество), значит $\boxed{x=0}$ - решение ДУ, и это решение не входит в найденное ни при каком значении произвольной постоянной.

б) $y=0$. Проверим функцию $y=0$, подставляем ее в ДУ:

$$\sqrt{0^2+1}\cdot dx=x\cdot 0\cdot d0 \quad \Rightarrow \quad dx=0 \Rightarrow \quad 0=0$$

Получили: левая часть не равна правой (не тождество), значит $y=0$ - не решение ДУ.

в) $\sqrt{y^2+1}=0$ не имеет смысл ни при каких действительных значениях y, здесь нет решений.

6. ***Ответ:*** $\boxed{\sqrt{y^2+1}=\ln|x|+C, \quad x=0}$

2.2.2.Дифференциальные уравнения, приводящиеся к уравнениям с разделяющимися переменными

Дифференциальное уравнение вида $y' = f(ax + by + c)$ может быть приведено к ДУ с разделяющимися переменными с помощью замены: $z(x) = ax + b \cdot y(x) + c$.

Покажем это:

$$z'(x) = a + b \cdot y'(x) \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{z' - a}{b}$$

$$\underbrace{\frac{z' - a}{b}}_{y'} = \underbrace{f(z)}_{f(ax+by+c)}$$

$z' = a + b \cdot f(z)$ - ДУ с разделяющимися переменными

$$\frac{dz}{dx} = a + b \cdot f(z)$$

$$\frac{dz}{a + b \cdot f(z)} = dx$$

Замечание. В тех случаях, когда в процессе интегрирования ДУ проводится замена, при записи ответа необходимо провести обратную подстановку (замену).

2.2.3. Однородные дифференциальные уравнения 1-го порядка

Определение 2.4. Функция $M(x, y)$ называется однородной функцией своих аргументов степени n, если для любого числа $k > 0$ верно: $M(kx, ky) = k^n M(x, y)$

Пример:

$M(x, y) = x^2 + xy$

$M(kx, ky) = (kx)^2 + kx \cdot ky = k^2(x^2 + xy) = k^2 M(x, y)$ - однородная функция степени 2.

Определение 2.5. ДУ вида $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$, называется однородным ДУ 1-го порядка, если функции $M(x, y)$ и $N(x, y)$ являются однородными функциями своих аргументов одной и той же степени.

Однородное ДУ 1-го порядка может быть также определено как ДУ вида: $y' = f(x,y)$, где $f(x,y)$ – однородная функция своих аргументов 0-й степени.

Однородное ДУ 1-го порядка может быть представлено в виде: $\boxed{y' = f\left(\frac{y}{x}\right)}$ *

Пример.

$$y' = \underbrace{\frac{x+y}{x-y}}_{f(x,y)}$$

Здесь $f(x,y)$ - однородная функция своих аргументов 0-й степени:

$$f(kx,ky) = \frac{kx+ky}{kx-ky} = \frac{x+y}{x-y}$$

Вернёмся к исходному ДУ и разделим числитель и знаменатель в правой части на x:

$$y' = \underbrace{\frac{1+y/x}{1-y/x}}_{f\left(\frac{y}{x}\right)}$$

Однородное ДУ 1-го порядка с помощью замены $z(x) = \frac{y}{x}$ может быть приведено к ДУ с разделяющимися переменными. Покажем это.

$$z(x) = \frac{y}{x} \quad \Rightarrow \quad y = z \cdot x \quad \Rightarrow \quad y' = z' \cdot x + z$$

$$\underbrace{z' \cdot x + z}_{y'} = \underbrace{f(z)}_{f\left(\frac{y}{x}\right)}$$

$z' = (f(z) - z) \cdot \frac{1}{x}$ - ДУ с разделяющимися переменными

$$\frac{dz}{dx} = (f(z) - z) \cdot \frac{1}{x}$$

$$\frac{dz}{(f(z) - z)} = \frac{dx}{x}$$

Алгоритм решения однородного ДУ 1-го порядка

1. Привести уравнение к виду *, указать тип уравнения.

2. Сделать замену: $\frac{y}{x} = z(x)$, $y' = z' \cdot x + z$

3. Подставить полученные выражения в ДУ *, получится $z' = (f(z) - z)\cdot\frac{1}{x}$ - это ДУ с разделяющимися переменными.
4. Решить полученное ДУ.
5. Сделать обратную замену.
6. Проверить возможно потерянные решения.
7. Записать в ответ общее решение ДУ.

Пример 2.3.

Дано: $\frac{y'}{y} = \frac{\ln y - \ln x}{x}$

Решение:

1. Выразим из ДУ старшую производную: $y' = \frac{y}{x}\cdot(\ln y - \ln x)$

Правая часть полученного уравнения представляет собой функцию аргумента $\frac{y}{x}$:

$$y' = \underbrace{\frac{y}{x}\cdot\ln\frac{y}{x}}_{f(\frac{y}{x})}$$ - это однородное ДУ 1-го порядка

2. Сделаем замену: $z = \frac{y}{x}$, $y' = z'\cdot x + z$

3. Получим: $z'\cdot x + z = z\cdot\ln z$

$z' = \frac{1}{x}\cdot(z\cdot\ln z - z)$ - ДУ с разделяющимися переменными

4. Решаем ДУ с разделяющимися переменными:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{1}{x}\cdot(z\cdot\ln z - z)$$

$$\int\frac{dz}{z(\ln z - 1)} = \int\frac{dx}{x}$$

$$\int\frac{d(\ln z - 1)}{\ln z - 1} = \ln|x|$$

$$\ln|\ln z - 1| = \ln|x| + \ln C$$

$$\ln|\ln z - 1| = \ln|x|\cdot C$$

$$\ln z - 1 = C\cdot x$$

$\underline{\ln z = C \cdot x + 1}$ - решение ДУ с разделяющимися переменными

5. Сделаем обратную подстановку:

$$\boxed{\ln \frac{y}{x} = C \cdot x + 1}$$ - решение однородного ДУ

6. Потерянных решений нет.

7. ***Ответ:*** $\boxed{\ln \frac{y}{x} = C \cdot x + 1}$

2.2.4. Дифференциальные уравнения, приводящиеся к однородным уравнениям

Дифференциальное уравнение вида: $y' = f\left(\frac{a_1 x + b_1 y + c_1}{a_2 x + b_2 y + c_2} \right)$ может быть приведено к однородному 1-го порядка с помощью замены:

$$\begin{matrix} x = u + \alpha \\ y = v + \beta \end{matrix},$$ где u и v - новые аргументы.

Числа α и β должны быть таковы, чтобы функция в правой части уравнения стала однородной. Этого можно добиться, если α и β будут найдены как решения системы линейных алгебраических уравнений вида:

$$\begin{cases} a_1\alpha + b_1\beta + c_1 = 0 \\ a_2\alpha + b_2\beta + c_2 = 0 \end{cases}$$

Геометрически это означает перенос начала координат в точку пересечения прямых $a_1 x + b_1 y + c_1 = 0, \quad a_2 x + b_2 y + c_2 = 0$.

Пример.

$$y' = \frac{x + y - 3}{x - y - 1}$$

Решаем систему линейных алгебраических уравнений: $\begin{cases} \alpha + \beta = 3 = 0 \\ \alpha - \beta - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad \alpha = 2, \quad \beta = 1$

Используем замену: $\begin{matrix} x = u + 2 & dx = du \\ y = v + 1 & dy = dv \end{matrix}$

$$\frac{dv}{du} = \frac{(u+2) + (v+1) - 3}{(u+2) - (v+1) - 1}$$

$$\frac{dv}{du} = \frac{u + v}{u - v}$$ - однородное ДУ 1-го порядка

2.2.5. Линейные дифференциальные уравнения 1-го порядка

Определение 2.6. ДУ называется линейным, если неизвестная функция и ее производная входят в уравнение линейно.

Линейное ДУ 1-го порядка имеет вид:

$$\boxed{y' = a(x)\cdot y + b(x)} \qquad * \qquad \text{ДУ линейное по } y(x)$$

или

$$x' = a(y)\cdot x + b(y) \qquad \text{ДУ линейное по } x(y)$$

Определение 2.7. Если функция $b(x) = 0$, то ДУ называется линейным однородным уравнением, если же $b(x) \neq 0$, то соответственно линейным неоднородным. Линейные однородные уравнения являются ДУ с разделяющимися переменными.

Линейные ДУ 1-го порядка могут быть решены методом вариации произвольной постоянной (метод Лагранжа) или методом подстановки (метод Бернулли)

Метод вариации произвольной постоянной (метод Лагранжа)

<u>**Дано:**</u> $y' = a(x)\cdot y + b(x)$

Найдем сначала решение соответствующего линейного однородного ДУ: $y' = a(x)\cdot y$ - это ДУ с разделяющимися переменными.

$$\frac{dy}{dx} = a(x)\cdot y \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{y} = a(x)\cdot dx \quad \Rightarrow \quad \ln|y| = \int a(x)dx + \ln C \quad \Rightarrow \quad y = Ce^{\int a(x)dx}$$

Будем искать решение неоднородного линейного ДУ в виде $y = Ce^{\int a(x)dx}$, предварительно представив произвольную постоянную C как неизвестную функцию $C(x)$: $y = C(x)e^{\int a(x)dx}$.

Подстановка $y = C(x)e^{\int a(x)dx}$ в исходное ДУ, должна обратить последнее в верное тождество:

$$\underbrace{C'(x)\cdot e^{\int a(x)dx} + C(x)\cdot a(x)e^{\int a(x)dx}}_{y'} = a(x)\cdot \underbrace{C(x)e^{\int a(x)dx}}_{y} + b(x)$$

$$C'(x)\cdot e^{\int a(x)dx} = b(x)$$

$$C'(x) = b(x)e^{-\int a(x)dx}$$

$$C(x) = \int b(x)e^{-\int a(x)dx}dx + C$$

Окончательно: $y = (\int b(x)e^{-\int a(x)dx}dx + C)e^{\int a(x)dx}$

Метод позволяет свести решение неоднородного линейного ДУ к решению двух ДУ с разделяющимися переменными.

Алгоритм решения линейного неоднородного ДУ методом вариации произвольной постоянной

1. Привести уравнение к виду *, указать тип уравнения.
2. Записать соответствующее однородное ДУ 1-го порядка: $y' = a(x)\cdot y$. Это уравнение является уравнением с разделяющимися переменными.
3. Решить полученное однородное уравнение, записать его решение в виде: $y = \varphi(x, C)$.
4. В полученном решении заменить произвольную постоянную C на неизвестную функцию $C(x)$.
5. Подставить решение из п.4. в уравнение *, и выразить из него $C'(x)$
6. Найти $C(x)$: $C(x) = \int C'(x)dx + C$.
7. Подставить найденное выражение для $C(x)$ в решение из п. 4. Это – решение исходного линейного уравнения.
8. Проверить возможно потерянные решения.
9. Записать в ответ общее решение ДУ.

Пример 2.4.

Дано: $x \cdot y' - 2y = 2x^4$

Решение:

1. Выразим старшую производную: $y' = 2\frac{y}{x} + 2x^3$

Правая часть ДУ имеет вид: $f(x,y) = a(x)\cdot y + b(x)$, где $a(x) = \frac{2}{x}$, $b(x) = 2x^3$,

значит данное ДУ является линейным неоднородным 1-го порядка.

2. Запишем соответствующее линейное однородное ДУ (ЛОДУ): $y' = 2\frac{y}{x}$ - это ДУ является ДУ с разделяющимися переменными.

3. Решаем ЛОДУ:

$$y' = 2\frac{y}{x} \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = 2\frac{y}{x} \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{y} = 2\frac{dx}{x}$$

$$\int\frac{dy}{y} = 2\int\frac{dx}{x} \quad \Rightarrow \quad \ln|y| = 2\ln|x| + \ln C \quad \Rightarrow \quad \underline{y = C\cdot x^2}$$ - решение ЛОДУ

4. Заменим произвольную постоянную на неизвестную функцию:

$$y = C(x)\cdot x^2$$

5. Найдем производную найденного решения: $y' = C'(x)\cdot x^2 + C(x)\cdot 2x$

Подставим найденные выражения в ДУ из п.1:

$$\underbrace{C'(x)\cdot x^2 + C(x)\cdot 2x}_{y'} = \frac{2}{x}\cdot\underbrace{C(x)\cdot x^2}_{y} + 2x^3$$

$$C'(x)\cdot x^2 + \underline{\underline{2x\cdot C(x)}} = \underline{\underline{2x\cdot C(x)}} + 2x^3$$

$$C'(x)\cdot x^2 = 2x^3$$

$$C'(x) = 2x$$

6. Найдем функцию $C(x)$: $C(x) = \int 2x\,dx = x^2 + \tilde{C}$

7. Подставим найденное выражение в решение из п.4: $\boxed{y = (x^2 + \tilde{C})\cdot x^2}$ - решение линейного ДУ.

8. Потерянных решений нет.

9. ***Ответ:*** $\boxed{y = (x^2 + C)\cdot x^2}$

Пример 2.5.

Дано: $y \cdot dx = (x + y^2)dy$

Решение:

1. Выделим в ДУ производную y': $y = (x + y^2)y'$

Выразим старшую производную: $y' = \dfrac{y}{x + y^2}$ - это ДУ не является линейным.

Преобразуем ДУ: $\dfrac{1}{y'} = \dfrac{1}{\dfrac{y}{x + y^2}} \quad \Rightarrow \quad x' = \dfrac{x + y^2}{y} \quad \Rightarrow \quad x' = \dfrac{1}{y} \cdot x + y$

Правая часть ДУ имеет вид: $f(x, y) = a(y) \cdot x + b(y)$, где $a(y) = \dfrac{1}{y}$, $b(y) = y$, значит данное ДУ является линейным неоднородным 1-го порядка относительно функции $x(y)$.

2. Запишем соответствующее линейное однородное ДУ (ЛОДУ): $x' = \dfrac{x}{y}$ - это ДУ является ДУ с разделяющимися переменными.

3. Решаем ЛОДУ:

$$x' = \frac{x}{y} \quad \Rightarrow \quad \frac{dx}{dy} = \frac{x}{y} \quad \Rightarrow \quad \frac{dx}{x} = \frac{dy}{y}$$

$$\int \frac{dx}{x} = \int \frac{dy}{y} \quad \Rightarrow \quad \ln|x| = \ln|x| + \ln C \quad \Rightarrow \quad \underline{x = C \cdot y}$$ - решение ЛОДУ

4. Заменим произвольную постоянную на неизвестную функцию:

$$x = C(y) \cdot y$$

5. Найдем производную найденного решения: $x' = C'(y) \cdot y + C(y)$

Подставим найденные выражения в ДУ из п.1:

$$\underbrace{C'(y) \cdot y + C(y)}_{x'} = \frac{1}{y} \cdot \underbrace{C(y) \cdot y}_{x} + y$$

$$C'(y) \cdot y + \underline{\underline{C(y)}} = \underline{\underline{C(y)}} + y$$

$$C'(y) \cdot y = y$$

$$C'(y) = 1$$

6. Найдем функцию $C(y)$: $C(y) = \int 1 \cdot dy = y + \tilde{C}$

7. Подставим найденное выражение в решение из п.4: $\boxed{x = (y + C) \cdot y}$ - решение линейного ДУ.

8. $\boxed{y = 0}$ является решением.

9. ***Ответ:*** $\boxed{x = (y + C) \cdot y, \quad y = 0}$

Метод подстановки (метод Бернулли)

Дано: $y' = a(x) \cdot y + b(x)$

Заменим искомую функцию $y(x)$ произведением двух новых функций: $y(x) = u(x) \cdot v(x)$, тогда:

$$(u \cdot v)' = a(x) \cdot u \cdot v + b(x)$$

$$u'v + u \cdot v' = a(x) \cdot u \cdot v + b(x)$$

$$u'v + u \cdot v' - a(x) \cdot u \cdot v = b(x)$$

$$u'v + u \cdot [v' - a(x) \cdot v] = b(x)$$

Выберем функцию $v(x)$ таким образом, чтобы выражение в скобках $v' - a(x) \cdot v$ обратилось в 0, для этого решим ДУ с разделяющимися переменными:

$$\frac{dv}{dx} = a(x) \cdot v \quad \Rightarrow \quad \frac{dv}{v} = a(x) \cdot dx \quad \Rightarrow \quad \ln|v| = \int a(x)dx + \ln C \quad \Rightarrow \quad v = Ce^{\int a(x)dx}$$

Подставим найденную функцию в уравнение и найдём функцию $u(x)$:

$$u'Ce^{\int a(x)dx} + u \cdot 0 = b(x)$$

$$u' = \frac{1}{C} b(x) e^{-\int a(x)dx}$$

$$u(x) = \frac{1}{C} \int b(x) e^{-\int a(x)dx} dx + \tilde{C}$$

Окончательно: $y = u \cdot v = (\int b(x) e^{-\int a(x)dx} dx + C) e^{\int a(x)dx}$

Алгоритм решения линейного неоднородного ДУ методом подстановки

1. Привести уравнение к виду *, указать тип уравнения.

