

[Soluciones] Notas de Teoría de la Medida (L. Rendón)

ViucheOwO

17 de noviembre de 2024

Índice general

| | |
|---|-----------|
| 1. Definiciones preliminares | 3 |
| 1.1. Quiz 1 | 3 |
| 1.2. Quiz 2 | 4 |
| 1.3. Quiz 3 | 5 |
| 1.4. Ejercicios | 6 |
| 2. La medida de Lebesgue | 10 |
| 2.1. Ejercicios | 10 |
| 3. La integral | 13 |
| 3.1. Ejercicios | 13 |
| 4. Medida producto | 14 |
| 4.1. Ejercicios | 14 |
| 5. Espacios L_p | 15 |
| 5.1. Ejercicios | 15 |
| 6. Algunos tipos de convergencia | 16 |
| 6.1. Ejercicios | 16 |
| 7. Cargas | 17 |
| 7.1. Ejercicios | 17 |

Capítulo 1

Definiciones preliminares

1.1. Quiz 1

Determine si cada uno de los siguientes enunciados es verdadero o falso:

1. $\mathbb{Q} \in B$ donde B es la σ - álgebra de Borel.

Verdadero:

Demostración. Note que para cada $r \in \mathbb{Q}$, $\{r\} \in B$ puesto que este es un cerrado en \mathbb{R} , i.e., es complemento de un abierto (véase $(-\infty, r) \cup (r, \infty)$), que está en B .

La enumerabilidad de \mathbb{Q} nos garantiza que $\bigcup_{r \in \mathbb{Q}} \{r\} = \mathbb{Q} \in B$ □

2. $\mathbb{N} \in B$ donde B es la σ - álgebra de Borel.

Verdadero:

Demostración. La prueba es idéntica a la del punto anterior. □

3. El conjunto $F = \{M : M \text{ es una } \sigma\text{-álgebra en } \mathbb{R}\}$ es enumerable.

Falso:

Demostración. Considere la aplicación $\psi : \mathbb{R} \rightarrow F$ tal que $\psi(\alpha) := M_\alpha$ donde $M_\alpha =: \{\mathbb{R}, \emptyset, (-\infty, \alpha), [\alpha, \infty)\}$. Considere $\mathcal{M} = \text{Im}\psi$, puesto que ψ es inyectiva entonces $|\mathcal{M}| \leq |\mathbb{R}|$, por lo tanto F no puede ser contable. □

4. La función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^3$ es medible, cuando tomamos en \mathbb{R} la σ - álgebra de Borel.

Verdadero:

Demostración. Probaremos primero por inducción que $f(x) = x^n$ es medible para cada $n \in \mathbb{N}$. Para $n = 1$ el resultado es obvio puesto que $f^{-1}(V) = V \in B$ para cada V abierto. Supongamos que el enunciado es cierto para $n \geq 1$, luego $f(x) = x^{n+1} = x^n \cdot x$ es medible por la proposición 1.1.18. ya que $f = h \circ \varphi$ donde $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $\varphi(y, z) = y \cdot z$ es continua y $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2 := (x^n, x)$ es medible ya que cada una de sus componentes lo es. Por el principio de inducción matemática concluimos que f es medible y tomando el caso $n = 3$ tenemos el resultado inicialmente pedido. □

5. La función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = |x|$ es medible, cuando tomamos en \mathbb{R} la σ -álgebra de Borel.

Verdadero

Demostración. Note que $f(x) = |x| = (h \circ g)(x)$ es medible por la proposición 1.1.17, donde $g(x) = x^2$ es medible por el punto anterior y $h(x) = \sqrt{x}$ es continua. \square

1.2. Quiz 2

Determine si cada uno de los siguientes enunciados es verdadero o falso:

1. Sean (X, M) espacio medible y $f : X \rightarrow \mathbb{R}$. si f es medible entonces $|f|$ es medible.

Verdadero:

Demostración. Note que $|f| = g \circ f$ donde $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ con $g(x) = |x|$ es continua. La proposición 1.1.17 garantiza que $|f|$ es medible. \square

