[Soluciones] Notas de Teoría de la Medida (L. Rendón)

ViucheOwO

11 de noviembre de 2024

Índice general

Capítulo 1

Definiciones preliminares

1.1. Quiz 1

Determine si cada uno de los siguientes enunciados es verdadero o falso:

1. $\mathbb{Q} \in B$ donde B es la σ - álgebra de Borel.
Verdadero:

Demostración. Note que para cada $r \in \mathbb{Q}, \{r\} \in B$ puesto que este es un cerrado en $\mathbb{R}$, i.e., es complemento de un abierto (véase $(-\infty, r) \cup (r, \infty)$), que está en B.
La enumerabilidad de $\mathbb{Q}$ nos garantiza que $\bigcup_{r \in \mathbb{Q}} \{r\} = \mathbb{Q} \in B$ $\square$

2. $\mathbb{N} \in B$ donde B es la σ - álgebra de Borel.
Verdadero:

Demostración. La prueba es idéntica a la del punto anterior. $\square$

3. El conjunto $F = \{M : M \text{ es una } \sigma\text{- álgebra en } \mathbb{R}\}$ es enumerable.
Falso:

Demostración. Considere la aplicación $\psi : \mathbb{R} \to F$ tal que $\psi(\alpha) := M_\alpha$ donde $M_\alpha =: \{\mathbb{R}, \emptyset, (-\infty, \alpha), [\alpha, \infty)\}$. Considere $\mathcal{M} = Im\psi$, puesto que ψ es inyectiva entonces $|\mathcal{M}| \leq |F|$, por lo tanto F no puede ser contable. $\square$

4. La función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^3$ es medible, cuando tomamos en $\mathbb{R}$ la σ - álgebra de Borel.
Verdadero:

Demostración. Probaremos primero por inducción que $f(x) = x^n$ es medible para cada $n \in \mathbb{N}$. Para $n = 1$ el resultado es obvio puesto que $f^{-1}(V) = V \in B$ para cada V abierto. Supongamos que el enunciado es cierto para $n \geq 1$, luego $f(x) = x^{n+1} = x^n \cdot x$ es medible por la proposición 1.1.18. ya que $f = h \circ \varphi$ donde $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $\varphi(y, z) = y \cdot z$ es contínua y $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 := (x^n, x)$ es medible ya que cada una de sus componentes lo es. Por le principio de inducción matemática concluimos que f es medible y tomando el caso $n = 3$ tenemos el resultado inicialmente pedido. $\square$

5. La función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = |x|$ es medible, cuando tomamos en $\mathbb{R}$ la σ - álgebra de Borel.
   Verdadero

   Demostración. Note que $f(x) = |x| = (h \circ g)(x)$ es medible por la proposición 1.1.17, donde $g(x) = x^2$ es medible por el punto anterior y $h(x) = \sqrt{x}$ es contínua. □

1.2. Quiz 2

Determine si cada uno de los siguientes enunciados es verdadero o falso:

1. Sean (X, M) espacio meible y $f : X \to \mathbb{R}$. si f es medible entonces $|f|$ es medible.
   Verdadero:

   Demostración. Note que $|f| = g \circ f$ donde $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con $g(x) = |x|$ es continua. La proposición 1.1.17 garantiza que $|f|$ es medible. □

2. Sean (X, M) espacio meible y $f : X \to \mathbb{R}$. si $|f|$ es medible entonces f es medible.
   Falso:

   Demostración. Sea E un conjunto no medible y considere f definida como la siguiente función simple: $\chi_E - \chi_{E^c}$, donde $E^c = X - E$ Es claro que $|f| = 1$ es medible pero f no lo es. □

3. Sean (X, M) un espacio medible y $f : X \to \mathbb{R}$. Si f es medible entonces $f^+ = sup\{f(x), 0\}$ y $f^- = sup\{-f(x), 0\}$ son medibles.
   Verdadero