2. Представить $y = u \cdot v$, тогда $y' = u' \cdot v + u \cdot v'$. Подставить полученные выражения в уравнение *:

$$u' \cdot v + u \cdot v' = a(x) \cdot u \cdot v + b(x)$$

$u' \cdot v + u \cdot [v' - a(x) \cdot v] = b(x)$

3. Найти функцию v, обращающую в ноль выражение, стоящее в скобках: $v' - a(x) \cdot v = 0$ - это ДУ с разделяющимися переменными. Получится $v = \varphi(x)$. Константу интегрирования C при этом не пишут.

4. Подставить полученную функцию v в уравнение из п .2, получится:

$u' \cdot \varphi(x) = b(x)$ или

$u' = b(x)/\varphi(x)$

5. Найти u: $u = \int u' dx + C$.

6. Подставить найденные выражения для u и v в $y = u \cdot v$. Это – решение исходного линейного уравнения.

7. Проверить возможно потерянные решения.

8. Записать в ответ общее решение ДУ.

Пример 2.6.

Дано: $x \cdot y' - 2y = 2x^4$

Решение:

1. Выразим старшую производную: $y' = 2\dfrac{y}{x} + 2x^3$

Правая часть ДУ имеет вид: $f(x, y) = a(x) \cdot y + b(x)$, где $a(x) = \dfrac{2}{x}$, $b(x) = 2x^3$,

значит данное ДУ является линейным неоднородным 1-го порядка.

2. Представим $y(x) = u(x) \cdot v(x)$, тогда:

$$u' \cdot v + u \cdot v' = \frac{2}{x} u \cdot v + 2x^3$$

$$u' \cdot v + [v' - \frac{2}{x} v] \cdot u = 2x^3$$

3. Найдем функцию $v(x)$ из ДУ $v' - \dfrac{2}{x} v = 0$:

$$v' = 2\frac{v}{x} \quad \Rightarrow \quad \frac{dv}{dx} = 2\frac{v}{x} \quad \Rightarrow \quad \frac{dv}{v} = 2\frac{dx}{x}$$

$$\int \frac{dv}{v} = 2\int \frac{dx}{x} \quad \Rightarrow \quad \ln|v| = 2\ln|x| \quad \Rightarrow \quad \underline{v = x^2}$$

4. Подставим найденную функцию $v = x^2$ в ДУ из п. 2.:

$$u' \cdot x^2 = 2x^3$$
$$u' = 2x$$

5. Найдем функцию $u(x)$: $u(x) = \int 2x\,dx = x^2 + C$

6. Подставим найденные функции $v = x^2$ и $u = x^2 + C$, получим $\boxed{y = (x^2 + C)\cdot x^2}$ - решение линейного ДУ.

7. Потерянных решений нет.

8. ***Ответ:*** $\boxed{y = (x^2 + C)\cdot x^2}$

2.2.6.Дифференциальные уравнения, приводящиеся к линейным. Дифференциальное уравнение Бернулли.

Определение 2.8. Дифференциальное уравнение называется уравнением Бернулли, если оно может быть записано в виде:

$$\boxed{y' = a(x)\cdot y + b(x)\cdot y^n, \quad n \ne 0{,}1} \qquad * \qquad \text{ДУ Бернулли по } y(x)$$

или

$$x' = a(y)\cdot x + b(y)\cdot x^n, \quad n \ne 0{,}1 \qquad \text{ДУ Бернулли по } x(y)$$

ДУ Бернулли приводится к линейному неоднородному заменой: $z(x) = \dfrac{1}{y^{n-1}}$. Покажем это.

$$z = \frac{1}{y^{n-1}} = y^{1-n}, \text{ тогда } z' = (1-n)y^{-n}y' \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{z'\cdot y^n}{(1-n)}$$

$$\frac{z'\cdot y^n}{(1-n)} = a(x)\cdot y + b(x)\cdot y^n$$

$$\frac{\dfrac{z'\cdot y^n}{(1-n)}}{y^n} = a(x)\cdot\frac{y}{y^n} + b(x)$$

$$\frac{z'}{(1-n)} = a(x)\cdot z + b(x) \quad \Rightarrow \quad z' = (1-n)\cdot a(x)\cdot z + (1-n)\cdot b(x)$$ - линейное неоднородное ДУ

Алгоритм решения ДУ Бернулли

1. Привести уравнение к виду *, указать тип уравнения

2. Разделить обе части уравнения на y^n.

3. Сделать замену:

$$z = \frac{1}{y^{n-1}} = y^{1-n}, \text{ тогда } z' = (1-n)y^{-n}y' \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{z' \cdot y^n}{(1-n)}$$

4. Подставить полученные выражения в уравнение из п. 2. Получится линейное неоднородное ДУ.

5. Решить линейное ДУ любым методом. Найти его решение $z = \varphi(x, C)$

6. Сделать обратную замену: $y^{1-n} = \varphi(x, C)$

7. Проверить возможно потерянные решения.

8. Записать в ответ общее решение ДУ.

Пример 2.7.

<u>Дано:</u> $y' = y^4 \cdot \cos(x) + y \cdot tg(x)$

<u>Решение:</u>

1. Выразим старшую производную: $y' = y \cdot tg(x) + \cos(x) \cdot y^4$

Правая часть ДУ имеет вид: $f(x, y) = a(x) \cdot y + b(x) \cdot y^n$, где $a(x) = tg(x)$, $b(x) = \cos(x)$, $n = 4$, значит данное ДУ является ДУ Бернулли.

2. Разделим обе части ДУ на y^4: $\frac{y'}{y^4} = \frac{1}{y^3} \cdot tg(x) + \cos(x)$

3. Сделаем замену: $z = \frac{1}{y^{4-1}} = y^{-3} \quad \Rightarrow \quad z' = -3 \cdot y^{-4} \cdot y' \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{-1}{3} \cdot z' \cdot y^4$

4. Подставим полученные выражения в ДУ из п.2:

$$\frac{-1}{3} \cdot \frac{z' \cdot y^4}{y^4} = y^{-3} \cdot tg(x) + \cos(x)$$

$\underline{z' = -3tg(x) \cdot z - 3\cos(x)}$ - это ЛДУ 1-го порядка

5. Решаем ЛДУ методом вариации произвольной постоянной:

$$z' = -3tg(x) \cdot z$$

$$\frac{dz}{dx} = -3tg(x) \cdot z$$

$$\int \frac{dz}{z} = -3\int tg(x) \cdot dx$$

$$\ln|z| = 3\ln|\cos(x)| + \ln C$$

$$z = C \cdot \cos^3(x)$$

$$z = C(x) \cdot \cos^3(x)$$

$$C'(x) \cdot \cos^3(x) + C(x) \cdot 3\cos^2(x) \cdot (-\sin(x)) = -3tg(x) \cdot C(x) \cdot \cos^3(x) - 3\cos(x)$$

$$C'(x) \cdot \cos^3(x) = -3\cos(x)$$

$$C'(x) = -3\frac{1}{\cos^2(x)}$$

$$C(x) = -3\int \frac{1}{\cos^2(x)} dx = -3tg(x) + C$$

$\underline{z = (-3tg(x) + C)) \cdot \cos^3(x)}$ - решение ЛДУ

6. Делаем обратную замену: $\boxed{y^{-3} = (-3tg(x) + C) \cdot \cos^3(x)}$ - решение ДУ Бернулли

7. $\boxed{y = 0}$ - потерянное решение ДУ.

8. ***Ответ:*** $\boxed{y^{-3} = (-3tg(x) + C) \cdot \cos^3(x), \quad y = 0}$

2.2.7. Дифференциальные уравнения в полных дифференциалах

Определение 2.9. ДУ вида $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$, называется ДУ в полных дифференциалах, если его левая часть представляет собой полный дифференциал некоторой функции $F(x,y)$.

Это условие будет выполняться, если верно: $\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} \equiv \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$.

Замечание. Если ДУ вида $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ является ДУ в полных дифференциалах, то его решением является неявная функция $F(x,y) = C$ для которой верно: $\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} = M(x,y)$ и $\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = N(x,y)$.

Алгоритм решения ДУ в полных дифференциалах

1. Привести уравнение к виду $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ и проверить условие $\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} \equiv \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$, если условие выполняется указать тип ДУ.

2. Записать вид искомого решения: $F(x,y) = C$ и соответствующие условия:

    а) $\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} = M(x,y)$

    б) $\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = N(x,y)$.

3. Выбрать для поиска решения любое из условий а) или б). Найти из выбранного условия функцию $F(x,y)$, проинтегрировав левую и правую части условия по x или y соответственно:

    а) $F(x,y) = \int M(x,y)dx + C(y)$

    б) $F(x,y) = \int N(x,y)dy + C(x)$

4. Продифференцировать полученное выражение в случае а) по y, а в случае б) по x. Приравнять в случае а) полученную производную к $N(x,y)$ и выразить из равенства $C'(y)$, а в случае б) приравнять производную к $M(x,y)$ и выразить из равенства $C'(x)$.

5. Найти:

а) $C(y) = \int C'(y)dy$

б) $C(x) = \int C'(x)dx$

6. Записать функцию $F(x,y)$.

7. Записать в ответ общее решение ДУ.

Пример 2.8.

Дано: $2x \cdot y \cdot dx = (y^2 - x^2)dy$

Решение:

1. Запишем ДУ в виде $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$: $\underbrace{2x \cdot y}_{M(x,y)} \cdot dx + \underbrace{(-y^2 + x^2)}_{N(x,y)}dy = 0$

Найдем: $\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = 2x$ и $\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = 2x$.

Получили $\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} \equiv \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$, значит ДУ в полных дифференциалах.

2. Будем искать решение в виде $F(x,y) = C$, где $\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} = M(x,y)$ и $\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = N(x,y)$.

3. Найдем $F(x,y)$ из условия $\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} = M(x,y)$:

$$F(x,y) = \int 2x \cdot y \cdot dx = 2y\int x \cdot dx = 2y \cdot \frac{x^2}{2} + C(y)$$

$$F(x,y) = y \cdot x^2 + C(y)$$

4. Продифференцируем полученное выражение по y: $\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = x^2 + C'(y)$ и приравняем $N(x,y)$, получим:

$$x^2 + C'(y) = -y^2 + x^2$$

$$C'(y) = -y^2$$

5. Найдем $C(y) = \int -y^2dy = \frac{-y^3}{3}$ (Константу интегрирования не пишем!)

6. Запишем искомую функцию: $F(x,y) = y \cdot x^2 - \frac{y^3}{3}$

7. Ответ: $\boxed{y \cdot x^2 - \frac{y^3}{3} = C}$ - решение ДУ в полных дифференциалах.

2.3. Дифференциальные уравнения 1-го порядка, неразрешенные относительно производной

ДУ 1-го порядка неразрешенное относительно производной характеризуется тем, что из него не может быть легко выражена производная y'.

Одним из методов решения таких уравнений является применение математических преобразований, целью которых является выражение производной из ДУ. В результате получается одно или несколько ДУ вида: $y' = f_i(x,y), \quad i = 1,2..$

Пример.

Дано: $(y')^2 + xy = y^2 + xy'$

Решение:

$$(y')^2 + xy = y^2 + xy'$$

$$(y')^2 - xy' = y^2 - xy$$

Выделим полный квадрат в левой и правой частях уравнения:

$$\underbrace{(y')^2}_{a^2} - 2\underbrace{y'}_{a} \cdot \underbrace{\frac{1}{2}x}_{b} + \underbrace{\frac{1}{4}x^2}_{b^2} - \frac{1}{4}x^2 = \underbrace{y^2}_{a^2} - 2\underbrace{y}_{a} \cdot \underbrace{\frac{1}{2}x}_{b} + \underbrace{\frac{1}{4}x^2}_{b^2} - \frac{1}{4}x^2$$

$$(y' - \frac{1}{2}x)^2 = (y - \frac{1}{2}x)^2$$

$$y' - \frac{1}{2}x = y - \frac{1}{2}x \quad \text{и} \qquad y' - \frac{1}{2}x = -(y - \frac{1}{2}x)$$

Получили два ДУ, разрешенных относительно производной:

1) $y' = y$ - ДУ с разделяющимися переменными

2) $y' = y$ - линейное неоднородное ДУ

При интегрировании ДУ $y' = y$ получаем $y = Ce^x$, при интегрировании ДУ $y' = y$ получаем $y = xe^x - e^x + C$

Ответ: $\boxed{y = Ce^x, \qquad y = xe^x - e^x + C}$

В общем случае алгоритмических методов решения ДУ, неразрешенных относительно производной, не существует, кроме случаев, когда из ДУ легко выражается x или y. В этом случае используют метод введения параметра.

Алгоритм решения ДУ, неразрешенного относительно производной методом введения параметра

<table>
<tr><th>***Из ДУ легко выражается*** y**:** $y = f(x, y')$</th><th>***Из ДУ легко выражается*** x**:** $x = f(y, y')$</th></tr>
<tr><td>1. Разрешить ДУ относительно y:
$y = f(x, y')$</td><td>1. Разрешить ДУ относительно x:
$x = f(y, y')$</td></tr>
<tr><td colspan="2">2. Ввести параметр $p = y' = \dfrac{dy}{dx}$, тогда получится:</td></tr>
<tr><td>$y = f(x, p)$</td><td>$x = f(y, p)$</td></tr>
<tr><td colspan="2">3. Взять полный дифференциал правой и левой частей уравнения, получится:</td></tr>
<tr><td>$dy = \dfrac{\partial f(x,p)}{\partial x} dx + \dfrac{\partial f(x,p)}{\partial p} dp$</td><td>$dx = \dfrac{\partial f(y,p)}{\partial y} dx + \dfrac{\partial f(y,p)}{\partial p} dp$</td></tr>
<tr><td colspan="2">4. Сделать замену в левой части ДУ:</td></tr>
<tr><td>$dy = pdx$, получится:
$pdx = \dfrac{\partial f(x,p)}{\partial x} dx + \dfrac{\partial f(x,p)}{\partial p} dp$
Это ДУ 1-го порядка, разрешенное относительно производной</td><td>$dx = \dfrac{dy}{p}$, получится:
$\dfrac{dy}{p} = \dfrac{\partial f(y,p)}{\partial y} dx + \dfrac{\partial f(y,p)}{\partial p} dp$
Это ДУ 1-го порядка, разрешенное относительно производной</td></tr>
<tr><td colspan="2">5. Решить полученное ДУ, записать его решение:</td></tr>
<tr><td>$x = \varphi(p, C)$</td><td>$y = \varphi(p, C)$</td></tr>
<tr><td colspan="2">6. Записать решение исходного ДУ в параметрической форме:</td></tr>
<tr><td>$\begin{cases} x = \varphi(p, C) \\ y = f(\varphi(p, C), p) \end{cases}$</td><td>$\begin{cases} x = f(\varphi(p, C), p) \\ y = \varphi(p, C) \end{cases}$</td></tr>
<tr><td colspan="2">7. Проверить потерянные решения: все потерянные решения вида $p = ...$, подставляются в выражение из п. 2 алгоритма и принимают вид: $y = ...$ или $x = ...$ Затем следует проверка подстановкой в исходное ДУ</td></tr>
<tr><td colspan="2">8. Записать общее решение ДУ</td></tr>
</table>

Пример 2.9.

Дано: $y = \ln(1 + (y')^2)$

Решение:

1. Данное ДУ неразрешено относительно y', но разрешено относительно y:

$$y = \ln(1 + (y')^2)$$

2. Введем параметр $p = y' = \dfrac{dy}{dx}$, получим: $y = \ln(1 + p^2)$

3. Возьмем полный дифференциал левой и правой части уравнения:

$$dy = \frac{1}{1 + p^2} \cdot 2p \cdot dp$$

4. Сделаем замену $dy = pdx$, получим:

$$pdx = \frac{1}{1 + p^2} \cdot 2p \cdot dp$$

$$dx = \frac{2}{1 + p^2} dp$$ - получили ДУ с разделяющимися переменными

5. Решаем ДУ:

$$\int dx = \int \frac{2}{1 + p^2} dp$$

$\underline{x = 2 \cdot \mathrm{arctg}(p) + C}$ - решение ДУ с разделяющимися переменными

6. Запишем решение исходного ДУ в параметрической форме:

$$\begin{cases} x = 2 \cdot \mathrm{arctg}(p) + C \\ y = \ln(1 + p^2) \end{cases}$$

7. Проверяем возможно потерянные решения: $p = 0 \quad \Rightarrow \quad y = \ln(1 + 0^2) = \ln 1 = 0$

Подставляем $y = 0$ в исходное ДУ: $0 = \ln(1 + (0')^2) \quad \Rightarrow \quad 0 = 0$

В полученном выражении левая часть равна правой (тождество), значит $\boxed{y = 0}$ - решение ДУ.