2. Sean (X, M) espacio medible y $f : X \rightarrow \mathbb{R}$. si $|f|$ es medible entonces f es medible.

Falso:

Demostración. Sea E un conjunto no medible y considere f definida como la siguiente función simple: $\chi_E - \chi_{E^c}$, donde $E^c = X - E$. Es claro que $|f| = 1$ es medible pero f no lo es. \square

3. Sean (X, M) un espacio medible y $f : X \rightarrow \mathbb{R}$. Si f es medible entonces $f^+ = \sup\{f(x), 0\}$ y $f^- = \sup\{-f(x), 0\}$ son medibles.

Verdadero

Demostración. Basta probarlo para los abiertos básicos (α, β) con $\alpha < \beta$.

Si $\alpha, \beta < 0$ entonces $(f^+)^{-1}((\alpha, \beta)) = \emptyset$

Si $\alpha, \beta > 0$ entonces $(f^+)^{-1}((\alpha, \beta)) = f^{-1}((\alpha, \beta)) \in M$.

Si $\alpha < 0, \beta > 0$ entonces $(f^+)^{-1}((\alpha, \beta)) = (f^+)^{-1}[0, \beta) = f^{-1}((-\infty, 0]) \cup f^{-1}((0, \beta)) \in M$

Note que $f^{-1}((-\infty, 0]) \in M$ ya que $f^{-1}((-\infty, 0]) = f^{-1}((0, \infty)^c) = (f^{-1}((0, \infty)))^c \in M$ pues $f^{-1}((0, \infty)) \in M$. \square

4. $f^+ = \frac{1}{2}(|f| + f)$, f^+ como en el numeral anterior.

Verdadero:

Demostración. Si $f(x) \leq 0$ entonces $\frac{1}{2}(|f| + f)(x) = \frac{1}{2}(-f + f)(x) = 0$. Ahora, si $f(x) > 0$, entonces $\frac{1}{2}(|f| + f)(x) = \frac{1}{2}(f + f)(x) = \frac{1}{2}(2f)(x) = f(x)$, lo cual coincide con nuestra definición de f^+ . \square

5. $f^- = \frac{1}{2}(|f| - f)$, f^- como en el numeral anterior

Verdadero:

Demostración. La prueba es análoga a la anterior. \square

1.3. Quiz 3

Determine si cada uno de los siguientes enunciados es verdadero o falso:

1. Sea (X, M) un espacio medible entonces toda función simple es medible.

Falso:

Demostración. En virtud de la proposición 1.4.3 basta tomar cualquier conjunto no medible E e inmediatamente χ_E es una función simple no medible. \square

2. $\chi_{A \cup B} = \chi_A + \chi_B$

Falso:

Demostración. Tome $A, B \subset X$ no disyuntos y $x \in A \cap B$. Note que $\chi_{A \cup B}(x) = 1$, mientras que $\chi_A + \chi_B(x) = 2$. \square

3. $\chi_{A-B} = \chi_A(1 - \chi_B)$

Verdadero:

Demostración. Si $x \in A - B$, entonces $\chi_A(x) = 1, \chi_B(x) = 0$, luego $\chi_A(1 - \chi_B)(x) = 1(1 - 0) = 1$. Ahora si $x \notin A - B$ entonces $\chi_A(x) = 0$ o $\chi_B(x) = 1$, en ambos casos $\chi_A(1 - \chi_B)(x) = 0$. \square

4. $\chi_{A \cap B} = \chi_A \chi_B$

Verdadero

Demostración. Si $x \in A \cap B$, entonces $\chi_A(x) = 1, \chi_B(x) = 1$ y por ende $\chi_A \chi_B(x) = 1$. Ahora, si $x \notin A \cap B$, entonces $\chi_A(x) = 0$, o $\chi_B(x) = 0$ y en ambos casos $\chi_A \chi_B(x) = 0$. \square

5. Sean (X, M) espacio medible y $f \rightarrow [-\infty, \infty]$ una función medible entonces el conjunto $\{x \in X : f(x) = \infty\}$ es medible.

