

# [Soluciones] Notas de Teoría de la Medida (L. Rendón)

ViucheOwO

8 de noviembre de 2024

# Índice general

<b>1. Definiciones preliminares</b>	<b>3</b>
1.1. Quiz 1 . . . . .	3
1.2. Quiz 2 . . . . .	4
1.3. Quiz 3 . . . . .	5
1.4. Ejercicios . . . . .	6
<b>2. La medida de Lebesgue</b>	<b>9</b>
2.1. Ejercicios . . . . .	9
<b>3. La integral</b>	<b>10</b>
3.1. Ejercicios . . . . .	10
<b>4. Medida producto</b>	<b>11</b>
4.1. Ejercicios . . . . .	11
<b>5. Espacios <math>L_p</math></b>	<b>12</b>
5.1. Ejercicios . . . . .	12
<b>6. Algunos tipos de convergencia</b>	<b>13</b>
6.1. Ejercicios . . . . .	13
<b>7. Cargas</b>	<b>14</b>
7.1. Ejercicios . . . . .	14

# Capítulo 1

## Definiciones preliminares

### 1.1. Quiz 1

Determine si cada uno de los siguientes enunciados es verdadero o falso:

1.  $\mathbb{Q} \in B$  donde  $B$  es la  $\sigma$  - álgebra de Borel.

**Verdadero:**

*Demostración.* Note que para cada  $r \in \mathbb{Q}$ ,  $\{r\} \in B$  puesto que este es un cerrado en  $\mathbb{R}$ , i.e., es complemento de un abierto (véase  $(-\infty, r) \cup (r, \infty)$ ), que está en  $B$ .

La enumerabilidad de  $\mathbb{Q}$  nos garantiza que  $\bigcup_{r \in \mathbb{Q}} \{r\} = \mathbb{Q} \in B$  □

2.  $\mathbb{N} \in B$  donde  $B$  es la  $\sigma$  - álgebra de Borel.

**Verdadero:**

*Demostración.* La prueba es idéntica a la del punto anterior. □

3. El conjunto  $F = \{M : M \text{ es una } \sigma\text{-álgebra en } \mathbb{R}\}$  es enumerable.

**Falso:**

*Demostración.* Considere la aplicación  $\psi : \mathbb{R} \rightarrow F$  tal que  $\psi(\alpha) := M_\alpha$  donde  $M_\alpha =: \{\mathbb{R}, \emptyset, (-\infty, \alpha), [\alpha, \infty)\}$ . Considere  $\mathcal{M} = \text{Im}\psi$ , puesto que  $\psi$  es inyectiva entonces  $|\mathcal{M}| \leq |\mathbb{R}|$ , por lo tanto  $F$  no puede ser contable. □

4. La función  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $f(x) = x^3$  es medible, cuando tomamos en  $\mathbb{R}$  la  $\sigma$  - álgebra de Borel.

**Verdadero:**

*Demostración.* Probaremos primero por inducción que  $f(x) = x^n$  es medible para cada  $n \in \mathbb{N}$ . Para  $n = 1$  el resultado es obvio puesto que  $f^{-1}(V) = V \in B$  para cada  $V$  abierto. Supongamos que el enunciado es cierto para  $n \geq 1$ , luego  $f(x) = x^{n+1} = x^n \cdot x$  es medible por la proposición 1.1.18. ya que  $f = h \circ \varphi$  donde  $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $\varphi(y, z) = y \cdot z$  es continua y  $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2 := (x^n, x)$  es medible ya que cada una de sus componentes lo es. Por el principio de inducción matemática concluimos que  $f$  es medible y tomando el caso  $n = 3$  tenemos el resultado inicialmente pedido. □

5. La función  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $f(x) = |x|$  es medible, cuando tomamos en  $\mathbb{R}$  la  $\sigma$ -álgebra de Borel.

**Verdadero**

*Demostración.* Note que  $f(x) = |x| = (h \circ g)(x)$  es medible por la proposición 1.1.17, donde  $g(x) = x^2$  es medible por el punto anterior y  $h(x) = \sqrt{x}$  es continua.  $\square$

## 1.2. Quiz 2

Determine si cada uno de los siguientes enunciados es verdadero o falso:

1. Sean  $(X, M)$  espacio medible y  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ . si  $f$  es medible entonces  $|f|$  es medible.