8. ***Ответ:*** $\boxed{\begin{cases} x = 2\mathrm{arctg}(p) + C \\ y = \ln(1 + p^2) \end{cases}, \qquad y = 0}$

Пример 2.10.

Дано: $y' \cdot (x - \ln y') = 1$

Решение:

1. Данное ДУ неразрешено относительно y', но разрешено относительно x:

$$x = \frac{1}{y'} + \ln y'$$

2. Введем параметр $p = y' = \frac{dy}{dx}$, получим: $x = \frac{1}{p} + \ln p$

3. Возьмем полный дифференциал левой и правой части уравнения:

$$dx = (-\frac{1}{p^2} + \frac{1}{p})dp$$

4. Сделаем замену $dx = \frac{dy}{p}$, получим:

$$\frac{dy}{p} = (-\frac{1}{p^2} + \frac{1}{p})dp$$

$dy = (-\frac{1}{p} + 1)dp$ - получили ДУ с разделяющимися переменными

5. Решаем ДУ:

$$\int dy = \int (-\frac{1}{p} + 1)dp$$

$\underline{y = -\ln|p| + p + C}$ - решение ДУ с разделяющимися переменными

6. Запишем решение исходного ДУ в параметрической форме:

$$\begin{cases} x = \frac{1}{p} + \ln p \\ y = -\ln p + p + C \end{cases}$$

7. Проверяем возможно потерянные решения: $p = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{0} + \ln 0$ - невозможно, следовательно, потерянных решений нет.

8. ***Ответ:*** $\boxed{\begin{cases} x = \frac{1}{p} + \ln p \\ y = -\ln p + p + C \end{cases}}$

ГЛАВА 3. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

Дифференциальное уравнение n-го порядка в общем случае имеет вид:

$$F(x, y, y', y'' ... y^{(n)}) = 0$$

или

$y^{(n)} = f(x, y, y', y'' ... y^{(n-1)})$ - уравнение, разрешенное относительно производной.

Решение ДУ имеет вид $\Phi(x, y, C_1, C_2 ... C_n) = 0$ и зависит от произвольных постоянных:

3.1. Условия существования и единственности решения дифференциальных уравнений высших порядков

Определение 3.1. Задачей Коши для ДУ называется задача об отыскании частного решения ДУ, удовлетворяющего n начальным условиям, где n - порядок ДУ.

Определение 3.2. Начальные условия – это условия на функцию y и ее производные до $n-1$ порядка включительно, заданные в одной и той же точке x_0, называемой начальной.

Поставить задачу Коши для ДУ это значит задать начальные условия.

Пример. Записать ДУ 4-го порядка в общем виде. Поставить задачу Коши.

$$y^{IV} = f(x, y, y', y'', y''')$$

$$y(x_0) = a$$
$$y'(x_0) = b$$
$$y''(x_0) = c$$
$$y'''(x_0) = d$$

Теорема Коши. (Теорема существования и единственности решения ДУ)

Дано: $y^{(n)} = f(x, y, y', y'' ... y^{(n-1)})$

Если в некоторой области D, содержащей точку $P_0 = (x_0, a, b, c, ..., s)$, функция $f(x, y, y', y'' ... y^{(n-1)})$ является непрерывной функцией своих аргументов и удовлетворяет условию Липшица по всем аргументам, начиная со второго, то в достаточно малом интервале $x_0 - h \le x \le x_0 + h,\ h > 0$, существует единственное решение ДУ $y^{(n)} = f(x, y, y', y''...y^{(n-1)})$, удовлетворяющее начальным условиям:

$$\begin{aligned}
&y(x_0) = a \\
&y'(x_0) = b \\
&y''(x_0) = c \\
&....... \\
&y^{(n-1)}(x_0) = s
\end{aligned}$$

Замечание: Условие Липшица может быть заменено несколько более грубыми условиями существования ограниченных частных производных первого порядка по всем аргументам, начиная с y: $\frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial y'}, \frac{\partial f}{\partial y''}... \frac{\partial f}{\partial y^{(n-1)}}$ в области D.

Утверждение:

1. Решение существует на интервале, если функция $f(x, y, y', y''...y^{(n-1)})$ непрерывна.
2. Решение единственное в области D, если существуют ограниченные непрерывные частные производные $\frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial y'}, \frac{\partial f}{\partial y''}... \frac{\partial f}{\partial y^{(n-1)}}$

3.2. Случаи интегрирование ДУ высших порядков

Нахождение общего решения ДУ высшего порядка возможно только в нескольких случаях.

Случай 1. ДУ имеет вид: $y^{(n)} = f(x)$.

В этом случае решение находится в результате n кратного интегрирования левой и правой частей ДУ.

Пример 3.1.

Дано: $y''' = \sin x$

Решение:

Трижды интегрируем левую и правую части уравнения:

$$\int y'''dx = \int \sin x dx \quad \rightarrow \quad y'' = -\cos x + C_1$$

$$\int y''dx = \int (-\cos x + C_1)dx \quad \rightarrow \quad y' = -\sin x + C_1 x + C_2$$

$$\int y'dx = \int(-\sin x + C_1 x + C_2)dx \quad \to \quad y = \cos x + C_1\frac{x^2}{2} + C_2 x + C_3$$

Ответ: $y = \cos x + C_1\frac{x^2}{2} + C_2 x + C_3$

Остальные случаи решения ДУ высшего порядка требуют использование специальных замен.

Общий алгоритм решения ДУ высшего порядка, допускающего понижение порядка

1. Понизить порядок ДУ до 1-го, используя необходимые замены.
2. Решить ДУ 1-го порядка.
3. Сделать обратные замены. Если необходимо опять понизить порядок (п.1-2). Всего нужно решить n ДУ 1-го порядка.
4. Выписать все решения ДУ. Хотя бы одно из них должно содержать n произвольных постоянных.
5. Проверить потерянные решения.
6. Записать ответ.

Случай 2.

ДУ имеет вид: $F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, ..., y^{(n)}) = 0$ - ДУ не содержит y.

Замена:

Вводится новая функция: $z(x) = y^{(k)}$, тогда $y^{(k+1)} = z'$ и т.д.

Пример 3.2.

<u>**Дано:**</u> $(x^2+1)y''=2x\cdot y'$

<u>**Решение:**</u>

1. Данное ДУ является ДУ 2-го порядка, не содержащим y.

Используем замены: $y'=z(x)$, тогда $y''=z'$.

Получим: $\underline{(x^2+1)z'=2x\cdot z}$ - ДУ 1-го порядка.

2. Решаем полученное ДУ 1-го порядка:

$z'=\frac{2x}{x^2+1}\cdot z$ - это ДУ с разделяющимися переменными.

$$\frac{dz}{dx}=\frac{2x}{x^2+1}\cdot z$$

$$\int\frac{dz}{z}=\int\frac{2x}{x^2+1}dx \quad\Rightarrow\quad \ln|z|=\int\frac{d(x^2+1)}{x^2+1} \quad\Rightarrow\quad \ln|z|=\ln(x^2+1)+\ln C_1$$

$\underline{z=C_1(x^2+1)}$ - решение ДУ 1-го порядка

3. Сделаем обратную замену: $y'=C_1(x^2+1)$ - ДУ 1-го порядка

Рассмотрим решение полученного ДУ при разных значениях C_1:

$C_1=0$	$C_1\neq 0$
$y'=0$ $\underline{y=C}$	$y'=C_1x^2+C_1$ $y=\int(C_1x^2+C_1)dx$ $\underline{y=C_1\frac{x^3}{3}+C_1x+C_2}$

4. Проанализируем полученные решения.

В результате получены два решения ДУ $y=C_1\frac{x^3}{3}+C_1x+C_2$ и $y=C$, но при $C_1=0$ решение $y=C$ является частным случаем решения $y=C_1\frac{x^3}{3}+C_1x+C_2$, поэтому выпишем только одно решение: $\underline{y=C_1\frac{x^3}{3}+C_1x+C_2}$.

5. Потерянных решений нет.

6. ***Ответ:*** $\boxed{y=C_1\frac{x^3}{3}+C_1x+C_2}$

<u>***Случай 3.***</u>

ДУ имеет вид: $F(y, y', y'', ..., y^{(n)}) = 0$ - ДУ не содержит x.

Замена:

Вводится новая переменная: y

Вводится новая функция: $p(y) = y'$, тогда

$$y'' = (y')' = \frac{dy'}{dx} = \frac{dp(y)}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = p' \cdot y' = p' \cdot p$$

Пример 3.3.

Дано: $(y')^2 + 2y \cdot y'' = 0$

Решение:

1. Данное ДУ является ДУ 2-го порядка, не содержащим x.

Используем замены: $y' = p(y)$, тогда $y'' = p' \cdot p$.

Получим: $\underline{p^2 + 2y \cdot p' = 0}$ - ДУ 1-го порядка.

2. Решаем полученное ДУ 1-го порядка:

$p' = \frac{-1}{2y} \cdot p$ - это ДУ с разделяющимися переменными.

$$\frac{dp}{dy} = \frac{-1}{2y} \cdot p$$

$$\int \frac{dp}{p} = -\frac{1}{2} \int \frac{dy}{y} \quad \Rightarrow \quad \ln|p| = -\frac{1}{2} \ln|y| + \ln C_1 \quad \Rightarrow \quad \ln|p| = \ln \frac{1}{\sqrt{y}} + \ln C_1 \quad \Rightarrow$$

$\underline{p = \frac{C_1}{\sqrt{y}}}$ - решение ДУ 1-го порядка

3. Сделаем обратную замену: $y' = \frac{C_1}{\sqrt{y}}$ - ДУ 1-го порядка

Рассмотрим решение полученного ДУ при разных значениях C_1:

$C_1 = 0$	$C_1 \neq 0$
$y' = 0$ $\underline{y = C}$	$y' = \dfrac{C_1}{\sqrt{y}}$ $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{C_1}{\sqrt{y}} \quad \Rightarrow \quad \int \sqrt{y}dy = \int C_1 dx$ $\underline{\dfrac{2}{3} y^{\frac{3}{2}} = C_1 x + C_2}$

4. В результате получены два решения ДУ: $\underline{\dfrac{2}{3} y^{\frac{3}{2}} = C_1 x + C_2}$ и $\underline{y = C}$ и ни одно из них не является частным случаем другого.

5. Потерянных решений нет.

6. ***Ответ:*** $\boxed{\dfrac{2}{3} y^{\frac{3}{2}} = C_1 x + C_2, \quad y = C}$

Случай 4.

ДУ является *однородным относительно* y *и производных*, а это значит, оно не меняется в результате одновременной замены y на $k \cdot y$, y' на $k \cdot y'$ и т.д., где k – любое число, не равное 0.

Замена:

Вводится новая функция: $z(x) = \dfrac{y'}{y}$ или $y' = z \cdot y$, тогда

$$y'' = (z \cdot y)' = z' \cdot y + z \cdot y' = z' \cdot y + z \cdot (z \cdot y) = z' \cdot y + z^2 \cdot y$$

Пример 3.4.

Дано: $x \cdot y \cdot y'' - x \cdot (y')^2 = y \cdot y'$

Решение:

1. Данное ДУ является ДУ 2-го порядка, содержит x и y.

Проверяем на однородность: $x\cdot(ky)\cdot(ky'')-x\cdot(ky')^2=ky\cdot ky'$ - каждое слагаемое в ДУ содержит k^2, сократив на которое ($k\neq 0$), получим исходное ДУ.

Используем замены: $y'=z(x)\cdot y$, тогда $y''=z'\cdot y+z^2\cdot y$

Получим:

$$x\cdot y\cdot(z'\cdot y+z^2\cdot y)-x\cdot(z\cdot y)^2=y\cdot z\cdot y$$

$$x\cdot z'\cdot y^2+x\cdot z^2\cdot y^2-x\cdot z^2\cdot y^2=y^2\cdot z$$

$$x\cdot z'+x\cdot z^2-x\cdot z^2=z$$

$x\cdot z'=z$ - ДУ 1-го порядка

2. Решаем полученное ДУ 1-го порядка:

$z'=\frac{1}{x}\cdot z$ - это ДУ с разделяющимися переменными.

$$\frac{dz}{dx}=\frac{1}{x}\cdot z$$

$\int\frac{dz}{z}=\int\frac{dx}{x} \quad\Rightarrow\quad \ln|z|=\ln|x|+\ln C_1 \quad\Rightarrow\quad \underline{z=C_1x}$ - решение ДУ 1-го порядка

3. Сделаем обратную замену: $\frac{y'}{y}=C_1x \quad\Rightarrow\quad y'=C_1x\cdot y$ - ДУ 1-го порядка

Рассмотрим решение полученного ДУ при разных значениях C_1:

$C_1=0$	$C_1\neq 0$
$y'=0$ $\underline{y=C}$	$y'=C_1x\cdot y$ $\frac{dy}{dx}=C_1x\cdot y \quad\Rightarrow\quad \int\frac{dy}{y}=\int C_1xdx$ $\underline{\ln|y|=C_1\frac{x^2}{2}+C_2}$

4. В результате получены два решения ДУ: $\underline{\ln|y|=C_1\frac{x^2}{2}+C_2}$ и $\underline{y=C}$ и ни одно из них не является частным случаем другого.

5. Потерянных решений нет.

6. ***Ответ:*** $\boxed{\ln|y|=C_1\frac{x^2}{2}+C_2,\quad y=C}$

3.3. Решение задачи Коши для ДУ высших порядков

Алгоритм решения задачи Коши для ДУ n -го порядка

1. Решить ДУ. Записать его общее решение.
2. Продифференцировать общее решение n раз.
3. Подставить в общее решение и найденные производные начальные условия. Получится система алгебраических уравнений, относительно произвольных постоянных $C_1, C_2 ... C_n$.
4. Решить систему. Найти $C_1, C_2 ... C_n$.
5. Подставить найденные значения в общее решение – это решение задачи Коши.

Пример 3.5.

Дано: $(x^2+1)y'' = 2x \cdot y'$

$$y(1) = 1$$
$$y'(1) = 2$$

Решение:

1. Решаем ДУ (см. пример 3.2.).

Общее решение ДУ имеет вид: $\underline{y = C_1 \frac{x^3}{3} + C_1 x + C_2}$

2. Дифференцируем общее решение один раз:

$$y' = C_1 x^2 + C_1$$

3. Подставляем заданные начальные условия в общее решение и производную:

Условие $y(1) = 1$ означает, что при $x = 1$ функция $y = 1$, значит $1 = C_1 \frac{1^3}{3} + C_1 \cdot 1 + C_2$

Условие $y'(1) = 2$ означает, что при $x = 1$ функция $y' = 2$, значит $2 = C_1 \cdot 1^2 + C_1$

Получили: $\begin{cases} 1 = \frac{1}{3} C_1 + C_1 + C_2 \\ 2 = C_1 + C_1 \end{cases}$

4. Решаем систему:

$$\begin{cases} 1 = \frac{1}{3}C_1 + C_1 + C_2 \\ 2 = C_1 + C_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 = \frac{4}{3}C_1 + C_2 \\ 2 = 2C_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = 1 \\ C_2 = -\frac{1}{3} \end{cases}$$

5. Подставим найденные значения в общее решение: $\underline{y = 1 \cdot \frac{x^3}{3} + 1 \cdot x - \frac{1}{3}}$ - решение задачи Коши

Ответ: $\boxed{y = \frac{x^3}{3} + x - \frac{1}{3}}$

ГЛАВА 4. ЛИНЕЙНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Определение 4.1. ДУ вида: $p_n(x)y^{(n)} + p_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \ldots + p_2(x)y'' + p_1(x)y' + p_0(x)y = f(x)$ называется линейным ДУ.

Здесь функции $p_n(x) \ldots p_0(x)$ непрерывны на некотором промежутке (a, b).

Определение 4.2. Если функция $f(x) \neq 0$, то ДУ называется линейным неоднородным, если же $f(x) = 0$, то ДУ линейное однородное.

Определение 4.3. Функции $y_1(x), y_2(x) \ldots y_n(x)$ называются линейно независимыми на (a,b), если тождество: $\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \ldots + \alpha_n y_n = 0$ выполняется только в случае, когда все $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n = 0$

Определение 4.4. Совокупность n линейно независимых на промежутке (a,b) решений однородного уравнения называется фундаментальной системой решений (ФСР) этого уравнения.

