1. Кратный интеграл Римана на n-мерном промежутке. Необходимое условие интегрируемости.

I=$I_{a,b}$={x □ R^n: $a_i \leqslant x_i \leqslant b_i$, i = 1,..,n} – n-мерный параллелепипед.
$a = (a_1,\dots,a_n), b = (b_1,\dots,b_n)$. Разбиение отрезков $[a_i, b_i]$ порождает разбиение параллелепипеда I = $\bigcup_{i=1}^{n} I_i$, где $\forall I_i$- тоже n-мерный параллелепипед, причем никакие 2 не имеют общих точек. Разбиение параллелепипеда $P = \{I_i\}_{i=1}^N$. Пусть $\xi_i \in I_i$, тогда если $\xi_i = (\xi_1,\dots,\xi_n)$, то пара (P,ξ)- разбиение с отмеченными точками. Число $(b_1 - a_1)(b_2 - a_2)\cdot\ldots\cdot(b_n - a_n) = \prod_{i=1}^N (b_i - a_i)$называется n-мерным объемом параллелепипеда I и обозначается $\mu(I)$. Если $P = \{I_i\}_{i=1}^N$- разбиение I, то $\mu(I) = \sum_{i=1}^N \mu(I_i)$. Пусть на параллелепипеде задана функция f: I$f: I \to R$и (P,ξ)- произвольное разбиение с отмеченными точками параллелепипеда I. $P = \{I_i\}_{i=1}^N$, $\xi_i = (\xi_1,\dots,\xi_n)$. Сумма $\sigma(f,P,\xi) = \sum_{i=1}^N f(\xi_i)\cdot\mu(I_i)$- интегральная сумма Римана функции f соответствующего разбиения(P,ξ). Число A называется интегралом Римана от функции $f: I \to R$по параллелепипеду I, если для $\forall\varepsilon > 0, \exists\delta = \delta(\varepsilon) > 0: \forall(P,\xi)$с отмеченными точками мелкостью <$\lambda(P) < \delta$следует что $| A - \sigma(f,P,\xi) | < \varepsilon$.

//--

Если $P = \{I_i\}_{i=1}^N$- разбиение I, то число $\lambda(P) = max(d(I_1),\dots,d(I_n))$, где $d(I_i) = supr_{x,y\in I_i}(\rho(x,y))$. Диаметр I_iназывается мелкостью разбиения I. Диаметр — самое большое расстояние между точками множества.

//--

A = $\int_I f(x)dx = \int_I \overset{N\text{инт}}{\cdots} \int_I f(x_1,\dots,x_n)dx_1,\dots,dx_n = \lim_{\lambda(P)\to 0}\sigma(f,P,\xi)$. Если для функции существует интегральная сумма Римана, то она интегрируема. R(I)-множество всех функций на I.

Th. необходимое условие интегрируемости.
Если $f \in R(I)$(интегрируема), то она ограничена на I.
Proof. Предположим f неограниченна. Тогда для $\forall P = \{I_i\}_{i=1}^N$разбиения$\exists I_j$параллелограмм на котором f неограниченна. Допустим наI_j, следовательно$\exists\{\xi_j^{(n)}\}_{n=1}^{+\infty}$последовательность, такая что $f(\xi_j^{(n)}) \to \infty$, при$n \to \infty$, следовательно $\sigma(f,P,\xi) = \sum_{i=1,i\neq j}^N f(\xi_i)\cdot\mu(I_i) + f(\xi_j^{(n)})\cdot\mu(I_j)$. Зафиксируем разбиение P. Тогда $\xi_1,\dots,\xi_j - 1, \xi_j + 1,\dots,\xi_n$- фиксированные точки. Тогда первое слагаемое число, а второе может быть неограниченно, значит стремиться к бесконечности.
Нарушение определения. Если $\exists$A = $\int_I f(x)dx$сл − но$\forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0: \forall(P,\xi), \lambda(P) < \delta$, сл − но $| \sigma(f,P,\xi) - A | < \varepsilon$при любом выборе $\xi = (\xi_1,\dots\xi_n)$, а при зафиксированном выше P это невозможно.

2. Множества лебеговой меры нуль. Критерий Лебега интегрируемости функции по Риману.

Назовём множество M имеющим меру ноль, если для любого положительного ε найдётся последовательность интервалов с суммарной длиной меньше ε, покрывающая M (это определение лебеговой меры ноль. Если счётное число интервалов заменить на конечное, то получится определение жордановой меры ноль). Очевидно, что любое счётное множество имеет меру ноль. Однако бывают и несчётные множества, имеющие меру ноль.
Th(Лебег) Положим $I \subset R^n$параллелепипед, и $f: I \to R$ограничена. Положим B — множество точек разрыва функции f. Тогда $f \in R(I)$<=> B — множество меры 0.
Опр. Множество $E \subset R^n$называется множеством меры нуль, если $\forall\varepsilon > 0\exists$пар − ды$\{I_1,\dots\}, I_j \in R^n$(его можно покрыть конечным числом пар-дов суммарного объема меньше ε)
$E \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} I_j, \sum_{j=1}^{+\infty} \mu(I_j) = \lim_{n\to\infty}\sum_{j=1}^n \mu(I_j) < \varepsilon$.
Th. Функция χ_cинтегрируема по множеству C <=> когда граница множества есть множество меры 0.
Proof. x- внутренняя точка множества C => существует окрестность $B(x,\varepsilon) \subset C$, тогда на $B(x,\varepsilon)$значение функцииχ_cравно 1, что означает непрерывность χ_cв x. Положим x - внутренняя точка множества $R^n \setminus C$, т. е. $\exists U(x,\varepsilon) \subset R^n \setminus C$=> $\chi_c |_{U(x,\varepsilon)} = 0$=> χ_c
непрерывна в x.
Положим x — граничная точка множества C, тогда для $\forall U(x,\varepsilon)$=> $U(x,\varepsilon) \cap C \neq 0, U(x,\varepsilon) \cap (R^n \setminus C) \neq 0$(пересекается и с C и с $R^n \setminus C$). Но тогда в $\forall U(x,\varepsilon)$существуют точки в которых χ_c=1 и χ_c= 0. Тогда предел $\lim_{y\to x}\chi_c(y)$не существует и x — точка разрыва. Итак, граница C — множество точек разрыва χ_c, тогда по критерию Лебега существует $\int_C \chi_c dx$<=> граница — множество меры нуль.

3. Критерий Дарбу интегрируемости вещественнозначной функции. Интеграл по множеству. Мера Жордана множества.

Th. Критерий интегрируемости Дарбу.
Положим $I \subset R^n$пар − д, $f: I \to R$интегрируема. $f \in R(I)$<=>f ограничена на I и $J_* = J^*$(нижний интеграл Дарбу равен верхнему.)
proof.
=> Положим $f \in R(I)$, тогда => f ограничена на I(по необходимому условию инт-ия)=> можно написать суммы Дарбу.
$J = \int_I f dx = \lim_{\lambda(P)\to 0}\sigma(f,P,\xi)$=> $\forall\varepsilon > 0\exists\delta > 0: \forall P, \lambda(P) < \delta$=> $|\sigma(f,P,\xi) - J| < \varepsilon$=> $J - \varepsilon < \sigma(f,P,\xi) < J + \varepsilon$, т.к.$J_* = \lim_{\lambda(P)\to 0} s(f,P)$= sup s(f,P). s(f,P) = inf σ(f,P,ξ) => для числа $\varepsilon > 0\exists\xi: s(f,P) + \varepsilon > \sigma(f,P,\xi)$(если нижнюю грань слегка увеличить, то найдется меньше!) => $J - 2\varepsilon < \sigma(f,P,\xi) - \varepsilon < s(f,P) \leqslant \sigma(f,P,\xi) < J + \varepsilon < J + 2\varepsilon$. Получается, что $| s(f,P) - J | < 2\varepsilon$=> $\lim_{\lambda(P)\to 0} s(f,P) = J$=> $J_* = J$.
Аналогично $J^* = J$.
<= Положим $J_* = J^* = J$и f ограничена.
$\underset{\text{при}\lambda(P)\to 0\text{стремитсяк}J}{s(f,P)} = inf\sigma(f,P,\xi) \leqslant \sigma(f,P,\xi) \leqslant supr\sigma(f,P,\xi) = \underset{\text{при}\lambda(P)\to 0\text{стремитсяк}J}{S(f,P)}$ Тогда по теореме о 2х миллиционерах$\sigma(f,P,\xi)$стремитсякJпри$\lambda(P) \to 0$. Т.о. $\lim_{\lambda(P)\to 0}\sigma(f,P,\xi) = J$=> $f \in R(I)$.

Положим $C \subset I \subset R^n$, I -параллелепипед, C- произвольное множество. $\chi_C(X) = \begin{matrix} 1, x \in C \\ 0, x \notin C \end{matrix}$- характеристическая функция(индикатор множества). Если$f: C \to R$, то $f \cdot \chi_C: I \to R, f(x)\cdot\chi_C(X) = \begin{matrix} f(x), x \in C \\ 0, x \notin C \end{matrix}$.
Определение. Если существует $\int_I f\cdot\chi_c dx$, то функция f — интегрируемая по множеству C, а значение интеграла$\int_I f\cdot\chi_c dx$называется интегралом от функции f по множеству C и обозначается $\int_C f dx$.
Опр. Ограниченное множество C, граница которого имеет меру нуль — измеримое по Жордану. Мерой этого множества называется $\mu(C) = \int_C f\chi_c(x)dx$.

4. Общие свойства интеграла.

