[Soluciones] Notas de Teoría de la Medida (L. Rendón)

ViucheOwO

20 de noviembre de 2024

Índice general

Capítulo 1

Definiciones preliminares

1.1. Quiz 1

Determine si cada uno de los siguientes enunciados es verdadero o falso:

1. $\mathbb{Q} \in B$ donde B es la σ - álgebra de Borel.
   Verdadero:

   Demostración. Note que para cada $r \in \mathbb{Q}, \{r\} \in B$ puesto que este es un cerrado en $\mathbb{R}$, i.e., es complemento de un abierto (véase $(-\infty, r) \cup (r, \infty)$), que está en B.
   La enumerabilidad de $\mathbb{Q}$ nos garantiza que $\bigcup\limits_{r \in \mathbb{Q}} \{r\} = \mathbb{Q} \in B$ □

2. $\mathbb{N} \in B$ donde B es la σ - álgebra de Borel.
   Verdadero:

   Demostración. La prueba es idéntica a la del punto anterior. □

3. El conjunto $F = \{M : M \text{ es una } \sigma\text{- álgebra en } \mathbb{R}\}$ es enumerable.
   Falso:

   Demostración. Considere la aplicación $\psi : \mathbb{R} \to F$ tal que $\psi(\alpha) := M_\alpha$ donde $M_\alpha =: \{\mathbb{R}, \emptyset, (-\infty, \alpha), [\alpha, \infty)\}$. Considere $\mathcal{M} = Im\psi$, puesto que ψ es inyectiva entonces $|\mathcal{M}| \leq |F|$, por lo tanto F no puede ser contable. □

4. La función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^3$ es medible, cuando tomamos en $\mathbb{R}$ la σ - álgebra de Borel.
   Verdadero:

   Demostración. Probaremos primero por inducción que $f(x) = x^n$ es medible para cada $n \in \mathbb{N}$. Para $n = 1$ el resultado es obvio puesto que $f^{-1}(V) = V \in B$ para cada V abierto. Supongamos que el enunciado es cierto para $n \geq 1$, luego $f(x) = x^{n+1} = x^n \cdot x$ es medible por la proposición 1.1.18. ya que $f = h \circ \varphi$ donde $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $\varphi(y, z) = y \cdot z$ es contínua y $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 := (x^n, x)$ es medible ya que cada una de sus componentes lo es. Por le principio de inducción matemática concluimos que f es medible y tomando el caso $n = 3$ tenemos el resultado inicialmente pedido. □

5. La función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = |x|$ es medible, cuando tomamos en $\mathbb{R}$ la σ - álgebra de Borel.
   Verdadero

   Demostración. Note que $f(x) = |x| = (h \circ g)(x)$ es medible por la proposición 1.1.17, donde $g(x) = x^2$ es medible por el punto anterior y $h(x) = \sqrt{x}$ es contínua. □

1.2. Quiz 2

Determine si cada uno de los siguientes enunciados es verdadero o falso:

1. Sean (X, M) espacio meible y $f : X \to \mathbb{R}$. si f es medible entonces $|f|$ es medible.
   Verdadero:

   Demostración. Note que $|f| = g \circ f$ donde $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con $g(x) = |x|$ es continua. La proposición 1.1.17 garantiza que $|f|$ es medible. □

2. Sean (X, M) espacio meible y $f : X \to \mathbb{R}$. si $|f|$ es medible entonces f es medible.
   Falso:

   Demostración. Sea E un conjunto no medible y considere f definida como la siguiente función simple: $\chi_E - \chi_{E^c}$, donde $E^c = X - E$ Es claro que $|f| = 1$ es medible pero f no lo es. □

3. Sean (X, M) un espacio medible y $f : X \to \mathbb{R}$. Si f es medible entonces $f^+ = sup\{f(x), 0\}$ y $f^- = sup\{-f(x), 0\}$ son medibles.
   Verdadero

