Глава 1

Дифференциальные формы

1.1 Алгебра дифференциальных форм

Определение 1.1. Ω^* – *алгебра над* $\mathbf{R}$, *порожденная символами* $dx_1, \ldots, dx_n$, *которые связаны соотношениями*

$$dx_i \wedge dx_i = 0,\ dx_i \wedge dx_j = -dx_j \wedge dx_i,\ i \neq j,$$

где значком $\wedge$ *обозначено произведение в алгебре.*

Как векторное пространство нод полем $\mathbf{R}$ алгебра Ω^* имееет базис

$$1,\ dx_i,\ dx_i \wedge dx_j, i < j,\ dx_i \wedge dx_j \wedge dx_k, i < j < k, \ldots, dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n.$$

Определение 1.2. *Пусть* $U \subset \mathbf{R}^n$ – *открытое множество.* C^k*-гладкие дифференциальные формы на* U – *это элементы алгебры*

$$\Omega^*(U) = \{C^k - \textit{гладкие функциии на } U\} \otimes_{\mathbf{R}} \Omega^*.$$

Таким образом, дифференциальная форма (q-форма) ω – это выражение вида

$$\sum_{i_1 < i_2 < \cdots < i_q} f_{i_1 \ldots i_q} dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_q},$$

где коэффициенты $f_{i_1 \ldots i_q}$ являются C^k -гладкими функциями. Ясно, что $\Omega^*(U)$ можно представить в виде прямой суммы

$$\Omega^*(U) = \bigoplus_{q=0}^{n} \Omega^q(U),$$

где $\Omega^q(U)$ состоит из C^k-гладких q-форм. Введем обозначение $deg\omega = q$. Будем называть это число степенью формы.

Определение 1.3. *Оператор внешнего дифференцирования* $d : \ \Omega^q(U) \to \Omega^{q+1}(U)$ *определяется следующим образом:*

1. *если* $f \in \Omega^0(U)$, *то* $df = \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i$;

2. *если* $\omega = \sum\limits_{i_1<i_2<\dots<i_q} f_{i_1\dots i_q} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_q}$, *то*

$$d\omega = \sum_{i_1<i_2<\dots<i_q} df_{i_1\dots i_q} \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_q}$$

Ядро оператора d составляют замкнутые формы, а образ оператора d составляют точные формы.

Пример 1.1. *Пусть* $\omega = f_1 dx_1 + f_2 dx_2 + f_3 dx_3$. *Найти* $d\omega$.

Решение. Имеем

$$d\omega = df_1 \wedge dx_1 + df_2 \wedge dx_2 + df_3 \wedge dx_3 = \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f_1}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial f_1}{\partial x_3} dx_3\right) \wedge dx_1 +$$
$$+ \left(\frac{\partial f_2}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial f_2}{\partial x_3} dx_3\right) \wedge dx_2 + \left(\frac{\partial f_3}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f_3}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial f_3}{\partial x_3} dx_3\right) \wedge dx_3 =$$
$$= \left(\frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2}\right) dx_1 \wedge dx_2 + \left(\frac{\partial f_3}{\partial x_2} - \frac{\partial f_2}{\partial x_3}\right) dx_2 \wedge dx_3 + \left(\frac{\partial f_3}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_3}\right) dx_1 \wedge dx_3$$

□

Определение 1.4. *Внешнее произведение двух дифференциальных форм, обозначаемое* $\tau \wedge \omega$, *определяется следующим образом: если* $\tau = \sum\limits_{j_1<j_2<\dots<j_s} g_{j_1\dots j_s} dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_s}$ *и* $\omega = \sum\limits_{i_1<i_2<\dots<i_q} f_{i_1\dots i_q} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_q}$, *то*

$$\tau \wedge \omega = \sum_{j_1<j_2<\dots<j_s} \sum_{i_1<i_2<\dots<i_q} g_{j_1\dots j_s} f_{i_1\dots i_q} dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_s} \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_q}.$$

Лемма 1.1. *Оператор* d *является антидифференцированием, т.е.*

$$d(\tau \wedge \omega) = (d\tau) \wedge \omega + (-1)^{deg\tau} \tau \wedge d\omega$$

Доказательство. Ввиду линейности достаточно доказать этот факт на одночленах вида $\tau = f dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_s}$ и $\omega = g dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_q}$. Имеем

$$\begin{aligned} d(\tau \wedge \omega) &= d(fg) \wedge dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_s} \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_q} = \\ &= g df \wedge dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_s} \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_q} + \\ &+ f dg \wedge dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_s} \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_q} = (d\tau) \wedge \omega + \\ &+ (-1)^{deg\tau} f dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_s} \wedge dg \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_q} = \\ &= (d\tau) \wedge \omega + (-1)^{deg\tau} \tau \wedge d\omega. \end{aligned}$$

