

Teoría de la Medida

LEONARDO RENDÓN
PEDRO ZAMBRANO



UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

FACULTAD DE CIENCIAS

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

BOGOTÁ, D.C.

29 DE OCTUBRE DE 2024

Índice general

1. Definiciones preliminares	1
1.1. σ -álgebras	1
1.1.1. σ -Álgebra de Borel	2
1.1.2. Funciones medibles	2
1.2. La recta extendida	4
1.2.1. Abiertos básicos de la recta extendida.	4
1.2.2. Arimética en la recta extendida.	4
1.3. Más sobre σ -álgebras	5
1.4. Funciones simples.	6
1.5. Definición de medida.	7
1.5.1. Propiedades.	8
1.6. Quiz 1	9
1.7. Quiz 3	10
1.8. Quiz 4	10
1.9. Ejercicios	11
2. La medida de Lebesgue	13
2.1. Medida exterior.	13
2.2. Medida de Lebesgue	17
2.3. Propiedades	19
2.4. Ejercicios	23
3. La integral	25
3.1. Integrales de funciones medibles.	25
3.1.1. Propiedades.	25
3.2. Teorema de la convergencia monótona.	27
3.3. Teorema de la convergencia dominada	31

3.4.	Las integrales de Riemann y de Lebesgue	33
3.5.	Ejercicios	37
4.	Medida producto	39
4.1.	Definición de álgebra	39
4.2.	Algunas propiedades	43
4.3.	Teorema de Fubini	45
4.4.	Ejercicios	48
5.	Espacios L^p	49
5.1.	Definición	49
5.2.	Completez de los espacios L^p	54
5.3.	Algunos conjuntos densos en $L^p(\mu)$	55
5.4.	Ejercicios	62
6.	Algunos tipos de convergencia	65
6.1.	Definiciones	65
6.2.	Ejemplos	66
6.3.	Teorema de Egoroff	70
6.4.	Ejercicios	74
7.	Cargas	75
7.1.	Teorema de descomposición de Hahn	75
7.2.	Teorema de Radon-Nikodym	78
7.3.	Teorema de representación de Riesz	81
7.4.	Ejercicios	86

CAPÍTULO 1

Definiciones preliminares

1.1. σ -álgebras

Definición 1.1.1. Sean $X \neq \emptyset$ y $M \subseteq \mathcal{P}(X)$. M es una σ -álgebra cuando :

1. $X \in M$.
2. Si $A \in M$, entonces $X - A \in M$.
3. Si $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una familia de elementos de M entonces $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_n \in M$.

Al par (X, M) se le denomina **espacio medible**. Igualmente, X es denominado **espacio medible** si se sobreentiende cual es la σ -álgebra considerada.

Observación 1.1.2. ■ $\emptyset \in M$ (consecuencia de las propiedades 1. y 2.)

- Si $A_1, \dots, A_n \in M$, entonces $\bigcup_{i=1}^n A_i \in M$: consecuencia de tomar $A_k = \emptyset$ para $k > n$ y de la propiedad 3.
- Si $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una familia de elementos de M , entonces $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in M$: ya que $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = (\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i^c)^c$ y de las propiedades 2. y 3.
- Si $A_1, \dots, A_n \in M$, entonces $\bigcap_{i=1}^n A_i \in M$: consecuencia de tomar $A_k = X$ para $k > n$ y de la observación anterior.

Ejemplo 1.1.3 (Ejemplos de σ -álgebras). 1. Dado $X \neq \emptyset$, $\mathcal{P}(X)$ es una σ -álgebra.

2. $\{\mathbb{R}, \emptyset, \mathbb{Q}, \mathbb{I}\} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{R})$ es un σ -álgebra.

Observación 1.1.4. Sean M_1, M_2 σ -álgebras en $X \neq \emptyset$. Entonces $M_1 \cap M_2$ es un σ -álgebra en X .

Por otro lado, al considerar A , una colección no vacía de subconjuntos de X podemos tomar $M_A = \bigcap_{M \in \mathcal{F}} M$, donde $\mathcal{F} := \{M : M \text{ es una } \sigma\text{-álgebra en } X \text{ y } A \subseteq M\}$. Tenemos que M_A es la menor σ -álgebra que contiene a A , en el sentido que dada \bar{M} σ -álgebra en X , con $A \subseteq \bar{M}$ entonces $M_A \subseteq \bar{M}$. M_A se denomina **σ -álgebra generada** por A .

1.1.1. σ -Álgebra de Borel

Consideremos \mathbb{R}^n con su topología usual. La σ -álgebra generada por la familia de abiertos en \mathbb{R}^n es denominada **σ -álgebra de Borel**.

Observación 1.1.5. No existe una σ -álgebra con cardinal \aleph_0 , cardinal de \mathbb{N} . En efecto. Supongamos que M es una σ -álgebra sobre el conjunto X , con M enumerable.

Note que si X es finito entonces $P(X)$ es un conjunto finito y por lo tanto M es un conjunto finito.

Supongamos entonces que X es un conjunto infinito y que M es infinito enumerable. Dado $x \in X$ definimos $E_x = \bigcap_{E \in F} E$ donde $F = \{E \in M : x \in E\}$.

Observe que $E_x \in M$, además dado $E \in M$ se tiene que $x \in E$ o $x \in X - E$ por lo tanto $E_x \cap E = \emptyset$ o $E_x \subseteq E$.

De igual forma dados $x, y \in X$, distintos, se tiene que $E_x = E_y$ o $E_x \cap E_y = \emptyset$.

Como X es un conjunto infinito y M es infinito enumerable existe $G = \{x_1, x_2, \dots\}$, $x_i \in X$ para cada $i \in \mathbb{N}$, tal que $E_{x_i} \cap E_{x_j} = \emptyset$ si $i \neq j$. Definamos $E_A = \bigcup_{x \in A} E_x$ para cada $A \subseteq G$. Nótese que $E_A \in M$.

Ahora si $A \neq B$ entonces $E_A \neq E_B$; esto es, la función $\varphi : P(G) \rightarrow M$ tal que $\varphi(A) = E_A$ es inyectiva. Absurdo, ya que $P(G)$ no es enumerable y M es enumerable.

1.1.2. Funciones medibles

Sea (X, M) un espacio medible y (Y, T) un espacio topológico. Decimos que $f : X \rightarrow Y$ es **medible** si y solo si dado $V \in T$ (es decir, un abierto en (Y, T)) se tiene que $f^{-1}(V) \in M$ (es decir, $f^{-1}(V)$ es medible).

Ejemplo 1.1.6. Sean (X, M) espacio medible y $A \in M$ entonces la función $\chi_A : X \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A, \\ 0 & \text{si } x \notin A. \end{cases}$$

es medible.

Dado un abierto básico $V \in \mathbb{R}$ tenemos que:

si $1, 0 \in V$ entonces $f^{-1}(V) = X \in M$,

si $1 \in V$ y $0 \notin V$ entonces $f^{-1}(V) = A \in M$,

si $1 \notin V$ y $0 \in V$ entonces $f^{-1}(V) = X - A \in M$,

si $1, 0 \notin V$ entonces $f^{-1}(V) = \emptyset \in M$.

Por lo tanto χ_A es medible.

Proposición 1.1.7. Sean (Y, T_Y) , (Z, T_Z) espacios topológicos, (X, M) un espacio medible, $f : X \rightarrow Y$ una función medible y $g : Y \rightarrow Z$ una función continua. Entonces $g \circ f$ es medible.

Demostración. Sea $V \in T_Z$ (un abierto en (Z, T_Z)). Como g es continua, tenemos que $g^{-1}(V) \in T_Y$. Además como f es medible, tenemos que $f^{-1}(g^{-1}(V)) = (g \circ f)^{-1}(V) \in M$. Es decir: $g \circ f$ es medible.

Proposición 1.1.8. Sean (X, M) espacio medible, (Y, T) espacio topológico, $u, v : X \rightarrow \mathbb{R}$ funciones medibles y $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow Y$ una función continua. Se tiene que $\varphi(u, v)$ es medible.

Demostración. En virtud de la proposición anterior basta ver que

$$f = (u, v) : X \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad (1.1)$$

$$x \mapsto (u(x), v(x)) \quad (1.2)$$

es una función medible.

En efecto, siendo $R = I_1 \times I_2$ donde cada I_i es un abierto en \mathbb{R} , tenemos que

$$f^{-1}(R) = \{x \in X : u(x) \in I_1\} \cap \{x \in X : v(x) \in I_2\}.$$

Como $\{x \in X : u(x) \in I_1\} \in M$ por ser u medible y $\{x \in X : v(x) \in I_2\} \in M$ ya que v es medible, por la definición de σ -álgebra tenemos que $f^{-1}(R) \in M$.

CONSECUENCIAS:

1. Sean (X, M) espacio medible y $u, v : X \rightarrow \mathbb{R}$ medibles. Entonces $f(x) = u(x) + iv(x)$ es medible.
2. Sea (X, M) espacio medible, y consideremos

$$f : X \rightarrow \mathbb{C} \quad (1.3)$$

$$x \mapsto u(x) + iv(x) \quad (1.4)$$

medible. Entonces $u, v, |f| := \sqrt{u^2 + v^2}$ son medibles. La prueba consiste en escoger las funciones continuas $\sqrt{x}, y^2, y + w, x, y, w \in \mathbb{R}, \text{ con } x \geq 0$
 $\text{Im}(z), \text{Re}(z) \text{ } z \in \mathbb{C}$
 y usar la proposición anterior.

3. Siendo (X, M) espacio medible y $u, v : X \rightarrow \mathbb{R}$, se tiene que $u + v$ y $u \cdot v$ son funciones medibles. Basta utilizar la proposición anterior combinada con las funciones continuas $+: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ y $\cdot : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$.

1.2. La recta extendida

1.2.1. Abiertos básicos de la recta extendida.

Puede ser que una sucesión $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de números reales no sea acotada (es decir, que $\sup a_n$ y/o $\inf a_n$ no existan).

Vamos a anexar dos nuevos elementos (que se denotarán por $+\infty$ y $-\infty$, donde $[-\infty, \infty]$ denotará el conjunto $\mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$. De esta manera se define $\sup a_n := +\infty$ (si (a_n) no es acotada superiormente en \mathbb{R}) e $\inf a_n := -\infty$ (si (a_n) no es acotada inferiormente en \mathbb{R}).

Se define en $[-\infty, \infty]$ un orden parcial que extiende al usual en \mathbb{R} , teniéndose que $-\infty \leq r$ y $r \leq +\infty$ para todo $r \in \mathbb{R}$.

Las vecindades básicas de $[-\infty, \infty]$ son de la forma $(\alpha, \beta), [-\infty, \alpha), (\beta, +\infty]$ con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

1.2.2. Arimética en la recta extendida.

En $[-\infty, \infty]$ se va a tener especial cuidado al definir las operaciones básicas, ya que no se definen las situaciones del tipo $\infty + (-\infty)$. Adicionalmente, se define el producto de manera que $0 \cdot d = d \cdot 0 = 0$ para todo $d \in [-\infty, \infty]$.

En este nuevo conjunto, se harán las definiciones de manera que extiendan las operaciones $+$ y \cdot usuales con las que se cuentan en \mathbb{R} .

La siguiente tabla muestra la suma definida en $[-\infty, \infty]$, con $a, b \in \mathbb{R}$:

Suma en la recta extendida.

$+$	$-\infty$	a	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	no definido
b	$-\infty$	$b + a$	$+\infty$
$+\infty$	no definido	$+\infty$	$+\infty$

En la siguiente tabla, $a, b \in \mathbb{R}$.

Producto en la recta extendida

\cdot	$-\infty$	0	$a > 0$	$+\infty$
$-\infty$	$+\infty$	0	$-\infty$	$-\infty$
0	0	0	0	0
$b < 0$	$+\infty$	0	$b \cdot a$	$-\infty$
$+\infty$	$-\infty$	0	$+\infty$	$+\infty$

1.3. Más sobre σ -álgebras

Proposición 1.3.1. Sean M una σ -álgebra sobre X , Y un espacio topológico y $f : X \rightarrow Y$ una función.

1. $N := \{E \subseteq Y : f^{-1}(E) \in M\}$ es una σ -álgebra sobre Y .
2. Supongamos que $Y := [-\infty, \infty]$. Si para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, $f^{-1}((\alpha, \infty]) \in M$, entonces f es medible.

Demostración de 1). Tenemos que $Y \in N$ puesto que $f^{-1}(Y) = X \in M$.

Si $A \in N$, entonces $f^{-1}(A) \in M$ y por lo tanto $X - f^{-1}(A) = f^{-1}(Y - A) \in M$ y con esto concluimos que $Y - A \in N$.

Por otro lado, si $\{A_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ es una familia en N , entonces $f^{-1}(A_i) \in M$ ($i \in \mathbb{N}$). De esto, tenemos que $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} f^{-1}(A_i) = f^{-1}(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i) \in M$, por lo tanto $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i \in N$.

Demostración de 2). Veamos que $f^{-1}[-\infty, \alpha) \in M$ y $f^{-1}(\alpha, \beta) \in M$ para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. No es necesario estudiar $f^{-1}(\alpha, \infty]$ puesto que pertenece a M por hipótesis.

Sea $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión tal que $\alpha_n < \alpha$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y $\alpha_n \rightarrow \alpha$. De esto tenemos que $[-\infty, \alpha) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} [-\infty, \alpha_n] = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (\alpha_n, +\infty]^c$ (donde notaremos $A^c := X - A$ si $A \subseteq X$).

Luego

$$f^{-1}([-\infty, \alpha)) = f^{-1}(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} (\alpha_n, +\infty]^c) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (f^{-1}(\alpha_n, \infty])^c \in M.$$

Además tenemos que $f^{-1}(\alpha, \beta) \in M$ para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, puesto que $f^{-1}(\alpha, \beta) = f^{-1}([-\infty, \beta) \cap (\alpha, \infty]) = f^{-1}([-\infty, \beta) \cap f^{-1}(\alpha, \infty])$.

Definición 1.3.2. Sean (a_n) una sucesión en $[-\infty, \infty]$, $b_n := \sup\{a_k : k \geq n\}$ y $c_n := \inf\{a_k : k \geq n\}$. Definimos

$$\limsup a_n := \inf b_n \text{ y } \liminf a_n := \sup c_n$$

Definición 1.3.3. Sea $\{f_n : X \rightarrow [-\infty, \infty]\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de funciones.

$$\limsup f_n(x) := \limsup \{f_n(x)\}.$$

$$\liminf f_n(x) := \liminf \{f_n(x)\}.$$

$$\sup f_n(x) := \sup \{f_n(x)\}.$$

$$\inf f_n(x) := \inf \{f_n(x)\}.$$

Proposición 1.3.4. Sean (X, M) un espacio medible y $\{f_n : X \rightarrow [-\infty, \infty]\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de funciones medibles. Entonces $\limsup f_n$, $\liminf f_n$, $\sup f_n$ e $\inf f_n$ son también medibles.

Demostración. Basta observar que

- $\{x \in X : \sup f_n(x) \leq a, n \in \mathbb{N}\} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \{x \in X : f_n(x) \leq a\}.$
- $\{x \in X : \inf f_n(x) < a, n \in \mathbb{N}\} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{x \in X : f_n(x) < a\}.$
- $\limsup f_n = \inf_{n \geq 1} \sup_{k \geq n} f_k.$
- $\liminf f_n = \sup_{n \geq 1} \inf_{k \geq n} f_k.$

Estas igualdades aparecen al final del capítulo como ejercicios.

1.4. Funciones simples.

Definición 1.4.1. Sean (X, M) un espacio medible y $s : X \rightarrow \mathbb{R}$ una función. Se dice que s es **simple** si el conjunto $s(X)$ es finito.

Observación 1.4.2. Si $s : X \rightarrow \mathbb{R}$ es simple y $s(X) := \{a_1, \dots, a_n\}$, definimos

$$A_i := \{x \in X : f(x) = a_i\} \quad i = 1, \dots, n$$

Es decir, A_i corresponde a la imagen inversa de a_i por la función s , para cada i . Con lo que es posible escribir $s = \sum_{i=1}^n a_i \chi_{A_i}$, recuerde que χ_{A_i} es medible si A_i es medible (ver ejemplo lección 1)

Proposición 1.4.3. Sea (X, M) un espacio medible y $s : X \rightarrow \mathbb{R}$ una función simple. s es medible si y sólo si $A_i \in M$, para $i = 1, \dots, n$.

Demostración. " \Rightarrow " Si s es medible, fñjemos i y escójamos $\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{R}$ tales que $\alpha_i \in (\alpha_i, \beta_i)$ y $\alpha_j \notin (\alpha_i, \beta_i)$ para $j \neq i$. De esta manera, $A_i = s^{-1}(\alpha_i, \beta_i) \in M$

(debido a que s es medible).

" \Leftarrow " Como χ_{A_i} es medible si $A_i \in M$ ($i = 1, \dots, n$) y dado que $s = \sum_{i=1}^n a_i \chi_{A_i}$ tenemos que s es medible.

Proposición 1.4.4. Sea $f : X \rightarrow [0, \infty]$ una función medible. Existe $\{s_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ sucesión de funciones simples, no negativas y medibles tales que $s_1 \leq s_2 \leq \dots \leq s_n \leq \dots \leq f$ y $s_n \rightarrow f$ puntualmente en X .

Demostración.

Consideremos los conjuntos

$$E_k^{(n)} = \left\{ x \in X : \frac{k}{2^n} \leq f(x) < \frac{k+1}{2^n} \right\}, \quad k = 0, 1, \dots, n2^n - 1$$

$$\text{y } E_{n2^n}^{(n)} = \{x \in X : f(x) \geq n\}.$$

Note que cada conjunto E_k^n es medible. Por lo tanto

$$s_n = \sum_{k=0}^{n2^n} \frac{k}{2^n} \chi_{E_k^{(n)}}$$

es medible; además la sucesión $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es creciente y $s_n \rightarrow f$ puntualmente. Más aún en los conjuntos donde f es acotada tenemos convergencia uniforme, de hecho:

si $E = \{x \in X : f(x) \leq M\}$ entonces para $n > M$ tenemos $0 \leq f(x) - s_n < \frac{1}{2^n}$

1.5. Definición de medida.

Definición 1.5.1. Sea (X, M) un espacio medible. una función $\mu : M \rightarrow [0, \infty]$ se denomina **medida** si :

1. $\mu(\emptyset) = 0$
2. Dado $\{E_i\}_{i \in \mathbb{N}} \subseteq M$ disyuntos 2 a 2, $\mu(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} E_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i)$ (esta propiedad es denominada **σ -aditividad**).

Si $\mu(X) < \infty$, decimos que la medida μ es **finita**.

Si existe $\{E_i\}_{i \in \mathbb{N}} \subseteq M$ tal que $X = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} E_i$ y $\mu(E_i) < \infty$ para todo $i \in \mathbb{N}$, decimos que μ es **σ -finita**.

La tripleta (X, M, μ) será llamada **espacio de medida**.

Ejemplo 1.5.2. Consideremos el espacio medible $(\mathbb{N}, P(\mathbb{N}))$.

$$\mu : P(\mathbb{N}) \rightarrow [0, \infty] \quad (1.5)$$

$$A \mapsto \begin{cases} \text{card}(A) & \text{si } A \text{ es finito} \\ \infty & \text{en caso contrario} \end{cases} \quad (1.6)$$

Esta medida es denominada **medida de cardinalidad o de conteo**

Ejemplo 1.5.3. Dado (X, M) espacio medible, fñjese $y \in X$.

$$\mu : M \rightarrow [0, \infty] \quad (1.7)$$

$$A \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } y \in A \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases} \quad (1.8)$$

es una medida para (X, M) .

1.5.1. Propiedades.

1. Si $A_1, \dots, A_n \in M$ y son disjuntos 2 a 2, $\mu(\bigcup_{i=1}^n A_i) = \sum_{i=1}^n \mu(A_i)$ (considerese $A_k := \emptyset$ para $k > n$).
2. Si $A \subseteq B$ (con $A, B \in M$), entonces $\mu(A) \leq \mu(B)$ y adicionalmente si $\mu(A) < \infty$ entonces $\mu(B - A) = \mu(B) - \mu(A)$.
En efecto, $\mu(B) = \mu(A) + \mu(B - A)$. Si $\mu(A) < \infty$, $\mu(B) - \mu(A)$ tendr a sentido (ya que $\mu(B)$ podr a ser ∞ sin problemas, lo que no ocurrir a en caso contrario) y por tanto tendríamos $\mu(B) - \mu(A) = \mu(B - A)$.
3. Si $\{A_i\}_{i \in \mathbb{N}} \subseteq M$ es tal que $A_i \subseteq A_{i+1}$ ($i \in \mathbb{N}$), $\mu(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n)$.
En efecto, definamos $E_1 := A_1$ y $E_n := A_n - A_{n-1}$ ($n \geq 2$). Así, $A_n = \bigcup_{i=1}^n E_i$ y por tanto $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n$. De esta manera:

$$\mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n\right) \quad (1.9)$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i) \quad (\text{pues son disyuntos 2 a 2}) \quad (1.10)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \mu(E_i) \quad (1.11)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \mu\left(\bigcup_{i=1}^n E_i\right) \quad (1.12)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n) \quad (\text{pues } \bigcup_{i=1}^n E_i = A_i.) \quad (1.13)$$

4. Si $\{A_i\}_{i \in \mathbb{N}} \subseteq M$ es tal que $A_i \supseteq A_{i+1}$ ($i \in \mathbb{N}$) y $\mu(A_1) < \infty$, entonces $\mu(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n)$.

En efecto, tómese $E_n := A_1 - A_n$ ($n \geq 1$). Se tiene que $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n = A_1 - \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n = A_1 \cap [\bigcup_{n \in \mathbb{N}} (X - A_n)]$.

En virtud de la propiedad 2., tenemos que $\mu(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n) = \mu(A_1) - \mu(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n)$ (pues $\mu(A_1) < \infty$). Por otro lado, $\mu(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_1 - A_n) = \mu(A_1) - \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n)$ (pues $\mu(A_1) < \infty$, en virtud de la propiedad 2.).

Así, podemos concluir que $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n) = \mu(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n)$.

Para tenerse esta propiedad, basta pedir que $\mu(A_i) < \infty$ para algún $i \in \mathbb{N}$ (¿Por qué?).

Observación 1.5.4. Sea $\mu : P(\mathbb{N}) \rightarrow [0, \infty]$ la medida de cardinalidad.

Definiendo $A_n := \{n, n+1, \dots\}$, nótese que $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n = \emptyset$, pero $\mu(A_n) = \infty$ por lo que $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n) = \infty$.

¿Por qué falló aquí la propiedad 4.?

1.6. Quiz 1

Determine si cada uno de los siguientes enunciados es verdadero o falso:

1. $\mathbb{Q} \in B$, donde B es la σ -álgebra de Borel.
2. $\mathbb{N} \in B$, donde B es la σ -álgebra de Borel.
3. El conjunto $F = \{M : M \text{ es una } \sigma\text{-álgebra en } \mathbb{R}\}$ es enumerable

4. La función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^3$ es medible, cuando tomamos en \mathbb{R} la σ -álgebra de Borel.
5. La función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = |x|$ es medible, cuando tomamos en \mathbb{R} la σ -álgebra de Borel.

1.7. Quiz 3

Determine si cada uno de los siguientes enunciados es verdadero o falso:

1. Sean (X, M) un espacio medible y $f : X \rightarrow \mathbb{R}$. si f es medible entonces $|f|$ es medible
2. Sean (X, M) un espacio medible y $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ si $|f|$ es medible entonces f es medible.
3. Sean (X, M) un espacio medible y $f : X \rightarrow \mathbb{R}$. si f es medible entonces $f^+(x) = \sup\{f(x), 0\}$ y $f^-(x) = \sup\{-f(x), 0\}$ son medibles
4. $f^+ = \frac{1}{2}\{|f| + f\}$, f^+ como en el numeral anterior
5. $f^- = \frac{1}{2}\{|f| - f\}$, f^- como en numeral anterior

1.8. Quiz 4

Determine si cada uno de los siguientes enunciados es verdadero o falso:

1. Sea (X, M) un espacio medible entonces toda función simple es medible.
2. $\chi_{A \cup B} = \chi_A + \chi_B$
3. $\chi_{A-B} = \chi_A(1 - \chi_B)$
4. $\chi_{A \cap B} = \chi_A \chi_B$
5. Sean (X, M) un espacio medible y $f : X \rightarrow [-\infty, \infty]$ una función medible entonces el conjunto $\{x \in X : f(x) = \infty\}$ es medible

1.9. Ejercicios

1. Sean $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de conjuntos en X , muestre que:

- $\chi_{\bigcup_{i=1}^n A_i} = 1 - \prod_{i=1}^n (1 - \chi_{A_i})$
- $\chi_{\bigcap_{i=1}^n A_i} = \prod_{i=1}^n (\chi_{A_i})$
- $\chi_{\limsup A_n} = \limsup \chi_{A_n}$
- $\chi_{\liminf A_n} = \liminf \chi_{A_n}$

2. Sean (X, M) un espacio medible y $\{f_n : X \rightarrow [-\infty, \infty]\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de funciones medibles. Muestre que:

- $\{x \in X : \sup f_n(x) \leq a, n \in \mathbb{N}\} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \{x \in X : f_n(x) \leq a\}$
- $\{x \in X : \inf f_n(x) < a, n \in \mathbb{N}\} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{x \in X : f_n(x) < a\}.$

3. Sean $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de conjuntos en X .

Tomando $E_0 = \emptyset$ y $E_n = \bigcup_{k=1}^n A_k$, $F_n = A_n - E_{n-1}$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

Muestre que:

$$E_{n-1} \subseteq E_n \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad F_i \cap F_j = \emptyset \text{ si } i \neq j \text{ y } \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$

4. Sean $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de conjuntos en X .

Defina:

$$\limsup A_n = \bigcap_{m=1}^{\infty} \left(\bigcup_{n=m}^{\infty} A_n \right).$$

$$\liminf A_n = \bigcup_{m=1}^{\infty} \left(\bigcap_{n=m}^{\infty} A_n \right).$$

Muestre que:

$$\emptyset \subseteq \liminf A_n \subseteq \limsup A_n \subseteq X.$$

5. Sean $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de conjuntos en X tal que $A_i \subseteq A_{i+1} \quad \forall i \in \mathbb{N}$, muestre que:

$$\limsup A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \liminf A_n$$

6. Sean $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de conjuntos en X tal que $A_i \supseteq A_{i+1} \quad \forall i \in \mathbb{N}$, muestre que:

$$\limsup A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \liminf A_n$$

7. Sean (X, M, μ) un espacio de medida $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de conjuntos medibles. Muestre que:

- $\mu(\liminf A_n) \leq \liminf \mu(A_n)$
- $\limsup \mu(A_n) \leq \mu(\limsup A_n)$, si $\mu(\cup_{n \in \mathbb{N}} A_n) < \infty$

8. Sean (X, M) un espacio medible y $f : X \rightarrow [-\infty, \infty]$ una función entonces muestre que:

f es medible si y sólo si $\{x \in X : f(x) = \infty\}, \{x \in X : f(x) = -\infty\} \in M$ y

$$f^\sim = \begin{cases} f & \text{si } |f| < \infty, \\ 0 & \text{si } |f| = \infty. \end{cases}$$

es medible.