   Demostración. Basta probarlo para los abiertos básicos (α, β) con $\alpha < \beta$.
   Si $\alpha, \beta < 0$ entonces $(f^+)^{-1}((\alpha, \beta)) = \emptyset$
   Si $\alpha, \beta > 0$ entonces $(f^+)^{-1}(\alpha, \beta) = f^{-1}((\alpha, \beta)) \in M$.
   Si $\alpha < 0, \beta > 0$ entonces $(f^+)^{-1}(\alpha, \beta) = (f^+)^{-1}[0, \beta) = f^{-1}((-\infty, 0]) \cup f^{-1}((0, \beta)) \in M$
   Note que $f^{-1}((-\infty, 0]) \in M$ ya que $f^{-1}((-\infty, 0]) = f^{-1}((0, \infty)^c) = (f^{-1}((0, \infty)))^c \in M$ pues $f^{-1}((0, \infty)) \in M$. □

4. $f^+ = \frac{1}{2}(|f| + f)$, f^+ como en el numeral anterior.
   Verdadero:

   Demostración. Si $f(x) \leq 0$ entonces $\frac{1}{2}(|f| + f)(x) = \frac{1}{2}(-f + f)(x) = 0$. Ahora, si $f(x) > 0$, entonces $\frac{1}{2}(|f| + f)(x) = \frac{1}{2}(f + f)(x) = \frac{1}{2}(2f)(x) = f(x)$, lo cual coincide con nuestra definición de f^+. □

5. $f^- = \frac{1}{2}(|f| - f)$, f^+ como en el numeral anterior
   Verdadero:

   Demostración. La prueba es análoga a la anterior. □

1.3. Quiz 3

Determine si cada uno de los siguientes enunciados es verdadero o falso:

1. Sea (X, M) un espacio medible entonces toda función simple es medible.
   Falso:

   Demostración. En virtud de la proposición 1.4.3 basta tomar cualquier conjunto no medible E e inmediatamente χ_E es una función simple no medible. $\square$

2. $\chi_{A\cup B} = \chi_A + \chi_B$
   Falso:

   Demostración. Tome $A, B \subset X$ no disyuntos y $x \in A \cap B$. Note que $\chi_{A\cup B}(x) = 1$, mientras que $\chi_A + \chi_B(x) = 2$. $\square$

3. $\chi_{A-B} = \chi_A(1 - \chi_B)$
   Verdadero:

   Demostración. Si $x \in A - B$, entonces $\chi_A(x) = 1, \chi_B(x) = 0$, luego $\chi_A(1 - \chi_B)(x) = 1(1 - 0) = 1$. Ahora si $x \notin A - B$ entonces $\chi_A(x) = 0$ o $\chi_B(x) = 1$, en ambos casos $\chi_A(1 - \chi_B)(x) = 0$. $\square$

4. $\chi_{A\cap B} = \chi_A\chi_B$
   Verdadero

   Demostración. Si $x \in A \cap B$, entonces $\chi_A(x) = 1, \chi_B(x) = 1$ y por ende $\chi_A\chi_B(x) = 1$. Ahora, si $x \notin A\cap B$, entonces $\chi_A(x) = 0$, o $\chi_B(x) = 0$ y en ambos casos $\chi_A\chi_B(x) = 0$. $\square$

5. Sean (X, M) espacio medible y $f \to [-\infty, \infty]$ una función medible entonces el conjunto $\{x \in X : f(x) = \infty\}$ es medible.
   Verdadero:

   Demostración. Note que

$$
\begin{aligned}
\{x \in X : f(x) = \infty\} &= f^{-1}\{\infty\} \\
&= f^{-1}\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} [n, \infty]\right) \\
&= \bigcap_{n\in\mathbb{N}} f^{-1}([n, \infty]) \\
&= \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \left(f^{-1}([-\infty, n)^c)\right) \\
&= \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \left(f^{-1}([-\infty, n))\right)^c \\
&= \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} f^{-1}([-\infty, n))\right)^c
\end{aligned}
$$

   Donde $f^{-1}([-\infty, n)) \in M$ para cada $n \in \mathbb{N}$, luego la unión contable de estos conjuntos también está en M y por lo tanto su complemento lo está. Asi, $f^{-1}\{\infty\} \in M$. $\square$