Verdadero:

Demostración. Note que

$$\begin{aligned}
 \{x \in X : f(x) = \infty\} &= f^{-1}\{\infty\} \\
 &= f^{-1}\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} [n, \infty]\right) \\
 &= \bigcap_{n \in \mathbb{N}} f^{-1}([n, \infty]) \\
 &= \bigcap_{n \in \mathbb{N}} (f^{-1}([-\infty, n]^c))^c \\
 &= \bigcap_{n \in \mathbb{N}} (f^{-1}([-\infty, n]))^c \\
 &= \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} f^{-1}([-\infty, n])\right)^c
 \end{aligned}$$

Donde $f^{-1}([-\infty, n]) \in M$ para cada $n \in \mathbb{N}$, luego la unión contable de estos conjuntos también está en M y por lo tanto su complemento lo está. Así, $f^{-1}\{\infty\} \in M$. \square

1.4. Ejercicios

1. Sean $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de conjuntos en X , muestre que

$$\chi_{\cup_{i=1}^n A_i} = 1 - \prod_{i=1}^n (1 - \chi_{A_i})$$

Demostración. Si $x \in \cup_{i=1}^n A_i$, entonces $\chi_{A_i} = 1$ para algún $1 \leq i \leq n$, de modo que el factor $(1 - \chi_{A_i}) = 0$ y por lo tanto todo el producto $\prod_{i=1}^n (1 - \chi_{A_i}) = 0$ y así $1 - \prod_{i=1}^n (1 - \chi_{A_i}) = 1 - 0 = 1$.

Por otro lado, si $x \notin \cup_{i=1}^n A_i$ es porque $x \notin A_i$ para todo $1 \leq i \leq n$, esto es, $\chi_{A_i} = 0$, y $\prod_{i=1}^n (1 - \chi_{A_i}) = 1 - \prod_{i=1}^n (1) = 0$. \square

$$\chi_{\cap_{i=1}^n A_i} = \prod_{i=1}^n \chi_{A_i}.$$

Demostración. Si $x \in \cap_{i=1}^n A_i$ entonces $\chi_{A_i}(x) = 1$ para todo $1 \leq i \leq n$, de modo que $\prod_{i=1}^n \chi_{A_i}(x) = \prod_{i=1}^n 1 = 1$.

Si $x \notin \cap_{i=1}^n A_i$ entonces el factor $\chi_{A_i}(x) = 0$ para algún i , luego $\prod_{i=1}^n \chi_{A_i}(x) = 0$. \square

$$\chi_{\limsup A_n} = \limsup \chi_{A_n}.$$

Demostración.

$$\begin{aligned} \limsup \chi_{A_n}(x) &= \limsup \{\chi_{A_n}(x)\} \\ &= \inf \{\sup \{\chi_{A_k}(x)\} : k \geq n\} \\ &= \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \limsup A_n \\ 0 & \text{si } x \notin \limsup A_n \end{cases} \\ &= \chi_{\limsup A_n} \end{aligned}$$

\square

$$\chi_{\liminf A_n} = \liminf \chi_{A_n}.$$

Demostración. Indéntica al punto anterior. \square

2. Sean (X, M) un espacio medible y $\{f_n : X \rightarrow [-\infty, \infty]\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de funciones medibles. Muestre que:

$$\{x \in X : \sup f_n(x) \leq a, n \in \mathbb{N}\} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \{x \in X : f_n(x) \leq a\}$$

Demostración. Sea $x \in \{x \in X : \sup f_n(x) \leq a, n \in \mathbb{N}\}$. Note que $f_n(x) \leq \sup \{f_n(x)\} \leq a$ para todo $n \in \mathbb{N}$, luego $x \in f_n^{-1}([-\infty, a])$ para todo n , esto es $x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \{x \in X : f_n(x) \leq a\}$.