CAPÍTULO 2

La medida de Lebesgue

2.1. Medida exterior.

Definición 2.1.1. Una medida exterior sobre un conjunto X , no vacío, es una función

$$\mu^* : \mathcal{P}(X) \rightarrow [0, \infty]$$

con las siguientes propiedades

- $\mu^*(\emptyset) = 0$
- si $A \subseteq \bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k$ entonces $\mu^*(A) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu^*(A_k)$

Decimos que un conjunto es una celda en \mathbb{R} si tiene alguna de las siguientes formas

- (a, b)
- $[a, b]$
- $[a, b)$
- $(a, b]$

con $a, b \in \mathbb{R}$.

Diremos además que un conjunto es una n -celda o una celda en \mathbb{R}^n si es de la forma $J_1 \times J_2 \cdots \times J_n$, donde cada J_i es un celda en \mathbb{R} .

Definamos para $E \subseteq \mathbb{R}^n$

$$\mu^*(E) = \inf \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \mu(I_k) : I_k \text{ es una } n\text{-celda y } E \subseteq \bigcup_{k \in \mathbb{N}} I_k \right\}.$$

donde

$$\mu(I_k) = \mu(\{a_1^k, b_1^k\} \times \cdots \times \{a_n^k, b_n^k\}) = \prod_{1 \leq i \leq n} (b_i^k - a_i^k)$$

usamos la notación $\{a, b\}$ para indicar las diferentes posibilidades de celdas en \mathbb{R} .

Antes de probar que μ^* es una medida exterior en \mathbb{R}^n hagamos las siguientes observaciones

- Si $E \subseteq F$ entonces $\mu^*(E) \leq \mu^*(F)$, como consecuencia de las propiedades del ínfimo
- como $\mu(I_k) = \mu(\overline{I_k})$ es posible escoger en la definición de $\mu^*(E)$ cubrimientos por n -celdas cerradas (producto de intervalos cerrados)
- es posible escoger en la definición de $\mu^*(E)$ cubrimientos por n -celdas abiertas (producto de intervalos abiertos) ya que si $\{I_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ es un cubrimiento por n -celdas para E y dado $\epsilon > 0$ existe $\{J_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ cubrimiento por n -celdas abiertas tales que $I_k \subseteq J_k$ y $\mu(J_k) < \mu(I_k) + \frac{\epsilon}{2^k}$ y por lo tanto $\sum_{k=1}^{\infty} \mu(J_k) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu(I_k) + \epsilon$

Proposición 2.1.2. μ^* es una medida exterior en \mathbb{R}^n

Demostración.

Restaría mostrar que dada $(E_k)_{k \in \mathbb{N}}$ una secuencia de subconjuntos de \mathbb{R}^n tenemos que

$$\mu^*(\cup_{k=1}^{\infty} E_k) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu^*(E_k).$$

Si para algún $k \in \mathbb{N}$ $\mu^*(E_k) = \infty$ tenemos igualdad, pues ambos lados serían infinito.

Supongamos entonces que $\mu^*(E_k) < \infty \forall k \in \mathbb{N}$.

Dado $\epsilon > 0$ y para cada $k \in \mathbb{N}$ escogamos $(I_m^k)_{m \in \mathbb{N}}$ una sucesión de n -celdas tales que

$$E_k \subseteq \bigcup_{m=1}^{\infty} I_m^k \text{ y } \sum_{m=1}^{\infty} \mu(I_m^k) \leq \mu^*(E_k) + \frac{\epsilon}{2^k}$$

luego

$$\mu^*(\cup_{k=1}^{\infty} E_k) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \mu(I_m^k) \leq \sum_{k=1}^{\infty} (\mu^*(E_k) + \frac{\epsilon}{2^k}) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu^*(E_k) + \epsilon$$

Proposición 2.1.3. Si I es una n -celda entonces $\mu(I) = \mu^*(I)$

Demostración. Como $\{I, \emptyset, \dots, \emptyset, \dots\}$ es un cubrimiento para I por n -celdas tenemos que $\mu^*(I) \leq \mu(I)$.

Veamos la otra desigualdad.

Consideremos inicialmente el caso en que I es cerrado. Dado $\epsilon > 0$ existe un cubrimiento $(I_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de I por n -celdas abiertas tales que $\sum_{i=1}^{\infty} \mu(I_k) \leq \mu^*(I) + \epsilon$, como I es compacto existe un subcubrimiento finito de n -celdas que cubren I , que por comodidad notaremos I_1, \dots, I_m .

Consideremos la extensión de los planos $n - 1$ -dimensionales que contienen las fases de las n -celdas I, I_1, \dots, I_m si K_1, \dots, K_p son las n -celdas cerradas en las que se dividieron las n -celdas $\overline{I_1}, \dots, \overline{I_m}$ y J_1, \dots, J_r las n -celdas cerradas en las que se dividió I tenemos: $\mu(I) = \sum_{j=1}^r \mu(J_j) \leq \sum_{k=1}^p \mu(K_k) \leq \sum_{k=1}^m \mu(I_k) \leq \mu^*(I) + \epsilon$.

Si I no es cerrado existe J cerrado tal que $J \subseteq I$ y $\mu(I) - \epsilon < \mu(J)$ por resultado anterior tenemos que $\mu(I) \leq \mu(J) + \epsilon \leq \mu^*(I) + 2\epsilon$.

Por la arbitrariedad del ϵ obtenemos lo deseado.

Definición 2.1.4. Sean X un conjunto no vacío y μ^* una medida exterior en X . $E \subseteq X$ es μ^* medible si para todo $C \subseteq X$,

$$\mu^*(C) = \mu^*(C \cap E) + \mu^*(C - E)$$

.

Observe que siempre se tiene:
para $C, E \subseteq X$, $\mu^*(C) \leq \mu^*(C \cap E) + \mu^*(C - E)$.
Note además que: Si E es μ^* -medible, entonces $X - E$ es μ^* -medible.

Definición 2.1.5. $\mathcal{L} = \{E \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) : E \text{ es } \mu^* - \text{medible}\}$

Proposición 2.1.6. Sean $B \subseteq \mathbb{R}^n$ si $\mu^*(B) = 0$ entonces B es μ^* -medible.

Demostración. Dado $E \subseteq \mathbb{R}^n$ veamos que

$$\mu^*(E) \geq \mu^*(B \cap E) + \mu^*(E - B)$$

Ahora como

$$\mu^*(E) = \mu^*(B) + \mu^*(E) \geq \mu^*(B \cap E) + \mu^*(E - B)$$

Puesto que $0 = \mu^*(B) \geq \mu^*(B \cap E)$ y $\mu^*(E) \geq \mu^*(E - B)$

Definición 2.1.7. Sea (X, M, μ) un espacio de medida decimos que μ es completa si dados $B \in M$ con $\mu(B) = 0$ y $A \subseteq B$ entonces $A \in M$

Proposición 2.1.8. $(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}, \mu^*)$ es un espacio de medida y μ^* es una medida completa.

Demostración. Veamos inicialmente que \mathcal{L} es una σ -álgebra; para esto mostremos que:

i $\emptyset \in \mathcal{L}$

ii $A \in \mathcal{L}$ entonces $X - A \in \mathcal{L}$

iii Si $E, F \in \mathcal{L}$ entonces $E \cap F \in \mathcal{L}$

Como E es medible entonces para cada $A \subseteq \mathbb{R}^n$ tenemos

$$\mu^*(A \cap F) = \mu^*(A \cap F \cap E) + \mu^*(A \cap F - E)$$

Dado que F es medible tenemos

$$\mu^*(A) = \mu^*(A \cap F) + \mu^*(A - F)$$

como también

$$\mu^*(A - (E \cap F)) = \mu^*((A - (E \cap F)) \cap F) + \mu^*((A - (E \cap F)) - F) = \mu^*((A \cap F) - E) + \mu^*(A - F).$$

De lo anterior concluimos

$$\mu^*(A) = \mu^*(A \cap F \cap E) + \mu^*(A - (E \cap F))$$

iv Dados $A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathcal{L}$ entonces $\bigcup_{i=1}^n A_i \in \mathcal{L}$

Basta observar que $\bigcup_{i=1}^n A_i = X - \bigcap_{i=1}^n (X - A_i)$ y por lo tanto como consecuencia de los numerales 2, 3 tenemos que $\mathbb{R}^n - \bigcap_{i=1}^n (\mathbb{R}^n - A_i) \in \mathcal{L}$

v Si $E, F \in \mathcal{L}$ con $E \cap F = \emptyset$ entonces $\mu^*(E \cup F) = \mu^*(E) + \mu^*(F)$

Sabemos que $E, F \in \mathcal{L}$ luego

$$\mu^*(A \cap (E \cup F)) = \mu^*((A \cap (E \cup F)) \cap F) + \mu^*((A \cap (E \cup F)) - F) = \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap F)$$

Tomando $A = \mathbb{R}^n$ obtenemos lo deseado.

vi Sea $\{E_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ familia disyunta en \mathcal{L} entonces $\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \in \mathcal{L}$ y $\mu^*(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(E_i)$.

Para cada $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $E, F \in \mathcal{L}$ se tiene que

$$\mu^*(A \cap (E \cup F)) = \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap F) \text{ si } E \cap F = \emptyset \quad (*)$$

Definamos $F_n = \bigcup_{i=1}^n E_i$

Veamos que

$$\mu^*(A) \geq \mu^*\left(A - \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) + \mu^*\left(A \cap \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right)$$

$$\mu^*(A) = \mu^*(A \cap F_n) + \mu^*(A - F_n) \text{ pués } F_n \text{ es } \mu^*\text{-medible} \quad (2.1)$$

$$= \sum_{i=1}^n \mu^*(A \cap E_i) + \mu^*(A - F_n) \text{ de } (*) \quad (2.2)$$

$$\geq \sum_{i=1}^n \mu^*(A \cap E_i) + \mu^*\left(A - \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) \quad (2.3)$$

haciendo $n \rightarrow \infty$ tenemos

$$\mu^*(A) \geq \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(A \cap E_i) + \mu^*\left(A - \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) \geq \mu^*\left(A - \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) + \mu^*\left(A \cap \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right)$$

Con esto probamos que \mathbb{L} es una σ -álgebra, además si tomamos $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$ tenemos la σ -aditividad y con esto vemos que μ^* es una medida, la completez de μ^* es una consecuencia directa de la proposición anterior.

2.2. Medida de Lebesgue

Definición 2.2.1. El espacio $(\mathbb{R}^n, \mathbb{L}, \mu^*)$ es llamado espacio de medida de Lebesgue, y la medida μ^* es llamada medida de Lebesgue.

Proposición 2.2.2. *Lema Sean $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ disjuntos tales que*

$$d(A, B) = \inf\{\|a - b\| : a \in A, b \in B\} > 0$$

entonces $\mu^(A \cup B) = \mu^*(A) + \mu^*(B)$*

Demostración. Demostración

Para esto basta probar que $\mu^*(A \cup B) \geq \mu^*(A) + \mu^*(B)$; podemos suponer además que $\mu^*(A \cup B) < \infty$.

Sea $\delta = \inf\{\|a - b\| : a \in A, b \in B\} > 0$. Dado $\epsilon > 0$ existe $(I_k)_{k \in \mathbb{N}}$ una sucesión de n -celdas que cubren $A \cup B$ tales que $\sum_{k=1}^{\infty} \mu^*(I_k) \leq \mu^*(A \cup B) + \epsilon$, podemos asumir que las n -celdas tienen diámetro menor que δ (por qué?).

Con este supuesto vemos que ninguna n -celda interseca simultáneamente a los conjuntos A y B . Luego $\mu^*(A) + \mu^*(B) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu^*(I_k) \leq \mu^*(A \cup B) + \epsilon$

Proposición 2.2.3. *Toda n -celda es Lebesgue medible*

Demostración. Veamos que dado $A \subseteq \mathbb{R}^n$ tenemos $\mu^*(A) \geq \mu^*(A \cap I) + \mu^*(A - I)$. Consideremos

$$I_k = \left\{ x \in I : \text{dis}(x, \mathbb{R}^n - I) > \frac{1}{k} \right\}$$

como $(A \cap I_k) \cup (A - I) \subseteq A$ y $\text{dis}(A \cap I_k, A - I) \geq \frac{1}{k}$ entonces por el lema anterior tenemos

$$\mu^*(A) \geq \mu^*((A \cap I_k) \cup (A - I)) = \mu^*(A \cap I_k) + \mu^*(A - I) (*)$$

. De otro lado sabemos que $A \cap I = (A \cap I_k) \cup (A \cap (I - I_k))$ Luego $\mu^*(A \cap I_k) \leq \mu^*(A \cap I) \leq \mu^*(A \cap I_k) + \mu^*(I - I_k)$.

Pasando al límite y observando que $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu^*(I - I_k) = 0$ (por qué?). tenemos que $\mu^*(A \cap I) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu^*(A \cap I_k)$.

Tomando límite en (*) obtenemos lo deseado.

Usando el Teorema de Lindeloff vemos que todo abierto en \mathbb{R}^n es unión enumerable de n -celdas abiertas y por lo tanto es un conjunto Lebesgue medible, de ahí concluimos que todo conjunto cerrado es también Lebesgue medible y por consiguiente todo Boreliano es Lebesgue medible; esto es, la σ -álgebra de Borel es un subconjunto de la σ -álgebra de Lebesgue.

Ejemplo 2.2.4. Consideremos $I = [0, 1]$, $0 < \alpha \leq 1$ removemos de I sucesivamente una colección de intervalo abiertos de la siguiente forma:

- removemos el intervalo central de longitud $\frac{\alpha}{3}$; es decir removemos $I_1^1 = (\frac{1}{2} - \frac{\alpha}{2 \cdot 3}, \frac{1}{2} + \frac{\alpha}{2 \cdot 3})$ obtenemos por lo tanto dos intervalos cerrados disjuntos, cada uno de longitud $\frac{1-\alpha}{2}$ a saber

$$J_1^1 = \left[0, \frac{1}{2} - \frac{\alpha}{2 \cdot 3} \right] \quad J_2^1 = \left[\frac{1}{2} + \frac{\alpha}{2 \cdot 3}, 1 \right]$$

- removemos los intervalos centrales, I_1^2, I_2^2 , de longitud $\frac{\alpha}{9}$ de los intervalos J_1^1, J_2^1 respectivamente, obteniendo cuatro intervalos cerrados disjuntos.

$$J_1^2, J_2^2, J_3^2 \text{ y } J_4^2$$

cada uno de longitud $\frac{1-\frac{\alpha}{3}-\frac{2\alpha}{9}}{4}$

- procediendo de forma análoga en los intervalos cerrados disjuntos, cada uno de longitud $\frac{1-\frac{\alpha}{3}-\dots-\frac{2^{n-1}\alpha}{3^n}}{2^n}$ removemos los intervalos centrales

$$I_k^{n+1}, 1 \leq k \leq 2^n \text{ cada uno de longitud } \frac{\alpha}{3^{n+1}}$$

sean

$$A_n = \bigcup_{j=1}^{2^{n-1}} I_j^{n-1}, B_n = \bigcup_{k=1}^{2^n} J_k^n \text{ y } C_\alpha = \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n = [0, 1] - \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$

el conjunto C_α es llamado conjunto de cantor.

La longitud de los intervalos removidos de I es

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha \frac{2^n}{3^{n+1}} = \alpha.$$

Luego $\mu^*(C_\alpha) \neq 0$ si $0 < \alpha < 1$ entanto que $\mu^*(C_\alpha) = 0$ si $\alpha = 1$. El caso más conocido de conjunto de Cantor es cuando $\alpha = 1$, sabemos que es un conjunto no enumerable, esto nos permite deducir que cualquier subconjunto de este conjunto está en la σ -álgebra de Lebesgue y por lo tanto el cardinal de de la σ -álgebra es por lo menos $2^{2^{\aleph_0}} = 2^c$, mas como la σ -álgebra de Lebesgue está contenida en $P(\mathbb{R})$ vemos que el cardinal de la σ -álgebra de Lebesgue es $2^{2^{\aleph_0}}$.

No es difícil intuir que la σ -álgebra de Borel tiene cardinal $c = 2^{\aleph_0}$, para esto pensemos en la familia de intervalos con extremos racionales, la cual resulta ser contable, la σ -álgebra generada por esta familia es justamente la de Borel. Consideremos uniones enumerable de intervalos de la familia con complementos de intervalos de la familia, este nuevo conjunto tiene cardinal $c = 2^{\aleph_0}$. Si nuevamente hacemos uniones enumerables de conjuntos de la nueva familia con complementos de conjuntos de la familia obtenemos un conjunto de cardinal $c = 2^{\aleph_0}$. Lo que nos permite intuir que el cardinal de la σ -álgebra de Borel es $c = 2^{\aleph_0}$ y por lo tanto está estrictamente contenida en la σ -álgebra de Lebesgue. Para una prueba del cardinal de la σ -álgebra de Borel presentamos el siguiente Teorema, sin prueba, que se encuentra en el libro: Real and Abstract Analysis de Edwin Hewwit y Karl Stromberg.

Teorema 2.2.5. Sean X un conjunto y A una familia de subconjuntos de X tal que $\phi \in A$. Si M_A es la menor σ -álgebra que contiene a A y el cardinal de A es e , con $e \geq 2$, entonces el cardinal de M_A es menor o igual que e^{\aleph_0}

2.3. Propiedades .

Teorema 2.3.1. Sea $E \subseteq \mathbb{R}^n$

E es Lebesgue medible $\Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists G \text{ abierto})(G \supseteq E \wedge \mu^*(G - E) < \varepsilon)$

Demostración. " \Rightarrow " Si $\mu^*(E) < \infty$ como

$$\mu^*(E) = \inf \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \mu(I_k) : I_k \text{ es una } n\text{-celda y } \bigcup_{k \in \mathbb{N}} I_k \supseteq E \right\}$$

dado $\varepsilon > 0$ existe $(I_k)_{k \in \mathbb{N}}$ cubrimiento de E por n -celdas abiertas tales que

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu^*(I_k) < \mu^*(E) + \varepsilon$$

Si tomamos $G = \bigcup I_n$

$$\mu^*(G) < \mu^*(E) + \varepsilon$$

Ahora como E es Lebesgue medible tenemos

$$\mu^*(G) = \mu^*(G \cap E) + \mu^*(G - E) = \mu^*(E) + \mu^*(G - E)$$

Luego

$$\mu^*(G - E) = \mu^*(G) - \mu^*(E) < \varepsilon$$

Si $\mu^*(E) = +\infty$

Hagamos

$$E_1 = \{x \in E : \|x\| \leq 1\}$$

\vdots

$$E_n = \{x \in E : n-1 < \|x\| \leq n\}, \quad n = 2, 3, \dots$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$ existe G_n abierto tal que $G_n \supseteq E_n \wedge \mu^*(G_n - E_n) < \frac{\varepsilon}{2^n}$

Hagamos $G = \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n$

Luego $G \supseteq E$

$$\mu^*(G - E) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(G_n - E_n) < \varepsilon$$

" \Leftarrow "

Dado $n \in \mathbb{N}$; existe G_n abierto tal que .

$$G_n \supseteq E, \quad \mu^*(G_n - E) < \frac{1}{n}$$

hagamos $G = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} G_n \supseteq E$ luego

$$\mu^*(G - E) \leq \mu^*(G_n - E) < \frac{1}{n}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$\mu^*(G - E) = 0$, Así $G - E \in \mathcal{L}$ y $E = (G - E)^c \cap G$ con lo que $E \in \mathcal{L}$

Corolario 2.3.2. Si $E \subseteq \mathbb{R}^n$ entonces

$$\mu^*(E) = \inf\{\mu^*(G) : G \text{ es abierto} \wedge G \supseteq E\}$$

Demostración. si $\mu(E) = \infty$ entonces cada abierto, G , que contiene a E tiene medida infinita y por lo tanto el infimo del conjunto es infinito. si la medida de $\mu(E) < \infty$ se razona de la misma manera como en la prueba del Teorema.

Teorema 2.3.3. Sea $E \subseteq \mathbb{R}^n$

E es Lebesgue medible $\Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists F \subseteq E)(F \text{ es cerrado} \wedge \mu^*(E - F) < \varepsilon)$

Demostración. " \Rightarrow " Dado $\varepsilon > 0$ Existe G abierto $G \supseteq E^c$ tal que

$$\mu^*(G - E^c) < \varepsilon$$

con $G^c \subseteq E$ y G^c cerrado .

$$\mu^*(E - G^c) = \mu^*(E \cap G) = \mu^*(G - E^c) < \varepsilon$$

" \Leftarrow " Dado $n \in \mathbb{N}$, Existe $F_n \subseteq E$, F_n cerrado y $\mu^*(E - F_n) < \frac{1}{n}$
Hagamos $F = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n$

$$\mu^*(E - F) \leq \mu^*(E - F_n) < \frac{1}{n}$$

Así $\mu^*(E - F) = 0$ y por lo tanto $E - F \in \mathcal{L}$ y $E = E - F \cup F \in \mathcal{L}$

Corolario 2.3.4. Si $E \subseteq \mathbb{R}^n$ Lebesgue medible entonces

$$\mu^*(E) = \sup\{\mu^*(F) : F \text{ es cerrado} \wedge F \subseteq E\}$$

Demostración. Si $\mu^*(E) < \infty$, dado $\epsilon > 0$ existe F conjunto cerrado tal que $F \subseteq E$ y $\mu^*(E - F) < \epsilon$.

Luego $\mu^*(E) - \mu^*(F) < \epsilon$ de donde se sigue el resultado.

Si $\mu^*(E) = \infty$ consideremos $D_k = \{x \in \mathbb{R}^n : k - 1 \leq \|x\| < k\}$. Entonces $E = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} D_k \cap E$ y por lo tanto $\infty = \mu^*(E) = \sum_{k \in \mathbb{N}} \mu^*(D_k \cap E)$.

Como para cada $k \in \mathbb{N}$ se tiene que $\mu^*(D_k \cap E) < \infty$. Entonces para cada $k \in \mathbb{N}$ existe C_k conjunto cerrado tal que $C_k \subseteq D_k \cap E$ con $\mu^*(C_k) \geq \mu^*(D_k \cap E) - \frac{1}{2^k}$. Ahora $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu^*(\bigcup_{k=1}^n C_k) = \mu^*(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} C_k) = \sum_{k \in \mathbb{N}} \mu^*(C_k) \geq \sum_{k \in \mathbb{N}} [\mu^*(D_k \cap E) - \frac{1}{2^k}] = \infty$.

Obsérvese que para cada $n \in \mathbb{N}$ $\bigcup_{k=1}^n C_k$ es un conjunto cerrado.

Teorema 2.3.5. Sea $E \subseteq \mathbb{R}^n$, $\mu^*(E) < \infty$

E es Lebesgue medible $\Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists K \text{ compacto}, K \subseteq E \wedge \mu^*(E - K) < \varepsilon)$

Demostración. " \Rightarrow " Hagamos $E_n = \{x \in E : \|x\| \leq n\}$ luego

$$\lim \mu^*(E_n) = \mu^*(E)$$

Dado $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\mu^*(E) - \mu^*(E_{n_0}) < \frac{\varepsilon}{2}$$

Luego $\mu^*(E - E_{n_0}) < \frac{\varepsilon}{2}$

por teorema anterior, existe C cerrado $C \subseteq E_{n_0}$ tal que $\mu^*(E_{n_0} - C) < \frac{\varepsilon}{2}$ por lo tanto

$$\mu^*(E - C) = \mu^*(E - E_{n_0}) + \mu^*(E_{n_0} - C) < \varepsilon.$$

Note que C es cerrado y acotado, por lo tanto compacto

" \Leftarrow " Lo mismo que en el caso anterior.

Corolario 2.3.6. Si $E \subseteq \mathbb{R}^n$, Lebesgue medible entonces

$$\mu^*(E) = \sup\{\mu^*(K) : K \text{ compacto} \wedge K \subseteq E\}$$

Demostración. Si $\mu^*(E) < \infty$, dado $\varepsilon > 0$ existe K conjunto compacto tal que $K \subseteq E$ y $\mu(E - K) < \varepsilon$; luego $\mu^*(E - K) < \varepsilon$; es decir $\mu^*(E) < \mu^*(K) + \varepsilon$.

Si $\mu^*(E) = \infty$ entonces existe F cerrado tal que $F \subseteq E$ y $\mu^*(E - F) < \varepsilon$. Nótese que necesariamente $\mu^*(F) = \infty$ (por qué?)