□

Лемма 1.2. *d^2=0.*

Доказательство. В основе своей этот факт является следствием равенства смешанных производных. На функциях имеем

$$d^2 f = d\left(\sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i\right) = \sum_{i,j} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} dx_i \wedge dx_j = 0.$$

Здесб был использован тот факт, что $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$ и $dx_i \wedge dx_j = -dx_j \wedge dx_i$. На формах вида $\omega = g dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_q}$ имеем

$$d^2\omega = d^2(g dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_q}) = d(dg \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_q}) = 0.$$

Здесь были использованы предыдущие вычисления и предыдущая лемма. □

Пусть $U \subset \mathbf{R}^n$, $V \subset \mathbf{R}^m$ – открытые множества и $f : U \to V$ – отображение класса C^k. Такое отображение индуцирует отображение $f^* : \Omega^q(V) \to \Omega^q(V)$ следующим образом

$$f^*\left(\sum_{i_1 < i_2 < \cdots < i_q} g_{i_1 \ldots i_q} dy_{i_1} \wedge \cdots \wedge dy_{i_q}\right) = \sum_{i_1 < i_2 < \cdots < i_q} (g_{i_1 \ldots i_q} \circ f)\, df_{i_1} \wedge \cdots \wedge df_{i_q},$$

где $f(x_1, \ldots, x_n) = (f_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_m(x_1, \ldots, x_n))$.

Лемма 1.3. *Отображение f^* коммутирует с оператором d, т.е.*

$$df^*(\omega) = f^*(d\omega).$$

Доказательство. Имеем

$$\begin{aligned} &df^*\left(g_{i_1 \ldots i_q} dy_{i_1} \wedge \cdots \wedge dy_{i_q}\right) = d\left((g_{i_1 \ldots i_q} \circ f)\, df_{i_1} \wedge \cdots \wedge df_{i_q}\right) = \\ &= d(g_{i_1 \ldots i_q} \circ f) \wedge df_{i_1} \wedge \cdots \wedge df_{i_q} \end{aligned}$$

С другой стороны

$$\begin{aligned} f^* d\left(g_{i_1 \ldots i_q} dy_{i_1} \wedge \cdots \wedge dy_{i_q}\right) &= f^*\left(\sum_i \frac{\partial g_{i_1 \ldots i_q}}{\partial y_i} dy_i \wedge dy_{i_1} \wedge \cdots \wedge dy_{i_q}\right) = \\ = \sum_i \left(\frac{\partial g_{i_1 \ldots i_q}}{\partial y_i} \circ f\right) df_i \wedge df_{i_1} \wedge \cdots \wedge df_{i_q} &= d(g_{i_1 \ldots i_q} \circ f) \wedge df_{i_1} \wedge \cdots \wedge df_{i_q} \end{aligned}$$

□

1.2 Некоторые сведения из геометрии

Определение 1.5. *Пусть $U \subset \mathbf{R}^m$, $m \geqslant n$. - открытое множество. Сингулярным n-мерным кубом в U называется непрерывная функция $c : [0;1]^n \to U$, где $[0;1]^n = \underbrace{[0;1] \times ... \times [0;1]}_{n}$. Под сингулярным 0-мерным кубом в U будем понимать функцию $f : \{0\} \to U$.*

Сингулярный одномерный куб часто называется кривой. Стандартный n-мерный куб представляет собой отображение $I^n : [0;1]^n \to \mathbf{R}^n, \quad I^n(x) = x$. Пусть теперь c_1, c_2, $\ldots$, c_p - некоторый набор k-мерных сингулярных кубов в $\mathbf{R}^n$, $\lambda_1, ..., \lambda_p$ - произвольные действительные числа, при этом будем считать, что число λ_i сопоставлено с кубом c_i. Совокупность двух таких наборов будем называть k-мерной цепью в $\mathbf{R}^n$ и обозначать $C = \lambda_1 c_1 + \cdots + \lambda_p c_p$. Над цепями легко определить линейные операции. Если $C = \lambda_1 c_1 + \cdots + \lambda_p c_p$, $\tilde{C} = \mu_1 \tilde{c}_1 + \cdots + \mu_p \tilde{c}_p$, то

$$C + \tilde{C} = \lambda_1 c_1 + \cdots + \lambda_p c_p + \mu_1 \tilde{c}_1 + \cdots + \mu_p \tilde{c}_p$$