Th1. Множество R(C) функций интегрируемых на C — линейное пространство относительно стандартных операций сложения и умножения на число.
Proof $f,g \in R(C)$. Пусть$C \subset I \subset R^n$. $\int_c (f+g)\,dx = \int_I \chi_c(f + g)dx$= $\lim_{\lambda(P)\to 0}\sum_{I_p\in P}\mu(I_p)\cdot\chi_c(\xi_i)(f(\xi_i) + g(\xi_i))$= $\lim_{\lambda(P)\to 0}\left(\sum_{I_p\in P}\mu(I_p)\cdot\chi_c(\xi_i)f(\xi_i) + \sum_{I_p\in R}\mu(I_p)\cdot\chi_c(\xi_i)g(\xi_i)\right) \underset{\text{т.к.обаlim}\exists}{=} \int_c f dx + \int_c g dx$=> $(f+g) \in R(C)$**.**
Умножение на число аналогично.
Th2. $\mu\{x \in C: f(x) \neq 0\} = 0$(множество всех точек в которых функция не равна 0 — множество меры 0), то $\int_C f dx = 0$.
Proof $C \subset I$**,** $\int_C f dx$= $\int_I f\cdot\chi_c dx$= $\lim_{\lambda(P)\to 0}\sum_{I_p\in P} f(\xi_{I_p})\chi_c(\xi_{I_p}) = 0$**(**на каждом параллелепипеде можно выбрать точку = 0)
На $I_p, \mu(I_p) \neq 0$всегда можно выбрать точку $\xi_{I_p} \in I_p$, где$f(\xi_{I_p}) = 0$.
Следствие1: Если $f, g \in R(C)$и$\mu\{x \in C: f(x) \neq g(x)\} = 0$, то$\int_C f dx$= $\int_C g dx$.
Следствие2: Если $\mu(C) = 0$, то $\int_C f dx = 0$
Proof. Предположим $g(x) \equiv 0$на C, то $\int_C g dx = 0$и т. к. $\mu\{x \in C: f(x) \neq g(x)\} = 0$, то срабатывает следствие 1.
Th3. Если $f \in R(E_1), f \in R(E_2)$, то
1) $f \in R(E_1 \cup E_2)$
2) если $\mu(E_1 \cap E_2) = 0$, то $\int_{E_1\cup E_2} f dx = \int_{E_1} f dx + \int_{E_2} f dx$
Proof1. По критерию Лебега множества точек разрыва ф-ии f на E_1и на E_2есть множество меры 0. => множество точек разрыва f на $E_1 \cup E_2$есть множество меры 0, => $f \in R(E_1 \cup E_2)$по Лебегу.
Proof2. $\chi_{E_1\cup E_2} = \chi_{E_1} + \chi_{E_2} - \chi_{E_1\cap E_2}$
Варианты:
1) $x \notin E_1, x \in E_2. 0 = 0$ 2)$x \in E_1, x \notin E_2. 1 = 1$
3)$x \notin E_1, x \notin E_2. 0 = 0$
4) $x \in E_1 \cap E_2. 1 = 1$
Поэтому:
$\int_{E_1\cup E_2} f dx \underset{E_1\cup E_2\subset I}{=} \int_I \chi_{E_1\cup E_2} f dx$= $\int_I \chi_{E_1} f dx + \int_I \chi_{E_2} f dx - \underbrace{\int_I \chi_{E_1\cap E_2} f dx}_{=0\text{т.к}\mu(E_1\cap E_2)}$= $\int_{E_1} f dx + \int_{E_2} f dx$
Th4. Если $f \in R(C)$, то $| f | \in R(C)$и $| \int_C f dx | \leqslant \int_C | f dx |$
Proof. По критерию Лебега $| f | \in R(C)$. $| \underbrace{\sum_{I_p\in P} f(\xi_{I_p})\mu(I_p)}_{\int_C f dx} | \leqslant \underbrace{\sum_{I_p\in P} | f(\xi_{I_p}) | \mu(I_p)}_{\int_C |f dx|}$.
Th5. Если $f(x) \geqslant 0$на C и $f \in R(C)$, то $\int_C f dx \geqslant 0$
Proof. $\underbrace{\sum_{I_p\in P} f(\xi_{I_p})\mu(I_p)}_{\geqslant 0} \geqslant 0$=>$\int_C f dx \geqslant 0$
Следствие. Если $f(x) \leqslant g(x)$на C и $f, g \in R(C)$, то $\int_C f dx \leqslant \int_C g dx$
Th6. Положим $f \in R(C)$, тогда она ограничена на C по необходимому условию. $m = \inf_c f, m = \operatorname{supr}_c f$, тогда $\exists\Theta \in [m,M]$: $\int_C f dx = \Theta\cdot\mu(C)$, более того, если C- компакт и связное множество, а f непрерывна на C, то $\exists\xi \in C$: $\int_C f dx = f(\xi)\cdot\mu(C)$.
Proof. $m \leqslant f(x) \leqslant M, \forall x \in C$=> $\int_C m dx \leqslant \int_C f(x)dx \leqslant \int_C M dx$=>$m\cdot\mu(C) \leqslant \int_C f(x)dx \leqslant M\cdot\mu(C)$**.** $m \leqslant \underbrace{\frac{\int_C f(x)dx}{\mu(C)}}_{\Theta} \leqslant M$=> $\Theta \in [m,M]$, $\int_C f dx = \Theta\cdot\mu(C)$**.**
$\int_C f dx = f(\xi)\cdot\mu(C)$**.** Если C — связно и компакт, то по Th Больцано-Коши $\exists\xi \in C: f(\xi) = \Theta$

5. Сведение кратного интеграла к повторному (теорема Фубини). Замена переменных в кратном интеграле.

Th. Фубини
Положим $A \subset R^n$- параллелепипед в R^n, $B \subset R^m$- параллелепипед в R^m. Положим $f \in R(A \times B), A \times B \subset R^{n+m}$- параллелепипед. И при $\forall$фиксированном$x \in A$ определена функция $g_x(y) = f(x,y)$на B. Положим (нижний интеграл Дарбу)J_*(x)=sup s(g_x,P_B), (верхний)J^*(x)=inf S(g_x,P_B), где P_B- разбиение параллелепипеда B. Тогда J_*(x), J^*(x)∈R(A) и $\int_{A\times B} f dxdy = \int_A J_*(x)dx \int_A J^*(x)dx$
Proof. Положим P_A- разбиение параллелепипеда A, PB — разбиение параллелепипеда B. $P_A = \{I_A\}$,(все параллелепипеды составляющие разбиение P_A), $P_B = \{I_B\}$,=> $P = \{I_A \times I_B\}$,разбиение A × B. Составим сумму Дарбу: $(m_{I_A\times I_B}(f) = \inf_{I_A\times I_B} f)$
$s(f,P) = \sum_{I_A\times I_B} m_{I_A\times I_B}(f)\cdot\mu(I_A \times I_B)$=$\sum_{I_A\times I_B} m_{I_A\times I_B}(f)\cdot\mu(I_A)\cdot\mu(I_B)$=$\sum_{I_A}\sum_{I_B} m_{I_A\times I_B}(f)\cdot\mu(I_A)\cdot\mu(I_B)$=$\sum_{I_A}\mu(I_A)\sum_{I_B}\mu_{I_A\times I_B}(f)\cdot\mu(I_B) \leq \sum_{I_A}\mu(I_A)\cdot\inf_{I_A} J_* = s(J_*,P_A)$

//--

$\forall x \in I_A \to m_{I_A\times I_B}(f) = \inf_{x,y\in I_A\times I_B} f(x,y) \leqslant \inf_{I_B} \underset{g_x(y)=f(x,y)\text{прификс.x}}{g_x(y)}$
$\sum_{I_B}\mu_{I_A\times I_B}(f)\cdot\mu(I_B) \leqslant \sum_{I_B}\inf_{I_B} g_x(y)\mu(I_B) = s(g_x,P_B) \leqslant J_*(x)$
Итак, для $\forall x \in I_A$: $\sum_{I_B} m_{I_A\times I_B}(f)\cdot\mu(I_B) \leqslant J_*(x)$сл − но $\sum_{I_B} m_{I_A\times I_B}(f)\cdot\mu(I_B) \leqslant \inf_{I_A} J_*$

//--

Итак, $s(f,P) \leqslant s(J_*,P_A) \leqslant S(J_*,P_A) \leqslant S(J_*,P_A) \leqslant S(f,P)$.
Если$\lambda(P) \to 0$, сл − но$\lambda(P_A) \to 0$. $\lim_{\lambda(P)\to 0} s(f,P) = \int_{A\times B} f dxdy = \lim_{\lambda(P)\to 0} S(f,P)$, => $\lim_{\lambda(P_A)\to 0} s(J_*,P_A)$(этонижнийинтегралДарбу) = $\lim_{\lambda(P_A)\to 0} S(J_*,P_A)$(аэтоверхний) = $\int_{A\times B} f dxdy$
По критерию Дарбу $J_* \in R(A)$, аналог. $J^* \in R(A)$. $\int_A J_*(x)dx = \int_{A\times B} f dxdy$.
Замена переменных.
Положим $U, G \subset R^n$- измеримые множества, $\varphi: U \to G$.Положим $\exists$множества $A_G \subset G, A_u \subset U$меры нуль, такие, что $U \setminus A_u, G \setminus A_G$- открытые множества, $\varphi: U \setminus A_u \to G \setminus A_G$.диффеоморфизм(отображение, которое имеет обратное и они оба имеют непрерывные производные) с ограниченным Якобианом. Тогда если $f \in \underset{\text{интегр.}}{R}(G)$, то$(f \circ \varphi)\cdot| \underset{\text{якобиан}}{det\varphi'} | \in R(U)$и имеет место $\int_G f dx = \int_U f \circ \varphi(t)\cdot| det\varphi'(t) | dt$
Пример.
$x = \rho\cos\varphi \; (\rho,\varphi) \to (x,y) \in R^2$
$y = \rho\sin\varphi \quad \rho \in [0,+\infty] \quad G = R^2. U$
$\varphi \in [0,2\pi]$
$$= [0,+\infty] \times [0,2\pi]\,\frac{\partial(x,y)}{\partial(\rho,\varphi)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial\rho} & \frac{\partial y}{\partial\rho} \\ \frac{\partial x}{\partial\varphi} & \frac{\partial y}{\partial\varphi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\rho\sin\varphi & \rho\cos\varphi \end{bmatrix}$$
$$= \rho \iint_G f(x,y)dxdy = \iint_U f(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi)\rho d\rho d\varphi$$

6. Векторные функции скалярного аргумента. Операции анализа над векторными функциями. Кривая. Основные понятия, связанные с кривой. Гладкие кривые. Натуральная параметризация. Касательная к кривой. Длина кривой.

Если каждому элементу $t \in T \subset R$поставлен в соответствие некоторый вектор, то говорят, что на T определена вектор-функция. Обозначается $\bar{a}(t)$.
Положим вектор-функция$\bar{a}(t)$определена на множестве $T \subset R$и t_0- предельная точка T. Вектор $\bar{A}$называется пределом $\bar{a}(t)$при $t \to t_0$, если $\lim_{t\to t_0} | \bar{a}(t) - \bar{A} | = 0$.
Th. Если $\bar{A} = \lim_{t\to t_0}\bar{a}(t)$, то $| \bar{A} | = \lim_{t\to t_0} | \bar{a}(t) |$
Proof. $\underbrace{0 \leqslant || \bar{a}(t) | - | \bar{A} || \leqslant | \bar{a}(t) - \bar{A} |}_{0} \underset{t\to t_0}{\to} 0$
Th.$\bar{A} = \lim_{t\to t_0}\bar{a}(t)$**,** $\bar{B} = \lim_{t\to t_0}\bar{b}(t)$**,** тогда 1)$\lim_{t\to t_0}(\bar{a}(t) + \bar{b}(t)) = \bar{A} + \bar{B}$2) $\lim_{t\to t_0}\underset{\text{скалярно}}{(\bar{a}(t),\bar{b}(t))} = \underset{\text{скалярно}}{(\bar{A},\bar{B})}$
Proof. $| (\bar{a}(t),\bar{b}(t)) - (\bar{A},\bar{B}) | = | (\bar{a}(t),\bar{b}(t)) - (\bar{a}(t),\bar{B}) + (\bar{a}(t),\bar{B}) - (\bar{A},\bar{B}) | \leq | (\bar{a}(t),\bar{b}(t) - \bar{B}) | + | (\bar{a}(t) - \bar{A},\bar{B}) | \leq | \underset{\to|\bar{A}|}{\bar{a}(t)} | \cdot | \underset{\to 0}{\bar{b}(t) - \bar{B}} | + | \underset{\to 0}{\bar{A} - \bar{a}(t)} | \cdot | \bar{B} | \underset{t\to t_0}{\to} 0$**.**
Определение. Пусть $\bar{a}(t)$определена в некоторой окрестности точки t_0, вектор $\bar{A}$называется производной вектор-функции $\bar{a}(t)$в точке t_0, если $\bar{A} = \lim_{t\to t_0}\frac{\bar{a}(t)(t_0+\Delta t) - \bar{a}(t_0)}{\Delta t}$. Обозначается$\bar{A} = \bar{a}'(t_0)$.
Th. Если $\exists\bar{a}'(t_0), \bar{b}'(t_0)$и вектор-функции $\bar{a}(t), \bar{b}(t)$непрерывные в точке t_0, то функция $f(t) = (\bar{a}(t), \bar{b}(t))$имеет производную в точкеt_0 и $f'(t_0) = (\bar{a}'(t_0),\bar{b}(t_0)) + (\bar{a}(t_0),\bar{b}'(t_0))$. Вектор функция $w(t) = [\bar{a}(t),\bar{b}(t)]$и существует производная в точке t_0и $w'(t_0) = [\bar{a}'(t_0),\bar{b}(t_0)] + [\bar{a}(t_0),\bar{b}'(t_0)]$.
Proof.