Recíprocamente, si $x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \{x \in X : f_n(x) \leq a\}$ entonces $f_n(x) \leq a$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Esto significa que a es una cota superior del conjunto $\{f_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}}$, por lo que $\sup \{f_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}} = \sup f_n(x) \leq a$, y en consecuencia $x \in \sup f_n^{-1}([-\infty, a]), n \in \mathbb{N} = \{x \in X : \sup \{f_n(x)\} \leq a, n \in \mathbb{N}\}$. \square

$$\blacksquare \{x \in X : \inf f_n(x) < a, n \in \mathbb{N}\} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{x \in X : f_n(x) < a\}.$$

Demostración. Sea x tal que $\inf f_n(x) < a$, entonces para algún $k \in \mathbb{N}$ se cumple que $f_k(x) < a$ (de lo contrario tendríamos que a es una cota inferior del conjunto $\{f_n(x)\}$ mayor que el \inf), luego $x \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{x \in X : f_n(x) < a\}$.

Ahora, si $f_k(x) < a$ para algún k , es claro que $\inf f_n(x) \leq f_k(x) < a$, esto es $x \in \inf f_n^{-1}([-\infty, a))$. \square

3. Sea $(A_n)_n \in \mathbb{N}$ un sucesión de conjuntos en X .

Tomando $E_0 = \emptyset$ y $E_n = \cup_{k=1}^n A_k$, $F_n = A_n - E_{n-1}$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

Muestre que

$$\blacksquare E_{n-1} \subseteq E_n \text{ para todo } n \in \mathbb{N}$$

Demostración. Si $x \in E_{n-1}$, entonces $x \in A_k$ para algún k entre 1 y $n-1$, luego $x \in A_k \cup A_n$ de modo que $x \in E_n$. \square

$$\blacksquare F_i \cap F_j = \emptyset \text{ si } i \neq j.$$

Demostración. Supongamos que $i < j$. Si $x \in F_i$ y $x \in F_j$ entonces $x \in A_j$ y $x \notin A_k$ para todo $k < j$, lo que contradice $x \in A_i$. \square

$$\blacksquare \cup_{n=1}^{\infty} E_n = \cup_{n=1}^{\infty} F_n = \cup_{n=1}^{\infty} A_n$$

Demostración. Es evidente que $\cup_{n=1}^{\infty} E_n = \cup_{n=1}^{\infty} A_n$ por como están definidos los E_n . Otro hecho que salta a la vista es que $\cup_{n=1}^{\infty} F_n \subset \cup_{n=1}^{\infty} A_n$ por la definición de los F_n . Lo único que queda por notar es que $\cup_{k=1}^n F_k = \cup_{k=1}^n A_k$ para cada $n \geq 1$, donde nuevamente tenemos una inclusión gratis. Ahora, considere el mayor $k \leq n$ tal que $x \in A_k$. Como $A_k = (A_k \cap E_{k-1}) \cup (A_k - E_{k-1}) = (A_k \cap E_{k-1}) \cup F_k$. Si $x \in F_n$ hemos terminado. Si $x \in A_k \cap E_{k-1} = \cup_{j=1}^{k-1} (A_k \cap A_j)$, basta con tomar el mínimo j tal que $x \in A_k \cap A_j$. Por lo tanto $x \in A_j - E_{j-1} = F_j$. (Si x perteneciera a E_{j-1} , pertenecería a algún A_i con $i < j$). Luego $x \in \cup_{k=1}^{\infty} F_k$ y concluimos $\cup_{k=1}^{\infty} F_k = \cup_{k=1}^{\infty} A_k$. \square

4. Sea $(A_n)_n \in \mathbb{N}$ un sucesión de conjuntos en X .

Defina:

$$\limsup A_n = \bigcap_{m=1}^{\infty} (\cup_{n=m}^{\infty} A_n).$$

$$\liminf A_n = \cup_{m=1}^{\infty} (\cap_{n=m}^{\infty} A_n).$$

Muestre que:

$$\emptyset \subseteq \liminf A_n \subseteq \limsup A_n \subseteq X.$$

Demostración. La única inclusión no trivial es $\liminf A_n \subseteq \limsup A_n$.

Primero note que $\{\cup_{n=k}^{\infty} A_n\}_{k \in \mathbb{N}}$ es una secuencia decreciente.