Теорема о структуре общего решения линейного однородного уравнения

Если $y_1(x), y_2(x) \ldots y_n(x)$ - n линейно независимых на промежутке (a,b) частных решения однородного уравнения, то общее решение однородного уравнения представляется в виде:

$$y_{одн}(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \ldots + C_n y_n(x),$$

где $C_1 \ldots C_n$ – произвольные постоянные.

Теорема о структуре общего решения неоднородного уравнения

Общее решение неоднородного уравнения представляется суммой общего решение соответствующего однородного уравнения $y_{одн}(x)$ и частных решений неоднородного уравнения, соответствующих неоднородности .

4.1. Линейные однородные ДУ с постоянными коэффициентами (ЛОДУ)

Определение 4.5. Линейным однородным ДУ с постоянными коэффициентами называется ДУ вида:

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + ... + a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = 0$$

где – $a_n, a_{n-1} .... a_1, a_0$ действительные числа

Алгоритм решения ЛОДУ

1. Составить характеристическое (ХУ) уравнение (алгебраическое):

$$a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + ... + a_2 \lambda^2 + a_1 \lambda + a_0 = 0$$

2. Найти все n корней характеристического уравнения: $\lambda_1, \lambda_2 ... \lambda_n$.

3. Найти ФСР для данного ДУ и записать решение в виде:

$$y_{одн}(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + ... + C_n y_n(x) \ ,$$

где каждая функция $y_j(x)$ соответствует корню λ_j.

Правило построения ФСР

а) λ_j – простой действительный корень ХУ.

Замечание. Корень будет простым, если среди корней встречается единственный раз.

Тогда в решение запишем 1 слагаемое вида: $C_j e^{\lambda_j x}$

б) λ_j – кратный действительный корень (кратности k).

Замечание. Корень – кратный, если среди множества корней встречается более 1 раза (k раз).

Тогда в решение запишем k слагаемых вида: $(C_j + C_{j+1} x + C_{j+2} x^2 + ... + C_{j+k-1} x^{k-1}) \cdot e^{\lambda_j x}$

в) $\begin{matrix} \lambda_j = \alpha + i\beta \\ \lambda_{j+1} = \alpha - i\beta \end{matrix}$ – пара простых комплексно-сопряженных корней,

здесь α – действительная часть, $\beta > 0$ - мнимая часть.

Замечание. Комплексно-сопряженные корни будут простыми, если корень вида $\lambda_j = \alpha + i\beta$ встречается 1 раз и корень вида $\lambda_j = \alpha - i\beta$ тоже 1 раз.

Тогда в решение запишем 2 слагаемых: $C_j \cos(\beta x) \cdot e^{\alpha x} + C_{j+1} \sin(\beta x) \cdot e^{\alpha x}$

г) $\begin{matrix} \lambda_j = \alpha + i\beta \\ \lambda_{j+1} = \alpha - i\beta \end{matrix}$ – пара кратных комплексно-сопряженных корней (кратности k)

Замечание. Комплексно-сопряженные корни будут кратными, если корень вида $\lambda_j = \alpha + i\beta$ встречается k раз и корень вида $\lambda_j = \alpha - i\beta$ тоже k раз.

Тогда в решение запишем 2k слагаемых:

$$(C_j + C_{j+1}x + C_{j+2}x^2 + \ldots + C_{j+k-1}x^{k-1}) \cdot \cos(\beta x) e^{\alpha x} +$$
$$(C_m + C_{m+1}x + C_{m+2}x^2 + \ldots + C_{m+k-1}x^{k-1}) \cdot \sin(\beta x) e^{\alpha x}$$

Пример 4.1.

Дано: $y'' + y' - 2y = 0$

Решение:

1. Составим характеристическое уравнение: $\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$

   Это квадратное уравнение, вида $ax^2 + bx + c = 0$, где $a = 1$, $b = 1$ и $c = -2$.

2. Решим характеристическое уравнение:

$$D = b^2 - 4 \cdot a \cdot c = 1 - 4 \cdot 1 \cdot (-2) = 9$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{2} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{matrix} \lambda_1 = -2 \\ \lambda_2 = 1 \end{matrix}$$

3. Запишем решение ЛОДУ:

   $\lambda_1 = -2$ - простой действительный корень

$\lambda_2 = 1$ - простой действительный корень

Получим: $y = C_1 \cdot e^{-2 \cdot x} + C_2 \cdot e^{1 \cdot x}$

Для корня $\lambda_1 = -2$

Для корня $\lambda_2 = 1$

Ответ: $\boxed{y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{x}}$

Пример 4.2.

Дано: $4y'' + 4y' + y = 0$

Решение:

1. Составим характеристическое уравнение: $4\lambda^2 + 4\lambda + 1 = 0$
2. Решим характеристическое уравнение:

$$D = 16 - 4 \cdot 4 \cdot 1 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{0}}{4 \cdot 2} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} \lambda_1 = -\frac{1}{2} \\ \lambda_2 = -\frac{1}{2} \end{array}$$

3. Запишем решение ЛОДУ:

$\lambda_1 = -\frac{1}{2}$ - кратный действительный корень

$\lambda_2 = -\frac{1}{2}$ - кратный действительный корень

Эти корни кратные (совпадающие), кратность (число совпадений) $k = 2$.

Получим: $y = (C_1 + C_2 x) \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot x}$

Для корней $\lambda_1 = -\frac{1}{2}$ и $\lambda_2 = -\frac{1}{2}$

Ответ: $\boxed{y = (C_1 + C_2 x) e^{-1/2x}}$

Пример 4.3.

Дано: $y'' + 4y' + 5y = 0$

Решение:

1. Составим характеристическое уравнение: $\lambda^2 + 4\lambda + 5 = 0$

2. Решим характеристическое уравнение:

$$D = 16 - 4 \cdot 5 \cdot 1 = -4$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{-4}}{2} = \frac{-4 \pm \sqrt{4} \cdot \sqrt{-1}}{2} = \frac{-4 \pm 2 \cdot i}{2} = -2 \pm i \quad \Rightarrow \quad \begin{matrix} \lambda_1 = -2 + i \\ \lambda_2 = -2 - i \end{matrix}$$

3. Запишем решение ЛОДУ:

$\lambda_1 = -2 + i$ - комплексно-сопряженный простой корень, действительная часть $\alpha = -2$, мнимая $\beta = 1$

$\lambda_2 = -2 - i$ - комплексно-сопряженный простой корень, действительная часть $\alpha = -2$, мнимая $\beta = 1$

Получим: $y = C_1 \cos(1 \cdot x) \cdot e^{-2 \cdot x} + C_2 \sin(1 \cdot x) \cdot e^{-2 \cdot x}$

Для корней $\lambda_1 = -2 + i$ и $\lambda_2 = -2 - i$

Ответ: $\boxed{y = C_1 \cos x \cdot e^{-2x} + C_2 \sin x \cdot e^{-2x}}$

Пример 4.4.

Дано: $y^{(6)} + 18y^{(4)} + 81y'' = 0$

Решение:

1. Составим характеристическое уравнение: $\lambda^6 + 18\lambda^4 + 81\lambda^2 = 0$

2. Решим характеристическое уравнение:

$$\lambda^2(\lambda^4 + 18\lambda^2 + 81) = 0$$

$\lambda^2 = 0$ и $\lambda^4 + 18\lambda^2 + 81 = 0$

Решаем $\lambda^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{0} = 0}$

Решаем $\lambda^4 + 18\lambda^2 + 81 = 0$ - биквадратное уравнение

Замена: $\lambda^2 = t$, получим $t^2 + 18 \cdot t + 81 = 0$ - квадратное уравнение

$$t_{1,2} = \frac{-18 \pm \sqrt{18^2 - 4 \cdot 81}}{2} = \frac{-18 \pm \sqrt{0}}{2} = -9$$

Получили: $t_1 = \lambda^2 = -9 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\lambda_{3,4} = \pm\sqrt{-9} = \pm\sqrt{9} \cdot \sqrt{-1} = \pm 3i}$

$t_2 = \lambda^2 = -9 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\lambda_{5,6} = \pm\sqrt{-9} = \pm\sqrt{9} \cdot \sqrt{-1} = \pm 3i}$

3. Запишем решение ЛОДУ:

$\lambda_1 = 0$ - действительный корень

$\lambda_2 = 0$ - действительный корень

Эти корни кратные (совпадающие), кратность (число совпадений) $k = 2$.

$\lambda_3 = 3i$ - комплексно-сопряженный корень, действительная часть $\alpha = 0$, мнимая $\beta = 3$

$\lambda_5 = 3i$ - комплексно-сопряженный корень, действительная часть $\alpha = 0$, мнимая $\beta = 3$

Эти корни кратные (совпадающие), кратность (число совпадений) $k = 2$.

$\lambda_4 = -3i$ - комплексно-сопряженный корень, действительная часть $\alpha = 0$, мнимая $\beta = 3$

$\lambda_6 = -3i$ - комплексно-сопряженный корень, действительная часть $\alpha = 0$, мнимая $\beta = 3$

Эти корни кратные (совпадающие), кратность (число совпадений) $k = 2$.

Получим:

$$y = (C_1 x + C_2) \cdot e^{0 \cdot x} + (C_3 + C_4 x) \cdot \cos(3 \cdot x) \cdot e^{0 \cdot x} + (C_5 + C_6 x) \cdot \sin(3 \cdot x) \cdot e^{0 \cdot x}$$

Для корней $\lambda_1 = 0$ и $\lambda_2 = 0$

Для корней $\lambda_3 = 3i$ и $\lambda_3 = 3i$

Для корней $\lambda_4 = -3i$ и $\lambda_6 = -3i$

Ответ: $\boxed{y = C_1 x + C_2 + (C_3 + C_4 x) \cdot \cos(3x) + (C_5 + C_6 x) \cdot \sin(3x)}$

4.2. Линейные неоднородные ДУ с постоянными коэффициентами (ЛНДУ)

Определение 4.6. Линейным неоднородным ДУ с постоянными коэффициентами называется ДУ вида:

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = f(x)$$

где – $a_n, a_{n-1} \dots a_1, a_0$ действительные числа

4.2.1. Решение ЛНДУ методом вариации произвольных постоянных

Алгоритм решение ЛНДУ методом вариации произвольных постоянных

1. Решить ЛОДУ с той же левой частью, записать его общее решение.

$$y_{\text{одн}}(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \dots + C_n y_n(x)$$

2. В полученном решении заменить произвольные постоянные на неизвестные функции

$$y(x) = C_1(x) y_1(x) + C_2(x) y_2(x) + \dots + C_n(x) y_n(x)$$

3. Составить систему:

$$\begin{cases} C_1' y_1(x) + C_2' y_2(x) + \dots + C_n' y_n(x) = 0 \\ C_1' y_1'(x) + C_2' y_2'(x) + \dots + C_n' y_n'(x) = 0 \\ C_1' y_1''(x) + C_2' y_2''(x) + \dots + C_n' y_n''(x) = 0 \\ \dots\dots \\ C_1' y_1^{(n-1)}(x) + C_2' y_2^{(n-1)}(x) + \dots + C_n' y_n^{(n-1)}(x) = \dfrac{f(x)}{a_n} \end{cases}$$

Это система алгебраических уравнений, здесь неизвестными являются $C_1', C_2' \dots C_n'$.

4. Решить систему, найти: $C_1', C_2' \dots C_n'$.

5. Найти $C_j(x)$, проинтегрировав $C_j'(x)$:

$$C_j(x) = \int C_j'(x)dx + \widetilde{C}_j$$

6. Подставить полученные выражение в решение из п. 2. Получится решение ЛНДУ.

Пример 4.5.

Дано: $y'' + 2y' + y = \dfrac{e^{-x}}{x}$

Решение:

1. Решаем ЛОДУ с той же левой частью: $y'' + 2y' + y = 0$

$$\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0$$

$$D = 4 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{0}}{2} = -1 \quad \Rightarrow \quad \begin{matrix} \lambda_1 = -1 \\ \lambda_2 = -1 \end{matrix}$$

$$y_{одн} = (C_1 + C_2 x) \cdot e^{-x}$$

$$y_{одн} = C_1 \cdot \underbrace{e^{-x}}_{y_1(x)} + C_2 \cdot \underbrace{x \cdot e^{-x}}_{y_2(x)}$$

2. Заменим в полученном решении произвольные постоянные на неизвестные функции:

$$y = C_1(x) \cdot \underbrace{e^{-x}}_{y_1(x)} + C_2(x) \cdot \underbrace{x \cdot e^{-x}}_{y_2(x)}$$

3. Составим систему уравнений:

$$\begin{cases} C_1' \cdot e^{-x} + C_2' \cdot x \cdot e^{-x} = 0 \\ C_1' \cdot (e^{-x})' + C_2' \cdot (x \cdot e^{-x})' = \dfrac{e^{-x}}{x} \end{cases}$$

4. Решаем систему:

$$\begin{cases} C_1' \cdot e^{-x} + C_2' \cdot x \cdot e^{-x} = 0 \\ -C_1' \cdot e^{-x} + C_2' \cdot (e^{-x} - x \cdot e^{-x}) = \dfrac{e^{-x}}{x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1' + C_2' \cdot x = 0 \\ -C_1' + C_2' \cdot (1 - x) = \dfrac{1}{x} \end{cases}$$

Из первого уравнения: $C_1' = -x \cdot C_2'$

Подставим во второе уравнение:

$$x \cdot C_2' + C_2' - x \cdot C_2' = \frac{1}{x} \quad \Rightarrow \quad \boxed{C_2' = \frac{1}{x}}, \text{ тогда } \boxed{C_1' = -1}$$

4. Найдем неизвестные функции:

$$C_1(x) = \int -1 dx = -x + \tilde{C}_1 \qquad C_2(x) = \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + \tilde{C}_2$$

5. Подставим в решение из п. 2:

$$y = (-x + \tilde{C}_1) \cdot e^{-x} + (\ln|x| + \tilde{C}_2) \cdot x \cdot e^{-x}$$

$$y = \underbrace{\tilde{C}_1 \cdot e^{-x} + \tilde{C}_2 \cdot x \cdot e^{-x}}_{\text{решение ЛОДУ}} \underbrace{- x \cdot e^{-x} + \ln|x| \cdot x \cdot e^{-x}}_{\text{частное решение}} \text{ - решение ЛНДУ}$$

Ответ: $\boxed{y = (-x + C_1) \cdot e^{-x} + (\ln|x| + C_2) \cdot x \cdot e^{-x}}$

Пример 4.6.

Дано: $y'' + 4y = \dfrac{1}{\sin 2x}$

Решение:

1. Решаем ЛОДУ с той же левой частью: $y'' + 4y = 0$

$$\lambda^2 + 4 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{-4} = \pm 2\,i \quad \Rightarrow \quad \begin{matrix} \lambda_1 = -2\,i \\ \lambda_2 = 2\,i \end{matrix}$$

$$y_{\text{одн}} = C_1 \cdot \underbrace{\cos(2x)}_{y_1(x)} + C_2 \cdot \underbrace{\sin(2x)}_{y_2(x)}$$

2. Заменим в полученном решении произвольные постоянные на неизвестные функции:

$$y = C_1(x) \cdot \underbrace{\cos(2x)}_{y_1(x)} + C_2(x) \cdot \underbrace{\sin(2x)}_{y_2(x)}$$

3. Составим систему уравнений:

$$\begin{cases} C_1' \cdot \cos(2x) + C_2' \cdot \sin(2x) = 0 \\ C_1' \cdot (\cos(2x))' + C_2' \cdot (\sin(2x))' = \dfrac{1}{\sin 2x} \end{cases}$$

4. Решаем систему:

$$\begin{cases} C_1' \cdot \cos(2x) + C_2' \cdot \sin(2x) = 0 \\ -2C_1' \cdot \sin(2x) + 2C_2' \cdot \cos(2x) = \dfrac{1}{\sin 2x} \end{cases}$$

Из первого уравнения: $C_1' = \dfrac{-C_2' \sin(2x)}{\cos(2x)}$

Подставим во второе уравнение: $\dfrac{2C_2{}' \cdot \sin^2(2x)}{\cos(2x)} + 2C_2{}' \cos(2x) = \dfrac{1}{\sin(2x)}$

$\Rightarrow$

$$\frac{2C_2{}' \cdot \sin^2(2x) + 2C_2{}' \cos^2(2x)}{\cos(2x)} = \frac{1}{\sin(2x)} \quad \Rightarrow \quad \frac{2C_2{}'}{\cos(2x)} = \frac{1}{\sin(2x)} \quad \Rightarrow$$

$\boxed{C_2{}' = \mathrm{ctg}(2x)}$, тогда $\boxed{C_1{}' = -1}$

4. Найдем неизвестные функции:

$$C_1(x) = \int -1dx = -x + \tilde{C}_1 \qquad\qquad C_2(x) = \int \mathrm{ctg}(2x)dx = \frac{1}{2}\ln|\sin(2x)| + \tilde{C}_2$$

5. Подставим в решение из п. 2:

$$y = (-x + \tilde{C}_1) \cdot \cos(2x) + (0.5 \cdot \ln|\sin(2x)| + \tilde{C}_2) \cdot \sin(2x)$$

$$y = \underbrace{\tilde{C}_1 \cdot \cos(2x) + \tilde{C}_2 \cdot \sin(2x)}_{\text{решение ЛОДУ}} \underbrace{- x \cdot \cos(2x) + 0.5 \cdot \ln|\sin(2x)| \cdot \sin(2x)}_{\text{частное решение}} \text{ - решение ЛНДУ}$$

Ответ: $\boxed{y = (-x + \tilde{C}_1) \cdot \cos(2x) + (0.5 \cdot \ln|\sin(2x)| + \tilde{C}_2) \cdot \sin(2x)}$

4.2.2. Метод подбора частного решения для ЛНДУ со специальной правой частью

В случаях, когда правая часть ЛНДУ имеет специальный вид:

$f(x) = \sum P_m(x) \cdot \begin{bmatrix} \cos(\beta x) \\ \text{или} \\ \sin(\beta x) \end{bmatrix} \cdot e^{\alpha x}$ может быть применен метод подбора частного решения.