//--

Лемма. Если $\exists\bar{A} = \lim_{t\to t_0}\bar{a}(t), \exists\bar{B} = \lim_{t\to t_0}\bar{b}(t)$,то $\exists\lim_{t\to t_0}[\bar{a}(t),\bar{b}(t)]\cdot[\bar{A},\bar{B}]$
Proof. $| [\bar{a}(t),\bar{b}(t)] - [\bar{A},\bar{B}] | = | [\bar{a}(t),\bar{b}(t)] - [\bar{A},\bar{b}(t)] + [\bar{A},\bar{b}(t)] + [\bar{A},\bar{B}] | \leq | \underbrace{\bar{a}(t),\bar{A}}_{\to 0} | \cdot | \underbrace{\bar{b}(t)}_{\to|\bar{B}|} | + | \underbrace{\bar{A}}_{const} | \cdot | \underbrace{\bar{b}(t) - \bar{B}}_{\to 0} | \underset{t\to t_0}{\to} 0$

//--

$\frac{w(t_0+\Delta t) - w(t_0)}{\Delta t} = \frac{[\bar{a}(t_0+\Delta t),\bar{b}(t_0+\Delta t)][\bar{a}(t_0),\bar{b}(t_0)]}{\Delta t}$=(вычли и прибавили)
$\frac{[\bar{a}(t_0+\Delta t),\bar{b}(t_0+\Delta t)] - [\bar{a}(t_0),\bar{b}(t_0+\Delta t)] + [\bar{a}(t_0),\bar{b}(t_0+\Delta t)][\bar{a}(t_0),\bar{b}(t_0)]}{\Delta t}$=
(при$\Delta t \to 0$)=
$$\left[\underbrace{\frac{\bar{a}(t_0+\Delta t) - \bar{a}(t_0)}{\Delta t}}_{\bar{a}'(t_0)}, \underbrace{\bar{b}(t_0 + \Delta t)}_{\bar{b}(t_0)}\right] + \left[\bar{a}(t_0), \underbrace{\frac{\bar{b}(t_0+\Delta t) - \bar{b}(t_0)}{\Delta t}}_{\bar{b}'(t_0)}\right].$$

6.Часть 2

Th. Положим $\bar{a}(t)$имеет производную в точке t_0, функция g(t) имеет производную в точке t_0, тогда вектор-функция $\bar{b}(t) = g(t)\cdot\bar{a}(t)$меет производную в точке t_0и$\bar{b}'(t) = g'(t_0)\cdot\bar{a}(t_0) + g(t_0)\cdot\bar{a}'(t_0)$, аналогично определяются вторая, третья и т. д. производные.

Опр. Положим на промежутке$T \subset R$определена вектор-функция $\bar{r}(t)$. Положим она непрерывна на Т. При каждом значении параметра t будем откладывать вектор $\bar{r}(t)$от некоторой фиксированной точки О. При изменении t конец вектора опишет некоторое геометрическое место точек, которое называется непрерывной кривой. Функция $\bar{r}(t)$-параметрическое представление данной кривой. Обозначение: $\gamma: \bar{r}(t), t \in T$

Th. Положим$\lambda: [\alpha,\beta] \underset{\text{на}}{\rightarrow} [a,b]$строго монотонная функция. $\bar{r}(t)$-вектор-функция определенная на [a,b], $\bar{\rho}(\tau) = \bar{r}(\lambda(t)), \tau \in [\alpha,\beta]$. Пусть $\Gamma_1 = \{M: \exists t \in [a,b], \overline{OM} = \bar{r}(t)\}$, $\Gamma_2 = \{N: \exists t \in [\alpha,\beta], \overline{ON} = \bar{\rho}(\tau)\}$. Тогда $\Gamma_1 = \Gamma_2$

Proof. $M \in \Gamma_1 \Rightarrow \overline{OM} = \bar{r}(t), t \in [a,b]$=> т. к. строго монотонная $\exists!\, \tau \in [\alpha,\beta]: \lambda(\tau) = t$и НА. $\overline{OM} = \bar{r}(t) = \bar{r}(\lambda(\tau)) = \bar{\rho}(t)$=> $M \in \Gamma_2, \Gamma_1 \subset \Gamma_2$. $N \in \Gamma_2$=> $\overline{ON} = \bar{\rho}(\tau) = \bar{r}(\underset{t}{\lambda(\tau)}) = \bar{r}(t)$=> $N \in \Gamma_1$=> $\Gamma_1 = \Gamma_2$.

Опр. Если$x(t), y(t), z(t) \in C^k(T)$, то кривая $\gamma: \bar{r}(t), t \in T$называется кривой класса$C^k$.

Опр. Положим $\gamma: \bar{r}(t), t \in [a,b]$- кривая класса C^1. Число $s = \int_a^b |\bar{r}'(t)|\, dt$- длина кривой γ.

Опр.Кривая $\gamma: \bar{r}(t), t \in [a,b]$класса$C^1$называется гладкой, если $|\bar{r}'(t)| \neq 0, \forall t \in [a,b]$

Пусть γ-гладкая кривая. Пусть $\overline{OM_0} = \bar{r}(t_0)$, $\overline{OM} = \bar{r}(t_0 + \Delta t)$. Если $\Delta t \to 0$, то $|\bar{r}(t_0+\Delta t) - \bar{r}(t_0)| \to 0$в силу непрерывности $\bar{r}(t)$=> $M \to M_0$Т.к. $\exists \bar{r}'(t_0) = \lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{\bar{r}(t_0+\Delta t)-\bar{r}(t_0)}{\Delta t}$. Секущая займет свое предельное положение — касательную с напр. Вектором $\bar{r}'(t_0)$. Геом. Смысл $\bar{r}'(t_0)$- направляющий вектор касательной к кривой в точке M_0.

Th. Всякая гладкая кривая имеет такое параметрическое представление, в котором в качестве параметра выступает переменная длина дуги.

Proof. $\gamma: \bar{r}(t), t \in [a,b]$Гладкая, то $s(t) = \int_a^t |\bar{r}'(\xi)|\, d\xi$-интеграл с переменным верхним пределом. => по Th о дифференцируемости интеграла с переменным верхним пределом $s(t) \in C^1[a,b]$, $s'(t) = |\bar{r}'(t)|\, dt > 0$при$\forall t \in [a,b]$=> s(t) строго возрастает. => существует обратная t(s), которая тоже возрастает и принадлежит $C^1[0, \underset{\text{длина}}{L}]$, где$L = \int_a^b |\bar{r}'(t)|\, dt$, сл-но вектор-функция $\bar{\rho}(s) = \bar{r}(t(s))$определяет кривую$\gamma$.

$s(t) = \int_a^t |\bar{r}'(\tau)|\, d\tau$- переменная длина дуги кривой. $s'(t) = |\bar{r}'(t)|$Для любой параметризации.

9. Полилинейные формы. Базис в пространстве полилинейных форм.

V-линейное пространство. $V^k = \underbrace{V\times\ldots\times V}_{k-\text{кратное}}$. Функция $T: V^k \to R$, удовлетворяющая условиям 1),2) – ПОЛИЛИНЕЙНАЯ ФОРМА ПОРЯДКА К или ТЕНЗОР ПОРЯДКА К.

1) линейность по каждому аргументу$T(v_1,\ldots,v_i,v'_i,\ldots v_k) = T(v_1,\ldots,v_i,\ldots v_k) + T(v_1,\ldots v'_i,\ldots,v_k), \forall i$ 2) линейность по умножению на число$T(v_1,\ldots,\lambda v_i,\ldots v_k) = \lambda T(v_1,\ldots,v_i,\ldots v_k), \forall i,\lambda$

Операции сложения и умножения на число превращают множество полилинейных форм одного порядка в линейное пространство $F^k(V)$.

Положим $T \in F^k(V), S \in F^l(V)$, тогда функция $T\otimes S$определяемая равенством $(T\otimes S)(v_1,\ldots,v_k,v_{k+1},\ldots,v_{k+l}) = T(v_1,..,v_k)\cdot S(v_{k+1},\ldots,v_{k+l})$тоже полилинейная. Называется тензорным произведением. Не коммутативно!!!

Свойства:

1)$(T_1+T_2)\otimes S = T_1\otimes S + T_2\otimes S$

2)$T\otimes(S_1+S_2) = T\otimes S_1 + T\otimes S_2$

3)$(\lambda S)\otimes T = S\otimes(\lambda T) = \lambda\cdot(S\otimes T)$

V – Л.П. Dim V=n, V*-сопряженное(пространство линейных форм на V)$\forall f \in V^*, x \in V, (e_1,\ldots,e_n)$- базис в V: $x = x^1\cdot e_1 + .. + x^n\cdot e_n$

$f(x) = x^1 \underset{a_1}{f(e_1)} + \ldots + x^n \underset{a_n}{f(e_n)}$($x^1,\ldots$−координаты, $e^j \in V^*, e^j(x) = x_j$)$= \sum_{j=1}^n a_j e^j(x)$

=> $\forall f \in V^*$есть линейная комбинацияe^j. Если$\sum_{j=1}^n a_j e^j(x) \equiv 0$, $x = e_s$=> $e^j(e_s) = \delta_{is} = \begin{matrix}1, j = s\\ 0, j \neq s\end{matrix}$=> $\sum_{j=1}^n a_j e^j(e_s) = 0$только при $a_s = 0 \forall s$. $dimV^* = dimV = n$, e^j − базисвV^*.

Базис $e_1,..e_n$вV^*удовлетворяющий $e^j(e_i) = \delta_{ij}$называется взаимным к базису $e_1,\ldots,e_n$.

Th. Пусть $T \in \underset{\text{полилинейная}}{F^k(V)}$, $e_1,..,e_n$-базис в V, $e^1,..,e^n$-взаимный базис в V*, т. е. $e^i(e_j) = \delta_{ij} = \begin{matrix}1, i = j\\ 0, i \neq j\end{matrix}$, тогда $e^{i_1}\otimes e^{i_2}\otimes\ldots\otimes e^{i_k}, 1 \leqslant i_1,..,i_k \leqslant n$- базис в $F^k(V)$, $dimF^k(V) = n^k$

proof.

1) можно разложить. $v_i \in V$=>

$v_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}ej$=>$T(v_1,\ldots,v_k) = T(\sum_{j_1=1}^n a_{1j_1}e_{j_1}, \sum_{j_2=1}^n a_{2j_2}e_{j_2},\ldots,\sum_{j_k=1}^n a_{kj_k}e_{j_k})$=(линейность)=$\sum_{j_1,j_2,\ldots,j_k=1}^n a_{1j_1}a_{2j_2}\ldots a_{kj_k}\underbrace{T(e_{j_1},\ldots,e_{j_k})}_{b_{j_1,\ldots,j_k}} = \sum_{j_1,\ldots,j_k=1}^n b_{j_1\ldots j_k}\cdot e^{j_1}(v_1)e^{j_2}(v_2)\ldots e^{j_k}(v_k)$ =/* $a_{1j_1} = e^{j_1}(v_1) = e^{j_1}(\sum_{i=1}^n a_{1i}e_i) = \sum_{i=1}^n a_{1i}\underbrace{e^{j_1}(e_i)}_{\delta_{ij_1}} = a_{1j_1}$ */=

(тутkсумм. тензоры$j_1,\ldots,j_k$ = 1навекторахv) $\sum_{j_1,..,j_k=1}^n b_{j_1,\ldots,j_k}\cdot e^{j_1}\otimes..\otimes e^{j_k}(v_1,..,v_k)$

2)лнз

Положим $\sum_{j_1,..,j_k=1}^n b_{j_1,\ldots,j_k}\cdot e^{j_1}\otimes..\otimes e^{j_k}(v_1,..,v_k) \equiv 0$.

Вычислим на векторах$e_{s_1},\ldots,e_{s_k}$: $0 = \sum_{j_1,..,j_k=1}^n b_{j_1,\ldots,j_k}\cdot e^{j_1}\otimes..\otimes e^{j_k}(e_{s_1},\ldots,e_{s_k}) = \sum_{j_1,..,j_k=1}^n b_{j_1,\ldots,j_k}\underbrace{e^{j_1}(e_{s_1})}_{\delta_{j_1s_1}}\ldots\underbrace{e^{j_k}(e_{s_k})}_{\delta_{j_ks_k}}$[=]=

1 только при $j_1 = s_1,\ldots,j_k = s_k$, =0 во всех остальных случаях. [=]$b_{s_1\ldots s_k}$

10. Альтернация и ее свойства. Антисимметрические тензоры.

V-линейное пространство. $V^k = \underbrace{V\times\ldots\times V}_{k-\text{кратное}}$. Функция $T: V^k \to R$, удовлетворяющая условиям 1),2) – ПОЛИЛИНЕЙНАЯ ФОРМА ПОРЯДКА К или ТЕНЗОР ПОРЯДКА К.