Si consideramos $D_k = \{x \in F : \|x\| \leq k\}$ vemos que $\mu^*(F) = \lim_{k \rightarrow \infty} \mu^*(D_k)$ y que cada D_k es compacto., Esto concluye la prueba.

El siguiente resultado nos muestra que no todo subconjunto de \mathbb{R}^n es Lebesgue medible

Teorema 2.3.7. Si $A \subseteq \mathbb{R}^n$ es Lebesgue medible y todo subconjunto de A es Lebesgue medible, entonces $\mu^*(A) = 0$.

Corolario 2.3.8. Si $\mu^*(E) > 0$ entonces existe $B \subseteq E$ tal que $B \notin \mathcal{L}$

Demostración del Teorema : definamos en \mathbb{R}^n la relación

$$x \sim y \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Q}^n.$$

Se puede ver que \sim es una relación de equivalencia. Escojamos, usando el axioma de elección, un elemento de cada clase de \mathbb{R}^n / \sim y denominemos por E dicha

colección.

Dados $r, s \in \mathbb{Q}^n$ tenemos

i $(E + r) \cap (E + s) = \emptyset$ si $r \neq s$

ii $\forall x \in \mathbb{R}^n, \exists r \in \mathbb{Q}^n$ tal que $x \in E + r$

Hagamos $A_t = A \cap (E + t)$, $t \in \mathbb{Q}^n$, A_t medible $A_t \subseteq A$

Sea $K \subseteq A_t$ (compacto) Luego

$$\infty > \mu^* \left(\bigcup_{r \in [0,1]^n \cap \mathbb{Q}^n} K + r \right) = \sum_{r \in [0,1]^n \cap \mathbb{Q}^n} \mu^*(K + r) \quad (2.4)$$

$$= \sum_{r \in [0,1]^n \cap \mathbb{Q}^n} \mu^*(K) \quad (2.5)$$

entonces $\mu^*(K) = 0$.

Luego $\mu^*(A_t) = 0$ y por lo tanto $\mu(A) = 0$ pues $A = \bigcup_{t \in \mathbb{Q}^n} A_t$

2.4. Ejercicios

1. Sea $A \subseteq \mathbb{R}^n$ con $\mu^*(A) < \infty$. Muestre que para cada $\epsilon > 0$ existe $A_\epsilon \subseteq \mathbb{R}^n$ acotado tal que $A_\epsilon \subseteq A$ y $\mu^*(A - A_\epsilon) < \epsilon$
2. Muestre que el conjunto $\{E \subseteq \mathbb{R}^n : \mu^*(E) = 0 \text{ o } \mu^*(\mathbb{R}^n - E) = 0\}$ es una σ -álgebra.
3. Sean $M \subseteq \mathbb{R}^n$, $h \in \mathbb{R}^n$ y $\lambda \in \mathbb{R}$: Si M es medible muestre que $M + h$, λM son medibles y que $\mu^*(M + h) = \mu^*(M)$, $\mu^*(\lambda M) = |\lambda|^n \mu^*(M)$
4. Demostrar que si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es monótona entonces es Lebesgue medible
5. Sea $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ Lebesgue medible si $\frac{df}{dx_1}$ existe en cada punto de \mathbb{R}^n muestre que $\frac{df}{dx_1}$ es Lebesgue medible.
6. Muestre que no existe una σ -álgebra con cardinal \aleph_0 (el cardinal de \mathbb{N})
7. Sea $E \subseteq [0, 1]$ si $\mu^*([0, 1] - E) = 0$ muestre que E es denso en $[0, 1]$.
8. Sea $E \subseteq \mathbb{R}^n$ si $\mu^*(E) = 0$ muestre que $\text{int} E = \emptyset$
9. Sea $E \subseteq \mathbb{R}^n$ enumerable muestre que $\mu^*(E) = 0$

CAPÍTULO 3

La integral

3.1. Integrales de funciones medibles.

Definición 3.1.1. Sean (X, M, μ) un espacio de medida, $s : X \rightarrow [0, \infty)$ una función simple medible, ($s = \sum_{i=1}^n \alpha_i \chi_{A_i}$, donde $A_i \in M$ para $i = 1, \dots, n$) y $E \in M$. Definimos

$$\int_E s d\mu := \sum_{i=1}^n \alpha_i \mu(A_i \cap E)$$

Si $f : X \rightarrow [0, \infty]$ es medible y $E \in M$ definimos

$$\int_E f d\mu := \sup_{0 \leq s \leq f, s \text{ simple}} \left[\int_E s d\mu \right].$$

Nótese que la función nula pertenece al conjunto.

3.1.1. Propiedades.

1. Si $0 \leq f \leq g$ y $E \in M$, entonces $\int_E f d\mu \leq \int_E g d\mu$
Demostración. Sean $A := \{ \int_E s d\mu : s \text{ es simple no negativa y } s \leq f \}$ y $B := \{ \int_E s d\mu : s \text{ es simple no negativa y } s \leq g \}$. De esta manera, como $A \subseteq B$ entonces $\sup A \leq \sup B$, es decir, $\int_E f d\mu \leq \int_E g d\mu$.
2. Si $A, B \in M$, $A \subseteq B$ y $0 \leq f$, $\int_A f d\mu \leq \int_B f d\mu$.
Demostración. Del hecho de que $\int_A s d\mu \leq \int_B s d\mu$ si s es simple no negativa (¿Por qué?) se sigue el resultado.

3. Si $E \in M$ y $c \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$, $\int_E c f d\mu = c \int_E f d\mu$.

Demostración. Es consecuencia de las propiedades del supremo ya que $c \geq 0$

4. Si $E \in M$ es tal que $\mu(E) = 0$, entonces $\int_E f d\mu = 0$.

Demostración. Si $\mu(E) = 0$ y s es simple no negativa entonces $\int_E s d\mu = 0$, luego el resultado se tiene para funciones simples no negativas y por lo tanto para f

5. Si $f \geq 0$ y $E \in M$, $\int_E f d\mu = \int_X f \chi_E d\mu$

Demostración. Como $\chi_{A \cap B} = \chi_A \chi_B$ y el resultado es válido para funciones simples no negativas, obtenemos lo deseado.

6. Si s es simple no negativa y $E \in M$ entonces $\varphi(E) := \int_E s d\mu$ define una medida para (X, M) .

Demostración.

a) $\varphi(\emptyset) = 0$ se sigue de la propiedad 4.

b) Sea $\{E_i\}_{i \in \mathbb{N}} \subseteq M$ disyunta 2 a 2, y considérese $E := \bigcup_{i \in \mathbb{N}} E_i$.

$$\varphi(E) = \int_E s d\mu = \sum_{i=1}^n a_i \mu(A_i \cap E) \quad (3.1)$$

$$= \sum_{i=1}^n a_i \left(\mu \left(A_i \cap \left[\bigcup_{j \in \mathbb{N}} E_j \right] \right) \right) \quad (3.2)$$

$$= \sum_{i=1}^n a_i \left(\sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_i \cap E_j) \right) \quad (3.3)$$

$$= \sum_{j=1}^{\infty} a_i \left(\sum_{i=1}^n \mu(A_i \cap E_j) \right) \quad (3.4)$$

(suma finita de límites es el límite de la suma)

$$= \sum_{j=1}^{\infty} \int_{E_j} s d\mu \quad (3.6)$$

$$= \sum_{j=1}^{\infty} \varphi(E_j). \quad (3.7)$$

Por lo tanto, φ es una medida para (X, M) .

7. Si s, t son simples no negativas y $E \in M$, entonces $\int_E (s+t) d\mu = \int_E s d\mu + \int_E t d\mu$.

Demostración. Supongamos que s y t son de la forma $s = \sum_{i=1}^n a_i \chi_{A_i}$ y $t = \sum_{j=1}^m b_j \chi_{B_j}$, respectivamente.

Al considerar $C_{ij} := A_i \cap B_j$ ($i = 1, \dots, n$; $j = 1, \dots, m$) se forma una partición de X . Como $\int_{C_{ij}} (s + t) d\mu = (a_i + b_j) \mu(C_{ij}) = \int_{C_{ij}} s d\mu + \int_{C_{ij}} t d\mu$ y $\bigcup_{i,j} (A_i \cap B_j \cap E) = E$, el resultado se sigue utilizando el hecho de que $\varphi_s(E) := \int_E s d\mu$ y $\varphi_t(E) := \int_E t d\mu$ definen dos medidas para (X, M) .

3.2. Teorema de la convergencia monótona.

Proposición 3.2.1 (Teorema de la convergencia monótona). Sean (X, M, μ) un espacio de medida, $f_n : X \rightarrow [0, \infty]$, $n \in \mathbb{N}$ una sucesión creciente de funciones medibles tal que $f_n \rightarrow f$ puntualmente en X . Entonces f es medible y $\int_X f d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n d\mu$.

Demostración. Es claro que f es medible, por ser el límite de funciones medibles (ver **sección 3 capítulo 1**).

Por otro lado, como $\int_X f_n d\mu \leq \int_X f d\mu$ para todo $n \in \mathbb{N}$ (por ser $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión creciente), $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n d\mu \leq \int_X f d\mu$.

Por otro lado, sea $0 \leq s \leq f$ simple y fijemos $0 < \alpha < 1$. Definimos

$$E_n := \{x \in X : f_n(x) \geq \alpha s(x)\}.$$

Claramente, $E_1 \subseteq E_2 \subseteq \dots \subseteq E_n \subseteq X$ y $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n$ (pues si $f(x) \neq 0$, $\alpha s(x) < f(x)$, luego existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\alpha s(x) < f_n(x) \leq f(x)$).

Así, $\int_X f_n d\mu \geq \int_{E_n} f_n d\mu \geq \int_{E_n} \alpha s d\mu$, para cada $n \in \mathbb{N}$.

Tomando $n \rightarrow \infty$, tenemos que $\int_{E_n} \alpha s d\mu \rightarrow \int_X \alpha s d\mu$ en virtud de la propiedad 3 (sección 3.2.1), ya que $\varphi(E) := \int_E \alpha s d\mu$ define una medida.

Por lo tanto, $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n d\mu \geq \int_X \alpha s d\mu = \alpha \int_X s d\mu$.

Tomando $\alpha \rightarrow 1$, tenemos que $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n d\mu \geq \int_X s d\mu$. Pero como esto vale para toda función simple $s \leq f$, entonces podemos decir que $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n d\mu \geq \int_X f d\mu$.

Luego se tiene el resultado.

Corolario 3.2.2 ((1) Lema de Fatou). Sean (X, M, μ) un espacio de medida y $f_n : X \rightarrow [0, \infty]$ funciones medibles ($n \in \mathbb{N}$). Entonces $\int_X \liminf f_n d\mu \leq \liminf \int_X f_n d\mu$.

Demostración. Definase $g_n := \inf_{i \geq n} f_i$ ($n \in \mathbb{N}$).

De esta manera tenemos que $0 \leq g_1 \leq \dots \leq g_n \leq \dots$ y que $\lim_{n \rightarrow \infty} g_n(x) = \liminf f_n(x)$. Adicionalmente tenemos que $\int_X g_n d\mu \leq \int_X f_i d\mu$ si $i \geq n$ (puesto que $g_n \leq f_i$), por lo que $\int_X g_n d\mu \leq \liminf \int_X f_n d\mu$, esto para todo $n \in \mathbb{N}$.

Por el [teorema de la convergencia monótona](#) tenemos que $\int_X \liminf f_n d\mu = \int_X \lim_{n \rightarrow \infty} g_n d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X g_n d\mu \leq \liminf \int_X f_n d\mu$, luego se tiene el resultado.

Ejemplo 3.2.3. Definamos

$$f_n : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty] \quad (3.8)$$

$$x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } n \leq x < n+1 \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases} \quad (3.9)$$

Nótese que $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0$, ya que $f_n(x) = 0$ si $n \leq x$.

Por otro lado, $0 = \int_{[0, \infty)} \liminf f_n d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{[0, \infty)} g_n d\mu \leq \liminf \int_{[0, \infty)} f_n d\mu = 1$

Corolario 3.2.4 ((2)). Sean (X, M) un espacio de medida, $\mu : M \rightarrow [0, \infty]$ una medida y $f_n : X \rightarrow [0, \infty]$ funciones medibles ($n \in \mathbb{N}$). Entonces $\int_X \sum_{n=1}^{\infty} f_n d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_X f_n d\mu$

Demostración. Sabemos que dado $m \in \mathbb{N}$, existe una sucesión de funciones simples $\{s_n^m\}_{n \in \mathbb{N}}$ tal que $s_1^m \leq \dots \leq s_n^m \leq \dots \leq f_m$ y $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n^m(x) = f_m(x)$ para todo $x \in X$.

De esta manera, la sucesión $\{s_n^1 + s_n^2\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge puntualmente a $f_1 + f_2$, de forma creciente. Por el [teorema de la convergencia monótona](#), tenemos que $\int_X (f_1 + f_2) d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X (s_n^1 + s_n^2) d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X s_n^1 d\mu + \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X s_n^2 d\mu = \int_X f_1 d\mu + \int_X f_2 d\mu$.

Utilizando un argumento inductivo, podemos verificar que $\int_X \sum_{i=1}^n f_i d\mu = \sum_{i=1}^n \int_X f_i d\mu$. Tomemos $g_n := \sum_{i=1}^n f_i$ ($n \in \mathbb{N}$). Claramente, $0 \leq g_1 \leq \dots \leq g_n \leq \dots \leq \sum_{i=1}^{\infty} f_i$.

Finalmente, nuevamente por el [teorema de la convergencia monótona](#) tenemos que $\sum_{n=1}^{\infty} \int_X f_n d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \int_X f_i d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X \sum_{i=1}^n f_i d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X g_n d\mu = \int_X \lim_{n \rightarrow \infty} g_n d\mu = \int_X \sum_{n=1}^{\infty} f_n d\mu$.

Corolario 3.2.5 ((3)). Dados (X, M, μ) un espacio de medida y $f : X \rightarrow [0, +\infty]$ medible, entonces $\varphi(E) := \int_E f d\mu$ ($E \in M$) define una medida en (X, M) y además $\int_X g d\varphi = \int_E f g d\mu$ (donde $g : X \rightarrow [0, +\infty]$ es medible).

Demostración.

1. Es evidente que $\varphi(\emptyset) = \int_{\emptyset} f d\mu = 0$ (ya visto anteriormente).
2. Sea $\{E_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq M$ una colección cuyos elementos son disyuntos 2 a 2. De esta manera tenemos que $\varphi(E) = \varphi\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n\right) = \int_X f \chi_E d\mu$.

Puesto que $\varphi(E_n) = \int_X f\chi_{E_n} d\mu$, tenemos que

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\varphi(E_n)) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_X f\chi_{E_n} d\mu \right) \quad (3.10)$$

$$= \int_X \left(\sum_{n=1}^{\infty} f\chi_{E_n} \right) d\mu \quad (\text{por el corolario 2}) \quad (3.11)$$

$$= \int_X f\chi_E d\mu \quad (\text{por ser los } E_n \text{ disyuntos 2 a 2}) \quad (3.12)$$

$$= \int_E f d\mu \quad (3.13)$$

$$= \varphi \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n \right) \quad (3.14)$$

De esto tenemos que φ es una medida para (X, M) .

Por otro lado, veamos que $\int_X g d\varphi = \int_X f g d\mu$.

Primero veámoslo para $g := \chi_E$. En este caso, $\int_X \chi_E d\varphi = \varphi(E) = \int_E f d\mu = \int_X f\chi_E d\mu$.

De este hecho tenemos que $\int_X g d\varphi = \int_X f g d\mu$ vale si g es una función simple. Siendo ahora $g : X \rightarrow [0, \infty]$ una función medible, existe $\{s_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de funciones simples tal que $0 \leq s_1 \leq \dots \leq s_n \leq \dots \leq g$ y $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n(x) = g(x)$ para todo $x \in X$. Así tenemos que

$$\int_X g d\varphi = \int_X \left(\lim_{n \rightarrow \infty} s_n \right) d\varphi \quad (3.15)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X s_n d\varphi \quad (\text{por el teorema de la convergencia monótona}) \quad (3.16)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f s_n d\mu \quad (\text{el resultado vale para funciones simples}) \quad (3.17)$$

$$= \int_X \left(f \lim_{n \rightarrow \infty} s_n \right) d\mu \quad (\text{por el teorema de la convergencia monótona}) \quad (3.18)$$

$$= \int_X f g d\mu \quad (3.19)$$

Corolario 3.2.6 ((4)). Si $c \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$, (X, M, μ) es un espacio de medida y $f : X \rightarrow [0, \infty]$ es medible, $\int_X c f d\mu = c \int_X f d\mu$.

Demostración. Este resultado se tiene como consecuencia inmediata del [teorema de la convergencia monótona](#), pues esto vale para las funciones simples. .

Corolario 3.2.7 ((5)). Sea (X, M, μ) un espacio de medida y $f : X \rightarrow [0, \infty]$ una función medible.

$$\mu(\{x \in X : f(x) \neq 0\}) = 0 \Leftrightarrow \int_X f d\mu = 0$$

Demostración. Sea $E := \{x \in X : f(x) \neq 0\}$. Tenemos que $E \in M$ puesto que $E = f^{-1}(0, \infty]$, donde es claro que $f^{-1}(0, \infty]$ está en M por ser f medible. Luego tiene sentido $\mu(E)$.

Veamos ahora la prueba de este corolario.

" \Rightarrow ": Si $\mu(E) = 0$,

$$\int_X f d\mu = \int_{E \cup (X-E)} f d\mu \quad (3.20)$$

$$= \int_E f d\mu + \int_{X-E} f d\mu \quad (\text{porque la integral define una medida en } (X, \mathcal{M}))$$

$$= 0 + 0 \quad (\text{pues } \mu(E) = 0 \text{ y } f(x) = 0 \text{ si } x \in X - E) \quad (3.22)$$

$$= 0. \quad (3.23)$$

$$(3.24)$$

" \Leftarrow ": Consideremos $E_n := \{x \in X : f(x) > \frac{1}{n}\}$ ($n \in \mathbb{N}$). De esta manera tenemos que $E_1 \subseteq E_2 \subseteq \dots$ y que $E := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n$. Veamos que $\mu(E_n) = 0$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

Si $x \in E_n$ tenemos que $f(x) > \frac{1}{n}$, luego $f\chi_{E_n} \geq \frac{1}{n}\chi_{E_n}$. Por lo tanto $0 = \int_X f d\mu = \int_{E_n} f d\mu = \int_X f\chi_{E_n} d\mu \geq \int_X \frac{1}{n}\chi_{E_n} d\mu = \frac{1}{n} \int_X \chi_{E_n} d\mu = \frac{1}{n}\mu(E_n)$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Luego $\mu(E_n) = 0$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Por la propiedad 3 de una medida (**sección 5 capítulo 1**) tenemos que $\mu(E) = \mu(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(E_n) = 0$

Definición 3.2.8. Sean (X, M, μ) un espacio de medida decimos que una propiedad $P(x)$ es válida para μ -casi todo $x \in X$ si $\mu(\{x \in X : x \text{ no satisface } P(x)\}) = 0$. Así por ejemplo dada $f : X \rightarrow [0, \infty]$ una función medible. Diremos que f es nula en μ -casi todas partes si $\mu(\{x \in X : f(x) \neq 0\}) = 0$.

Ejemplo 3.2.9. Sea $f : [0, 1] \rightarrow [0, \infty]$ tal que $f(x) = 0$ si $x \in \mathbb{Q}$ y si $x \in \mathbb{I}$ $f(x) = n$ donde n es el número de ceros que aparecen inmediatamente después del punto decimal.

Muestre que f es medible y encuentre el valor de $\int f d\mu$. (medida de Lebesgue). Consideremos $g : [0, 1] \rightarrow [0, \infty]$ tal que $g(0) = 0$ y $g(x) = n$ si $10^{-(n+1)} \leq x < 10^{-n}$ $n = 0, 1, \dots$

Entonces $f \leq g$ y $f = g$ en μ -casi todas partes. Luego f es medible y además $\int f d\mu = \int g d\mu$ pero

$$\int_{[0,1]} g d\mu = \sum_{n=0}^{\infty} n \left(\frac{1}{10^n} - \frac{1}{10^{n+1}} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{9n}{10^{n+1}} = \frac{1}{9}$$

Corolario 3.2.10 ((6)). Sean (X, M, μ) un espacio de medida y $f_n : X \rightarrow [0, \infty]$ ($n \in \mathbb{N}$) funciones medibles tales que $f_1 \leq f_2 \leq \dots$ y $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$ en μ -casi todas partes de X . Entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n d\mu = \int_X \lim_{n \rightarrow \infty} f_n d\mu$

Demostración. Sea $E := \{x \in X : \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \neq f(x)\}$. Podemos decir sin problemas que $f = f\chi_E + f\chi_{X-E}$. Análogamente $f_n = f_n\chi_E + f_n\chi_{X-E}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Por hipótesis tenemos que $\mu(E) = 0$ (puesto que $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$ en μ -casi todas partes en X).

De esta manera,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\int_X f_n d\mu \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\int_{X-E} f_n d\mu \right] \quad (\text{pues } \mu(E) = 0) \quad (3.25)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\int_X f_n \chi_{X-E} d\mu \right] \quad (3.26)$$

$$= \int_X \left[\lim_{n \rightarrow \infty} f_n \chi_{X-E} \right] d\mu \quad (\text{por el teorema de la convergencia monótona}) \quad (3.27)$$

$$= \int_X \left[\left(\lim_{n \rightarrow \infty} f_n \right) \chi_{X-E} \right] d\mu \quad (3.28)$$

$$= \int_{X-E} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} f_n \right) d\mu \quad (3.29)$$

$$= \int_X \left(\lim_{n \rightarrow \infty} f_n \right) d\mu \quad (\text{pues } \mu(E) = 0) \quad (3.30)$$

3.3. Teorema de la convergencia dominada

Definición 3.3.1. Sea (X, m, μ) un espacio de medida. Decimos que una función $f : X \rightarrow [-\infty, \infty]$ o $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ es integrable si f es medible y $\int_X |f| d\mu < \infty$.

Proposición 3.3.2. Sean f, g funciones integrables y $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. Entonces $\alpha f + \beta g$ es una función integrable y $\int_X \alpha f + \beta g d\mu = \alpha \int_X f d\mu + \beta \int_X g d\mu$.

Demostración. Se sigue del hecho de que $\alpha f + \beta g$ es medible por ser f y g medibles, y de que $|\alpha f + \beta g| \leq |\alpha f| + |\beta g|$. (como ejercicio completar la prueba)

Definición 3.3.3. Sean (X, M, μ) un espacio de medida y $f : X \rightarrow [-\infty, \infty]$ medible. Definimos:

$$f^+(x) := \max\{f(x), 0\} \quad (3.31)$$

$$f^-(x) := \max\{-f(x), 0\} \quad (3.32)$$

Además si f es integrable definimos

$$\int_X f d\mu := \int_X f^+ d\mu - \int_X f^- d\mu$$

Para el caso complejo definimos

$$\int f d\mu := \left[\int u^+ d\mu - \int u^- d\mu \right] + i \left[\int v^+ d\mu - \int v^- d\mu \right]$$

donde $f = u + iv$

Proposición 3.3.4. *Sea f una función integrable. Entonces $|\int_X f d\mu| \leq \int_X |f| d\mu$*

Demostración.

1. Supongamos que $f : X \rightarrow [-\infty, \infty]$. Como $f = f^+ - f^-$, $|\int_X f d\mu| = |\int_X [f^+ - f^-] d\mu| \leq \int_X f^+ d\mu + \int_X f^- d\mu = \int_X |f| d\mu$
2. Supongamos que $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ y que $f = u + iv$. Así, $\int_X f d\mu = [\int_X u^+ d\mu - \int_X u^- d\mu] + i [\int_X v^+ d\mu - \int_X v^- d\mu]$. Sean $z := \int_X f d\mu$ y $\alpha \in \mathbb{C}$ tales que $|\alpha| = 1$ y $\alpha z = |z|$ (tal escogencia se hace de la siguiente manera: si $z \neq 0$, $\alpha := |z|/z$; si $z = 0$ se toma cualquier α con la condición pedida). Tomemos $u = \operatorname{Re}(\alpha f)$ y $v = \operatorname{Im}(\alpha f)$. De esta manera $u \leq |u| \leq |\alpha f| = |f|$. Como $|\int_X f d\mu| = \alpha z = \alpha \int_X f d\mu = \int_X \alpha f d\mu \in \mathbb{R}$, tenemos que $\int_X \alpha f d\mu$ es real. Así, $|\int_X f d\mu| = \int_X \alpha f d\mu = \int_X u d\mu \leq \int_X |f| d\mu$ (puesto que $u \leq |f|$).

Teorema 3.3.5 (Teorema de la convergencia dominada). *Sean $f_n : X \rightarrow \mathbb{C}$ ($n \in \mathbb{N}$) funciones medibles tales que $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$ para todo $x \in X$. Si existe g integrable tal que para todo $x \in X$ y todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $|f_n(x)| \leq g(x)$, entonces f es integrable y $\lim_{n \rightarrow \infty} (\int_X f_n d\mu) = \int_X f d\mu$.*

Demostración. Fijo $x \in X$, se tiene que $|f(x)| \leq g(x)$ (ya que $|f_n(x)| \leq g(x)$ para todo n), y por lo tanto f es integrable.

Además, $|f_n - f| \leq 2g$. Usando el *lema de Fatou* tenemos que

$$\int_X (2g) d\mu = \int_X \liminf [2g - |f_n - f|] d\mu \leq \liminf \left[\int_X (2g - |f_n - f|) d\mu \right].$$

Así, $\int_X (2g) d\mu \leq \int_X (2g) d\mu + \liminf (\int_X -|f_n - f| d\mu) \leq \int_X (2g) d\mu - \limsup (\int_X |f_n - f| d\mu)$. por lo tanto $\limsup (\int_X |f_n - f| d\mu) = 0$, luego $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X |f_n - f| d\mu = 0$.

$$\text{Ahora } \left| \int_X f_n d\mu - \int_X f d\mu \right| = \left| \int_X (f_n - f) d\mu \right| \leq \int_X |f_n - f| d\mu.$$

Luego obtenemos lo deseado.