1.4. Ejercicios

1. Sean $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de conjuntos en X, muestre que

   - $\chi_{\cup_{i=1}^n A_i} = 1 - \prod_{i=1}^n (1 - \chi_{A_i})$

     Demostración. Si $x \in \cup_{i=1}^n A_i$, entonces $\chi_{A_i} = 1$ para algún $1 \leq i \leq n$, de modo que el factor $(1 - \chi_{A_i}) = 0$ y por lo tanto todo el producto $\prod_{i=1}^n (1 - \chi_{A_i}) = 0$ y así $1 - \prod_{i=1}^n (1 - \chi_{A_i}) = 1 - 0 = 1$.
     Por otro lado, si $x \notin \cup_{i=1}^n A_i$ es porque $x \notin A_i$ para todo $1 \leq i \leq n$, esto es, $\chi_{A_i} = 0$, y $\prod_{i=1}^n (1 - \chi_{A_i} = 1 - \prod_1^n (1) = 0$. □

   - $\chi_{\cap_{i=1}^n A_i} = \prod_{i=1}^n \chi_{A_i}$.

     Demostración. Si $x \in \cap_{i=1}^n A_i$ entonces $\chi_{A_i}(x) = 1$ para todo $1 \leq i \leq n$, de modo que $\prod_1^n \chi_{A_i}(x) = \prod_1^n 1 = 1$.
     Si $x \notin \cap_{i=1}^n A_i$ entonces el factor $\chi_{A_i}(x) = 0$ para algún i, luego $\prod_1^n = \chi_{A_i}(x) = 0$. □

   - $\chi_{\text{lím sup} A_n} = \text{lím sup}\, \chi_{A_n}$.

     Demostración.

$$\begin{aligned}
\text{lím sup}\, \chi_{A_n}(x) &= \text{lím sup} \{\chi_{A_n}(x)\} \\
&= \text{ínf} \{\sup \{\chi_{A_k}(x)\} : k \geq n\} \\
&= \begin{cases} 1 \text{ si } x \in \text{lím sup} A_n \\ 0 \text{ si } x \notin \text{lím sup} A_n \end{cases} \\
&= \chi_{\text{lím sup} A_n}
\end{aligned}$$

     □

   - $\chi_{\text{lím inf} A_n} = \text{lím inf}\, \chi_{A_n}$.

     Demostración. Indéntica al punto anterior. □

2. Sean (X, M) un espacio medible y $\{f_n : X \to [-\infty, \infty]\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones medibles. Muestre que:

   - $\{x \in X : \sup f_n(x) \leq a, n \in \mathbb{N}\} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \{x \in X : f_n(x) \leq a\}$

     Demostración. Sea $x \in \{x \in X : \sup f_n(x) \leq a, n \in \mathbb{N}\}$. Note que $f_n(x) \leq \sup \{f_n(x)\} \leq a$ para todo $n \in \mathbb{N}$, luego $x \in f_n^{-1}([-\infty, a])$ para todo n, esto es $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \{x \in X : f_n(x) \leq a\}$.
     Reciprocamente, si $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \{x \in X : f_n(x) \leq a\}$ entonces $f_n(x) \leq a$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Esto significa que a es una cota superior del conjunto $\{f_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$, por lo que $\sup \{f_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}} = \sup f_n(x) \leq a$, y en consecuencia $x \in \sup f_n^{-1}([-\infty, a]), n \in \mathbb{N} = \{x \in X : \sup \{f_n(x)\} \leq a, n \in \mathbb{N}\}$. □

- $\{x \in X : \text{ínf} f_n(x) < a, n \in \mathbb{N}\} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{x \in X : f_n(x) < a\}$.