**Verdadero:**

*Demostración.* Note que  $|f| = g \circ f$  donde  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  con  $g(x) = |x|$  es continua. La proposición 1.1.17 garantiza que  $|f|$  es medible.  $\square$

2. Sean  $(X, M)$  espacio medible y  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ . si  $|f|$  es medible entonces  $f$  es medible.

**Falso:**

*Demostración.* Sea  $E$  un conjunto no medible y considere  $f$  definida como la siguiente función simple:  $\chi_E - \chi_{E^c}$ , donde  $E^c = X - E$ . Es claro que  $|f| = 1$  es medible pero  $f$  no lo es.  $\square$

3. Sean  $(X, M)$  un espacio medible y  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ . Si  $f$  es medible entonces  $f^+ = \sup\{f(x), 0\}$  y  $f^- = \sup\{-f(x), 0\}$  son medibles.

**Verdadero**

*Demostración.* Basta probarlo para los abiertos básicos  $(\alpha, \beta)$  con  $\alpha < \beta$ .

Si  $\alpha, \beta < 0$  entonces  $(f^+)^{-1}((\alpha, \beta)) = \emptyset$

Si  $\alpha, \beta > 0$  entonces  $(f^+)^{-1}((\alpha, \beta)) = f^{-1}((\alpha, \beta)) \in M$ .

Si  $\alpha < 0, \beta > 0$  entonces  $(f^+)^{-1}((\alpha, \beta)) = (f^+)^{-1}[0, \beta) = f^{-1}((-\infty, 0]) \cup f^{-1}((0, \beta)) \in M$

Note que  $f^{-1}((-\infty, 0]) \in M$  ya que  $f^{-1}((-\infty, 0]) = f^{-1}((0, \infty)^c) = (f^{-1}((0, \infty)))^c \in M$  pues  $f^{-1}((0, \infty)) \in M$ .  $\square$

4.  $f^+ = \frac{1}{2}(|f| + f)$ ,  $f^+$  como en el numeral anterior.

**Verdadero:**

*Demostración.* Si  $f(x) \leq 0$  entonces  $\frac{1}{2}(|f| + f)(x) = \frac{1}{2}(-f + f)(x) = 0$ . Ahora, si  $f(x) > 0$ , entonces  $\frac{1}{2}(|f| + f)(x) = \frac{1}{2}(f + f)(x) = \frac{1}{2}(2f)(x) = f(x)$ , lo cual coincide con nuestra definición de  $f^+$ .  $\square$

5.  $f^- = \frac{1}{2}(|f| - f)$ ,  $f^-$  como en el numeral anterior

**Verdadero:**

*Demostración.* La prueba es análoga a la anterior.  $\square$

### 1.3. Quiz 3

Determine si cada uno de los siguientes enunciados es verdadero o falso:

1. Sea  $(X, M)$  un espacio medible entonces toda función simple es medible.

**Falso:**

*Demostración.* En virtud de la proposición 1.4.3 basta tomar cualquier conjunto no medible  $E$  e inmediatamente  $\chi_E$  es una función simple no medible.  $\square$

2.  $\chi_{A \cup B} = \chi_A + \chi_B$

**Falso:**

*Demostración.* Tome  $A, B \subset X$  no disyuntos y  $x \in A \cap B$ . Note que  $\chi_{A \cup B}(x) = 1$ , mientras que  $\chi_A + \chi_B(x) = 2$ .  $\square$

3.  $\chi_{A-B} = \chi_A(1 - \chi_B)$

**Verdadero:**

*Demostración.* Si  $x \in A - B$ , entonces  $\chi_A(x) = 1, \chi_B(x) = 0$ , luego  $\chi_A(1 - \chi_B)(x) = 1(1 - 0) = 1$ . Ahora si  $x \notin A - B$  entonces  $\chi_A(x) = 0$  o  $\chi_B(x) = 1$ , en ambos casos  $\chi_A(1 - \chi_B)(x) = 0$ .  $\square$