   Demostración. Basta probarlo para los abiertos básicos (α, β) con $\alpha < \beta$.
   Si $\alpha, \beta < 0$ entonces $(f^+)^{-1}((\alpha, \beta)) = \emptyset$
   Si $\alpha, \beta > 0$ entonces $(f^+)^{-1}(\alpha, \beta) = f^{-1}((\alpha, \beta)) \in M$.
   Si $\alpha < 0, \beta > 0$ entonces $(f^+)^{-1}(\alpha, \beta) = (f^+)^{-1}[0, \beta) = f^{-1}((-\infty, 0]) \cup f^{-1}((0, \beta)) \in M$
   Note que $f^{-1}((-\infty, 0]) \in M$ ya que $f^{-1}((-\infty, 0]) = f^{-1}((0, \infty)^c) = (f^{-1}((0, \infty)))^c \in M$ pues $f^{-1}((0, \infty)) \in M$. □

4. $f^+ = \frac{1}{2}(|f| + f), f^+$ como en el numeral anterior.
   Verdadero:

   Demostración. Si $f(x) \leq 0$ entonces $\frac{1}{2}(|f| + f)(x) = \frac{1}{2}(-f + f)(x) = 0$. Ahora, si $f(x) > 0$, entonces $\frac{1}{2}(|f| + f)(x) = \frac{1}{2}(f + f)(x) = \frac{1}{2}(2f)(x) = f(x)$, lo cual coincide con nuestra definición de f^+. □

5. $f^- = \frac{1}{2}(|f| - f), f^+$ como en el numeral anterior
   Verdadero:

   Demostración. La prueba es análoga a la anterior. □

1.3. Quiz 3

Determine si cada uno de los siguientes enunciados es verdadero o falso:

1. Sea (X, M) un espacio medible entonces toda función simple es medible.
   Falso:

   Demostración. En virtud de la proposición 1.4.3 basta tomar cualquier conjunto no medible E e inmediatamente χ_E es una función simple no medible. □

2. $\chi_{A\cup B} = \chi_A + \chi_B$
   Falso:

   Demostración. Tome $A, B \subset X$ no disyuntos y $x \in A \cap B$. Note que $\chi_{A\cup B}(x) = 1$, mientras que $\chi_A + \chi_B(x) = 2$. □

3. $\chi_{A-B} = \chi_A(1 - \chi_B)$
   Verdadero:

   Demostración. Si $x \in A - B$, entonces $\chi_A(x) = 1, \chi_B(x) = 0$, luego $\chi_A(1 - \chi_B)(x) = 1(1 - 0) = 1$. Ahora si $x \notin A - B$ entonces $\chi_A(x) = 0$ o $\chi_B(x) = 1$, en ambos casos $\chi_A(1 - \chi_B)(x) = 0$. □

4. $\chi_{A\cap B} = \chi_A\chi_B$
   Verdadero

   Demostración. Si $x \in A \cap B$, entonces $\chi_A(x) = 1, \chi_B(x) = 1$ y por ende $\chi_A\chi_B(x) = 1$. Ahora, si $x \notin A\cap B$, entonces $\chi_A(x) = 0$, o $\chi_B(x) = 0$ y en ambos casos $\chi_A\chi_B(x) = 0$. □

5. Sean (X, M) espacio medible y $f \to [-\infty, \infty]$ una función medible entonces el conjunto $\{x \in X : f(x) = \infty\}$ es medible.
   Verdadero:

   Demostración. Note que

$$
\begin{aligned}
\{x \in X : f(x) = \infty\} &= f^{-1}\{\infty\} \\
&= f^{-1}\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} [n, \infty]\right) \\
&= \bigcap_{n\in\mathbb{N}} f^{-1}([n, \infty]) \\
&= \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \left(f^{-1}([-\infty, n)^c)\right) \\
&= \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \left(f^{-1}([-\infty, n))\right)^c \\
&= \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} f^{-1}([-\infty, n))\right)^c
\end{aligned}
$$