1) линейность по каждому аргументу$T(v_1,\ldots,v_i,v'_i,\ldots v_k) = T(v_1,\ldots,v_i,\ldots v_k) + T(v_1,\ldots v'_i,\ldots,v_k), \forall i$ 2) линейность по умножению на число$T(v_1,\ldots,\lambda v_i,\ldots v_k) = \lambda T(v_1,\ldots,v_i,\ldots v_k), \forall i,\lambda$

Операции сложения и умножения на число превращают множество полилинейных форм одного порядка в линейное пространство $F^k(V)$.

Опр. К-тензор $w \in F^k(V)$называется антисимметрическим, если $w(v_1,..,v_i,\ldots,v_j,\ldots v_k) = -w(v_1,\ldots,v_j,\ldots,v_i,\ldots,v_k)$(меняет знак при перестановке ∀2-х векторов). Обозначим $\Lambda^k(V)$-множество всех антисимметрических тензоров. Это подпространство $F^k(V)$.

Опр. Положим $T \in F^k(V)$. Определим новый k-тензор Alt(T)(альтернация) следующим равенством: $Alt(T) = \frac{1}{k!}\sum_{\sigma\in S_k} sgn\sigma\cdot T(v_{\sigma(1)},\ldots,v_{\sigma(k)})$, где σ- перестановка чисел 1,2...,k, S_k- множество всех таких перестановок. (sgn- сигнум. =$(-1)^k$, k-кол-во транспозиций. ЧЕТНОСТЬ)

Th. Если $T \in F^k(V)$, то$Alt(T) \in \Lambda^k(V)$(антисимметрическая).

Proof. Положим (i,j)-транспозиция, $\sigma \in S^k$(любая перестановка), $\sigma' = \sigma(i,j)$. Рассмотрим выражение $sgn\sigma\cdot T(v_{\sigma(1)},..,v_{\sigma(j)},\ldots,v_{\sigma(i)},..,v_{\sigma(k)}) = -sgn\sigma'\cdot T(v_{\sigma'(1)},..,v_{\sigma'(i)},\ldots,v_{\sigma'(j)},..,v_{\sigma'(k)})$. (i,j) не затрагивает индексы отличные от i,j. => $Alt(T)(v_1,\ldots,v_j,\ldots,v_i,..,v_k)$= $\frac{1}{k!}\sum_{\sigma\in S_k}$ -$sgn\sigma T(v_{\sigma'(1)},..,v_{\sigma'(i)},..,v_{\sigma'(j)},..,v_{\sigma'(k)})$= $-Alt(T)(v_1,\ldots,v_i,\ldots,v_j,..,v_k)$=> $Alt(T) \in \Lambda^k(V)$

Th. Если $w \in \Lambda^k(V)$, то$Alt(w) = w, Alt(Alt(T)) = Alt(T)$.

Proof. Т.к. $w(v_1,..,v_j,\ldots,v_i,\ldots,v_k) = -w(v_1,..,v_i,..,v_j,..,v_k)$Т.к. ∀перестановка σесть произведение транспозиций, то $w(v_{\sigma(1)},..,v_{\sigma(k)}) = (-1)^k = sgn\sigma$;

$Alt(W)(v_1,..,v_k)$=

$\frac{1}{k!}\sum_{\sigma\in S_k} sgn\sigma\cdot w(v_{\sigma(1)},..,v_{\sigma(k)})$=

$\frac{1}{k!}\sum_{\sigma\in S_k} \underbrace{sgn\sigma\cdot sgn\sigma}_{=1} w(v_1,..,v_k)$=

$\frac{1}{k!}\cdot k!\, w(v_1,..,v_k)$=$w(v_1,..,v_k)$.

Опр. Положим $w \in \Lambda^k(V), \eta \in \Lambda^s(V)$. $w\wedge\eta = \frac{(k+s)!}{(k!\cdot s!)}\cdot Alt(w\otimes\eta) \in \Lambda^{k+s}(V)$. (k+s)-тензор$w\wedge\eta$называется **внешним произведением** wиη.

Свойства альтернации:

$Alt(T_1+T_2) = Alt(T_1) + Alt(T_2); Alt(\lambda T) = \lambda Alt(T)$ $Alt(T_1 + T_2) = \frac{1}{k!}\sum_{\sigma\in S_k} sgn(T_1+T_2)(v_{\sigma(1)},..,v_{\sigma(k)})$=

$\frac{1}{k!}\sum_{\sigma\in S_k} sgn\sigma T_1(v_{\sigma(1)},..,v_{\sigma(k)})$+

$\frac{+1}{k!}\sum_{\sigma\in S_k} sgn\sigma T_2(v_{\sigma(1)},..,v_{\sigma(k)})$=$(Alt(T_1) + Alt(T_2))(v_1,..,v_k)$.

Th Пусть $T \in F^l(V), S \in F^k(V)$, если$Alt(S) = 0$тогда 1)$Alt(T\otimes S) = Alt(S\%) = 0$, 2) $Alt(Alt(T_1\otimes T_2)\otimes T_3) = Alt(T_1\otimes T_2\otimes T_3)$3) Если $w \in \Lambda^k(V), \eta \in \Lambda^l(V), \Theta \in \Lambda^m(V)$, то $(w\wedge\eta)\wedge\Theta = \frac{(k+l+m)!}{k!l!m!}, Alt(w\otimes\eta\otimes\Theta) = w\wedge(\eta\wedge\Theta)$

Proof 1) 1) Положим $\sigma \in S_{k+l}, \sigma(k+1) = k+1,\ldots,\sigma(k+l) = k+l$. Обозначим G-множество всех таких перестановок. Найдем $\sum_{\sigma\in G^2} sgn\sigma(\underset{\in F^{k+l}}{S\otimes T})(v_{\sigma(1)},..,v_{\sigma(k)},v_{k+1},\ldots,v_{k+l})$= $\sum_{\sigma\in G} \underset{k!\cdot Alt(S)=0}{sgn\sigma S(v_{\sigma(1)},..,v_{\sigma(k)})}T(v_{k+1},..,v_{k+l}) = 0$. 2) Положим $\sigma_0 \in S_{k+l}, \sigma_0 \notin G$. Рассмотрим множество $G_{\sigma_0} = \{\sigma\sigma_0: \sigma \in G\}$Они попарно пересекаются(иначе совпадали бы, т. к. ПСК). Найдем $\sum_{\sigma'\in G\sigma_0} sgn\sigma'(S\otimes T)(v_{\sigma'},v_{\sigma'(k)},..,v_{\sigma'(k+l)}) =$

//--

$\sigma' = \sigma\cdot\sigma_0$, где$\sigma \in G$.Положим $w_1 = v_{\sigma_0(1)}, w_2 = v_{\sigma_0(2)},\ldots,w_{k+l} = v_{\sigma_0(k+l)}$

//--

= $\sum_{\sigma'\in G} sgn\sigma_0 sgn\sigma(S\otimes T)(W_{\sigma(1)},..,W_{\sigma(k)},W_{(k+1)},..,W_{k+l}) = 0$3) т. к. $S_{k+l} = G \cup \sigma_1 G \cup\ldots$и множества попарно пересекаются => $Alt(S\otimes T)(v_1,..,v_{k+l}) = \frac{1}{(k+l)!}\sum_{\sigma\in S_{k+l}} sgn\sigma(S\otimes T)(v_{\sigma(1)},..,v_{\sigma(k+l)}) = 0$

Proof 2) Обозначим $S = Alt(T_1\otimes T_2) - T_1\otimes T_2$=> $Alt(S) = Alt(T_1\otimes T_2) - Alt(T_1\otimes T_2) = 0$. $0 = Alt(S\otimes T_3) = Alt((Alt(T_1\otimes T_2) - T_1\otimes T_2)\otimes T_3)$= $Alt(Alt(T_1\otimes T_2)\otimes T_3 - T_1\otimes T_2\otimes T_3)$= $Alt(Alt(T_1\otimes T_2)\otimes T_3) - Alt(T_1\otimes T_2\otimes T_3)$=> $Alt(Alt(T_1\otimes T_2)\otimes T_3) = Alt(T_1\otimes T_2\otimes T_3)$

Proof3)$w \in \Lambda^k(V), \eta \in \Lambda^l(V), \Theta \in \Lambda^m(V)(w\wedge\eta)\wedge\Theta \underset{\text{поопр.}}{=} \frac{(k+l+m)!}{(k+l)!m!}\cdot Alt((w\wedge\eta)\otimes\Theta)$= $\frac{(k+l+m)!}{(k+l)!m!}\cdot Alt([\frac{(k+l)!}{k!l!}\cdot Alt(w\otimes\eta)]\otimes\Theta)$= $\frac{(k+l+m)!}{k!l!m!}\cdot Alt(Alt(w\otimes\eta)\otimes\Theta)$=**(п.2)**= $\frac{(k+l+m)!}{k!l!m!}\cdot Alt(w\otimes\eta\otimes\Theta)$

8. Параметризованная поверхность. Первая квадратичная форма поверхности.

Пусть $\bar{r}(u,v)$- непрерывная вектор-функция заданная на области $D \subset R^n$. При каждых значениях параметров u,v будем откладывать вектор $\bar{r}$от некоторой фиксированной точки О. При изменении параметров в области D конец вектора опишет некоторое геометрическое место точек, называемую параметрической поверхностью. Вектор-функция — параметрическое представление.$\Sigma: \bar{r}(u,v), (u,v) \in D$. Не единственное.$\bar{r}(t) = \bar{r}(u(t),v(t))t \in [a,b], u(t),v(t) \in C[a,b]$. Геометрическое место точек, описывающих вектор-функцию $\bar{r}(t)$называется кривой на поверхности. Положим $u,v \in C^1[a,b]$(диф.)=> $\bar{r}'(t) = \bar{r}'_u\cdot u' + \bar{r}'_v\cdot v'$. Предположим в данной точке поверхности$[\bar{r}'_u, r'_v] \neq 0$ => $\bar{r}'_u, r'_v$не коллинеарны. => они определяют плоскость. $\bar{r}'(t)$ ↑↑этой плоскости. Для всех кривых через точку M касательный вектор раскладывается по $\bar{r}'_u, r'_v$. Плоскость, определяемая$\bar{r}'_u, r'_v$ ↑↑касательные вектора ко всевозможным кривым на данной поверхности, лежащих через точку M. Такая плоскость называется касательной к поверхности в данной точке M. $|\bar{r}'(t)|^2$= $(\bar{r}'(t),\bar{r}'(t))$= $(\bar{r}'_u\cdot u' + \bar{r}'_v\cdot v', \bar{r}'_u\cdot u' + \bar{r}'_v\cdot v')$= $\underbrace{(\bar{r}'_u,\bar{r}'_u)}_{g_{11} = E = (\bar{r}'_u,\bar{r}'_u)}(u')^2 2\underbrace{(\bar{r}'_u,\bar{r}'_v)}_{g_{12} = g_{12} = F = (\bar{r}'_u,\bar{r}'_v)}\cdot u'v' + \underbrace{(\bar{r}'_v,\bar{r}'_v)}_{g_{22} = G = (\bar{r}'_v,\bar{r}'_v)}(v')^2$=$E(u')^2 + 2F\cdot u'v' + G(v')^2$. $s(t) = \int_a^t(\bar{r}'(\tau))\,d\tau$=> $ds^2(t) = |\bar{r}'(t)|^2\,dt^2$=> $ds^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$- **первая квадратичная форма поверхности**.$du^2 + dv^2 \neq 0$=> $ds > 0$по критерию Сильвестра $EG - F^2 > 0$

7. Кривизна кривой. Кручение кривой. Репер Френе. Формулы Френе.