Рассмотрим подробнее структуру слагаемых правой части ДУ: $P_m(x) \cdot \begin{bmatrix} \cos(\beta x) \\ \text{или} \\ \sin(\beta x) \end{bmatrix} \cdot e^{\alpha x}$, здесь

- $P_m(x) = p_o + p_1 x + p_2 x^2 + p_3 x^3 + \ldots + p_m x^m$ - многочлен по целым, неотрицательным степеням x степени m.
- $\begin{bmatrix} \cos(\beta x) \\ \text{или} \\ \sin(\beta x) \end{bmatrix}$ - необязательный множитель

Примеры функций $f(x)$ ***специального вида***:

$\underline{f(x) = 5}$, выделим необходимые сомножители: $f(x) = \underbrace{5}_{=p_o} \cdot \underbrace{e^{0 \cdot x}}_{=1}$

$\underline{f(x) = -x \cdot \cos(3x)}$, выделим необходимые сомножители: $f(x) = \underbrace{-x}_{=p_1 x} \cdot \underbrace{\cos(3x)} \cdot \underbrace{e^{0 \cdot x}}_{=1}$

$\underline{f(x) = 6 \cdot e^{3x}}$, выделим необходимые сомножители: $f(x) = \underbrace{6x}_{=p_1 x} \cdot \underbrace{e^{3 \cdot x}}$

$\underline{f(x) = (x + 10x^2) \cdot \sin(x) \cdot e^{-2x}}$, выделим необходимые сомножители: $f(x) = \underbrace{(x + 10x^2)}_{=p_1 x + p_2 x^2} \cdot \underbrace{\sin(x)} \cdot \underbrace{e^{-2 \cdot x}}$

Алгоритм решение ЛНДУ со специальной правой частью методом подбора частного решения

1. Решить ЛОДУ с той же левой частью, записать его общее решение.

$$y_{одн}(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \ldots + C_n y_n(x)$$

2. Для каждого слагаемого в правой части уравнения выписать параметры:

$\boxed{m}$ - максимальная степень x в многочлене $P_m(x)$, если слагаемое не содержит x, то $m = 0$

$\boxed{\beta}$ - коэффициент при x в аргументе $\cos(\beta x)$ или $\sin(\beta x)$, если слагаемое не содержит ни $\cos(\beta x)$, ни $\sin(\beta x)$, то $\beta = 0$

$\boxed{\alpha}$ - коэффициент при x в аргументе экспоненты, если слагаемое не содержит экспоненты, то $\alpha = 0$.

3. Сгруппировать слагаемые с одинаковыми α и β, для сформированной группы выписать параметры: максимальное из m и общие β и α. Каждое из несгруппированных слагаемых представляет собой отдельную группу со своими параметрами.

4. Для каждой выделенной группы записать структуру частного решения по следующему правилу:

а) если $\beta = 0$, то $\boxed{y_{част} = x^s \cdot Q_m(x) \cdot e^{\alpha \cdot x}}$, где

$\underline{Q_m(x) = b_k + b_{k+1} \cdot x + b_{k+2} \cdot x^2 + ... + b_{k+m} \cdot x^m}$ -многочлен по целым, неотрицательным степеням x степени m в общем виде (начиная с константы и заканчивая x^m), здесь

$\boxed{m}$ - параметр группы

$\boxed{\alpha}$- коэффициент при x в аргументе экспоненты является параметром группы

$\boxed{s}$ - определяется следующим образом: если величина $(\alpha + i\beta)$, составленная из параметров группы совпадает с корнями λ характеристического уравнения из п.1 , то s равняется числу совпадений, если же величина $(\alpha + i\beta)$ среди корней λ характеристического уравнения не встречается, то $s = 0$.

б) если $\beta \neq 0$, то $\boxed{y_{част} = x^s \cdot [Q_m(x) \cdot \cos(\beta x) + R_m(x) \cdot \sin(\beta x)] \cdot e^{\alpha \cdot x}}$, где

$\underline{Q_m(x), \quad R_m(x)}$ - многочлены по целым, неотрицательным степеням x степени m в общем виде с разными коэффициентами, здесь

$\boxed{m}$ - параметр группы.

$\boxed{\alpha}$- коэффициент при x в аргументе экспоненты является параметром группы

$\boxed{\beta}$ - коэффициент при x в аргументе $\cos(\beta x)$ и $\sin(\beta x)$ является параметром группы

$\boxed{s}$ - определяется как и в случае а)

5. Определить значения неизвестных коэффициентов b_k методом неопределенных коэффициентов:

5.1. Подставить вместо y каждое отдельно найденное частное решение в ДУ, левая часть которого совпадает с исходным, а правая содержит только те слагаемые, для которых записано это частное решение.

5.2. Привести подобные слагаемые в левой и правой частях полученного уравнения.

5.3. Приравнять коэффициенты при одинаковых функциях x в левой и правой частях полученного уравнения. Получится система алгебраических уравнений.

5.4. Решить систему, найти коэффициенты b_k.

5.5. Полностью записать частное решение.

6. Записать решение ЛНДУ: $y = y_{одн} + \sum y_{част}$

Замечание. Если задание сформулировано следующим образом «Определить структуру общего решения ЛНДУ методом подбора частного решения», то выполняются пункты 1-4 и 6 алгоритма, при этом в решении остаются неопределенными коэффициенты b_k. Если задание сформулировано как «Решить ЛНДУ методом подбора частного решения», то выполняются все пункты алгоритма.

Пример 4.7.

Дано: $y^{IV} + 4y'' = 5x + e^{2x}$

Решение:

1. Решаем соответствующее ЛОДУ с той же левой частью:

$$y^{IV} + 4y'' = 0$$

$$\lambda^4 + 4\lambda^2 = 0$$

$$\lambda^2(\lambda^2 + 4) = 0$$

$$\lambda_{1,2} = 0 \quad \lambda_{3,4} = \pm 2i$$

$$y_{одн} = C_1 + C_2 x + C_3 \cos(2x) + C_4 \sin(2x)$$

2. Исследуем структуру правой части ЛНДУ:

1 слагаемое:	$5x$	$\alpha = 0 \quad \beta = 0 \quad m = 1$
2 слагаемое:	e^{2x}	$\alpha = 2 \quad \beta = 0 \quad m = 0$

3. Так как α и β у слагаемых разные, то группировки нет, каждое слагаемое – отдельная группа.

1 слагаемое:	$5x$	$\alpha = 0 \quad \beta = 0 \quad m = 1$	1 группа
2 слагаемое:	e^{2x}	$\alpha = 2 \quad \beta = 0 \quad m = 0$	2 группа

4. Для каждой группы слагаемых записываем частное решение:

<u>Первое частное решение:</u> $\alpha = 0 \quad \beta = 0 \quad m = 1$

$$y_{част1} = x^S \cdot (b_0 + b_1 x) \cdot e^{0 \cdot x}$$

$$\alpha + i\beta = 0 + i \cdot 0 = 0 \quad \to \quad S = 2$$

Окончательно: $\boxed{y_{част1} = x^2 \cdot (b_0 + b_1 x) \cdot e^{0 \cdot x}}$

<u>Второе частное решение:</u> $\alpha = 2 \quad \beta = 0 \quad m = 0$

$$y_{част2} = x^S \cdot (b_2) \cdot e^{2 \cdot x}$$

$$\alpha + i\beta = 2 + i \cdot 0 = 2 \quad \to \quad S = 0$$

Окончательно: $\boxed{y_{част2} = (b_2) \cdot e^{2 \cdot x}}$

6. Записываем структуру общего решения ЛНДУ: $y = y_{одн} + y_{част1} + y_{част2}$

Ответ: $\boxed{y = C_1 + C_2 x + C_3 \cos(2x) + C_4 \sin(2x) + x^2 \cdot (b_0 + b_1 x) + b_2 \cdot e^{2x}}$

Пример 4.8.

<u>Дано:</u> $y'' + 4y = \cos(2x) + 4x^2 - 3x \cdot \sin(2x)$

<u>Решение:</u>

1. Решаем соответствующее ЛОДУ с той же левой частью:

$$y'' + 4y = 0$$

$$\lambda^2 + 4 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \pm 2i$$

$$y_{одн} = C_1 \cos(2x) + C_2 \sin(2x)$$

2. Исследуем структуру правой части ЛНДУ:

1 слагаемое:	$\cos(2x)$	$\alpha = 0 \quad \beta = 2 \quad m = 0$
2 слагаемое:	$4x^2$	$\alpha = 0 \quad \beta = 0 \quad m = 2$
3 слагаемое:	$-3x \cdot \sin(2x)$	$\alpha = 0 \quad \beta = 2 \quad m = 1$

3. Группируем слагаемые с одинаковыми параметрами α и β:

1 и 3 слагаемое:	$\cos(2x)$ $-3x \cdot \sin(2x)$	$\alpha = 0 \quad \beta = 2 \quad m = 1$	1 группа
2 слагаемое:	$4x^2$	$\alpha = 0 \quad \beta = 0 \quad m = 2$	2 группа

4) Для каждой группы слагаемых записываем частное решение:

<u>Первое частное решение:</u> $\alpha = 0 \quad \beta = 2 \quad m = 1$

$$y_{част1} = x^S \cdot \left[(b_0 + b_1 x) \cdot \cos(2x) + (b_2 + b_3 x) \cdot \sin(2x)\right] \cdot e^{0 \cdot x}$$

$$\alpha + i\beta = 0 + i \cdot 2 = 2i \quad \rightarrow \quad S = 1$$

Окончательно: $\boxed{y_{част1} = x \cdot \left[(b_0 + b_1 x) \cdot \cos(2x) + (b_2 + b_3 x) \cdot \sin(2x)\right]}$

<u>Второе частное решение:</u> $\alpha = 0 \quad \beta = 0 \quad m = 2$

$$y_{част2} = x^S \cdot (b_4 + b_5 x + b_6 x^2) \cdot e^{0 \cdot x}$$

$$\alpha + i\beta = 0 + i \cdot 0 = 0 \quad \rightarrow \quad S = 0$$

Окончательно: $\boxed{y_{част2} = b_4 + b_5 x + b_6 x^2}$

6. Записываем структуру общего решения ЛНДУ: $y = y_{одн} + y_{част1} + y_{част2}$

Ответ:

$$\boxed{y = C_1 \cos(2x) + C_2 \sin(2x) + x \cdot \left[(b_0 + b_1 x) \cdot \cos(2x) + (b_2 + b_3 x) \cdot \sin(2x)\right] + b_4 + b_5 x + b_6 x^2}$$

Пример 4.9.

Дано: $y'' + 4y = 4x^2 - x$

Решение:

1. Решаем соответствующее ЛОДУ с той же левой частью:

$$y'' + 4y = 0$$

$$\lambda^2 + 4 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \pm 2i$$

$$y_{одн} = C_1 \cos(2x) + C_2 \sin(2x)$$

2. Исследуем структуру правой части ЛНДУ:

1 слагаемое:	$4x^2$	$\alpha = 0 \quad \beta = 0 \quad m = 2$
2 слагаемое:	$-x$	$\alpha = 0 \quad \beta = 0 \quad m = 1$

3. Группируем слагаемые с одинаковыми параметрами α и β:

1 и 2 слагаемое:	$4x^2$ $-x$	$\alpha = 0 \quad \beta = 0 \quad m = 2$	1 группа

4. Для полученной группы слагаемых записываем частное решение:

Частное решение: $\alpha = 0 \quad \beta = 0 \quad m = 2$

$$y_{част} = x^S \cdot (b_0 + b_1 x + b_2 x^2) \cdot e^{0 \cdot x}$$

$$\alpha + i\beta = 0 + i \cdot 0 = 0 \quad \to \quad S = 0$$

Окончательно: $\boxed{y_{част} = b_0 + b_1 x + b_2 x^2}$

5. Находим неизвестные коэффициенты частного решения методом неопределенных коэффициентов:

$$y_{част} = b_0 + b_1 x + b_2 x^2$$

$$y'_{част} = b_1 + 2 \cdot b_2 x$$

$$y''_{част} = 2 \cdot b_2$$

$$y''_{част} + 4y_{част} = 4x^2 - x$$

$$2 \cdot b_2 + 4 \cdot (b_0 + b_1 x + b_2 x^2) = 4x^2 - x$$

Приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях x в левой и правой частях уравнения:

x^0	$2\cdot b_2 + 4\cdot b_0 = 0$
x	$4\cdot b_1 = -1$
x^2	$4\cdot b_2 = 4$

Из полученной системы находим:

$$b_0 = -1/2$$

$$b_1 = -1/4$$

$$b_2 = 1$$

Окончательно: $\boxed{y_{част} = -1/2 - 1/4\,x + x^2}$

<u>Проверка:</u>

$$y_{част} = -1/2 - 1/4\,x + x^2$$

$$y'_{част} = -1/4 + 2\cdot x$$

$$y''_{част} = 2$$

$$y''_{част} + 4y_{част} = 4x^2 - x$$

$$2 + 4\cdot(-1/2 - 1/4\,x + x^2) = 4x^2 - x$$

$$2 - 2 - x + 4x^2 = 4x^2 - x$$

$$\underline{4x^2 - x \equiv 4x^2 - x}$$

6. Записываем решение ЛНДУ:

$$y = y_{одн} + y_{част1}$$

Ответ: $\boxed{y = C_1\cos(2x) + C_2\sin(2x) - 1/2 - 1/4\,x + x^2}$

ГЛАВА 5. СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ (СДУ)

Рассмотрим движение материальной точки в пространстве под действием силы $F(t,r,\dot{r})$, где $r=(x,y,z)^T$ - вектор-функция, определяющая положение точки в пространстве, $\dot{r}=(\dot{x},\dot{y},\dot{z})^T$ - вектор-функция скорости, t - время.

Для описания движения используется математическая модель, выраженная ДУ:

$$m\frac{d^2r}{dt^2}=F(t,r,\dot{r})$$

Если спроектировать это векторное уравнения на оси неподвижной системы координат, то оно может быть заменено тремя скалярными уравнениями, объединенными в систему:

$$\begin{cases} m\dfrac{d^2x}{dt^2}=X(t,x,y,z,\dot{x},\dot{y},\dot{z}) \\ m\dfrac{d^2y}{dt^2}=Y(t,x,y,z,\dot{x},\dot{y},\dot{z}) \\ m\dfrac{d^2z}{dt^2}=Z(t,x,y,z,\dot{x},\dot{y},\dot{z}) \end{cases}$$

Определение 5.1. Системой дифференциальных уравнений (СДУ) называется совокупность дифференциальных уравнений, в каждое из которых входят: независимая переменная, неизвестные функции и производные неизвестных функций.

В рассмотренном примере:

t	- независимая переменная
$x(t),y(t),z(t)$	- неизвестные функции
$\dot{x},\dot{y},\dot{z}$	- производные этих функций

Будем рассматривать СДУ число уравнений, которых равно числу неизвестных функций.

Определение 5.2. Порядок СДУ определяется суммой порядков её уравнений.

Определение 5.3. Решением СДУ называется такая совокупность функций, которые при подстановке в каждое уравнение системы обращают его в тождество.