   Donde $f^{-1}([-\infty, n)) \in M$ para cada $n \in \mathbb{N}$, luego la unión contable de estos conjuntos también está en M y por lo tanto su complemento lo está. Asi, $f^{-1}\{\infty\} \in M$. □

1.4. Ejercicios

1. Sean $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de conjuntos en X, muestre que

   - $\chi_{\cup_{i=1}^n A_i} = 1 - \prod_{i=1}^n (1 - \chi_{A_i})$

     Demostración. Si $x \in \cup_{i=1}^n A_i$, entonces $\chi_{A_i} = 1$ para algún $1 \le i \le n$, de modo que el factor $(1 - \chi_{A_i}) = 0$ y por lo tanto todo el producto $\prod_{i=1}^n (1 - \chi_{A_i}) = 0$ y así $1 - \prod_{i=1}^n (1 - \chi_{A_i}) = 1 - 0 = 1$.
     Por otro lado, si $x \notin \cup_{i=1}^n A_i$ es porque $x \notin A_i$ para todo $1 \le i \le n$, esto es, $\chi_{A_i} = 0$, y $\prod_{i=1}^n (1 - \chi_{A_i} = 1 - \prod_1^n (1) = 0$. □

   - $\chi_{\cap_{i=1}^n A_i} = \prod_{i=1}^n \chi_{A_i}$.

     Demostración. Si $x \in \cap_{i=1}^n A_i$ entonces $\chi_{A_i}(x) = 1$ para todo $1 \le i \le n$, de modo que $\prod_1^n \chi_{A_i}(x) = \prod_1^n 1 = 1$.
     Si $x \notin \cap_{i=1}^n A_i$ entonces el factor $\chi_{A_i}(x) = 0$ para algún i, luego $\prod_1^n = \chi_{A_i}(x) = 0$. □

   - $\chi_{\text{lím sup} A_n} = \text{lím sup}\, \chi_{A_n}$.

     Demostración.

$$
\begin{aligned}
\text{lím sup}\, \chi_{A_n}(x) &= \text{lím sup} \{\chi_{A_n}(x)\} \\
&= \text{ínf} \{\sup \{\chi_{A_k}(x)\} : k \ge n\} \\
&= \begin{cases} 1 \text{ si } x \in \text{lím sup} A_n \\ 0 \text{ si } x \notin \text{lím sup} A_n \end{cases} \\
&= \chi_{\text{lím sup} A_n}
\end{aligned}
$$

□

   - $\chi_{\text{lím inf} A_n} = \text{lím inf}\, \chi_{A_n}$.

     Demostración. Indéntica al punto anterior. □

2. Sean (X, M) un espacio medible y $\{f_n : X \to [-\infty, \infty]\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones medibles. Muestre que:

   - $\{x \in X : \sup f_n(x) \le a, n \in \mathbb{N}\} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \{x \in X : f_n(x) \le a\}$

     Demostración. Sea $x \in \{x \in X : \sup f_n(x) \le a, n \in \mathbb{N}\}$. Note que $f_n(x) \le \sup \{f_n(x)\} \le a$ para todo $n \in \mathbb{N}$, luego $x \in f_n^{-1}([-\infty, a])$ para todo n, esto es $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \{x \in X : f_n(x) \le a\}$.
     Reciprocamente, si $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \{x \in X : f_n(x) \le a\}$ entonces $f_n(x) \le a$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Esto significa que a es una cota superior del conjunto $\{f_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$, por lo que $\sup \{f_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}} = \sup f_n(x) \le a$, y en consecuencia $x \in \sup f_n^{-1}([-\infty, a]), n \in \mathbb{N} = \{x \in X : \sup \{f_n(x)\} \le a, n \in \mathbb{N}\}$. □

- $\{x \in X : \inf f_n(x) < a, n \in \mathbb{N}\} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{x \in X : f_n(x) < a\}$.