  Demostración. Sea x tal que $\text{ínf} f_n(x) < a$, entonces para algún $k \in \mathbb{N}$ se cumple que $f_k(x) < a$ (de lo contrario tendríamos que a es una cota inferior del conjunto $\{f_n(x)\}$ mayor que el ínf), luego $x \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{x \in X : f_n(x) < a\}$.
  Ahora, si $f_k(x) < a$ para algún k, es claro que $\text{ínf} f_n(x) \leq f_k(x) < a$, esto es $x \in \text{ínf} f_n^{-1}([-\infty, a))$. □

3. Sea $(A_n)_n \in \mathbb{N}$ un sucesión de conjuntos en X.
   Tomando $E_0 = \emptyset$ y $E_n = \cup_{k=1^n} A_k, F_n = A_n - E_{n-1}$ para cada $n \in \mathbb{N}$.
   Muestre que

   - $E_{n-1} \subseteq E_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$

     Demostración. Si $x \in E_{n-1}$, entonces $x \in A_k$ para algún k entre 1 y $n-1$, luego $x \in A_k \cup A_n$ de modo que $x \in E_n$.
     □

   - $F_i \cap F_j = \emptyset$ si $i \neq j$.

     Demostración. Supongamos que $i < j$. Si $x \in F_i$ y $x \in F_j$ entonces $x \in A_j$ y $x \notin A_k$ para todo $k < j$, lo que contradice $x \in A_i$. □

   - $\cup_{n=1}^{\infty} E_n = \cup_{n=1}^{\infty} F_n = \cup_{n=1}^{\infty} A_n$

     Demostración. Es evidente que $\cup_{n=1}^{\infty} E_n = \cup_{n=1}^{\infty} A_n$ por como están definidos los E_n. Otro hecho que salta a la vista es que $\cup_{n=1}^{\infty} F_n \subset \cup_{n=1}^{\infty} A_n$ por la definición de los F_n. Lo único que queda por notar es que $\cup_{k=1}^{n} F_k = \cup_{k=1}^{n} A_k$ para cada $n \geq 1$, donde nuevamente tenemos una inclusión gratis. Ahora, considere el mayor $k \leq n$ tal que $x \in A_k$. Como $A_k = (A_k \cap E_{k-1}) \cup (A_k - E_{k-1}) = (A_k \cap E_{k-1}) \cup F_n$. Si $x \in F_n$ hemos terminado. Si $x \in A_k \cap E_{k-1} = \cup_{j=1}^{k-1}(A_k \cap A_j)$, basta con tomar el mínimo j tal que $x \in A_k \cap A_j$. Por lo tanto $x \in A_j - E_{j-1} = F_j$. (Si x perteneciera a E_{j-1}, pertenecería a algún A_i con $i < j$). Luego $x \in \cup_{k=1^n} F_k$ y concluimos $\cup_{k=1}^{\infty} F_k = \cup_{k=1}^{\infty} A_k$
     □

4. Sea $(A_n)_n \in \mathbb{N}$ un sucesión de conjuntos en X.

   Defina:
   $\text{lím sup} A_n = \cap_{m=1}^{\infty}(\cup_{n=m}^{\infty} A_n)$.
   $\text{lím inf} A_n = \cup_{m=1}^{\infty}(\cap_{n=m}^{\infty} A_n)$.

   Muestre que:
   $\emptyset \subseteq \text{lím inf} A_n \subseteq \text{lím sup} A_n \subseteq X$.

   Demostración. La única inclusión no trivial es $\text{lím inf} A_n \subseteq \text{lím sup} A_n$.

   Primero note que $\{\cup_{n=k}^{\infty} A_n\}_{k\in\mathbb{N}}$ es una secuencia decreciente.

   Sea $x \in \text{lím inf} A_n$. Existe $p \in \mathbb{N}$ tal que para todo entero $k \geq p, x \in A_k$ y por ende $x \in \cup_{n=k}^{\infty} A_n$, por lo dicho en la línea de arriba, $\cup_{n=k}^{\infty} A_n \supseteq \cup_{n=p}^{\infty} A_n$, para todo $1 \leq k \leq p$, luego $x \in \cup_{n=1}^{\infty} A_n$ para todo entero $n \geq 1$, ergo, $x \in \cap_{m=1}^{\infty}(\cup_{n=m}^{\infty} A_n) = \text{lím sup} A_n$. □

5. Sea $(A_n)_n \in \mathbb{N}$ un sucesión de conjuntos en X tal que $A_i \subseteq A_{i+1}$ para todo $i \in \mathbb{N}$. Muestre que:

   $\limsup A_n = \cup_{n=1}^{\infty} A_n = \liminf A_n$.