Положим $\gamma: \bar{r}(s), s \in [0,h]$- гладкая кривая, s-переменная длина. $s'(t) = |\bar{r}'(t)|$=> $|\bar{r}'(s)| = 1$. Обозначим $1 = s(s) = |\bar{r}'(s)|$. Положим $\bar{\tau} = \mathring{\bar{r}}(s)$=>$|\bar{\tau}| = 1$=> $(\bar{\tau},\bar{\tau}) = 1$=>$(\mathring{\bar{\tau}},\bar{\tau}) + (\bar{\tau},\mathring{\bar{\tau}}) = 0$=> $(\bar{\tau},\mathring{\bar{\tau}}) = 0$=> если в данной точке кривой $\mathring{\bar{\tau}} \neq 0$, то $\bar{\tau} \perp \mathring{\bar{\tau}}$. Обозначим $k = |\ddot{\bar{\tau}}|$, а $\bar{n} = \frac{|\ddot{\bar{\tau}}|}{k}$=> $\mathring{\bar{\tau}} = k\cdot\bar{n}$(k-кривизна). Уравнение Френе. Геометрический смысл — скорость поворота касательной. Вектор$\bar{n}$- вектор главной нормали. Т.к. $\bar{\tau} \perp \bar{n}$то они определяют плоскость, называемую соприкасающейся. Вектор $\bar{b} = [\bar{\tau},\bar{n}]$называется вектором бинормали кривой. Плоскость, определяемая векторами $\bar{b},\bar{n}$называется нормальной. Плоскость, определяемая векторами $\bar{b},\bar{\tau}$называется спрямляющая.

$\bar{b} = [\bar{\tau},\bar{n}]$, $\mathring{\bar{b}} = [\mathring{\bar{\tau}},\bar{n}] + [\bar{\tau},\mathring{\bar{n}}]$=

/* $\mathring{\bar{\tau}} = \ddot{\bar{r}}, \bar{n} = \frac{\ddot{\bar{r}}}{k}$ (коллинеарны,произведение=0) */=$\mathring{\bar{b}} = [\bar{\tau},\mathring{\bar{n}}]$Т.к. $|\bar{n}| = 1$=>$(\bar{n},\mathring{\bar{n}}) = 0$, $\bar{\tau} \perp \bar{n}$=> $\bar{n} \uparrow\uparrow \mathring{\bar{b}}$, =>$\mathring{\bar{b}} = -\phi\mathring{\bar{n}}$, где$\phi$-кручение кривой, если он равен 0 => плоская.$\bar{n} = [\bar{b},\bar{\tau}]$,

$\mathring{\bar{n}} = [\mathring{\bar{b}},\bar{\tau}] + [\bar{b},\mathring{\bar{\tau}}]$= $[-\phi\cdot\bar{n},\bar{\tau}] + [\bar{b},k\cdot\bar{n}]$=$-\phi[\bar{n},\bar{\tau}] + k[\bar{b},\bar{n}]$= $-\phi\bar{b} - k\bar{\tau}$.

$\mathring{\bar{\tau}} = k\cdot\bar{n}$

$\mathring{\bar{b}} = -\phi\cdot\bar{n}$ - уравнения Френе

$\mathring{\bar{n}} = \phi\cdot\bar{b} - k\cdot\bar{\tau}$

11. Внешнее произведение тензоров и его свойства

Опр. Положим $w \in \Lambda^k(V), \eta \in \Lambda^s(V)$. $w\wedge\eta = \frac{(k+s)!}{(k!\cdot s!)}\cdot Alt(w\otimes\eta) \in \Lambda^{k+s}(V)$. (k+s)-тензор$w\wedge\eta$называется **внешним произведением** wиη. **Th** Пусть $T \in F^l(V), S \in F^k(V)$, если$Alt(S) = 0$тогда 1)$Alt(T\otimes S) = Alt(S\%) = 0$, 2) $Alt(Alt(T_1\otimes T_2)\otimes T_3) = Alt(T_1\otimes T_2\otimes T_3)$3) Если $w \in \Lambda^k(V), \eta \in \Lambda^l(V), \Theta \in \Lambda^m(V)$, то $(w\wedge\eta)\wedge\Theta = \frac{(k+l+m)!}{k!l!m!}, Alt(w\otimes\eta\otimes\Theta) = w\wedge(\eta\wedge\Theta)$

Proof 1) 1) Положим $\sigma \in S_{k+l}, \sigma(k+1) = k+1,\ldots,\sigma(k+l) = k+l$. Обозначим G-множество всех таких перестановок. Найдем $\sum_{\sigma\in G^2} sgn\sigma(\underset{\in F^{k+l}}{S\otimes T})(v_{\sigma(1)},..,v_{\sigma(k)},v_{k+1},\ldots,v_{k+l})$= $\sum_{\sigma\in G} \underset{k!\cdot Alt(S)=0}{sgn\sigma S(v_{\sigma(1)},..,v_{\sigma(k)})}T(v_{k+1},..,v_{k+l}) = 0$. 2)

Положим $\sigma_0 \in S_{k+l}, \sigma_0 \notin G$. Рассмотрим множество $G_{\sigma_0} = \{\sigma\sigma_0: \sigma \in G\}$Они попарно пересекаются(иначе совпадали бы, т. к. ПСК). Найдем $\sum_{\sigma'\in G\sigma_0} sgn\sigma'(S\otimes T)(v_{\sigma'},v_{\sigma'(k)},..,v_{\sigma'(k+l)}) =$

//--

$\sigma' = \sigma\cdot\sigma_0$, где$\sigma \in G$.Положим $w_1 = v_{\sigma_0(1)}, w_2 = v_{\sigma_0(2)},\ldots,w_{k+l} = v_{\sigma_0(k+l)}$

//--

= $\sum_{\sigma'\in G} sgn\sigma_0 sgn\sigma(S\otimes T)(W_{\sigma(1)},..,W_{\sigma(k)},W_{(k+1)},..,W_{k+l}) = 0$3) т. к. $S_{k+l} = G \cup \sigma_1 G \cup\ldots$и множества попарно пересекаются => $Alt(S\otimes T)(v_1,..,v_{k+l}) = \frac{1}{(k+l)!}\sum_{\sigma\in S_{k+l}} sgn\sigma(S\otimes T)(v_{\sigma(1)},..,v_{\sigma(k+l)}) = 0$

Proof 2) Обозначим $S = Alt(T_1\otimes T_2) - T_1\otimes T_2$=> $Alt(S) = Alt(T_1\otimes T_2) - Alt(T_1\otimes T_2) = 0$. $0 = Alt(S\otimes T_3) = Alt((Alt(T_1\otimes T_2) - T_1\otimes T_2)\otimes T_3)$= $Alt(Alt(T_1\otimes T_2)\otimes T_3 - T_1\otimes T_2\otimes T_3)$= $Alt(Alt(T_1\otimes T_2)\otimes T_3) - Alt(T_1\otimes T_2\otimes T_3)$=> $Alt(Alt(T_1\otimes T_2)\otimes T_3) = Alt(T_1\otimes T_2\otimes T_3)$

Proof3)$w \in \Lambda^k(V), \eta \in \Lambda^l(V), \Theta \in \Lambda^m(V)(w\wedge\eta)\wedge\Theta \underset{\text{поопр.}}{=} \frac{(k+l+m)!}{(k+l)!m!}\cdot Alt((w\wedge\eta)\otimes\Theta)$= $\frac{(k+l+m)!}{(k+l)!m!}\cdot Alt([\frac{(k+l)!}{k!l!}\cdot Alt(w\otimes\eta)]\otimes\Theta)$= $\frac{(k+l+m)!}{k!l!m!}\cdot Alt(Alt(w\otimes\eta)\otimes\Theta)$=**(п.2)**= $\frac{(k+l+m)!}{k!l!m!}\cdot Alt(w\otimes\eta\otimes\Theta)$.

Лемма. Пусть $e_1,..,e_n$- базис в V, $e^1,\ldots,e^n$- взаимный базис в V*. Тогда для $\forall\xi_1,\ldots,\xi_k \in V$ $e^{i_1}\wedge e^{i_2}\wedge..\wedge e^{i_k}(\xi_1,\ldots,\xi_k) = \begin{vmatrix}\xi_1^{i_1} & \xi_1^{i_2}\ldots\xi_1^{i_k}\\ \xi_2^{i_1} & \xi_2^{i_2}\ldots\xi_2^{i_k}\\ \ldots & \ldots\\ \xi_k^{i_1} & \ldots\xi_k^{i_k}\end{vmatrix}$, где $\xi_i = \sum_{j=1}^n \xi_i^j e_j$.

докажем для k=2, что $e^i\wedge e^j(\xi_1,\xi_2) = \begin{vmatrix}\xi_1^i & \xi_1^j\\ \xi_2^i & \xi_2^j\end{vmatrix}$. Заметим, что $e^i \in V^* = F^1(V) = \Lambda^1(V)$. $e^i\wedge e^j(\xi_1,\xi_2) = \frac{(1+1)!}{1!1!}\cdot Alt(e^i\otimes e^j)(\xi_1,\xi_2)$=

$2!\frac{1}{2!}\sum_{\sigma\in S_2} sgn\sigma(e^i\otimes e^j)(\xi_{\sigma(1)},\xi_{\sigma(2)})$=$e^i(\xi_1)e^j(\xi_2) - e^i(\xi_2)e^j(\xi_1)$= $\xi_1^i\cdot\xi_2^j - \xi_2^i\cdot\xi_1^j$= $\begin{vmatrix}\xi_1^i & \xi_1^j\\ \xi_2^i & \xi_2^j\end{vmatrix}$. Для k=n аналогично.

12. Базис в пространстве антисимметрических тензоров.

Th. всевозможные внешние произведения $e^{i_1} \wedge e^{i_2} \wedge .. \wedge e^{i_k}, 1 \leqslant i_1 \leqslant \ldots \leqslant i_k \leqslant i_n$образуют базис в $\Lambda^k(V)$

Proof. Т.к. $\Lambda^k(V) \subset F^k(V)$=> $\forall w$антисимм. можно разложить: $w = \sum_{i_1,..,i_k} \quad a_{i_1,\ldots,i_k} e^{i_1} \otimes \ldots \otimes e^{i_k}$=> т. к. $w = Alt(w) = \sum_{i_1,..,i_k} \quad a_{i_1,\ldots,i_k} Alt(e^{i_1} \otimes \ldots \otimes e^{i_k})[=]$

//--

$e^{i_1} \wedge e^{i_2} = 2!\, Alt(e^{i_1} \otimes e^{i_2}); e^{i_1} \wedge e^{i_2} \wedge e^{i_2} = \frac{(2+1)!}{1!2!} Alt((e^{i_1} \wedge e^{i_2}) \otimes e^{i_3})$= $\frac{3!}{2!} \cdot 2!\, Alt(Alt(e^{i_1} \otimes e^{i_2}) \otimes e^{i_3}) = 3!\, Alt(e^{i_1} \otimes e^{i_2} \otimes e^{i_3})$;По индукции $e^{i_1} \wedge \ldots \wedge e^{i_k} = k!\, Alt(e^{i_1} \otimes \ldots \otimes e^{i_k})$;

//--

[=
] $\sum_{i_1,..,i_k} \quad b_{i_1,..,i_k} e^{i_1} \wedge \ldots \wedge e^{i_k} \underset{\text{можнопереставитьвпорядкевозрастания}}{=} \sum_{i_1<i_2<\ldots<i_k} \quad b'_{i_1,\ldots,i_k} e^{i_1} \wedge \ldots \wedge e^{i_k}$. Из леммы => что $e^i \wedge e^j = -e^j \wedge e^i$. Проверить ЛНЗ (аналогично лнз тензоров)

Положим $\sum_{j_1,..,j_k=1}^{n} \quad b_{j_1,\ldots,j_k} \cdot e^{j_1} \otimes .. \otimes e^{j_k}(v_1, .., v_k) \equiv 0$.

Вычислим на векторах$e_{s_1}, \ldots, e_{s_k}$: $0 = \sum_{j_1,..,j_k=1}^{n} \quad b_{j_1,\ldots,j_k} \cdot e^{j_1} \otimes .. \otimes e^{j_k}(e_{s_1}, .., e_{s_k}) = \sum_{j_1,..,j_k=1}^{n} \quad b_{j_1,\ldots,j_k} \underbrace{e^{j_1}(e_{s_1})}_{\delta_{j_1 s_1}} \ldots \underbrace{e^{j_k}(e_{s_k})}_{\delta_{j_k s_k}}$[=]=

1 только при $j_1 = s_1, \ldots, j_k = s_k$, =0 во всех остальных случаях.
[=]$b_{s_1,\ldots,s_k}$

13. Дифференциальные формы, операции над дифференциальными формами.