Если в примере о движении материальной точки за неизвестные функции считать не только координаты $x(t),y(t),z(t)$, но и проекции скоростей $\dot{x},\dot{y},\dot{z}$, то тогда получим:

$$\begin{cases} \dot{x} = u \\ \dot{y} = v \\ \dot{z} = w \\ m\dot{u} = X(t, x, y, z, u, v, w) \\ m\dot{v} = Y(t, x, y, z, u, v, w) \\ m\dot{w} = Z(t, x, y, z, u, v, w) \end{cases}$$

Особенностью данной системы является то, что все её уравнения 1-го порядка, разрешенные относительно производной.

Определение 5.4. Нормальной СДУ называется система, состоящая из ДУ 1-го порядка, разрешенных относительно производной.

Нормальная СДУ имеет вид:

$$\begin{cases} y_1' = f_1(x, y_1, y_2, ..., y_n) \\ y_2' = f_2(x, y_1, y_2, ..., y_n) \\ .... \\ y_n' = f_n(x, y_1, y_2, ..., y_n) \end{cases}$$

Порядок нормальной системы определяется количеством её уравнений.

Переход от ДУ n-го порядка к нормальной системе

<u>Дано:</u> $y^{(n)} = f(x, y, y', y'', ...y^{(n-1)})$

Введем систему обозначений: $y(x) = y_1(x), \quad y' = y_2(x), \quad y'' = y_3(x), \quad ...., \quad y^{(n-1)} = y_n(x)$.

Тогда ДУ может быть записано в виде нормальной системы вида:

$$\begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = y_3 \\ .... \\ y_n' = f(x, y_1, y_2, ..., y_n) \end{cases}$$

Справедливо и обратное: можно от НСДУ n-го порядка перейти к ДУ, исключая последовательно неизвестные функции кроме одной (метод исключения).

5.1. Системы линейных однородных ДУ с постоянными коэффициентами

Определение 5.5. Системой линейных однородных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами (СЛОДУ) n-го порядка называется СДУ вида:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \\ \dot{x}_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \\ \ldots\ldots\ldots \\ \dot{x}_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n \end{cases}$$

Здесь рассматриваются неизвестные функции $x_1(t), \quad x_2(t) \ldots . x_n(t)$ независимой переменной t, $\dot{x}_i = \dfrac{dx_i}{dt}, \quad i = 1..n$ - производный неизвестных функций $x_1(t), \quad x_2(t) \ldots . x_n(t)$

Часто при записи СЛОДУ используют неизвестные функции: $x(t), \quad y(t), \quad z(t), \quad u(t)$ и т.д.

Метод исключения

Если порядок n СЛОДУ невысокий, решение может быть найдено методом сведения системы n-го порядка к ЛОДУ n-го порядка.

Пример 5.1.

Дано: $\begin{cases} \dot{x} = 2x + 3y \\ \dot{y} = 4y + x \end{cases}$

Решение:

Выразим из второго уравнения функцию x: $\underline{x = \dot{y} - 4y}$

Найдем производную функции x: $\underline{\dot{x} = \ddot{y} - 4\dot{y}}$

Подставим полученные выражения в первое уравнение: $\underline{\ddot{y} - 4\dot{y} = 2(\dot{y} - 4y) + 3y}$

Получим ЛОДУ 2-го порядка: $\underline{\ddot{y} - 6\dot{y} + 5y = 0}$

Решаем полученное ЛОДУ

$\lambda^2 - 6\lambda + 5 = 0$ - характеристическое уравнение.

Решаем уравнение:

$$D = 6^2 - 4 \cdot 5 = 16$$

$$\lambda_1 = \frac{6 - \sqrt{16}}{2} = 1 \qquad \lambda_2 = \frac{6 + \sqrt{16}}{2} = 5$$

Корни характеристического уравнения – простые, действительные.

Записываем решение ЛОДУ: $y = C_1 e^t + C_2 e^{5t}$

Для нахождения функции $x = \dot{y} - 4y$, найдем производную $\dot{y} = C_1e^t + 5C_2e^{5t}$, тогда:

$$x = \underbrace{C_1e^t + 5C_2e^{5t}}_{\dot{y}} - 4\underbrace{(C_1e^t + C_2e^{5t})}_{y} = -3C_1e^t + C_2e^{5t}$$

Ответ: $\begin{cases} x = -3C_1 \cdot e^t + C_2 \cdot e^{5t} \\ y = C_1 \cdot e^t + C_2 \cdot e^{5t} \end{cases}$

Алгоритм решения СЛОДУ

1. Составить матрицу системы: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & .... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & .... & a_{2n} \\ .... & .... & .... & .... \\ a_{n1} & a_{n2} & .... & a_{nn} \end{pmatrix}$

2. Составить характеристическое (ХУ) уравнение: $\det(A - \lambda \cdot E) = 0$ и найти все его n корней: $\lambda_1, \lambda_2 ... \lambda_n$. Корни характеристического уравнения – это собственные значения матрицы A.

3. Проанализировать корни $\lambda_1, \lambda_2 ... \lambda_n$:

Для каждого простого действительного корня λ_j:

3.1. Составить матрицу $A - \lambda_j \cdot E$

3.2. Найти собственный вектор матрицы V_j, соответствующий корню λ_j, решив матричное уравнение: $(A - \lambda_j \cdot E) \cdot V_j = 0$

Замечание. V_j - любой ***ненулевой*** вектор, удовлетворяющий матричному уравнению $(A - \lambda_j \cdot E) \cdot V_j = 0$

3.3. Записать частное решение системы в векторной форме: $C_jV_j \cdot e^{\lambda_j t}$

Для каждого пары простых комплексно-сопряженных корней $\lambda_{j,\,j+1} = \alpha \pm i\,\beta$:

3.1. Выбрать любой из двух корней, либо $\lambda_j = \alpha - i\,\beta$, либо $\lambda_j = \alpha + i\,\beta$

3.2. Составить матрицу $A - \lambda_j \cdot E$

3.3. Найти собственный вектор матрицы V_j, соответствующий корню λ_j, решив матричное уравнение: $(A - \lambda_j \cdot E) \cdot V_j = 0$

3.4. Если был выбран корень $\lambda_j = \alpha - i\,\beta$, рассмотреть произведение:

$$P = V_j \cdot e^{(\alpha - i\,\beta)t} = V_j \cdot [\cos(\beta t) - i \cdot \sin(\beta t)] \cdot e^{\alpha t}$$

Если был выбран корень $\lambda_j = \alpha + i\,\beta$, рассмотреть произведение:

$$P = V_j \cdot e^{(\alpha + i\,\beta)t} = V_j \cdot [\cos(\beta t) + i \cdot \sin(\beta t)] \cdot e^{\alpha t}$$

Выделить в полученном произведении действительную $\operatorname{Re}(P)$ и мнимую $\operatorname{Im}(P)$ части.

3.5. Записать частное решение системы в векторной форме: $C_j \operatorname{Re}(P) + C_{j+1} \operatorname{Im}(P)$

Для каждого кратного действительного корня λ_j кратности k:

3.1. Составить матрицу $A - \lambda_j \cdot E$

3.2. Найти все линейно-независимые собственные векторы, соответствующий корню λ_j, решив матричное уравнение: $(A - \lambda_j \cdot E) \cdot V_j^m = 0$.

Если их количество m равно кратности корня k, то записать частное решение системы:

$$C_j V_j^1 \cdot e^{\lambda_j t} + C_{j+1} V_j^2 \cdot e^{\lambda_j t} + \ldots + C_{j+k-1} V_j^k \cdot e^{\lambda_j t}.$$

Если количество линейно-независимых собственных векторов $m < k$ перейти к п. 3.3-3.6.

3.3. Записать частные решения системы в виде:

$$\begin{cases} x_1 = (a + b \cdot t + c \cdot t^2 + \ldots. + d \cdot t^{k-m}) \cdot e^{\lambda_j t} \\ \ldots. \\ x_n = (p + q \cdot t + r \cdot t^2 + \ldots. + s \cdot t^{k-m}) \cdot e^{\lambda_j t} \end{cases}$$

3.4. Найти соотношения для коэффициентов $a, b, c......r, s$ методом неопределенных коэффициентов.

3.5. Положить любые k коэффициентов равными произвольным постоянным $C_j, C_{j+1}.....C_{j+k-1}$, выразить оставшиеся из соотношений 3.4.

3.6. Окончательно записать частное решение системы.

4. Записать общее решение СЛОДУ в виде суммы всех частных.

Пример 5.2.

Дано: $\begin{cases} \dot{x} = 2x + 3y \\ \dot{y} = 4y + x \end{cases}$

Решение:

1. Составим матрицу коэффициентов системы:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

2. Составим матрицу $A - \lambda E$:

$$A - \lambda E = \begin{pmatrix} 2-\lambda & 3 \\ 1 & 4-\lambda \end{pmatrix}$$

Составим характеристическое уравнение $\det(A - \lambda E) = 0$ и найдем собственные значения матрицы.

Найдем определитель:

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 3 \\ 1 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)\cdot(4-\lambda) - 3\cdot 1 = \lambda^2 - 6\lambda + 5$$

Приравняем полученный определитель к нулю: $\lambda^2 - 6\lambda + 5 = 0$ - характеристическое уравнение.

Найдем собственные значения матрицы, решив уравнение:

$$\lambda^2 - 6\lambda + 5 = 0$$

$$D = 6^2 - 4\cdot 5 = 16$$

$$\lambda_1 = \frac{6-\sqrt{16}}{2} = 1 \qquad \lambda_2 = \frac{6+\sqrt{16}}{2} = 5$$

Собственные значения матрицы – корни характеристического уравнения – простые, действительные.

3.

Запишем матрицу $A - \lambda_1 E$, где $\lambda_1 = 1$, и найдем собственный вектор матрицы:

$$A - \lambda_1 E = \begin{pmatrix} 2-1 & 3 \\ 1 & 4-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Найдем собственный вектор V_1 из уравнения:

$$(A - \lambda_1 E)\cdot V_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} v_1 + 3v_2 = 0 \\ v_1 + 3v_2 = 0 \end{cases}$$

Т.к. уравнения в системе линейно-зависимы, найдем ее любое ненулевое решение:

Пусть $v_2 = 1$, тогда из первого уравнения системы $v_1 = -3v_2 = -3$.

Окончательно:

$$V_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Запишем матрицу $A - \lambda_2 E$, где $\lambda_2 = 5$, и найдем собственный вектор матрицы:

$$A - \lambda_2 E = \begin{pmatrix} 2-5 & 3 \\ 1 & 4-5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Найдем собственный вектор V_2 из уравнения:

$$(A - \lambda_2 E)\cdot V_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} -3v_1 + 3v_2 = 0 \\ v_1 - v_2 = 0 \end{cases}$$

Т.к. уравнения в системе линейно-зависимы, найдем ее любое ненулевое решение:

Пусть $v_2 = 1$, тогда из второго уравнения системы $v_1 = v_2 = 1$.

Окончательно:

$$V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

4. Запишем решение системы в векторной форме:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}\cdot e^{1\cdot t} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\cdot e^{5\cdot t}$$

Запишем решение системы в скалярной форме:

$$\begin{cases} x = -3C_1 \cdot e^{t} + C_2 \cdot e^{5t} \\ y = C_1 \cdot e^{t} + C_2 \cdot e^{5t} \end{cases}$$

Ответ: $\boxed{\begin{cases} x = -3C_1 \cdot e^{1\cdot t} + C_2 \cdot e^{5\cdot t} \\ y = C_1 \cdot e^{1\cdot t} + C_2 \cdot e^{5\cdot t} \end{cases}}$

Пример 5.3.

Дано: $\begin{cases} \dot{x} = x - 3y \\ \dot{y} = 3x + y \end{cases}$

Решение:

1. Составим матрицу коэффициентов системы:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Составим матрицу $A - \lambda E$:

$$A - \lambda E = \begin{pmatrix} 1-\lambda & -3 \\ 3 & 1-\lambda \end{pmatrix}$$

Составим характеристическое уравнение $\det(A - \lambda E) = 0$ и найдем собственные значения матрицы.

Найдем определитель:

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -3 \\ 3 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)\cdot(1-\lambda) - 3\cdot(-3) = \lambda^2 - 2\lambda + 10$$

Приравняем полученный определитель к нулю: $\lambda^2 - 2\lambda + 10 = 0$ - характеристическое уравнение.

Найдем собственные значения матрицы, решив уравнение:

$$\lambda^2 - 2\lambda + 10 = 0$$

$$D = 2^2 - 4\cdot 10 = -36$$

$$\lambda_1 = \frac{2 - \sqrt{36}}{2} = 1 - 3i \qquad \lambda_2 = \frac{2 + \sqrt{-36}}{2} = 1 + 3i$$

Собственные значения матрицы – корни характеристического уравнения – простые, комплексно-сопряженные.

3.

Т.к. корни характеристического уравнения λ_1 и λ_2 простые, комплексно-сопряженные, выберем любой из них, например $\lambda_2 = 1 + 3i$

Запишем матрицу $A - \lambda_2 E$, где $\lambda_2 = 1 + 3i$, и найдем собственный вектор матрицы:

$$A - \lambda_2 E = \begin{pmatrix} 1-1-3i & -3 \\ 3 & 1-1-3i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3i & -3 \\ 3 & -3i \end{pmatrix}$$

Найдем собственный вектор V_2 из уравнения:

$$(A-\lambda_2 E)\cdot V_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} -3i & -3 \\ 3 & -3i \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} -3i\cdot v_1 - 3v_2 = 0 \\ 3v_1 - 3i\cdot v_2 = 0 \end{cases}$$

Т.к. уравнения в системе линейно-зависимы, найдем ее любое ненулевое решение:

Пусть $v_2 = 1$, тогда из второго уравнения системы $v_1 = v_2 \cdot i = i$.

Окончательно:

$$V_2 = \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}$$

Рассмотрим произведение:

$$P = V_2 \cdot e^{\lambda_2 \cdot t} = \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}\cdot e^{(1+3i)\cdot t} = \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}\cdot[\cos(3t) + i\cdot\sin(3t)]\cdot e^t = \begin{pmatrix} i\cdot\cos(3t) + i^2\cdot\sin(3t) \\ \cos(3t) + i\cdot\sin(3t) \end{pmatrix}\cdot e^t =$$

$$= \begin{pmatrix} -\sin(3t) + i\cdot\cos(3t) \\ \cos(3t) + i\cdot\sin(3t) \end{pmatrix}\cdot e^t$$

Окончательно:

$$P = \begin{pmatrix} -\sin(3t) \\ \cos(3t) \end{pmatrix}\cdot e^t + i\cdot\begin{pmatrix} \cos(3t) \\ \sin(3t) \end{pmatrix}\cdot e^t$$

4. Запишем решение системы в векторной форме в виде линейной комбинации действительной и мнимой частей полученного произведения:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1\begin{pmatrix} -\sin(3t) \\ \cos(3t) \end{pmatrix}\cdot e^t + C_2\begin{pmatrix} \cos(3t) \\ \sin(3t) \end{pmatrix}\cdot e^t$$

Запишем решение системы в скалярной форме:

$$\begin{cases} x = -C_1\sin(3t)\cdot e^t + C_2\cos(3t)\cdot e^t \\ y = C_1\cos(3t)\cdot e^t + C_2\sin(3t)\cdot e^t \end{cases}$$

Ответ: $\boxed{\begin{cases} x = -C_1\sin(3t)\cdot e^t + C_2\cos(3t)\cdot e^t \\ y = C_1\cos(3t)\cdot e^t + C_2\sin(3t)\cdot e^t \end{cases}}$

Пример 5.4.

Дано: $\begin{cases} \dot{x} = 2x + y \\ \dot{y} = 4y - x \end{cases}$

Решение:

1. Составим матрицу коэффициентов системы:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$$

2. Составим матрицу $A - \lambda E$:

$$A - \lambda E = \begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 \\ -1 & 4-\lambda \end{pmatrix}$$

Составим характеристическое уравнение $\det(A - \lambda E) = 0$ и найдем собственные значения матрицы.

Найдем определитель:

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ -1 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)\cdot(4-\lambda) - 1\cdot(-1) = \lambda^2 - 6\lambda + 9$$

Приравняем полученный определитель к нулю: $\lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0$ - характеристическое уравнение.

Найдем собственные значения матрицы, решив уравнение:

$$\lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0$$

$$D = 36^2 - 4\cdot 9 = 0$$

$$\lambda_1 = \frac{6-\sqrt{0}}{2} = 3 \qquad \lambda_2 = \frac{6+\sqrt{0}}{2} = 3$$

Собственные значения матрицы – корни характеристического уравнения – кратные, действительные.

3.