Sea $x \in \liminf A_n$. Existe $p \in \mathbb{N}$ tal que para todo entero $k \geq p$, $x \in A_k$ y por ende $x \in \cup_{n=k}^{\infty} A_n$, por lo dicho en la línea de arriba, $\cup_{n=k}^{\infty} A_n \supseteq \cup_{n=p}^{\infty} A_n$, para todo $1 \leq k \leq p$, luego $x \in \cup_{n=1}^{\infty} A_n$ para todo entero $n \geq 1$, ergo, $x \in \cap_{m=1}^{\infty} (\cup_{n=m}^{\infty} A_n) = \limsup A_n$. \square

5. Sea $(A_n)_n \in \mathbb{N}$ un sucesión de conjuntos en X tal que $A_i \subseteq A_{i+1}$ para todo $i \in \mathbb{N}$. Muestre que:

$$\limsup A_n = \cup_{n=1}^{\infty} A_n = \liminf A_n.$$

Demostración. Note que $\cup_{k=m}^n A_k = \cup_{k=1}^n A_k = A_n$ y $\cap_{k=m}^n A_k = A_m$, $m \in \mathbb{N}, m \leq n$ cualquiera sea $n \in \mathbb{N}$. Luego $\cap_{k=m}^{\infty} A_k = A_m$.

$$\text{Ahora, } \liminf A_n = \cup_{m=1}^{\infty} (\cap_{n=m}^{\infty} A_n) = \cup_{m=1}^{\infty} A_m.$$

$$\text{Por su parte, } \limsup A_n = \cap_{m=1}^{\infty} (\cup_{n=m}^{\infty} A_n) = \cap_{m=1}^{\infty} (\cup_{n=1}^{\infty} A_n) = \cup_{n=1}^{\infty} A_n.$$

□

6. Sea $(A_n)_n \in \mathbb{N}$ un sucesión de conjuntos en X tal que $A_i \supseteq A_{i+1}$ para todo $i \in \mathbb{N}$. Muestre que:

$$\limsup A_n = \cap_{n=1}^{\infty} A_n = \liminf A_n.$$

Demostración. La prueba es análoga a la del punto anterior y se deja como ejercicio al lector. □

7. Sean (X, M, μ) un espacio de medida y $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de conjuntos medibles, Muestre que:

$$\blacksquare \mu(\liminf A_n) \leq \liminf \mu(A_n)$$

Demostración. Primeramente recordemos que para cada $k \in \mathbb{N}$, $\mathcal{A}_k = \cap_{n=k}^{\infty} A_n \in M$ puesto que cada $A_n \in M$. Asimismo $\cup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{A}_n \in M$

Ahora note que la secuencia $\{\mathcal{A}_k\} = \{\cup_{m=k}^{\infty} A_m\}$ es creciente, por lo que

$$\begin{aligned} \mu(\liminf A_n) &= \mu(\cup_{n=1}^{\infty} (\cap_{m=n}^{\infty} A_m)) \\ &= \mu(\cup_{n=1}^{\infty} \mathcal{A}_n) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(\mathcal{A}_n) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(\cap_{m=n}^{\infty} A_m) \\ &= \liminf \mu(\cap_{m=n}^{\infty} A_m) \\ &\leq \liminf \mu(A_n) \end{aligned}$$

□

$$\blacksquare \limsup \mu(A_n) \leq \mu(\limsup A_n), \text{ si } \mu(\cup_{n \in \mathbb{N}} A_n) < \infty.$$

Demostración. Primeramente recordemos que para cada $k \in \mathbb{N}$, $\mathcal{A}_k = \cup_{n=k}^{\infty} A_n \in M$ puesto que cada $A_n \in M$. Asimismo $\cap_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{A}_n \in M$