Для $\forall p \in R^n$рассмотрим множество $R_p^n = \{(p,u): u \in R^n\}$(первый элемент фиксирован, а второй пробегает R^n. Множество векторов приложенных к p).

Можно $\begin{matrix} (p,u_1) + (p,u_2) = (p, u_1 + u_2) \\ \lambda(p,u) = (p, \lambda u), \lambda \in R \end{matrix}$=> ЛПП R_p^n. Касательное пространство к R^nв точке p.

Опр. Если каждой точке p множества $X \subset R^n$поставлено в соответствие симметрическая $w(p) \in \Lambda^k(R_p^n)$, то на X задана дифференциальная форма w степени k.

Разложим по базису. $U^i: R^n \to R$- определена равенством $U^i(\xi) = \xi^i$,где$\xi = (\xi^1, .., \xi^n)$(проекция R^nнаR. возвращает i-ую координату). U^i Линейная функция => $\exists (U^i)'$. Пусть $U \subset R^n$- открытое множество в R^n. Положим $x^i: U \to R$функция, определенная на U равенством

$x^i(\xi) = U^i(\xi) = \xi^i$(сужение)$x^i = U^i \mid_u$. $Dx^i(p) = u^i, \forall p \in U$.

Определим дифференциальную форму степени 1 на U.

$dx^i(p)(p,\xi) = Dx^i(p)\xi = U^i(\xi) = \xi^i$(не зависит от p). В дальнейшем $(p,\xi) \in R_p^n$будем обозначать $(\xi)_p$.$dx^i(p) = dx^i$.

Вычислим значение формы на базисном векторе.

$(e_1)_p, \ldots, (e_n)_p$- базис в R_p^n=> $dx^i(p)((e_j)_p) = \delta_{i,j} = \begin{matrix} 1, i = j \\ 0, i \neq j \end{matrix}$,

$e_j = (0, \ldots, 0, \underset{j}{1}, 0, \ldots, 0)$, dx^iвозвращает i-ую координату.

$dx^1(p), \ldots, dx^n(p)$Взаимный с $(e_1)_p, \ldots, (e_n)_p$базис в $(R_p^n)^*$=> $w(p) \in \Lambda^k(R_p^n)$раскладывается по базису:

$w(p) = \sum_{i_1<\ldots<i_k} \quad w_{i_1,\ldots,i_k}(p) dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k}(p)$

14. Отображение f* и его свойства.

Пусть $f: R^n \to R^m$. Для $\forall p \in R^n, \exists f^*: \Lambda^k(\underset{\text{касательноепр-во}}{R_{f(p)}^m}) \to \Lambda^k(R_p^n)$.

$f^*(w)(p)((\xi_1)_p, \ldots, (\xi_k)_p) = w(f(p))(Df(p)\xi_1, .., Df(p)\xi_k)$./*$(\xi_j)_p = (p, \xi_j), \xi_j \in R^n$*/

Положим $\begin{matrix} dx^1(p), \ldots, dx^k(p) \in \Lambda^1(R_p^n) \\ dy^1(q), \ldots, dy^k(q) \in \Lambda^1(R_q^m) \end{matrix}$

Th1. $f^*(dy^j) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f^j}{\partial x^i} dx^i$, где $f(x^1, .., x^m) = (f^1(x^1, .., x^n), \ldots, f^m(x^1, .., x^n))$.

Proof. $f^*(dy^j)(p)((\xi)_p) = dy^j(f(p))(Df(p)\xi)[=]$

//--

$$Df(p)\xi = \begin{pmatrix} \frac{\partial f^1}{\partial x^1}(p) & \ldots \frac{\partial f^1}{\partial x^n}(p) \\ \ldots & \ldots \\ \frac{\partial f^m}{\partial x^1}(p) & \frac{\partial f^m}{\partial x^n}(p) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \ldots \\ \xi_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f^1}{\partial x^i}(p)\xi^i \\ \ldots \\ \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f^m}{\partial x^i}(p)\xi^i \end{pmatrix}$$

//--

$[=] \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f^j}{\partial x^i}(p)\xi^i = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f^j}{\partial x^i}(p) dx^i(p)(\xi)_p$/*$\xi^i = dx^i(p)(\xi)_p$*/

В любой точке $f^*(dy^j)(p) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f^j}{\partial x^i} dx^i \in \Lambda^1(R_p^n)$.

Th2. $f^*(w_1 \wedge w_2) = (f^* w_1) \wedge (f^* w_2)$**(через Alt)**

Лемма. $f^*(gw)$**,** где g-функция = $(g \circ f) \cdot f^* w$

Proof. $f^*(gw)(p)((\xi_1)_p, .., (\xi_k)_p)$= $(g \cdot w)(f(p))(Df(p)\xi_1, \ldots)$=$g(f(p)) \cdot w(f(p))(Df(p)\xi_1, \ldots)$=$g(f(p)) f^* w(p)((\xi_1)_p, \ldots.)$

Th. $f^*(dw) = d(f^* w)$

Proof.

1) Предположим w- форма нулевой степени (просто функция)

а) пусть $w = x^j: R^n \to R, x^j(\xi) = \xi^j$. $f^*(dx^j) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f^j}{\partial x^j} dx^i = df^j = d(x^j \circ f)[=]$

//--

$f^*(w)(p)((\xi_1)_p, \ldots, (\xi_k)_p) = w(f(p))(Df(\xi_1) \ldots.)$
$f^* w(p) = w(f(p)) = w \circ f(p)$
[=]$d(f^* x^j)$.

б) Произвольная форма 0 степени

$f^*(dw) = f^*\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial w}{\partial x^i} dx^i\right) \underset{\text{линейность}}{=} \sum_{i=1}^{n} f^*\left(\frac{\partial w}{\partial x^i} dx^i\right) \underset{\text{Лемма}}{=} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial w}{\partial x^i} \circ f\right) f^*(dx^i)$=$\left(\frac{\partial w}{\partial x^i} \circ f\right) \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial f^i}{\partial x^s} dx^s$=$\sum_{s=1}^{n} \left(\underbrace{\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial w}{\partial x^i} \circ f\right) \frac{\partial f^i}{\partial x^s}}_{\text{этопроизводнаясложнойф-ии}}\right) dx^s$= $\sum_{s=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x^s}(w \circ f) dx^s$= $d(w \circ f) = d(f^* w)$

2) Предположим, что теорема верна для форм степени k. Докажем для k+1.

Любую форму степени k+1 можно представить в виде лин. комбинации указанных форм, т. к. любую форму можно разложить по базису: $w = \sum_i w_i \underbrace{dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k}}_{\text{формастепени}k} \wedge dx^{i_{k+1}}$.

$d(w \wedge dx^i) = dw \wedge dx^i + (-1)^k w \wedge \underbrace{d(dx^i)}_{0-\text{аяформа}} = dw \wedge dx^i$

$f^*(d(w \wedge dx^i)) = f^*(dw \wedge dx^i)$=$f^*(dw) \wedge f^*(dx^i)$=$d(f^* w \wedge f^*(dx^i))$=$d(f^*(w \wedge dx^i))$

//--

w(p) имеет k аргументов. А аргумент это вектор из R_p^n, т. е. $(\xi)_p = (p, \xi)$. Вычислим на векторах $w(p)((\xi_1)_p, \ldots., (\xi_k)_p)$- число. В R_p^nесть базис $(e_1)_p, \ldots, (e_n)_p$, $e^1, .., e^n$взаимный в $(R_p^n)^*$. $e^i((e_j)_p) = \delta_{ij}$. Разложим по базису в $(R_p^n)^* dw(p) = \sum_i \quad w_i^{(p)} dx^{i_1} \wedge .. \wedge dx^{i_k}$. $f^*(w)(p)((\xi_1)_p, \ldots, (\xi_k)_p) = w(f(p))(Df(p)\xi_1, \ldots, Df(p)\xi_k)$

15. Дифференциал формы и его свойства.

Опр. Пусть $w = \sum_{i_1<..<i_k} \quad w_{i_1,\ldots,i_k} dx^{i_1} \wedge .. \wedge dx^{i_k}$- форма степени k. Дифференциальная форма $dw = \sum_{i_1<..<i_k} \quad dw_{i_1,\ldots,i_k} dx^{i_1} \wedge .. \wedge dx^{i_k}$степени k+1 — **дифференциал** формы w.

Th. $d(w_1 + w_2) = dw_1 + dw_2$(очевидно)

Th. $d(w_1 \wedge w_2) = dw_1 \wedge dw_2 + (-1)^k w_1 \wedge dw_2$, где k-степень формы w_1.

Proof.

Разложим по базису:

$w_1 = \sum_{i_1<..<i_k} \quad w_{i_1,\ldots,i_k}^{(1)} dx^{i_1} \wedge .. \wedge dx^{i_k}$,

$w_2 = \sum_{j_1<..<j_l} \quad w_{j_1,\ldots,j_l}^{(2)} dx^{j_1} \wedge .. \wedge dx^{j_l}$. $d(w_1 \wedge w_2) = d(\sum_i \sum_j \quad w_i^{(1)} w_j^{(2)} dx^{i_1} \wedge .. \wedge dx^{i_k} \wedge dx^{j_1} \wedge .. \wedge dx^{j_l})$= $\sum_i \sum_j \quad d\,(w_i^{(1)} w_j^{(2)}) dx^{i_1} \wedge .. \wedge dx^{i_k} \wedge dx^{j_1} \wedge .. \wedge dx^{j_l}[=]$

//--

$d(w_i^{(1)}, w_j^{(2)}) = dw_i^{(1)} \cdot w_j^{(2)} + w_l^{(1)} \cdot dw_j^{(2)}$Разобьем на 2 суммы, за k перестановок $dw_j^{(2)}$поставим в конец.

//--

$[=] \sum_i \sum_j (dw_i^{(1)} \wedge dx^{i_1} \wedge .. \wedge dx^{i_k}) \wedge (w_j^{(2)} dx^{j_1} \wedge .. \wedge dx^{j_l})$+ $(-1)^k \sum_i \sum_j (w_i^{(1)} \wedge dx^{i_1} \wedge .. \wedge dx^{i_k}) \wedge (dw_j^{(2)} dx^{j_1} \wedge .. \wedge dx^{j_l})$= $dw_1 \wedge w_2 + w_1 \wedge dw_2 \cdot (-1)^k$

Th. $d(dw) = 0$.

Proof. $w = \sum_{1 \leqslant i_1<..<i_k \leqslant n}^{n} \quad w_{i_1,..,i_k}(x) dx^{i_1} \wedge .. \wedge dx^{i_k}$- k-форма

$dw = \sum_{1 \leqslant i_1<..<i_k \leqslant n}^{n} \quad dw_{i_1,..,i_k}(x) dx^{i_1} \wedge .. \wedge dx^{i_k}$=

/*$1 \leqslant i_1 < \ldots < i_k \leqslant n$*/ = $\sum_{\breve{i}} (\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial w_i}{\partial x^j} dx^j) \wedge dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k}$=$\sum_i \sum_{j=1}^{n} \quad d\left(\frac{\partial w_i}{\partial x^j} dx^j\right) \wedge dx^j \wedge dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k}$= $\sum_i \sum_{j=1}^{n} \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial^2 w_i}{\partial x^s \partial x^j} dx^s \wedge dx^j \wedge dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k} = 0$

//--

$df = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i, d^2 f = d(df) = \sum_{i=1}^{n} \quad d\left(\frac{\partial f}{\partial x^i}\right) dx^i$

//--

Если w-дважды непрерывно дифференцируемая форма, то от порядка следования дифференцирования не зависит $\frac{\partial^2 w}{\partial x^s \partial x^j} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^j \partial x^s}$, но от перемены во внешнем произведении будет минус и все слагаемые взаимно уничтожатся $dx^s \wedge dx^j = -dx^j \wedge dx^s$.

16. Интеграл от дифференциальной формы по сингулярному кубу и по цепи. Свойства интеграла.