и

$$\alpha C = (\alpha \lambda_1)\, c_1 + \cdots + (\alpha \lambda_p)\, c_p.$$

Рассмотрим теперь понятие границы цепи. Пусть $c : [0;1]^n \to \mathbf{R}^n$ n-мерный сингулярный куб в $\mathbf{R}^n$. Для каждого индекса $i = 1, 2, \ldots, n$ определим два сингулярных $(n-1)$-мерных куба $I^n_{(i,0)}, I^n_{(i,1)}$ следующим образом. Для каждого $x \in [0;1]^{n-1}$ положим

$$I^n_{i,0}(x) = (x_1, \ldots, x_{i-1}, 0, x_i, \ldots, x_{n-1});$$
$$I^n_{i,1}(x) = (x_1, \ldots, x_{i-1}, 1, x_i, \ldots, x_{n-1}).$$

Назовем $I^n_{i,0}$ $(i,0)$-гранью I^nб а $I^n_{i,1}$ $(i,1)$-гранью и положим

$$\partial I^n = \sum_{i=1}^{n} \sum_{\alpha=0,1} (-1)^{i+\alpha} I^n_{i,\alpha}.$$

Для произвольного сингулярного n-мерного куба $c : [0;1]^n \to U$ мы определим сначала (i,α)-грань $c_{i,\alpha} = c \circ I^n_{i,\alpha}$ и затем положим

$$\partial c = \sum_{i=1}^{n} \sum_{\alpha=0,1} (-1)^{i+\alpha} c_{i,\alpha}.$$

Наконец определим границу сингулярной n-мерной цепи $\sum \lambda_i c_i$ формулой

$$\partial \left(\sum \lambda_i c_i \right) = \sum \lambda_i \partial c_i.$$

1.3 Интегрирование по цепям

Определение 1.6. *Пусть* $[0;1]^k \subset U$ *и* $\omega = f dx_1 \wedge \dots \wedge dx_k$ *– форма степени* k *на* U*. Интеграл от формы* ω *по* $[0;1]^k$ *определяется равенством*

$$\int\limits_{[0;1]^k} \omega = \int\limits_{[0;1]^k} f(x_1, \dots, x_k) dx_1 \dots dx_k.$$

Определение 1.7. *Пусть* $U \subset \mathbf{R}^m$ *и* ω *– форма* k*-ой степени на* U*. Если* c *– сингулярный* k*-мерный куб в* U*, то положим*

$$\int\limits_c \omega = \int\limits_{[0;1]^k} c^*\omega.$$

Если $c = \sum\limits_i \lambda_i c_i$ *– сингулярная* k*-мерная цепь на* U*, то положим*

$$\int\limits_c \omega = \sum_i \lambda_i \int\limits_{c_i} \omega.$$

Рассмотрим несколько частных случаев. Пусть $\omega = Pdx + Qdy + Rdz$ – форма первой степени на $U \subset \mathbf{R}^3$ и $c : [0;1] \to U$ – сингулярный одномерный куб (кривая в $\mathbf{R}^3$). Если $c(t) = \begin{pmatrix}\varphi(t) & \psi(t) & \chi(t)\end{pmatrix}$, то

$$\int\limits_c \omega = \int\limits_0^1 c^*\omega = \int\limits_0^1 (P(\varphi(t), \psi(t), \chi(t))\varphi'(t) + Q(\varphi(t), \psi(t), \chi(t))\psi'(t) +$$
$$+ R(\varphi(t), \psi(t), \chi(t))\chi'(t))\, dt.$$

Следовательно, интеграл от формы первой степени по одномерному сингулярному кубу – это криволинейный интеграл второго рода. Рассмотрим теперь интеграл от дифференциальной формы второй степени $\omega = Pdy \wedge dz + Qdz \wedge dx + Rdx \wedge dy$ по двумерному сингулярноу кубу $c : [0;1]^2 \to U$ (поверхности в $\mathbf{R}^3$). Если $c(u,v) = \begin{pmatrix}\varphi(u,v) & \psi(u,v) & \chi(u,v)\end{pmatrix}$, $u, v \in [0;1]$, то

$$\int\limits_c \omega = \iint\limits_{[0;1]^2} c^*\omega = \iint\limits_{[0;1]^2} (P(\varphi(u,v), \psi(u,v), \chi(u,v)) d\psi \wedge d\chi +$$
$$+ Q(\varphi(u,v), \psi(u,v), \chi(u,v)) d\chi \wedge d\varphi + R(\varphi(u,v), \psi(u,v), \chi(u,v)) d\varphi \wedge d\psi) =$$
$$= \iint\limits_{[0;1]^2} \det \begin{pmatrix} P & Q & R \\ x'_u & y'_u & z'_u \\ x'_v & y'_v & z'_v \end{pmatrix} dudv.$$

Таким образом, мы получаем поверхностный интеграл второго рода.

Теорема 1.1 (Стокс)**.** *Пусть* ω *– форма* $(k-1)$*-й степени на* U *и* C *– сингулярная* k*-мерная цепь в* U*. Тогда*

$$\int\limits_C d\omega = \int\limits_{\partial C} \omega.$$