Ahora note que la secuencia $\{\mathcal{A}_k\} = \{\cup_{m=k}^{\infty} A_m\}$ es decreciente y $\mathcal{A}_1 < \infty$, de modo que

$$\begin{aligned}\mu(\limsup A_n) &= \mu(\cap_{n=1}^{\infty} (\cup_{m=n}^{\infty} A_m)) \\ &= \mu(\cap_{n=1}^{\infty} \mathcal{A}_n) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(\mathcal{A}_n) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(\cup_{k=n}^{\infty} A_k) \\ &= \limsup \mu(\cup_{k=n}^{\infty} A_k) \\ &\geq \limsup \mu(A_n)\end{aligned}$$

□

8. Sean (X, M) un espacio medible y $f : X \rightarrow [-\infty, \infty]$ una función. Muestre que:

f es medible si y solo si $\{x \in X : f(x) = \infty\}, \{x \in X : f(x) = -\infty\} \in M$ y

$$f^{\sim} = \begin{cases} f & \text{si } |f| < \infty, \\ 0 & \text{si } |f| = \infty. \end{cases}$$

es medible.

Demostración. \Rightarrow) Sea f medible, en virtud del punto 4 del 1.1 las preimágenes de $\{\pm\infty\}$ son medibles. Ahora, veamos que para cada $\alpha \geq 0$, $(f^{\sim})^{-1}((\alpha, \infty]) = (f^{\sim})^{-1}((\alpha, \infty)) \cup (f^{\sim})^{-1}(\{\infty\})$, donde $(f^{\sim})^{-1}(\{\infty\}) = \emptyset \in M$ ya que si $x \in (f^{\sim})^{-1}(\{\infty\})$, entonces $f(x) = \infty$, pero esto implicaría $|f|(x) = \infty$, y por definición de f^{\sim} , tendríamos $f^{\sim} = 0$. Es claro que $(f^{\sim})^{-1}((\alpha, \infty)) = f^{-1}((\alpha, \infty)) \in M$ porque f es medible.

Si $\alpha < 0$ entonces $(f^{\sim})^{-1}((\alpha, \infty]) = (f^{\sim})^{-1}((\alpha, 0)) \cup (f^{\sim})^{-1}(\{0\}) \cup (f^{\sim})^{-1}((0, \infty])$, donde $(f^{\sim})^{-1}(\{0\}) = f^{-1}(\{-\infty, \infty\}) \in M$, $(f^{\sim})^{-1}((0, \infty]) \in M$ y $(f^{\sim})^{-1}((\alpha, 0)) = f^{-1}((\alpha, 0)) \in M$.

Concluimos que f^{\sim} es medible.

\Leftarrow) Suponga f^{\sim} es medible y que $\{x \in X : f(x) = \infty\}, \{x \in X : f(x) = -\infty\} \in M$. Veamos que $f^{-1}((\alpha, \infty]) \in M$ con $\alpha \geq 0$. Como $(f^{\sim})^{-1}((\alpha, \infty]) \in M$ y $(f^{\sim})^{-1}((\alpha, \infty]) = (f^{\sim})^{-1}((\alpha, \infty)) \cup (f^{\sim})^{-1}(\{\infty\})$ y $(f^{\sim})^{-1}(\{\infty\}) = \emptyset \in M$ entonces $(f^{\sim})^{-1}((\alpha, \infty]) = f^{-1}((\alpha, \infty)) \in M$.

Si $\alpha < 0$ entonces $(f^{\sim})^{-1}((\alpha, \infty]) = (f^{\sim})^{-1}((\alpha, 0)) \cup (f^{\sim})^{-1}(\{0\}) \cup (f^{\sim})^{-1}((0, \infty])$, donde $(f^{\sim})^{-1}(\{0\}) = f^{-1}(\{-\infty, \infty\}) \in M$, $f^{-1}((0, \infty]) = (f^{\sim})^{-1}((0, \infty]) \in M$, y, $f^{-1}((\alpha, 0)) = (f^{\sim})^{-1}((\alpha, 0)) \in M$.

Concluimos que f es medible.