Положим $h = [0,1]^k = \underbrace{[0,1] \times \ldots \times [0,1]}_{k-\text{мерныйкуб}} \subset R^k$. Непрерывное отображение $c: h \to R^n (k \leqslant n)$называется k-мерным сингулярным кубом. Сингулярный куб размерности 1 = параметрическое представление кривой(называется ориентированная кривая). Размерности 2 — поверхности. Совокупность сингулярных кубов размера 1 называют одномерной цепью. Совокупность k-мерных сингулярных кубов — k-мерная цепь. Пусть c: $[0,1]^k \to V, V \subset R^n$- открытое множество.

1) пусть $U \subset R^k$, $[0,1]^k \subset U$, U- открытое. Пусть на U определена $w(p) \in \Lambda^k(R_p^k)$=>$w(p) = g(p) dt^1 \wedge \ldots \wedge dt^k$, где $dt^i \in \Lambda^1(R_p^k)$,$dt^j((\xi)_p) = \xi^j$, где$(\xi)_p = (p, \xi), \xi = (\xi^1, .., \xi^k)^T$.

Определение.

$\int_{\underset{\text{покубу}}{[0,1]^k}} \quad w = \underbrace{\int \ldots \int}_{\text{обычныйk-кратный}} g(t^1, .., t^k) dt^1 .. dt^k$

2) Пусть $U \subset R^k$, $[0,1]^k \subset V$, V- открытое. Пусть на U определена диф. форма w. Определение. $\int_{\underset{\text{кубу}}{C}} \quad w = \int_{[0,1]^k} \quad C^* w$.

//--

$\begin{matrix} C^*: \Lambda^k(R_{C(t)}^n) \to \Lambda^k(R_t^k) \\ C: [0,1]^k \to V \subset R^n \end{matrix}$, $C^* w(t) - k -$ формаиз$\Lambda^k(R_t^k)$

//--

Найдем $C^* w$для k=2.

$[0,1]^2$- квадрат на плоскости. $C: [0,1]^2 \to V \subset R^n$. w-k-форма на V вида $w(p) = \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 \leqslant n} \quad g_{i_1 i_2}(p) dx^{i_1} \wedge dx^{i_2}$

Рассмотрим одно слагаемое $g(x^1, .., x^n) dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} = \eta$и найдем $C^* \eta(t)((\xi_1)_t, (\xi_2)_t) = g \circ C(t) \cdot C^*(dx^{i_1} \wedge dx^{i_2})$= $g \circ C(t) \cdot C^*(dx^{i_1}) \wedge C^*(dx^{i_2})$=$g \circ C(t) \cdot d(C^* x^{i_1}) \wedge d(C^* x^{i_2})$= $g \circ C(t) \cdot dC^{i_1} \wedge dC^{i_2}$= $g \circ C(t) \left(\frac{\partial C^{i_1}}{\partial t^1} dt^1 + \frac{\partial C^{i_1}}{\partial t^2} dt^2\right) \wedge \left(\frac{\partial C^{i_2}}{\partial t^1} dt^1 + \frac{\partial C^{i_2}}{\partial t^2} dt^2\right)$=$g \circ C(t) \underbrace{\left(\frac{\partial C^{i_1}}{\partial t^1} \frac{\partial C^{i_2}}{\partial t^2} - \frac{\partial C^{i_1}}{\partial t^2} \frac{\partial C^{i_2}}{\partial t^1}\right)}_{\text{аэтожеопределитель}} \cdot dt^1 \wedge dt^2$=

/*$\begin{matrix} dt^i \wedge dt^j = -dt^j \wedge dt^i \\ dt^i \wedge dt^i = 0 \end{matrix}$/ = $g \circ C(t) \underbrace{\frac{\partial(C^{i_1}, C^{i_2})}{\partial(t^1, t^2)}}_{\text{матрицаЯкоби}} dt^1 \wedge dt^2$. **В общем случае**$C: [0,1]^k \to V \subset R^n g(x^1, .., x^n) dx^{i_1} \wedge \ldots dx^{i_k} = \eta C^* \eta = g(C^1(t^1, .., t^k), .., C^n(t^1, .., t^k)) \frac{\partial(C^{i_1}, .., C^{i_k})}{\partial(t^1, .., t^k)} dt^1 \wedge .. \wedge dt^k$,

/*$C(t^1, .., t^k) = (C^1(t^1, .., t^k), .., C^n(t^1, .., t^k))$*/ Т.о. $\int_C \quad \eta = \int \underset{[0,1]}{\ldots} \int g(C(t)) \frac{\partial(C^{i_1} \ldots C^{i_k})}{\partial(t^1, .., t^k)} dt^1 \ldots dt^k$

3)интеграл по цепи. Положим $C = \lambda_1 C_1 + .. + \lambda_p C_p$- k-мерная цепь. $C_i: [0,1]^k \to V$сингулярный k-мерный куб.

Опр.

$\int_C \quad w = \lambda_1 \int_{C_1} \quad w + .. + \lambda_p \int_{C_p} \quad w$, где w- k-форма на V.

Пусть задано взаимно однозначное $F: [0,1]^k \to [0,1]^k$имеющее F' на кубике. Если $\tilde{C} = C \circ F$, то $\tilde{C}$получена из C заменой параметризации. При этом, если det F' >0, то на $[0,1]^k$, то пишут $C \sim \tilde{C}$, иначе $\tilde{C} \sim -C$.

17. Криволинейные и поверхностные интегралы 1 го и 2 го рода. Независимость криволинейного интеграла 2 го рода от пути интегрирования.

Для k=1 (криволинейный интеграл) $C:[0,1]\to V\subset R^n$ $\int_C \underset{1-\text{форма}}{w} = \int_{\tilde C} g(x^1,..,x^n)dx^i = \int_0^1 g(\widetilde{C^1}(t),\dots,\widetilde{C^n}(t))(\widetilde{C^i})'(t)dt = \int_0^1 g(C\circ F(t))(C^i\circ F)'dt = \int_0^1 g(C\circ F(t))\underset{\text{якобианпр-ия}}{(C^i)'(F(t))}F'(t)dt =$ /*$\tau = F(t)$*/$\pm\int_0^1 g(C(\tau))(C^i)'(\tau)d\tau = \pm\int_C w$

//---

По-русски: Если f(x,y,z) -функция, определенная и непрерывная в точках гладкой кривой С: x=x(t), y=y(t), z=z(t), ($t_0\le t\le T$) и ds — дифференциал дуги, то $\int_C f(x,y,z)ds = \int_{t_0}^T f(x(t),y(t),z(t))\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)+z'^2(t)}dt$, не зависит от направления кривой С. Масса кривой $M = \int_C \rho(x,y,z)ds$, где $\rho(x,y,z)$ – лин. плотность в тек. точке.

Координаты центра масс (x_0,y_0,z_0) $x_0 = \frac{1}{M}\int_C x\rho(x,y,z)ds$, $y_0 = \frac{1}{M}\int_C y\rho(x,y,z)ds$, $z_0 = \frac{1}{M}\int_C z\rho(x,y,z)ds$

//---

Положим $C:[a,b]\to R^3$- гладкая кривая(регулярный к-мерный куб), w=P(x,y,z)dx+Q(x,y,z)dy+R(x,y,z)dz-дифференциальная форма степени 1, определенная на открытом множестве $U\supset C([a,b])$. $\int_C w$-криволинейный 2 рода. $\int_C w = \int_{[a,b]} C^*w$. $C^*w = C^*(Pdx)+C^*(Qdy)+C^*(Rdz) = (P\circ C)C'_1dt + (Q\circ C)C'_2dt + (R\circ C)C'_3dt$, $C(t) = (C_1(t),C_2(t),C_3(t))$

Из воспоминаний: $w = f(x^1,..,x^n)dx^{i_1}\wedge..\wedge dx^{i_k}$, $C:[0,1]^k\to R^n$, $C(t^1,..,t^k) = (C_1(t^1,..,t^k),..,C_n(t^1,..,t^k))$, $C^*w = f(C_1(t),..,C_n(t))\frac{\partial(C_{i_1},..C_{i_k})}{\partial(t^1,..,t^k)}dt^1\wedge\ldots\wedge dt^k$

Следовательно $\int_C Pdx+Qdy+Rdz = \int_a^b(P(C_1(t),C_2(t),C_3(t))C'_1(t) + Q(C_1(t),C_2(t),C_3(t))C'_2(t) + R(\ldots)C'_3(t))\,dt.$

Геометрически: Положим $U\subset R^3$ и в $\forall$ точке $(x,y,z)\in U$ задан век-р $\bar F(x,y,z)$. Говорят, что на U задано векторное поле $\bar F$. $w_{\bar F}^1$- диф. форма 1 степени. $w_{\bar F}^1(\xi) = (\bar F,\xi)$, $\xi\in R^3$, в координатной форме: $\xi = \begin{pmatrix}\xi_1\\ \xi_2\\ \xi_3\end{pmatrix}$, $\bar F = \begin{pmatrix}F_1\\ F_2\\ F_3\end{pmatrix}$, то $w_{\bar F}^1(\xi) = (\bar F,\xi) = F_1\xi_1+F_2\xi_2+F_3\xi_3$. $w'_F = F_1dx+F_2dy+F_3dz$. Работа $\int_C F_1dx+F_2dy+F_3dz$.

//---

Положим $\underset{\text{замкнутая}}{\Sigma}:\bar r(u,v),(u,v)\in D\subset R^2$- гладкая поверхность D. В точках Σ определена функция F(x,y,z). Поверхностный интеграл 1 рода: $\iint_\Sigma F(x,y,z)ds = \iint_D F(x(u,v),y(u,v),z(u,v))\sqrt{EG-F^2}$, где E,G,F- коэффициенты 1 квадратичной формы. $E = (\bar r'_u,\bar r'_u)$; $F = (\bar r'_u,\bar r'_v)$; $G = (\bar r'_v,\bar r'_v)$

//---

Положим $C:[0,1]:2\to R^3$- регулярный куб. $w = P(x,y,z)dy\wedge dx + Q(x,y,z)dz\wedge dx + R(x,y,z)dx\wedge dy$- форма степени 2, определенная в $U\supset C([0,1]^2)$. $\int_C w$- поверхностный интеграл 2 рода. Положим $\int_C w \Rightarrow \int_C w = \int_C Pdy\wedge dz + Qdz\wedge dx + Rdx\wedge dy = \iint_C C^*(Pdy\wedge dz + Qdz\wedge dx + Rdx\wedge dy) = \iint_{[0,1]^2}\left(P(C(u,v))\begin{bmatrix}\frac{\partial C_2}{\partial U} & \frac{\partial C_2}{\partial V}\\ \frac{\partial C_3}{\partial U} & \frac{\partial C_3}{\partial V}\end{bmatrix} + Q(C(u,v))\begin{bmatrix}\frac{\partial C_3}{\partial U} & \frac{\partial C_3}{\partial V}\\ \frac{\partial C_1}{\partial U} & \frac{\partial C_1}{\partial V}\end{bmatrix} + R(C(u,v))\begin{bmatrix}\frac{\partial C_1}{\partial U} & \frac{\partial C_1}{\partial V}\\ \frac{\partial C_2}{\partial U} & \frac{\partial C_2}{\partial V}\end{bmatrix}\right)dudv$

$=\iint_{[0,1]^2}\left(P(C(u,v))\begin{bmatrix}\frac{\partial C_2}{\partial U} & \frac{\partial C_2}{\partial V}\\ \frac{\partial C_3}{\partial U} & \frac{\partial C_3}{\partial V}\end{bmatrix} + Q(C(u,v))\begin{bmatrix}\frac{\partial C_3}{\partial U} & \frac{\partial C_3}{\partial V}\\ \frac{\partial C_1}{\partial U} & \frac{\partial C_1}{\partial V}\end{bmatrix} + R(C(u,v))\begin{bmatrix}\frac{\partial C_1}{\partial U} & \frac{\partial C_1}{\partial V}\\ \frac{\partial C_2}{\partial U} & \frac{\partial C_2}{\partial V}\end{bmatrix}\right)dudv$

$=\iint_{[0,1]^2}\begin{bmatrix}P(C(u,v)) & Q(C(u,v)) & R(C(u,v))\\ \frac{\partial C_1}{dU} & \frac{\partial C_2}{dU} & \frac{\partial C_3}{dU}\\ \frac{\partial C_1}{dV} & \frac{\partial C_2}{dV} & \frac{\partial C_3}{dV}\end{bmatrix}.$

Th. Криволинейный интеграл 2 рода не зависит от ориентации кривой.