   Demostración. Note que $\cup_{k=m}^{n} A_k = \cup_{k=1}^{n} A_k = A_n$ y $\cap_{k=m}^{n} A_k = A_m$, $m \in \mathbb{N}, m \leq n$ cualquiera sea $n \in \mathbb{N}$. Luego $\cap_{k=m}^{\infty} A_k = A_m$.

   Ahora, $\liminf A_n = \cup_{m=1}^{\infty}(\cap_{n=m}^{\infty} A_n) = \cup_{m=1}^{\infty} A_m$.

   Por su parte, $\limsup A_n = \cap_{m=1}^{\infty}(\cup_{n=m}^{\infty} A_n) = \cap_{m=1}^{\infty}(\cup_{n=1}^{\infty} A_n) = \cup_{n=1}^{\infty} A_n$.

   □

6. Sea $(A_n)_n \in \mathbb{N}$ un sucesión de conjuntos en X tal que $A_i \supseteq A_{i+1}$ para todo $i \in \mathbb{N}$. Muestre que:

   $\limsup A_n = \cap_{n=1}^{\infty} A_n = \liminf A_n$.

   Demostración. La prueba es análoga a la del punto anterior y se deja como ejercicio al lector. □

7. Sean (X, M, μ) un espacio de medida y $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de conjuntos medibles, Muestre que:

   - $\mu(\liminf A_n) \leq \liminf \mu(A_n)$

     Demostración. Primeramente recordemos que para cada $k \in \mathbb{N}, \mathcal{A}_k = \cap_{n=k}^{\infty} A_n \in M$ puesto que cada $A_n \in M$. Asimismo $\cup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{A}_n \in M$

     Ahora note que la secuencia $\{\mathcal{A}_k\} = \{\cup_{m=k}^{\infty} A_m\}$ es creciente, por lo que

     $$\begin{aligned}
     \mu(\liminf A_n) &= \mu(\cup_{n=1}^{\infty}(\cap_{m=n} A_m)) \\
     &= \mu(\cup_{n=1} \mathcal{A}_n) \\
     &= \lim_{n\to\infty} \mu(\mathcal{A}_n) \\
     &= \lim_{n\to\infty} \mu(\cap_{m=n} A_m) \\
     &= \liminf \mu(\cap_{m=n}^{\infty} A_m) \\
     &\leq \liminf \mu(A_n)
     \end{aligned}$$

     . □

   - $\limsup \mu(A_n) \leq \mu(\limsup A_n)$, si $\mu(\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n) < \infty$.

     Demostración. Primeramente recordemos que para cada $k \in \mathbb{N}, \mathcal{A}_k = \cup_{n=k}^{\infty} A_n \in M$ puesto que cada $A_n \in M$. Asimismo $\cap_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{A}_n \in M$

Ahora note que la secuencia $\{\mathcal{A}_k\} = \{\cup_{m=k}^{\infty} A_m\}$ es decreciente y $\mathcal{A}_1 < \infty$, de modo que

$$\begin{aligned}
\mu(\limsup A_n) &= \mu(\cap_{n=1}^{\infty}(\cup_{m=k}^{\infty} A_m)) \\
&= \mu(\cap_{n=1}^{\infty} \mathcal{A}_n) \\
&= \lim_{n\to\infty} \mu(\mathcal{A}_n) \\
&= \lim_{n\to\infty} \mu(\cup_{k=n}^{\infty} A_k) \\
&= \limsup \mu(\cup_{k=n}^{\infty} A_k) \\
&\geq \limsup \mu(A_n)
\end{aligned}$$

□

8. Sean (X, M) un espacio medible y $f : X \to [-\infty, \infty]$ una función. Muestre que:

f es medible si y solo si $\{x \in X : f(x) = \infty\}, \{x \in X : f(x) = -\infty\} \in M$ y

$$f^{\sim} = \begin{cases} f & \text{si } |f| < \infty, \\ 0 & \text{si } |f| = \infty. \end{cases}$$

es medible.