Запишем матрицу $A - \lambda_1 E$, где $\lambda_1 = 3$:

$$A - \lambda_1 E = \begin{pmatrix} 2-3 & 1 \\ -1 & 4-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Для данной матрицы найдется только один линейно-независимый собственный вектор, поэтому будем искать решение СЛОДУ в виде:

$$x = (a + b\cdot t)\cdot e^{3t}$$

$$y = (c + d\cdot t)\cdot e^{3t}$$

Тогда:

$$x = a\cdot e^{3t} + b\cdot t\cdot e^{3t} \qquad \Rightarrow \qquad \dot{x} = 3a\cdot e^{3t} + b\cdot(e^{3t} + 3t\cdot e^{3t})$$

$$y = c\cdot e^{3t} + d\cdot t\cdot e^{3t} \qquad \Rightarrow \qquad \dot{y} = 3c\cdot e^{3t} + d\cdot(e^{3t} + 3t\cdot e^{3t})$$

Подставим полученные выражения в первое уравнение системы:

$$\underbrace{3a\cdot e^{3t} + b\cdot(e^{3t} + 3t\cdot e^{3t})}_{\dot{x}} = 2\cdot\underbrace{(a\cdot e^{3t} + b\cdot t\cdot e^{3t})}_{x} + \underbrace{(c\cdot e^{3t} + d\cdot t\cdot e^{3t})}_{y}$$

Раскроем скобки и приведем подобные слагаемые в левой и правой частях уравнения:

$$(3a + b)\cdot e^{3t} + 3b\cdot t\cdot e^{3t} = (2a + c)\cdot e^{3t} + (2b + d)\cdot t\cdot e^{3t}$$

Приравняем коэффициенты при одинаковых функциях переменной t в левой и правой частях уравнения:

$$\begin{cases} 3a + b = 2a + c \\ 3b = 2b + d \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{cases} a + b = c \\ b = d \end{cases}$$

Подставим полученные выражения во второе уравнение системы:

$$\underbrace{3c\cdot e^{3t} + d\cdot(e^{3t} + 3t\cdot e^{3t})}_{\dot{y}} = 4\cdot\underbrace{(c\cdot e^{3t} + d\cdot t\cdot e^{3t})}_{y} - \underbrace{(a\cdot e^{3t} + b\cdot t\cdot e^{3t})}_{x}$$

Раскроем скобки и приведем подобные слагаемые в левой и правой частях уравнения:

$$(3c + d)\cdot e^{3t} + 3d\cdot t\cdot e^{3t} = (4c - a)\cdot e^{3t} + (4d - b)\cdot t\cdot e^{3t}$$

Приравняем коэффициенты при одинаковых функциях переменной t в левой и правой частях уравнения:

$$\begin{cases} 3c + d = 4c - a \\ 3d = 4d - b \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{cases} a + d = c \\ b = d \end{cases}$$

Объединим соотношения для отыскания коэффициентов:

$$\begin{cases} a + b = c \\ b = d \\ a + d = c \\ b = d \end{cases}$$

Очевидно, что в данной системе совпадают уравнения 2-е и 4-е, а также 1-е и 3-е при условии, что $b = d$.

Для нахождения решения введем произвольные постоянные: $a = C_1$ и $b = C_2$.

Тогда: $c = C_1 + C_2$ (из первого уравнения)

$d = C_2$ (из второго уравнения)

4. Окончательно:

$$x = (C_1 + C_2 \cdot t) \cdot e^{3t}$$

$$y = (C_1 + C_2 + C_2 \cdot t) \cdot e^{3t}$$

Ответ: $\boxed{\begin{cases} x = (C_1 + C_2 \cdot t) \cdot e^{3t} \\ y = (C_1 + C_2 + C_2 \cdot t) \cdot e^{3t} \end{cases}}$

5.2. Системы линейных неоднородных ДУ с постоянными коэффициентами (СЛНДУ)

Определение 5.5. Системой линейных неоднородных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами (СЛНДУ) n-го порядка называется СДУ вида:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n + f_1(t) \\ \dot{x}_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n + f_2(t) \\ .... \\ \dot{x}_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n + f_n(t) \end{cases}$$

Решение СЛНДУ может быть найдено методом вариации произвольных постоянных, а в случае, если функции $f_i(t)$ имеют специальный вид – методом подбора частного решения.

Метод вариации произвольных постоянных

Алгоритм решение СЛНДУ методом вариации произвольных постоянных

1. Решить соответствующую СЛОДУ, записать её общее решение.
2. В полученном решении заменить произвольные постоянные C на неизвестные функции $C_j(t)$
3. Подставить полученное решение в исходную СЛНДУ, получится система алгебраических уравнений относительно $\dot{C}_j$.
4. Решить систему, найти: $\dot{C}_j$.
5. Найти $C_j(t)$, проинтегрировав $\dot{C}_j$: $C_j(t) = \int \dot{C}_j(t)dx + \widetilde{C}_j$
6. Подставить полученные выражение в решение из п. 2. Получится решение СЛНДУ.

Метод подбора частного решения для СЛНДУ со специальными правыми частями

В случаях, когда правые части уравнений СЛНДУ имеют специальный вид:

$f_j(t) = \sum P_m(t) \cdot \begin{bmatrix} \cos(\beta t) \\ \text{или} \\ \sin(\beta t) \end{bmatrix} \cdot e^{\alpha t}$ может быть применен метод подбора частного решения.

Рассмотрим подробнее структуру слагаемых правой части ДУ: $P_m(t) \cdot \begin{bmatrix} \cos(\beta t) \\ \text{или} \\ \sin(\beta t) \end{bmatrix} \cdot e^{\alpha t}$, здесь

- $P_m(t) = p_o + p_1 t + p_2 t^2 + p_3 t^3 + \ldots + p_m t^m$ - многочлен по целым, неотрицательным степеням t степени m.
- $\begin{bmatrix} \cos(\beta t) \\ \text{или} \\ \sin(\beta t) \end{bmatrix}$ - необязательный множитель

Алгоритм решение СЛНДУ со специальными правыми частями методом подбора частного решения

1. Решить соответствующую СЛОДУ, записать её общее решение.
2. Для каждого слагаемого в правой части каждого уравнения выписать параметры:

$\boxed{m}$ - максимальная степень t в многочлене $P_m(t)$, если слагаемое не содержит t, то $m = 0$

$\boxed{\beta}$ - коэффициент при t в аргументе $\cos(\beta t)$ или $\sin(\beta t)$, если слагаемое не содержит ни $\cos(\beta t)$, ни $\sin(\beta t)$, то $\beta = 0$

$\boxed{\alpha}$ - коэффициент при t в аргументе экспоненты, если слагаемое не содержит экспоненты, то $\alpha = 0$.

3. Сгруппировать слагаемые с одинаковыми α и β для каждого уравнения, для сформированной группы выписать параметры: максимальное из m и общие β и α. Каждое из несгруппированных слагаемых представляет собой отдельную группу со своими параметрами.
4. Сгруппировать слагаемые с одинаковыми α и β для всех уравнений, для сформированной группы выписать параметры: максимальное из m и общие β и α.
5. Для каждой выделенной группы записать структуру частного решения по следующему правилу:

а) если $\beta = 0$, то $\boxed{x_{\text{част}} = Q_{m+s}(t) \cdot e^{\alpha \cdot t}}$, где

$\underline{Q_{m+s}(t)}$ - вектор многочленов по целым, неотрицательным степеням t степени $m+s$ в общем виде, здесь

$\boxed{m}$ - параметр группы

$\boxed{\alpha}$- коэффициент при t в аргументе экспоненты является параметром группы

$\boxed{s}$ - определяется следующим образом: если величина $(\alpha+i\beta)$, составленная из параметров группы совпадает с корнями λ характеристического уравнения из п.1 , то s равняется числу совпадений, если же величина $(\alpha+i\beta)$ среди корней λ характеристического уравнения не встречается, то $s=0$.

б) если $\beta \neq 0$, то $\boxed{x_{част} = \left[Q_{m+s}(t)\cdot\cos(\beta t) + R_{m+s}(t)\cdot\sin(\beta t)\right]\cdot e^{\alpha\cdot t}}$, где

$\underline{Q_{m+s}(t),\ \ R_{m+s}(t)}$ - векторы многочленов по целым, неотрицательным степеням t степени $m+s$ в общем виде с разными коэффициентами, здесь

$\boxed{m}$ - параметр группы.

$\boxed{\alpha}$- коэффициент при t в аргументе экспоненты является параметром группы

$\boxed{\beta}$ - коэффициент при t в аргументе $\cos(\beta t)$ и $\sin(\beta t)$ является параметром группы

$\boxed{s}$ - определяется как и в случае а)

6. Определить значения неизвестных коэффициентов методом неопределенных коэффициентов.

7. Записать решение СЛНДУ как сумму решения СЛОДУ и всех частных

ГЛАВА 6. ЧИСЛЕННОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Поиск общего решения ДУ возможен только для достаточно узкого класса ДУ: это некоторые виды ДУ 1-го порядка, ЛОДУ и ЛНДУ с постоянными коэффициентами и некоторые другие ДУ, решение которых может быть сведено к решению ДУ 1-го порядка.

При решении практических задач поиск общего решения ДУ, как правило, невозможен, поэтому решение задачи интегрирования ДУ ограничивается поиском, так называемых частных решений, удовлетворяющих определенным условиям: задачи Коши и краевые задачи.

Постановка задачи численного интегрирования ДУ 1-го порядка

<u>Дано:</u> $y' = f(x, y)$ - ДУ 1-го порядка, разрешенное относительно производной,

$y(x_0) = y_0$ - начальное условие,

здесь x_0 - начальная точка, y_0 - значение функции в начальной точке.

Требуется решить поставленную задачу Коши – найти интегральную кривую $y = y(x)$, проходящую через начальную точку $M_0(x_0, y_0)$.

6.1. Метод Эйлера

Выбрав достаточно малый шаг h, построим систему равноотстоящих точек: $x_i = x_0 + i \cdot h, \quad i = 0,1,2,..$

Искомое решение (интегральную кривую) $y = y(x)$, проходящую через начальную точку $M_0(x_0, y_0)$, приближенно заменим ломанной $M_0, M_1, M_2.....$, звенья которой в каждой вершине имеют направление, совпадающее с направлением интегральной кривой. Тогда

$$\frac{y_{i+1} - y_i}{h} = y'(x_i) \quad \Rightarrow \quad \frac{y_{i+1} - y_i}{h} = f(x_i, y_i) \quad \Rightarrow \quad y_{i+1} = y_i + h \cdot f(x_i, y_i)$$

Окончательно имеем вычислительную схему для метода Эйлера:

$$x_{i+1} = x_i + h$$
$$y_{i+1} = y_i + h \cdot f(x_i, y_i)$$

Геометрическая интерпретация метода Эйлера представлена на рисунке 6.1:

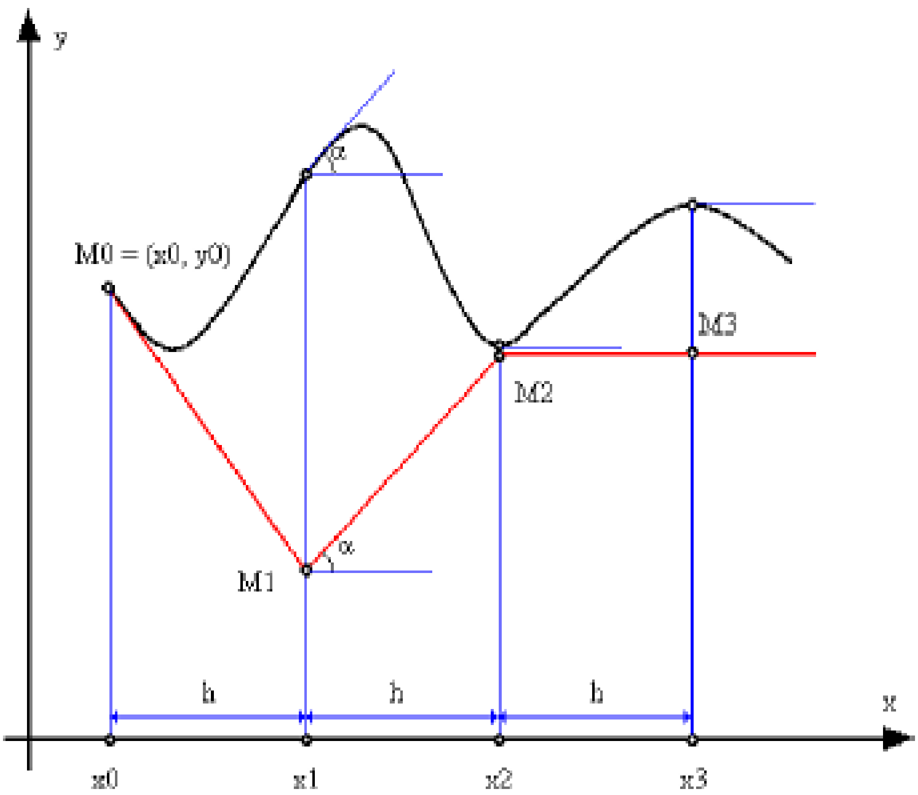

Рис. 6.1.

Метод Эйлера дает сравнительно удовлетворительные результаты (в смысле погрешности) лишь при малых значениях h, поскольку, по существу метод Эйлера заключается в том, что интеграл дифференциального уравнения на каждом частичном отрезке $[x_i, x_{i+1}]$ представляется двумя членами ряда Тейлора:

$$y(x_i + h) = y(x_i) + h \cdot y'(x_i), \quad i = 0,1,2....,$$

т.е. для этого отрезка имеется погрешность порядка h^2.

Метод Эйлера является простейшим численным методом интегрирования дифференциального уравнения. Его недостатками являются:

1) малая точность;

2) систематическое накопление ошибок.

Недостатки метода Эйлера можно проиллюстрировать следующим примером (рис. 6.2.).

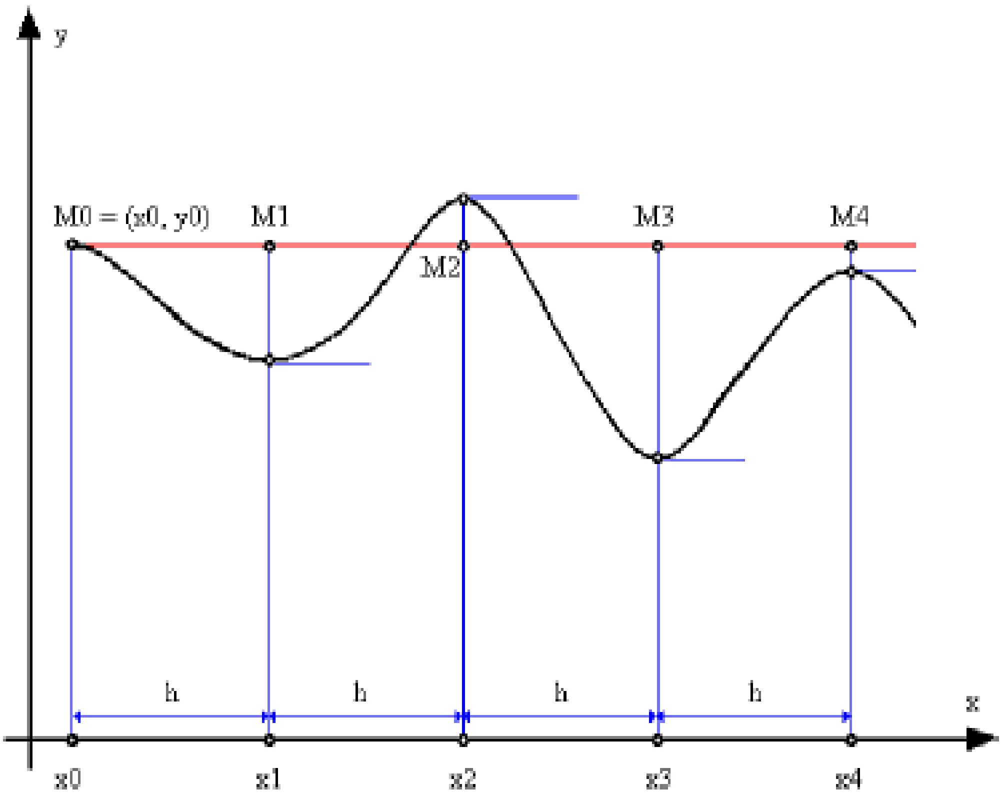

Рис. 6.2.

Как видно из рисунка, при неудачном выборе шага h, метод Эйлера заменяет интегральную кривую прямой.

Пример 6.1.

Дано: $y' = y - x^2, \qquad y(0) = 0$

Решить задачу Коши для дифференциального уравнения 1-го порядка методом Эйлера на отрезке длиной 1, число разбиений отрезка $n = 1, 2, 4, 5$.