3.4. Las integrales de Riemann y de Lebesgue

En esta sección suponemos que el lector está familiarizado con la integral de Riemann y algunas de sus propiedades.

Sea $P([a, b])$ el conjunto de particiones del intervalo $[a, b]$. Dada una función acotada $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ definimos:

$$\int_a^b f(t) dt = \sup_{P \in P([a, b])} \sum_{i=1}^n m_i(t_i - t_{i-1})$$

$$\int_a^b f(t) dt = \inf_{P \in P([a, b])} \sum_{i=1}^n M_i(t_i - t_{i-1})$$

donde $m_i = \inf \{f(t) : t \in [t_{i-1}, t_i]\}$ y $M_i = \sup \{f(t) : t \in [t_{i-1}, t_i]\}$

Así tenemos que

$$(b - a) \inf_{t \in [a, b]} f(t) \leq \int_a^b f(t) dt \leq \int_a^b f(t) dt \leq (b - a) \sup_{t \in [a, b]} f(t)$$

.

Decimos que f es integrable según Riemann, lo que escribimos $f \in R \int_a^b f(t) dt$, si

$$\int_a^b f(t) dt = \int_a^b f(t) dt$$

y dicho valor lo denotamos por $R \int_a^b f(t) dt$.

Una función $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es escalonada si existe una partición P de $[a, b]$ tal que $\varphi(t) = c_i$, c_i es constante, en cada intervalo abierto de la partición. Además sabemos que

$$\int_a^b f(t) dt = \sup \left\{ R \int_a^b \varphi(t) dt : \varphi \text{ es una función escalonada en } [a, b], \varphi \leq f \right\}$$

$$\int_a^b f(t) dt = \inf \left\{ R \int_a^b \varphi(t) dt : \varphi \text{ es una función escalonada en } [a, b], \varphi \geq f \right\}$$

Consideremos (X, M, μ) un espacio de medida y $E \in M$ tal que $\mu(E) < \infty$.

Dada $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ acotada, no necesariamente medible, definimos

$$\int_E^* f d\mu = \inf \left\{ \int_E s d\mu : s \in S(E), s \geq f \right\}$$

$$\int_{*E} f d\mu = \sup \left\{ \int_E s d\mu : s \in S(E), s \leq f \right\}$$

donde $S(E)$ es el conjunto de funciones simples y medibles definidas en E y tomando valores Reales

Proposición 3.4.1. *Sea E un conjunto medible de medida finita y $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ una función acotada entonces*

- $\int_E^* f d\mu = \int_{*E} f d\mu$ si y sólo si f es medible
- si f es medible entonces $\int_E^* f d\mu = \int_{*E} f d\mu = \int_E f d\mu$

Demostración. Sean $(s_k)_{k \in \mathbb{N}}, (r_k)_{k \in \mathbb{N}}$ sucesiones de funciones simples y medibles tales que

$$s_k \leq s_{k+1} \leq f \leq r_{k+1} \leq r_k \quad k = 1, 2, \dots$$

y

$$\int_E s_k \uparrow \int_{*E} f d\mu \quad \int_E r_k \downarrow \int_E^* f d\mu$$

Por qué existen dichas funciones? recuerde que si s, r son funciones simples entonces $\max\{s, k\}$ y $\min\{s, k\}$ son funciones simples.

Las funciones $f_* = \sup s_k$ y $f^* = \inf r_k$ son medibles. Además como $s_k \leq f_* \leq f \leq f^* \leq r_k$ tenemos que f_* y f^* son integrables, pues son medibles y acotadas con $\mu(E) < \infty$, y vale

$$\int s_k d\mu \leq \int_E f_* d\mu \leq \int_E f^* d\mu \leq \int_E r_k d\mu$$

Concluyendo que

$$\int_{*E} f d\mu \leq \int_E f_* d\mu \leq \int_E f^* d\mu \leq \int_E^* f d\mu.$$

Supongamos ahora que $\int_{*E} f d\mu = \int_E f d\mu$. Entonces $\int_E (f^* - f_*) d\mu = 0$ y como $f^* - f_* \geq 0$ tenemos por resultado anterior que $f^* - f_* = 0$ μ -casi todas partes. Luego $f^* - f = 0$ μ -casi todas partes y f es medible (por que?).

Recíprocamente supongamos que f es medible (y acotada) y sea la sucesión $(s_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de funciones simples, medibles y no negativas tales que $s_k \uparrow \|f\| - f$, con

$\|f\| = \sup_{x \in E} |f(x)|$ entonces

$$\int_E s_k d\mu \uparrow \int_E (\|f\| - f) d\mu \text{ y por lo tanto } \int_E (\|f\| - s_k) d\mu \downarrow \int_E f d\mu$$

ya que $\int_E |f| d\mu \leq \|f\| \mu(E) < \infty$, nótese también que $\|f\| - s_k \in S(E)$ y que $\|f\| - s_k \geq f$ y $\|f\| - s_k \downarrow f$ por lo tanto

$$\int_E (\|f\| - s_k) d\mu \geq \int_E^* f d\mu \text{ lo que implica que } \int_E f d\mu = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_E (\|f\| - s_k) d\mu \geq \int_E^* f d\mu$$

De manera análoga se puede ver que $\int_E f d\mu \leq \int_{*E} f d\mu$ con lo que se estaría probando que las tres integrales son iguales

Proposición 3.4.2. Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función Riemann integrable entonces f es medible y el valor de la integral de Riemann es igual al valor de la integral de Lebesgue.

Demostración. Como el conjunto de funciones escalonadas en $[a, b]$ está contenido en el conjunto $S([a, b])$ tenemos

$$\int_a^b f(t) dt \leq \int_{*a}^b f d\mu \leq \int_a^{*b} f d\mu \leq \int_a^{\bar{b}} f dt$$

y como f es Riemann integrable entonces las cuatro integrales son iguales y el resultado se sigue del teorema anterior.

Una función $f : [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ es Riemann integrable ,integral impropia, si existe la integral, $R \int_a^k f dt$, para cada $k > 0$ y existe $\lim_{k \rightarrow \infty} R \int_a^k f dt$.

Ejemplo 3.4.3. Puede existir la integral impropia de Riemann de una función y no obstante no existir la integral de Lebesgue.

consideremos $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \frac{\text{sent}}{t}$ si $x \neq 0$ y $f(0) = 1$.

Es sabido que $\lim_{x \rightarrow \infty} R \int_0^x \frac{\text{sent}}{t} dt$ existe.

Ahora el valor de las integrales $\int_0^\infty f^+ dt$ y $\int_0^\infty f^- dt$ es ∞ , con lo que la integral de Lebesgue de f no existe. En efecto :

$$\int_0^\infty f^+(t) dt = \sum_{n=0}^\infty \int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi} \frac{\text{sent}}{t} dt \geq \sum_{n=0}^\infty \int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi} \frac{1}{(2n+1)\pi} \text{sent} dt = \sum_{n=0}^\infty \frac{2}{(2n+1)\pi} = \infty$$

De forma análoga se muestra para la otra integral.

Definición 3.4.4. Una función $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ se dice semicontinua inferiormente (semitcontinua superiormente) si para todo $x \in [a, b]$ y para todo $c < f(x)$ (

$c > f(x)$) existe una vecindad V_x de x tal que, para todo $y \in V_x$ se tiene que $c < f(y)$ ($c > f(y)$).

Note que el sup (inf) de una familia no vacía de funciones semicontinua inferiormente (semicontinua superiormente) es semicontinua inferiormente (semicontinua superiormente)

Proposición 3.4.5. Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función acotada.
 f es Riemann integrable si y sólo si f es continua en μ -casi todas partes.

Demostración. Sean $(s_k)_{k \in \mathbb{N}}, (r_k)_{k \in \mathbb{N}}$ sucesiones de funciones escalonadas con $s_k \leq s_{k+1} \leq f \leq r_{k+1} \leq r_k$ $k = 1, 2, \dots$

tales que

$$\int_a^b s_k(x) dx \uparrow \int_a^b f(x) dx \quad y \quad \int_a^b r_k(x) dx \downarrow \int_a^b f(x) dx.$$

Siendo $(t_{j-1}, t_j), j = 1, 2, \dots, n_k$ los intervalos en los que $s_k(t_k)$ es constante, podemos suponer que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sup_{1 \leq j \leq n_k} (t_j^k - t_{j-1}^k) = 0$$

También podemos suponer que cada $s_k(t_k)$ es semicontinua inferiormente (semicontinua superiormente) bastando para eso que en t_j^k sea igual al inf (sup) de los valores en los intervalos adyacentes y del valor $f(t_k^j)$.

Tomando $f_* = \sup s_k$ y $f^* = \inf r_k$ tenemos

$$\int_a^b s_k(x) dx \uparrow \int_{[a,b]} f_* d\mu \quad y \quad \int_a^b r_k(x) dx \downarrow \int_{[a,b]} f^* d\mu$$

por lo tanto

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{[a,b]} f_* d\mu \quad y \quad \int_a^b f^* d\mu.$$

Si suponemos que f es Riemann integrable entonces $\int_{[a,b]} f^* d\mu = \int_{[a,b]} f_* d\mu$ y como tenemos $f_* \leq f \leq f^*$ se sigue que $f_* = f = f^*$, μ -casi todas partes en $[a, b]$ y por consiguiente f es semicontinua superiormente e inferiormente en μ -casi todo punto de $[a, b]$ y por lo tanto continua en μ -casi todo punto en $[a, b]$.

Recíprocamente. Si f es continua en x podemos suponer que $s_k(x) \uparrow f(x)$ y $r_k(x) \downarrow f(x)$.

Por lo tanto si f es continua en μ -casi todas partes de $[a, b]$ tenemos que $f_* = f^*$ μ -casi todas partes y por consiguiente

$$\int_{[a,b]} f_* d\mu = \int_{[a,b]} f^* d\mu$$

entonces $\int_a^b f(x) dx = \overline{\int}_a^b f(x) dx$. y así f es Riemann integrable.

3.5. Ejercicios

- Sean (X, M, μ) un espacio de medida y $f_k : X \rightarrow [0, \infty]$, $k \in \mathbb{N}$ una sucesión medibles tales que $f_k \rightarrow f$ en μ -casi todas partes y $\int_X f_k d\mu \rightarrow \int_X f d\mu$ con $\int_X f d\mu < \infty$. Muestre que para todo conjunto medible $A \subseteq X$ se tiene que $\int_A f_k d\mu \rightarrow \int_A f d\mu$
sugerencia: $\int_B f d\mu \leq \liminf \int_B f_k d\mu$. Tome inicialmente $B = A$ y después $B = A^c$
- Sean (X, M, μ) un espacio de medida y $f_k : X \rightarrow [0, \infty]$, $k \in \mathbb{N}$ una sucesión decreciente de funciones medibles con $\int_X f_k d\mu < \infty$ muestre que $\lim_{k \rightarrow \infty} \int_X f_k d\mu = \int_X \lim_{k \rightarrow \infty} f_k d\mu$
- Sean (X, M, μ) un espacio de medida y $f_k : X \rightarrow [0, \infty]$, $k \in \mathbb{N}$ una sucesión creciente de funciones medibles tales que $\int_X f_k d\mu \leq M \quad \forall k \in \mathbb{N}$ muestre que existe f tal que $f_k \rightarrow f$ en μ -casi todas partes, f es integrable y que $\int_X f d\mu = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_X f_k d\mu$
- De un ejemplo de una función $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ que es Lebesgue integrable y que no exista una función g integrable segun Riemann tal que $f = g$ μ -casi todas partes
- Sean (X, M, μ) un espacio de medida y $f : X \rightarrow [0, \infty]$ una función medible tal que $\int_X f d\mu < \infty$ muestre que $\mu(\{x \in X : f(x) = \infty\}) = 0$
- Sean (X, M, μ) un espacio de medida y $f : X \rightarrow [0, \infty]$ una función medible tal que $\int_X f d\mu < \infty$ muestre que el conjunto $\{x \in X : f(x) > 0\}$ es σ -finito
- Sean (X, M, μ) un espacio de medida y $f : X \rightarrow [0, \infty]$ una función medible tal que $\int_X f d\mu < \infty$ muestre que para todo $\epsilon > 0$ existe un conjunto $E \in M$ tal que $\mu(E) < \infty$ y $\int_X f d\mu \leq \int_E f d\mu + \epsilon$
- Sean (X, M, μ) un espacio de medida y $f : X \rightarrow [0, \infty]$ una función medible tal que f es integrable muestre que $\mu(\{x \in X : |f(x)| \geq \epsilon\}) \leq \frac{1}{\epsilon} \int_X |f| d\mu < \infty$ (desigualdad de Chebyshev)
- Sean (X, M, μ) un espacio de medida y $f : X \times [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ tal que la función $x \rightarrow f(x, t)$ es medible para cada $t \in [a, b]$, suponga también que para algún $t_0 \in [a, b]$ $f(x, t_0) = \lim_{t \rightarrow t_0} f(x, t)$, $\forall x \in X$ y que existe una función g integrable tal que $|f(x, t)| \leq g(x)$. Muestre que $\int_X f(x, t_0) d\mu = \lim_{t \rightarrow t_0} \int_X f(x, t) d\mu$

10. Sean (X, M, μ) un espacio de medida y $f : X \times [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ tal que la función $x \rightarrow f(x, t)$ es medible para cada $t \in [a, b]$, suponga también que la función $t \rightarrow f(t, x)$ es continua en $[a, b]$ y que existe una función g integrable tal que $|f(x, t)| \leq g(x)$. Muestre que la función $F(t) = \int_X f(x, t) d\mu$ es continua
11. Sean $-\infty < a < b \leq \infty$ y $f : [a, b] \rightarrow [0, \infty]$ tales que $\lim_{x \rightarrow b} R \int_a^x f(t) dt < \infty$ muestre que f es integrable y $\int_{[a,b]} f d\mu = \lim_{x \rightarrow b} R \int_a^x f(t) dt$. μ medida de Lebesgue
12. Calcule los siguientes límites de integrales de Lebesgue, justificando plenamente.
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\infty n \sin\left(\frac{x}{n}\right) (x(1+x^2))^{-1} dx$
 - $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\infty \sin\left(\frac{x}{n}\right) \left(1 + \frac{x}{n}\right)^{-n} dx$
 - $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} \frac{f(x)^n}{1+f(x)^n} dx$, donde $f : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$ es integrable
13. Considere el espacio de medida (X, M, μ) donde $X = (0, \infty)$, M la σ -álgebra de Lebesgue y μ la medida de Lebesgue y defina $f_n(x) = ae^{-nax} - be^{-nbx}$ donde $0 < a < b$. Muestre que
- $\sum_{n=1}^\infty \int_0^\infty |f_n(x)| dx = \infty$
 - $\sum_{n=1}^\infty \int_0^\infty f_n(x) dx = 0$
 - $\int_0^\infty \sum_{n=1}^\infty f_n(x) dx = \log\left(\frac{b}{a}\right)$

CAPÍTULO 4

Medida producto

4.1. Definición de álgebra

Definición 4.1.1. Sean X un conjunto no vacío y $\mathbb{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ decimos que \mathbb{A} es una álgebra si:

i $\phi \in \mathbb{A}$

ii Si $E \in \mathbb{A}$ entonces $X - E \in \mathbb{A}$

iii Si $E_1, \dots, E_n \in \mathbb{A}$ entonces $\bigcup_{i=1}^n E_i \in \mathbb{A}$

Una función $\mu : \mathbb{A} \rightarrow [0, \infty]$ es una medida en \mathbb{A} si

i $\mu(\phi) = 0$

ii Si $\{E_i\}_{i=1}^{\infty}$ es una familia disyunta en \mathbb{A} tal que $\bigcup E_i \in \mathbb{A}$ entonces $\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$

Definición 4.1.2. Sean \mathbb{A} una álgebra en X y μ una medida en \mathbb{A} la función

$$\mu^* : \mathcal{P}(X) \rightarrow [0, \infty]$$

tal que dado $B \subseteq X$

$$\mu^*(B) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i) : A_i \in \mathbb{A}, \forall i \in \mathbb{N} \text{ y } B \subseteq \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i \right\}$$

es llamada medida exterior generada por μ .

De la misma manera como en el capítulo 2, medida exterior de Lebesgue, podemos mostrar.

Proposición 4.1.3. μ^* es una medida exterior en $\mathcal{P}(X)$.

Demostración. Por la definición es claro que $\mu^*(\emptyset) = 0$, ahora por las propiedades del ínfimo se tiene que si $E, F \subseteq X$ con $E \subseteq F$ entonces $\mu^*(E) \leq \mu^*(F)$.

Restaría mostrar que dada $(E_k)_{k \in \mathbb{N}}$ una secuencia de subconjuntos de X tenemos que

$$\mu^*(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu^*(E_k).$$

Si para algún $k \in \mathbb{N}$ $\mu^*(E_k) = \infty$ tenemos igualdad, pues ambos lados serían infinito.

Supongamos entonces que $\mu^*(E_k) < \infty \forall k \in \mathbb{N}$.

Dado $\epsilon > 0$ y para cada $k \in \mathbb{N}$ escogamos $(A_m^k)_{m \in \mathbb{N}}$ una sucesión en \mathcal{A} tal que

$$E_k \subseteq \bigcup_{m=1}^{\infty} A_m^k \text{ y } \sum_{m=1}^{\infty} \mu(A_m^k) \leq \mu^*(E_k) + \frac{\epsilon}{2^k}$$

luego

$$\mu^*(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \mu(A_m^k) \leq \sum_{k=1}^{\infty} (\mu^*(E_k) + \frac{\epsilon}{2^k}) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu^*(E_k) + \epsilon$$

Definición 4.1.4. $\mathcal{A}^* = \{A \in \mathcal{P}(X) : A \text{ es } \mu^* - \text{medible}\}.$

Observación 4.1.5. Dado $E \in \mathcal{A}$ entonces $\mu(E) = \mu^*(E)$; en efecto:

por la definición se tiene que $\mu^*(E) \leq \mu(E)$, ahora dado $\{E_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ cubrimiento de E por elementos de \mathcal{A} tenemos que $E = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n \cap E$ luego $\mu(E) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(E_n \cap E) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(E_n)$; y por lo tanto $\mu(E) \leq \mu^*(E)$.

Teorema 4.1.6. $(X, \mathcal{A}^*, \mu^*)$ es un espacio de medida, μ^* es una medida completa y $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{A}^*$.

Demostración. Veamos inicialmente que \mathcal{A}^* es una σ -álgebra; para esto mostremos que:

i $\emptyset \in \mathcal{A}^*$

ii si $A \in \mathcal{A}^*$ entonces $X - A \in \mathcal{A}^*$

iii Si $E, F \in \mathcal{A}^*$ entonces $E \cap F \in \mathcal{A}^*$

Como E es μ^* -medible entonces para cada $A \subseteq X$ tenemos

$$\mu^*(A \cap F) = \mu^*(A \cap F \cap E) + \mu^*(A \cap F - E)$$

Dado que F es μ^* -medible tenemos

$$\mu^*(A) = \mu^*(A \cap F) + \mu^*(A - F)$$

como también

$$\mu^*(A - (E \cap F)) = \mu^*((A - (E \cap F)) \cap F) + \mu^*((A - (E \cap F)) - F) = \mu^*((A \cap F) - E) + \mu^*(A - F).$$

De lo anterior concluimos

$$\mu^*(A) = \mu^*(A \cap F \cap E) + \mu^*(A \cap F - E)$$

iv Si $E, F \in \mathcal{A}^*$ con $E \cap F = \emptyset$ entonces $\mu^*(E \cup F) = \mu^*(E) + \mu^*(F)$

Sabemos que $E, F \in \mathcal{A}^*$ luego

$$\mu^*(A \cap (E \cup F)) = \mu^*((A \cap (E \cup F)) \cap F) + \mu^*((A \cap (E \cup F)) - F) = \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap F)$$

Tomando $A = X$ obtenemos lo deseado.

v Dados $A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathcal{A}^*$ entonces $\bigcup_{i=1}^n A_i \in \mathcal{A}^*$

Basta observar que $\bigcup_{i=1}^n A_i = X - \bigcap_{i=1}^n (X - A_i)$ y por lo tanto como consecuencia de los numerales 2, 3 tenemos que $X - \bigcap_{i=1}^n (X - A_i) \in \mathcal{A}^*$

vi Sea $\{E_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ familia disjunta, dos a dos, en \mathcal{A}^* entonces $\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \in \mathcal{A}^*$, $\mu^*(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(E_i)$

Si $A, B \in \mathcal{A}^*$ entonces

$$\mu^*(A \cap (E \cup F)) = \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap F) \quad \text{si } E \cap F = \emptyset \quad (*)$$

Definamos $F_n = \bigcup_{i=1}^n E_i$.

Veamos que para $A \subseteq X$

$$\mu^*(A) \geq \mu^*\left(A - \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) + \mu^*\left(A \cap \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right)$$

$$\mu^*(A) = \mu^*(A \cap F_n) + \mu^*(A - F_n) \quad \text{pués } F_n \text{ es } \mu^*\text{-medible} \quad (4.1)$$

$$= \sum_{i=1}^n \mu^*(A \cap E_i) + \mu^*(A - F_n) \quad \text{de } (*) \quad (4.2)$$

$$\geq \sum_{i=1}^n \mu^*(A \cap E_i) + \mu^*\left(A - \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) \quad (4.3)$$

haciendo $n \rightarrow \infty$ tenemos

$$\mu^*(A) \geq \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(A \cap E_i) + \mu^*(A - \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i) \geq \mu^*(A - \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i) + \mu^*(A \cap \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i)$$

Mostremos ahora que $\mathbb{A} \subseteq \mathbb{A}^*$

Dado $B \in \mathbb{A}$ veamos que B es μ^* -medible.

Sea $A \subseteq X$ y veamos que $\mu^*(A) \geq \mu^*(A \cap B) + \mu^*(A - B)$

Dado $\varepsilon > 0$ existe $\{A_i\}_{i \in \mathbb{N}}$, $A_i \in \mathbb{A}$ cubrimiento de A tal que

$$\sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i) \leq \mu^*(A) + \varepsilon$$

Como $A \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$; y $A \cap B \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} (A_i \cap B)$, $A - B \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} (A_i - B)$

Entonces

$$\mu^*(A \cap B) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(A_i \cap B), \quad \mu^*(A - B) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(A_i - B)$$

$$\mu^*(A \cap B) + \mu^*(A - B) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(A_i) \leq \mu^*(A) + \varepsilon$$

La completez de μ^* se sigue directamente de las observaciones del capítulo 2

Teorema 4.1.7. Si \mathbb{A} es un álgebra y μ una medida σ -finita en \mathbb{A} entonces la extensión, μ^* , de μ a \mathbb{A}^* es única

Demostración. Sea ν otra extensión de μ a \mathbb{A}^*

Inicialmente suponemos que $\mu(X) < \infty$.

Sea $B \in \mathbb{A}^*$ y $\{A_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ una familia de conjuntos en \mathbb{A} tal que $B \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$.

Luego

$$\nu(B) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \nu(A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$$

de donde $\nu(B) \leq \mu^*(B)$

Ahora

$$\mu^*(X - B) + \mu^*(B) = \mu^*(X) = \mu(X) < \infty$$

y

$$\nu(X - B) + \nu(B) = \nu(X) = \mu(X) < \infty$$

Luego $\mu^*(B) = \nu(B)$

Miremos ahora el caso en que μ es una medida σ -finita; esto es, existe una familia

de conjuntos $(F_i)_{i \in \mathbb{N}}$ en \mathbb{A} tal que $X = \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i$, $\mu(F_i) < \infty$.

Podemos suponer también que $F_i \subseteq F_{i+1} \forall i \in \mathbb{N}$

Luego

$$\mu^*(B) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu^*(B \cap F_i) \quad (4.4)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \nu(B \cap F_i) \quad (4.5)$$

$$= \nu(B) \quad (4.6)$$

4.2. Algunas propiedades

Sean (X, M_1, μ) , (Y, M_2, φ) espacios de medida. Definimos el rectángulo $R = A \times B$, $A \in M_1$, $B \in M_2$ y $M = M_1 \otimes M_2$ la σ -álgebra generada por el conjunto de rectángulos.

Nuestro objetivo es definir una medida Π en M tal que $\Pi(A \times B) = \mu(A)\varphi(B)$ con $A \in M_1$, $B \in M_2$.

Consideremos

$$Z = \left\{ \bigcup_{i=1}^k R_i : k \in \mathbb{N}, R_i \text{ es un rectángulo para cada } i = 1, 2, \dots, k \right\}$$

Note que en la definición de Z podemos escoger los rectángulos disjuntos dos a dos pues

dados $A_1, A_2 \subseteq X$ y $B_1, B_2 \subseteq Y$ tenemos que

$$(A_1 \times B_1) \cup (A_2 \times B_2) = [(A_1 - A_2) \times B_1] \cup [(A_1 \cap A_2) \times (B_1 \cup B_2)] \cup [(A_2 - A_1) \times B_2]$$

La afirmación se sigue por un argumento inductivo.

Proposición 4.2.1. $Z \subseteq P(X \times Y)$ es un álgebra

Demostración. Es claro que $\emptyset \in Z$ además dados $R_1, \dots, R_n \in Z$ entonces $\bigcup_{i=1}^n R_i \in Z$.

Resta probar que dado $R \in Z$ entonces $X \times Y - R \in Z$, lo que es consecuencia de la siguiente propiedad :

Dados $A_1, A_2 \subseteq X$ y $B_1, B_2 \subseteq Y$ tenemos

$$(A_1 \times B_1) - (A_2 \times B_2) = [(A_1 \cap A_2) \times (B_1 - B_2)] \cup [(A_1 - A_2) \times B_1]$$

Definición 4.2.2. Dado $R = \bigcup_{i=1}^n A_i \times B_i$ con $A_i \times B_i$ $i = 1, \dots, n$ rectángulos disjuntos dos a dos.