Demostración. $\Rightarrow$) Sea f medible, en virtud del punto 4 del 1.1 las preimágenes de $\{\pm\infty\}$ son medibles. Ahora, veamos que para cada $\alpha \geq 0, (f^{\sim})^{-1}((\alpha, \infty]) = (f^{\sim})^{-1}((\alpha, \infty)) \cup (f^{\sim})^{-1}(\{\infty\})$, donde $(f^{\sim})^{-1}(\{\infty\}) = \emptyset \in M$ ya que si $x \in (f^{\sim})^{-1}(\{\infty\})$, entonces $f(x) = \infty$, pero esto implicaría $|f|(x) = \infty$, y por definición de $f^{\sim}$, tendríamos $f^{\sim} = 0$. Es claro que $(f^{\sim})^{-1}((\alpha, \infty)) = f^{-1}((\alpha, \infty)) \in M$ porque f es medible.

Si $\alpha < 0$ entonces $(f^{\sim})^{-1}((\alpha, \infty]) = (f^{\sim})^{-1}((\alpha, 0)) \cup (f^{\sim})^{-1}(\{0\}) \cup (f^{\sim})^{-1}((0, \infty])$, donde $(f^{\sim})^{-1}(\{0\}\}) = f^{-1}(\{-\infty, \infty\}) \in M, (f^{\sim})^{-1}((0, \infty]) \in M$ y $(f^{\sim})^{-1}((\alpha, 0) = f^{-1}((\alpha, 0)) \in M$.

Concluimos que $f^{\sim}$ es medible.

$\Leftarrow$) Suponga $f^{\sim}$ es medible y que $\{x \in X : f(x) = \infty\}, \{x \in X : f(x) = -\infty\} \in M$. Veamos que $f^{-1}((\alpha, \infty]) \in M$ con $\alpha \geq 0$. Como $(f^{\sim})^{-1}((\alpha, \infty]) \in M$ y $(f^{\sim})^{-1}((\alpha, \infty]) = (f^{\sim})^{-1}((\alpha, \infty)) \cup (f^{\sim})^{-1}(\{\infty\})$ y $(f^{\sim})^{-1}(\{\infty\}) = \emptyset \in M$ entonces $(f^{\sim})^{-1}((\alpha, \infty]) = f^{-1}((\alpha, \infty)) \in M$.

Si $\alpha < 0$ entonces $(f^{\sim})^{-1}((\alpha, \infty]) = (f^{\sim})^{-1}((\alpha, 0)) \cup (f^{\sim})^{-1}(\{0\}) \cup (f^{\sim})^{-1}((0, \infty])$, donde $(f^{\sim})^{-1}(\{0\}\}) = f^{-1}(\{-\infty, \infty\}) \in M, f^{-1}((0, \infty]) = (f^{\sim})^{-1}((0, \infty]) \in M$, y, $f^{-1}((\alpha, 0) = (f^{\sim})^{-1}((\alpha, 0)) \in M$.

Concluimos que f es medible. □

Capítulo 2

La medida de Lebesgue

2.1. Ejercicios

1. Sea $A \subseteq \mathbb{R}^n, \mu^*(A) < \infty$.
   Muestre que para cada $\epsilon > 0$, existe $A_\epsilon \subseteq \mathbb{R}$ acotado tal que $A_\epsilon \subseteq A$ y $\mu^*(A - A_\epsilon) < \epsilon$.

   Demostración. Dado $\epsilon > 0$, tome $\{I_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ cubrimiento por celdas de A tal que $\sum_{k=1}^{\infty} \mu(I_k) = \mu^*(A)+\epsilon$. Ahora note que $\{I_k \cap A\}$ cubre a A, luego $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \mu^*(I_k \cap A) < \infty$. Ergo, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\displaystyle\mu^*(A) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu^*(I_k \cap A) = \sum_{k=1}^{N} \mu^*(I_k \cap A) + \sum_{k=N+1}^{\infty} \mu^*(I_k \cap A) < \sum_{k=1}^{N} \mu^*(I_k \cap A) + \epsilon.$, de modo que tomando $A_\epsilon = \cup_{k=1}^{N}(I_k \cap A)$ obtenemos $\mu^*(A - A_\epsilon) < \epsilon$. □

2. Muestre que el conjunto $\{E \subseteq \mathbb{R}^n : \mu^*(E) = 0 o \mu^*(\mathbb{R} - E) = 0\}$ es una $\sigma-$ álgebra.