4.  $\chi_{A \cap B} = \chi_A \chi_B$

**Verdadero**

*Demostración.* Si  $x \in A \cap B$ , entonces  $\chi_A(x) = 1, \chi_B(x) = 1$  y por ende  $\chi_A \chi_B(x) = 1$ . Ahora, si  $x \notin A \cap B$ , entonces  $\chi_A(x) = 0$ , o  $\chi_B(x) = 0$  y en ambos casos  $\chi_A \chi_B(x) = 0$ .  $\square$

5. Sean  $(X, M)$  espacio medible y  $f \rightarrow [-\infty, \infty]$  una función medible entonces el conjunto  $\{x \in X : f(x) = \infty\}$  es medible.

**Verdadero:**

*Demostración.* Note que

$$\begin{aligned}
 \{x \in X : f(x) = \infty\} &= f^{-1}\{\infty\} \\
 &= f^{-1}\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} [n, \infty]\right) \\
 &= \bigcap_{n \in \mathbb{N}} f^{-1}([n, \infty]) \\
 &= \bigcap_{n \in \mathbb{N}} (f^{-1}([-\infty, n]^c))^c \\
 &= \bigcap_{n \in \mathbb{N}} (f^{-1}([-\infty, n]))^c \\
 &= \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} f^{-1}([-\infty, n])\right)^c
 \end{aligned}$$

Donde  $f^{-1}([-\infty, n]) \in M$  para cada  $n \in \mathbb{N}$ , luego la unión contable de estos conjuntos también está en  $M$  y por lo tanto su complemento lo está. Así,  $f^{-1}\{\infty\} \in M$ .  $\square$

## 1.4. Ejercicios

1. Sean  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  una sucesión de conjuntos en  $X$ , muestre que

$$\chi_{\cup_{i=1}^n A_i} = 1 - \prod_{i=1}^n (1 - \chi_{A_i})$$

*Demostración.* Si  $x \in \cup_{i=1}^n A_i$ , entonces  $\chi_{A_i} = 1$  para algún  $1 \leq i \leq n$ , de modo que el factor  $(1 - \chi_{A_i}) = 0$  y por lo tanto todo el producto  $\prod_{i=1}^n (1 - \chi_{A_i}) = 0$  y así  $1 - \prod_{i=1}^n (1 - \chi_{A_i}) = 1 - 0 = 1$ .

Por otro lado, si  $x \notin \cup_{i=1}^n A_i$  es porque  $x \notin A_i$  para todo  $1 \leq i \leq n$ , esto es,  $\chi_{A_i} = 0$ , y  $\prod_{i=1}^n (1 - \chi_{A_i}) = 1 - \prod_{i=1}^n (1) = 0$ .  $\square$

$$\chi_{\cap_{i=1}^n A_i} = \prod_{i=1}^n \chi_{A_i}.$$

*Demostración.* Si  $x \in \cap_{i=1}^n A_i$  entonces  $\chi_{A_i}(x) = 1$  para todo  $1 \leq i \leq n$ , de modo que  $\prod_{i=1}^n \chi_{A_i}(x) = \prod_{i=1}^n 1 = 1$ .

Si  $x \notin \cap_{i=1}^n A_i$  entonces el factor  $\chi_{A_i}(x) = 0$  para algún  $i$ , luego  $\prod_{i=1}^n \chi_{A_i}(x) = 0$ .  $\square$

$$\chi_{\limsup A_n} = \limsup \chi_{A_n}.$$

*Demostración.*

$$\begin{aligned} \limsup \chi_{A_n}(x) &= \limsup \{\chi_{A_n}(x)\} \\ &= \inf \{\sup \{\chi_{A_k}(x)\} : k \geq n\} \\ &= \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \limsup A_n \\ 0 & \text{si } x \notin \limsup A_n \end{cases} \\ &= \chi_{\limsup A_n} \end{aligned}$$