Definimos $\Pi(R) = \sum_{i=1}^n \mu(A_i) \cdot \varphi(B_i)$

Proposición 4.2.3. Π es una medida en Z

Demostración. Mostremos inicialmente que si $A \times B = \bigcup_{i=1}^{\infty} (A_i \times B_i)$, con $(A_i \times B_i)_{i \in \mathbb{N}}$ familia disjunta dos a dos entonces

$$\mathcal{X}_{A \times B}(x, y) = \mathcal{X}_A(x) \cdot \mathcal{X}_B(y) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{X}_{A_n}(x) \mathcal{X}_{B_n}(y)$$

Usando el Teorema de la convergencia monotonía dos veces tenemos

$$\mu(A) \varphi(B) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) \varphi(B_n)$$

$$\Pi(A \times B) = \sum_{n=1}^{\infty} \Pi(A_n \times B_n).$$

Consideremos una familia $\{E_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de elementos de Z disjunta dos a dos y tal que $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} E_i \in Z$. Como cada E_i es unión finita de rectángulos, dos a dos disjunta, se obtiene el resultado por la consideración ya probada

Por Teorema de la sección anterior existe una extensión de Π a la σ -álgebra Z^* que continuaremos denotando por Π ; además si suponemos que μ, φ son σ -finitas entonces la extensión es única. Nótese que $M \subseteq Z^*$

Definición 4.2.4. Dado $E \subseteq X \times Y$ definimos

$$E_x = \{y \in Y : (x, y) \in E\}$$

$$E^y = \{x \in X : (x, y) \in E\}$$

Dada $f : X \times Y \rightarrow K$ definimos $f_x : Y \rightarrow K : y \mapsto f(x, y)$, $f^y : X \rightarrow K : x \mapsto f(x, y)$

Proposición 4.2.5. ■ Si $E \in M$ entonces $E_x \in M_2, \forall x \in X$ y $E^y \in M_1, \forall y \in Y$

■ Sea $f : X \times Y \rightarrow K$, K espacio Topológico. Si f es M -medible entonces f_x es M_2 -medible y f^y es M_1 -medible

Demostración. Para mostrar la primera parte veamos que $\Omega = \{E \subseteq M_1 \otimes M_2 : (\forall x \in X)(E_x \in M_2)\}$ es una σ -álgebra y que $M \subseteq \Omega$

Dado $R = A \times B$, $A \in M_1$, $B \in M_2$

$$R_x = \begin{cases} B & \text{si } x \in A, \\ \emptyset & \text{si } x \notin A. \end{cases}$$

luego $R \in \Omega$

Para ver que Ω es una σ -álgebra mostremos que:

- $X \times Y \in \Omega$
- Si $E \in \Omega$ entonces $(E^c)_x = (E_x)^c$ pues

$$y \in (E^c)_x \Leftrightarrow (x, y) \in E^c \quad (4.7)$$

$$\Leftrightarrow (x, y) \notin E \quad (4.8)$$

$$\Leftrightarrow y \in (E_x)^c \quad (4.9)$$

y por lo tanto $(E^c)_x \in M_2$

- Si $E = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$ entonces $E_x = \bigcup_{i=1}^{\infty} (E_i)_x \in M_2$
Mostremos la segunda parte del enunciado si

$$f_x : Y \rightarrow K : y \mapsto f_x(y) = f(x, y)$$

y U un abierto en K entonces $f_x^{-1}(U) = (f^{-1}(U))_x \in M_2$

Es importante mencionar que la inclusión $M \subseteq Z^*$ puede ser propia; pues Z^* es completa en tanto que M puede no serlo.

Si existe un conjunto B no medible en M_1 entonces escogiendo un conjunto C en M_2 con medida nula tenemos que $B \times C \subseteq X \times C$ con $\Pi(X \times C) = 0$. Luego $B \times C \in Z^*$, pero por el resultado anterior $B \times C \notin M$.

4.3. Teorema de Fubini

Definición 4.3.1. Dado X un conjunto no vacío, un conjunto no vacío $C \subseteq P(X)$ es una clase monotona si

- Si dada $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$ una familia en C y $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \dots$ entonces $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i \in C$
- si dada $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$ una familia en C y $A_1 \supseteq A_2 \supseteq A_3 \supseteq \dots$ entonces $\bigcap_{i \in \mathbb{N}} A_i \in C$

Observación 4.3.2. Si A es una familia de conjuntos, $C_A = \bigcap_{C \in F} C$ donde $F = \{C : C \text{ es clase monótona } C \supseteq A\}$ es la menor clase monótona conteniendo A y será llamada clase monótona generada por A

Lema 4.3.3. Si A es un álgebra, entonces $C_A = M_A$ (σ -álgebra generada por A)

Demostración. Dado que una σ -álgebra es una clase monótona tenemos que $C_A \subseteq M_A$, para mostrar la otra inclusión probemos que C_A es una σ -álgebra, lo que se obtiene si conseguimos mostrar que C_A es un álgebra.
Definamos

$$C_A(E) = \{F \in C_A : F - E \in C_A, E - F \in C_A, E \cap F \in C_A\}$$

Observe que:

- $C_A(E)$ es una clase monótona para todo $E \in C_A$
- $E \in C_A(F) \Leftrightarrow F \in C_A(E)$
- $E \in A \Rightarrow A \subseteq C_A(E)$
- $C_A = C_A(E)$ para cada $E \in A$, por ser C_A la menor clase monótona conteniendo A .
- $C_A(F) = C_A, \forall F \in C_A$

Así concluimos que C_A es una álgebra.

Lema 4.3.4. Sean $(X, M_1, \mu), (Y, M_2, \varphi)$ espacios de medida σ -finitos.
Si $E \in M$ entonces las funciones

$$f(x) = \varphi(E_x), \quad g(y) = \mu(E_y)$$

son M_1 y M_2 medibles, respectivamente, y $\Pi(E) = \int_X f(x) d\mu = \int_Y g(y) d\varphi$

Demostración. Supongamos inicialmente que $\Pi(X \times Y) < \infty$
Definamos

$$H = \{E \in M : f(x) = \varphi(E_x) \text{ es } M_1\text{-medible, } g(y) = \mu(E_y) \text{ es } M_2\text{-medible y } \Pi(E) = \int_X f(x) d\mu\}$$

Ahora si $E = A \times B$ con $A \in M_1$ y $B \in M_2$ entonces $f(x) = \varphi(E_x) = \varphi(B)\chi_A(x)$ y $g(y) = \mu(E_y) = \mu(A)\chi_B(y)$ luego $E \in H$, por lo tanto $Z \subseteq H$.
Mostremos que H es una clase monótona, con lo que probaríamos que $H = M$.
Si $A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_3 \subseteq \dots$ con $A_i \in H, \forall i \in \mathbb{N}$ entonces $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i \in H$, ya que si hacemos $f_n(x) = \varphi(A_{nX})$ tenemos que

$$f_1 \leq f_2 \leq \dots \text{ y } f_n(x) \rightarrow \varphi((\cup_{i \in \mathbb{N}} A_i)_x)$$

el resultado se sigue al aplicar el Teorema de la convergencia monotonía.

Si $A_1 \supseteq A_2 \supseteq A_3 \supseteq \dots$ con $A_i \in \mathcal{H}, \forall i \in \mathbb{N}$ entonces tomando las mismas funciones como en el caso anterior y usando el Teorema de la convergencia dominada tenemos que $\cap_{i \in \mathbb{N}} A_i \in \mathcal{H}$.

En el caso en que $\Pi(X \times Y) = \infty$ tomamos una secuencia creciente $(Z_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de rectángulos tal que $\Pi(Z_i) < \infty, \forall i \in \mathbb{N}$ y $\cup_{i \in \mathbb{N}} Z_i = X \times Y$. Aplicamos el resultado anterior a los conjuntos $E \cap Z_i$ y usamos el Teorema de la convergencia monotonía para obtener el resultado.

Teorema 4.3.5 (Teorema de Tonelli). Sean $(X, M_1, \mu), (Y, M_2, \varphi)$ espacios de medida σ -finitos y $F : X \times Y \rightarrow [0, \infty]$ una función M -medible. Entonces las funciones

$$f(x) = \int_Y F_x d\varphi, \quad g(y) = \int_X F^y d\mu$$

son M_1 y M_2 medibles, respectivamente, y vale

$$\int_X f d\mu = \int_Y g d\varphi = \int_{X \times Y} F d\Pi$$

Demostración. Vale para $\chi_E, E \in M$ y por lo tanto vale para funciones simples. Dada F no negativa M -medible, existen $S_1 \leq S_2 \leq \dots \leq S_n$ sucesión de funciones simples tal que $S_n \rightarrow F$.

Haciendo

$$f_n(x) = \int_Y (S_n)_x d\varphi, \quad g_n(y) = \int_X (S_n)^y d\mu$$

tenemos que $f_n \rightarrow f, g_n \rightarrow g$ (por Teorema de la convergencia monotonía)

El resultado se obtiene integrando.

Teorema 4.3.6 (Teorema de Fubini). Sean $(X, M_1, \mu), (Y, M_2, \varphi)$ espacios de medida σ -finitos y $F : X \times Y \rightarrow [-\infty, \infty]$ una función integrable entonces las funciones

$$f(x) = \int_Y F_x d\varphi, \quad g(y) = \int_X F^y d\mu$$

son integrables y además

$$\int_X f d\mu = \int_{X \times Y} F d\Pi = \int_Y g d\varphi$$

Demostración. Basta aplicar el teorema de Tonelli a F^+, F^- .

4.4. Ejercicios

1. Sea $E \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$, σ -álgebra de Borel. Muestre que $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y \in E\}$ y $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x - y \in E\}$ son elementos de $\mathcal{B}_{\mathbb{R}} \otimes \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$
2. Sean (X, \mathcal{M}) un espacio medible, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ y $E \in \mathcal{M} \otimes \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$. Muestre que $\{(x, t) \in X \times \mathbb{R} : (x, \alpha t + \beta) \in E\} \in \mathcal{M} \otimes \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$
3. Sean (X, \mathcal{M}) un espacio medible y $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ medible. Muestre que $\{(x, t) \in X \times \mathbb{R} : f(x) = t\} \in \mathcal{M} \otimes \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$
4. Sean f integrable en (X, \mathcal{M}_1, μ) , g integrable en (Y, \mathcal{M}_2, ν) y $\varphi(x, y) = f(x)g(y)$, $x \in X$, $y \in Y$. Muestre que φ es integrable en $(X \times Y, \mathcal{M}_1 \otimes \mathcal{M}_2, \Pi)$ y $\int_{X \times Y} \varphi(x, y) d\Pi = (\int_X f d\mu)(\int_Y g d\nu)$
5. Sean (X, \mathcal{M}, μ) un espacio de medida σ -finito, $f : X \rightarrow [0, \infty]$ y $\omega_f = \{(x, t) \in X \times [0, \infty] : 0 \leq t \leq f(x)\}$ muestre que
 - f es medible si y sólo si $\omega_f \in \mathcal{M} \otimes \mathcal{B}_{[0, \infty]}$, $\mathcal{B}_{[0, \infty]}$ σ -álgebra de Borel
 - Si f es medible entonces $\int_X f d\mu = \Pi(\omega_f)$
6. Sean (X, \mathcal{M}_1, μ) y $(Y, \mathcal{M}_2, \vartheta)$ espacios de medida σ -finitos. Muestre que si $E, F \in \mathcal{M}_1 \otimes \mathcal{M}_2$ $\vartheta(E_x) = \vartheta(F_x)$, $\forall x \in X$ entonces $\Pi(E) = \Pi(F)$

CAPÍTULO 5

Espacios L^p

5.1. Definición

Definición 5.1.1. Una función $\varphi : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ se dice **convexa** si dados $x, y \in (a, b)$ y $t \in [0, 1]$ $\varphi(tx + (1 - t)y) \leq t\varphi(x) + (1 - t)\varphi(y)$.

Una función es convexa si el gráfico de φ , $\{(t, \varphi(t)) : x \leq t \leq y\}$, está por debajo del segmento de recta comprendido entre $(x, \varphi(x))$ y $(y, \varphi(y))$.

Proposición 5.1.2. $\varphi : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ es convexa si y sólo si para todo $c \in (a, b)$

$$\varphi_c : (a, b) - \{c\} \rightarrow \mathbb{R} \quad (5.1)$$

$$x \mapsto \frac{\varphi(x) - \varphi(c)}{x - c} \quad (5.2)$$

es creciente.

Demostración. Sea $t_1 < t_2$ y veamos que $\varphi_c(t_1) < \varphi_c(t_2)$, si φ es convexa.

Hay que considerar tres casos: $t_1 < c < t_2$, $t_1 < t_2 < c$ y $c < t_1 < t_2$.

Miremos el primer caso, los otros se tratan de manera análoga.

Como $t_2 - t_1 = (c - t_1) + (t_2 - c)$, tenemos que $\frac{c-t_1}{t_2-t_1} + \frac{t_2-c}{t_2-t_1} = 1$ y que

$$\begin{aligned} & \left(\frac{c-t_1}{t_2-t_1}\right) t_2 + \left(\frac{t_2-c}{t_2-t_1}\right) t_1 = c. \text{ Como } \varphi \text{ es convexa,} \\ & \varphi(c) \leq \left(\frac{c-t_1}{t_2-t_1}\right) \varphi(t_2) + \left(\frac{t_2-c}{t_2-t_1}\right) \varphi(t_1), \text{ luego } \left(\frac{c-t_1}{t_2-t_1} + \frac{t_2-c}{t_2-t_1}\right) \varphi(c) \leq \left(\frac{c-t_1}{t_2-t_1}\right) \varphi(t_2) + \\ & \left(\frac{t_2-c}{t_2-t_1}\right) \varphi(t_1), \text{ de donde tenemos que } \left(\frac{c-t_1}{t_2-t_1}\right) (\varphi(t_2) - \varphi(c)) + \left(\frac{t_2-c}{t_2-t_1}\right) (\varphi(t_1) - \\ & \varphi(c)) \geq 0, \text{ por lo que } (c - t_1)(\varphi(t_2) - \varphi(c)) \geq (t_2 - c)(\varphi(c) - \varphi(t_1)), \text{ luego} \\ & \frac{\varphi(t_1) - \varphi(c)}{t_1 - c} \leq \frac{\varphi(t_2) - \varphi(c)}{t_2 - c}. \end{aligned}$$

Recíprocamente sean $x, y \in (a, b)$. Sin pérdida de generalidad podemos asumir que $x < y$. Si $t \in (0, 1)$, $x < tx + (1 - t)y < y$. Por hipótesis tenemos que

$$\frac{\varphi(tx+(1-t)y)-\varphi(x)}{tx+(1-t)y-x} \leq \frac{\varphi(y)-\varphi(tx+(1+t)y)}{y-tx-(1-t)y}.$$

esto es

$$\frac{\varphi(tx+(1-t)y)-\varphi(x)}{(1-t)(y-x)} \leq \frac{\varphi(y)-\varphi(tx+(1+t)y)}{t(y-x)}.$$

Luego $t[\varphi(tx+(1-t)y)-\varphi(x)] \leq (1-t)\varphi(y)-(1-t)\varphi(tx+(1-t)y)$
y por lo tanto

$$\varphi(tx+(1-t)y) \leq t\varphi(x) + (1-t)\varphi(y).$$

Observación 5.1.3. Si $\varphi : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ es diferenciable, entonces φ es convexa si sólo si φ' es creciente.

Proposición 5.1.4 (Desigualdad de Jensen). Sea (X, M, μ) un espacio de medida tal que $\mu(X) = 1$ (*espacio de probabilidad*). Si $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ es medible, $f(x) \in (a, b)$ para todo $x \in X$, y si $\varphi : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ es convexa entonces $\varphi(\int_X f d\mu) \leq \int_X (\varphi \circ f) d\mu$

Demostración. Sea $t := \int_X f d\mu$. Obsérvese que $a < t < b$. Siendo s, u tales que $a < s < t < u < b$ y puesto que φ es convexa, tenemos que $H(s) = \frac{\varphi(t)-\varphi(s)}{t-s} \leq \frac{\varphi(u)-\varphi(t)}{u-t} = H(u)$ (tomando $c := t$). De esto tenemos que existe $\beta := \sup\{H(s) : a < s < t\}$ y $\alpha := \inf\{H(s) : t < s < b\}$. Así, $\beta(u-t) \leq \varphi(u) - \varphi(t)$, es decir,

$$\varphi(u) \geq \beta(u-t) + \varphi(t) \text{ si } t \leq u.$$

Análogamente tenemos que

$$\varphi(s) \geq \beta(s-t) + \varphi(t) \text{ si } s \leq t.$$

Así,

$$\varphi(s) \geq \beta(s-t) + \varphi(t) \text{ para todo } s \in (a, b).$$

Haciendo $s := f(x)$ ($x \in X$), $\varphi(f(x)) \geq \beta(f(x)-t) + \varphi(t)$.

Integrando sobre X , tenemos que

$$\int_X \varphi(f) d\mu \geq \beta \int_X [f(x)-t] d\mu + \varphi(t) = \varphi(\int_X f d\mu) \text{ (ya que } \int_X [f(x)-t] d\mu = 0 \text{ y } t := \int_X f d\mu).$$

Definición 5.1.5. Sean (X, M, μ) un espacios de medida y $1 \leq p < \infty$ definimos $L^p(X, M, \mu) = \{f : X \mapsto \mathbb{C} : f \text{ es medible y } \int_X |f|^p d\mu < \infty\}$

En $L^p(X, M, \mu)$ definimos la siguiente relación $f \sim g \Leftrightarrow f = g$ en μ -casi todas partes de X , no es difícil ver que que ésta relación es de equivalencia.

Definición 5.1.6. $L^p(X, M, \mu) = L^p(X, M, \mu) / \sim$. $1 < p < \infty$ los elementos de $L^p(X, M, \mu)$ son clases de equivalencia, los representantes de esas clases los notaremos simplemente por las letras f, g, h

Proposición 5.1.7. $L^p(X, M, \mu)$ $1 \leq p < \infty$ es un espacio vectorial.

Demostración. Dados $f \in L^p$ se tiene que $\forall c \in \mathbb{C} \quad cf \in L^p$.

Si usamos que la función t^p , $1 \leq p < \infty$, $t > 0$ es convexa entonces

$$(\lambda x + (1 - \lambda)y)^p \leq \lambda x^p + (1 - \lambda)y^p$$

$$\text{Si } \lambda = \frac{1}{2}, \left(\frac{x + y}{2} \right)^p \leq \frac{x^p + y^p}{2} \text{ Así dadas } f, g \in L^p, f + g \in L^p$$

Proposición 5.1.8. La función $\|\cdot\|_p : L^p(X, M, \mu) \rightarrow [0, \infty) : f \mapsto \|f\|_p = \left(\int_X |f|^p d\mu \right)^{1/p}$ $1 \leq p < \infty$ es una norma.

Demostración. $\|f\|_p = 0$ si y sólo si $f(x) = 0$ en μ -casi todo $x \in X$, es decir f pertenece a la clase de la función nula, esto es $f = 0$ en L^p .

Dados $f \in L^p$ y $\lambda \in \mathbb{C}$ tenemos que $\|\lambda f\|_p = |\lambda| \|f\|_p$

En el caso $p = 1$ la desigualdad triangular es una consecuencia de la desigualdad triangular en \mathbb{C} . Para los casos $1 < p < \infty$ es necesario mostrar algunos resultados previos

Definición 5.1.9. Sea $1 < p < \infty$, q es el exponente conjugado de p si $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

Proposición 5.1.10 (Hölder). Sean p, q exponentes conjugados. Si $f \in L^p(X, M, \mu)$ y $g \in L^q(X, M, \mu)$ entonces

$$f \cdot g \in L^1(X, M, \mu) \text{ y } \int_X |fg| d\mu \leq \left(\int_X |f|^p d\mu \right)^{1/p} \cdot \left(\int_X |g|^q d\mu \right)^{1/q}.$$

Como e^x es convexa

$$e^{tx+(1-t)y} \leq te^x + (1-t)e^y$$

$$e^{tx} e^{(1-t)y} \leq te^x + (1-t)e^y$$

Para $\alpha > 0$ y $\beta > 0$

$$t = \frac{1}{p}, \quad 1 - t = \frac{1}{q}$$

$$x = \ln \alpha \quad y = \ln \beta$$

Hagamos $\theta = \alpha^{1/p}$, $\delta = \beta^{1/q}$ luego $\delta\theta \leq \frac{1}{p}\theta^p + \frac{1}{q}\delta^q$ (*) $\forall \delta, \theta \in [0, \infty)$

Si alguna de las funciones f o g es la función nula el resultado se tiene. Supongamos

pués que $\|f\|_p \neq 0$ y $\|g\|_q \neq 0$

Usando (*) tenemos

$$\frac{|f|}{\|f\|_p} \frac{|g|}{\|g\|_q} \leq \frac{1}{p} \frac{|f|^p}{\|f\|_p^p} + \frac{1}{q} \frac{|g|^q}{\|g\|_q^q}$$

Integrando tenemos que

$$\frac{1}{\|f\|_p \|g\|_q} \int |fg| d\mu \leq 1$$

$$\int_X |fg| d\mu \leq \|f\|_p \|g\|_q$$

Proposición 5.1.11 (Desigualdad de Minkowsky). Sean $f, g \in L^p(X, M, \mu)$ ($1 < p < \infty$) entonces

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$$

Demostración.

$$\begin{aligned} |f + g|^p &= |f + g| |f + g|^{p-1} \\ &\leq |f| |f + g|^{p-1} + |g| |f + g|^{p-1} \end{aligned}$$

Usando Hölder,

$$\int_X |f + g|^p d\mu \leq (\|f\|_p + \|g\|_p) \left(\int_X (|f + g|^{p-1})^q d\mu \right)^{1/q}$$

Si $\int_X |f + g|^q d\mu = 0$ el resultado se tiene .

Si $\int_X |f + g|^q d\mu \neq 0$ entonces $\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$

Definición 5.1.12. Sean (X, M, μ) espacio de medida, $f : X \rightarrow [0, \infty]$ medible. f es **esencialmente acotada** si existe $\alpha > 0$ tal que $\mu(f^{-1}((\alpha, \infty])) = 0$ ($|f(x)| \leq \alpha$ en μ -casi todo $x \in X$).

Definición 5.1.13. Sea $\beta = \inf A$ donde $A = \{\alpha : \mu(f^{-1}(\alpha, +\infty)) = 0\}$, $\beta = \infty$ en el caso en que $A = \emptyset$.

β es denominado **supremo esencial** de f .

Ahora $\beta \in A$ pues

$$f^{-1}(\beta, +\infty] = \bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-1}\left(\beta + \frac{1}{n}, \infty\right]$$

Es decir $|f(x)| \leq \beta$ para μ -casi todo $x \in X$

Además si $|f(x)| \leq \lambda$ para μ -casi todo $x \in X$ entonces $\beta \leq \lambda$

Definición 5.1.14. $\tilde{L}^\infty(X, M, \mu) = \{f : X \rightarrow \mathbb{C} : f \text{ es medible y } |f| \text{ es esencialmente acotada}\}$

Como en el caso anterior definimos en L^∞ la siguiente relación de equivalencia

$$f \sim g \text{ si y sólo si } f = g \text{ en } \mu - \text{ casi todas partes}$$

y se define

$$L^\infty(X, M, \mu)/\sim = L^\infty(X, M, \mu)$$

Proposición 5.1.15. Dado (X, M, μ) espacio de medida entonces $L^\infty(X, M, \mu)$ es un espacio vectorial, además la función $\|f\|_\infty : L^\infty(X, M, \mu) \rightarrow [0, \infty)$ donde $\|f\|_\infty = \text{supremo esencial de } |f|$ es una norma

Demostración. Veamos la desigualdad triangular

$$\text{si } f, g \in L^\infty(\mu) \text{ entonces } \|f + g\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty \text{ (Minkowski)}$$

Existen $E_1, E_2 \in M$ tales que $\mu(E_1) = \mu(E_2) = 0$

$$\|f(x)\| \leq \|f\|_\infty, \forall x \in X - E_1$$

$$\|g(x)\| \leq \|g\|_\infty, \forall x \in X - E_2$$

Luego

$$|f(x) + g(x)| \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty, \forall x \in X - (E_1 \cup E_2) \text{ y } \mu(E_1 \cup E_2) = 0$$

Así

$$\|f + g\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$$

Definición 5.1.16. El exponente conjugado de 1 es ∞

Proposición 5.1.17 (Hölder). Sea (X, M, μ) si $f \in L^1(\mu)$ y $g \in L^\infty(\mu)$ entonces $fg \in L^1(\mu)$.

$$\int_X |fg| d\mu < \|g\|_\infty \int_X |f| d\mu < \infty$$

Observación 5.1.18. Sea (X, M, μ) un espacio de medida. Si $\mu(X) < \infty$ entonces $L^p(\mu) \subset L^r(\mu)$, $1 \leq r \leq p \leq \infty$

Sea $1 \leq r < p < \infty$. Si $f \in L^p(X)$ entonces

$$\int_X |f|^r d\mu \leq \left(\int_X |f|^p d\mu \right)^{r/p} \cdot (\mu(X))^{1-\frac{r}{p}} < \infty$$

Si $p = \infty$ el resultado es inmediato.

5.2. Completez de los espacios L^p

Proposición 5.2.1. Si (X, M, μ) es un espacio de medida entonces $L^p(\mu)$ para $1 \leq p \leq \infty$ es espacio vectorial normado y completo.

