[Soluciones] Notas de Teoría de la Medida (L. Rendón)

ViucheOwO

7 de noviembre de 2024

Índice general

Capítulo 1

Definiciones preliminares

1.1. Quiz 1

Determine si cada uno de los siguientes enunciados es verdadero o falso:

1. $\mathbb{Q} \in B$ donde B es la σ - álgebra de Borel.
   Verdadero:

   Demostración. Note que para cada $r \in \mathbb{Q}, \{r\} \in B$ puesto que este es un cerrado en $\mathbb{R}$, i.e., es complemento de un abierto (véase $(-\infty, r) \cup (r, \infty)$), que está en B.
   La enumerabilidad de $\mathbb{Q}$ nos garantiza que $\bigcup_{r \in \mathbb{Q}} \{r\} = \mathbb{Q} \in B$ □

2. $\mathbb{N} \in B$ donde B es la σ - álgebra de Borel.
   Verdadero:

   Demostración. La prueba es idéntica a la del punto anterior. □

3. El conjunto $F = \{M : M \text{ es una } \sigma\text{- álgebra en } \mathbb{R}\}$ es enumerable.
   Falso:

   Demostración. Considere la aplicación $\psi : \mathbb{R} \to F$ tal que $\psi(\alpha) := M_\alpha$ donde $M_\alpha =: \{\mathbb{R}, \emptyset, (-\infty, \alpha), [\alpha, \infty)\}$. Considere $\mathcal{M} = Im\psi$, puesto que ψ es inyectiva entonces $|\mathcal{M}| \leq |F|$, por lo tanto F no puede ser contable. □

4. La función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^3$ es medible, cuando tomamos en $\mathbb{R}$ la σ - álgebra de Borel.
   Verdadero:

   Demostración. Probaremos primero por inducción que $f(x) = x^n$ es medible para cada $n \in \mathbb{N}$. Para $n = 1$ el resultado es obvio puesto que $f^{-1}(V) = V \in B$ para cada V abierto. Supongamos que el enunciado es cierto para $n \geq 1$, luego $f(x) = x^{n+1} = x^n \cdot x$ es medible por la proposición 1.1.18. ya que $f = h \circ \varphi$ donde $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $\varphi(y, z) = y \cdot z$ es contínua y $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 := (x^n, x)$ es medible ya que cada una de sus componentes lo es. Por le principio de inducción matemática concluimos que f es medible y tomando el caso $n = 3$ tenemos el resultado inicialmente pedido. □

5. La función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = |x|$ es medible, cuando tomamos en $\mathbb{R}$ la σ - álgebra de Borel.
   Verdadero

   Demostración. Note que $f(x) = |x| = (h \circ g)(x)$ es medible por la proposición 1.1.17, donde $g(x) = x^2$ es medible por el punto anterior y $h(x) = \sqrt{x}$ es contínua. $\square$

1.2. Quiz 2

Determine si cada uno de los siguientes enunciados es verdadero o falso:

1. Sean (X, M) espacio meible y $f : X \to \mathbb{R}$. si f es medible entonces $|f|$ es medible.
   Verdadero:

   Demostración. Note que $|f| = g \circ f$ donde $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con $g(x) = |x|$ es continua. La proposición 1.1.17 garantiza que $|f|$ es medible. $\square$

2. Sean (X, M) espacio meible y $f : X \to \mathbb{R}$. si $|f|$ es medible entonces f es medible.
   Falso:

   Demostración. Sea E un conjunto no medible y considere f definida como la siguiente función simple: $\chi_E - \chi_{E^c}$, donde $E^c = X - E$ Es claro que $|f| = 1$ es medible pero f no lo es. $\square$

3. Sean (X, M) un espacio medible y $f : X \to \mathbb{R}$. Si f es medible entonces $f^+ = sup\{f(x), 0\}$ y $f^- = sup\{-f(x), 0\}$ son medibles.
   Verdadero