  Demostración. Sea x tal que $\inf f_n(x) < a$, entonces para algún $k \in \mathbb{N}$ se cumple que $f_k(x) < a$ (de lo contrario tendríamos que a es una cota inferior del conjunto $\{f_n(x)\}$ mayor que el ínf), luego $x \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{x \in X : f_n(x) < a\}$.
  Ahora, si $f_k(x) < a$ para algún k, es claro que $\inf f_n(x) \leq f_k(x) < a$, esto es $x \in \inf f_n^{-1}([-\infty, a))$. □

3. Sea $(A_n)_n \in \mathbb{N}$ un sucesión de conjuntos en X.
   Tomando $E_0 = \emptyset$ y $E_n = \cup_{k=1^n} A_k, F_n = A_n - E_{n-1}$ para cada $n \in \mathbb{N}$.
   Muestre que

   - $E_{n-1} \subseteq E_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$

     Demostración. Si $x \in E_{n-1}$, entonces $x \in A_k$ para algún k entre 1 y $n-1$, luego $x \in A_k \cup A_n$ de modo que $x \in E_n$.
     □

   - $F_i \cap F_j = \emptyset$ si $i \neq j$.

     Demostración. Supongamos que $i < j$. Si $x \in F_i$ y $x \in F_j$ entonces $x \in A_j$ y $x \notin A_k$ para todo $k < j$, lo que contradice $x \in A_i$. □

   - $\cup_{n=1}^{\infty} E_n = \cup_{n=1}^{\infty} F_n = \cup_{n=1}^{\infty} A_n$

     Demostración. Es evidente que $\cup_{n=1}^{\infty} E_n = \cup_{n=1}^{\infty} A_n$ por como están definidos los E_n. Otro hecho que salta a la vista es que $\cup_{n=1}^{\infty} F_n \subset \cup_{n=1}^{\infty} A_n$ por la definición de los F_n. Lo único que queda por notar es que $\cup_{k=1}^{n} F_k = \cup_{k=1}^{n} A_k$ para cada $n \geq 1$, donde nuevamente tenemos una inclusión gratis. Ahora, considere el mayor $k \leq n$ tal que $x \in A_k$. Como $A_k = (A_k \cap E_{k-1}) \cup (A_k - E_{k-1}) = (A_k \cap E_{k-1}) \cup F_n$. Si $x \in F_n$ hemos terminado. Si $x \in A_k \cap E_{k-1} = \cup_{j=1}^{k-1}(A_k \cap A_j)$, basta con tomar el mínimo j tal que $x \in A_k \cap A_j$. Por lo tanto $x \in A_j - E_{j-1} = F_j$. (Si x perteneciera a E_{j-1}, pertenecería a algún A_i con $i < j$). Luego $x \in \cup_{k=1^n} F_k$ y concluimos $\cup_{k=1}^{\infty} F_k = \cup_{k=1}^{\infty} A_k$
     □

4. Sea $(A_n)_n \in \mathbb{N}$ un sucesión de conjuntos en X.

   Defina:
   $\limsup A_n = \cap_{m=1}^{\infty}(\cup_{n=m}^{\infty} A_n)$.
   $\liminf A_n = \cup_{m=1}^{\infty}(\cap_{n=m}^{\infty} A_n)$.

   Muestre que:
   $\emptyset \subseteq \liminf A_n \subseteq \limsup A_n \subseteq X$.

   Demostración. La única inclusión no trivial es $\liminf A_n \subseteq \limsup A_n$.

   Primero note que $\{\cup_{n=k}^{\infty} A_n\}_{k\in\mathbb{N}}$ es una secuencia decreciente.