Demostración. Mostremos inicialmente que $L^p(\mu)$ es completo para $1 \leq p < \infty$. Si $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en $L^p(\mu)$ entonces existe $(f_{n_i})_{i \in \mathbb{N}}$ tal que

$$\|f_{n_{i+1}} - f_{n_i}\|_p < \frac{1}{2^i} \text{ para } i = 1, 2, \dots$$

En efecto, para $\epsilon = \frac{1}{2}$, existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que si $m \geq n_1$ entonces

$$\|f_{n_1} - f_m\|_p < \frac{1}{2} \text{ de igual forma vemos que para } \epsilon = \frac{1}{2^i} \text{ existe}$$

$n_i \in \mathbb{N}$, $n_i > n_{i-1}$ tal que si $m \geq n_i$ entonces $\|f_{n_i} - f_m\|_p < \frac{1}{2^i}$ razonando por inducción se garantiza la existencia de

$$(n_i)_{i \in \mathbb{N}} \text{ tal que } \|f_{n_{i+1}} - f_{n_i}\|_p < \frac{1}{2^i}$$

Sea $g_k = \sum_{i=1}^k |f_{n_{i+1}} - f_{n_i}|$ y $g = \sum_{i=1}^{\infty} |f_{n_{i+1}} - f_{n_i}|$
 $g_k \in L^p(\mu)$ y $\|g\|_p \leq 1$; pues usando el lema de Fatou tenemos que
 $\int_X \liminf |g_k|^p d\mu \leq \liminf \int_X |g_k|^p d\mu \leq 1$.

Luego existe $E \in M$ $\mu(E) = 0$ tal que $g(x) < \infty \quad \forall x \in X - E$. (por qué?)

Por lo tanto

$$f_{n_1} + \sum_{i=1}^{\infty} f_{n_{i+1}} - f_{n_i} \text{ es convergente } \forall x \in X - E.$$

$$\text{Definamos } f = \begin{cases} \lim_{i \rightarrow \infty} f_{n_i} & \text{si } x \notin E, \\ 0 & \text{si } x \in E. \end{cases}$$

f es medible. Note que $f_{n_k} = f_{n_1} + \sum_{i=1}^{k-1} (f_{n_{i+1}} - f_{n_i})$ y $\lim_{i \rightarrow \infty} f_{n_i}(x) = f(x)$ para cada $x \notin E$

Veamos que $f \in L^p(\mu)$ y además que $f_n \rightarrow f$ en $L^p(\mu)$

Dado $\epsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N}$ tal que si $n, m \geq N$ $\|f_n - f_m\|_p < \epsilon$

En particular si $i, m > N$ entonces $\|f_{n_i} - f_m\|_p^p \leq \epsilon^p$.

Usando el lema de Fatou tenemos que $\int_X |f - f_m|^p d\mu \leq \liminf \int_X |f_{n_i} - f_m|^p d\mu \leq \varepsilon^p$.

Luego

$$\|f - f_m\|_p < \varepsilon, m \geq N$$

Es decir, $f - f_m \in L^p$ si $m \geq N$ y por lo tanto $f \in L^p$ y además $f_n \rightarrow f$ en $L^p(\mu)$.

Para el caso $p = \infty$ Si $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en $L^\infty(\mu)$ definamos

$$E_k = \{x \in X : |f_k(x)| > \|f_k\|_\infty\}$$

$$B_{m,n} = \{x \in X : |f_m(x) - f_n(x)| > \|f_m - f_n\|_\infty\}.$$

Así en $X - (\bigcup_{k,m,n} (E_k \cup B_{m,n}))$ existe una función acotada tal que $f_n \rightarrow \tilde{f}$ uniformemente y $\mu(A) = 0$ donde $A = \bigcup_{k,m,n} (E_k \cup B_{m,n})$.

Definamos

$$f = \begin{cases} \tilde{f} & \text{si } x \in X - A, \\ 0 & \text{si } x \in A. \end{cases}$$

f es medible; $f \in L^\infty(\mu)$ y $f_n \rightarrow f$ en $L^\infty(\mu)$

5.3. Algunos conjuntos densos en $L^p(\mu)$

Proposición 5.3.1. Sean (X, M, μ) un espacio de medida. El conjunto $S = \{s : X \rightarrow \mathbb{C} : s \text{ es una función simple y } \mu(\{x : s(x) \neq 0\}) < \infty\}$ es denso en $L^p(\mu)$ $1 \leq p < \infty$.

Demostración. Note que $S \subseteq L^p(\mu)$, dada $f \in L^p(\mu)$, suponemos inicialmente que $f \geq 0$, existe $(\varphi_j)_{j \in \mathbb{N}}$ tal que $0 \leq \varphi_j \leq f$, así $\varphi_j \in L^p(\mu)$ y por lo tanto $\varphi_j \in S$. Como $|f - \varphi_j|^p \leq (2f)^p$ el Teorema de la convergencia dominada garantiza que $\|f - \varphi_j\|_p \rightarrow 0$, cuando $j \rightarrow \infty$.

En el caso real, $f = f^+ - f^-$, se aplica el resultado ya probado a f^+ y a f^- .

Para el caso complejo escribimos $f = \text{Real}(f) + i\text{Im}(f)$ y usamos el resultado anterior

Definición 5.3.2. Sean X espacio topológico y $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ una función. El soporte de f , denotado por $\text{supp} f$, es la adherencia del conjunto $\{x \in X : f(x) \neq 0\}$.

El conjunto de funciones continuas sobre X con soporte compacto será denotado por $C_0(X)$

Proposición 5.3.3 (Teorema de extensión de Tietze). $K \subseteq \mathbb{R}^n$ es compacto y $f : K \rightarrow \mathbb{R}^m$ es una función continua, entonces existe $\tilde{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ continua tal que $f = \tilde{f}$ en K y $\sup_{x \in \mathbb{R}^n} |\tilde{f}(x)| \leq \sup_{x \in K} |f(x)|$

Demostración. Como $f = (f_1, \dots, f_m)$, donde cada función $f_i : K \rightarrow \mathbb{R}$, basta mostrar el resultado para $m = 1$.

Sea $U = \mathbb{R}^n - K$. Para cada $x \in U$ y $s \in K$ tomemos

$$u_s(x) = \max\{2 - \frac{|x - s|}{\text{dist}(x, K)}, 0\}$$

Observamos que u_s es continua en U , $0 \leq u_s \leq 1$ y $u_s(x) = 0$ si $|x - s| \geq 2\text{dist}(x, K)$.

Tomemos $\{s_j\}_{j=1}^\infty$ un conjunto denso en K (por qué existe?) y definamos

$$\sigma(x) = \sum_{j=1}^{\infty} 2^{-j} u_{s_j}(x), \text{ para cada } x \in U$$

$0 < \sigma(x) \leq 1$ para cada $x \in U$. Tomando ahora para cada $x \in U$

$$v_k(x) = \frac{2^{-k} u_{s_k}(x)}{\sigma(x)}$$

y definiendo

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in K, \\ \sum_{k=1}^{\infty} v_k(x) f(s_k) & \text{si } x \in U \end{cases}$$

tenemos que por el criterio M-Weierstrass \tilde{f} es continua en U .

Mostremos que en U se tiene que $\lim_{x \rightarrow a} \tilde{f}(x) = f(a)$ para cada $a \in K$.

Dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $|f(a) - f(s_k)| < \epsilon$ para todo s_k tal que $|s_k - a| < \delta$.

Tomemos $x \in U$ tal que $|x - a| < \frac{\delta}{4}$. Si $|a - s_k| \geq \delta$ entonces

$$\delta \leq |a - s_k| \leq |a - x| + |x - s_k| < \frac{\delta}{4} + |x - s_k|,$$

luego

$$|x - s_k| \geq \frac{3\delta}{4} > 2|x - a| \geq 2\text{dist}(x, K).$$

Por lo tanto $v_k(x) = 0$ siempre que $|x - a| < \frac{\delta}{4}$ y $|a - s_k| \geq \delta$. Ahora dado que $\sum_{k=1}^{\infty} v_k(x) = 1$ tenemos que si $|x - a| < \frac{\delta}{4}$ entonces

$$|\tilde{f}(x) - f(a)| \leq \sum_{k=1}^{\infty} v_k(x) |f(s_k) - f(a)| < \epsilon$$

Proposición 5.3.4 (Teorema de Lusin). Sean $E \subseteq \mathbb{R}^n$ de medida de Lebesgue

finita y $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ una función medible. Dado $\varepsilon > 0$ existe un conjunto compacto $K \subseteq E$ tal que $\mu(E - K) \leq \varepsilon$ y la restricción de f a K es continua

Demostración. como $0 = \lim_{k \rightarrow \infty} \mu(\{x \in E : |f(x)| > k\})$ vemos que para $\varepsilon > 0$ existen $M > 0$ y $E_\varepsilon \subseteq E$ tales que $\mu(E - E_\varepsilon) \leq \varepsilon$ y $|f| \leq M$ si $x \in E_\varepsilon$.

Lo que muestra que es suficiente probar el teorema para el caso en que f es acotada.

Consideremos inicialmente el caso en que $f \geq 0$.

Veamos que el resultado es válido para funciones simples no negativas.

Sea $\varphi = \sum_{k=1}^r c_k \chi_{E_k}$ una función simple, dado $\varepsilon > 0$ para cada k existe un compacto $F_k \subseteq E_k$ tal que $\mu(E_k - F_k) < \frac{\varepsilon}{2^k}$.

Tomemos $K = \bigcup_{k=1}^r F_k$. La restricción de φ a K es continua (pues φ es constante en cada F_k , los cuales son dos a dos disjuntos) y $\mu(E - K) < \varepsilon$.

Ahora para f existe una sucesión de funciones simples no negativas $(\varphi_j)_{j \in \mathbb{N}}$ tales que $\varphi_j \rightarrow f$ uniformemente. Para cada j existe K_j compacto tal que $K_j \subseteq E$, $\mu(E - K_j) \leq \frac{\varepsilon}{2^j}$ y además la restricción de φ_j a K_j es continua. Tomando $K = \bigcap_{j \in \mathbb{N}} K_j$ vemos que K es compacto y $\mu(E - K) \leq \varepsilon$, también como $\varphi_j \rightarrow f$ uniformemente entonces f restringida a K es continua.

En el caso general $f = f^+ - f^-$ se aplica el resultado anterior a f^+ y a f^- . Enunciamos, sin dar la prueba, un conocido resultado de topología que nos será de utilidad

Proposición 5.3.5 (lema de Urysohn). Si V es un abierto y K un compacto de \mathbb{R}^n , con $K \subseteq V$, entonces existe $g \in C_0(\mathbb{R}^n)$ tal que $0 \leq g(x) \leq 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$, $g(x) = 1 \quad \forall x \in K$ y $\text{supp } g \subseteq V$

Observación 5.3.6. Por los resultados anteriores es posible mostrar que: Si $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ una función Lebesgue-medible y $A \subseteq \mathbb{R}^n$ Lebesgue-medible con $\mu^*(A) < \infty$ y $f(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n - A$. Entonces para cada $\varepsilon > 0$ existe $g \in C_0(\mathbb{R}^n)$ tal que $\mu^*(\{x : f(x) \neq g(x)\}) < \varepsilon$; además $\|g\|_\infty \leq \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |f(x)|$ (Justifique)

Proposición 5.3.7. El conjunto $C_0(\mathbb{R}^n)$ es denso en $L^p(\mu)$, $1 \leq p < \infty$. (μ medida de Lebesgue en \mathbb{R}^n)

Demostración. Sea S como en la proposición anterior. Si $s \in S$ y $\varepsilon > 0$ entonces existe $g \in C_0(\mathbb{R}^n)$ tal que $g(x) = s(x)$ excepto en un conjunto de medida menor que ε y $|g| \leq \|s\|_\infty$ (teorema de Lusin). Luego

$$\|g - s\|_p \leq 2\varepsilon^{\frac{1}{p}} \|s\|_\infty$$

y el resultado se sigue por la densidad de S

Corolario 5.3.8. Sean $1 \leq p < \infty$ y $u \in L^p(\mathbb{R}^n)$ la función

$$\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow L^p(\mathbb{R}^n)$$

$$y \mapsto \varphi(y) = u_y$$

donde $u_y(x) = u(x - y)$. Es continua .

Demostración. Dado $\epsilon > 0$, por teorema anterior existe $g \in C_0(\mathbb{R}^n)$ tal que

$$\|u - g\|_p < \frac{\epsilon}{3}.$$

Como g es uniformemente continua existe $\delta > 0$ tal que

$$|g(x) - g(y)| < \frac{\epsilon}{3(2\mu(K))^{\frac{1}{p}}}$$

si $|x - y| < \delta$, donde $K = \text{supp} g$.

Si $\|y\| < \delta$ entonces

$$\begin{aligned} \|g - g_y\|_p &= \left(\int_{\mathbb{R}^n} |g(x) - g(x - y)|^p d\mu(x) \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \left(\int_{K \cup (K+y)} |g(x) - g(x - y)|^p d\mu(x) \right)^{\frac{1}{p}} < \frac{\epsilon}{3} \end{aligned}$$

Luego para $|y| < \delta$ tenemos

$$\|u - u_y\| \leq \|u - g\|_p + \|g - g_y\|_p + \|g_y - u_y\|_p < \epsilon$$

Definición 5.3.9. Sean $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ funciones medibles definimos el producto de convolución $f_*g(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x - y)g(y)dy$, para los valores de x donde esta integral tenga sentido.

En las condiciones de la definición vale que f_*g es una función medible y

1. $f_*g = g_*f$
2. $f_*(h_*g) = (f_*h)_*g$
3. $f_*(g + h) = f_*g + f_*h$

Proposición 5.3.10. $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ entonces

$$f_*g(x) < \infty \text{ en } \mu - \text{casi todas partes} \quad \text{y} \quad \|f_*g\|_1 \leq \|f\|_1 \cdot \|g\|_1$$

Demostración.

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f_*g| dx \leq \int_{\mathbb{R}^n} |f(x - y)| dx \int_{\mathbb{R}^n} |g(y)| dy \leq \|f\|_1 \|g\|_1$$

pués $\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)| dy = \|f\|_1$.

Teorema 5.3.11. Si $f \in L^p(\mu)$, $p \in [1, \infty)$ y $g \in L^1(\mu)$ entonces $f_*g \in L^p$, $\|f_*g\|_p \leq \|f\|_p \|g\|_1$.

Demostración.

$$|(f_*g)(x)| = \left| \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)dy \right| \quad (5.3)$$

$$= \left| \int_{\mathbb{R}^n} g^{\frac{1}{p}}(y)g^{\frac{1}{q}}(y)f(x-y)dy \right| \quad (5.4)$$

$$\leq \|g\|^{\frac{1}{q}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |g(y)||f(x-y)|^p dy \right)^{1/p} \quad (5.5)$$

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} |f_*g|^p dx &\leq \|g\|_{L^1}^{\frac{p}{q}} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} |g(y)|(f(x-y))^p dy dx \\ &= \|g\|_1^{\frac{p}{q}} \|g\|_1 \|f\|_p^p \end{aligned}$$

Proposición 5.3.12 (Teorema de Young). Sean $p, q, r, \in [1, \infty)$ con $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r} + 1$. Si $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $g \in L^q(\mathbb{R}^n)$ entonces $f_*g \in L^r(\mathbb{R}^n)$. y $\|f_*g\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q$

Demostración. Sin pérdida de generalidad supongamos que $\|f\|_p = \|g\|_q = 1$. Probaremos el resultado para funciones no negativas, el resultado general se sigue de este, tomando $|f|$ y $|g|$.

Usando la desigualdad de Holder para tres funciones, ver ejercicios, tenemos

$$\begin{aligned} f_*g(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} \left[f(y)^{\frac{p}{r}} g(x-y)^{\frac{q}{r}} \right] f(y)^{1-\frac{p}{r}} g(x-y)^{1-\frac{q}{r}} dy \\ &\leq \left[\int_{\mathbb{R}^n} f(y)^p g(x-y)^q dy \right]^{\frac{1}{r}} \left[\int_{\mathbb{R}^n} f(y)^{(1-\frac{p}{r})q'} dy \right]^{\frac{1}{q'}} \left[\int_{\mathbb{R}^n} g(x-y)^{(1-\frac{q}{r})p'} dy \right]^{\frac{1}{p'}} \end{aligned}$$

donde p', q' son los exponentes conjugados de p y q respectivamente.

Note que

$$\frac{1}{r} + \frac{1}{q'} + \frac{1}{p'} = \frac{1}{r} + \left(1 - \frac{1}{q}\right) + \left(1 - \frac{1}{p}\right) = 1$$

Además

$$\left(1 - \frac{p}{r}\right)q' = p\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{r}\right)q' = p\left(1 - \frac{1}{q}\right)q' = p;$$

$$(1 - \frac{q}{r})p' = q(\frac{1}{q} - \frac{1}{r})p' = q(1 - \frac{1}{p})p' = q.$$

Luego

$$f_*g(x) \leq \left[\int_{\mathbb{R}^n} f(y)^p g(x-y)^q dy \right]^{\frac{1}{r}}, 1, 1,$$

o

$$(f_*g)^r(x) \leq \int_{\mathbb{R}^n} f(y)^p g(x-y)^q dy$$

esto es

$$(f_*g)^r \leq f_*^p g^q.$$

Por proposición anterior tenemos

$$\int_{\mathbb{R}^n} (f_*g)^r dx \leq \|f_*^p g^q\|_1 = \|f^p\|_1 \|g^q\|_1 = \|f\|_p^p \|g\|_q^q = 1$$

Definición 5.3.13. $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$, $\alpha_i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $|\alpha| = \sum_{i=1}^n \alpha_i$, $\partial^\alpha \varphi \equiv \frac{\partial^{|\alpha|} \varphi}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}$

Decimos que $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ si φ tiene soporte compacto y existe y son continuas las funciones $\partial^\alpha \varphi$, $\forall \alpha \in \mathbb{N}^n$

Ejemplo 5.3.14.

$$\varphi(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{1-\|x\|^2}} & \text{si } \|x\| < 1, \\ 0 & \text{en otros casos.} \end{cases}$$

$$\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$$

Si se define $J(x) = \frac{1}{\int_{\mathbb{R}^n} \varphi dx} \varphi$ entonces

$$J \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \text{ y } \int J dx = 1$$

Tomemos

$$J_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n} J\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \text{ para } \varepsilon > 0$$

$$J_\varepsilon \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n); \int J_\varepsilon dx = 1$$

$$\text{Supp } J_\varepsilon = B[0, \varepsilon]$$

Dada $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $f_*J_\varepsilon \in C^\infty$

$$\partial^\alpha(f_*J_\varepsilon) = f_*\partial^\alpha J_\varepsilon$$

Teorema 5.3.15. Si $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ entonces $f_*J_\varepsilon \rightarrow f$ en $L^p(\mathbb{R}^n)$

Demostración.

$$|f_*J_\varepsilon(x) - f(x)| = \quad (5.6)$$

$$= \left| \int f(x-y)J_\varepsilon(y)dy - f(x) \right| \quad (5.7)$$

$$= \left| \int J_\varepsilon(y)(f(x-y) - f(x))dy \right| \quad (5.8)$$

$$\leq \left(\int_{B[0,\varepsilon]} (J_\varepsilon(y))^q dy \right)^{1/q} \left(\int_{B[0,\varepsilon]} |f(x-y) - f(x)|^p dy \right)^{1/p} \quad (5.9)$$

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f_*J_\varepsilon - f|^p dx \leq \frac{1}{\varepsilon^n} (\mu^*(B[0, \varepsilon]))^{\frac{p}{q}} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{B[0,\varepsilon]} |f(x-y) - f(x)|^p dy dx$$

luego

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} |f_*J_\varepsilon - f|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \leq \frac{1}{\varepsilon^n} (\mu^*(B[0, \varepsilon]))^{\frac{1}{q}} \sup_{y \in B[0,\varepsilon]} \|f_y - f\|_p (\mu^*(B[0, \varepsilon]))^{\frac{1}{p}}.$$

Es decir

$$\|f_*J_\varepsilon - f\|_p \leq K \sup_{y \in B[0,\varepsilon]} \|f_y - f\|_p$$

Corolario 5.3.16. $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ es denso en $L^p(\mathbb{R}^n)$ $p \leq 1 < \infty$

Demostración. Sea $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$. Dado $\epsilon > 0$ por el teorema de la convergencia dominada existe $k \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|f - \chi_{B(0,k)} f\|_p < \frac{\epsilon}{2}$$

Luego existe un $\delta > 0$ tal que $\|J_{\delta*} \chi_{B(0,k)} f - \chi_{B(0,k)} f\|_p < \frac{\epsilon}{2}$, note que $J_{\delta*} \chi_{B(0,k)} f$ tiene soporte compacto (por qué?).

Luego $\|f - J_{\delta*} \chi_{B(0,k)} f\|_p < \epsilon$

5.4. Ejercicios

- Sean (X, M, μ) un espacio de medida, $1 < p_k < \infty$, $k = 1, \dots, N$ con $\sum_{k=1}^n \frac{1}{p_k} = 1$ y $f_k \in L^{p_k}(\mu)$, $k = 1, \dots, N$ muestre que $\|f_1 \cdot f_2 \cdots f_N\|_1 \leq \|f_1\|_{p_1} \|f_2\|_{p_2} \cdots \|f_N\|_{p_N}$
- Sean (X, M, μ) un espacio de medida con $\mu(X) < \infty$. Muestre que si $1 \leq p < q < \infty$ entonces $L^q(\mu) \subseteq L^p(\mu)$
- Sean (X, M, μ) un espacio de medida, $p, q, r \in [1, \infty)$. Si $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$ y $f \in L^p(\mu)$, $g \in L^q(\mu)$ muestre que $\|fg\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q$
- Sean (X, M, μ) un espacio de medida y $1 \leq p < r < q < \infty$. Muestre que $L^p(\mu) \cap L^q(\mu) \subseteq L^r(\mu)$
- Sean (X, M, μ) un espacio de medida. Muestre que $L^\infty(\mu) \subseteq L^1(\mu)$ si y sólo si $\mu(X) < \infty$
- Sean (X, M, μ) un espacio de medida con $\mu(X) < \infty$. Muestre que si $f \in L^\infty(\mu)$ entonces $\lim_{p \rightarrow \infty} \|f\|_p = \|f\|_\infty$
- Sean (X, M, μ) un espacio de medida y $f \in L^p(\mu)$, $1 \leq p < \infty$. Muestre que el conjunto $E = \{x \in X : |f(x)| \neq 0\}$ es σ -finito, muestre además que $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(E_n) = 0$ donde $E_n = \{x \in X : \|f(x)\| \geq n\}$
- Suponga que $X = \mathbb{N}$, $M = P(\mathbb{N})$ y μ la medida de conteo en \mathbb{N} . Mostrar que
 - si $f \geq 0$ entonces $\int_X f d\mu = \sum_{n=1}^\infty f(n)$
 - $f \in L^1(\mu)$ si y sólo si $\sum_{n=1}^\infty |f(n)| < \infty$
- Sean (X, M, μ) un espacio de medida y $f \in L^p(\mu)$, $1 \leq p < \infty$. Muestre la [desigualdad de Markov](#)
 $\forall \epsilon > 0, \mu(\{x \in X : |f(x)| \geq \epsilon\}) \leq \frac{\|f\|_p^p}{\epsilon^p}$
- Sea f una función integrable en un espacio de probabilidad (X, M, μ) muestre que $e^{\int_X f d\mu} \leq \int_X e^f d\mu$
- Suponga que $X = \mathbb{N}$, $M = P(\mathbb{N})$ y μ la medida de conteo en \mathbb{N} . Muestre que si $f \in L^p(\mu)$ entonces $f \in L^s(\mu)$ donde $1 \leq p \leq s < \infty$ y además $\|f\|_s \leq \|f\|_p$
- Sean (X, M, μ) un espacio de medida y $f, g \in L^p(\mu)$, $1 < p < \infty$ con $\|f\|_p \neq 0 \neq \|g\|_p$. Muestre que si $\|f + g\|_p = \|f\|_p + \|g\|_p$ entonces $\frac{f}{\|f\|_p} = \frac{g}{\|g\|_p}$

13. Sean $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ con soporte compacto . Si existe $f * g$ muestre que $\text{supp}(f * g) \subseteq \text{supp}(f) + \text{supp}(g)$

CAPÍTULO 6

Algunos tipos de convergencia

6.1. Definiciones

Definición 6.1.1. Sean (X, M, μ) espacio de medida, $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de funciones medibles y f una función medible

$f_n \rightarrow f$ cuando $n \rightarrow \infty$:

- Puntualmente. Si $\forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon, x)$ tal que $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ si $n \geq N$.
- En μ casi todas partes. Si existe $E \in M$, $\mu(E) = 0$ tal que $f_n \rightarrow f$ puntualmente en $X - E$.
- Uniformemente. Si $\forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon)$ tal que $\forall x \in X$, $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ si $n \geq N$
- En $L^p(\mu)$. Si $\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N}$ tal que $\|f_n - f\|_p \leq \varepsilon$, $n \geq N$
- Casi uniformemente. Si $\forall \delta > 0$ existe $E \in M$, $\mu(E) < \delta$ tal que $f_n \rightarrow f$ uniformemente en $X - E$.
- En medida. Si $\forall \alpha > 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu\{x \in X : |f_n(x) - f(x)| \geq \alpha\} = 0$.

Miremos algunos ejemplos y comentarios de comparación.