   Demostración. Basta probarlo para los abiertos básicos (α, β) con $\alpha < \beta$.
   Si $\alpha, \beta < 0$ entonces $(f^+)^{-1}((\alpha, \beta)) = \emptyset$
   Si $\alpha, \beta > 0$ entonces $(f^+)^{-1}(\alpha, \beta) = f^{-1}((\alpha, \beta)) \in M$.
   Si $\alpha < 0, \beta > 0$ entonces $(f^+)^{-1}(\alpha, \beta) = (f^+)^{-1}[0, \beta) = f^{-1}((-\infty, 0]) \cup f^{-1}((0, \beta)) \in M$
   Note que $f^{-1}((-\infty, 0]) \in M$ ya que $f^{-1}((-\infty, 0]) = f^{-1}((0, \infty)^c) = (f^{-1}((0, \infty)))^c \in M$ pues $f^{-1}((0, \infty)) \in M$. $\square$

4. $f^+ = \frac{1}{2}(|f| + f)$, f^+ como en el numeral anterior.
   Verdadero:

   Demostración. Si $f(x) \leq 0$ entonces $\frac{1}{2}(|f| + f)(x) = \frac{1}{2}(-f + f)(x) = 0$. Ahora, si $f(x) > 0$, entonces $\frac{1}{2}(|f| + f)(x) = \frac{1}{2}(f + f)(x) = \frac{1}{2}(2f)(x) = f(x)$, lo cual coincide con nuestra definición de f^+. $\square$

5. $f^- = \frac{1}{2}(|f| - f)$, f^+ como en el numeral anterior **Verdadero:**

   Demostración. La prueba es análoga a la anterior. $\square$

1.3. Quiz 3

Determine si cada uno de los siguientes enunciados es verdadero o falso:

1. Sea (X, M) un espacio medible entonces toda función simple es medible.
   Falso:

   Demostración. En virtud de la proposición 1.4.3 basta tomar cualquier conjunto no medible E e inmediatamente χ_E es una función simple no medible. □

2. $\chi_{A\cup B} = \chi_A + \chi_B$
   Falso:

   Demostración. Tome $A, B \subset X$ no disyuntos y $x \in A \cap B$. Note que $\chi_{A\cup B}(x) = 1$, mientras que $\chi_A + \chi_B(x) = 2$. □

3. $\chi_{A-B} = \chi_A(1 - \chi_B)$
   Verdadero:

   Demostración. Si $x \in A - B$, entonces $\chi_A(x) = 1, \chi_B(x) = 0$, luego $\chi_A(1 - \chi_B)(x) = 1(1 - 0) = 1$. Ahora si $x \notin A - B$ entonces $\chi_A(x) = 0$ o $\chi_B(x) = 1$, en ambos casos $\chi_A(1 - \chi_B)(x) = 0$. □

4. $\chi_{A\cap B} = \chi_A\chi_B$
   Verdadero

   Demostración. Si $x \in A \cap B$, entonces $\chi_A(x) = 1, \chi_B(x) = 1$ y por ende $\chi_A\chi_B(x) = 1$. Ahora, si $x \notin A\cap B$, entonces $\chi_A(x) = 0$, o $\chi_B(x) = 0$ y en ambos casos $\chi_A\chi_B(x) = 0$. □

5. Sean (X, M) espacio medible y $f \to [-\infty, \infty]$ una función medible entonces el conjunto $\{x \in X : f(x) = \infty\}$ es medible.
   Verdadero:

   Demostración. Note que

$$
\begin{aligned}
\{x \in X : f(x) = \infty\} &= f^{-1}\{\infty\} \\
&= f^{-1}\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} [n, \infty]\right) \\
&= \bigcap_{n\in\mathbb{N}} f^{-1}([n, \infty]) \\
&= \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \left(f^{-1}([-\infty, n)^c)\right) \\
&= \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \left(f^{-1}([-\infty, n))\right)^c \\
&= \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} f^{-1}([-\infty, n))\right)^c
\end{aligned}
$$

   Donde $f^{-1}([-\infty, n)) \in M$ para cada $n \in \mathbb{N}$, luego la unión contable de estos conjuntos también está en M y por lo tanto su complemento lo está. Asi, $f^{-1}\{\infty\} \in M$. □