$\square$

$$\chi_{\liminf A_n} = \liminf \chi_{A_n}.$$

*Demostración.* Indéntica al punto anterior.  $\square$

2. Sean  $(X, M)$  un espacio medible y  $\{f_n : X \rightarrow [-\infty, \infty]\}_{n \in \mathbb{N}}$  una sucesión de funciones medibles. Muestre que:

$$\{x \in X : \sup f_n(x) \leq a, n \in \mathbb{N}\} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \{x \in X : f_n(x) \leq a\}$$

*Demostración.* Sea  $x \in \{x \in X : \sup f_n(x) \leq a, n \in \mathbb{N}\}$ . Note que  $f_n(x) \leq \sup \{f_n(x)\} \leq a$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ , luego  $x \in f_n^{-1}([-\infty, a])$  para todo  $n$ , esto es  $x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \{x \in X : f_n(x) \leq a\}$ .

Recíprocamente, si  $x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \{x \in X : f_n(x) \leq a\}$  entonces  $f_n(x) \leq a$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Esto significa que  $a$  es una cota superior del conjunto  $\{f_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}}$ , por lo que  $\sup \{f_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}} = \sup f_n(x) \leq a$ , y en consecuencia  $x \in \sup f_n^{-1}([-\infty, a]), n \in \mathbb{N} = \{x \in X : \sup \{f_n(x)\} \leq a, n \in \mathbb{N}\}$ .  $\square$

$$\blacksquare \{x \in X : \inf f_n(x) < a, n \in \mathbb{N}\} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{x \in X : f_n(x) < a\}.$$

*Demostración.* Sea  $x$  tal que  $\inf f_n(x) < a$ , entonces para algún  $k \in \mathbb{N}$  se cumple que  $f_k(x) < a$  (de lo contrario tendríamos que  $a$  es una cota inferior del conjunto  $\{f_n(x)\}$  mayor que el  $\inf$ ), luego  $x \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{x \in X : f_n(x) < a\}$ .

Ahora, si  $f_k(x) < a$  para algún  $k$ , es claro que  $\inf f_n(x) \leq f_k(x) < a$ , esto es  $x \in \inf f_n^{-1}([-\infty, a))$ .  $\square$

3. Sea  $(A_n)_n \in \mathbb{N}$  un sucesión de conjuntos en  $X$ .

Tomando  $E_0 = \emptyset$  y  $E_n = \cup_{k=1}^n A_k$ ,  $F_n = A_n - E_{n-1}$  para cada  $n \in \mathbb{N}$ .

Muestre que

$$\blacksquare E_{n-1} \subseteq E_n \text{ para todo } n \in \mathbb{N}$$

*Demostración.* Si  $x \in E_{n-1}$ , entonces  $x \in A_k$  para algún  $k$  entre 1 y  $n-1$ , luego  $x \in A_k \cup A_n$  de modo que  $x \in E_n$ .  $\square$

$$\blacksquare F_i \cap F_j = \emptyset \text{ si } i \neq j.$$

*Demostración.* Supongamos que  $i < j$ . Si  $x \in F_i$  y  $x \in F_j$  entonces  $x \in A_j$  y  $x \notin A_k$  para todo  $k < j$ , lo que contradice  $x \in A_i$ .  $\square$

$$\blacksquare \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$

*Demostración.* Es evidente que  $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$  por como están definidos los  $E_n$ . Otro hecho que salta a la vista es que  $\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$  por la definición de los  $F_n$ . Lo único que queda por notar es que  $\bigcup_{k=1}^n F_k = \bigcup_{k=1}^n A_k$  para cada  $n \geq 1$ , donde nuevamente tenemos una inclusión gratis. Ahora, considere el mayor  $k \leq n$  tal que  $x \in A_k$ . Como  $A_k = (A_k \cap E_{k-1}) \cup (A_k - E_{k-1}) = (A_k \cap E_{k-1}) \cup F_n$ . Si  $x \in F_n$  hemos terminado. Si  $x \in A_k \cap E_{k-1} = \bigcup_{j=1}^{k-1} (A_k \cap A_j)$ , basta con tomar el mínimo  $j$  tal que  $x \in A_k \cap A_j$ . Por lo tanto  $x \in A_j - E_{j-1} = F_j$ . (Si  $x$  perteneciera a  $E_{j-1}$ , pertenecería a algún  $A_i$  con  $i < j$ ). Luego  $x \in \bigcup_{k=1}^{\infty} F_k$  y concluimos  $\bigcup_{k=1}^{\infty} F_k = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ .  $\square$