1. Sea $f_n = X_{[n, n+1]}$, $f_n \rightarrow 0$ puntualmente pero no uniformemente, además para $\alpha = \frac{1}{4}$, $\mu\{x \in X : |f_n(x)| \geq \frac{1}{4}\} = 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$ luego f_n no converge a 0 en medida.
 $\|f_n\|_p = 1$, por lo tanto tampoco tenemos convergencia en $L^p(\mu)$, $1 \leq p \leq \infty$

2. $\frac{X_{[0,n]}}{n^{1/p}}$, $p \geq 1$, $f_n \rightarrow 0$ uniformemente en X pero f_n no converge a 0 en $L^p(\mu)$, $1 \leq p < \infty$, $\int_{\mathbb{R}} |f|^p d\mu = 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$
3. Si $f_n \rightarrow f$ en L^∞ entonces existe $E \in \mathcal{M}$, $\mu(E) = 0$ tal que $|f_n(x) - f(x)| < \|f_n - f\|_\infty$; $\forall x \in X - E$.
Luego $f_n \rightarrow f$ uniformemente en $X - E$.
4. Convergencia uniforme implica convergencia puntual, casi uniforme y en medida.
5. $f_n = X_{[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}]}$ converge casi uniformemente pero no uniformemente.
6. Sean $X = [0, 1]$, μ medida de Lebesgue consideremos

$$[0, 1], \left[0, \frac{1}{2}\right], \left[\frac{1}{2}, 1\right], \left[0, \frac{1}{3}\right], \left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right], \left[\frac{2}{3}, 1\right], \left[0, \frac{1}{4}\right] \dots$$

y $f_n = \chi_{I_n}$, $\int_{\mathbb{R}} |f_n|^p = \mu(I_n)$ luego, $f_n \rightarrow 0$, en $L^p(\mu)$.

De otro lado $\forall x \in [0, 1]$, existen $(f_{n_j}(x))_{j \in \mathbb{N}}$, tal que $f_{n_j}(x) = 1$, $\forall j \in \mathbb{N}$

y $(f_{n_k}(x))_{k \in \mathbb{N}}$, tal que $f_{n_k}(x) = 0$, $\forall k \in \mathbb{N}$. Esto nos dice que para ningún valor de x se tiene convergencia puntual.

7. De la prueba de la completez de los espacios $L^p(\mu)$ $1 \leq p < \infty$ se vió que si $f_n \rightarrow f$ en $L^p(\mu)$ entonces existe una subsucesión $(f_{n_i})_{i \in \mathbb{N}}$ tal que $f_{n_i} \rightarrow f$ en μ -casi todas partes.

6.2. Ejemplos

Proposición 6.2.1. Sean (X, \mathcal{M}, μ) espacio de medida $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sucesión en $L^p(\mu)$

Si $f_n \rightarrow f$ uniformemente, y $\mu(X) < \infty$, entonces $f_n \rightarrow f$ en L^p

Demostración.

Dado $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $|f_n(x) - f(x)|^p < \frac{\varepsilon^p}{\mu(X)}$ si $n \geq N$.

Luego, $\int_X |f_n - f|^p d\mu < \varepsilon^p$, si $n \geq N$

lo que muestra que $f \in L^p(\mu)$ y que $\|f_n - f\|_p < \varepsilon$, si $n \geq N$.

Proposición 6.2.2. Sean (X, \mathcal{M}, μ) espacio de medida $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sucesión en L^p Si $f_n \rightarrow f$ en $L^p(\mu)$, $1 \leq p < \infty$ entonces $f_n \rightarrow f$ en medida.

Demostración. Dado $\alpha > 0$, veamos que $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu \left(\overbrace{\{x \in X : |f_n(x) - f(x)| \geq \alpha\}}^{E_\alpha^n} \right) = 0$.

Dado $\varepsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N$ entonces $\int_X |f_n - f|^p d\mu < \varepsilon^p$

$$\alpha^p \mu(E_\alpha^n) \leq \int_{E_\alpha^n} |f_n - f|^p d\mu < \varepsilon^p$$

Así,

$$\mu(E_\alpha^n) < \left(\frac{\varepsilon}{\alpha}\right)^p$$

Proposición 6.2.3. Sean (X, M, μ) espacio de medida y $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de funciones medibles.

Si $f_n \rightarrow f$ casi uniformemente entonces $f_n \rightarrow f$ en medida.

Demostración. Dado $\alpha > 0$ y $\varepsilon > 0$ existe $E_\varepsilon \in M$ $\mu(E_\varepsilon) < \varepsilon$ tal que $f_n \rightarrow f$ uniformemente en $X - E_\varepsilon$.

Luego para n suficientemente grande el conjunto $\{x \in X : |f_n(x) - f(x)| \geq \alpha\}$ esta contenido en E_ε

Proposición 6.2.4. Lema Sea $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de funciones medibles. Si $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es de Cauchy en medida, entonces existen $(f_{n_i})_{i \in \mathbb{N}}$ y f función medible tales que $f_{n_i} \rightarrow f$ en medida, en μ -casi todas partes y casi uniformemente.

Demostración. $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de Cauchy en medida,

$$\left(\forall \alpha > 0, \lim_{m, n \rightarrow \infty} \mu\{x \in X : |f_n(x) - f_m(x)| \geq \alpha\} = 0 \right)$$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N; \text{ si } n, m \geq N \mu(\{x \in X : |f_n(x) - f_m(x)| \geq \alpha\}) < \varepsilon$$

Existe $(f_{n_i})_{i \in \mathbb{N}}$ tal que

$$\begin{cases} E_i = \{x \in X : |f_{n_{i+1}} - f_{n_i}| \geq \frac{1}{2^i}\} \\ \mu(E_i) < \frac{1}{2^i} \end{cases}$$

$$\text{Tomemos } F_k = \bigcup_{i=k}^{\infty} E_i, \mu(F_k) < \frac{1}{2^{k-1}}$$

Note que si $i \geq j \geq k$, $x \notin F_k$ entonces

$$|f_{n_i} - f_{n_j}| \leq |f_{n_i} - f_{n_{i-1}}| + \dots + |f_{n_{j+1}} - f_{n_j}| \quad (6.1)$$

$$< \frac{1}{2^{i-1}} + \dots + \frac{1}{2^j} \quad (6.2)$$

$$< \frac{1}{2^{j-1}}. \quad (6.3)$$

(f_{n_i}) converge uniformemente en $X - F_k$

Definamos $F = \bigcap F_k$

$$F \in M, \mu(F) = \lim_{k \rightarrow \infty} \mu(F_k) = 0$$

y

$$f(x) = \begin{cases} \lim_{i \rightarrow \infty} f_{n_i}(x) & \text{si } x \notin F \\ 0 & \text{si } x \in F \end{cases}$$

f es medible.

$$f_{n_i} \rightarrow f \text{ } \mu - \text{casi todas partes}$$

además

$$f_{n_i} \rightarrow f \text{ casi uniformemente}$$

dados $\varepsilon > 0$, $\alpha > 0$ Tomemos $k \in \mathbb{N}$ tal que $\mu(F_k) < \frac{1}{2^{k-1}} < \min\{\alpha, \varepsilon\}$

Para $i \geq k$

$$\mu(\{x \in X : |f_{n_i}(x) - f(x)| \geq \alpha\}) \leq \mu(F_k) < \varepsilon$$

$f_{n_i} \rightarrow f$ en medida.

Proposición 6.2.5. Sea $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sucesión de funciones medibles, (f_n) de Cauchy en medida, entonces existe f medible tal que $f_n \rightarrow f$ en medida. f es únicamente determinada, excepto por un conjunto de medida nula

Demostración. Demostración: Sabemos que existen $(f_{n_i})_{i \in \mathbb{N}}$, f medibles, $f_{n_i} \rightarrow f$ en medida.

Veamos que $f_n \rightarrow f$ en medida.

Dado $\alpha > 0$

$$A = \{x \in X : |f_n(x) - f(x)| \geq \alpha\}$$

$$B_i = \{x \in X : |f_n(x) - f_{n_i}(x)| \geq \frac{\alpha}{2}\}$$

$$C_i = \{x \in X : |f_{n_i}(x) - f(x)| \geq \frac{\alpha}{2}\}$$

Note que

$$A \subseteq B_i \cup C_i \quad \forall i \in \mathbb{N}$$

de donde se obtiene la convergencia deseada

Supongamos que $f_n \rightarrow f$ y $f_n \rightarrow g$ en medida.

Dado $\alpha > 0$

$$E = \{x \in X : |f(x) - g(x)| \geq \alpha\}, \quad \alpha > 0$$

$$F_n = \{x \in X : |f_n(x) - g(x)| \geq \frac{\alpha}{2}\}$$

$$G_n = \{x \in X : |f_n(x) - f(x)| \geq \frac{\alpha}{2}\}$$

$E \subseteq F_n \cup G_n, \forall n \in \mathbb{N}$ lo que garantiza que $f = g$ en μ -casi todas partes.

Proposición 6.2.6. Si $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es casi uniformemente de Cauchy entonces existe f medible tal que $f_n \rightarrow f$ en μ -casi todas partes y $f_n \rightarrow f$ casi uniformemente

Demostración. Dado $k \in \mathbb{N}$, $\exists E_k \in \mathcal{M}$,

$\mu(E_k) < \frac{1}{2^k}$, $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformemente en $X - E_k$.

Si $F_k = \bigcup_{j=k}^{\infty} E_j$ luego, $\mu(F_k) < \frac{1}{2^{k-1}}$

y $F_1 \supseteq F_2 \supseteq \dots$, $\mu(\cap F_k) = 0$.

Sea $g_k(x) = \begin{cases} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) & \text{si } x \in X - F_k, \\ 0 & \text{si } x \in F_k. \end{cases}$ $f_n \rightarrow g_k$ uniformemente en $X - F_k$

De otro lado como $F_k \supseteq F_m$ si $k \leq m$, entonces $g_k = g_m$ en $X - F_k$

$$f(x) = \begin{cases} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) & \text{si } x \in X - \cap F_k, \\ 0 & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

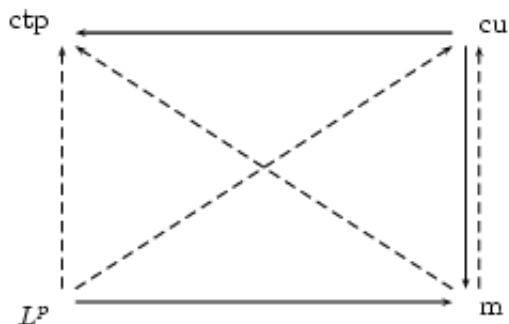
f medible $f_n \rightarrow f$ en μ -casi todas partes .

Los resultados presentados hasta aquí pueden ser resumidos en el siguiente gráfico, donde se denota : convergencia en μ -casi todas partes (ctp), convergencia en medida (m), convergencia casi uniforme (cu), convergencia en $L^p(\mu)$ (L^p), $1 \leq p < \infty$.

Además cuando se estudia convergencia en $L^p(\mu)$ se asume que la sucesión de funciones pertenece a $L^p(\mu)$.

Cuando de un tipo de convergencia se sigue otro, se usa una línea continua. Cuando sólo es posible garantizar la existencia de una subsucesión convergente se usa una línea puntillada .

Sean (X, M, μ) un espacio de medida y $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de funciones medibles



6.3. Teorema de Egoroff

Proposición 6.3.1 (Egoroff). Sea (X, M, μ) espacio de medida finita y $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ funciones medibles.

Si $f_n \rightarrow f$ μ -casi todas partes entonces $f_n \rightarrow f$ casi uniformemente.

Demostración.

$$E_n(m) = \bigcup_{k=n}^{\infty} \{x \in X : \|f_k(x) - f(x)\| \geq \frac{1}{m}\}$$

$$E_{n+1}(m) \subseteq E_n(m)$$

$$\mu\left(\bigcap E_n\right) = 0$$

$$\text{Así } \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(E_n(m)) = 0$$

Sea $\varepsilon > 0$ existe $E_{n_m}(m)$ tal que

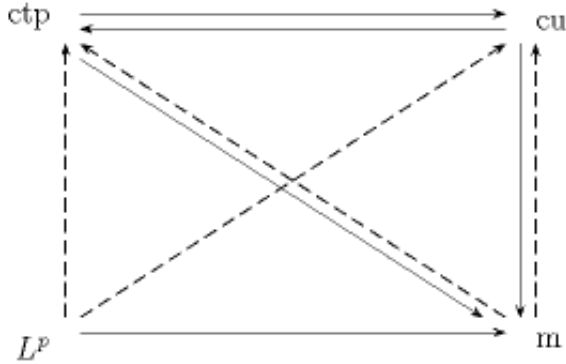
$$\mu(E_{n_m}(m)) < \frac{\varepsilon}{2^m}$$

$$\text{Consideremos } F = \bigcup_{m=1}^{\infty} E_{n_m} \quad \mu(F) < \frac{\varepsilon}{2}$$

$f_n \rightarrow f$ uniformemente en $X - F$.

Sean (X, M, μ) un espacio de medida, con $\mu(X) < \infty$ y $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de funciones medibles.

La siguiente gráfica ilustra los resultados probados



Proposición 6.3.2. Sean (X, M, μ) un espacio de medida y $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión en $L^p(\mu)$

- i Si $f_n \rightarrow f$ en μ -casi todas partes y existe $g \in L^p(\mu)$ tal que $|f_n| < g$ entonces $f_n \rightarrow f$ en $L^p(\mu)$
- ii Si $f_n \rightarrow f$ en medida y existe $g \in L^p(\mu)$ tal que $|f_n(x)| \leq g(x)$ μ -casi todas partes entonces $f \in L^p(\mu)$, $f_n \rightarrow f$ en $L^p(\mu)$

Demostración.

- i Como $f_n \rightarrow f$ μ -casi todas partes entonces $|f| \leq g$ μ -casi todas partes .
 $|f_n - f|^p \leq (2|g|)^p$ luego $f \in L^p(\mu)$. Por Teorema de la convergencia dominada $\int_X |f_n - f|^p d\mu \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$ y por lo tanto $\|f_n - f\|_p \rightarrow 0$
- ii Supongamos que f_n no converge a f en $L^p(\mu)$. Existe $\varepsilon > 0$ $(f_{n_j})_{j \in \mathbb{N}}$, $\|f_{n_j} - f\|_p > \varepsilon$ (*)
 $f_{n_j} \rightarrow f$ en medida.
Existe $(f_{n_{i_k}})_{k \in \mathbb{N}}$, $f_{n_{i_k}} \rightarrow f$ cuando $k \rightarrow \infty$ en μ -casi todas partes
Usando (i) $\|f_{n_{i_k}} - f\|_p \rightarrow 0$ lo que contradice (*)

Proposición 6.3.3. Sean (X, M, μ) un espacio de medida , $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de funciones medibles y $g \in L^p(\mu)$. Si $f_n \rightarrow f$ en μ -ctp y $|f_n| \leq g$ entonces $f_n \rightarrow f$ en cu

Demostración. Por proposición anterior se tiene que $f_n \rightarrow f$ en L^p luego definamos, como en la prueba del Teorema de Egoroff,

$$E_n(m) = \bigcup_{k=n}^{\infty} \left\{ x \in X : |f_k(x) - f(x)| \geq \frac{1}{m} \right\} \text{ (nótese que es de medida finita para algún } n \text{)}$$

$$E_{n+1}(m) \subseteq E_n(m)$$

$$\mu\left(\bigcap E_n\right) = 0$$

Así $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(E_n(m)) = 0$

Sea $\varepsilon > 0$ existe $E_{n_m}(m)$ tal que

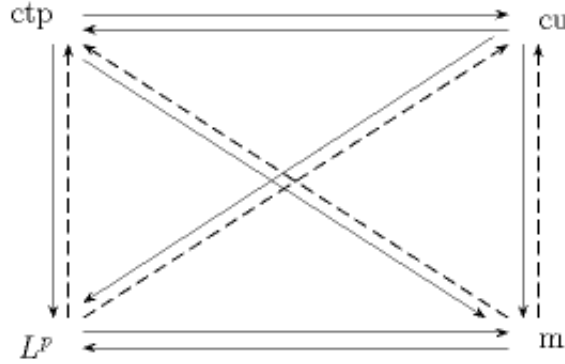
$$\mu(E_{n_m}(m)) < \frac{\varepsilon}{2^m}$$

Consideremos $F = \bigcup_{m=1}^{\infty} E_{n_m} \quad \mu(F) < \frac{\varepsilon}{2}$

$f_n \rightarrow f$ uniformemente en $X - F$.

Sean (X, M, μ) un espacio de medida, $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de funciones medibles y g una función en $L^p(\mu)$, $1 \leq p < \infty$ tal que $|f_n| \leq g \forall n \in \mathbb{N}$.

La siguiente gráfica, con las convenciones asumidas anteriormente, ilustra los resultados probados.



Ejemplo 6.3.4. Sean (X, m, μ) un espacio de medida, $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de funciones medibles y f medible. Si $f_n, f \in L^p(\mu)$ ($1 \leq p < \infty$), $\forall n \in \mathbb{N}$, $f_n \rightarrow f$ en μ -casi todas partes y $\|f_n\|_p \rightarrow \|f\|_p$ entonces $\|f_n - f\|_p \rightarrow 0$.

Como la función

$$x^p, x > 0 \quad 1 \leq p < \infty \quad \text{es convexa}$$

entonces

$$\left(\frac{x+y}{2}\right)^p \leq \frac{x^p + y^p}{2}$$

$$(x+y)^p \leq 2^{p-1}(x^p + y^p)$$

luego

$$|f_n - f|^p \leq 2^{p-1}(|f_n|^p + |f|^p).$$

Así

$$2^{p-1}(|f_n|^p + |f|^p) - |f_n - f|^p \geq 0$$

Usando el lema de Fatou tenemos

$$\begin{aligned} & \int_X (\liminf (2^{p-1} (|f_n|^p + |f|^p)) - |f_n - f|^p) d\mu \\ & \leq \liminf \int_X 2^{p-1} (|f_n|^p + |f|^p) - |f_n - f|^p d\mu \end{aligned}$$

Es decir

$$2^p \int_X |f|^p d\mu \leq 2^p \int_X |f|^p d\mu - \limsup \int_X |f_n - f|^p d\mu$$

y por lo tanto

$$\limsup \int_X |f_n - f|^p d\mu \leq 0$$

Miremos otra solución.

Definamos $A_k = \{x \in X : \frac{1}{k} < |f(x)|^p < k\}$

$$\int_{A_k} |f(x)|^p d\mu \rightarrow \int_X |f|^p d\mu$$

Dado que $\varepsilon > 0$ existe $k \in \mathbb{N}$ tal que

$$\int_{X-A_k} |f|^p d\mu < \frac{\varepsilon}{2}$$

entonces por el teorema de Egoroff existe $B \subseteq A_k$, $\mu(A_k - B) < \frac{\varepsilon}{2k}$ tal que $f_n \rightarrow f$ uniformemente en B

Hagamos $A = X - B$

Por el lema de Fatou

$$\begin{aligned} & \int_B |f|^p d\mu \leq \liminf \int_B |f_n|^p d\mu \\ & \int_X |f|^p d\mu - \int_A |f|^p d\mu \leq \liminf \left(\int_X |f|^p d\mu - \int_A |f_n|^p d\mu \right) \\ & \int_X |f|^p d\mu - \int_A |f|^p d\mu \leq \int_X |f|^p d\mu - \limsup \int_A |f_n|^p d\mu \\ & \limsup \int_A |f_n|^p d\mu \leq \int_A |f|^p d\mu < \int_{A_k-B} |f|^p d\mu + \int_{X-A_k} |f|^p d\mu < \varepsilon. \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\int_A |f_n - f|^p d\mu \leq 2^{p-1} \left(\int_A |f_n|^p + \int_A |f|^p \right) < 2^p \varepsilon$$

Por la convergencia uniforme

$$\int_B |f_n - f|^p d\mu \rightarrow 0$$

Luego $\|f_n - f\|_p \rightarrow 0$

6.4. Ejercicios

- Sean (X, M, μ) un espacio de medida y (f_n) una sucesión de funciones medibles. Si $f_n \rightarrow f$ en medida entonces $\int_X f d\mu \leq \liminf \int_X f_n d\mu$; es decir, el lema de Fatou continua válido si en lugar de convergencia en μ -casi todas partes se usa convergencia en medida
- Muestre que el teorema de la convergencia dominada continua válido si se en lugar de convergencia en μ -casi todas partes se usa convergencia en medida
- Sean (X, M, μ) un espacio de medida, $\mu(X) < \infty$ y f una función medible. Si $r(f) = \int_X \frac{|f|}{1+|f|} d\mu$. Muestre que una sucesión de funciones medibles, $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$, converge en medida a f si y sólo si $r(f_n - f) \rightarrow 0$.
- Sean (X, M, μ) un espacio de medida, $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de funciones medibles y f una función medible. Para cada $\varepsilon > 0$ y $m \in \mathbb{N}$, si $A_m^\varepsilon = \{x \in X : |f_m(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}$. Muestre que
 - $f_n \rightarrow f$ casi uniformemente si y sólo si $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(\cup_{m=n}^\infty A_m^\varepsilon) = 0$
 - $f_n \rightarrow f$ en μ -casi todas partes si y sólo si $\mu(\cap_{n=1}^\infty \cup_{m=n}^\infty A_m^\varepsilon) = 0$
- Sean (X, M, μ) un espacio de medida, $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ y $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sucesiones de funciones medibles. Si $f_n \rightarrow f$ y $g_n \rightarrow g$ en medida muestre que
 - $|f_n| \rightarrow |f|$ en medida
 - $f_n \pm g_n \rightarrow f \pm g$ en medida
 - si para cada $n \in \mathbb{N}$ $f_n(x) = g_n(x)$ en μ -casi todas partes entonces $f(x) = g(x)$ en μ -casi todas partes

CAPÍTULO 7

Cargas

7.1. Teorema de descomposición de Hahn

Definición 7.1.1. Sea M una σ – álgebra en X ; $\lambda : M \rightarrow \mathbb{R}$ es denominada **carga** si:

1. $\lambda(\emptyset) = 0$
2. Si $\{E_i\}_{i=1}^{\infty}$ una familia disyunta en M

$$\lambda\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda(E_i)$$

Observación 7.1.2. Note que la convergencia de la serie debe ser absoluta, de lo contrario una reorganización de los conjuntos modificaría el valor de la carga. Si $\{E_i\}_{i=1}^n$ es una familia disyunta en M , entonces $\lambda(\bigcup_{i=1}^n E_i) = \sum_{i=1}^n \lambda(E_i)$. Una carga puede tomar valores negativos (a diferencia de lo pedido para una medida), además si $A, B \in M$, $A \subseteq B$ entonces $\lambda(B - A) = \lambda(B) - \lambda(A)$.

Ejemplo 7.1.3. ■ Sean (X, M) espacio medible y μ, ϕ medidas finitas sobre M entonces $\lambda = \mu - \phi$ es una carga

- Sean (X, M, μ) un espacio de medida y $f \in L^1(\mu)$ entonces $\lambda(E) = \int_E f d\mu$ es una carga

Proposición 7.1.4. Sean M una σ –álgebra en X y λ una carga.

Si $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$ es una familia de conjuntos en M tal que $A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_3 \subseteq \dots \subseteq$, entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda(A_n) = \lambda(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n)$

Demostración. Hagamos $E_1 = A_1$, $E_n = A_n - A_{n-1}$ para $n > 1$ luego $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es una familia disjunta en M y $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$

$$\lambda \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n \right) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda(E_i) \quad (7.1)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \lambda(E_i) \quad (7.2)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda(A_n). \quad (7.3)$$

Observación 7.1.5. Si $A_1 \supseteq A_2 \supseteq A_3 \supseteq \dots$ entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda(A_n) = \lambda \left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n \right)$

Definición 7.1.6. Sea λ una carga en X . Decimos que A es **positivo** con respecto a λ si $\lambda(E \cap A) \geq 0 \quad \forall E \in M$.

Decimos que B es **negativo** con respecto a λ si $\lambda(E \cap B) \leq 0, \quad \forall E \in M$.

Decimos que C es **nulo** con respecto a λ , si $\lambda(E \cap C) = 0, \quad \forall E \in M$.

Teorema 7.1.7 (Descomposición de Hahn). *Dada λ una carga, existen $P, N \in M$, P positivo con respecto a λ , N negativo con respecto a λ tales que $P \cap N = \emptyset$; $P \cup N = X$.*

Demostración. Definamos $\mathbb{P} = \{P \in M : P \text{ es positivo con respecto a } \lambda\}$,

\mathbb{P} es no vacío ($\emptyset \in \mathbb{P}$) llamemos $\alpha = \sup_{P \in \mathbb{P}} \lambda(P)$.

Escojamos $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \dots$ tales que $\lambda(A_n) \rightarrow \alpha$

Definamos $P = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ luego

$$0 \leq \lambda(E \cap P) = \lambda \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} (A_n \cap E) \right)$$

Veamos que $N = X - P$ es negativo con respecto a λ

Supongamos que no, luego existe $E \subseteq X - P = N$, $\lambda(E) > 0$, ahora $E \notin \mathbb{P}$ caso contrario $P \cup E$ es un conjunto positivo con respecto a λ y $\lambda(P \cup E) > \lambda(P)$.

Sea $n_1 \in \mathbb{N}$ el menor natural tal que existe $E_1 \subseteq E$ tal que $\lambda(E_1) \leq -\frac{1}{n_1}$ y $\lambda(E - E_1) > 0$, Ahora $E - E_1 \notin \mathbb{P}$, por idéntica razón.

Sea n_2 el menor natural. $E_2 \subseteq E - E_1$, $\lambda(E_2) \leq -\frac{1}{n_2}$.

Razonando de igual manera tenemos que $\{E_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ es una familia disjunta de conjuntos y $\lambda \left(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} E_k \right) \leq -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n_k}$

Luego $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n_k}$ converge y así $\frac{1}{n_k} \rightarrow 0$ cuando $k \rightarrow \infty$

Obsérvese además que $\lambda(E - \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i) > 0$

Veamos que $E - \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k \in \mathbb{P}$ lo que sería una contradicción .

Si $\exists G \subseteq E - \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$ tal que $\lambda(G) < 0$ entonces $\exists n_k$, tal que $\lambda(G) < -\frac{1}{n_k - 1}$ contradiciendo la minimalidad de n_k .

Observación 7.1.8. ■ La descomposición de Hahn no es única.