   Sea $x \in \liminf A_n$. Existe $p \in \mathbb{N}$ tal que para todo entero $k \geq p, x \in A_k$ y por ende $x \in \cup_{n=k}^{\infty} A_n$, por lo dicho en la línea de arriba, $\cup_{n=k}^{\infty} A_n \supseteq \cup_{n=p}^{\infty} A_n$, para todo $1 \leq k \leq p$, luego $x \in \cup_{n=1}^{\infty} A_n$ para todo entero $n \geq 1$, ergo, $x \in \cap_{m=1}^{\infty}(\cup_{n=m}^{\infty} A_n) = \limsup A_n$. □

5. Sea $(A_n)_n \in \mathbb{N}$ un sucesión de conjuntos en X tal que $A_i \subseteq A_{i+1}$ para todo $i \in \mathbb{N}$. Muestre que:

   $\limsup A_n = \cup_{n=1}^{\infty} A_n = \liminf A_n$.

   Demostración. Note que $\cup_{k=m}^{n} A_k = \cup_{k=1}^{n} A_k = A_n$ y $\cap_{k=m}^{n} A_k = A_m$, $m \in \mathbb{N}, m \leq n$ cualquiera sea $n \in \mathbb{N}$. Luego $\cap_{k=m}^{\infty} A_k = A_m$.

   Ahora, $\liminf A_n = \cup_{m=1}^{\infty}(\cap_{n=m}^{\infty} A_n) = \cup_{m=1}^{\infty} A_m$.

   Por su parte, $\limsup A_n = \cap_{m=1}^{\infty}(\cup_{n=m}^{\infty} A_n) = \cap_{m=1}^{\infty}(\cup_{n=1}^{\infty} A_n) = \cup_{n=1}^{\infty} A_n$.

   □

6. Sea $(A_n)_n \in \mathbb{N}$ un sucesión de conjuntos en X tal que $A_i \supseteq A_{i+1}$ para todo $i \in \mathbb{N}$. Muestre que:

   $\limsup A_n = \cap_{n=1}^{\infty} A_n = \liminf A_n$.

   Demostración. La prueba es análoga a la del punto anterior y se deja como ejercicio al lector. □

7. Sean (X, M, μ) un espacio de medida y $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de conjuntos medibles, Muestre que:

   - $\mu(\liminf A_n) \leq \liminf \mu(A_n)$

     Demostración. Primeramente recordemos que para cada $k \in \mathbb{N}, \mathcal{A}_k = \cap_{n=k}^{\infty} A_n \in M$ puesto que cada $A_n \in M$. Asimismo $\cup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{A}_n \in M$

     Ahora note que la secuencia $\{\mathcal{A}_k\} = \{\cup_{m=k}^{\infty} A_m\}$ es creciente, por lo que

$$\begin{aligned}
\mu(\liminf A_n) &= \mu(\cup_{n=1}^{\infty}(\cap_{m=n} A_m)) \\
&= \mu(\cup_{n=1} \mathcal{A}_n) \\
&= \lim_{n\to\infty} \mu(\mathcal{A}_n) \\
&= \lim_{n\to\infty} \mu(\cap_{m=n} A_m) \\
&= \liminf \mu(\cap_{m=n}^{\infty} A_m) \\
&\leq \liminf \mu(A_n)
\end{aligned}$$

     . □

   - $\limsup \mu(A_n) \leq \mu(\limsup A_n)$, si $\mu(\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n) < \infty$.

     Demostración. Primeramente recordemos que para cada $k \in \mathbb{N}, \mathcal{A}_k = \cup_{n=k}^{\infty} A_n \in M$ puesto que cada $A_n \in M$. Asimismo $\cap_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{A}_n \in M$

Ahora note que la secuencia $\{\mathcal{A}_k\} = \{\cup_{m=k}^{\infty} A_m\}$ es decreciente y $\mathcal{A}_1 < \infty$, de modo que

$$\begin{aligned}
\mu(\limsup A_n) &= \mu(\cap_{n=1}^{\infty}(\cup_{m=k}^{\infty} A_m)) \\
&= \mu(\cap_{n=1}^{\infty}\mathcal{A}_n) \\
&= \lim_{n\to\infty} \mu(\mathcal{A}_n) \\
&= \lim_{n\to\infty} \mu(\cup_{k=n}^{\infty} A_k) \\
&= \limsup \mu(\cup_{k=n}^{\infty} A_k) \\
&\geq \limsup \mu(A_n)
\end{aligned}$$

□

8. Sean (X, M) un espacio medible y $f : X \to [-\infty, \infty]$ una función. Muestre que:

f es medible si y solo si $\{x \in X : f(x) = \infty\}, \{x \in X : f(x) = -\infty\} \in M$ y

$$f^{\sim} = \begin{cases} f & \text{si } |f| < \infty, \\ 0 & \text{si } |f| = \infty. \end{cases}$$

es medible.