Положим $G\subset R^2$ открытое связное множество. Ф-ии P(x,y), Q(x,y) — непрерывные в G. Пусть $A,B\in G$- произвольные точки из G. AB- путь в G с началом в A и концом в B. Тогда интеграл $\int_{\widetilde{AB}} Pdx+Qdy$ не зависит от пути, соединяющего A и B <=> Pdx+Qdy дифференциал некоторой U(x,y), определяемой в G.

Proof.

=> Предположим реально не зависит. Рассмотрим функцию $F(B) = \int_A^B Pdx+Qdy$=/*A(x_0,y_0); B(x,y). A-фикс. B-свободна*/=$F(x,y) = \int_{x_0,y_0}^{x,y} Pdx+Qdy$[=]

//---

Докажем, что существует F'_x <=> $\exists\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{F(x+\Delta x,y)-F(x,y)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x}\left(\int_{(x_0,y_0)}^{(x+\Delta x,y)} Pdx+Qdy - \int_{x_0,y_0}^{x,y} Pdx+Qdy\right) = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x}\left(\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} Pdx+Qdy + \int_{(x,y)}^{(x+\Delta x,y)} Pdx+Qdy - \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} Pdx+Qdy\right)$= /*x=t, y=y $t\in[x,x+\Delta x]$*/= $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x}\int_x^{x+\Delta x} P(t,y)dt \underset{th\text{осреднем}}{=} \frac{1}{\Delta x}\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{P(\xi,y)}{\Delta x}\int_x^{x+\Delta x} dt = \lim\limits_{\Delta x\to 0}P(\xi,\eta) = P(x,y)$

//---

Итак существует F'_x =P. Аналогично F'_y =Q – непрерывна. Значит F-дифференцируема в (x,y). dF=Pdx+Qdy

<= Положим Pdx+Qdy=dF => $P = \frac{\partial F}{\partial x}, Q = \frac{\partial F}{\partial y}$, положим $A,B\in G$ и $A_0A_1 + A_1A_2 + \ldots + A_{n-1}A_n$, $A_0 = A$, $A_n = B$- кусочно гладкий путь в G. $A_{i-1}A_i: r_i(t) = (\phi_i(t),\xi_i(t)), t\in[a_{i-1},a_i]$.

$\int_{\widetilde{AB}} Pdx+Qdy = \sum_{i=1}^n\int_{A_{i-1}A_i} Pdx+Qdy = \sum_{i=1}^n\int_{a_{i-1}}^{a_i}(P(\phi_i(t),\xi_i(t))\phi'_i(t) + Q(\phi_i(t),\xi_i(t))\xi'_i(t))\,dt = \sum_{i=1}^n\int_{a_{i-1}}^{a_i}\frac{d}{dt}F(\phi_i(t),\xi_i(t))dt = \sum_{i=1}^n(F(A_i)-F(A_{i-1})) = F(A_n)-F(A_0) = F(B)-F(A)$, определяется начальной и конечной точкой.

18. Общая формула Стокса. Классические интегральные формулы Стокса, Остроградского-Гаусса, Грина.

w- (k-1)-форма, C-k-мерная цепь. $\int_c dw = \int_{\partial c} w$

1) **формула Грина.** k=2,n=3. w=P(x,y)dx+Q(x,y)dy – одномерная форма. P,Q — функции, определенные на открытом множестве в R^2. $dw = dP\wedge dx + dQ\wedge dy = \left(\frac{\partial P}{\partial x}dx + \frac{\partial P}{\partial y}dy\right)\wedge dx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x}dx + \frac{\partial Q}{\partial y}dy\right)\wedge dy = -\frac{\partial P}{\partial y}dx\wedge dy + \frac{\partial Q}{\partial x}dx\wedge dy = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\wedge dy$ =>Стокс $\int_C\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\wedge dy = \int_{\partial C} Pdx+Qdy$. C=1c — двухмерная цепь. c: $D\to D\subset R^2$ (тожественное)

$\int_C\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\wedge dy = \iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy = \int_{\partial D} Pdx + Qdy$- **Формула Грина**

Формулировочка: Если С- простой кусочно-гладкий контур, ограничивающий конечную односвязную область S, пробегаемый так, что область S остается слева, и функции P(x,y), Q(x,y) непрерывны вместе со своими частными производными первого порядка $\frac{\partial Q}{\partial x},\frac{\partial P}{\partial y}$ и в области S и на ее границе, то имеет место формула Грина(связь криволинейного интеграла с двойным)

2) **формула Стокса.** k=2, n=3.

w=P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz. $dw = \left(\frac{\partial P}{\partial x}dx + \frac{\partial P}{\partial y}dy + \frac{\partial P}{\partial z}dz\right)\wedge dx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x}dx + \frac{\partial Q}{\partial y}dy + \frac{\partial Q}{\partial z}dz\right)\wedge dy + \left(\frac{\partial R}{\partial x}dx + \frac{\partial R}{\partial y}dy + \frac{\partial R}{\partial z}dz\right)\wedge dz = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)dy\wedge dz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)dz\wedge dx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\wedge dy$. Формула Стокса : $\int_C\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)dy\wedge dz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)dz\wedge dx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\wedge dy = \int_{\partial C} Pdx + Qdy + Rdz$

Формулировочка: Если P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z) — непрерывно дифференцируемые функции и С- простой замкнутый кусочно-гладкий контур, ограничивающий конечную кусочно-гладкую двустороннюю поверхность S, то имеет место формула Стокса:

$\int_C Pdx + Qdy + Rdz = \iint\begin{bmatrix}\cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{bmatrix}ds$, где

$\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$- направляющие косинусы нормали к поверхности S, направленной в ту сторону, относительно которой обход контура С совершается против хода часовой стрелки (для правой координатной системы)

3) **формула Остроградского-Гаусса** k=3,n=3

$w = Pdy\wedge dz + Qdz\wedge dx + Rdx\wedge dy$, $dw = \frac{\partial P}{\partial x}dx\wedge dy\wedge dz + \frac{\partial Q}{\partial y}dy\wedge dz\wedge dx + \frac{\partial R}{\partial z}dz\wedge dx\wedge dy = \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right)dx\wedge dy\wedge dz.$

Стокс:

$$\int_C\left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right)dx\wedge dy\wedge dz = \int_{\partial C} Pdy\wedge dz + Qdz\wedge dx + Rdx\wedge dy$$

C=1c , c: $D\to D\subset R^3$ (тожественное)

Остроградский-Гаусс: $\int_C\left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right)dx\wedge dy\wedge dz = \iiint_{\partial C}\left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right)dxdydz = \int_{\partial C}$(криволинейный2рода)

Формулировочка: Если S-замкнутая гладкая поверхность, ограничивающая объем V, и P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z) — функции, непрерывные вместе со своими частными производными 1 порядка в замкнутой области V, то имеет место формула Остроградского-Гаусса $\iint_S(P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\,dS = \iiint_{(V)}\left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right)dxdydz$, где

$\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$- направляющие косинусы внешней нормали к поверхности S. (поверхностный к тройному)

19. Дифференциальные операции векторного анализа. Скалярные и векторные поля в областях евклидова пространства. Связь с дифференциальными формами. Дифференциальные операции векторного анализа. Интегральные формулы в векторных обозначениях. Физическая интерпретация div, rot, grad.

Опр. Скалярное поле в области G — это функция f, определенная на G.

Опр. Если каждой точке области G поставлен в соответствие вектор, то говорят, что в области G задано векторное поле.

Вектор $gradf = \left(\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y},\frac{\partial f}{\partial z}\right) = \nabla f$- градиент скалярного поля f.

Опр. Векторное поле А называется потенциальным в области G, если существует U, определенная в G, такая, что $\bar A = \nabla U$, а U — потенциальное поле в А.

Положим $\bar A(x,y,z) = A_1(x,y,z)\bar\imath + A_2(x,y,z)\bar\jmath + A_3(x,y,z)\bar k$. $w_{\bar A}^1 = A_1dx + A_2dy + A_3dz$.

$w_{\bar A}^1(x,y,z)((\xi)_{x,y,z}) = (\bar A,\bar\xi) = A_1\xi^1 + A_2\xi^2 + A_3\xi^3 = A_1dx((\bar\xi)_{x,y,z}) + A_2dy((\bar\xi)_{x,y,z}) + A_3dz((\bar\xi)_{x,y,z}) = (A_1dx + A_2dy + A_3dz)(\bar\xi)_{(x,y,z)}$

Если поле потенциально, то $A_1 = \frac{\partial U}{\partial x}, A_2 = \frac{\partial U}{\partial y}, A_3 = \frac{\partial U}{\partial z}$.

$\bar A = gradU = \left(\frac{\partial U}{\partial x},\frac{\partial U}{\partial y},\frac{\partial U}{\partial z}\right)$ $w_{\bar A}^1 = \frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy + \frac{\partial U}{\partial z}dz = dU$. $dw_{\bar A}^1 = d(dU) = 0$- необходимое условие потенциала.

$0 = w_{\bar A}^1 = dA_1\wedge dx + dA_2\wedge dy + dA_3\wedge dz = \left(\frac{\partial A_1}{\partial x}dx + \frac{\partial A_1}{\partial y}dy + \frac{\partial A_1}{\partial z}dz\right)\wedge dx + \left(\frac{\partial A_2}{\partial x}dx + \frac{\partial A_2}{\partial y}dy + \frac{\partial A_2}{\partial z}dz\right)\wedge dy + \left(\frac{\partial A_3}{\partial x}dx + \frac{\partial A_3}{\partial y}dy + \frac{\partial A_3}{\partial z}dz\right)\wedge dz = \left(\frac{\partial A_3}{\partial y} - \frac{\partial A_2}{\partial z}\right)dy\wedge dz + \left(\frac{\partial A_1}{\partial z} - \frac{\partial A_3}{\partial x}\right)dz\wedge dx + \left(\frac{\partial A_2}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial y}\right)dx\wedge dy$

$rot\bar A = \left(\frac{\partial A_3}{\partial y} - \frac{\partial A_2}{\partial z},\frac{\partial A_1}{\partial z} - \frac{\partial A_3}{\partial x},\frac{\partial A_2}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial y}\right).$

Как запомнить: $rot\bar A = \begin{bmatrix}i & j & k\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ A_1 & A_2 & A_3\end{bmatrix}$. $rot\bar A = 0$ необходимое условие потенциальности.

Th. Поле потенциально в области G <=> $\int_\gamma A_1dx + A_2dy + A_3dz = 0$ для любого замкнутого пути γ в G.

Proof.

=>Пусть $\bar A$- потенциальное => $w_{\bar A}^1 = dU = A_1dx + A_2dy + A_3dz$, пусть γ-замкнутый путь. => $\int_\gamma A_1dx + A_2dy + A_3dz = U(B) - U(A) = 0$

<= Пусть $\int_\gamma A_1dx + A_2dy + A_3dz = 0$, рассмотрим A,B $\in$G =>$\int_{AnB}\ldots + \int_{BmA}\ldots = \int_{AnB}\ldots - \int_{AmB}\ldots = 0$=> $\int_{AnB}\ldots = \int_{AmB}\ldots$=> не зависит от способа соединения A,B(пути) . $A_1dx + A_2dy + A_3dz = dU$=> $A_1 = \frac{\partial U}{\partial x}, A_2 = \frac{\partial U}{\partial y}, A_3 = \frac{\partial U}{\partial z}$=> $\bar A = gradU$

A=(P,Q,R). $A = \int_\gamma w_1 = \iint w_2 = \iint S_{\text{пов}}rotAds.$

Оператор Гамильтона: $\nabla = (\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z})$.

$(\nabla,\bar a)$= div a = $(\frac{\partial a_1}{\partial x} + \frac{\partial a_2}{\partial y} + \frac{\partial a_3}{\partial z})$скалярно

$[\nabla,\bar a] = rot\bar a = \begin{bmatrix}i & j & k\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ a_1 & a_2 & a_3\end{bmatrix}$векторно

$[\nabla,\underset{\text{функция}}{f}] = gradf$