Sea (P, N) una descomposición de Hahn y $C \in M$ un conjunto nulo con relación a λ Entonces $P \cup C, N - C$ es también una descomposición de Hahn.

- Sean $(P_1, N_1), (P_2, N_2)$ dos descomposiciones de Hahn para λ
Dado $E \in M$, $\lambda(E \cap P_1) = \lambda(E \cap P_2)$, $\lambda(E \cap N_1) = \lambda(E \cap N_2)$ pues

$$\lambda(E \cap (P_2 - P_1)) = 0$$

$$\lambda(E \cap (P_1 - P_2)) = 0$$

luego

$$\lambda(E \cap P_1) = \lambda(E \cap P_1 \cap P_2) = \lambda(E \cap P_2)$$

La observación anterior le da sentido a la siguiente definición

Definición 7.1.9. Sean X un conjunto no vacío, M una σ -álgebra, λ una carga y (N, P) una descomposición de Hahn definimos para cada $E \in M$

$$\lambda^+(E) = \lambda(E \cap P), \lambda^-(E) = -\lambda(E \cap N), |\lambda|(E) = \lambda^+(E) + \lambda^-(E)$$

Observación 7.1.10. ■ λ^+, λ^- son medidas finitas además $\lambda = \lambda^+ - \lambda^-$

- si $\lambda = \mu - \varphi$ con μ y φ medidas finitas.

$$\lambda^+(E) = \lambda(E \cap P) = \mu(E \cap P) - \varphi(E \cap P) \leq \mu(E \cap P) \leq \mu(E)$$

luego $\lambda^+ \leq \mu$ Análogamente

$$\lambda^-(E) = -\lambda(E \cap N) = \varphi(E \cap N) - \mu(E \cap N) \leq \varphi(E)$$

luego $\lambda^- \leq \varphi$.

Ejemplo 7.1.11. Sean (X, M, μ) un espacio de medida $f \in L^1(\mu)$ entonces $\lambda(E) = \int_E f d\mu$ es una carga y

$$\lambda^+(E) = \int_E f^+ d\mu, \quad \lambda^-(E) = \int_E f^- d\mu$$

$$|\lambda|(E) = \int_E |f| d\mu$$

Además

$$P = \{x : f(x) \geq 0\}, N = \{x : f(x) < 0\}$$

es una descomposición de Hahn.

7.2. Teorema de Radon-Nikodym

Definición 7.2.1. Sean (X, M, μ) un espacio de medida y φ una medida (o una carga) en X . Decimos que φ es absolutamente continua en relación a μ , $\varphi \ll \mu$, si para cada $A \in M$ con $\mu(A) = 0$ entonces $\varphi(A) = 0$.

El término de continuidad en la definición se justifica por la siguiente proposición

Proposición 7.2.2. Si φ y μ son medidas tales que $\varphi \ll \mu$ entonces $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta(\varepsilon)$ tal que si $\mu(E) < \delta$ entonces $\varphi(E) < \varepsilon$

Demostración. Razonemos por el absurdo, esto es supongamos que existen $\varepsilon > 0$, una sucesión $(\delta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tal que $\delta_n > 0$ y $\sum_{n=1}^{\infty} \delta_n < \infty$ y $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$ familia en M tales que

$$\mu(E_n) < \delta_n \text{ y } \varphi(E_n) \geq \varepsilon.$$

$$\text{Hagamos } F_n = \bigcup_{k=n}^{\infty} E_k \quad F = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \delta_n < \infty \text{ luego } \mu(F) = 0.$$

$$\text{Además } \varphi(F) = \varphi\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n\right) \geq \limsup \varphi(E_n) \geq \varepsilon.$$

absurdo

Lema 7.2.3. Sean φ, μ medidas finitas. Si $\varphi \ll \mu$ y φ no nula, entonces existen $\varepsilon > 0$, $A \in M$ tales que $\mu(A) > 0$ y A es positivo con respecto a $\varphi - \varepsilon\mu$

Demostración. Sean (A_n, B_n) Descomposición de Hahn para $\varphi - \frac{1}{n}\mu$. El resultado es probado si mostramos que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\mu(A_n) > 0$.

Caso contrario $\mu(A_n) = 0$ para todo n luego $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = 0$ y por lo tanto $\varphi\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = 0$.

$$\text{Ahora } \varphi\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} B_n\right) \leq \varphi(B_n) \leq \frac{1}{n}\mu(B_n) \leq \frac{1}{n}\mu(X).$$

$$\text{Así } \varphi\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n\right) = 0.$$

Luego $\varphi \equiv 0$. Absurdo.

Teorema 7.2.4 (Radon-Nicodym). Sean μ, φ medidas σ -finitas tales que $\varphi \ll \mu$ entonces existe una $f : X \rightarrow [0, \infty)$ medible tal que

$$\varphi(E) = \int_E f d\mu \quad \forall E \in M$$

Cualquier otra función que satisfaga la condición anterior es igual a f en μ -casi todas partes, f es denotada por $\frac{d\varphi}{d\mu}$

Demostración. Supongamos φ, μ finitas.

$$A = \{g : X \rightarrow [0, \infty]; \text{medibles} \mid \int_E g d\mu \leq \varphi(E), \forall E \in M\}$$

- i $A \neq \emptyset$, pues $0 \in A$
- ii Si $g \in A$ entonces g es finita en μ -casi todas partes
- iii Si $f, g \in A$ entonces $\max(f, g) \in A$ ya que si definimos $A_1 = \{x : f(x) \geq g(x)\}$ y $A_2 = \{x : f(x) < g(x)\}$ tenemos

$$\int_E \max(f, g) d\mu = \int_{A_1 \cap E} f d\mu + \int_{A_2 \cap E} g d\mu \quad (7.4)$$

$$\leq \varphi(A_1 \cap E) + \varphi(A_2 \cap E) = \varphi(E) \quad (7.5)$$

- iv Si $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión en A entonces $\sup_{n \in \mathbb{N}} g_n \in A$, para ver esto basta usar el argumento anterior y el Teorema de la convergencia monótona

Sea $\alpha = \sup_{g \in A} (\int_X g d\mu)$ y $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión en A tal que $\int_X f_n d\mu \rightarrow \alpha$

Definamos $\bar{f} = \sup_{n \in \mathbb{N}} f_n$ luego $\bar{f} \in A$ y $\int_X \bar{f} d\mu = \alpha \leq \varphi(X)$ luego \bar{f} es integrable. Por lo tanto existe una función f finita tal que $\bar{f} = f$ μ -casi todas partes.

Veamos que $\varphi(E) = \int_E f d\mu \quad \forall E \in M$; esto es $\varphi - \int f d\mu \equiv 0$. Supongamos que no es así.

Como $\varphi - \int f d\mu \ll \mu$ por lema anterior existen $\varepsilon > 0$ y $\tilde{A} \in A$ tales que $\mu(\tilde{A}) > 0$ y \tilde{A} es positiva con respecto a

$$\varphi - \int f d\mu - \varepsilon \mu$$

Así, dado $C \in M$

$$\varphi(C \cap \tilde{A}) \geq \int_{C \cap \tilde{A}} f d\mu + \varepsilon \mu(C \cap \tilde{A})$$

y

$$\varphi(C - \tilde{A}) \geq \int_{C - \tilde{A}} f d\mu$$

Sumando tenemos

$$\varphi(C) \geq \int_C f d\mu + \varepsilon \mu(C \cap \tilde{A}) \quad (7.6)$$

$$\geq \int_C (f + \varepsilon X_{\tilde{A}}) d\mu. \quad (7.7)$$

Luego

$$\varphi(X) \geq \int_X (f + \varepsilon X_{\tilde{A}}) d\mu = \int_X f + \varepsilon \int_{\tilde{A}} d\mu > \alpha. \text{ Absurdo.}$$

Si suponemos ahora que φ, μ son σ -finitas. entonces existe $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ familia disyunta tal que $\mu(A_n) < \infty$, $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = X$, $\varphi(A_n) < \infty$

Por el resultado ya probado $\forall n \in \mathbb{N}$, $\exists f_n : X \rightarrow [0, \infty)$ medible, tal que $\int_{E \cap A_n} f_n d\mu = \varphi(A_n \cap E)$.

Si tomamos

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} f_n X_{A_n}$$

obtenemos lo deseado.

Supongamos que existe g tal que para todo $E \in M$ $\int_E g d\mu = \varphi(E)$ luego $\int_E (f - g) d\mu = 0$, $\forall E \in M$, así $f = g$ en μ -casi todas partes

Corolario 7.2.5. *El resultado anterior también se tiene en el caso en que φ es una carga*

Definición 7.2.6. Dos medidas μ, φ sobre una σ -álgebra son singulares si existen $A, B \in M$, $X = A \cup B$ y $\emptyset = A \cap B$ tales que $\mu(A) = 0 = \varphi(B)$ lo que se denotará por $\varphi \perp \mu$.

Una carga λ en M se dice singular con μ si $|\lambda| \perp \mu$

Teorema 7.2.7. *Descomposición de Lebesgue Sean μ, φ medidas σ -finitas sobre M luego existen φ_1, φ_2 medidas tales que*

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 \quad \varphi_1 \ll \mu, \quad \varphi_2 \perp \mu$$

Las medidas φ_1, φ_2 con ésta propiedad son únicas

Demostración. Definamos $\lambda = \mu + \varphi$, ésta resulta σ -finita y además

$$\mu \ll \lambda \text{ y } \varphi \ll \lambda$$

por teorema de Radon-Nicodym existef finita y no negativa tal que

$$\mu(E) = \int_E f d\lambda, \quad \forall E \in M$$

Sean $A = \{x \in X : f(x) = 0\}$, $B = \{x \in X : f(x) > 0\}$.

Definamos $\varphi_1(E) = \varphi(E \cap A)$, $\varphi_2(E) = \varphi(E \cap B)$, para cada $E \in M$. Dado que $\mu(A) = 0$ se sigue que $\varphi_1 \perp \mu$.

De otro lado si $\mu(E) = 0$ entonces $f = 0$ en λ -casi todas partes luego $\lambda(E \cap B) = 0$, esto es $\varphi_2(E) = 0$. Para mostrar la unicidad basta observar que si α es una medida tal que $\alpha \ll \mu$ y $\alpha \perp \mu$ entonces $\alpha = 0$

7.3. Teorema de representación de Riesz

Definición 7.3.1. Dada $T : L^p \rightarrow \mathbb{C}$ operador lineal, decimos que T es acotado si existe $k > 0$ tal que $|T(f)| \leq k \|f\|_p \quad \forall f \in L^p$. Si T es acotado definimos $\|T\| = \sup \left\{ \frac{|T(f)|}{\|f\|_p} : f \in L^p, f \neq 0 \right\}$

Observación 7.3.2. Si T es acotado entonces $\|T\| = \sup\{|T(f)| : \|f\|_p = 1\}$

Para mayores detalles sobre operadores lineales acotados ver.

Ejemplo 7.3.3. Sean $1 < p < \infty$ y (X, M, μ) un espacio de medida Dada $f \in L^p$ definimos

$$T_f : L^q \rightarrow \mathbb{C} \tag{7.8}$$

$$g \mapsto \int_X fg d\mu \tag{7.9}$$

donde $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

Ahora

$$|T_f(g)| = \left| \int fg d\mu \right| < \|f\|_p \|g\|_p$$

así T_f es acotado y

$$\|T_f\| \leq \|f\|_p$$

Consideremos

$$\tilde{h} = \begin{cases} \bar{f}|f|^{p-2} & \text{si } f(x) \neq 0 \\ 0 & \text{si } f(x) = 0, \end{cases}$$

$\tilde{h} \in L^q$ ya que

$$\left(\int_X |\tilde{h}|^q \right) = \left(\int_X |f|^p \right)^{1/q} = \|f\|_p^{p/q} = C < \infty$$

Como $f \neq 0$ hagamos $h = \frac{1}{C} \tilde{h}$ luego

$$|T_f(h)| = \frac{1}{C} \int_X |f|^p = \frac{\|f\|_p^p}{\|f\|_p^{p/q}} = \|f\|_p$$

luego, $\|T_f\| = \|f\|_p$

Ejemplo 7.3.4. Sea (X, M, μ) espacio de medida con μ σ -finita. Dado $f \in L^\infty$ definamos

$$T_f : L^1 \rightarrow \mathbb{C} : g \mapsto \int_X fg d\mu$$

Así

$$|T_f| \leq \|f\|_\infty \|g\|_1$$

Luego T_f es acotado y $\|T_f\| \leq \|f\|_\infty$

Sea $X = \bigcup_{n=1}^\infty A_n$ con $\mu(A_n) < \infty$ ($A_1 \subseteq A_2 \subseteq \dots$)

dado $\eta > 0$, $0 < \eta < \|f\|_\infty$ definamos $E_\eta = \{x : |f(x)| \geq \|f\|_\infty - \eta\}$ y

$$h = \begin{cases} \frac{\bar{f}}{|f|} \chi_{E_\eta} \chi_{A_n} & \text{si } f(x) \neq 0 \\ 0 & \text{si } f(x) = 0, \end{cases}$$

se puede ver que $h \in L^1$.

Ahora

$$|T_f(h)| = \int_{E_\eta \cap A_n} |f| d\mu \geq (\|f\|_\infty - \eta) \mu(E_\eta \cap A_n)$$

$\forall \eta > 0$, $\exists \tilde{h} \in L^1$, $\tilde{h} = \frac{h}{\mu(A_n \cap E_\eta)} \neq 0$ para n suficientemente grande

tenemos que $\|\tilde{h}\| \leq 1$.

Luego $\|T_f\| \geq |T_f(\tilde{h})| \geq \|f\|_\infty - \eta$.

Teorema 7.3.5 (Teorema de representación de Riesz). Sean (X, M, μ) espacio de medida, μ σ -finita. $T : L^p \rightarrow \mathbb{R}$ ($1 \leq p < \infty$) operador lineal acotado. Entonces $\exists! g \in L^q$ ($\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$) tal que

$$T(f) = \int_X fg d\mu, \quad \forall f \in L^p, \quad \text{con } \|T\| = \|g\|$$

Demostración. Supongamos inicialmente que $\mu(X) < \infty$ y dividamos la prueba en las siguientes etapas

- se define $\eta(E) = T(\chi_E)$, $E \in M$ y se muestra que η es una carga con $\eta \ll \mu$
- Usando el Teorema de Radon-Nicodym existe $\frac{d\mu}{d\eta} = g$ y se muestra que $g \in L^q$
- Se muestra que $T(f) = \int_X fg d\mu$, $\forall f \in L^p$

Finalmente se discute el caso en que μ es σ -finita.

Veamos que η es una carga: $\eta(\emptyset) = 0$, $\eta(X) = |T(1)| < \infty$.

dado $\{E_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ familia disyunta en M . Si $A_n = \bigcup_{k=1}^n E_k$ entonces $\{\chi_{A_n}\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge a χ_E , donde $E = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n$.

Por el Teorema de la convergencia dominada tenemos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X |\chi_{A_n} - \chi_E|^p d\mu = 0$$

también

$$|T(\chi_E - \chi_{A_n})| \leq K \|\chi_E - \chi_{A_n}\|_p$$

y por lo tanto

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |T(\chi_E - \chi_{A_n})| = 0.$$

De la linealidad de T se sigue que $\eta(E) = T(\chi_E) = \lim_{n \rightarrow \infty} T(\chi_{A_n}) = 0$.

Dado que $\chi_{A_n} = \sum_{k=1}^n \chi_{E_k}$ entonces $\eta(E) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n T(\chi_{E_k}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \eta(E_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \eta(E_k)$.

Supongamos ahora que $\mu(E) = 0$ entonces $\|\chi_E\|_p = 0$ luego

$$|T(\chi_E)| \leq K \|\chi_E\|_p = 0$$

y por lo tanto $|\eta(E)| = 0$, así $\eta \ll \mu$. Por el teorema de Radon-Nikodym existe

$g(x) = \frac{d\mu}{d\eta}$, g es una función real y

$$T(\chi_E) = \int_E g d\mu, \forall E \in M$$

por la linealidad de T vemos que para cada función simple no negativa s tenemos que

$$T(s) = \int_X s g d\mu$$

Supongamos inicialmente que $1 < p < \infty$. Tomemos $\{s_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ sucesión de fun-

ciones simples tales que $s_1 \leq s_2 \leq \dots \leq |g|^q$ y $\lim_{k \rightarrow \infty} s_k = |g|^q$. Definamos

$$A = \{x \in X : g(x) \geq 0\} \text{ y } B = \{x \in X : g(x) < 0\}.$$

Hagamos $\varphi_n(x) = (\chi_A - \chi_B)(s_n(x))^{\frac{1}{p}}$, $x \in X$. La sucesión $\{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de funciones simples medibles es tal que

$$\|\varphi_n\|_p = \left(\int_X s_n d\mu \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Además

$$g(x)\varphi_n(x) = |g(x)| (s_n(x))^{\frac{1}{p}} \text{ y } (s_n(x))^{\frac{1}{q}} \leq |g(x)|$$

Luego

$$g(x)\varphi_n(x) \geq (s_n(x))^{\frac{1}{p} + \frac{1}{q}} = s_n(x)$$

así

$$0 \leq \int_X s_n d\mu \leq \int_X \varphi_n g d\mu \leq T(\varphi_n).$$

Entonces

$$\int_X s_n d\mu \leq |T(\varphi_n)| \leq \|T\| \|\varphi_n\|_p = \|T\| \left(\int_X s_n d\mu \right)^{\frac{1}{p}}$$

esto es

$$\left(\int_X s_n d\mu \right)^{1 - \frac{1}{p}} \leq \|T\|$$

es decir

$$\int_X s_n d\mu \leq \|T\|^q$$

Por el teorema de la convergencia monotonía tenemos que

$$\int_X |g|^q d\mu \leq \|T\|^q.$$

Lo que muestra que $g \in L^q$ y $\|g\|_q \leq \|T\|$ en el caso que $(1 < p < \infty)$.

Miremos ahora el caso $p = 1$ ($q = \infty$). Desamos probar que $\|g\|_\infty \leq \|T\|$. Caso contrario la función simple $\psi = (\chi_A - \chi_B)\chi_C$ donde $C = \{x \in X : |g(x)| > \|T\|\}$ no sería nula y

$$T(\psi) = \int_C |g| d\mu > \|T\| \mu(C) = \|T\| \|\psi\|_1$$

lo que es una contradicción.

Mostremos que $T(f) = \int_X f g d\mu$, $\forall f \in L^p$.

Dada $f \in L^p$ existe $\{s_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ sucesión de funciones simples tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - s_n\|_p = 0$.

Por la continuidad de T (T es cotado) se tiene que $T(f) = \lim_{n \rightarrow \infty} T(s_n)$. Usando la desigualdad de Holder tenemos que

$$\left| \int_X f g d\mu - \int_X s_n g d\mu \right| \leq \int_X |f - s_n| g d\mu \leq \|f - s_n\|_p \|g\|_q$$

Luego

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X s_n g d\mu = \int_X f g d\mu$$

y así

$$T(f) = \lim_{n \rightarrow \infty} T(s_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X s_n g d\mu = \int_X f g d\mu$$

para ver que $\|T\| = \|g\|_q$ usamos los ejemplos anteriores. Veamos la unicidad.

Si existe otra función g_1 tal que $T(f) = \int_X f g_1 d\mu$, $\forall f \in L^p$.

Como $g - g_1 \in L^q$ entonces $T_{(g-g_1)}(f) = \int_X (g - g_1) f d\mu = 0 \forall f \in L^p$.

entonces $\|T_{(g-g_1)}\| = \|g - g_1\|_q = 0$.

Para finalizar mostremos el caso en que μ es σ -finita. Sea $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión en M tal que $X_1 \subseteq X_2 \subseteq \dots$, $\cup_{n \in \mathbb{N}} X_n = X$ y $\mu(X_n) < \infty$. Definamos $T_n(f) = T(f) \chi_{X_n}$, $\forall f \in L^p(X_n, M \cap X_n, \mu)$ donde $M \cap X_n = \{E \cap X_n : E \in M\}$ donde f es tratada, en cada caso, como una función definida en X con $f = 0$ en $X - X_n$.

Por el resultado anterior existe $g_n \in L^q(X_n, M \cap X_n, \mu)$ tal que

$$T(\chi_{X_n} f) = \int_{X_n} f g_n d\mu$$

donde g_n es tratado como una función en $L(X, M, \mu)$ con $g_n = 0$ en $X - X_n$ y $\|g_n\|_q \leq \|T\|$.

Dado que la sucesión $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es creciente y cada g_n es únicamente determinado, excepto por un conjunto de medida cero, podemos suponer que $g_{n+1}(x) = g_n(x)$ si $x \in X_n$.

Definamos

$$g(x) = g_n(x) \text{ si } x \in X_n.$$

La cual satisface las condiciones deseadas.

Corolario 7.3.6. Sean (X, M, μ) espacio de medida, $T : L^p \rightarrow \mathbb{R}$ ($1 < p < \infty$) operador lineal acotado. Entonces $\exists! g \in L^q$ ($\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$) tal que

$$T(f) = \int_X f g d\mu, \quad \forall f \in L^p, \quad \text{con } \|T\| = \|g\|$$

Demostración. Dado $T : L^p \rightarrow \mathbb{R}$ operador lineal mostraremos que existe un conjunto A con medida σ -finita tal que si $f \in L^p$ y $f = 0$ en A entonces $T(f) = 0$; esto nos permite reducir el resultado al caso anterior, al considerar los espacios de medida $(A, A \cap M, \mu)$ que son σ -finitos.

Sea $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de funciones en L^p tal que

$$T(f_n) \geq \|T\| \left(1 - \frac{1}{n}\right) \text{ con } \|f_n\|_p = 1.$$

Usando la desigualdad de Markov se ve que existe A con medida σ -finita tal que $f_n = 0$ en $X - A$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Sea E un conjunto medible, de medida finita, y disjunto con A .

$$\|f_n \pm t\chi_E\| \leq (1 + t^p \mu(E))^{\frac{1}{p}}, \quad t \geq 0$$

Ahora

$$T(f_n) + T(\pm t\chi_E) \leq |T(f_n \pm t\chi_E)|$$

Luego

$$|T(t\chi_E)| \leq \|T\| \left\{ (1 + t^p \mu(E))^{\frac{1}{p}} - \left(1 - \frac{1}{n}\right) \right\}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Haciendo $n \rightarrow \infty$ y dividiendo por t tenemos

$$|T(\chi_E)| \leq \|T\| \frac{(1 + t^p \mu(E))^{\frac{1}{p}} - 1}{t}$$

Haciendo $t \rightarrow 0^+$ (regla de L' Hospital) vemos que $T(\chi_E) = 0$. De ahí se sigue el resultado para funciones simples y por densidad para cualquier función $f \in L^p$

Observación 7.3.7. El teorema de representación de Riesz es aplicable también para un operador lineal $T : L^p \rightarrow \mathbb{C}$ para ver esto basta considerar los operadores lineales $(\operatorname{Re} T)(f) = \operatorname{Re}(T(f))$ y $(\operatorname{Im} T)(f) = \operatorname{Im}(T(f))$ y aplicar el teorema anterior

7.4. Ejercicios

1. Sean M una σ -álgebra en X . Muestre que si λ es una carga en X entonces

$$\lambda^+(E) = \sup\{\lambda(F) : F \subseteq E, F \in M\}$$

$$\lambda^-(E) = -\inf\{\lambda(F) : F \subseteq E, F \in M\}$$

2. Sea M una σ -álgebra en X . Defina $H = \{\lambda : \lambda \text{ es una carga en } X\}$ con las operaciones definidas naturalmente y $\|\lambda\| = |\lambda|(X)$. Muestre que H es un

espacio vectorial normado y completo

3. Muestre que. Un conjunto N es nulo en relación a una carga λ si y sólo si $|\lambda|(N) = 0$
4. Sean λ_1, λ_2 y μ cargas. Muestre que, si $\lambda_1 \perp \mu$ y $\lambda_2 \perp \mu$ entonces $(\lambda_1 + \lambda_2) \perp \mu$
5. Sean M una σ -álgebra en X y μ, ν, λ medidas en X . con $\nu(X), \mu(X) < \infty$, $\mu \ll \lambda$ y $\nu \ll \lambda$. Muestre que si $f = \frac{d\mu}{d\lambda}$ y $g = \frac{d\nu}{d\lambda}$ entonces $\|\mu - \nu\| = \int_X |f - g| d\lambda$
6. Sean M una σ -álgebra en X y μ, λ medidas σ -finitas. Muestre que si $\lambda \ll \mu$ y si $f = \frac{d\lambda}{d\mu}$ entonces para g función no negativa y medible en X se tiene $\int_X g d\lambda = \int_X g f d\mu$
7. Sean M una σ -álgebra en X y μ, λ, ν medidas σ -finitas. Muestre que si $\nu \ll \lambda$ y $\lambda \ll \mu$ entonces

$$\frac{d\nu}{d\mu} = \frac{d\nu}{d\lambda} \frac{d\lambda}{d\mu} \text{ en } \mu\text{-casi todas partes}$$

8. Sean M una σ -álgebra en X y $\mu, \lambda_1, \lambda_2$ medidas σ -finitas. Muestre que si $\lambda_1 \ll \mu$ y $\lambda_2 \ll \mu$ entonces $\frac{d(\lambda_1 + \lambda_2)}{d\mu} = \frac{d\lambda_1}{d\mu} + \frac{d\lambda_2}{d\mu}$ en μ -casi todas partes
9. Sean M una σ -álgebra en X y μ, ν medidas σ -finitas. Muestre que si $\mu \ll \nu$ y $\nu \ll \mu$ entonces $\frac{d\nu}{d\mu} = \frac{1}{\frac{d\mu}{d\nu}}$ en μ -casi todas partes
10. Sean M una σ -álgebra en X y μ, ν medidas. Muestre que si $\nu \ll \mu$ y $\nu \perp \mu$ entonces $\nu = 0$