Demostración. $\Rightarrow$) Sea f medible, en virtud del punto 4 del 1.1 las preimágenes de $\{\pm\infty\}$ son medibles. Ahora, veamos que para cada $\alpha \geq 0, (f^{\sim})^{-1}((\alpha, \infty]) = (f^{\sim})^{-1}((\alpha, \infty)) \cup (f^{\sim})^{-1}(\{\infty\})$, donde $(f^{\sim})^{-1}(\{\infty\}) = \emptyset \in M$ ya que si $x \in (f^{\sim})^{-1}(\{\infty\})$, entonces $f(x) = \infty$, pero esto implicaría $|f|(x) = \infty$, y por definición de $f^{\sim}$, tendríamos $f^{\sim} = 0$. Es claro que $(f^{\sim})^{-1}((\alpha, \infty)) = f^{-1}((\alpha, \infty)) \in M$ porque f es medible.

Si $\alpha < 0$ entonces $(f^{\sim})^{-1}((\alpha, \infty]) = (f^{\sim})^{-1}((\alpha, 0)) \cup (f^{\sim})^{-1}(\{0\}) \cup (f^{\sim})^{-1}((0, \infty])$, donde $(f^{\sim})^{-1}(\{0\}\}) = f^{-1}(\{-\infty, \infty\}) \in M, (f^{\sim})^{-1}((0, \infty]) \in M$ y $(f^{\sim})^{-1}((\alpha, 0) = f^{-1}((\alpha, 0)) \in M$.

Concluimos que $f^{\sim}$ es medible.

$\Leftarrow$) Suponga $f^{\sim}$ es medible y que $\{x \in X : f(x) = \infty\}, \{x \in X : f(x) = -\infty\} \in M$. Veamos que $f^{-1}((\alpha, \infty]) \in M$ con $\alpha \geq 0$. Como $(f^{\sim})^{-1}((\alpha, \infty]) \in M$ y $(f^{\sim})^{-1}((\alpha, \infty]) = (f^{\sim})^{-1}((\alpha, \infty)) \cup (f^{\sim})^{-1}(\{\infty\})$ y $(f^{\sim})^{-1}(\{\infty\}) = \emptyset \in M$ entonces $(f^{\sim})^{-1}((\alpha, \infty]) = f^{-1}((\alpha, \infty)) \in M$.

Si $\alpha < 0$ entonces $(f^{\sim})^{-1}((\alpha, \infty]) = (f^{\sim})^{-1}((\alpha, 0)) \cup (f^{\sim})^{-1}(\{0\}) \cup (f^{\sim})^{-1}((0, \infty])$, donde $(f^{\sim})^{-1}(\{0\}\}) = f^{-1}(\{-\infty, \infty\}) \in M, f^{-1}((0, \infty]) = (f^{\sim})^{-1}((0, \infty]) \in M$, y, $f^{-1}((\alpha, 0) = (f^{\sim})^{-1}((\alpha, 0)) \in M$.

Concluimos que f es medible. □

Capítulo 2

La medida de Lebesgue

2.1. Ejercicios

Capítulo 3

La integral

3.1. Ejercicios

Capítulo 4

Medida producto

4.1. Ejercicios

Capítulo 5

Espacios Lp

5.1. Ejercicios

Capítulo 6

Algunos tipos de convergencia

6.1. Ejercicios

Capítulo 7

Cargas

7.1. Ejercicios