1.4. Ejercicios

1. Sean $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de conjuntos en X, muestre que

   - $\chi_{\cup_{i=1}^n A_i} = 1 - \prod_{i=1}^n (1-\chi_{A_i})$

     Demostración. Si $x \in \cup_{i=1}^n A_i$, entonces $\chi_{A_i} = 1$ para algún $1 \leq i \leq n$, de modo que el factor $(1-\chi_{A_i}) = 0$ y por lo tanto todo el producto $\prod_{i=1}^n (1-\chi_{A_i}) = 0$ y así $1 - \prod_{i=1}^n (1-\chi_{A_i}) = 1 - 0 = 1$.
     Por otro lado, si $x \notin \cup_{i=1}^n A_i$ es porque $x \notin A_i$ para todo $1 \leq i \leq n$, esto es, $\chi_{A_i} = 0$, y $\prod_{i=1}^n (1-\chi_{A_i} = 1 - \prod_1^n (1) = 0$. □

   - $\chi_{\cap_{i=1}^n A_i} = \prod_{i=1}^n \chi_{A_i}$.

     Demostración. Si $x \in \cap_{i=1}^n A_i$ entonces $\chi_{A_i}(x) = 1$ para todo $1 \leq i \leq n$, de modo que $\prod_1^n \chi_{A_i}(x) = \prod_1^n 1 = 1$.
     Si $x \notin \cap_{i=1}^n A_i$ entonces el factor $\chi_{A_i}(x) = 0$ para algún i, luego $\prod_1^n = \chi_{A_i}(x) = 0$. □

   - $\chi_{\text{lím sup} A_n} = \text{lím sup}\, \chi_{A_n}$.

     Demostración.

$$
\begin{aligned}
\text{lím sup}\, \chi_{A_n}(x) &= \text{lím sup}\, \{\chi_{A_n}(x)\} \\
&= \text{ínf}\, \{\sup\{\chi_{A_k}(x)\} : k \geq n\} \\
&= \begin{cases} 1 \text{ si } x \in \text{lím sup}\, A_n \\ 0 \text{ si } x \notin \text{lím sup}\, A_n \end{cases} \\
&= \chi_{\text{lím sup}\, A_n}
\end{aligned}
$$

□

   - $\chi_{\text{lím inf} A_n} = \text{lím inf}\, \chi_{A_n}$.

     Demostración. Indéntica al punto anterior. □

Sean (X, M) un espacio medible y $\{f_n : X \to [-\infty, \infty]\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones medibles. Muestre que:

   - $\{x \in X : \sup f_n(x) \leq a, n \in \mathbb{N}\} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \{x \in X : f_n(x) \leq a\}$

     Demostración. Sea $x \in \{x \in X : \sup f_n(x) \leq a, n \in \mathbb{N}\}$. Note que $f_n(x) \leq \sup\{f_n(x)\} \leq a$ para todo $n \in \mathbb{N}$, luego $x \in f^{-1}([-\infty, a])$ para todo n, esto es $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \{x \in X : f_n(x) \leq a\}$.
     Reciprocamente, si $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \{x \in X : f_n(x) \leq a\}$ entonces $f_n(x) \leq a$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Esto significa que a es una cota superior del conjunto $\{f_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$, por lo que $\sup\{f_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}} = \sup f_n(x) \leq a$, y en consecuencia $x \in \sup f_n^{-1}([-\infty, a]), n \in \mathbb{N} = \{x \in X : \sup\{f_n(x)\} \leq a, n \in \mathbb{N}\}$. □

   -

Capítulo 2

La medida de Lebesgue

2.1. Ejercicios

Capítulo 3

La integral

3.1. Ejercicios

Capítulo 4

Medida producto

4.1. Ejercicios

Capítulo 5

Espacios Lp

5.1. Ejercicios

Capítulo 6

Algunos tipos de convergencia

6.1. Ejercicios

Capítulo 7

Cargas

7.1. Ejercicios