□

Capítulo 2

La medida de Lebesgue

2.1. Ejercicios

1. Sea $A \subseteq \mathbb{R}^n, \mu^*(A) < \infty$.

Muestre que para cada $\epsilon > 0$, existe $A_\epsilon \subseteq \mathbb{R}$ acotado tal que $A_\epsilon \subseteq A$ y $\mu^*(A - A_\epsilon) < \epsilon$.

Demostración. Si estamos en la σ -álgebra de Lebesgue, entonces el teorema 2.3.5 garantiza la existencia de un subconjunto compacto de A que cumple las propiedades requeridas.

★ (Si estamos en cualquier otra σ -álgebra) No sé, pero creo que eso va a ir por cuenta de que uno puede truncar un cubrimiento e intersecarlo con A , lo que no sé es como garantizar la cuenta del ϵ . \square

2. Muestre que el conjunto $\{E \subseteq \mathbb{R}^n : \mu^*(E) = 0 \text{ o } \mu^*(\mathbb{R} - E) = 0\}$ es una σ -álgebra.

Demostración. Llamemos M al conjunto. Es claro que $\emptyset, \mathbb{R}^n \in M$, también es evidente que si $A \in M$ entonces $\mathbb{R}^n - A \in M$. Para ver que si $\{E_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset M$ es una familia de subconjuntos de M entonces $\bigcup_{k \in \mathbb{N}} E_k \in M$ basta analizar los casos por separado cuando $\mu^*(E_k) = 0$ para tdo k y cuando $\mu^*(\mathbb{R} - E_k) = 0$ para cada k .

- Si $\mu^*(E_k) = 0$ para tdo k entonces $\mu^*(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} E_k) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu^*(E_k) = \sum_{k=1}^{\infty} 0 = 0$.
- $\mu^*(\mathbb{R} - E_k) = 0$ para cada k entonces $\mu^*(\mathbb{R}^n - \bigcup_{k \in \mathbb{N}} E_k) = \mu^*(\bigcap_{k \in \mathbb{N}} \mathbb{R}^n - E_k) \leq \mu^*(\mathbb{R}^n - E_k) = 0$ para cualquier k .

En ambos casos la unión es un elemento de M . Si tenemos una familia arbitraria de subconjuntos de M podemos separarla en dos uniones y proceder con cada una. \square

3. Sean $M \subseteq \mathbb{R}^n, h \in \mathbb{R}^n$ y $\lambda \in \mathbb{R}$. Muestre que $M + h$ y λM son medibles y $\mu^*(M + h) = \mu^*(M)$ y $\mu^*(\lambda M) = \lambda \mu^*(M)$.

Demostración. $M + h$ es medible: considere $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que $f(x) = x - h$. La continuidad de f garantiza que $f^1(M) = M + h$ es medible.

$\mu^*(M + h) = \mu^*(M)$: Note que $\mu^*(I + h) = \mu(I + h) = (b + h) - (a + h) = b - a = \mu^*(I)$ para todo $h \in \mathbb{R}, I$ 1-celda. Luego $\mu^*(I + h) = \mu^*(I)$ para toda n -celda, de modo que si $\{I_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ es cubrimiento por n -celdas de M , entonces $\{I_k + h\}_{k \in \mathbb{N}}$ es cubrimiento por n -celdas de $M + h$, e $\inf\{\sum_{k=1}^{\infty} \mu^*(I_k) : M \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} I_k\} = \inf\{\sum_{k=1}^{\infty} \mu^*(I_k + h) : M + h \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} I_k + h\}$

λM es medible: Para $\lambda \neq 0$ repita la prueba anterior con $f(x) = \frac{x}{\lambda}$. Si $\lambda = 0$, $\lambda M = \{0\}$.

$\mu^*(\lambda M) = M\mu^*(M)$: Repita la prueba anterior teniendo en cuenta que si I es una 1-celda, entonces $\mu^*(\lambda I) = \mu(I) = (\lambda a, \lambda b) = \lambda b - \lambda a = \lambda(b - a) = \lambda\mu^*(I)$. Cabe resaltar que si $\lambda < 0$, $\mu^*(\lambda I) = \mu(I) = \mu((\lambda a, \lambda b)) = \mu((-|\lambda|b, -|\lambda|a)) = -|\lambda|a - (-|\lambda|)b = |\lambda|(-1)(a - b) = |\lambda|(b - a) = |\lambda|\mu^*(I)$.