Решение:

Приведем исходную задачу к виду: $y' = f(x, y), \qquad y(x_0) = y_0$.

Получим: $y' = y - x^2$, $y(0) = 0$, здесь $f(x, y) = y - x^2$

$n = 1$, $h = \frac{1-0}{1} = 1$ - шаг метода Эйлера

Итерация 0	$x_0 = 0$, $y_0 = 0$
Итерация 1	$x_1 = x_0 + h = 0 + 1 = 1$ $y_1 = y_0 + h \cdot f(x_0,y_0) = 0 + 1 \cdot (0 - 0^2) = 0$

$n = 2$, $h = \frac{1-0}{2} = 0.5$ - шаг метода Эйлера

Итерация 0	$x_0 = 0$, $y_0 = 0$
Итерация 1	$x_1 = x_0 + h = 0 + 0.5 = 0.5$ $y_1 = y_0 + h \cdot f(x_0,y_0) = 0 + 0.5 \cdot (0 - 0^2) = 0$
Итерация 2	$x_2 = x_1 + h = 0.5 + 0.5 = 1$ $y_2 = y_1 + h \cdot f(x_1,y_1) = 0 + 0.5 \cdot (0 - 0.5^2) = -0.125$

$n = 4$, $h = \frac{1-0}{4} = 0.25$ - шаг метода Эйлера

Итерация 0	$x_0 = 0$, $y_0 = 0$
Итерация 1	$x_1 = x_0 + h = 0 + 0.25 = 0.25$ $y_1 = y_0 + h \cdot f(x_0,y_0) = 0 + 0.25 \cdot (0 - 0^2) = 0$
Итерация 2	$x_2 = x_1 + h = 0.25 + 0.25 = 0.5$ $y_2 = y_1 + h \cdot f(x_1,y_1) = 0 + 0.25 \cdot (0 - 0.25^2) = -0.0156$
Итерация 3	$x_3 = x_2 + h = 0.5 + 0.25 = 0.75$ $y_3 = y_2 + h \cdot f(x_2,y_2) = -0.0156 + 0.25 \cdot (-0.0156 - 0.5^2) = -0.082$
Итерация 4	$x_4 = x_3 + h = 0.75 + 0.25 = 1$ $y_4 = y_3 + h \cdot f(x_3,y_3) = -0.0820 + 0.25 \cdot (-0.0820 - 0.75^2) = -0.2432$

$n = 5$, $h = \frac{1-0}{5} = 0.2$ - шаг метода Эйлера

Итерация 0	$x_0 = 0$,

	$y_0 = 0$
Итерация 1	$x_1 = x_0 + h = 0 + 0.2 = 0.2$ $y_1 = y_0 + h \cdot f(x_0,y_0) = 0 + 0.2 \cdot (0 - 0^2) = 0$
Итерация 2	$x_2 = x_1 + h = 0.2 + 0.2 = 0.4$ $y_2 = y_1 + h \cdot f(x_1,y_1) = 0 + 0.2 \cdot (0 - 0.2^2) = -0.008$
Итерация 3	$x_3 = x_2 + h = 0.4 + 0.2 = 0.6$ $y_3 = y_2 + h \cdot f(x_2,y_2) = -0.0080 + 0.2 \cdot (-0.0080 - 0.4^2) = -0.0416$
Итерация 4	$x_4 = x_3 + h = 0.6 + 0.2 = 0.8$ $y_4 = y_3 + h \cdot f(x_3,y_3) = -0.0416 + 0.2 \cdot (-0.0416 - 0.6^2) = -0.1219$
Итерация 5	$x_5 = x_4 + h = 0.8 + 0.2 = 1$ $y_5 = y_4 + h \cdot f(x_4,y_4) = -0.1219 + 0.2 \cdot (-0.1219 - 0.8^2) = -0.2743$

Результаты вычислений занесем в таблицу:

Число разбиений	**№ итерации**	**x**	**y**
n = 1 h = 1	0	0	0
	1	1	0
n = 2 h =0.5	0	0	0
	1	0.5	0
	2	1	-0.125
n = 4 h = 0.25	0	0	0
	1	0.25	0
	2	0.5	-0.0156
	3	0.75	-0.0820
	4	1	-0.2432
n = 5 h = 0.2	0	0	0
	1	0.2	0
	2	0.4	-0.008
	3	0.6	-0.0416
	4	0.8	-0.1219
	5	1	-0.2743

6.2. Модификации метода Эйлера

Более усовершенствованным является метод Эйлера с пересчетом, при котором сначала вычисляют промежуточные значения:

$$x_{i+\frac{1}{2}} = x_i + \frac{h}{2}$$

$$y_{i+\frac{1}{2}} = y_i + \frac{h}{2} \cdot f(x_i, y_i)$$

и находят значение направления поля интегральных кривых в средней точке:

$$f_{i+\frac{1}{2}} = f(x_{i+\frac{1}{2}}, y_{i+\frac{1}{2}}),$$

Затем полагают:

$$x_{i+1} = x_i + h$$

$$y_{i+1} = y_i + h \cdot f_{i+\frac{1}{2}}$$

Геометрическая интерпретация метода Эйлера с пересчетом представлена на рисунке 6.3.:

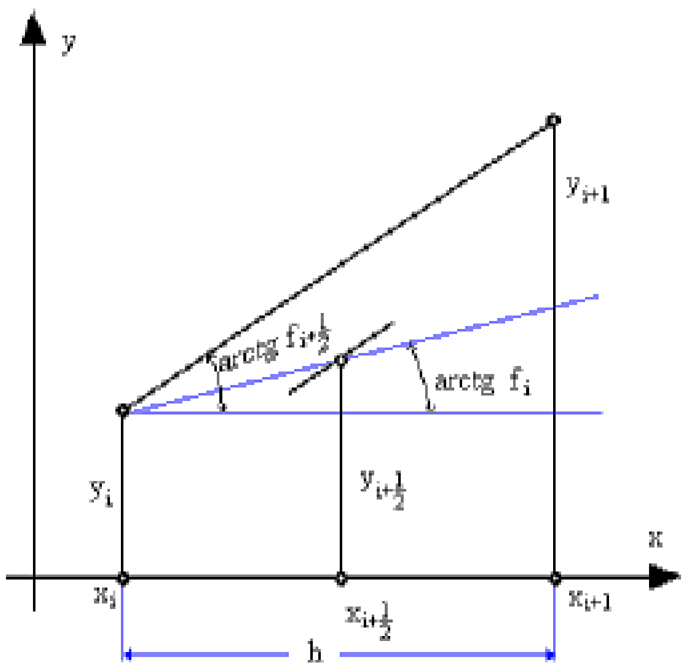

Рис. 6.3.

Другой модификацией метода является <u>метод Эйлера-Коши</u>, при котором сначала определяют «грубое приближение» решения: $\tilde{y}_{i+1} = y_i + h \cdot f(x_i, yY_i)$, исходя из которого находится направление поля интегральных кривых $\tilde{f}_{i+1} = f(x_{i+1}, \tilde{y}_{i+1})$.

Затем приближенно полагают:

$$x_{i+1} = x_i + h$$

$$y_{i+1} = y_i + h \cdot \frac{(f(x_i, y_i) + \tilde{f}_{i+1})}{2}$$

Геометрическая интерпретация метода Эйлера-Коши представлена на рисунке 6.4.:

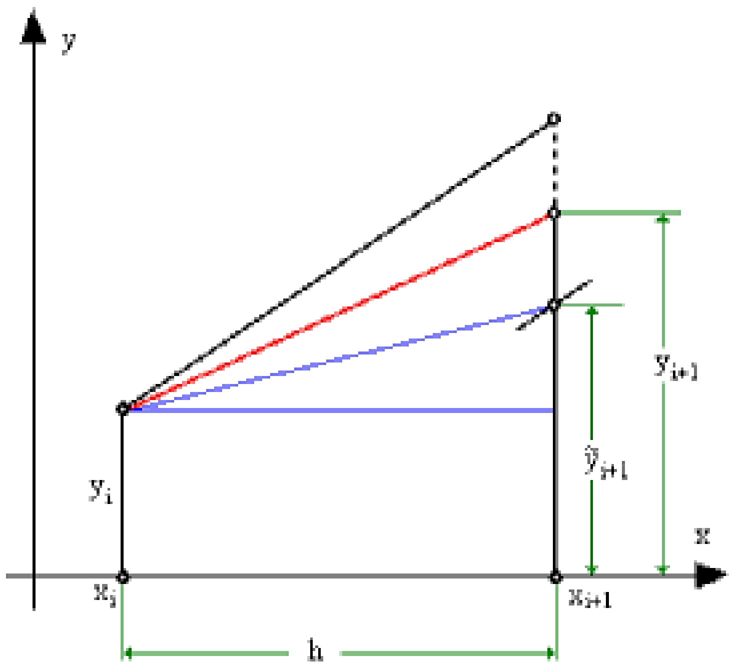

Рис. 6.4.

Погрешность модификаций метода Эйлера на каждом шаге есть величина порядка h^3.

6.3. Метод Рунге-Кутта

Согласно методу последовательные значения искомоц функции определяются по формуле:

$$x_{i+1} = x_i + h$$

$$y_{i+1} = y_i + \Delta y_i$$

где

$$\Delta y_i = \frac{1}{6}\cdot(k_1^{(i)} + 2\cdot k_2^{(i)} + 2\cdot k_3^{(i)} + k_4^{(i)})$$

$$k_1^{(i)} = h\cdot f(x_i, y_i) \qquad k_2^{(i)} = h\cdot f(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_1^{(i)}}{2})$$

$$k_3^{(i)} = h\cdot f(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_2^{(i)}}{2}) \qquad k_4^{(i)} = h\cdot f(x_i + h, y_i + k_3^{(i)})$$

Можно доказать, что погрешность этого метода на каждом шаге есть величина порядка h^5.

Метод Рунге-Кутта обладает значительной точностью, и, несмотря на свою трудоемкость, широко используется при численном решении дифференциальных уравнений с помощью вычислительной техники.

Пример 6.2.

Дано: $y' = y - x^2$, $y(0) = 0$

Решить задачу Коши для дифференциального уравнения 1-го порядка методом Рунге-Кутта на отрезке длиной 1, число разбиений отрезка $n = 5$.

Решение:

$n = 5$, $h = \frac{1-0}{5} = 0.2$ - шаг метода Рунге-Кутта

Итерация 0

$x_0 = 0$,

$y_0 = 0$

$k_1^0 = h \cdot f(x_0, y_0) = 0.2 \cdot(0 - 0^2) = 0$

$k_2^0 = h \cdot f(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{k_1^0}{2}) = 0.2 \cdot ((0 + 0) - (0 + 0.1)^2) = -0.002$

$k_3^0 = h \cdot f(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{k_2^0}{2}) = 0.2 \cdot ((0 - 0.001) - (0 + 0.1)^2) = -0.0022$

$k_4^0 = h \cdot f(x_0 + h, \quad y_0 + k_3^0) = 0.2 \cdot ((0 - 0.0022) - (0 + 0.2)^2) = -0.0084$

$\Delta y_0 = 1/6 \cdot (k_1^0 + 2k_2^0 + 2k_3^0 + k_4^0) = -0.0028$

Итерация 1

$x_1 = x_0 + h = 0 + 0.2 = 0.2$

$y_1 = y_0 + \Delta y_0 = 0 - 0.0028 = -0.0028$

$k_1^1 = h \cdot f(x_1, y_1) = 0.2\cdot (-0.0028 - 0.2^2) = -0.0086$

	$k_2^1 = h \cdot f\left(x_1 + \frac{h}{2}, y_1 + \frac{k_1^1}{2}\right) = 0.2 \cdot ((-0.0028 - 0.0043) - (0.2 + 0.1)^2) = -0.0194$ $k_3^1 = h \cdot f\left(x_1 + \frac{h}{2}, y_1 + \frac{k_2^1}{2}\right) = 0.2 \cdot ((-0.0028 - 0.0097) - (0.2 + 0.1)^2) = -0.0205$ $k_4^1 = h \cdot f(x_1 + h,\ \ y_1 + k_3^1) = 0.2 \cdot ((-0.0028 - 0.0205) - (0.2 + 0.2)^2) = -0.0367$ $\Delta y_1 = 1/6 \cdot (k_1^1 + 2k_2^1 + 2k_3^1 + k_4^1) = -0.0209$
Итерация 2	$x_2 = x_1 + h = 0.2 + 0.2 = 0.4$ $y_2 = y_1 + \Delta y_1 = -0.0028 - 0.0209 = -0.0237$ $k_1^2 = h \cdot f(x_2, y_2) = 0.2 \cdot (-0.0237 - 0.4^2) = -0.0367$ $k_2^2 = h \cdot f\left(x_2 + \frac{h}{2}, y_2 + \frac{k_1^2}{2}\right) = 0.2 \cdot ((-0.0237 - 0.0184) - (0.4 + 0.1)^2) = -0.0584$ $k_3^2 = h \cdot f\left(x_2 + \frac{h}{2}, y_2 + \frac{k_2^2}{2}\right) = 0.2 \cdot ((-0.0237 - 0.0292) - (0.4 + 0.1)^2) = -0.0606$ $k_4^2 = h \cdot f(x_2 + h,\ \ y_2 + k_3^2) = 0.2 \cdot ((-0.0237 - 0.0606) - (0.4 + 0.2)^2) = -0.0888$ $\Delta y_2 = 1/6 \cdot (k_1^2 + 2k_2^2 + 2k_3^2 + k_4^2) = -0.0633$
Итерация 3	$x_3 = x_2 + h = 0.4 + 0.2 = 0.6$ $y_3 = y_2 + \Delta y_2 = -0.0237 - 0.0633 = -0.0842$ $k_1^3 = h \cdot f(x_3, y_3) = 0.2 \cdot (-0.0842 - 0.6^2) = -0.0888$ $k_2^3 = h \cdot f\left(x_3 + \frac{h}{2}, y_3 + \frac{k_1^3}{2}\right) = 0.2 \cdot ((-0.0842 - 0.0444) - (0.6 + 0.1)^2) = -0.1237$ $k_3^3 = h \cdot f\left(x_3 + \frac{h}{2}, y_3 + \frac{k_2^3}{2}\right) = 0.2 \cdot ((-0.0842 - 0.0614) - (0.6 + 0.1)^2) = -0.1272$ $k_4^3 = h \cdot f(x_3 + h,\ \ y_3 + k_3^3) = 0.2 \cdot ((-0.0842 - 0.1272) - (0.6 + 0.2)^2) = -0.1703$ $\Delta y_3 = 1/6 \cdot (k_1^3 + 2k_2^3 + 2k_3^3 + k_4^3) = -0.1268$
Итерация 4	$x_4 = x_3 + h = 0.6 + 0.2 = 0.8$ $y_4 = y_3 + \Delta y_3 = -0.0842 - 0.1268 = -0.2111$ $k_1^4 = h \cdot f(x_4, y_4) = 0.2 \cdot (-0.2111 - 0.8^2) = -0.1702$ $k_2^4 = h \cdot f\left(x_4 + \frac{h}{2},\ y_4 + \frac{k_1^4}{2}\right) = 0.2 \cdot ((-0.2111 - 0.0851) - (0.8 + 0.1)^2) = -0.2212$

	$k_3^4 = h \cdot f(x_4 + \frac{h}{2},\ y_4 + \frac{k_2^4}{2}) = 0.2 \cdot ((-0.2111 - 0.1106) - (0.8 + 0.1)^2) = -0.2263$ $k_4^4 = h \cdot f(x_4 + h,\ \ y_4 + k_3^4) = 0.2 \cdot ((-0.2111 - 0.2263) - (0.8 + 0.2)^2) = -0.2875$ $\Delta y_4 = 1/6 \cdot (k_1^4 + 2k_2^4 + 2k_3^4 + k_4^4) = -0.2255$
Итерация 5	$x_5 = x_4 + h = 0.8 + 0.2 = 1$ $y_5 = y_4 + \Delta y_4 = -0.2111 - 0.2255 = -0.4366$

Результаты вычислений занесем в таблицу:

Число разбиений	**№ итерации**	**x**	**y**
n = 5	0	0	0
h = 0.2	1	0.2	-0.0028
	2	0.4	-0.0237
	3	0.6	-0.0842
	4	0.8	-0.2111
	5	1	-0.4366

ПРЕДМЕТНО-АЛФАВИТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Эльсгольц Л.Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. -М.: Наука, 1969.

2. А.Н. Тихонов, А.Б. Васильева, А.Г. Свешников. Дифференциальные уравнения. М. Наука, 1980 г.

3. Л.С. Бугров, С.М. Никольский. Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного. М. Наука, 1981 г. и послед. Издания.

4. Филиппов А.Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям. -М.: Наука, 1973