   Demostración. Llamemos M al conjunto. Es claro que $\emptyset, \mathbb{R}^n \in M$, también es evidente que si $A \in M$ entonces $\mathbb{R}^n - A \in M$. Para ver que si $\{E_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset M$ es una familia de subconjuntos de M entonces $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} E_k \in M$ basta analizar los casos por separado cuando $\mu^*(E_k) = 0$ para tdo k y cuando $\mu^*(\mathbb{R} - E_k) = 0$ para cada k.

   - Si $\mu^*(E_k) = 0$ para tdo k entonces $\mu^*(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} E_k) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu^*(E_k) = \sum_{k=1}^{\infty} 0 = 0$.
   - $\mu^*(\mathbb{R} - E_k) = 0$ para cada k entonces $\mu^*(\mathbb{R}^n - \bigcup_{k\in\mathbb{N}} E_k) = \mu^*(\bigcap_{k\in\mathbb{N}} \mathbb{R}^n - E_k) \leq \mu^*(\mathbb{R}^n - E_k) = 0$ para cualquier k.

   En ambos casos la unión es un elemento de M. Si tenemos una familia arbitraria de subconjuntos de M podemos separarla en dos uniones y proceder con cada una. □

3. Sean $M \subseteq \mathbb{R}^n, h \in \mathbb{R}^n$ y $\lambda \in \mathbb{R}$. Muestre que $M + h$ y λM son medibles y $\mu^*(M + h) = \mu^*(M)$ y $\mu^*(\lambda M) = \lambda\mu^*(M)$.

   Demostración. $M + h$ es medible: considere $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ tal que $f(x) = x - h$. La continuidad de f garantiza que $f^1(M) = M + h$ es medible.

   $\mu^*(M+h) = \mu^*(M)$: Note que $\mu*(I+h) = \mu(I+h) = (b+h)-(a+h) = b-a = \mu^*(I)$ para todo $h \in \mathbb{R}, I$ 1-celda. Luego $\mu^*(I+h) = \mu^*(I)$ para toda n-celda, de modo que si $\{I_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ es cubrimiento por n-celdas de M, entonces $\{I_k + h\}_{k\in\mathbb{N}}$ es cubrimiento por n-celdas de

$M+h$, e $\inf\{\sum_{k=1}^{\infty}\mu^*(I_k) : M \subset \bigcup_{i=1} I_k^{\infty}\} = \inf\{\sum_{k=1}^{\infty}\mu^*(I_k+h) : M+h \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} I_k+h\}$

λM es medible: Para $\lambda \neq 0$ repita la prueba anterior con $f(x) = \dfrac{x}{\lambda}$. Si $\lambda = 0$, $\lambda M = \{0\}$.

$\mu^*(\lambda M) = M\mu^*(M)$: Repita la prueba anterior teniendo en cuenta que si I es una 1-celda, entonces $\mu^*(\lambda I) = \mu(I) = (\lambda a, \lambda b) = \lambda b - \lambda a = \lambda(b-a). = \lambda\mu^*(I)$. Cabe resaltar que si $\lambda < 0$, $\mu^*(\lambda I) = \mu(I) = \mu((\lambda a, \lambda b)) = \mu((-|\lambda|b, -|\lambda|a)) = -|\lambda|a - (-|\lambda|)b = |\lambda|(-1)(a-b) = |\lambda|(b-a). = |\lambda|\mu^*(I)$.