4. Sea  $(A_n)_n \in \mathbb{N}$  un sucesión de conjuntos en  $X$ .

Defina:

$$\limsup A_n = \bigcap_{m=1}^{\infty} (\bigcup_{n=m}^{\infty} A_n).$$

$$\liminf A_n = \bigcup_{m=1}^{\infty} (\bigcap_{n=m}^{\infty} A_n).$$

Muestre que:

$$\emptyset \subseteq \liminf A_n \subseteq \limsup A_n \subseteq X.$$

*Demostración.* La única inclusión no trivial es  $\liminf A_n \subseteq \limsup A_n$ .

Primero note que  $\{\bigcup_{n=k}^{\infty} A_n\}_{k \in \mathbb{N}}$  es una secuencia decreciente.

Sea  $x \in \liminf A_n$ . Existe  $p \in \mathbb{N}$  tal que para todo entero  $k \geq p$ ,  $x \in A_k$  y por ende  $x \in \bigcup_{n=k}^{\infty} A_n$ , por lo dicho en la línea de arriba,  $\bigcup_{n=k}^{\infty} A_n \supseteq \bigcup_{n=p}^{\infty} A_n$ , para todo  $1 \leq k \leq p$ , luego  $x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$  para todo entero  $n \geq 1$ , ergo,  $x \in \bigcap_{m=1}^{\infty} (\bigcup_{n=m}^{\infty} A_n) = \limsup A_n$ .  $\square$

5. Sea  $(A_n)_n \in \mathbb{N}$  un sucesión de conjuntos en  $X$  tal que  $A_i \subseteq A_{i+1}$  para todo  $i \in \mathbb{N}$ . Muestre que:

$$\limsup A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \liminf A_n.$$

*Demostración.* Note que  $\bigcup_{k=m}^n A_k = \bigcup_{k=1}^n A_k = A_n$  y  $\bigcap_{k=m}^n A_k = A_m$ ,  $m \in \mathbb{N}, m \leq n$  cualquiera sea  $n \in \mathbb{N}$ . Luego  $\bigcap_{k=m}^{\infty} A_k = A_m$ .

$$\text{Ahora, } \liminf A_n = \bigcup_{m=1}^{\infty} (\bigcap_{n=m}^{\infty} A_n) = \bigcup_{m=1}^{\infty} A_m.$$

$$\text{Por su parte, } \limsup A_n = \bigcap_{m=1}^{\infty} (\bigcup_{n=m}^{\infty} A_n) = \bigcap_{m=1}^{\infty} (\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n.$$

□

6. Sea  $(A_n)_n \in \mathbb{N}$  un sucesión de conjuntos en  $X$  tal que  $A_i \supseteq A_{i+1}$  para todo  $i \in \mathbb{N}$ . Muestre que:

$$\limsup A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \liminf A_n.$$

*Demostración.* La prueba es análoga a la del punto anterior y se deja como ejercicio al lector. □

7. Sean  $(X, M, \mu)$  un espacio de medida y  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  una sucesión de conjuntos medibles, Muestre que:

- $\mu(\liminf A_n) \leq \liminf \mu(A_n)$
- $\limsup \mu(A_n) \leq \mu(\limsup A_n)$ , si  $\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) < \infty$ .



# Capítulo 2

## La medida de Lebesgue

### 2.1. Ejercicios

# Capítulo 3

## La integral

### 3.1. Ejercicios

# Capítulo 4

## Medida producto

### 4.1. Ejercicios

# Capítulo 5

## Espacios $L_p$

### 5.1. Ejercicios

# Capítulo 6

## Algunos tipos de convergencia

### 6.1. Ejercicios

# Capítulo 7

## Cargas

### 7.1. Ejercicios