Así, podemos ver que si I es una n-celda en \mathbb{R}^n , entonces $\mu^*(I) = \prod_{k=1}^n \mu(\lambda(a_1^j, b_k^j)) = \prod_{k=1}^n |\lambda|(b_k^j - a_k^j) = |\lambda|^n \mu(I)$. De modo que si $\bigcup_{k=1}^\infty I_k$ es un cubrimiento por n-celdas de M , entonces $\bigcup_{k=1}^\infty \lambda I_k$ es un cubrimiento por n-celdas de λM , e

$$\begin{aligned} \inf \left\{ \sum_{k=1}^\infty \mu^*(\lambda I_k) : \lambda M \subset \bigcup_{i=1}^\infty \lambda I_k^\infty \right\} &= \inf \left\{ \sum_{k=1}^\infty |\lambda|^n \mu^*(I_k) : M \subset \bigcup_{i=1}^\infty I_k \right\} \\ &= \inf \left\{ |\lambda|^n \sum_{k=1}^\infty \mu^*(I_k) : M \subset \bigcup_{i=1}^\infty I_k \right\} \\ &= |\lambda|^n \inf \left\{ \sum_{k=1}^\infty \mu^*(I_k) : M \subset \bigcup_{i=1}^\infty I_k \right\} \\ &= |\lambda|^n \mu^*(M) \end{aligned}$$

□

4. Demostrar que si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es monótona entonces es Lebesgue medible.

Demostración. Como f es monótona entonces podemos asumir que es creciente. Veamos que $f^{-1}([t, \infty)) \{x \in \mathbb{R} : f(x) \geq t\}$ es o bien \emptyset, \mathbb{R} , o alguna cola abierta o cerrada.

Si $u \in f^{-1}([t, \infty))$ y $v \geq u$, como asumimos f creciente, entonces $t \leq f(u) \leq f(v)$, por lo que $v \in f^{-1}([t, \infty))$.

Tenemos que f es Borel medible y por tanto Lebesgue medible.

□

5.

6. No existe σ -álgebra enumerable.

Demostración. Vea la observación 1.1.5.

□

7. Sea $E \subset [0, 1]$, con $\mu^*([0, 1] - E) = 0$. Muestre que E es denso en $[0, 1]$.

Demostración. Sea $x \in [0, 1] - E$. Para todo $r > 0$, $B_{(x,r)} \cap E \neq \emptyset$, ya que de lo contrario tendríamos $B_{(x,r)} \subseteq [0, 1] - E$, luego $\mu^*(B_{(x,r)}) = 0$, lo cual es absurdo. Concluimos que E es denso en $[0, 1]$.

□

8. Sea $M \subseteq \mathbb{R}^n$. Muestre que si $\mu^*(E) = 0$, $\text{int}(E) = \emptyset$

Demostración. Suponga que $x \in \text{int}(E)$, entonces existe $r > 0$ tal que $B_{(x,r)} \subset E$, luego $0 < \mu^*(B_{(x,r)}) \leq \mu^*(E) = 0$, lo cual es absurdo. Concluimos que $\text{int}(E) = \emptyset$.

□

9. Sea $M \subseteq \mathbb{R}^n$ enumerable. Muestre que $\mu^*(E) = 0$.

Demostración. Note que $E = \bigcup_{x \in E} \{x\}$, claramente $\mu^*(\{x\}) = 0$ para cada x . Luego $\mu^*(E) = \sum_{x \in E} \mu^*(\{x\}) = \sum_{x \in E} 0 = 0$. \square

Capítulo 3

La integral

3.1. Ejercicios

Capítulo 4

Medida producto

4.1. Ejercicios

Capítulo 5

Espacios L_p

5.1. Ejercicios

Capítulo 6

Algunos tipos de convergencia

6.1. Ejercicios

Capítulo 7

Cargas

7.1. Ejercicios