Así, podemos ver que si I es una n-celda en $\mathbb{R}^n$, entonces $\mu^*(I) = \prod_{k=1}^{n}\mu(\lambda(a_1^j, b_k^j)) = \prod_{k=1}^{n}|\lambda|(b_k^j - a_k^j) = |\lambda|^n\mu(I)$. De modo que si $\bigcup_{k=1}^{\infty} I_k$ es un cubrimiento por n-celdas de M, entonces $\bigcup_{k=1}^{\infty}\lambda I_k$ es un cubrimiento por n-celdas de λM, e

$$\begin{aligned}
\inf\left\{\sum_{k=1}^{\infty}\mu^*(\lambda I_k) : \lambda M \subset \bigcup_{i=1}\lambda I_k^{\infty}\right\} &= \inf\left\{\sum_{k=1}^{\infty}|\lambda|^n\mu^*(I_k) : M \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} I_k\right\} \\
&= \inf\left\{|\lambda|^n\sum_{k=1}^{\infty}\mu^*(I_k) : M \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} I_k\right\} \\
&= |\lambda|^n \inf\left\{\sum_{k=1}^{\infty}\mu^*(I_k) : M \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} I_k\right\} \\
&= |\lambda|^n\mu^*(M)
\end{aligned}$$

□

4. Demostrar que si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es monótona entonces es Lebesgue medible.

   Demostración. Como f es monótona entonces podemos asumir que es creciente. Veamos que $f^{-1}([t,\infty))\,\{x \in \mathbb{R} : f(x) \geq t\}$ es o bien $\emptyset, \mathbb{R}$, o alguna cola abierta o cerrada.

   Si $u \in f^{-1}[t,\infty))$, para todo $v \geq u$, como asumimos f creciente, entonces $t \leq f(u) \leq f(v)$, por lo que $v \in f^{-1}[t,\infty))$.
   Tenemos que f es Borel medible y por tanto Lebesgue medible.

   □

5. Suponga que $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es medible y $\dfrac{\partial f}{\partial x_1}$ existe en cada punto de $\mathbb{R}^n$. Muestre que $\dfrac{\partial f}{\partial x_1}$ es medible.

   Demostración. Como $\dfrac{\partial f}{\partial x_1}(x)$ existe para cada $x \in \mathbb{R}^n$ Entonces

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_1+h,...,(x_n)) - f(x_1,...,x_n)}{h}$$

   Existe para cada $x \in \mathbb{R}^n$. Con esto en mente podemos definir la siguiente sucesión de funciones $f_n : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ como sigue.

$$f_n(x) = \frac{f\left(x_1 + \frac{1}{n},...,x_n\right)}{\frac{1}{n}}$$

   Como f es medible, para cada $n \geq 1$, tenemos que f_n lo es también y que $d\frac{\partial f}{\partial x_1} = \lim_{n\to\infty} f_n$ también es medible. □

6. No existe $\sigma-$ álgebra enumerable.

   Demostración. Vea la observación 1.1.5. $\square$

7. Sea $E \subset [0,1]$, con $\mu^*([0,1]-E)=0$. Muestre que E es denso en $[0,1]$.

   Demostración. Sea $x \in [0,1]-E$. Para todo $r>0, B_{(x,r)} \cap E \neq \emptyset$, ya que de lo contrario tendríamos $B_{(x,r)} \subseteq [0,1]-E$, luego $\mu^*(B_{(x,r)})=0$, lo cual es absurdo. Concluimos que E es denso en $[0,1]$. $\square$

8. Sea $M \subseteq \mathbb{R}^n$. Muestre que si $\mu^*(E)=0, int(E)=\emptyset$

   Demostración. Suponga que $x \in int(E)$, entonces existe $r>0$ tal que $B_{(x,r)} \subset E$, luego $0<\mu^*(B_{(x,r)}) \leq \mu^*(E)=0$, lo cual es absurdo. Concluimos que $int(E)=\emptyset$. $\square$

9. Sea $M \subseteq \mathbb{R}^n$ enumerable. Muestre que $\mu^*(E)=0$.

   Demostración. Note que $E=\bigcup_{x\in E}\{x\}$, claramente $\mu^*(\{x\})=0$ para cada x. Luego $\mu^*(E)=\sum_{x\in E}\mu^*(\{x\})=\sum_{x\in E}0=0$. $\square$

Capítulo 3

La integral

3.1. Ejercicios

Capítulo 4

Medida producto

4.1. Ejercicios

Capítulo 5

Espacios Lp

5.1. Ejercicios

Capítulo 6

Algunos tipos de convergencia

6.1. Ejercicios

Capítulo 7

Cargas

7.1. Ejercicios